

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Heber Cristina Teixeira**

**Relações de cobertura de permutações Grassmannianas**

Juiz de Fora

2019

**Heber Cristina Teixeira**

**Relações de cobertura de permutações Grassmannianas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lonardo Rabelo

Coorientador: Prof. Dr. Jordan Lambert Silva

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da  
UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Teixeira, Heber Cristina.

Relações de cobertura de permutações Grassmannianas / Heber Cristina Teixeira. – 2019.

98 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Lonardo Rabelo

Coorientador: Prof. Dr. Jordan Lambert Silva

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Grupos de Coxeter. 2. Ordem de Bruhat. 3. Permutações Grassmannianas. I. Rabelo, Lonardo, orient. II. Silva, Jordan Lambert, coorient. III. Título.

**Heber Cristina Teixeira**

**Relações de cobertura de permutações Grassmannianas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Álgebra, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

**BANCA EXAMINADORA**

---

Lonardo Rabelo - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Jordan Lambert Silva - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Laércio José dos Santos  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof(a). Dr. Viviana Jorgelina del Barco  
Universidade Estadual de Campinas

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus.

Ao Lonardo e Jordan pela orientação.

Aos professores Laércio José dos Santos e Viviana Jorgelina del Barco por terem aceito o convite para participar da banca.

Aos meus pais e familiares.

Aos professores dos departamento, por todos os ensinamentos. À Paula, secretária e “dona do mestrado” pela enorme paciência.

Ao Sebastian pela amizade e compreensão. Ao Ricardo, pelo suporte emocional dado. Aos colegas do Mestrado e de República por todas as experiências compartilhadas e por sempre terem acreditado em mim. Sem dúvidas, vocês tornaram esse trabalho muito mais prazeroso.

À Capes pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Neste trabalho descrevemos em detalhes os quocientes parabólicos maximais do tipo  $A$  e  $B$  e apresentamos a caracterização das relações de cobertura da ordem de Bruhat dos mesmos. Nossa abordagem é principalmente combinatória e baseia-se no padrão das permutações correspondentes, também chamadas permutações Grassmannianas.

Palavras-chave: Grupos de Coxeter. Ordem de Bruhat. Permutações Grassmannianas.

## ABSTRACT

In this work we describe in detail the maximal parabolic quotients of type  $A$  and  $B$ , and present the characterization of the covering relations of the Bruhat order of the same. Our approach is mainly combinatorial and it is based on the pattern of the corresponding permutations, also called Grassmannian permutations.

Keywords: Coxeter groups. Bruhat order. Grassmannian permutations.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Ordem de Bruhat de $B_2$ . . . . .	32
Figura 2 – Grafo de Bruhat de $B_2$ . . . . .	32
Figura 3 – Propriedade de Levantamento . . . . .	35
Figura 4 – Ordem de Bruhat de $B_3$ . . . . .	42
Figura 5 – $W = B_3$ e classes laterais $wW_{J_2}$ com $W_{J_2} = \langle \{a, b\} \rangle$ . . . . .	43
Figura 6 – $W = B_3$ e classes laterais $wW_{J_1}$ com $W_{J_1} = \langle \{a, c\} \rangle$ . . . . .	44
Figura 7 – $W = B_3$ e classes laterais $wW_{J_0}$ com $W_{J_0} = \langle \{b, c\} \rangle$ . . . . .	44
Figura 8 – Grafo e ordem de Bruhat em $S_3$ . . . . .	52
Figura 9 – Ordem de Bruhat de $S_4$ . . . . .	53
Figura 10 – Ilustração de $w[5, 3] = 4$ . . . . .	54
Figura 11 – Ilustração de $w$ e $z$ , respectivamente. . . . .	56
Figura 12 – Diagrama de $s_0^B \in S_4^B$ e sua ação em $S_4^B$ . . . . .	60
Figura 13 – Diagrama de $s_2^B \in S_4^B$ e sua ação em $S_4^B$ . . . . .	60
Figura 14 – Ordem de Bruhat e grafo de Bruhat em $S_2^B$ . . . . .	66
Figura 15 – Ilustração de $w$ e $z$ , respectivamente. . . . .	67
Figura 16 – Relações de cobertura em $S_5^{(2)}$ . . . . .	85
Figura 17 – Relações de cobertura em $S_5^{(2)}$ - ação à esquerda . . . . .	88
Figura 18 – Diagrama de Young semi-deslocado de $\wedge = 2, 3 1, 4$ mostrando a direção de leitura de $D_\alpha$ e $SD_\lambda$ . . . . .	90
Figura 19 – Colunas $H$ -relacionadas (à esquerda) e $V$ -relacionadas (à direita) de $\wedge = 2, 3 1, 4$ . O número de pontos em cada coluna inferior são os seus comprimentos vagos. . . . .	91
Figura 20 – Cantos e $M$ -caixas de $\wedge = 2, 3 1, 4$ rotulados de acordo com o seu tipo. . . . .	93
Figura 21 – Ilustração das aplicações $s^T$ e $s^B$ para $\wedge = 2, 3 1, 4$ . . . . .	96
Figura 22 – Ilustração das aplicações $\eta^T$ e $\eta^B$ para $\wedge = 2, 3 1, 4$ . . . . .	96
Figura 23 – Relações de cobertura em $W_4^{(2)}$ . . . . .	97



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistema de Coxeter finitos irredutíveis . . . . .	14
Tabela 2 – Classes laterais $wW_{J_2}$ . . . . .	42
Tabela 3 – Possibilidades de escolhas para $i < j$ tal que $w(i) > w(j)$ . . . . .	73

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>11</b>
2.1	Sistemas de Coxeter	11
2.2	Uma representação por permutação	17
2.3	Palavras reduzidas e Propriedade de Troca Forte	21
2.4	Uma caracterização para um sistema de Coxeter	27
<b>3</b>	<b>Ordem de Bruhat</b>	<b>31</b>
3.1	Definição e primeiros exemplos	31
3.2	Propriedades básicas	33
3.3	O caso finito	37
3.4	Subgrupos parabólicos e quocientes	39
3.5	Ordem de Bruhat em quocientes	45
<b>4</b>	<b>Relações de cobertura</b>	<b>48</b>
4.1	Tipo A	48
4.1.1	$S_n$ como grupo de Coxeter	49
4.1.2	Ordem de Bruhat em $S_n$	51
4.1.3	Ordem de Bruhat em quocientes maximais	57
4.2	Tipo B	59
4.2.1	$S_n^B$ como grupo de Coxeter	59
4.2.2	Ordem de Bruhat em $S_n^B$	64
4.2.3	Ordem de Bruhat em quocientes maximais	68
4.2.4	Classificação dos pares de cobertura	71
<b>5</b>	<b>Diagramas</b>	<b>79</b>
5.1	Partições	79
5.2	Diagramas de Young - Tipo A	80
5.3	Diagramas de Young semi-deslocados - Tipo B	89
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>98</b>

## 1 Introdução

Esta dissertação tem como objetivo a descrição das permutações Grassmannianas associadas aos grupos de Coxeter de tipo A e tipo B, por uma abordagem combinatória. A principal motivação é geométrica e vem do fato de que estas permutações parametrizam certas células, chamadas de Bruhat, que decompõem as variedades Grassmannianas clássicas, no caso de tipo A, e Grassmannianas Isotrópicas, no caso de tipo B. Neste trabalho, nos propomos a desenvolver as técnicas combinatórias necessárias para tornar mais acessível a descrição desta decomposição celular. Em particular, estudamos as relações de cobertura que são muito úteis na descrição dos complexos de cadeia celular no cálculo dos grupos de homologia de tais variedades (para mais detalhes, ver [5]).

A abordagem aqui é puramente algébrica e combinatória pois os grupos envolvidos são casos particulares de Grupos de Coxeter que são definidos de uma maneira simples por geradores e relações. Um dos exemplos mais notáveis que será abordado aqui é o grupo simétrico que pode ser visto tanto como um grupo de permutações, como um grupo de simetrias ou como o Grupo de Weyl de um sistema de raízes do tipo A. Neste sentido é que vários aspectos combinatórios, algébricos e geométricos estão entrelaçados quando estudamos os grupos de Coxeter.

Uma característica deste trabalho é justamente obter resultados de caráter e motivação geométricos simplesmente em termos combinatórios dos grupos de Coxeter, isto é, através do manuseio de expressões reduzidas, explorando uma ordem parcial de elementos de grupo, processos de enumeração e contagem, e construção de certos grafos associados. Em particular, um dos aspectos mais singulares dos grupos de Coxeter é desempenhado pela ordem de Bruhat, a qual damos atenção especial. Embora a estrutura de ordem seja usada em algumas outras partes de álgebra, o papel da ordem de Bruhat para o estudo dos grupos de Coxeter e as propriedades combinatórias e geométricas dessa relação de ordem são únicas.

Baseados no livro Brenti-Bjorner [1], mostramos que os grupos de Coxeter associados aos sistemas de tipo A e tipo B são, respectivamente, um grupo de permutações e um grupo de permutações com sinais sendo que a ordem de Bruhat e as relações de cobertura para estes grupos são conhecidas. A partir disto, consideramos o quociente destes grupos por subgrupos parabólicos maximais. Ao tomar os representantes minimais destas classes é que obtemos as chamadas permutações Grassmannianas, isto é, permutações que admitem um único descendente – uma posição em que há uma quebra de ordem da permutação. Uma vez que a ordem de Bruhat é passada ao quociente, a pergunta que se levanta é como se comporta a ordem de Bruhat entre os elementos minimais. Seguiremos então o artigo Rabelo-Lambert [5] que responde esta pergunta no caso do tipo B e adaptamos os argumentos para obter a resposta também no caso do tipo A, que é mais

simples, mas não está claramente descrita na literatura conhecida. Fazer esta descrição sequencial é uma das principais contribuições deste trabalho.

Além disto, apresentamos também de maneira informal como os diagramas de Young e os diagramas de Young semi-deslocados são úteis para ilustrar e fornecer um bom modelo visual para as relações de cobertura das permutações Grassmannianas de tipo A e tipo B, respectivamente.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: os Capítulos 2 e 3 fornecem uma introdução à teoria combinatória dos grupos de Coxeter, onde tratamos a combinatória de decomposições reduzidas e a ordem de Bruhat.

No Capítulo 4, estabelecemos os principais resultados desta dissertação a respeito das relações de cobertura de certas permutações. Este capítulo está dividido em duas partes relacionados aos dois exemplos de grupos de Coxeter a serem considerados: o grupo das permutações, o qual está associado ao grafo de tipo A, e o grupo das permutações com sinal, ao qual está associado o grafo de tipo B.

Com os resultados do Capítulo 2, concluímos que tais grupos de permutação são grupos de Coxeter e, em seguida, estudamos a ordem de Bruhat dos mesmos. Depois, introduzimos os subgrupos parabólicos maximais correspondentes de modo a obter a expressão dos representantes minimais que são chamadas de permutações Grassmannianas em cada caso. Finalmente, nos dedicamos a obter as relações de cobertura destas permutações. Para o caso de tipo B, seguimos o artigo [5] enquanto o caso do tipo A segue como uma contribuição deste trabalho.

No Capítulo 5, nos dedicamos descrever as relações de cobertura do conjunto de representantes minimais em termos dos diagramas de Young (para o Tipo A) e em termos dos diagramas de Young semi-deslocados (para o Tipo B).

## 2 Conceitos Básicos

Grupos de Coxeter são definidos de uma maneira simples por geradores e relações. Neste capítulo, damos as definições básicas, apresentamos alguns exemplos e derivamos os fatos combinatórios mais elementares subjacentes a este trabalho. A referência principal é o Capítulo 1 do [1].

### 2.1 Sistemas de Coxeter

**Definição 2.1.** Seja  $S$  um conjunto. Uma matriz  $m : S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$  é chamada *Matriz de Coxeter* se satisfaz:

- (i)  $m(s, s') = m(s', s)$ ;
- (ii)  $m(s, s') = 1 \Leftrightarrow s = s'$ .

Equivalentemente,  $m$  pode ser representada por um *grafo de Coxeter* (ou *diagrama de Coxeter*) cujo conjunto de nós é  $S$  e cujas arestas são os pares não ordenados  $\{s, s'\}$  tal que  $m(s, s') \geq 3$ . As arestas com  $m(s, s') \geq 4$  são rotuladas por tal número.

**Definição 2.2.** Seja  $S_{\text{fin}}^2 = \{(s, s') \in S^2; m(s, s') \neq \infty\}$ . Uma matriz de Coxeter  $m$  determina um grupo  $W$  com apresentação:

$$\begin{cases} \text{Geradores: } S \\ \text{Relações: } (ss')^{m(s,s')} = e, \text{ para todo } (s, s') \in S_{\text{fin}}^2. \end{cases} \quad (2.1)$$

Aqui, e na sequência, “ $e$ ” denota o elemento identidade de qualquer grupo em consideração. Como  $m(s, s') = 1 \Leftrightarrow s = s'$ , temos que

$$s^2 = e, \text{ para todo } s \in S.$$

Isso mostra que a relação  $(ss')^{m(s,s')} = e$  é equivalente à

$$\underbrace{ss'ss's \dots}_{m(s,s')} = \underbrace{s'ss'ss' \dots}_{m(s,s')}$$

Em particular,  $m(s, s') = 2$  (isto é,  $s$  e  $s'$  são dois nós distintos que não são vizinhos no grafo de Coxeter) se, e somente se,  $s$  e  $s'$  comutam.

**Definição 2.3.** Se um Grupo  $W$  tem apresentação como (2.1), então o par  $(W, S)$  é chamado *sistema de Coxeter*. O grupo  $W$  é o *Grupo de Coxeter* e  $S$  é o conjunto de *geradores de Coxeter*. A cardinalidade de  $S$  é chamada *posto* de  $(W, S)$ . O sistema é dito *irreduzível* se seu grafo de Coxeter é conexo.

**Exemplo 2.4.** Considere a matriz de Coxeter e seu grafo associado

$$\begin{pmatrix} 1 & \infty & 2 & 2 \\ \infty & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{array}{c} s_4 \circ \\ \diagdown \\ \circ \\ \diagup \\ s_1 \circ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \infty \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ s_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 4 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \circ \\ \\ s_3 \end{array}$$

O grupo de Coxeter determinado pelo grafo de Coxeter acima é gerado por  $s_1, s_2, s_3, s_4$  e satisfaz as relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = e \\ s_1 s_3 = s_3 s_1, \text{ pois } m(s_1, s_3) = 2 \\ s_1 s_4 = s_4 s_1, \text{ pois } m(s_1, s_4) = 2 \\ s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2, \text{ pois } m(s_2, s_3) = 4 \\ s_2 s_4 s_2 = s_4 s_2 s_4, \text{ pois } m(s_2, s_4) = 3 \\ s_3 s_4 = s_4 s_3, \text{ pois } m(s_3, s_4) = 2 \end{array} \right.$$

**Observação 2.5.** Quando nos referimos a um grupo abstrato como grupo de Coxeter devemos ter em mente não apenas  $W$ , mas o par  $(W, S)$  com um conjunto de geradores  $S$  específico entendido implicitamente.

As três afirmações a seguir são equivalentes e torna explícito quais os meios para  $W$  ser determinado por  $m$  via apresentação (2.1). Para mais detalhes, ver referência [2].

1. (Propriedade Universal) Se  $G$  é um grupo e  $f : S \rightarrow G$  é uma aplicação tal que

$$(f(s)f(s'))^{m(s,s')} = e,$$

para todo  $(s, s') \in S_{\text{fin}}^2$ , então existe uma única extensão de  $f$  para um homomorfismo de grupos  $f : W \rightarrow G$ .

2.  $W \cong F/N$ , onde  $F$  é o grupo livre gerado por  $S$  e  $N$  é o subgrupo normal gerado por  $\{(ss')^{m(s,s')}; (s, s') \in S_{\text{fin}}^2\}$ .
3. Seja  $S^*$  o monóide livre gerado por  $S$ , isto é, o conjunto das palavras no alfabeto  $S$  com concatenação como produto. Seja  $\equiv$  a relação de equivalência gerada permitindo a inclusão ou exclusão de qualquer palavra da forma

$$(ss')^{m(s,s')} = \underbrace{ss'ss' \dots s'ss'}_{2m(s,s')}$$

para  $(s, s') \in S_{\text{fin}}^2$ . Então,  $S^*/\equiv$  forma um grupo isomorfo à  $W$ .

Seja  $(W, S)$  um sistema de Coxeter. A Definição 2.1 deixa algumas incertezas sobre as ordens dos pares de produtos  $ss'$  como elementos de  $W$ , com  $s, s' \in S$ . É imediato que a ordem de  $ss'$  divide  $m(s, s')$  se  $m(s, s')$  é finito. Isso deixa aberto a possibilidade que grafos de Coxeter distintos podem determinar sistemas de Coxeter isomorfos. No entanto, esse não é o caso.

**Proposição 2.6** ([1], p.3). *Seja  $(W, S)$  o sistema de Coxeter determinado por uma matriz de Coxeter  $m$ . Sejam  $s$  e  $s'$  dois elementos distintos de  $S$ . Então, valem:*

- (i) *(As classes de)  $s$  e  $s'$  são distintas em  $W$ .*
- (ii) *A ordem de  $ss'$  em  $W$  é  $m(s, s')$ .*

Como consequência da Proposição 2.6 temos que a matriz de Coxeter  $(m(s, s'))_{s, s' \in S}$  pode ser totalmente reconstruída do grupo  $W$  e do conjunto de geradores  $S$ . Isto nos leva a uma importante conclusão.

**Teorema 2.7.** *A menos de isomorfismos existe uma correspondência 1 – 1 entre matrizes de Coxeter e sistemas de Coxeter.*

Os sistemas de Coxeter finitos irredutíveis, assim como certas classes de sistemas infinitos podem ser classificados, como mostra a Tabela 1. Vamos nos referir a alguns desses grupos de Coxeter de vez em quando por seus nomes convencionais mencionados na Tabela 1, mas a classificação como tal não desempenhará nenhum papel significativo neste trabalho. Não existe nada de especial em restringir nossa atenção para o caso irredutível, desde que grupos de Coxeter redutíveis decompõem unicamente como produto de irredutíveis.

Os grupos de Coxeter finitos para o qual  $m(s, s') \in \{2, 3, 4, 6\}$ , para todo  $(s, s') \in S$ , com  $s \neq s'$ , são chamados *grupos de Weyl*, nome motivado pela Teoria de Lie. Os grupos de Coxeter para o qual  $m(s, s') \in \{2, 3\}$ , para todo  $(s, s') \in S$ , com  $s \neq s'$ , são chamados *simplesmente entrelaçados*.

Vamos agora olhar alguns exemplos, com o objetivo de nos familiarizar com alguns dos grupos que desempenham um papel importante na teoria combinatória dos grupos de Coxeter e para exemplificar algumas das diversas maneiras pelas quais os grupos de Coxeter surgem.

Tabela 1 – Sistema de Coxeter finitos irredutíveis

<i>Nome</i>	<i>Diagrama</i>	<i>Ordem</i>
$A_n$ ( $n \geq 1$ )		$(n + 1)!$
$B_n$ ( $n \geq 2$ )		$2^n n!$
$D_n$ ( $n \geq 4$ )		$2^{n-1} n!$
$E_6$		$2^7 3^4 5$
$E_7$		$2^{10} 3^4 5 \cdot 7$
$E_8$		$2^{14} 3^5 5^2 \cdot 7$
$F_4$		1152
$G_2$		12
$H_3$		120
$H_4$		14400
$I_2(m)$ ( $m \geq 3$ )		$2m$

**Exemplo 2.8.** O grafo

$$\begin{array}{cccccc} \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ s_1 & s_2 & s_3 & & s_{n-1} & s_n \end{array}$$

com  $n$  vértices isolados (sem arestas) é o grafo de Coxeter do grupo  $W = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$



de ordem  $2^n$ . Neste caso,

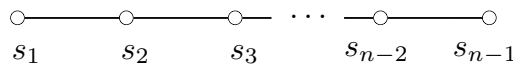
$$\text{Geradores: } S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \text{ onde } \begin{cases} s_1 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) \\ s_2 = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0}) \\ \vdots \\ s_n = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{1}) \end{cases}$$

$$\text{Relações: } s_1^2 = s_2^2 = \dots = s_n^2 = e.$$

$$(s_i s_j)^2 = (s_j s_i)^2 = e, \text{ para todos } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

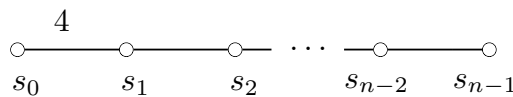
**Exemplo 2.9.** O grupo de Coxeter universal  $U_n$  de posto  $n$  é definido pelo grafo completo com todas as  $\binom{n}{2}$  arestas marcadas com “ $\infty$ ”. Equivalentemente, ele é o grupo tendo  $n$  geradores de ordem 2 e nenhuma outra relação. Cada elemento do grupo pode ser unicamente expresso com uma palavra do alfabeto de geradores e essas palavras são precisamente aquelas onde as letras adjacentes não são iguais.

**Exemplo 2.10** (Grupos simétricos). O caminho



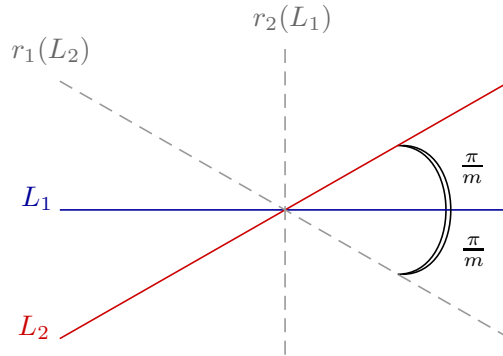
é o grafo de Coxeter do grupo simétrico  $S_n$  com respeito ao sistema de geradores de transposições adjacentes  $s_i = (i, i + 1)$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ . Isso será provado no capítulo 4, onde trataremos com detalhe esse exemplo. Uma noção básica desse exemplo em particular é muito valiosa, tanto pela importância do grupo simétrico quanto por seu papel como o exemplo não trivial mais acessível de um grupo de Coxeter.

**Exemplo 2.11** (Grupos das permutações com sinal). O grafo



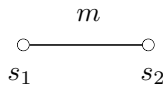
é o grafo de Coxeter do grupo  $S_n^B$  de todas as permutações com sinal do conjunto  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Trataremos esse exemplo com detalhes no capítulo 4. Esse grupo pode ser pensando em termos do seguinte modelo combinatório. Suponha que temos um baralho de  $n$  cartas tal que a  $j$ -ésima carta tem “ $+j$ ” escrito de um lado e “ $-j$ ” do outro. Os elementos de  $S_n^B$  podem ser identificados com um possível rearranjo de pilhas de cartas, isto é, um elemento do grupo é uma permutação de  $[n]$  (a ordem da carta da pilha) junto com a informação sinal  $[n] \rightarrow \{+, -\}$  (dizendo qual lado de cada carta está para cima). Os geradores  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , trocam a carta na posição  $i$  com a que está na posição  $i + 1$  na pilha (preservando a orientação) e  $s_0$  vira a primeira carta da pilha, isto é, troca seu sinal.

**Exemplo 2.12** (Grupos diedrais). Sejam  $L_1$  e  $L_2$  linhas retas atravessando a origem do plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$ . Assuma que o ângulo entre elas é  $\frac{\pi}{m}$ , para algum  $m \geq 2$ . Seja  $r_1$  a reflexão através de  $L_1$  e seja  $r_2$  a reflexão ortogonal através de  $L_2$ . Então,  $r_1r_2$  é uma rotação do plano euclidiano de ângulo  $\frac{2\pi}{m}$  e, assim,  $(r_1r_2)^m = e$ .



Seja  $G_m$  o grupo gerado por  $r_1$  e  $r_2$ . Considerações geométricas simples mostram que  $G_m$  consiste de  $m$  rotações do plano através do ângulo  $\frac{2k\pi}{m}$ ,  $0 \leq k < m$ , e essas  $m$  rotações seguidas pela reflexão  $r_1$ . Assim,  $|G_m| = 2m$ .

Agora, defina o grupo de Coxeter  $I_2(m)$  dado pelo grafo de Coxeter



isto é, geradores  $S = \{s_1, s_2\}$  e relações  $s_1^2 = s_2^2 = e = (s_1s_2)^m$ .

Diretamente da definição, vemos que todo elemento de  $I_2(m)$  pode se representado como uma palavra alternando  $s_1s_2s_1s_2s_1 \dots$  ou  $s_2s_1s_2s_1s_2 \dots$  de comprimento  $\leq m$  (isto inclui a representação do elemento identidade pela palavra vazia). Uma vez que existem duas tais palavras de cada comprimento positivo e as duas palavras de comprimento  $m$  representam o mesmo elemento do grupo, segue que  $|I_2(m)| \leq 2m$ .

Como  $r_1^2 = r_2^2 = (r_1r_2)^m = e$ , existe um homomorfismo sobrejetor  $f : I_2(m) \rightarrow G_m$  estendendo

$$f : S \rightarrow G_m, \text{ para } i = 1, 2. \\ s_i \mapsto r_i,$$

Já vimos que  $|I_2(m)| \leq |G_m| = 2m$ . Consequentemente,  $f$  deve ser um isomorfismo.

O grupo  $I_2(m)$  é chamado *grupo diedral* de ordem  $2m$ . Similarmente, o grupo  $I_2(\infty)$ , que é de ordem infinita, é chamado *grupo diedral infinito*. Ele surge como o grupo gerado pelas reflexões ortogonais  $r_1$  e  $r_2$  em linhas cujo ângulo é um múltiplo não racional de  $\pi$ .

## 2.2 Uma representação por permutação

Nosso objetivo é obter as propriedades combinatórias centrais de um grupo Coxeter, como a propriedade de troca, que será discutida na próxima seção. Acontece que a descrição do grupo por meio de sua apresentação (2.1) é inadequada para esse propósito - é necessário a estrutura adicional proveniente de alguma realização concreta adequada do grupo.

Esta seção descreve uma realização como um grupo de permutação que leva rapidamente ao objetivo. Esta representação permutação é introduzida aqui com o único propósito de provar o Teorema Propriedade de Troca Forte da próxima seção; ela não reaparecerá desta forma depois disso. Ao longo desta seção,  $(W, S)$  denota um sistema de Coxeter.

**Definição 2.13.** Definimos:

$$T = \{wsw^{-1}; s \in S, w \in W\}.$$

Os elementos de  $T$ , isto é, os elementos conjugados para algum gerador de Coxeter, são chamados *reflexões*.

A definição mostra que  $S \subseteq T$  e que  $t^2 = e$ , para todo  $t \in T$ . Os elementos de  $S$  são chamados *reflexões simples*.

**Definição 2.14.** Dada uma palavra  $s_1s_2 \dots s_k \in S^*$ , definimos:

$$t_i = s_1s_2 \dots s_{i-1}s_i s_{i-1} \dots s_2s_1,$$

para  $1 \leq i \leq k$  e a  $k$ -upla ordenada

$$\widehat{T}(s_1s_2 \dots s_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$$

Consideramos palavras em  $S^*$  também como elementos em  $W$  (lidas então como um produto) sem mudar de notação. Note que:

- $t_i = (s_1 \dots s_{i-1})s_i(s_1 \dots s_{i-1})^{-1}$
- $t_i s_1 s_2 \dots s_k = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_k$  ( $s_i$  omitido)
- $s_1 s_2 \dots s_i = t_i t_{i-1} \dots t_1$

**Lema 2.15.** Se  $w = s_1s_2 \dots s_k$ , com  $k$  minimal, então  $t_i \neq t_j$ , para todo  $1 \leq i < j \leq k$ .

*Demonstração.* Sejam  $t_i = (s_1 \dots s_{i-1})s_i(s_1 \dots s_{i-1})^{-1}$  e  $t_j = (s_1 \dots s_{j-1})s_j(s_1 \dots s_{j-1})^{-1}$ . Se  $t_i = t_j$ , para algum  $i < j$ , então  $t_i t_j = e$ . Assim,

$$\begin{aligned} w &= s_1 s_2 \dots s_k = t_i t_j s_1 s_2 \dots s_k \\ &= t_i [(s_1 \dots s_{j-1})s_j(s_1 \dots s_{j-1})^{-1}] s_1 s_2 \dots s_{j-1} s_j \dots s_k \\ &= t_i (s_1 \dots s_{j-1}) \widehat{s}_j \dots s_k \\ &= [(s_1 \dots s_{i-1})s_i(s_1 \dots s_{i-1})^{-1}] (s_1 \dots s_{i-1} s_i \dots s_{j-1}) \widehat{s}_j \dots s_k \\ &= s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k \end{aligned}$$

isto é,  $s_i$  e  $s_j$  são deletados, o que contradiz a minimalidade de  $k$ .  $\square$

**Definição 2.16.** Para  $s_1 s_2 \dots s_k \in S^*$  e  $t \in T$ , seja

$$n(s_1 s_2 \dots s_k; t) = \text{número de vezes que } t \text{ aparece em } \widehat{T}(s_1 s_2 \dots s_k).$$

Observe que  $n(s_1 s_2 \dots s_k; t) = 1$ , se  $t = t_i$  e  $k$  é minimal, pois pelo Lema 2.15,  $t_i \neq t_j$ , para todo  $1 \leq i < j \leq k$ . Além disso,  $n(s_1 s_2 \dots s_k; t) = 0$ , se  $t \in T$  for distinto de todos os  $t_i$ 's,  $1 \leq i \leq k$ .

Dados  $s \in S$  e  $t \in T$ , definimos

$$\eta(s; t) = \begin{cases} -1, & \text{se } s = t \\ +1, & \text{se } s \neq t \end{cases} \quad (2.2)$$

Note que:

$$(-1)^{n(s_1 s_2 \dots s_k; t)} = \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1}) \quad (2.3)$$

e

$$s_i = s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1} = (s_{i-1} \dots s_1) t (s_{i-1} \dots s_1)^{-1}$$

se, e somente se,

$$(s_{i-1} \dots s_1)^{-1} s_i (s_{i-1} \dots s_1) = t,$$

isto é, se  $t = t_i \in T$ , para algum  $1 \leq i \leq k$ , então  $\eta(s_i; s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1}) = -1$ .

**Definição 2.17.** Considere o grupo  $S(R)$  de todas as permutações do conjunto

$$R = T \times \{-1, +1\}.$$

Para  $s \in S$ , definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_s : \quad R &\rightarrow R \\ (t, \varepsilon) &\mapsto \pi_s(t, \varepsilon) = (sts, \varepsilon \eta(s; t)) \end{aligned}$$

Note que:

$$\pi_s^2(t, \varepsilon) = \pi_s \pi_s(t, \varepsilon) = \pi_s(sts, \varepsilon \eta(s; t)) = (sstss, \varepsilon \eta(s; t) \eta(s; sts)) = (t, \varepsilon),$$

isto é,  $\pi_s \in S(R)$

**Teorema 2.18.** (i) A aplicação  $s \mapsto \pi_s$  estende unicamente para um homomorfismo injetivo  $w \mapsto \pi_w$  de  $W$  para  $S(R)$ .

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ & \uparrow & \searrow \\ S & \longrightarrow & S(R) \end{array}$$

(ii)  $\pi_t(t, \varepsilon) = (t, -\varepsilon)$ , para todo  $t \in T$ .

*Demonstração.* Verificaremos as afirmações em alguns passos:

- 1) Já vimos que  $\pi_s^2 = id_R$ .
- 2) Sejam  $s, s' \in S$  e  $m(s, s') = p \neq \infty$ . Afirmamos que  $(\pi_s \pi_{s'})^p = id_R$ . Para provar isso, seja

$$s_i = \begin{cases} s', & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ s, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

e denote por  $\mathbf{s}$  a palavra  $s_1 s_2 \dots s_{2p} = s' s s' s s' \dots s' s$ . Seja  $\hat{T}(\mathbf{s}) = (t_1, t_2, \dots, t_{2p})$ , onde  $t_i = s_1 \dots s_i \dots s_1 = s' s \dots s_i \dots s' = (s' s)^{i-1} s'$ , com  $1 \leq i \leq 2p$ . Como  $m(s, s') = p \neq \infty$  temos que  $(s s')^p = e = (s' s)^p$ . Note que:

$$t_{p+1} = (s' s)^{(p+i)-1} s' = (s' s)^p (s' s)^{(i-1)} s' = (s' s)^{i-1} s = t_i,$$

isto é,  $t_{p+1} = t_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Daí,  $n(\mathbf{s}; t)$  é par, para todo  $t \in T$ . Temos que:

$$(\pi_s \pi_{s'})^p = \pi_s \pi_{s'} \dots \pi_s \pi_{s'} = \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} \pi_{s_1}.$$

Seja  $(t', \varepsilon') = (\pi_s \pi_{s'})^p(t, \varepsilon)$ . Então:

$$\begin{aligned} t' &= (\pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} \pi_{s_1})(t) \\ &= \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} (\pi_{s_1})(t) = \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} (s_1 t s_1) \\ &= \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_3} (s_2 s_1 t s_1 s_2) = \dots = s_{2p} \dots s_1 t s_1 \dots s_{2p} \\ &= (s_{2p} \dots s_1) t (s_{2p} \dots s_1)^{-1} = (s \dots s s') t (s \dots s s')^{-1} = e t e^{-1} = t, \end{aligned}$$

isto é,  $t = t'$ , e

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= (\pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} \pi_{s_1})(\varepsilon) \\
&= \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} (\pi_{s_1})(\varepsilon) = \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_2} (\varepsilon \eta(s_1; t)) \\
&= \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots \pi_{s_3} (\varepsilon \eta(s_1; t) \eta(s_2; s_1 t s_1)) \\
&= \pi_{s_{2p}} \pi_{s_{2p-1}} \dots (\varepsilon \eta(s_1; t) \eta(s_2; s_1 t s_1) \eta(s_3; s_2 s_1 t s_1 s_2)) \\
&= \dots = \varepsilon \prod_{i=1}^{2p} \eta(s_i; s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1}) \\
&= \varepsilon (-1)^{n(s_1, s_2, \dots, s_{2p}; t)} = \varepsilon (-1)^{n(s; t)} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

isto é,  $\varepsilon = \varepsilon'$ . Logo,  $(\pi_s \pi_{s'})^p(t, \varepsilon) = (t, \varepsilon)$ , ou seja,  $(\pi_s \pi_{s'})^p = id_R$ .

- 3) Pela Propriedade Universal e o que acaba de ser mostrado, a aplicação  $s \mapsto \pi_s$  estende para um homomorfismo  $w \mapsto \pi_w$  de  $W$ . Se  $w = s_k s_{k-1} \dots s_1$ , então

$$\begin{aligned}
\pi_w(t, \varepsilon) &= \pi_{s_k s_{k-1} \dots s_1}(t, \varepsilon) = \pi_{s_k} \pi_{s_{k-1}} \dots s_1(t, \varepsilon) \\
&= \left( s_k \dots s_1 t s_1 \dots s_k, \varepsilon \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1}) \right) \\
&= (wtw^{-1}, \varepsilon (-1)^{n(s_1, s_2, \dots, s_k; t)}) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Em particular, a paridade de  $n(s_1, s_2 \dots s_k; t)$  depende somente de  $w$  e  $t$ .

- 4) Suponha que  $w \neq e$ . Escolha uma expressão  $w = s_k s_{k-1} \dots s_1$  com  $k$  minimal e seja  $\widehat{T}(s_k s_{k-1} \dots s_1) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ . Pelo Lema 2.15, todos os  $t'_i$ s são distintos, então  $n(s_1, s_2 \dots s_k; t_i) = 1$ . Portanto, por 2.4,  $\pi_w(t_i, \varepsilon) = (wt_i w^{-1}, -\varepsilon)$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Assim,  $\pi_w \neq id_R$ . Daí, o homomorfismo é injetivo.
- 5) Mostraremos (ii) por indução no tamanho da expressão simétrica para  $t$ . Seja  $t = s_1 s_2 \dots s_p \dots s_2 s_1$ , com  $s_i \in S$ . O caso  $p = 1$  é imediato. De fato, neste caso  $t = s_1$  e

$$\pi_t(t, \varepsilon) = \pi_{s_1}(s_1, \varepsilon) = (s_1 s_1 s_1, \varepsilon \eta(s_1; s_1)) = (s_1, -\varepsilon) = (t, -\varepsilon).$$

Então, por indução,

$$\begin{aligned}
\pi_t(t, \varepsilon) &= (\pi_{s_1 \dots s_p \dots s_1})(t, \varepsilon) = \pi_{s_1} \pi_{s_2 \dots s_p \dots s_2}(\pi_{s_1}(t, \varepsilon)) \\
&= \pi_{s_1} \pi_{s_2 \dots s_p \dots s_2}(s_1 t s_1, \varepsilon \eta(s_1; t)) \\
&= \pi_{s_1} \pi_{s_2 p \dots s_p \dots s_2}(s_1 [s_1 \dots s_p \dots s_1] s_1, \varepsilon \eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1)) \\
&= \pi_{s_1} \pi_{s_2 p \dots s_p \dots s_2}(s_2 \dots s_p \dots s_2, \varepsilon \eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1)) \\
&= \pi_{s_1}(s_2 \dots s_p \dots s_2, \varepsilon \eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1) \eta(s_2 \dots s_p \dots s_2; s_2 \dots s_2; s_2 \dots s_p \dots s_2)) \\
&= \pi_{s_1}(s_2 \dots s_p \dots s_2, -\varepsilon \eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1)) \\
&= (s_1 (s_2 \dots s_p \dots s_2) s_1, -\varepsilon \eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1) \eta(s_1; s_2 \dots s_p \dots s_2)) \\
&= (t, -\varepsilon \eta^2(s_1; s_2 \dots s_p \dots s_2)) = (t, -\varepsilon)
\end{aligned}$$

Note que:

$$\eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1) = -1 \Leftrightarrow s_1 = s_1 \dots s_p \dots s_1 = s_2 \dots s_p \dots s_2$$

é equivalente à condição  $\eta(s_1; s_2 \dots s_p \dots s_2) = -1$ . Portanto,

$$\eta(s_1; s_1 \dots s_p \dots s_1)\eta(s_1; s_2 \dots s_p \dots s_2) = \eta^2(s_1; s_2 \dots s_p \dots s_2). \quad \square$$

**Definição 2.19.** Para  $w \in W$  e  $t \in T$ , seja

$$\eta(w; t) = (-1)^{n(s_1 \dots s_k; t)} = (-1)^{n(w; t)}, \quad (2.5)$$

onde  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  é uma expressão arbitrária, com  $s_i \in S$ .

A expressão está bem definida, pois depende apenas de  $w$  e  $t$ , como mostrado na demonstração do Teorema 2.18 (Passo 3). Além disso, (2.5) estende (2.2) e assim podemos reescrever a igualdade (2.4) como:

$$\pi_w(t, \varepsilon) = (wtw^{-1}, \varepsilon\eta(w^{-1}; t)). \quad (2.6)$$

### 2.3 Palavras reduzidas e Propriedade de Troca Forte

Nesta seção, provamos algumas propriedades combinatórias fundamentais do sistema de palavras que representam qualquer elemento dado de um grupo Coxeter.

**Definição 2.20.** Seja  $(W, S)$  um sistema de Coxeter. Cada elemento  $w \in W$  pode ser escrito como um produto de geradores:

$$w = s_1 s_2 \dots s_k, \text{ com } s_i \in S.$$

Se  $k$  é mínimo entre todas tais expressões para  $w$ , então  $k$  é chamado *comprimento* de  $w$  (escrevemos  $\ell(w) = k$ ) e a palavra  $s_1 s_2 \dots s_k$  é chamada *palavra reduzida* (ou *decomposição reduzida* ou *expressão reduzida*) para  $w$ .

**Observação 2.21.** Se  $w = s_1 s_2 \dots s_k$ , com  $s_i \in S$ , é uma expressão qualquer para  $w$ , então  $\ell(w) \leq k$ .

Como já mencionado  $s_1 s_2 \dots s_k$  denota ambos o produto desses geradores (isto é, um elemento de  $W$ ) e a palavra formada por listando eles nesta ordem (isto é, um elemento do monóide livre  $S^*$ ).

O resultado a seguir é uma consequência da Propriedade Universal:

**Lema 2.22.** A aplicação  $\varepsilon : s \mapsto \{-1\}$ , para todo  $s \in S$ , estende-se para um homomorfismo de grupos  $\varepsilon : W \rightarrow \{-1, +1\}$ .

*Demonstração.* Temos que  $\varepsilon(s) = -1$ , para todo  $s \in S$ . Os elementos de  $W$  satisfazem a relação  $(ss')^{m(s,s')} = e$ , para todo  $(s, s') \in S_{\text{fin}}^2$ . Seja  $m(s, s') = m$ . Então:

$$(\varepsilon(s)\varepsilon(s'))^m = ((-1)(-1))^m = ((-1)^2)^m = 1 = e,$$

para todo  $(s, s') \in S_{\text{inf}}^2$ . Logo, pela Propriedade Universal,  $\varepsilon$  estende a um homomorfismo de grupos  $\varepsilon : W \rightarrow \{-1, +1\}$ .  $\square$

A Proposição a seguir apresenta algumas propriedades básicas da função comprimento.

**Proposição 2.23.** *Para todos  $u, w \in W$  valem:*

(i)  $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$ ,

(ii)  $\ell(uw) \equiv \ell(u) + \ell(w) \pmod{2}$ ,

(iii)  $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ , para todo  $s \in S$ ,

(iv)  $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$ ,

(v)  $|\ell(u) - \ell(w)| \leq \ell(uw) \leq \ell(u) + \ell(w)$ ,

(vi)  $\ell(uw^{-1})$  é uma métrica em  $W$ .

*Demonstração.* (i) Se  $w = s_1s_2 \dots s_k$  é uma palavra reduzida, então  $\ell(w) = k$ . Logo,

$$\varepsilon(w) = \varepsilon(s_1s_2 \dots s_k) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2) \dots \varepsilon(s_k) = (-1)^k = (-1)^{\ell(w)}.$$

Como consequência, o número de geradores em duas decomposições de  $w$  tem a mesma paridade.

(ii) Pelo item (i),  $\varepsilon(u) = (-1)^{\ell(u)}$  e  $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$ . Já sabemos que  $\varepsilon$  é um homomorfismo. Assim,

$$(-1)^{\ell(uw)} = \varepsilon(uw) = \varepsilon(u)\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(u)}(-1)^{\ell(w)} = (-1)^{\ell(u)+\ell(w)},$$

isto é,  $\ell(uw) \equiv \ell(u) + \ell(w) \pmod{2}$ . Isto significa que ao fazer o produto  $uw$ ,  $\ell(uw) = \ell(u) + \ell(w)$  se a primeira letra de  $w$  não coincide com a última letra de  $u$  (na verdade, o resultado é mais geral: a coincidência pode ocorrer fora dos extremos, como veremos adiante). Caso contrário, será retirada uma quantidade par de geradores.

(iii) Se  $w = s_1s_2 \dots s_k$  é uma palavra reduzida, então  $\ell(w) = k$ . Logo,

$$(-1)^{\ell(sw)} = \varepsilon(sw) = \varepsilon(s)\varepsilon(w) = (-1)^1(-1)^{\ell(w)} = (-1)^{1+\ell(w)},$$

isto é,  $\ell(sw) \equiv 1 + \ell(w) \pmod{2} = \ell(w) \pm 1$ .



(iv) Se  $w = s_1 s_2 \dots s_k$ , com  $k$  minimal, então  $w^{-1} = s_k \dots s_2 s_1$ . Temos que:

$$\ell(w^{-1}) \leq \ell(w). \quad (2.7)$$

Fazendo  $w^{-1}$  em (2.7) obtemos:

$$\ell(w) \leq \ell(w^{-1}). \quad (2.8)$$

Por (2.7) e (2.8) segue que  $\ell(w) = \ell(w^{-1})$ .

(v) Segue imediatamente da Observação 2.21 que  $\ell(uw) \leq \ell(u) + \ell(w)$ .

Note que  $u = uww^{-1}$ . Daí,

$$\ell(u) = \ell(uww^{-1}) \leq \ell(uw) + \ell(w^{-1}) = \ell(uw) + \ell(w),$$

isto é,  $|\ell(u) - \ell(w)| \leq \ell(uw)$ . Portanto,  $|\ell(u) - \ell(w)| \leq \ell(uw) \leq \ell(u) + \ell(w)$ .

(vi) Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} d: W \times W &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (u, w) &\mapsto d(u, w) = \ell(uw^{-1}) \end{aligned}$$

é uma métrica. De fato,

- 1)  $d(u, w) = 0 \Leftrightarrow \ell(uw^{-1}) = 0 \Leftrightarrow uw^{-1} = e \Leftrightarrow u = w$ .
- 2)  $d(u, w) = \ell(uw^{-1}) > 0$ , se  $u \neq w$ , pois  $\ell$  denota o comprimento.
- 3)  $d(u, w) = \ell(uw^{-1}) = \ell((uw^{-1})^{-1}) = \ell((w^{-1})^{-1}u^{-1}) = \ell(wu^{-1}) = d(w, u)$ .
- 4)  $\ell(uw^{-1}) = \ell(uv^{-1}vw^{-1}) \leq \ell(uv^{-1}) + \ell(vw^{-1})$ , isto é,  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ .  $\square$

É uma consequência do Lema 2.22 que os elementos de comprimento par formam um subgrupo de  $W$  de índice 2, chamado *subgrupo alternado* (segundo a terminologia do grupo simétrico) ou *subgrupo de rotação* (segundo a terminologia dos grupos de reflexões finitos) de  $W$ . De fato,

$$\ker \varepsilon = \{w \in W; \varepsilon(w) = 1\} \text{ e } \varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)} = 1 = (-1)^{2k},$$

isto é,  $\ker \varepsilon$  é um subgrupo de  $W$  (normal) formado por todas as palavras de comprimento par.

Agora chegamos à chamada “Propriedade de Troca”, que é uma propriedade combinatória fundamental dos grupos de Coxeter. Em sua versão básica, aparecendo na próxima seção, a condição  $t \in T$  no teorema a seguir é enfraquecida para  $t \in S$ , daí o adjetivo “forte” para a versão dada aqui.

**Teorema 2.24** (Propriedade de Troca Forte). *Suponha que  $w = s_1 s_2 \dots s_k$ , com  $s_i \in S$  e  $t \in T$ . Se  $\ell(tw) < \ell(w)$ , então  $tw = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_k$ , para algum  $i \in [k]$ , em que  $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ .*

*Demonstração.* Relembre a Definição 2.19. Temos que  $\eta \in \{-1, +1\}$ . Provaremos a equivalência das condições (a) e (b), onde:

$$(a) \ell(tw) < \ell(w).$$

$$(b) \eta(w; t) = -1.$$

(b)  $\Rightarrow$  (a): Assuma que  $\eta(w; t) = -1$  e seja  $w = s'_1 s'_2 \dots s'_d$  uma expressão reduzida. Como  $n(s'_1 s'_2 \dots s'_d; t)$  é um número ímpar concluímos que  $t = s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1$ , isto é,  $t = t_i$ , para algum  $1 \leq i \leq d$ . Assim,

$$\ell(tw) = \ell((s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1) s'_1 s'_2 \dots s'_d) = \ell(s'_1 s'_2 \dots \widehat{s}'_i \dots s'_d) < d = \ell(w).$$

Agora, assumamos que  $\eta(w; t) = 1$ . Então, pela Equação (2.6),

$$\begin{aligned} \pi_{(tw)^{-1}}(t, \varepsilon) &= \pi_{w^{-1}} \pi_t(t, \varepsilon) = \pi_{w^{-1}}(t, -\varepsilon) \\ &= (w^{-1} t (w^{-1})^{-1}, -\varepsilon \eta((w^{-1})^{-1}, t)) \\ &= (w^{-1} t w, -\varepsilon \eta(w, t)) = (w^{-1} t w, -\varepsilon) \end{aligned}$$

Daí,  $\eta(tw; t) = -1$ . Portanto,  $\ell(t(tw)) < \ell(tw)$  implica  $\ell(w) < \ell(tw)$ , o que é uma contradição.

(a)  $\Rightarrow$  (b): Suponha que  $\ell(tw) < \ell(w)$ . Como  $n(s_1 s_2 \dots s_k; t)$  é um número ímpar concluímos que  $t = t_i$ , para algum  $1 \leq i \leq k$ . Portanto,  $tw = s_1 s_2 \dots \widehat{s}_i \dots s_k$ .  $\square$

**Corolário 2.25.** *Se  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  é uma expressão reduzida e  $t \in T$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$(a) \ell(tw) < \ell(w).$$

$$(b) tw = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_k, \text{ para algum } i \in [k],$$

$$(c) t = s_1 s_2 \dots s_i \dots s_2 s_1, \text{ para algum } i \in [k].$$

*Além disso, o índice “i” que aparece em (b) e (c) é determinado unicamente.*

*Demonstração.* A equivalência entre (b) e (c) é fácil de ver (e não requer a hipótese que  $s_1 s_2 \dots s_k$  seja reduzida). A unicidade segue do Lema 2.15. O Teorema 2.24 mostra que (a) implica (b). A recíproca é óbvia.  $\square$

**Definição 2.26.** Definimos:

$$\begin{aligned} T_L(w) &= \{t \in T; \ell(tw) < \ell(w)\}, \\ T_R(w) &= \{t \in T; \ell(wt) < \ell(w)\}. \end{aligned}$$

Nesta notação, “ $L$ ” e “ $R$ ” são usados para indicar “esquerda” e “direita”.  $T_L(w)$  é chamado conjunto de *reflexões associadas à esquerda* para  $w$  e, similarmente para  $T_R(w)$ .

O Corolário 2.25 dá algumas caracterizações úteis do conjunto  $T_L(w)$ . Aplicando ele para  $w^{-1}$  temos as correspondentes afirmações “espelhadas” para  $T_R(w)$ , desde que  $T_R(w) = T_L(w^{-1})$ . De fato,

$$\begin{aligned} T_L(w^{-1}) &= \{t \in T; \ell(tw^{-1}) < \ell(w^{-1})\} \\ &= \{t \in T; \ell((tw^{-1})^{-1}) < \ell((w^{-1})^{-1})\} \\ &= \{t \in T; \ell((w^{-1})^{-1}t^{-1}) < \ell(w)\} \\ &= \{t \in T; \ell(wt) < \ell(w)\} \\ &= T_R(w) \end{aligned}$$

**Corolário 2.27.**  $|T_L(w)| = \ell(w)$ .

*Demonstração.* Seja  $w = s_1s_2 \dots s_k$  e seja  $k = \ell(w)$ . Então,

$$T_L(w) = \{t \in T; \ell(tw) < \ell(w)\} = \{s_1 \dots s_i \dots s_1; 1 \leq i \leq k\}.$$

Como  $k$  é minimal, então  $t_i \neq t_j$ , para todos  $1 \leq i < j \leq k$ , ou seja, todos os elementos do conjunto  $T_L(w)$  são distintos. Logo,  $|T_L(w)| = \ell(w)$ .  $\square$

Precisaremos frequentemente nos referir as reflexões *simples associadas*, para isso vamos introduzir a seguinte definição:

**Definição 2.28.** Definimos:

$$\begin{aligned} D_L(w) &= T_L(w) \cap S, \\ D_R(w) &= T_R(w) \cap S. \end{aligned}$$

O conjunto  $D_L(w)$  é chamado conjunto descendente à esquerda e, similarmente para  $D_R(w)$ . Seus elementos são chamados de *descendentes à direita* (respectivamente, à esquerda). Note que, por simetria,  $D_R(w) = D_L(w^{-1})$ . A razão para essa terminologia ficará clara no Capítulo 3, onde trataremos dos grupos simétricos.

**Corolário 2.29.** Para todo  $s \in S$  e  $w \in W$ , valem:

- (i)  $s \in D_L(w)$  se, e somente se, alguma expressão reduzida para  $w$  começa com a letra  $s$ .

(ii)  $s \in D_R(w)$  se, e somente se, alguma expressão reduzida para  $w$  termina com a letra  $s$ .

*Demonstração.* (i) Observe que podemos escrever

$$D_L(w) = T_L(w) \cap S = \{s \in S; \ell(sw) < \ell(w)\}.$$

Daí, se  $s \in D_L(w)$  então  $\ell(sw) < \ell(w)$  e, portanto,  $w$  começa com  $s$ .

Por outro lado, pelo item (iii) da Proposição 2.23,  $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$  e, por hipótese,  $w$  começa com  $s$ , logo  $\ell(sw) = \ell(w) - 1 < \ell(w)$ .

(ii) Análogo à (i). □

A seguir apresentamos uma consequência importante da propriedade de troca.

**Proposição 2.30** (Propriedade de Exclusão). *Se  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  e  $\ell(w) < k$ , então  $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_k$ , para algum  $1 \leq i < j \leq k$ .*

*Demonstração.* Escolha  $i$  maximal tal que  $s_i s_{i+1} \dots s_k$  não é reduzida (isto significa que  $s_{i+1} \dots s_k$  é a palavra reduzida). Então,  $\ell(s_i s_{i+1} \dots s_k) < \ell(s_{i+1} \dots s_k)$ . A princípio podemos pensar que vale a igualdade  $\ell(s_i s_{i+1} \dots s_k) = \ell(s_{i+1} \dots s_k)$ , mas pelo item (iii) da Proposição 2.23,  $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ . Assim, a igualdade nunca será satisfeita. Logo, pela Propriedade de Troca Forte,

$$s_i s_{i+1} \dots s_k = s_{i+1} \dots \hat{s}_j \dots s_k,$$

para algum  $1 < j \leq k$ . Multiplicando à esquerda por  $s_1 s_2 \dots s_{i-1}$ , obtemos:

$$(s_1 s_2 \dots s_{i-1})(s_i s_{i+1} \dots s_k) = (s_1 s_2 \dots s_{i-1})s_{i+1} \dots \hat{s}_j \dots s_k,$$

isto é,  $s_i$  foi omitido. Portanto,  $w = s_1 \dots \hat{s}_i \dots \hat{s}_j \dots s_k$ . □

**Corolário 2.31.** (i) *Qualquer expressão  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  contém um expressão reduzida para  $w$  como uma subpalavra obtida por excluindo um número par de letras.*

(ii) *Suponhamos que  $w = s_1 s_2 \dots s_k = s'_1 s'_2 \dots s'_k$  são duas expressões reduzidas. Então, o conjunto das letras aparecendo na palavra  $s_1 s_2 \dots s_k$  é igual ao conjunto de letras aparecendo em  $s'_1 s'_2 \dots s'_k$ .*

(iii)  *$S$  é um conjunto gerador minimal para  $W$ , isto é, nenhum gerador de Coxeter pode ser expresso em termos de outros geradores.*

*Demonstração.* (i) É uma consequência direta da Propriedade de Exclusão.

- (ii) Seja  $I = \{s'_1, \dots, s'_k\}$ . Suponha que  $s_j \notin I$  e que  $j$  é escolhido para ser o menor com essa propriedade. Sendo  $w = s_1 s_2 \dots s_k = s'_1 s'_2 \dots s'_k$  expressões reduzidas, pelo Corolário 2.25, temos que:

$$s_1 s_2 \dots s_j \dots s_2 s_1 = s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1, \text{ para algum } i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} s_j &= (s_1 \dots s_{j-1})^{-1} s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1 (s_{j-1} \dots s_1)^{-1} \\ &= s_{j-1} \dots s_1 s'_1 s'_2 \dots s'_i \dots s'_2 s'_1 \dots s_{j-1}. \end{aligned}$$

Note que todas as letras que aparecem do lado direito pertencem à  $I$ , portanto, tomando uma expressão reduzida, obtemos que  $s_j \in I$ , o que contradiz a hipótese.

- (iii) Segue de (ii). □

## 2.4 Uma caracterização para um sistema de Coxeter

A Propriedade de Troca na teoria combinatória dos grupos de Coxeter é fundamental, pois ela caracteriza tais grupos. Isso é muitas vezes um modo conveniente para provar que um dado grupo é um grupo de Coxeter, como será exemplificado no Capítulo 4, no caso dos grupos simétricos  $S_n$  e dos grupos das permutações com sinal  $S_n^B$ .

Vamos assumir que  $W$  é um grupo arbitrário e que  $S \subseteq W$  é um subconjunto gerador tal que  $s^2 = e$ , para todo  $s \in S$ . Os conceitos de comprimento  $\ell(w)$ ,  $w \in W$  e palavra reduzida  $s_1 s_2 \dots s_k$ ,  $s_i \in S$  podem ser definidos como anteriormente. Note, entretanto, que as propriedades (i) e (v) da Proposição 2.23 não são mais necessariamente verdadeiras; tudo o que podemos dizer é que  $|\ell(sw) - \ell(w)| \leq 1$ , já que  $\ell(sw) = \ell(w)$  é agora também uma possibilidade.

Dizer que um par  $(W, S)$  tem “Propriedade de Troca” significa que:

**Propriedade de Troca:** Sejam  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  uma expressão reduzida e  $s \in S$ . Se  $\ell(sw) < \ell(w)$ , então  $sw = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_k$ , para algum  $i \in [k]$ .

Similarmente, dizer que um par  $(W, S)$  tem “Propriedade de Exclusão” significa que:

**Propriedade de Exclusão:** Se  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  e  $\ell(w) < k$ , então  $w = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k$ , para algum  $1 \leq i < j \leq k$ .

**Teorema 2.32.** *Sejam  $W$  um grupo e  $S$  um conjunto de geradores de ordem 2. Então, são equivalentes:*

- (i)  $(W, S)$  é um sistema de Coxeter.
- (ii)  $(W, S)$  tem a Propriedade de Troca.

(iii)  $(W, S)$  tem a Propriedade de Exclusão.

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): É uma consequência da Propriedade de Troca Forte.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): A Proposição 2.30 passa a provar essa implicação, mesmo se  $(W, S)$  não é (a priori) um sistema de Coxeter.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): Seja  $w = s_1 \dots s_k$  e suponha que  $\ell(sw) < \ell(w) = k$ . Pela proposição 2.30, duas letras podem ser excluídas de  $w$  ( $w = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k$ ) resultando em uma nova expressão para  $sw$  ( $sw = ss_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k$ ). Se  $s$  não é uma dessas letras, então  $ss_1 \dots s_k = ss_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k$  e multiplicando à esquerda por  $s$ , obtemos  $w = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k$  o que implica  $\ell(w) < k$ , contradição. Assim,  $s$  deve ser uma das letras excluídas e portanto,  $sw = s_1 \dots \widehat{s}_j \dots s_k$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Seja  $s_1 s_2 \dots s_r = e$  uma relação em um grupo com a propriedade de troca. Então  $r$  deve ser par, digamos  $r = 2k$ . De fato, já vimos que (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii). Assim, pela propriedade de exclusão, se  $\ell(e) = \ell(s_1 s_2 \dots s_r) < r$ , então todas as letras que aparecem na expressão de  $e$  são excluídas aos pares e, como  $\ell(e) = 0$ , segue que  $r = 2k$ . Assim,

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \dots s_{2k} = e &\Rightarrow s_1 s_2 \dots s_k s_{k+1} \dots s_{2k} = e \\ &\Rightarrow s_1 s_2 \dots s_k = s_{2k} \dots s_{k+1} \\ &\Rightarrow s_1 s_2 \dots s_k = s'_1 s'_2 \dots s'_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

Devemos provar que (2.9) é uma consequência de  $(ss')^{m(s,s')} = e$ , onde  $m(s, s')$  é definido como a ordem do produto  $ss'$ , quando este é finito.

A prova é feita por indução em  $k$ . O caso  $k = 1$  é trivial, pois  $s_1 s_2 = e$  implica  $s_1 = s_2 = s'_1$ . Por simplicidade, diremos que uma relação é “fina” se ela pode ser derivada da relação  $(ss')^{m(s,s')} = e$ . Vamos assumir que todas as relações de comprimento menor que  $2k$  são finas.

**Caso 1:**  $s_1 s_2 \dots s_k$  não é reduzida.

Então, existe uma posição  $1 \leq i < k$  tal que  $s_{i+1} s_{i+2} \dots s_k$  é reduzida, mas  $s_i s_{i+1} \dots s_k$  não é. Assim,  $\ell(s_i s_{i+1} \dots s_k) < \ell(s_{i+1} s_{i+2} \dots s_k)$ . Pela propriedade de troca, temos que:

$$s_i s_{i+1} \dots s_k = s_{i+1} \dots \widehat{s}_j \dots s_k.$$

Multiplicando à esquerda por  $s_i$ , obtemos:

$$s_{i+1} \dots s_k = s_i s_{i+1} \dots \widehat{s}_j \dots s_k, \quad (2.10)$$

para algum  $1 < j \leq k$ . Essa relação é de comprimento menor que  $2k$  e, portanto, é fina. Temos que:

$$s_1 \dots s_i (s_{i+1} \dots s_k) = s'_1 \dots s'_i \dots s'_{i+1} \dots s'_k. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos:

$$s_1 s_2 \dots s_i (s_i s_{i+1} \dots \widehat{s}_j \dots s_k) = s'_1 \dots s'_k \Rightarrow s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_k = s'_1 \dots s'_k \text{ (} s_i \text{ foi omitido),}$$

isto é, a relação é de comprimento menor que  $2k$  e, portanto, (2.9) é fina.

**Caso 2:**  $s_1 s_2 \dots s_k$  é reduzida.

Podemos assumir que  $s_1 \neq s'_1$ , pois caso contrário, (2.9) é equivalente a uma relação mais curta. De fato, se  $s_1 = s'_1$ , então  $s_1(s_1 \dots s_k) = s_1(s'_1 \dots s'_k) \Rightarrow s_2 \dots s_k = s'_2 \dots s'_k$ . Pela Propriedade de Troca, temos:

$$\begin{aligned} \ell(s'_1 w) < \ell(w) &\Rightarrow s'_1 w = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_k \Rightarrow w = s'_1 s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_k \\ &\Rightarrow (s_1 \dots s_i)(s_{i+1} \dots s_k) = (s'_1 s_1 \dots s_{i-1})(s_{i+1} \dots s_k) \\ &\Rightarrow s_1 \dots s_i = s'_1 s_1 \dots s_{i-1}, \text{ para algum } 1 \leq i \leq k \end{aligned} \quad (2.12)$$

Temos que:

$$(s_1 \dots s_i) s_{i+1} \dots s_k = s'_1 \dots s'_k. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) em (2.13), obtemos:

$$(s'_1 s_1 \dots s_{i-1}) s_{i+1} \dots s_k = s'_1 \dots s'_k \Rightarrow (s'_1 s_1 \dots \widehat{s}_i) \dots s_k = s'_1 \dots s'_k \text{ (} s_i \text{ foi omitido)} \quad (2.14)$$

e multiplicando à esquerda por  $s'_1$ , temos  $s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_k = s'_2 \dots s'_k$ , isto é, a relação é de comprimento menor que  $2k$  e, portanto, é fina. Daí, (2.14) também é fina.

Se  $i < k$ , então (2.12) é fina. Portanto, (2.13) é fina, pois (2.13) é obtida por substituindo (2.12) em (2.14).

Se  $i = k$ , então precisamos trabalhar um pouco mais. Assim,

$$s_1 \dots s_k = s'_1 s_1 \dots s_{k-1}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.13), obtemos:

$$s_1 s_1 \dots s_{k-1} = s'_1 \dots s'_k \quad (2.16)$$

A equação (2.16) já conhecemos que é fina. Então é suficiente mostrar que (2.15) é fina, pois (2.13) é obtida por substituindo (2.15) em (2.16).

Deixe a equação (2.15) assumir o papel da equação (2.13) e repita todo o argumento do Caso 2. Se não for resolvido ao longo do caminho, a questão será agora (quando chegarmos novamente ao “estágio” (2.15)) reduzida se

$$s'_1 s_1 \dots s_{k-1} = s_1 s'_1 s_1 \dots s_{k-2}$$

é fina. Outra interação reduzirá a relação

$$s_1 s'_1 s_1 \dots s_{k-2} = s'_1 s_1 s'_1 s_1 \dots s_{k-3}$$

e assim por diante. Então, no final, a questão será reduzida a relação

$$s_1 s'_1 s_1 s'_1 \dots = s'_1 s_1 s'_1 s_1 \dots$$

que é, claramente implícita por  $(s_1 s'_1)^{m(s_1, s'_1)} = e$ . □

A Propriedade de Troca é estabelecida acima em sua versão “à esquerda”, pois estamos agindo  $s$  à esquerda de  $w$ . Existe também sua versão “à direita”, substituindo  $sw$  por  $ws$ , que é equivalente como uma consequência do teorema acima.



### 3 Ordem de Bruhat

Um dos aspectos mais notáveis dos grupos de Coxeter, do ponto de vista combinatório, é o papel crucial que é desempenhado nesta teoria por uma certa estrutura de ordem parcial. Essa ordem parcial surge em uma infinidade de maneiras em álgebra e geometria, por exemplo, em decomposições celulares de certas variedades.

Embora a estrutura de ordem seja usada em algumas outras partes de álgebra, o papel da ordem de Bruhat para o estudo dos grupos de Coxeter e as propriedades combinatórias e geométricas dessa relação de ordem são únicas.

Neste capítulo, introduziremos a ordem de Bruhat e derivamos suas propriedades combinatórias básicas. A referência principal é o Capítulo 2 do [1].

#### 3.1 Definição e primeiros exemplos

Sejam  $(W, S)$  um sistema de Coxeter e  $T = \{wsw^{-1}; w \in W, s \in S\}$  o conjunto de reflexões.

**Definição 3.1.** Sejam  $u, w \in W$ . Então:

- (i)  $u \xrightarrow{t} w$  significa que  $u^{-1}w = t \in T$  e  $\ell(u) < \ell(w)$ .
- (ii)  $u \longrightarrow w$  significa que  $u \xrightarrow{t} w$ , para algum  $t \in T$ .
- (iii)  $u \leq w$  significa que existem  $u_i \in W$  tal que

$$u = u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow u_{k-1} \longrightarrow u_k = w .$$

O *grafo de Bruhat* é o grafo dirigido cujos nós são elementos de  $W$  e cujas arestas são dadas por (ii). A *ordem de Bruhat* é a relação de ordem parcial no conjunto  $W$  definida por (iii).

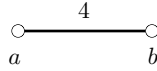
As seguintes observações são imediatas:

- (i)  $u < w$  implica  $\ell(u) < \ell(w)$ .
- (ii)  $u < ut \Leftrightarrow \ell(u) < \ell(ut)$ , para todo  $u \in W$  e  $t \in T$ .
- (iii) O elemento identidade  $e$  satisfaz  $e \leq w$ , para todo  $w \in W$ , ou seja, qualquer palavra reduzida  $w = s_1 \dots s_q$  induz

$$e \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_1 s_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow s_1 \dots s_q = w .$$

Desde que a ordem de Bruhat é o fechamento transitivo das relações primárias  $u \xrightarrow{t} ut$ , pode parecer neste estágio que o conceito favorece a multiplicação no lado direito, porém essa impressão é falsa.

**Exemplo 3.2.** Considere o grupo diedral  $I_2(4) \cong B_2$  com grafo de Coxeter



Então  $T = \{a, b, aba, bab\}$  e o grupo tem o seguinte diagrama sob a ordem de Bruhat:

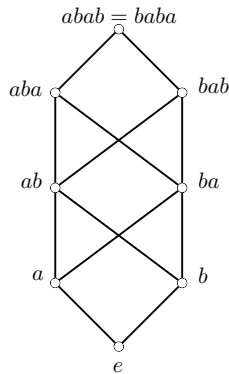


Figura 1 – Ordem de Bruhat de  $B_2$ .

Para obter o grafo Bruhat de  $B_2$ , direcione todas as arestas da figura 1 para cima e adicione as arestas  $e \rightarrow aba$ ,  $e \rightarrow bab$ ,  $a \rightarrow abab$  e  $b \rightarrow baba$ .

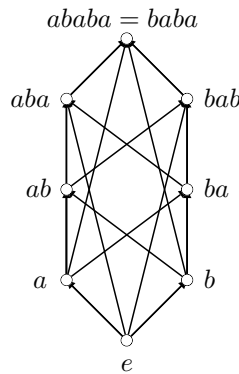


Figura 2 – Grafo de Bruhat de  $B_2$ .

A ordem de Bruhat de um grupo diedral geral  $I_2(m)$  tem a mesma estrutura: um conjunto parcialmente ordenado graduado de comprimento  $m$  com dois elementos em cada nível de classificação, exceto a parte superior e inferior, e com todas as relações de ordem entre os níveis de classificação sucessivos.

A ordem de Bruhat dos grupos simétricos  $S_n$  e a dos grupos das permutações com sinal  $S_n^B$  será discutida no Capítulo 4.

### 3.2 Propriedades básicas

Seja  $(W, S)$  um sistema de Coxeter. Vamos estabelecer duas propriedades fundamentais da ordem de Bruhat: “Propriedade da Subpalavra” e “Propriedade de Cadeia”. Elas são consequências do lema a seguir:

**Definição 3.3.** Uma *subpalavra* de uma palavra  $s_1 s_2 \dots s_q$  é uma palavra da forma  $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ , onde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q$ .

**Lema 3.4.** Para  $u, w \in W$ ,  $u \neq w$ , seja  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  uma expressão reduzida e suponha que alguma expressão reduzida para  $u$  é uma subpalavra de  $w$ . Então, existe  $v \in W$  tal que:

(i)  $v > u$ .

(ii)  $\ell(v) = \ell(u) + 1$ .

(iii) Alguma expressão reduzida para  $v$  é uma subpalavra de  $w$ .

*Demonstração.* De todas as expressões reduzidas

$$u = s_1 \dots \widehat{s}_{i_1} \dots \widehat{s}_{i_k} \dots s_q, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q,$$

escolha uma tal que  $i_k$  é minimal. Seja  $t = s_q s_{q-1} \dots s_{i_k} \dots s_{q-1} s_q$ . Então,

$$ut = s_1 \dots \widehat{s}_{i_k} \dots \widehat{s}_{i_{k-1}} \dots s_{i_k} \dots s_q$$

e daí  $\ell(ut) \leq \ell(u) + 1$ . Afirmamos que  $ut > u$ . De fato, suponhamos o contrário, isto é,  $ut < u$ . Logo, pela Propriedade de Troca Forte, uma das duas possibilidades abaixo ocorre:

1)  $t = s_q s_{q-1} \dots s_p \dots s_{q-1} s_q$ , para algum  $p > i_k$

2)  $t = s_q \dots \widehat{s}_{i_k} \dots \widehat{s}_{i_d} \dots s_r \dots \widehat{s}_{i_d} \dots \widehat{s}_{i_k} \dots s_q$ , para algum  $r < i_k, r \neq i_j$ .

No primeiro caso,

$$\begin{aligned} w &= wt^2 = (s_1 s_2 \dots s_q)(s_q \dots s_{i_k} \dots s_q)(s_q \dots s_p \dots s_q) \\ &= s_1 \dots \widehat{s}_{i_k} \dots \widehat{s}_p \dots s_q \end{aligned}$$

que contradiz  $\ell(w) = q$ . Similarmente, no segundo caso,

$$\begin{aligned} u &= ut^2 = (s_1 \dots \widehat{s}_{i_1} \dots \widehat{s}_{i_k} \dots s_q)(s_q \dots \widehat{s}_{i_k} \dots s_i \dots \widehat{s}_{i_k} \dots s_q)(s_q \dots s_{i_k} \dots s_q) \\ &= s_1 \dots \widehat{s}_{i_1} \dots \widehat{s}_r \dots s_{i_k} \dots s_q \end{aligned}$$

que contradiz a minimalidade de  $i_k$ .

Fazendo  $v = ut$ , temos provado o resultado. □

**Teorema 3.5** (Propriedade da Subpalavra). *Seja  $w = s_1 s_2 \dots s_q$  expressão reduzida. Então,*

$$u \leq w \Leftrightarrow \text{existe uma expressão reduzida} \\ u = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}, \text{ com } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q.$$

*Demonstração.*  $\Rightarrow$ ) Suponha que  $u = u_0 \xrightarrow{t_1} u_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_m} u_m = w$ . Então, pela Propriedade de Troca,

$$u_{m-1}^{-1} u_m = t_m \Rightarrow u_{m-1} = u_m t_m = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots s_q,$$

para algum  $i$ , e similarmente,  $u_{m-2} = u_{m-1} t_{m-1} = u_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_q$  e assim para  $u_{m-3}, u_{m-4}, \dots$ . Finalmente, obtemos uma expressão para  $u$  que é uma subpalavra de  $s_1 s_2 \dots s_q$  (com  $m$  letras excluídas). Pela Propriedade de Exclusão, esta contém uma subpalavra reduzida que é a mais nova expressão para  $u$ .

$\Leftarrow$ ) Segue do Lema 3.4 via indução em  $\ell(w) - \ell(u)$ .  $\square$

**Corolário 3.6.** *Para  $u, z \in W$  são equivalentes:*

(i)  $u \leq z$

(ii) *Toda expressão reduzida para  $z$  tem uma palavra que é uma expressão reduzida para  $u$ .*

(iii) *Alguma expressão reduzida para  $z$  tem uma subpalavra que é uma expressão reduzida para  $u$ .*

**Corolário 3.7.** *A aplicação  $w \mapsto w^{-1}$  é um automorfismo da ordem de Bruhat, isto é,  $u \leq w \Leftrightarrow u^{-1} \leq w^{-1}$ .*

*Demonstração.* A relação subpalavra não é afetada por reverter todas as expressões, ou seja,

$$u \leq w \Leftrightarrow u \text{ é uma subpalavra de } w \Leftrightarrow u^{-1} \text{ é uma subpalavra de } w^{-1} \Leftrightarrow u^{-1} \leq w^{-1}. \square$$

**Teorema 3.8** (Propriedade da Cadeia). *Se  $u < w$  então existe uma cadeia  $u = u_0 < u_1 < \dots < u_k = w$  tal que  $\ell(u_i) = \ell(u) + i$ , para  $1 \leq k$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.4, se  $u_i > u_{i-1}$  então  $\ell(u_i) = \ell(u_{i-1}) + 1$ . Pela Propriedade da Subpalavra, existe uma expressão reduzida para  $u_{i-1}$ .  $\square$

**Definição 3.9.** Um par  $(u, w)$  tal que  $u < w$  e não existe  $z$  tal que  $u < z < w$  é chamado uma *relação de cobertura* na ordem de Bruhat.

Pela Propriedade de Cadeia, uma relação de cobertura significa que  $u < w$  e  $\ell(w) = \ell(u) + 1$ . A Propriedade de Cadeia mostra que a ordem de Bruhat é um conjunto parcialmente ordenado graduado, cuja função posto é a função comprimento.

**Proposição 3.10** (Propriedade de Levantamento). *Suponha  $u < w$  e  $s \in D_L(w) \setminus D_L(u)$ . Então,  $u \leq sw$  e  $su \leq w$ .*

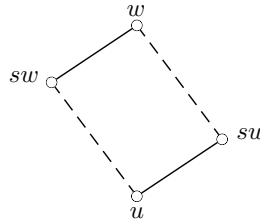


Figura 3 – Propriedade de Levantamento

*Demonstração.* Denotamos  $\alpha \prec \beta$  a relação subpalavra entre uma palavra  $\beta$  e uma subpalavra  $\alpha$ . Escolha uma decomposição reduzida  $sw = s_1 s_2 \dots s_q$ . Então,  $w = s s_1 s_2 \dots s_q$  é também reduzida e existe uma subpalavra reduzida

$$u = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \prec s s_1 s_2 \dots s_q = w.$$

Lembre-se da Definição 2.28:

$$D_L(w) = T_L(w) \cap S = \{s \in S; \ell(sw) < \ell(w)\}.$$

Como  $s \in D_L(w) \setminus D_L(u)$ , então  $su > u$ , para algum  $s \in S$ . Assim,  $s_{i_1} \neq s$ . Portanto,

$$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \prec s_1 s_2 \dots s_q \Rightarrow u \leq sw$$

e

$$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \prec s s_1 s_2 \dots s_q \Rightarrow su \leq w \quad \square$$

A Propriedade de Levantamento tem os seguintes corolários sobre configurações locais na ordem de Bruhat.

**Corolário 3.11.** (i) *Para  $s \in S$ ,  $t \in T$ ,  $s \neq t$  tal que  $w \triangleleft sw$  e  $w \triangleleft tw$  tem-se  $sw \triangleleft stw$  e  $tw \triangleleft stw$ .*

(ii) *Para  $s, s' \in S$  tal que  $w \triangleleft sw$  e  $w \triangleleft ws'$  tem-se  $sw \triangleleft sws'$  e  $ws' \triangleleft sws'$  ou  $w = sws'$ .*

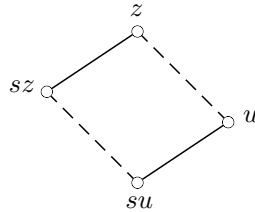
**Definição 3.12.** Um conjunto parcialmente ordenado  $P$  é dirigido se para quaisquer  $u, w \in P$  existe  $z \in P$  tal que  $u \leq z$  e  $w \leq z$ .

**Proposição 3.13.** *A ordem de Bruhat é um conjunto parcialmente ordenado dirigido.*

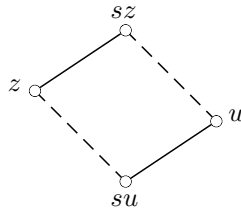
*Demonstração.* Usaremos indução em  $\ell(u) + \ell(w)$ .

Se  $\ell(u) + \ell(w) = 0$  então  $\ell(u) = \ell(w) = 0$  e, portanto,  $w = u = e$ . Logo, existe  $z \in W$  tal que  $u = w \leq z$ .

Suponha  $\ell(u) + \ell(w) > 0$ . Podemos assumir  $\ell(u) > 0$ . Então  $u \neq e$  e escolhemos  $s \in S$  tal que  $su < u$ . Assim,  $\ell(su) + \ell(w) < \ell(u) + \ell(w)$ . Pela hipótese de indução, existe  $z \in W$  tal que  $su, w \leq z$ . Agora, se  $sz < z$  temos, pela propriedade de levantamento,  $u \leq z$ . Logo,  $\{u, w\}$  tem limite superior  $z$ .



Caso  $sz > z$ , pela propriedade de levantamento,  $u \leq sz$ . Logo,  $\{u, w\}$  tem limite superior  $sz$ .



□

**Lema 3.14.** *Suponha que  $u < ut$  e  $v < tv$ , para  $u, v \in W$ ,  $t \in T$ . Então,  $uv < utv$ .*

*Demonstração.* Suponhamos o contrário, isto é,  $uv > utv = t'uv$ , onde  $t' = utu^{-1}$ . Sejam  $u = a_1 \dots a_k$  e  $v = b_1 \dots b_q$  expressões reduzidas. Então, pela Propriedade de Troca Forte,

$$t'uv = \begin{cases} a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_k b_1 \dots b_j \dots b_q \\ \text{ou} \\ a_1 \dots a_i \dots a_k b_1 \dots \hat{b}_j \dots b_q \end{cases}$$

para algum  $i$  e  $j$ . No primeiro caso, temos:

$$utv = t'uv \Rightarrow ut = t'u = a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_k < a_1 \dots a_i \dots a_k = u$$

e no segundo caso,

$$utv = t'uv = ub_1 \dots \hat{b}_j \dots b_q \Rightarrow tv = b_1 \dots \hat{b}_j \dots b_q < b_1 \dots b_j \dots b_q = v.$$

Logo, em ambos os casos, chegamos a uma contradição. □

### 3.3 O caso finito

Se  $W$  é finito e dirigido (Proposição 3.13), dizemos que  $W$  possui um maior elemento e denotaremos esse elemento de comprimento máximo por “ $w_0$ ”. Nesta seção, derivamos algumas das propriedades básicas de  $w_0$  e também discutimos automorfismos da ordem de Bruhat.

**Proposição 3.15.** (i) Se  $W$  é finito, existe um único elemento  $w_0 \in W$  tal que  $w \leq w_0$ , para todo  $w \in W$ .

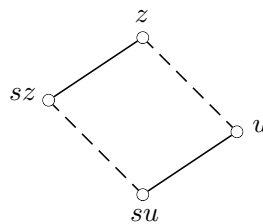
(ii) Por outro lado, suponha que  $(W, S)$  tem um elemento  $z$  tal que  $D_L(z) = S$ . Então,  $W$  é finito e  $z = w_0$ .

*Demonstração.* (i) Suponha que  $w_0$  e  $z_0$  sejam dois elementos de comprimento máximo em  $W$ . Então:

$$w \leq w_0, \text{ para todo } w \in W \text{ e } w \leq z_0, \text{ para todo } w \in W.$$

Em particular,  $z_0 \leq w_0$  e  $w_0 \leq z_0$ . Portanto,  $z_0 = w_0$ .

(ii) Vamos provar que  $u \leq z$ , para todo  $u \in W$ , usando indução no comprimento de  $u$ . Se  $\ell(u) = 0$  então  $u = e$  e, portanto,  $u \leq z$ . Suponha  $\ell(u) > 0$ , então  $u \neq e$ . Assim, podemos encontrar  $s \in S$  tal que  $su < u$ . Logo,  $\ell(su) < \ell(u)$ . Pela hipótese de indução,  $su \leq z$ . Como  $S = D_L(z)$ , temos  $\ell(sz) < \ell(z)$ , para todo  $s \in S$ , isto é,  $sz < z$ . Pela Propriedade de Levantamento,  $u \leq z$ . Logo,  $W = [e, z]$  é finito.



□

Dizemos que  $w_0$  é *involução principal* de  $W$ .

**Proposição 3.16.** A involução principal  $w_0$  de um grupo finito  $W$  tem as seguintes propriedades:

(i)  $w_0^2 = e$ .

(ii)  $\ell(w w_0) = \ell(w_0) - \ell(w)$ , para todo  $w \in W$ .

(iii)  $T_L(w_0) = T \setminus T_L(w)$ , para todo  $w \in W$ .

(iv)  $\ell(w_0) = |T|$ .

*Demonstração.* (i) Pela Proposição 2.23, item (iv),  $\ell(w_0^{-1}) = \ell(w_0)$  e como  $w_0$  tem comprimento maximal segue, pela unicidade de  $w_0$ , que  $w_0 = w_0^{-1}$ .

(ii) Temos que  $\ell(w_0) \geq \ell(w_0) - \ell(w)$ , pois  $\ell(w_0) \geq |\ell(w) - \ell(w_0)|$ . Para mostrar que  $\ell(w_0) \leq \ell(w_0) - \ell(w)$  usaremos indução em  $\ell(w_0) - \ell(w)$ .

Para  $w = w_0$ , temos  $\ell(w_0 w) = \ell(e) = 0 = \ell(w_0) - \ell(w)$ .

Para  $w < w_0$ , pelo item (ii) da Proposição 3.15, podemos escolher  $s \in S$  tal que  $w < sw$ . Assim, temos que  $\ell(w_0) - \ell(sw) < \ell(w_0) - \ell(w)$  e, por hipótese indutiva, segue que  $\ell(sw_0) \leq \ell(w_0) - \ell(sw)$ . Então,

$$\begin{aligned} \ell(w_0 w) &\leq \ell(sw_0) + 1 \leq \ell(w_0) - \ell(sw) + 1 \\ &= \ell(w_0) - (\ell(w) + 1) + 1 = \ell(w_0) - \ell(w) \end{aligned}$$

(iii) Uma consequência de (ii) é que, para todo  $t \in T$  e  $w \in W$ :  $tw < w \Leftrightarrow tww_0 > ww_0$ .

(iv) Fixando  $w = e$  na equação (iii), temos

$$T_L(w_0) = T \setminus T_L(e) = \{t \in T; \ell(te) > \ell(e)\} = T,$$

e, pelo Corolário 2.27, obtemos  $\ell(w_0) = |T_L(w_0)| = |T|$ . □

**Corolário 3.17.** (i)  $\ell(w_0 w) = \ell(w_0) - \ell(w)$ , para todo  $w \in W$ .

(ii)  $\ell(w_0 w w_0) = \ell(w)$ , para todo  $w \in W$ .

*Demonstração.* (i)  $\ell(w_0 w) = \ell((w_0 w)^{-1}) = \ell(w^{-1} w_0) = \ell(w_0) - \ell(w^{-1}) = \ell(w_0) - \ell(w)$ .

(ii)  $\ell(w_0 w w_0) = \ell(w_0 (w w_0)) = \ell(w_0) - \ell(w w_0) = \ell(w_0) - (\ell(w_0) - \ell(w)) = \ell(w)$ . □

Translação e conjugação pela involução principal  $w_0$  induz (anti)automorfismos da ordem de Bruhat, como podemos ver pela Proposição 3.16, item (ii), e Corolário 3.17.

**Proposição 3.18.** Para a ordem de Bruhat em um grupo de Coxeter finito, valem:

(i)  $w \mapsto w w_0$  e  $w \mapsto w_0 w$  são anti-automorfismos.

(ii)  $w \mapsto w_0 w w_0$  é um automorfismo.



*Demonstração.* (i) Para  $w \mapsto ww_0$ , temos:

$$\begin{aligned} u \leq w &\Leftrightarrow \ell(u) < \ell(w) \Leftrightarrow -\ell(u) > -\ell(w) \\ &\Leftrightarrow \ell(w_0) - \ell(u) > \ell(w_0) - \ell(w) \\ &\Leftrightarrow \ell(uw_0) > \ell(w_0w) \\ &\Leftrightarrow uw_0 \geq w_0w \end{aligned}$$

isto é, a aplicação reverte a ordem.

(ii) Para  $w \mapsto w_0ww_0$ , temos:

$$\begin{aligned} u \leq w &\Leftrightarrow \ell(u) < \ell(w) \Rightarrow \ell(w_0uw_0) < \ell(w_0ww_0) \\ &\Leftrightarrow w_0uw_0 \leq w_0ww_0 \end{aligned}$$

isto é, a aplicação preserva a ordem. □

### 3.4 Subgrupos parabólicos e quocientes

**Definição 3.19.** Para  $J \subseteq S$ , seja  $W_J$  o subgrupo de  $W$  gerado pelo conjunto  $J$ . Subgrupos dos grupos de  $(W, S)$  dessa forma são chamados *parabólicos*.

Nessa seção descreveremos as propriedades combinatórias básicas dos subgrupos parabólicos. A subscrita “ $J$ ” acrescentada para símbolos familiares sempre refere a um subgrupo desse tipo. Por exemplo, “ $\ell_J(w)$ ” refere a função comprimento de  $W_J$  com respeito ao sistema de geradores involutivos.

**Proposição 3.20.** (i)  $(W_J, J)$  é grupo de Coxeter.

(ii)  $\ell_J(w) = \ell(w)$ , para todo  $w \in W_J$ .

(iii)  $W_I \cap W_J = W_{I \cap J}$ .

(iv)  $\langle W_I \cup W_J \rangle = W_{I \cup J}$ .

(v)  $W_I = W_J \Rightarrow I = J$ .

*Demonstração.* Seja  $w \in W_J$ . Por definição,  $w = s_1s_2 \dots s_q$ , para algum  $s_i \in J$  e, pela Propriedade de Exclusão, podemos assumir que essa é reduzida em  $W$  e, portanto, em  $W_J$ . Isso prova (ii).

Como  $\ell_J(w) = \ell(w)$ , a propriedade de troca vale em  $(W_J, J)$  como um caso especial da propriedade de troca em  $(W, S)$ . Portanto, vale (i).

As afirmações (iii) e (v) seguem do Corolário 2.31 (isto é, se  $w$  admite duas expressões reduzidas então o conjunto das letras aparecendo nas duas expressões é igual) e (iv) é elementar. □

O diagrama de Coxeter para  $(W_J, J)$  é obtido por removendo todos os nós em  $S \setminus J$  e suas arestas incidentes do diagrama para  $(W, S)$ . Se  $W_J$  é finito ele tem uma involução principal, que será denotada por:

$$w_0(J) = \text{involução principal de } W_J.$$

Então, por exemplo,  $w_0(\emptyset) = e$  e  $w_0(S) = w_0$  (se  $W$  é finito).

Note que  $w_0(I) \neq w_0(J)$  se  $I \neq J$ .

Os subgrupos parabólicos possuem sistemas completos de representantes de classes laterais combinatoriamente distintos, ou seja, cada classe lateral tem um único membro de menor comprimento. Para distinguir esses e outros sistemas de representantes de classes laterais, precisaremos dos seguintes conceitos.

**Definição 3.21.** Para  $I \subseteq J \subseteq S$ , sejam

$$\begin{aligned} D_I^J &= \{w \in W; I \subseteq D_R(w) \subseteq J\}, \\ W^J &= D_\emptyset^{S \setminus J}, \\ D_I &= D_I^I. \end{aligned}$$

Conjuntos da forma  $D_I^J$  são chamados *classes descendentes* (à direita). As classes descendentes especiais

$$W^J = \{w \in W; ws > w, \text{ para todo } s \in J\} \quad (3.1)$$

são chamadas *quocientes*.

**Lema 3.22.** Um elemento  $w \in W^J$  se, e somente se, nenhuma expressão reduzida para  $w$  termina com uma letra de  $J$ .

*Demonstração.* Segue do Corolário 2.29. □

**Proposição 3.23.** Seja  $J \subseteq S$ . Então, valem:

- (i) Todo  $w \in W$  tem uma fatoração única  $w = w^J \cdot w_J$  tal que  $w^J \in W^J$  e  $w_J \in W_J$ .
- (ii) Para essa fatoração,  $\ell(w) = \ell(w^J) + \ell(w_J)$ .

*Demonstração. Existência:* Escolha  $s_1 \in J$  tal que  $ws_1 < w$ , se tal  $s_1$  existe. Continue escolhendo  $s_i \in J$  tal que  $ws_1 \dots s_i < ws_1 \dots s_{i-1}$  enquanto que tal  $s_i$  pode ser encontrado. O processo deve terminar depois de no máximo  $\ell(w)$  passos. Se ele terminar com  $w_k = ws_1 \dots s_k$ , então  $w_k s > w_k$ , para todo  $s \in J$ , isto é,  $w_k \in W^J$ . Agora, seja  $z = s_k s_{k-1} \dots s_1 \in W_J$ . Temos que  $w = w_k z$ , e por construção,  $\ell(w) = \ell(w^J) + \ell(w_J)$ .

**Unicidade:** Suponha que  $w = uv = xy$ , com  $u, x \in W^J$  e  $v, y \in W_J$ . Sejam  $u = s_1 s_2 \dots s_k$  e  $vy^{-1} = s'_1 s'_2 \dots s'_q$  com a primeira expressão reduzida,  $s_i \in S$ ,  $s'_j \in J$ . Então,

$$x = uv y^{-1} = s_1 s_2 \dots s_k s'_1 s'_2 \dots s'_q.$$

Daí, podemos extrair uma subpalavra reduzida para  $x$ . Ela não pode terminar em alguma letra  $s'_j$ , pois  $x \in W^J$ , isto é,  $xs > x$ , para todo  $s \in J$ . Portanto, ela é uma subpalavra de  $s_1 s_2 \dots s_k$  e  $x \leq u$ . Por simetria,  $u \leq x$ . Logo,  $u = x$  e  $v = y$ .  $\square$

As seguintes afirmações são consequências imediatas da Proposição 3.23.

**Corolário 3.24.** (i) Cada classe lateral à esquerda  $wW_J$  tem um único representante de comprimento minimal. O sistema de tais representantes minimais de classes laterais é  $W^J = D_\emptyset^{S \setminus J}$ .

(ii) Se  $W_J$  é finito, então cada classe lateral à esquerda  $wW_J$  tem um único representante de comprimento maximal. O sistema de tais representantes maximais de classes laterais é  $D_J^S$ .

A proposição anterior e seu corolário são ilustrados a seguir:

**Exemplo 3.25.** Seja  $S = \{a, b, c\}$ ,  $W = \langle S \rangle$  satisfazendo

$$\begin{cases} (ab)^4 = e \\ (bc)^3 = e \\ (ac)^2 = e \\ a^2 = b^2 = c^2 = e \end{cases}$$

isto é, o diagrama de Coxeter de  $W$  é

$$B_3 : \begin{array}{c} 4 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ a \quad b \quad c \end{array}$$

e  $|W| = 48$ . Seja  $J_2 \subseteq S$ ,  $J_2 = \{a, b\}$ ,  $W_{J_2} = \langle J_2 \rangle$  satisfazendo

$$\begin{cases} (ab)^4 = e \\ a^2 = b^2 = e \end{cases}$$

isto é, o diagrama de Coxeter de  $W_{J_2}$  é

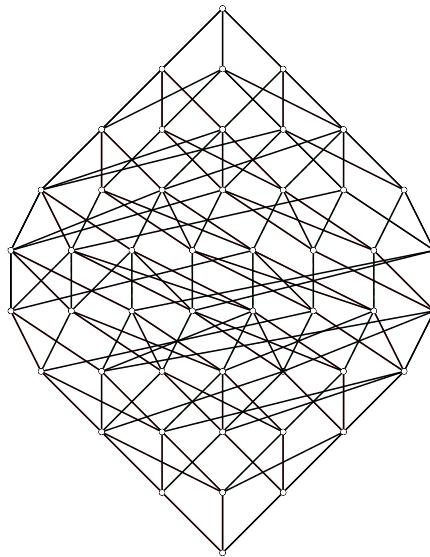
$$B_2 : \begin{array}{c} 4 \\ \circ \text{---} \circ \\ a \quad b \end{array}$$

e  $W_{J_2} = \{e, a, b, ab, ba, aba, bab, abab\} \Rightarrow |W_{J_2}| = 8$ . Temos que:

Tabela 2 – Classes laterais  $wW_{J_2}$ .

$eW_{J_2}$	$cW_{J_2}$	$bcW_{J_2}$	$abcW_{J_2}$	$babW_{J_2}$	$cbabcW_{J_2}$
$e$					
$a, b$	$c$				
$ab, ba$	$ca, cb$	$bc$			
$aba, bab$	$cab, cba$	$bca, bcb$	$abc$		
$abab$	$caba, cbab$	$bcab, bcbab$	$abca, abcb$	$babca, babcb$	
	$cabab$	$bcaba, bcbab$	$abcab, abcba$	$babca, babcb$	$cbabc$
		$bcabab$	$abcaba, abcbab$	$babcab, babcba$	$cbabca, cbabcb$
			$abcabab$	$babcaba, babcbab$	$cbabcaba, cbabcbab$
				$babcabab$	$cbabcaba, cbabcbab$
					$cbabcabab$

A Tabela 2 contém todos os 48 elementos do grupo  $W = B_3$ , distribuídos de acordo com a classe lateral que pertencem. Observe que os elementos numa mesma linha da Tabela 2 tem mesmo comprimento e o número de elementos em cada linha é igual ao número de elementos que aparece em cada linha do diagrama da ordem Bruhat de  $B_3$  ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Ordem de Bruhat de  $B_3$ .

Logo,

$$W^{J_2} = \{e, c, bc, abc, babc, bcabc\}$$

$$D_{J_2}^S = \{abab, cabab, bcabab, abcabab, babcabab, cbabcabab\}$$

$$W = eW_{J_2} \dot{\cup} cW_{J_2} \dot{\cup} bcW_{J_2} \dot{\cup} abcW_{J_2} \dot{\cup} babW_{J_2} \dot{\cup} cbabcW_{J_2}$$

Na Figura 5, são desenhadas as 6 classes laterais de  $W_{J_2}$  e são rotulados os elementos maximais e minimais de cada classe.

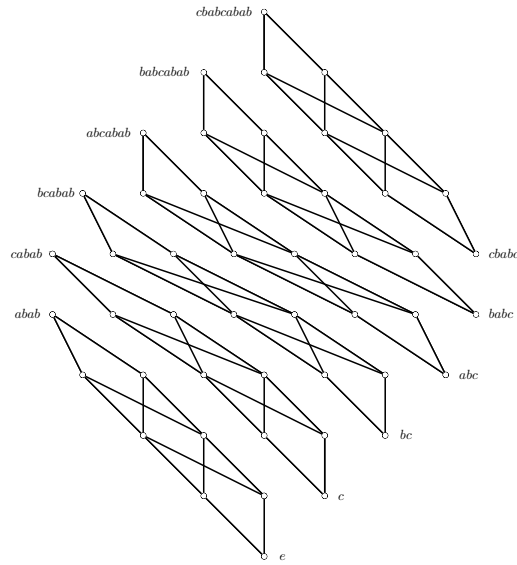


Figura 5 –  $W = B_3$  e classes laterais  $wW_{J_2}$  com  $W_{J_2} = \langle \{a, b\} \rangle$ .

Agora, seja  $J_1 \subseteq S$ ,  $J_1 = \{a, c\}$ ,  $W_J = \langle J \rangle$  satisfazendo

$$\begin{cases} (ac)^2 = e \\ a^2 = c^2 = e \end{cases}$$

isto é, o diagrama de Coxeter de  $W_{J_1}$  é



e  $W_{J_1} = \{e, a, c, ac\} \Rightarrow |W_{J_1}| = 4$ . Neste caso, temos que:

$$W^{J_1} = \{e, b, ab, cb, cab, bab, bcab, cbab, bcbac, abcab, abcbab, babcbab\}$$

$$D_{J_1}^S = \{ac, bac, abac, cbac, cabac, babac, bcabac, cbabac, bcbabac, abcabac, abcbabac, babcbabac\}$$

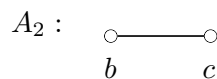
$$W = eW_{J_1} \dot{\cup} bW_{J_1} \dot{\cup} abW_{J_1} \dot{\cup} cbW_{J_1} \dot{\cup} cabW_{J_1} \dot{\cup} babW_{J_1} \dot{\cup} bcabW_{J_1} \dot{\cup} \\ \dot{\cup} cbabW_{J_1} \dot{\cup} bcbabW_{J_1} \dot{\cup} abcabW_{J_1} \dot{\cup} abcbabW_{J_1} \dot{\cup} babcbabW_{J_1}$$

Na Figura 6, são desenhadas as 12 classes laterais de  $W_{J_1}$  e são rotulados os elementos maximais e minimais de cada classe. Note que os vértices da Figura 4 foram rearranjados de modo a obter uma melhor visualização das classes laterais  $wW_{J_1}$ , para  $J_1 = \{a, c\}$ .

Finalmente, seja  $J_0 \subseteq S$ ,  $J_0 = \{b, c\}$ ,  $W_{J_0} = \langle J_0 \rangle$  satisfazendo

$$\begin{cases} (bc)^3 = e \\ b^2 = c^2 = e \end{cases}$$

isto é, o diagrama de Coxeter de  $W_{J_0}$  é



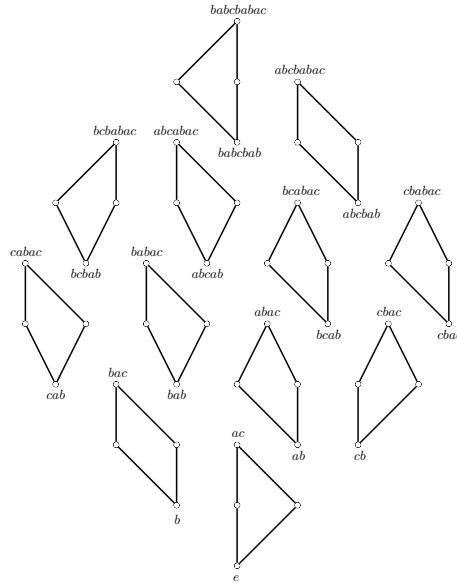


Figura 6 –  $W = B_3$  e classes laterais  $wW_{J_1}$  com  $W_{J_1} = \langle \{a, c\} \rangle$ .

e  $W_{J_0} = \{e, b, c, bc, cb, bcb\} \Rightarrow |W_{J_0}| = 6$ . Neste caso, temos que:

$$W^{J_0} = \{e, a, ba, aba, cba, caba, bcaba, abcaba\}$$

$$D_{J_0}^S = \{cbc, abcb, babcb, ababcb, cbabcb, cababcb, bcababcb, abcababcb\}$$

$$W = eW_{J_0} \dot{\cup} aW_{J_0} \dot{\cup} baW_{J_0} \dot{\cup} abaW_{J_0} \dot{\cup} cbaW_{J_0} \dot{\cup}$$

$$\dot{\cup} cabaW_{J_0} \dot{\cup} bcabaW_{J_0} \dot{\cup} abcabaW_{J_0}$$

Como no caso da Figura 7, os vértices da Figura 4 foram rearranjados de modo a obter uma melhor visualização das 8 classes laterais  $wW_{J_0}$ , para  $J_0 = \{b, c\}$ , como mostra a Figura 7.

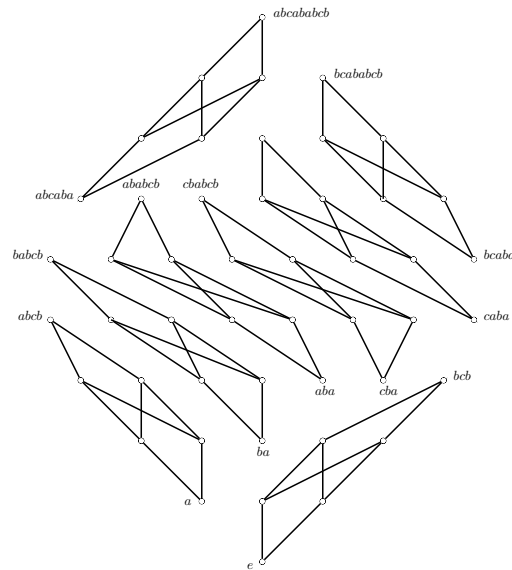


Figura 7 –  $W = B_3$  e classes laterais  $wW_{J_0}$  com  $W_{J_0} = \langle \{b, c\} \rangle$ .

Suponha que  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  e para  $i = 1, \dots, n$  seja

$$Q_i = (W_{\{s_1, \dots, s_i\}})^{\{s_1, \dots, s_{i-1}\}}.$$

Então  $Q_1 = W_{\{s_1\}} = \{e, s_1\}$  e  $Q_i$ , para  $i \geq 2$ , é um sistema de representantes minimais de classes laterais à esquerda de  $W_{\{s_1, \dots, s_{i-1}\}}$  em  $W_{\{s_1, \dots, s_i\}}$  e, assim,

$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{q_n \in Q_n} q_n W_{\{s_1, \dots, s_{n-1}\}} = \bigcup_{q_n \in Q_n} \left( \bigcup_{q_{n-1} \in Q_{n-1}} q_n q_{n-1} W_{\{s_1, \dots, s_{n-2}\}} \right) \\ &= \dots = \bigcup_{q_n \in Q_n} \left( \bigcup_{q_{n-1} \in Q_{n-1}} q_n q_{n-1} \dots \left( \bigcup_{q_1 \in Q_1} q_1 I \right) \right) \\ &\Rightarrow w = q_n q_{n-1} \dots q_1. \end{aligned}$$

Repetindo a aplicação da Proposição 3.23, obtemos:

**Corolário 3.26.** *A aplicação produto  $Q_1 \times \dots \times Q_n \rightarrow W$ , definida por*

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \mapsto q_n q_{n-1} \dots q_1,$$

*é uma bijeção satisfazendo  $\ell(q_n q_{n-1} \dots q_1) = \ell(q_1) + \ell(q_2) + \dots + \ell(q_n)$ .*

As construções anteriores podem ser “espelhadas”. Existe um sistema completo

$${}^J W = \{w \in W; D_L(w) \subseteq S \setminus J\} = (W^J)^{-1}$$

de representantes de comprimento minimal de classes laterais à direita  $W_J w$ . Todo  $w \in W$  pode ser fatorado unicamente como

$$w = w_J \cdot {}^J w, \text{ onde } w_J \in W_J \text{ e } {}^J w \in {}^J W$$

e então

$$\ell(w) = \ell(w_J) + \ell({}^J w). \quad (3.2)$$

Além disso, um elemento  $w \in {}^J W$  se, e somente se, nenhuma expressão reduzida pra  $w$  começa com uma letra de  $J$ .

### 3.5 Ordem de Bruhat em quocientes

Quocientes  $W^J$  e, mais geralmente, classes descendentes, tem uma interessante estrutura de conjunto parcialmente ordenado sob a ordem de Bruhat. Muito da estrutura encontrada na ordem de Bruhat em todo  $W$  é herdada quando ao restringir para um subconjunto parcialmente ordenado  $W^J$ . Isso pode de certo modo ser entendido como uma transferência de estrutura via aplicação projeção que definiremos a seguir.

**Definição 3.27.** Seja  $J \subseteq S$ . Definimos a aplicação *projeção*  $P^J : W \rightarrow W^J$  por

$$P(w) = w^J.$$

Em outras palavras, a aplicação  $P^J$  envia  $w$  para o representante minimal da classe lateral módulo  $W^J$ .

**Teorema 3.28.** *A aplicação  $P^J$  preserva ordem.*

*Demonstração.* Suponha que  $w_1 \leq w_2$  em  $W$ . Vamos mostrar que  $w_1^J \leq w_2^J$  por indução em  $\ell(w_2)$ .

Note que:  $w_1^J \leq w_1 \leq w_2$ . Portanto, se  $w_2^J = w_2$ , então  $w_1^J \leq w_2^J$ . Caso contrário, existe algum  $s \in J$  tal que  $w_2s < w_2$ . A relação  $w_1^J \leq w_2$  pode ser levantada para  $w_1^J \leq w_2s$ . Por indução,  $w_1^J \leq (w_2s)^J = w_2^J$ .  $\square$

**Corolário 3.29.** *Suponha que  $u \in W^J$ ,  $w \in W$  e  $u \triangleleft w$ . Então, ou  $w = us$ , para algum  $s \in J$ , ou  $w \in W^J$ .*

**Corolário 3.30.**  *$W^J$  é um conjunto parcialmente ordenado dirigido.*

*Demonstração.* Já mostramos que a ordem de Bruhat é um conjunto parcialmente ordenado (ver Proposição 3.13) e que a aplicação  $P^J$  preserva ordem. Portanto, o resultado segue.  $\square$

Em particular, se  $W^J$  é finito, então ele tem um único elemento maximal que será denotado por:

$$w_0^J = \text{involução principal de } W^J.$$

Neste caso,  $w \leq w_0^J$ , para todo  $w \in W^J$ .

Se  $W$  é finito, temos a seguinte relação entre involuções principais:

$$w_0 = w_0^J \cdot w_0(J) \quad \text{e} \quad \ell(w_0) = \ell(w_0^J) + \ell(w_0(J)),$$

ou equivalentemente,  $w_0^J = (w_0)^J$  e  $w_0(J) = (w_0)_J$ . Como  $w_0$  e  $w_0(J)$  são involuções, isto é,  $w_0^2 = e$  e  $(w_0(J))^2 = e$ , segue que  $w_0^J$  é uma involução se, e somente se,  $w_0$  e  $w_0(J)$  comutam. De fato, temos que  $w_0 = w_0^J \cdot w_0(J)$ . Daí,

$$e = w_0^2 = w_0^J \cdot w_0(J) \cdot w_0^J \cdot w_0(J) = (w_0^J)^2 \cdot (w_0(J))^2,$$

isto é,  $w_0^J$  e  $w_0(J)$  comutam. Em particular,

$$w_0^J \text{ é uma involução se } w_0 \text{ pertence ao centro de } W.$$

Essa condição suficiente (mas não necessária) é muitas vezes cumprida.

Quocientes em grupos finitos tem uma notável simetria combinatória.



**Proposição 3.31.** *Seja  $(W, S)$  um sistema de Coxeter finito e seja  $J \subseteq S$ . Então,*

$$\begin{aligned} \alpha : W^J &\rightarrow W^J \\ u &\mapsto w_0 u w_0(J) \end{aligned}$$

*é um antiautomorfismo da ordem de Bruhat, isto é,  $u \leq v \Leftrightarrow \alpha(u) \geq \alpha(v)$ .*

Vamos ilustrar a Proposição 3.31 com um exemplo.

**Exemplo 3.32.** Sejam  $W = B_3$  e  $J = \{a, b\}$ . Já vimos no Exemplo 3.25 que

$$W_J = \{e, a, b, ab, ba, aba, bab, abab\} \text{ e } W^J = \{e, c, bc, abc, babc, bcabc\}.$$

As involuções principais de  $W$  e  $W_J$  são  $w_0 = cbabcabab$  e  $w_0(J) = abab$ , respectivamente.

Dado  $u \in W^J$  temos que  $\alpha(u) = w_0 u w_0(J) = v \in W^J$ . Segue da Proposição 3.16 (item (i)) que  $u = w_0 v w_0(J) = \alpha(v) \in W^J$ . Usando as relações satisfeitas pelos geradores de  $W$  obtemos:

$$\begin{aligned} e &\longrightarrow bcabc \\ c &\longrightarrow babc \\ bc &\longrightarrow abc \end{aligned}$$

O resultado a seguir é uma versão forte do Teorema 3.8 (o caso  $J = \emptyset$ ).

**Teorema 3.33.** *Se  $u < w$  em  $W^J$ , então existem elementos  $w_i \in W^J$ ,  $\ell(w_i) = \ell(u) + i$ , para  $0 \leq i \leq k$ , tal que  $u = w_0 < w_1 < \dots < w_k = w$ .*

**Corolário 3.34.** *Todas as cadeias maximais de  $u$  para  $w$  em  $W^J$  tem o mesmo comprimento.*

## 4 Relações de cobertura

Neste capítulo, vamos estabelecer os principais resultados desta dissertação a respeito das relações de cobertura de certas permutações.

Este capítulo está dividido em duas partes relacionados aos dois exemplos de grupos de Coxeter a serem considerados: o grupo das permutações, o qual está associado ao grafo de tipo A, e o grupo das permutações com sinal, ao qual está associado o grafo de tipo B.

Com os resultados do Capítulo 2, concluímos que tais grupos de permutação são grupos de Coxeter e, em seguida, estudamos a ordem de Bruhat dos mesmos. Depois, introduzimos os subgrupos parabólicos maximais correspondentes a fim de obter a expressão dos representantes minimais que são chamadas de permutações Grassmannianas em cada caso. Para isto, a principal referência são os Capítulos 1, 2 e 8 do [1].

Finalmente, nos dedicamos a obter as relações de cobertura destas permutações. Para o caso de tipo B, seguimos o artigo [5] enquanto o caso do tipo A segue como uma contribuição deste trabalho.

### 4.1 Tipo A

Nesta seção, vamos abordar o sistema de Coxeter determinado pelo grafo de tipo A de acordo com a classificação dada pela Tabela 1.

Vamos abaixo introduzir alguns conceitos básicos.

Fixe um conjunto  $E$ , finito ou infinito. Bijeções  $w : E \rightarrow E$  são chamadas *permutações* de  $E$ . Elas formam um grupo sob a composição que denotaremos por  $S(E)$ . Subgrupos de  $S(E)$  são chamados *grupos de permutações*. Uma *representação por permutação* de um grupo  $W$  é um homomorfismo  $f : W \rightarrow S(E)$ , para algum conjunto  $E$ .

Os grupos finitos  $S_n = S([n])$ , em que  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , são chamados *grupos simétricos*. Suponha que  $E$  é um subconjunto finito de  $\mathbb{Z}$  tal que  $[n]$  ou  $[\pm n]$ . Então, permutações  $w \in S(E)$  serão denotadas por listando todos os valores  $w(i)$  da esquerda para direita na ordem crescente do argumento  $i$  e chamaremos essa notação de *notação completa* ou *notação linha* para  $w$ . Por exemplo, 2537614 denota a permutação  $1 \mapsto 2$ ,  $2 \mapsto 5$ ,  $3 \mapsto 3$ ,  $4 \mapsto 7$ ,  $5 \mapsto 6$ ,  $6 \mapsto 1$ ,  $7 \mapsto 4$ , isto é, um elemento de  $S_7$ .

Escrever  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  para uma permutação  $w$  de um conjunto finito  $E \subseteq \mathbb{Z}$  significa que  $w_i = w(e_i)$ , para  $i$ , onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $E$  na ordem crescente.

Também escrevemos permutações na forma de *ciclos disjuntos* omitindo os 1-ciclos. Por exemplo,  $2537614 = (1, 2, 5, 6)(4, 7)$ . Permutações da forma  $(i, j)$  são chamadas

*transposições.*

Nossa convenção para multiplicação de permutações é ler o produto da direita para esquerda como composição de aplicações. Por exemplo, sejam 31524 e 15243 permutações de  $[n]$ , para  $n = 5$ , expressas na notação completa, temos que:

$$32154 \cdot 14523 = 35421.$$

Uma consequência para  $S_n$  é que multiplicar  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  (notação completa) à direita por uma transposição  $t_{i,j} = (i, j)$  tem o efeito de trocar os valores nas posições  $i$  e  $j$ , e quando multiplicamos à esquerda troca os valores de  $i$  e  $j$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{23154} \cdot t_{1,4} &= \mathbf{53124} \\ t_{1,4} \cdot \mathbf{23154} &= \mathbf{23451} \end{aligned}$$

Essas definições aplicam, em particular, para permutações  $w = w_1 w_2 \dots w_n \in S(E)$ , onde  $E \subseteq \mathbb{Z}$ ,  $|E| = n$ .

#### 4.1.1 $S_n$ como grupo de Coxeter

Essa seção é desenvolvida para uma discussão do grupo simétrico do ponto de vista de um grupo de Coxeter. Nosso objetivo nesta seção será mostrar que  $S_n$  é um grupo de Coxeter.

Os elementos de  $S_n$  são permutações do conjunto  $[n]$ . Como um conjunto de geradores para  $S_n$  tome  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ , onde  $s_i = (i, i+1)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , isto é,  $s_i$  é uma transposição adjacente.

Podemos associar um elemento  $w = s_1 s_2 \dots s_{\ell(w)}$  (escrito como uma expressão reduzida) com uma permutação  $w = w(1)w(2) \dots w(n)$  (escrita na notação completa) por meio de uma ação dos geradores na expressão reduzida de  $w$  no elemento identidade do grupo  $S_n$ , isto é, na permutação identidade  $Id = 12 \dots n$ . Por exemplo, seja  $w = 231 \in S_3$ , cuja expressão reduzida é  $w = s_1 s_2$ . Abaixo ilustramos a ação à direita e, respectivamente, à esquerda, de  $w = s_1 s_2$  na identidade.

$$123 \cdot s_1 s_2 \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array}} \right\} s_1 \\ \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array}} \right\} s_2 \end{array}$$

$$s_1 s_2 \cdot 123 \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array} \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{array}} \right\} s_2 \\ \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array}} \right\} s_1 \end{array}$$

Ao longo dessa seção trataremos apenas de ações à direita.

**Definição 4.1.** O número de inversões de  $w \in S_n$  é dado por:

$$\text{inv}(w) = \text{card}\{(i, j); i < j \text{ e } w(i) > w(j)\}.$$

Note que:

$$\text{inv}(w \cdot s_i) = \begin{cases} \text{inv}(w) + 1, & \text{se } w(i) < w(i+1) \\ \text{inv}(w) - 1, & \text{se } w(i) > w(i+1) \end{cases} \quad (4.1)$$

Denotaremos por  $\ell_A(\cdot)$  a função comprimento de  $S_n$  com respeito à  $S$ .

**Proposição 4.2.** *Seja  $w \in S_n$ . Então*

$$\ell_A(w) = \text{inv}(w).$$

*Demonstração.* Como  $\text{inv}(e) = \ell_A(e) = 0$ , por (4.1), temos que  $\text{inv}(w) \leq \ell_A(w)$ . A desigualdade oposta é provada por indução em  $\text{inv}(w)$ . Se  $\text{inv}(w) = 0$  então  $w = 12 \dots n = e$  e daí  $\text{inv}(w) = \ell_A(w)$ . Seja  $w \in S_n$  e  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{inv}(w) = k + 1$ . Então  $w \neq e$  e assim existe  $s \in S$  tal que  $\text{inv}(ws) = k$  (caso contrário, (4.1) implicaria que  $w(1) < w(2) < \dots < w(n)$  e daí  $w = e$ ). Logo, pela hipótese de indução,  $\ell_A(ws) \leq \text{inv}(ws) \leq k$  e assim  $\ell_A(ws) = \ell_A(w) - 1 \leq k + 1$ , o que implica  $\ell_A(w) \leq k + 1$ . Portanto,  $\ell_A(w) \leq \text{inv}(w)$ .  $\square$

Como uma consequência da Proposição 4.2 obtemos a seguinte descrição combinatoria do conjunto descendente à direita de um elemento de  $S_n$ .

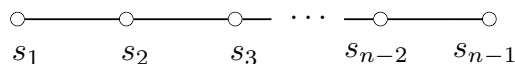
**Proposição 4.3.** *Seja  $w \in S_n$ . Então,*

$$D_R(w) = \{i \in [n - 1]; w(i) > w(i + 1)\}.$$

*Demonstração.* Pela Definição 2.28, temos que:

$$\begin{aligned} D_R(w) &= T_R(w) \cap S = \{s_i \in S; \ell_A(ws_i) < \ell_A(w)\} \\ &= \{s_i \in S; \text{inv}(ws_i) < \text{inv}(w)\} \\ &= \{i \in [n - 1]; w(i) > w(i + 1)\} \end{aligned} \quad \square$$

Na classificação de grupos de Coxeter finitos irredutíveis, o sistema de Coxeter determinado pelo grafo



é denotado por  $A_{n-1}$ . Ele é gerado por  $S = \{s_i; i = 1, 2, \dots, n-1\}$  para o qual temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ s_i s_j &= s_j s_i, \quad |i-j| \geq 2 \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j, \quad |i-j| = 1 \end{aligned}$$

**Proposição 4.4.**  $(S_n, S)$  é um sistema de Coxeter do tipo  $A_{n-1}$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que o par  $(S_n, S)$  tem a propriedade de troca (em sua versão à direita), e portanto, pelo Teorema 2.32, segue que  $(S_n, S)$  é um sistema de Coxeter. Seja  $i, i_1, \dots, i_p \in [n-1]$  e suponha que

$$\ell_A(s_{i_1} \dots s_{i_p} s_i) < \ell_A(s_{i_1} \dots s_{i_p}) \quad (4.2)$$

Devemos mostrar que existe  $j \in [p]$  tal que

$$s_{i_1} \dots s_{i_p} s_i = s_{i_1} \dots \widehat{s}_{i_j} \dots s_{i_p} \quad (4.3)$$

Sejam  $w = s_{i_1} \dots s_{i_p}$ ,  $b = w(i)$  e  $a = w(i+1)$ . Como  $\ell_A(w) = \text{inv}(w)$  temos que (4.2) é equivalente à  $\text{inv}(ws_i) < \text{inv}(w)$ , ou seja,  $w(i) > w(i+1)$  e, portanto,  $b > a$ .

Assim,  $a$  está à esquerda de  $b$  na notação completa da identidade, mas está à direita de  $b$  na notação completa de  $w$ . Daí, existe  $j \in [p]$  tal que  $a$  está à esquerda de  $b$  em  $s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}}$ , mas  $a$  está à direita de  $b$  em  $s_{i_1} \dots s_{i_j}$ .

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & a & b & \dots & n & \succ^{s_{i_1}} \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \succ^{s_{i_{j-1}}} \\ & & \dots & a & b & \dots & & \succ^{s_j} \\ & & \dots & b & a & \dots & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ w(1) & w(2) & \dots & w(i) & w(j) & \dots & w(n) \end{array}$$

Logo, a notação completa de  $s_{i_1} \dots \widehat{s}_{i_j} \dots s_{i_p}$  é a mesma que a de  $s_{i_1} \dots s_{i_p}$  exceto que  $a$  e  $b$  estão trocados. Pela definição de  $w$ ,  $a$  e  $b$ , temos

$$s_{i_1} \dots s_{i_p} s_i = s_{i_1} \dots \widehat{s}_{i_j} \dots s_{i_p}. \quad \square$$

#### 4.1.2 Ordem de Bruhat em $S_n$

Vamos discutir a partir de agora o caso especial da ordem de Bruhat em  $S_n$ .

Já vimos que  $S_n$  é um grupo de Coxeter com respeito ao conjunto de geradores de transposições adjacentes  $s_i = (i, i + 1)$ . O conjunto de reflexões de  $S_n$  é o conjunto de todas as transposições

$$T = \{(a, b); 1 \leq a < b \leq n\},$$

pois  $ws_iw^{-1} = Id \cdot ws_iw^{-1} = (w(i), w(i + 1))$ , para  $w \in S_n$ .

Relembre a Definição 3.1. Desde que reflexões  $t \in S_n$  são transposições  $(a, b)$  e o comprimento é igual ao número de inversões, se estamos trabalhando com ações à direita, então a relação  $w \xrightarrow{(a,b)} z$  significa que se move da permutação  $w = w(1) \dots w(n)$  para a permutação  $z = z(1) \dots z(n)$  trocando os valores que estão nas posições  $a$  e  $b$ , em que  $a < b$  e  $w(a) < w(b)$ . Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{(a,b)} & z \\ w(a) < w(b) & \longmapsto & w(b) > w(a) \end{array}$$

Isto descreve as arestas do grafo de Bruhat de  $S_n$ . O grafo e a ordem de Bruhat em  $S_3$  são mostrados na Figura 8.

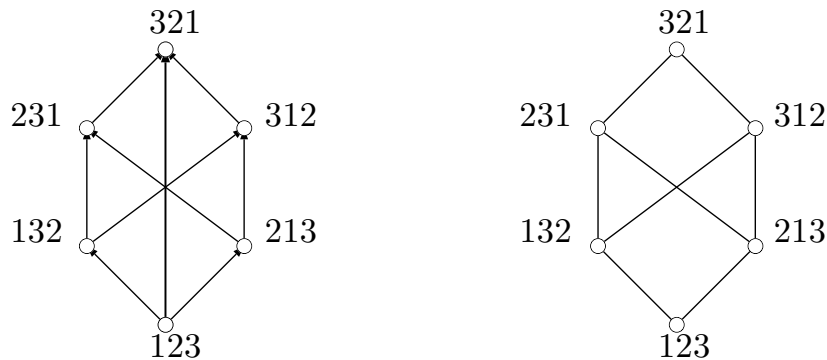


Figura 8 – Grafo e ordem de Bruhat em  $S_3$ .

**Observação 4.5.** No caso de trabalhar com ações à esquerda, a relação  $w \xrightarrow{(a,b)} z$  significa que se move da permutação  $w$  para a permutação  $z$  trocando os valores  $a$  e  $b$  na permutação  $w$  tal que  $a$  aparece à esquerda de  $b$  e  $a < b$ . Esquemáticamente,

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{(a,b)} & z \\ a < b & \longmapsto & b > a \end{array}$$

**Lema 4.6.** *Sejam  $w, z \in S_n$ . Então,  $w$  é coberto por  $z$  na ordem de Bruhat se, e somente se,  $z = w \cdot (a, b)$ , para alguma  $a < b$  tal que  $w(a) < w(b)$  e não existe qualquer  $c$  tal que  $a < c < b$  e  $w(a) < w(c) < w(b)$ .*

*Demonstração.* Se  $z = w \cdot (a, b)$  com as propriedades estabelecidas, então  $\text{inv}(z) = \text{inv}(w) + 1$ . Daí, temos uma cobertura na ordem de Bruhat. Por outro lado, suponha que  $z = w \cdot (a, b)$ ,  $a < b$  e  $\text{inv}(z) > \text{inv}(w)$ . Então,  $w(a) < w(b)$ . Se  $w(a) < w(c) < w(b)$ , para algum  $a < c < b$ , então  $w < w \cdot (a, c) < z$ , logo  $w < z$  não é uma cobertura.  $\square$

A Figura 9 ilustra a ordem de Bruhat em  $S_4$ . Os elementos de  $S_4$  são apresentados tanto na notação completa quanto na decomposição reduzida. De acordo com a Definição 2.20, o comprimento de  $w \in S_4$  é igual ao número de geradores que aparece na decomposição reduzida. O diagrama está organizado de modo que o comprimento de um elemento numa linha  $L_i$  é igual a  $i - 1$ , para todo  $1 \leq i \leq \binom{n}{2} + 1$ , todos os elementos numa mesma linha tem o mesmo comprimento e, dadas duas linhas adjacentes no diagramas (digamos  $L_i$  e  $L_{i+1}$ ), temos que os elementos da linha  $L_{i+1}$  tem comprimento igual aos da linha  $L_i$  acrescentados de 1 unidade.

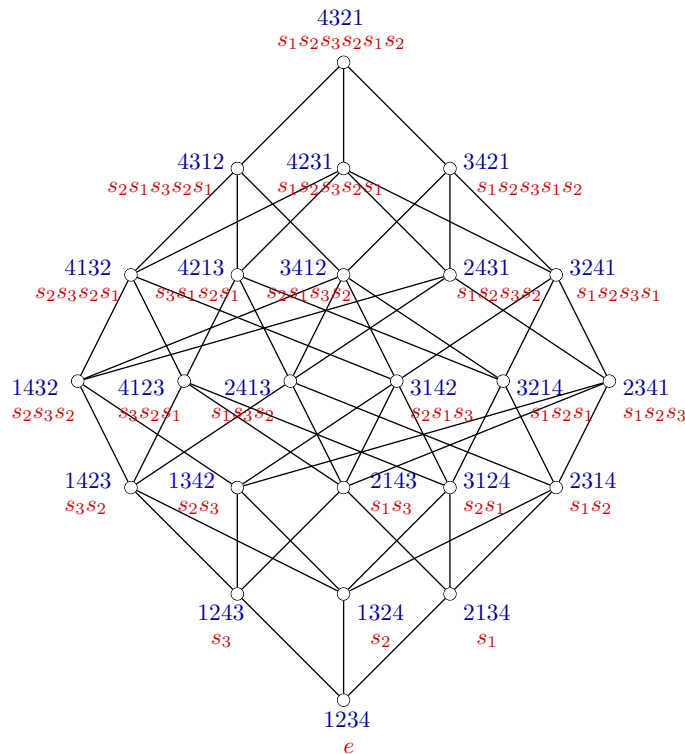


Figura 9 – Ordem de Bruhat de  $S_4$ .

A involução principal  $w_0$  no grupo simétrico  $S_n$  é a “permutação inversão” que leva  $i$  em  $n + 1 - i$  e  $\ell(w_0) = \binom{n}{2}$ . Para  $n = 4$ , temos que  $w_0 = 4321$  e  $\ell(w_0) = 6$ . Assim, se  $w = 3124$  então os efeitos das aplicações da Proposição 3.18 em  $S_4$  são exemplificadas por:

- (i)  $ww_0 = 3124 \cdot 4321 = 4213$ : inverte as posições de  $w$ , ou seja, troca os valores nas posições 1 e 4 e troca os valores nas posições 2 e 3 na permutação  $w$ .

- (ii)  $w_0w = 4321 \cdot 3124 = 2431$ : inverte os valores de  $w$ , ou seja, troca de posição os valores 1 e 4 e troca de posição os valores 2 e 3 na permutação  $w$ .
- (iii)  $w_0ww_0 = (4321 \cdot 3124) \cdot 4321 = 2431 \cdot 4321 = 1342$ : inverte as posições e valores da permutação  $w$ .

Pelo Corolário 3.17, temos que os elementos da linha  $L_i$ , para todo  $1 \leq i \leq \binom{n}{2} + 1$ , serão levados pelas aplicações  $w \mapsto w_0w$  e  $w \mapsto ww_0$  em elementos da linha  $L_{n-i+1}$ , e, serão levados em elementos da linha  $L_i$  pela aplicação  $w \mapsto w_0ww_0$ .

O Lema 4.6 pode ser usado facilmente para resolver pequenos casos, tal como  $n = 4$ , como mostra a Figura 9. Porém, para valores grandes de  $n$ , é computacionalmente difícil ver do Lema 4.6 quando duas permutações são comparáveis na ordem de Bruhat. Por exemplo,  $w = 368475912$  e  $z = 694287531$  são comparáveis? Felizmente, existem critérios eficientes. Apresentaremos dois deles: critério do ponto e critério da tabela.

**Definição 4.7.** Para  $w \in S_n$ , seja

$$w[i, j] = |\{a \in [i]; w(a) \geq j\}|,$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Podemos interpretar essa função da seguinte maneira. Considere uma tabela de tamanho  $n \times n$ . Enumere as linhas e colunas da tabela com os números de 1 à  $n$  de modo que a numeração das linhas é feita da esquerda para à direita e das colunas de baixo para cima, ambas em ordem crescente. Representamos a permutação  $w = w(1)w(2) \dots w(n)$  nesta tabela por colocando um ponto nas células com coordenadas  $(a, w(a))$ , para  $1 \leq a \leq n$ . Então,  $w[i, j]$  conta o número de pontos à esquerda e acima da célula com coordenadas  $(i, j)$ . Por exemplo, se  $w = 253641$ , então  $w[5, 3] = 4$ , como mostra a Figura 10.

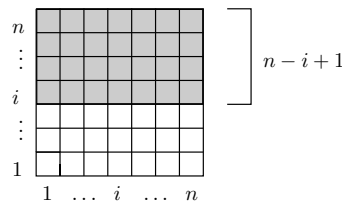
6				•		
5		•				
4					•	
3			•			
2	•					
1						•
	1	2	3	4	5	6

Figura 10 – Ilustração de  $w[5, 3] = 4$ .

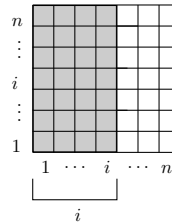
**Observação 4.8.** Para qualquer  $w \in S_n$ , tem-se:

- (1)  $w[n, i] = n + 1 - i$ , pois cada linha deve possuir um único ponto.

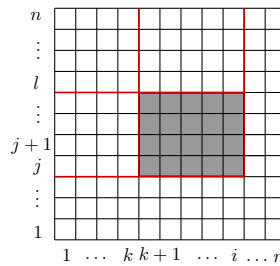




(2)  $w[i, 1] = i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , pois cada coluna deve possuir um único ponto.



(3)  $w[i, j] - w[k, j] - w[i, l] + w[k, l] = |\{a \in [k + 1, i]; j \leq w(a) < l\}|$ , para todo  $1 \leq k \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq l \leq n$ , pois compreende o número de pontos na região hachurada na figura.



**Teorema 4.9** ([1], Theorem 2.1.5, Critério do ponto). *Sejam  $w, z \in S_n$ . Então, são equivalentes:*

- (i)  $w \leq z$
- (ii)  $w[i, j] \leq z[i, j]$ , pra todos  $i, j \in [n]$ .

Como ilustração do Teorema 4.9 respondemos a questão:

$$w = 375184926 \text{ e } z = 863921457 \text{ são comparáveis?}$$

As permutações  $w$  e  $z$  são ilustrados na Figura 11. Observe que  $w[2, 5]$  e  $z[2, 5]$  são representados na Figura 11 pelo hachurado em azul, enquanto  $w[7, 3]$  e  $z[7, 3]$  estão hachurados em rosa. Então,  $w[2, 5] = 1 < 2 = z[2, 5]$ , mas  $w[7, 3] = 6 > 5 = z[7, 3]$ . Logo,  $w$  e  $z$  são incomparáveis na ordem de Bruhat em  $S_9$

O teorema a seguir é na prática o mais conveniente algoritmo para decidir quando duas permutações são comparáveis.

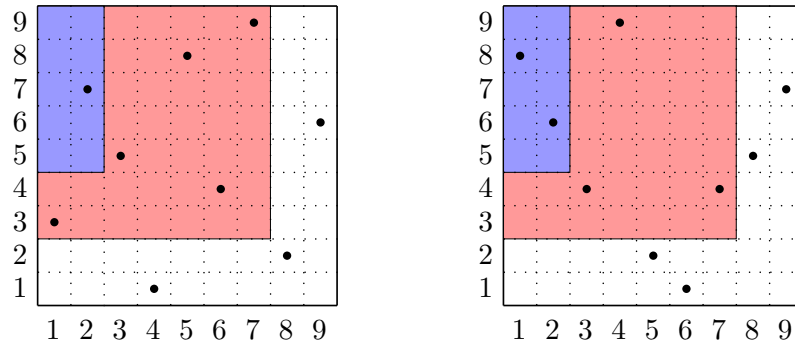


Figura 11 – Ilustração de  $w$  e  $z$ , respectivamente.

**Teorema 4.10** ([1], Theorem 2.6.3, Critério da tabela). *Para  $w, z \in S_n$ , seja  $w_{i,k}$  o  $i$ -ésimo elemento no rearranjo crescente de  $w_1, w_2, \dots, w_k$ . Analogamente, defina  $z_{i,k}$ . Então, são equivalentes:*

- (i)  $w \leq z$ .
- (ii)  $w_{i,k} \leq z_{i,k}$ , para todo  $k \in D_R(w)$  e  $1 \leq i \leq k$ .
- (iii)  $w_{i,k} \leq z_{i,k}$ , para todo  $k \in [n-1] \setminus D_R(z)$  e  $1 \leq i \leq k$ .

Vamos usar o Teorema 4.10 para verificar se  $w = 375184926$  e  $z = 863921457$  são comparáveis. De acordo com a Definição 4.3,  $D_R(w) = \{2, 3, 5, 7\}$ . Assim, geramos as matrizes de quatro linhas de rearranjos crescentes de segmentos de comprimentos 2, 3, 5 e 7.

$$w = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & & \\ \hline 3 & 5 & 7 & & & & \\ \hline 3 & 7 & & & & & \\ \hline \end{array} \qquad z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 8 & 9 & & \\ \hline 3 & 6 & 8 & & & & \\ \hline 6 & 8 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Comparando entrada por entrada, encontramos as violações  $3 < 2$ ,  $4 < 3$ ,  $5 < 4$  e  $7 < 6$ , então concluímos que  $w$  e  $z$  são incomparáveis.

O fato que as matrizes usadas são tabelas aumentando (ao longo das linhas e colunas) explica o nome do critério. Para reduzir o tamanho do cálculo baseado neste critério (o tamanho da tabela) vale a pena determinar quais dos conjuntos  $D_R(w)$ ,  $D_L(w)$ ,  $[n-1] \setminus D_R(z)$  e  $[n-1] \setminus D_L(z)$  tem menor tamanho. Por exemplo, se é  $D_L(w) = D_R(w^{-1})$  usamos que  $w \leq z \Leftrightarrow w^{-1} \leq z^{-1}$  e aplicamos o critério para  $w^{-1}$  e  $z^{-1}$  e, similarmente para  $D_L(z) = D_R(z^{-1})$ .

### 4.1.3 Ordem de Bruhat em quocientes maximais

Vamos agora focar nosso estudo aos subgrupos parabólicos maximais de  $S_n$  e seus quocientes.

Lembre-se da nossa convenção no caso de  $S_n$  que  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$ , onde  $s_i = (i, i+1)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Todas as permutações  $w \in S_n$  serão indicadas em notação completa como  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ , onde  $w_i = w(i)$ .

**Definição 4.11.** Para  $k \in [n-1]$ , definimos

$$S_n^{(k)} = \{w \in S_n; w_1 < \dots < w_k \text{ e } w_{k+1} < \dots < w_n\}.$$

Os elementos de  $S_n^{(k)}$  são chamados *permutações Grassmannianas do tipo A*.

**Proposição 4.12.** *Seja  $J = S \setminus \{s_k\}$ . Então,*

$$\begin{aligned} (S_n)_J &\cong S_k \times S_{n-k} \text{ e} \\ (S_n)^J &= S_n^{(k)} \end{aligned}$$

*Demonstração.* Temos que:

$$J = S \setminus \{s_k\} = \{s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\} = \{s_1, \dots, s_{k-1}\} \dot{\cup} \{s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\}.$$

Logo,  $W_J = (S_n)_J = \langle J \rangle = \langle \{s_1, \dots, s_{k-1}\} \rangle \times \langle \{s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\} \rangle \cong S_k^B \times S_{n-k}$ , isto é, todo  $w \in W_J$  é a justaposição  $w_1 w_2$ , em que  $w_1 = s_{i_1} \dots s_{i_d}$ , com  $s_{i_j} \in \{s_1, \dots, s_{k-1}\}$  e  $w_2 = s_{i_{k+1}} \dots s_{i_{n-1}}$ , com  $s_{i_j} \in \{s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\}$ .

Agora, por definição

$$\begin{aligned} (S_n)^J &= \{w \in S_n; ws_i > w, \text{ para todo } s_i \in J\} \\ &= \{w \in S_n; \ell_A(ws_i) > \ell_A(w), \text{ para todo } s_i \in J\} \\ &= \{w \in S_n; \text{inv}(ws_i) > \text{inv}(w), \text{ para todo } s_i \in J\} \\ &= \{w \in S_n; w(i) < w(i+1), \text{ para todo } s_i \in J\} \\ &= \{w \in S_n; w_1 < \dots < w_k \text{ e } w_{k+1} < \dots < w_n\} = S_n^{(k)}. \quad \square \end{aligned}$$

A aplicação

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow S_n^{(k)} \\ w &\mapsto w^J \end{aligned} \tag{4.4}$$

pode ser descrita como segue:  $w^J$  é obtido de  $w$  por primeiro rearranjando os valores  $w_1, \dots, w_k$  tal que eles aparecem na ordem crescente nos lugares  $1, \dots, k$  e similarmente para  $w_{k+1}, \dots, w_n$ .

**Exemplo 4.13.** Seja  $w = 3124 \in S_4$ . Pela aplicação (4.4), segue que:

$$\begin{aligned} w &\mapsto w^{(1)} = 3124 \\ w &\mapsto w^{(2)} = 1324 \\ w &\mapsto w^{(3)} = 1234 \end{aligned}$$

O resultado a seguir apresenta as relações de cobertura em  $S_n^{(k)}$ .

**Lema 4.14.** *Sejam  $w, w' \in S_n^{(k)}$ . Então  $w$  cobre  $w'$  na ordem de Bruhat se, e somente se,  $w' = w(a, b)$ , para algum  $a < b$ , com  $a \in [k]$  e  $b \in [n - k]$  tal que  $w(a) = w(b) + 1$ .*

*Demonstração.* Note que:

$$S_n^{(k)} \subseteq S_n, \text{ em que } S_n^{(k)} = \{w \in S_n; w(1) < \dots < w(k) \text{ e } w(k+1) < \dots < w(n)\}.$$

Pelo Lema 4.6, dados  $w, w' \in S_n$ , temos que

$$w' \leq w \Leftrightarrow w = w' \cdot (a, b) \text{ com } \begin{cases} a < b, w'(a) < w'(b) \\ \nexists c, a < c < b, w'(a) < w'(c) < w'(b) \end{cases}$$

é equivalente a dizer

$$w \leq w' \Leftrightarrow w' = w \cdot (a, b) \text{ com } \begin{cases} a < b, w(a) > w(b) \\ \nexists c, a < c < b, w(a) > w(c) > w(b) \end{cases}$$

Seja  $w' \in S_n^{(k)}$ . Suponha  $a < b$  com  $w'(a) < w'(b)$  e  $a, b \in [k]$ , isto é,

$$w' = \dots \frac{w'(a)}{a} \dots \frac{w'(b)}{b} \dots | \dots \dots \dots$$

Logo,

$$w = \dots \frac{w'(b)}{a} \dots \frac{w'(a)}{b} \dots | \dots \dots \dots$$

o que implica  $w \notin S_n^{(k)}$ , pois teríamos  $w'(b) > w'(a)$  aparecendo nas  $k$  primeiras posições não cumprindo a condição de ordenação de  $S_n^{(k)}$ . É imediato que o mesmo acontece se tomarmos  $a, b \in [n - k]$ . Portanto,  $a \in [k]$  e  $b \in [n - k]$ .

Seja  $w \in S_n^{(k)}$ . Suponha que  $w(a) = p$  e  $w(b) = p - x$ , com  $x > 1$ . Então  $w'(a) = w(b) = p - x$  e  $w'(b) = w(a) = p$ , isto é,

$$\begin{aligned} w &= \dots p \dots | \dots p - x \dots \\ w' &= \dots p - x \dots | \dots p \dots \end{aligned}$$

Como não existe  $c$ , tal que  $a < c < b$  com  $w(a) > w(c) > w(b)$ , os valores entre  $p$  e  $p - x$  aparecem nas posições de  $1, \dots, a - 1$  ou nas posições de  $b, \dots, n - b$ .

No primeiro caso, existiria  $i < a$  tal que  $w'(i) > w'(a)$ . E, no segundo caso, existiria  $j > b$  tal que  $w'(j) < w'(b)$ . Em ambos os casos, concluímos que  $w' \in S_n^{(k)}$ . Portanto,  $w = 1$ . □

## 4.2 Tipo B

Nesta seção, vamos abordar o sistema de Coxeter determinado pelo grafo de tipo B de acordo com a classificação dada pela Tabela 1.

### 4.2.1 $S_n^B$ como grupo de Coxeter

Essa seção é desenvolvida para uma discussão do grupo das permutações com sinal do ponto de vista de um grupo de Coxeter. Nosso objetivo nesta seção será mostrar que  $S_n^B$  é um grupo de Coxeter.

Seja  $S_n^B$  o grupo de todas as bijeções  $w$  do conjunto  $[\pm n]$  nele mesmo tal que

$$w(-a) = -w(a), \text{ para todo } a \in [\pm n],$$

com a composição como operação do grupo.

Se  $w \in S_n^B$ , então escrevemos  $w = [a_1, \dots, a_n]$  para significar que  $w(i) = a_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , e chamamos essa notação de *notação janela* de  $w$ . Por causa dessa notação, o grupo  $S_n^B$  é muitas vezes chamado grupo de todas as “permutações com sinal” de  $[n]$ .

Desde que os elementos de  $S_n^B$  são permutações de  $[\pm n]$ , podemos também escrevê-los na forma de ciclos disjuntos e na notação completa (como elementos de  $S([\pm n])$ ). Por exemplo, se  $w = [2, -6, 1, 7, 5, -8, 4, 3]$  então escrevemos

$$\begin{aligned} w &= -3 - 4 \ 8 - 5 - 7 - 1 \ 6 - 2 \ 2 - 6 \ 1 \ 7 \ 5 - 8 \ 4 \ 3 \\ w &= (2, -6, 8, 3, 1)(4, 7)(-8, -3, -1, -2, 6)(-4, -7) \end{aligned}$$

Multiplicamos elementos de  $S_n^B$  “à direita”. Por exemplo, se  $w = [-4, 2, 6, 3, -5, 1]$  e  $z = [-1, 5, 4, -3, 2, 6]$ , então

$$\begin{aligned} w^{-1} &= [6, 2, 4, -1, -5, 3] \\ zw &= [-1, 5, 4, -3, 2, 6][-4, 2, 6, 3, -5, 1] = [3, 5, 6, 4, -2, -1] \\ wz &= [-4, 2, 6, 3, -5, 1][-1, 5, 4, -3, 2, 6] = [4, -5, 3, -6, 2, 1] \end{aligned}$$

Dada uma permutação  $w \in S_n^B$ , com frequência, vamos escrever o sinal de menos sobre o inteiro. Essa convenção tem por objetivo facilitar a notação. Por exemplo, se  $w = [-4, 2, 6, 3, -5, 1]$  então escrevemos  $w = [\bar{4}, 2, 6, 3, \bar{5}, 1]$ .

Identificamos  $S_n$  como um subgrupo de  $S_n^B$  de uma maneira natural.

Como um conjunto de geradores para  $S_n^B$  tomamos

$$S_B = \{s_1^B, \dots, s_{n-1}^B, s_0^B\},$$

onde

$$s_i^B = [1, \dots, i-1, i+1, i, i+2, \dots, n], \text{ para } i \in [n-1] \text{ e}$$

$$s_0^B = [-1, 2, \dots, n].$$

Note que multiplicar um elemento  $w \in S_n^B$  à direita por  $s_i^B$  (respectivamente, por  $s_0^B$ ) tem o efeito de trocar os valores nas posições  $i$  e  $i+1$  (respectivamente, mudar o sinal na primeira posição) na notação janela de  $w$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ . Além disso, a mesma operação tem o efeito de trocar os valores nas posições  $i$  e  $i+1$  bem como aqueles nas posições  $-i$  e  $-(i+1)$  na notação completa de  $w$ . Isso deixa claro que  $S_B$  gera  $S_n^B$ .

As Figuras 12 e 13 ilustram a ação de  $s_0^B$  e  $s_2^B$  em  $S_4^B$ .

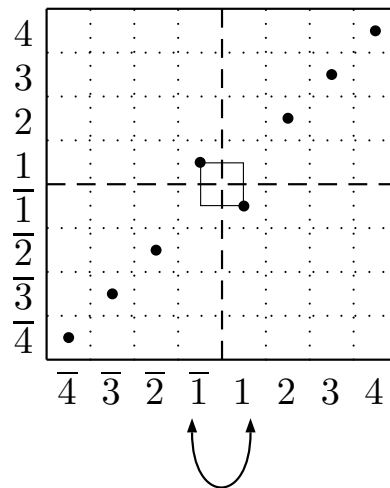


Figura 12 – Diagrama de  $s_0^B \in S_4^B$  e sua ação em  $S_4^B$ .

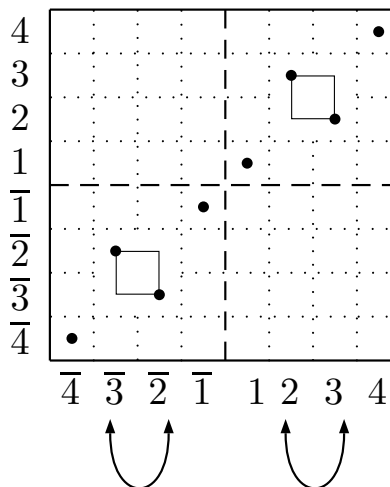


Figura 13 – Diagrama de  $s_2^B \in S_4^B$  e sua ação em  $S_4^B$ .

Como no caso de  $S_n$ , o primeiro passo é obter uma descrição combinatória explícita da função comprimento  $\ell_B$  de  $S_n^B$  com respeito a  $S_B$ .

**Definição 4.15.** Para  $w \in S_n^B$ , definimos:

$$\text{inv}_B(w) = \text{inv}(w(1), \dots, w(n)) + \text{neg}(w(1), \dots, w(n)) + \text{nsp}(w(1), \dots, w(n)), \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{inv}(w(1), w(2), \dots, w(n)) &= \text{card}\{(i, j); 1 \leq i < j \leq n \text{ e } w(i) > w(j)\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{número de inversões de } w; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{neg}(w(1), w(2), \dots, w(n)) &= \text{card}\{i \in [n]; w(i) < 0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{número de entradas negativas de } w; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{nsp}(w(1), w(2), \dots, w(n)) &= \text{card}\{(i, j) \in \binom{[n]}{2}; w(i) + w(j) < 0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{número de pares com soma negativa de } w. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.16.** Seja  $w = [2, 5, 1, \bar{6}, 3, \bar{4}] \in S_6^B$ . Temos que:

$$\text{inv}(w) = \text{card}\{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 6)\} = 10$$

$$\text{neg}(w) = \text{card}\{4, 6\} = 2$$

$$\text{nsp}(w) = \text{card}\{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\} = 8$$

Logo,  $\text{inv}_B(w) = 10 + 2 + 8 = 20$ .

Note que:

$$\begin{aligned} \text{inv}_B(w) &= \text{card}\{(i, j) \in [n] \times [n]; i < j \text{ e } w(i) > w(j)\} + \\ &\quad \text{card}\{(i, j) \in [n] \times [n]; i \leq j \text{ e } w(-i) > w(j)\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

isto é,  $\text{inv}_B(w)$  pode ser interpretada como a contagem de inversões na notação completa de  $w$ . Por essa razão, chamamos as inversões contadas pelo lado direito da igualdade (4.6) de *B-inversões*.

Observe que para cada  $i \in [n]$

$$\text{card}\{w(j); |w(j)| < |w(i)|\} = |w(i)| - 1. \quad (4.7)$$

Segue da igualdade (4.7) que

$$\text{neg}(w(1), \dots, w(n)) + \text{nsp}(w(1), \dots, w(n)) = - \sum_{\{j \in [n]; w(j) < 0\}} w(j) \quad (4.8)$$

Além disso,

$$\text{inv}_B(w) = \text{inv}(w) \text{ se, e somente se, } w \in S_n. \quad (4.9)$$

Logo, podemos reescrever a igualdade (4.5) como

$$\text{inv}_B(w) = \text{inv}(w(1), \dots, w(n)) - \sum_{\{j \in [n]; w(j) < 0\}} w(j) \quad (4.10)$$

**Lema 4.17.** *Seja  $w \in S_n^B$ . Então:*

$$\text{inv}((ws_0)(1), \dots, (ws_0)(n)) = \text{inv}(w(1), \dots, w(n)) - w(1) + \text{sgn}(w(1)) \quad (4.11)$$

*Demonstração.* Seja  $w = w(1)w(2) \dots w(n)$ . Defina

$$N_i(w) = \{w(j); i < j \text{ e } w(i) > w(j)\}.$$

Temos que  $\text{inv}(w) = \sum_{i=1}^n \text{card } N_i(w)$ . Note que:

$$ws_0 = (-w(1), w(2), \dots, w(n)) \text{ e} \\ N_i(w) = N_i(ws_0), \text{ para todo } 1 < i \leq n.$$

Portanto, basta analisar os conjuntos  $N_1(w)$  e  $N_1(ws_0)$ . Há dois casos a considerar. Faremos o caso  $w(1) > 0$ . O caso  $w(1) < 0$  é análogo.

Se  $w(1) > 0$ , então

$$N_1(w) = \{w(j); w(1) > w(j)\} = \{w(j); |w(j)| < w(1)\} \dot{\cup} \{w(j); |w(j)| > w(1)\}$$

e, portanto,

$$\text{card } N_1(w) = \text{card}\{w(j); |w(j)| < w(1)\} + \text{card}\{w(j); |w(j)| > w(1)\}.$$

Pela Equação (4.7), temos que:

$$\text{card } N_1(w) = w(1) - 1 + \text{card}\{w(j); |w(j)| > w(1)\}. \quad (4.12)$$

Agora,  $N_1(ws_0) = \{w(j); -w(1) > w(j)\} = \{w(j); |w(j)| > w(1)\}$  e,  $\text{card } N_1(ws_0) = \text{card}\{w(j); |w(j)| > w(1)\}$ . Logo,

$$\text{card } N_1(w) = w(1) - 1 + \text{card } N_1(ws_0).$$

Daí,  $\text{inv}(w) = \text{inv}(ws_0) + (w(1) - 1)$ , o que implica  $\text{inv}(ws_0) = \text{inv}(w) - w(1) + \text{sgn}(w(1))$ .  $\square$

**Proposição 4.18.** *Seja  $w \in S_n^B$ . Então,*

$$\ell_B(w) = \text{inv}_B(w).$$



*Demonstração.* Primeiro provaremos que

$$\text{inv}_B(w) \leq \ell_B(w), \text{ para todo } w \in S_n^B. \quad (4.13)$$

Seja  $w \in S_n^B$ . Pelo Lema 4.17 e Definição 4.15 segue que

$$\text{inv}_B(ws_0) = \text{inv}_B(w) + \text{sgn}(w(1)). \quad (4.14)$$

Por outro lado, para  $i \in [n-1]$ , temos que:

$$\text{inv}_B(ws_i) = \begin{cases} \text{inv}_B(w) + 1, & \text{se } w(i) < w(i+1) \\ \text{inv}_B(w) - 1, & \text{se } w(i) > w(i+1) \end{cases} \quad (4.15)$$

Como  $\text{inv}_B(e) = \ell_B(e) = 0$ , segue de (4.14) e (4.15) que  $\text{inv}_B(w) \leq \ell_B(w)$ , para todo  $w \in S_n^B$ .

Agora provaremos que  $\ell_B(w) = \text{inv}_B(w)$  por indução em  $\text{inv}_B(w)$ .

Se  $\text{inv}_B(w) = 0$  então  $w = [1, 2, \dots, n] = e$ . Logo,  $\ell_B(w) = \text{inv}_B(w)$ .

Seja  $t \in \mathbb{N}$  e  $w \in S_n^B$  tal que  $\text{inv}_B(w) = t + 1$ . Então,  $w \neq e$  e daí existe  $s \in S$  tal que  $\text{inv}_B(ws) = t$  (caso contrário, (4.14) e (4.15), implicaria que  $0 < w(1) < w(2) < \dots < w(n)$  e assim  $w = e$ ). Logo, a hipótese de indução implica que  $\ell_B(ws) = t$  e que  $\ell_B(w) \leq t + 1$ . Portanto,  $\ell_B(w) \leq \text{inv}_B(w)$  e, por (4.13), concluímos o passo de indução.  $\square$

Como consequência da Proposição 4.18 obtemos a seguinte descrição do conjunto descendente (à direita) de um elemento de  $S_n^B$ .

**Proposição 4.19.** *Seja  $w \in S_n^B$ . Então*

$$D_R(w) = \{s_i \in S_B; w(i) > w(i+1)\}, \text{ onde } w(0) = 0.$$

*Demonstração.* Pela proposição 4.18, temos que:

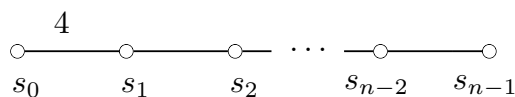
$$D_R(w) = \{s \in S_B; \text{inv}_B(ws) < \text{inv}_B(w)\}$$

De (4.14) e (4.15) concluímos o desejado.  $\square$

Por exemplo, se  $w = [-4, 2, -5, -7, 6, 1, -3]$  então  $D_R(w) = \{s_0, s_2, s_3, s_5, s_6\}$ .

Simplificaremos a notação escrevendo “ $S$ ” no lugar de “ $S_B$ ” e “ $s_i$ ” no lugar de  $s_i^B$ , para  $i = 0, \dots, n-1$ .

Na classificação de grupos de Coxeter finitos irredutíveis, o sistema de Coxeter determinado pelo grafo





*Demonstração.* Sejam  $w \in S_n^B$  e  $i \in [n-1]$ . Logo,

$$ws_iw^{-1} = Id \cdot ws_iw^{-1} = (w(i), w(i+1))(-w(i), -w(i+1)).$$

Analogamente,

$$ws_ow^{-1} = Id \cdot ws_ow^{-1} = (w(1), -w(1)).$$

Desde que  $w$  é um elemento arbitrário de  $S_n^B$ , segue que  $w(i)$  e  $w(i+1)$  podem ser quaisquer dois elementos de  $[\pm n]$  que tem diferentes valores absolutos, considerando que  $w(1)$  pode ser qualquer elemento de  $[\pm n]$ .  $\square$

A proposição anterior permite derivar uma descrição do grafo de Bruhat de  $S_n^B$ .

**Proposição 4.22.** *Sejam  $w, z \in S_n^B$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $w \longrightarrow z$ .
- (ii) *Existem  $i, j \in [\pm n]$ ,  $i < j$ , tal que  $w(i) < w(j)$  e*
  - *ou  $z = w(i, j)(-i, -j)$ , se  $|i| \neq |j|$*
  - *ou  $z = w(i, j)$ , se  $|i| = |j|$ .*

*Demonstração.* Por definição do grafo de Bruhat (Definição 3.1) e pela Proposição 4.21, temos somente que verificar que dados  $i, j, w$  e  $z$  como em (ii),  $\text{inv}_B(z) > \text{inv}_B(w)$  se, e somente se,  $w(i) < w(j)$ .

Se  $j = -i$  (note que isso implica que  $i < 0$ ), então a notação completa de  $z$  é obtida da de  $w$  por trocando os valores  $w(i)$  e  $w(-i)$ .

Se  $w(i) < 0$ , então  $w(i) < w(-i)$  e da Definição 4.15 segue que  $\text{inv}_B(w) < \text{inv}_B(z)$ .

Se  $w(i) > 0$ , então pela mesma razão (trocando os papéis de  $w$  e  $z$ ) concluímos que  $\text{inv}_B(w) > \text{inv}_B(z)$ .

Se  $j \neq -i$  então a notação completa de  $z$  é obtida da de  $w$  por trocando  $w(i)$  e  $w(j)$  bem como  $w(-i)$  e  $w(-j)$ . Suponha que  $w(i) < w(j)$ . O resultado é claro se  $ij > 0$ . Se  $ij < 0$ , então desde que  $w(i, j)(-i, -j) = w(i, -i)(-j, i)(-i, j)(i, -i)$ , o resultado segue dos dois casos anteriores. Similarmente,  $\text{inv}_B(z) < \text{inv}_B(w)$  se  $w(i) > w(j)$ .  $\square$

A Proposição 4.22 implica, em particular, que se  $w, z \in S_n \subseteq S_n^B$ , então  $w \longrightarrow z$  em  $S_n$  se, e somente se,  $w \longrightarrow z$  em  $S_n^B$ . Então o grafo de Bruhat de  $S_n$  é um subgrafo dirigido induzido pelo de  $S_n^B$  em  $S_n$ . Por exemplo, a Figura 14 mostra a ordem de Bruhat e o grafo de Bruhat de  $S_2^B$ , respectivamente.

Compare a Figura 14 com o diagrama da ordem de Bruhat e grafo de Bruhat de  $B_2$  mostrado nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

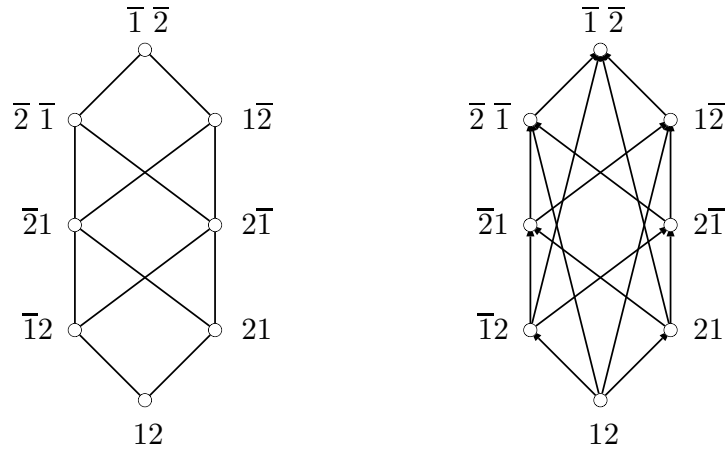


Figura 14 – Ordem de Bruhat e grafo de Bruhat em  $S_2^B$ .

A Proposição 4.22 também dá uma descrição da ordem de Bruhat em  $S_n^B$  e mostra, em particular, que se  $w, z \in S_n^B$  e  $w \leq z$  em  $S_n^B$ , então  $w \leq z$  em (na ordem de Bruhat de)  $S([\pm n])$ . A recíproca também verdadeira.

Apresentaremos a seguir, os análogos dos Teoremas 4.9 e Teorema 4.10 para a ordem de Bruhat em  $S_n^B$ .

**Definição 4.23.** Para  $w \in S_n^B$ , seja

$$w[i, j] = \text{card}\{a \in [-n, n]; a \leq i \text{ e } w(a) \geq j\},$$

para  $i, j \in [-n, n]$ , onde  $w(0) = 0$ .

Note que o item (3) da Observação 4.8 continua válida se  $w \in S_n^B$  e  $k, i, j, l \in [\pm n]$ , com  $k \leq i$  e  $j \leq l$ . Também vale  $w[-i-1, -j+1] - w[i, j] = j - i - 1$ , para todos  $i \in [-n, n-1]$  e  $j \in [-n+1, n]$ .

**Teorema 4.24** ([1], Theorem 8.1.8). *Sejam  $w, z \in S_n^B$ . Então, são equivalentes:*

- (i)  $w \leq z$
- (ii)  $w[i, j] \leq z[i, j]$ , para todo  $i, j \in [-n, n]$ .

Vamos ilustrar o Teorema 4.24 com um exemplo.

**Exemplo 4.25.** Sejam  $n = 4$ ,  $w = [-4, 2, 1, -3]$  e  $z = [-1, 3, -4, -2]$  ilustrados na Figura 15.

Observe que  $w[-4, 3]$  e  $z[-4, 3]$  são representados na Figura 15 pelo hachurado em azul, enquanto  $w[-3, 2]$  e  $z[-3, 2]$  estão hachurados em rosa.

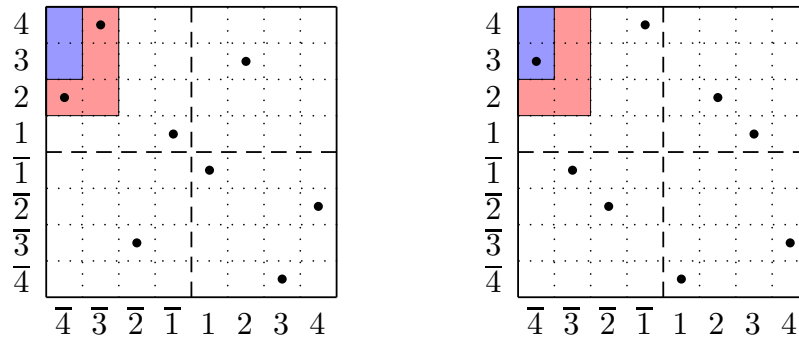


Figura 15 – Ilustração de  $w$  e  $z$ , respectivamente.

Então,  $w[-4, 3] = 0 < 1 = z[-4, 3]$ , mas  $w[-3, 2] = 2 > 1 = z[-3, 2]$ . Logo,  $w$  e  $z$  são incomparáveis na ordem de Bruhat em  $S_4^B$ .

O Teorema 4.24 também mostra que a ordem de Bruhat em  $S_n^B$  é um subconjunto parcialmente ordenado da ordem de Bruhat em  $S_{2n}(\cong S([\pm n]))$ .

**Corolário 4.26.** *Sejam  $w, z \in S_n^B$ . Então,  $w \leq z$  em  $S_n^B$  se, e somente se,  $w \leq z$  em  $S_{2n}$ .*

*Demonstração.* Segue dos Teoremas 4.9 e 4.24. □

**Definição 4.27.** Dado  $w \in S_n^B$ , definimos a matriz  $A(w) = (A(w)_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1-i}$  por

$$\{A(w)_{i,1}, \dots, A(w)_{i,n+1-i}\}_{<} = \{k \in [\pm n]; w(k) \geq i\}_{<},$$

para  $i = 1, \dots, n$ , em que o índice  $<$  significa que os conjuntos são totalmente ordenados.

**Teorema 4.28** ([1], Exercise 6). *Para  $w, z \in S_n^B$ , são equivalentes:*

- (i)  $w \leq z$ .
- (ii)  $A(w)_{i,j} \geq A(z)_{i,j}$ , para todo  $i \in [n]$  e  $j \in [n+1-i]$ .

Podemos reescrever o Exemplo 4.25 usando o Teorema 4.28.

**Exemplo 4.29.** Sejam  $n = 4$ ,  $w = [-4, 2, 1, -3]$  e  $z = [-1, 3, -4, -2]$ . Então,  $k \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ . Escreva  $w = 3 \bar{1} \bar{2} 4 \bar{4} 2 1 \bar{3}$ . Pela Definição 4.27, temos que:

$$A(w)_{1,j} = \{-4, -1, 2, 3\}$$

$$A(w)_{2,j} = \{-4, -1, 2\}$$

$$A(w)_{3,j} = \{-4, -1\}$$

$$A(w)_{4,j} = \{-1\},$$

para  $1 \leq j \leq 4$ . Logo,

$$A(w) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 & \\ -4 & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

Analogamente, escreva  $z = 2 \ 4 \ \bar{3} \ 1 \ \bar{1} \ 3 \ \bar{4} \ \bar{2}$ . Segue que,

$$A(z)_{1,j} = \{-4, -3, -1, 2\}$$

$$A(z)_{2,j} = \{-4, -3, 2\}$$

$$A(z)_{3,j} = \{-3, 2\}$$

$$A(z)_{4,j} = \{-3\}$$

para  $1 \leq j \leq 4$ . Logo,

$$A(z) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & \\ -3 & 2 & & \\ -3 & & & \end{pmatrix}$$

Comparando entrada por entrada das matrizes  $A(w)_{i,j}$  e  $A(z)_{i,j}$ , obtemos as seguintes violações:  $A(w)_{3,1} = -4 < -3 = A(z)_{3,1}$ ,  $A(w)_{3,2} = -1 < 2 = A(z)_{3,2}$ . Portanto,  $w$  e  $z$  são incomparáveis na ordem de Bruhat de  $S_4^B$ .

#### 4.2.3 Ordem de Bruhat em quocientes maximais

Como foi feito para  $S_n$ , agora daremos descrições combinatórias de subgrupos quocientes e parabólicos de  $S_n^B$ . Trataremos somente o caso  $|J| = |S| - 1$ .

**Proposição 4.30.** *Seja  $k \in [0, n - 1]$  e  $J = S \setminus \{s_k\}$ . Então,*

$$(S_n^B)_J \cong S_k^B \times S_{n-k} \text{ e}$$

$$(S_n^B)^J = \{w \in S_n^B; 0 < w(1) < \dots < w(k) \text{ e } w(k+1) < \dots < w(n)\}.$$

*Demonstração.* Temos que:

$$J = S \setminus \{s_k\} = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\} = \{s_0, \dots, s_{k-1}\} \dot{\cup} \{s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\}.$$

Logo,  $W_J = (S_n^B)_J = \langle J \rangle = \langle \{s_0, \dots, s_{k-1}\} \rangle \times \langle \{s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\} \rangle \cong S_k^B \times S_{n-k}$ , isto é, todo  $w \in W_J$  é a justaposição  $w_1 w_2$ , em que  $w_1 = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ , com  $s_{i_j} \in \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  e  $w_2 = s_{i_{k+1}} \dots s_{i_{n-1}}$ , com  $s_{i_j} \in \{s_{k+1}, \dots, s_{n-1}\}$ .

Para qualquer  $w = w(1) \dots w(n) \in S_n^B$ , segue que sua classe lateral  $w(S_n^B)_J$  é composta pelas permutações com as primeiras  $k$ -entradas permutadas com sinais trocados - correspondente a parte  $(S_k^B)_J$  - junto com as permutações com as restantes  $(n - k)$  permutadas - mas sem trocar os sinais correspondendo a parte  $S_{n-k}$ .

A partir da Equação (3.1), o conjunto dos representantes de comprimento minimal de classes laterais para  $S_n^B/(S_n^B)_J$  é

$$(S_n^B)^J = \{w \in S_n^B; \text{inv}_B(ws) > \text{inv}_B(w), \text{ para todo } s_i \in J\}$$

Se  $J = S \setminus \{s_k\}$ , com  $k \neq 0$ , segue da Equação (4.15) que

$$\begin{aligned} (S_n^B)^J &= \{w \in S_n^B; w(i) < w(i+1), \text{ para todo } s_i \in J\} \\ &= \{w \in S_n^B; 0 < w(1) < \dots < w(k) \text{ e } w(k+1) < \dots < w(n)\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Se  $J = S \setminus \{s_0\}$ , usamos a Equação (4.14) para concluir (4.16).  $\square$

**Exemplo 4.31.** Já calculamos no Exemplo 3.25 os conjuntos  $W^J$ , em que  $W = B_3 = S_3^B$  e  $J_2 = \{a, b\}$ ,  $J_0 = \{b, c\}$  e  $J_1 = \{a, c\}$ . Todo elemento de  $W$  é uma permutação com sinal do conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , então o conjunto gerador de  $W$  será identificado com  $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ . Analogamente, identificamos os conjuntos  $J_0 = \{b, c\} = S \setminus \{s_0\}$ ,  $J_1 = \{a, c\} = S \setminus \{s_1\}$  e  $J_2 = \{a, b\} = S \setminus \{s_2\}$ . Então, pela Proposição 4.30, obtemos:

$$W^{J_0} = \{1\ 2\ 3, \bar{1}\ 2\ 3, \bar{2}\ 1\ 3, \bar{2}\ \bar{1}\ 3, \bar{3}\ 1\ 2, \bar{3}\ \bar{1}\ 2, \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}, \bar{3}\ \bar{2}\ 1, \bar{3}\ 1\ 2\},$$

$$W^{J_1} = \{1\ 2\ 3, 2\ 1\ 3, 3\ 1\ 2, 1\ \bar{2}\ 3, 1\ \bar{3}\ 2, 2\ \bar{1}\ 3, 2\ \bar{3}\ 1, 3\ \bar{1}\ 2, 3\ \bar{2}\ 1, 1\ \bar{3}\ \bar{2}, 2\ \bar{3}\ \bar{1}, 3\ \bar{2}\ \bar{1}\},$$

$$W^{J_2} = \{1\ 2\ 3, 1\ 3\ 2, 2\ 3\ 1, 2\ 3\ \bar{1}, 1\ 3\ \bar{2}, 1\ 2\ \bar{3}\}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} S_n^B &\rightarrow (S_n^B)^J \\ w &\mapsto w^J \end{aligned} \quad (4.17)$$

pode ser descrita como segue: se  $k \in [0, n-1]$  e  $J = S \setminus \{s_k\}$ , então a notação janela de  $w^J$  é obtida da notação de  $w$  rearranjando os elementos de  $\{w(k+1), \dots, w(n)\}$  na ordem crescente e depois rearranjando os elementos  $\{|w(1)|, \dots, |w(k)|\}$  na ordem crescente.

**Exemplo 4.32.** Seja  $w = [4, \bar{1}, \bar{3}, 2] \in S_4^B$ . Pela aplicação (4.17), segue que:

$$w \mapsto w^{J_0} = [\bar{3}, \bar{1}, 2, 4]$$

$$w \mapsto w^{J_1} = [4, \bar{3}, \bar{1}, 2]$$

$$w \mapsto w^{J_2} = [1, 4, \bar{3}, 2]$$

$$w \mapsto w^{J_3} = [1, 3, 4, 2]$$

**Observação 4.33.** De agora em diante vamos adotar a seguinte notação com a finalidade de simplificar a notação anterior:

$$\begin{aligned} S_n^B &= W_n \\ J = S \setminus \{s_k\} &= (k) \\ (S_n^B)_J &= W_{(k)} \\ (S_n^B)^J &= W_n^{(k)} \end{aligned}$$

A notação linha de  $w \in S_n^B$  pode ser identificada pela fórmula

$$w = w_{u,\lambda} = u_1 \dots u_k \overline{\lambda_r} \dots \overline{\lambda_1} v_1 \dots v_{n-k-r}, \quad (4.18)$$

onde

$$0 < u_1 < \dots < u_k, \quad u_i = w(i), \quad \text{para } 1 \leq i \leq k \quad (4.19)$$

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_r, \quad \overline{\lambda_i} = w(k+r-i+1), \quad \text{para } 1 \leq i \leq r$$

$$0 < v_1 < \dots < v_{n-k-r}, \quad v_i = w(k+r+i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-k-r$$

Essas são chamadas *permutações Grassmannianas do tipo B*.

Agora definiremos um par de partições duplas  $\alpha$  e  $\lambda$  associadas com cada permutação Grassmannianas  $w$  pela igualdade (4.18). A parte negativa de  $w$  nos fornece uma partição estrita  $\lambda = (\lambda_r > \dots > \lambda_1 > 0)$ . Para cada  $i$ ,  $0 < i \leq k$ , definimos

$$\alpha_i = u_i - i + d_i, \quad \text{e } d_i = \text{card}\{\lambda_j; \lambda_j > u_i\}. \quad (4.20)$$

Afirmamos que  $\alpha = (n-k \geq \alpha_k \geq \dots \geq 0)$  é uma partição. De fato, para cada  $i$ , podemos coletar todos os índices que são maiores que  $u_i$  que aparecem na permutação (4.18) de acordo com a posição que ocupam pela seguinte fórmula:

$$[n] - [u_i] = \{u_j; u_j > u_i\} \cup \{\lambda_j; \lambda_j > u_i\} \cup \{v_j; v_j > u_i\}$$

onde a cardinalidade é dada por

$$u_i = n - \text{card}\{u_j; u_j > u_i\} - \text{card}\{\lambda_j; \lambda_j > u_i\} - \text{card}\{v_j; v_j > u_i\}. \quad (4.21)$$

Observe que  $\text{card}\{u_j; u_j > u_i\} = k - i$ . Segue que (4.21) é equivalente à

$$u_i = n - k + i - d_i - \mu_i \quad (4.22)$$

onde  $\mu_i = \text{card}\{v_j; v_j > u_i\}$ . A igualdade (4.20) pode ser reescrita como

$$\alpha_i = (n - k + i - d_i - \mu_i) - i + d_i = n - k - \mu_i \quad (4.23)$$

É claro de (4.23) que  $\alpha$  é uma partição dentro de um retângulo  $k \times (n-k)$ . Denote  $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$  e  $|\lambda| = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ . Observe que  $\mu_i = \mu_i(w)$  também depende da escolha de  $w$ .

**Lema 4.34.** *Seja  $w \in W_n^{(k)}$ . O comprimento  $\ell_B(w)$  de  $w$  é dado pela soma das entradas no par de partições dupla  $\alpha$  e  $\lambda$ , isto é,*

$$\ell_B(w) = |\alpha| + |\lambda|.$$

*Demonstração.* A soma dos  $\lambda$ 's correspondem a soma  $-\sum_{\{j \in [n]; w(j) < 0\}}$  na equação 4.10.

Resta mostrar que as inversões de  $w((1), \dots, w(n))$  são dadas pela soma dos  $\alpha$ 's. Como existe um único descendente na posição  $k$ , todas as inversões correspondem a inversões entre os  $u$ 's com todos os  $\lambda$ 's e alguns dos  $v$ 's. Logo, para cada  $1 \leq i \leq k$ , temos que o número de inversões relacionadas aos  $u_i$  é  $n - k - \text{card}\{v_j; u_i < v_j\} = \alpha_i$ , por (4.23). Assim,  $\text{inv}(w(1), \dots, w(n)) = |\alpha|$ .  $\square$



#### 4.2.4 Classificação dos pares de cobertura

Diferentemente do tipo A, as relações de cobertura do tipo B é mais complexa sendo descrita por vários tipos de pares.

**Definição 4.35.** Sejam  $w$  e  $w'$  permutações em  $W_n^{(k)}$  escritas na notação linha como

$$\begin{aligned} w &= u_1 \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots v_{n-k-r} \\ w' &= u'_1 \dots u'_k | \bar{\lambda}'_r \dots \bar{\lambda}'_1 v'_1 \dots v'_{n-k-r} \end{aligned}$$

Denote por  $\alpha, \lambda$  e  $\alpha', \lambda'$  os pares de partições associadas com  $w$  e  $w'$ , respectivamente. Também denote por  $\mu_i = \mu_i(w)$  e  $\mu'_i = \mu'_i(w')$ . Dizemos que:

- 1)  $w, w'$  é um par do *tipo B1* se:

$$w = \dots | \dots \bar{1} \dots \text{ e } w' = \dots | \dots 1 \dots$$

Em outras palavras, escolhamos  $w$  tal que  $\lambda_1 = 1$  e  $w'$  é obtido de  $w$  por removendo o sinal negativo de  $\bar{1}$ .

- 2)  $w, w'$  é um par do *tipo B2* se:

$$w = \dots | \dots \bar{a} \dots (a-1) \dots \text{ e } w' = \dots | \dots \overline{a-1} \dots a \dots,$$

onde  $a > 0$ . Em outras palavras, existem  $t \in [r]$  e  $q \in [n-k-r]$  tal que  $\lambda_t = a$  e  $v_q = a-1$ , e  $w'$  é obtido de  $w$  por comutando  $v_q$  e  $\lambda_t$ .

- 3)  $w, w'$  é um par do *tipo B3* se:

$$w = \dots a \dots | \dots (a-x) \dots \text{ e } w' = \dots (a-x) \dots | \dots a \dots,$$

onde  $a > x > 0$ . Em outras palavras, existem  $p \in [k]$  e  $q \in [n-k-r]$  tal que  $u_p = a$  e  $v_q = a-x$ . A permutação  $w'$  é obtida de  $w$  por comutando  $u_p$  e  $v_q$ .

- 4)  $w, w'$  é um par do *tipo B4* se:

$$w = \dots (a-x) \dots | \dots \bar{a} \dots \text{ e } w' = \dots a \dots | \dots \overline{a-x},$$

onde  $a > x > 0$ . Em outras palavras, existem  $p \in [k]$  e  $t \in [r]$  tal que  $u_p = a-x$  e  $\lambda_t = a$ . A permutação  $w'$  é obtida de  $w$  por comutando  $u_p$  e  $\lambda_t$ .

O próximo lema estabelece uma propriedade para pares do tipo B3 e B4.

**Lema 4.36.** Sejam  $w, w' \in W_n^{(k)}$ .

- (i) Se  $w, w'$  é um par do *tipo B3*, então todos os valores positivos  $a-x+1, a-x+2, \dots, a-1$  devem pertencer aos  $\lambda'$ s, isto é, existe  $t \in [r]$  tal que  $\lambda_t = a-x+1, \lambda_{t+1} = a-x+2, \dots, \lambda_{t+x-2} = a-1$ .

(ii) Se  $w, w'$  é um par do tipo B4, então todos os valores positivos  $a - x + 1, a - x + 2, \dots, a - 1$  devem pertencer aos  $v$ 's, isto é, existe  $q \in [n - k - r]$  tal que  $v_q = a - x + 1, v_{q+1} = a - x + 2, \dots, v_{q+x-2} = a - 1$ .

*Demonstração.* Sejam  $w, w'$  um par do tipo B3. Seja  $p \in [k]$  tal que  $u_p = a$ . Suponha que existe  $i \in [k]$  tal que  $i < p$  e  $u_i \in [a - x + 1, a - 1]$ . Depois de trocar  $a$  e  $a - x$ , temos que  $u'_p = a - x$ , onde  $u'_i$  ainda pertence à  $[a - x + 1, a - 1]$ . Em outras palavras,  $u'_i > u'_p$ , para  $i < p$ , que é impossível por 4.19.

Agora suponha que existe  $i \in [k]$  tal que  $p < i$  e  $u_i \in [a - x + 1, a - 1]$ . Isso dá  $u_p > u_i$ , para  $p < i$  oque não é possível por 4.19. Consequentemente, não existe  $i \in [k]$  tal que  $u_i \in [a - x + 1, a - 1]$ . Da mesma forma, provamos que não existe  $j \in [n - k - r]$  tal que  $v_j \in [a - x + 1, a - 1]$ . Portanto, temos provamos (i).

Usamos a mesma ideia para provar (ii) □

Para definir os quatro tipos de pares, somente exigimos que ambos  $w$  e  $w'$  pertençam à  $W_n^{(k)}$ . A princípio não é clara a relação entre eles. Esse é o conteúdo do nosso principal Teorema.

**Teorema 4.37.** *Sejam  $w, w' \in W_n^{(k)}$ . Então,  $w$  cobre  $w'$  se, e somente se,  $w$  e  $w'$  é um par do tipo B1, B2, B3 ou B4.*

*Demonstração.* Considere os conjuntos de inteiros positivos  $I_1 = [k], I_2 = [k + 1, r]$  e  $I_3 = [k + r + 1, n]$  e os respectivos conjuntos de inteiros negativos  $I_{\bar{1}} = [\bar{k}, \bar{1}], I_{\bar{2}} = [\bar{r}, \bar{k} + \bar{1}]$  e  $I_{\bar{3}} = [\bar{n}, \bar{k} + r + \bar{1}]$ . Note que cada conjunto representa um bloco de posições em  $w$  como mostrado abaixo:

$$w = \underbrace{\overline{v_{n-k-r}} \dots \overline{v_1}}_{I_{\bar{3}}} \underbrace{\lambda_1 \dots \lambda_r}_{I_2} \mid \underbrace{\overline{u_k} \dots \overline{u_1}}_{I_{\bar{1}}} \mid 0 \mid \underbrace{u_1 \dots u_k}_{I_1} \mid \underbrace{\overline{\lambda_r} \dots \overline{\lambda_1}}_{I_2} \mid \underbrace{v_1 \dots v_{n-k-r}}_{I_3}$$

Explicitamente,

$$w(i) = \begin{cases} v_{i-k-r}, & \text{para } i \in I_3 \\ \overline{\lambda_{k+r+1-i}}, & \text{para } i \in I_2 \\ u_i, & \text{para } i \in I_1 \\ 0, & \text{para } i = 0 \\ \overline{u_{-i}}, & \text{para } i \in I_{\bar{1}} \\ \lambda_{k+r+1-i}, & \text{para } i \in I_{\bar{2}} \\ \overline{v_{-(i-k-r)}}, & \text{para } i \in I_{\bar{3}} \end{cases} \quad (4.24)$$

Suponha que  $w$  cobre  $w'$ , isto é,  $w' \leq w$  e  $\ell(w) = \ell(w') + 1$ . Isso significa que existem  $\bar{n} \leq i < j \leq n$  tal que  $w(i) > w(j)$  e ou  $w' = w(i, j)(-i, -j)$ , se  $|i| \neq |j|$ , ou  $w' = w(i, j)$ , se  $|i| = |j|$ .

Primeiramente,  $i = 0$  se, e somente se,  $j = 0$ , pois a simetria de  $W_n^{(k)}$  implica que  $w(0) = 0$ . Logo, consideraremos sempre  $i$  e  $j$  não nulos.

O conjunto  $[-n, n]$  é a união disjunta  $I_{\bar{3}} \cup I_{\bar{2}} \cup I_{\bar{1}} \cup \{0\} \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3$ . Provaremos o Teorema por verificando todas as combinações possíveis de  $i < j$  tal que  $i \in I_m$  e  $j \in I_l$ , para  $m, l \in \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 1, 2, 3\}$ . A tabela abaixo inclui tais informações para  $i$  e  $j$ , onde as linhas denotam  $I_m$  e as colunas denotam  $I_l$ .

Tabela 3 – Possibilidades de escolhas para  $i < j$  tal que  $w(i) > w(j)$ .

$i \backslash j$	$I_3$	$I_2$	$I_1$	$I_{\bar{1}}$	$I_{\bar{2}}$	$I_{\bar{3}}$
$I_3$	×					
$I_2$	×	×				
$I_1$	▲	▲	×			
$I_{\bar{1}}$	×	▲	×	×		
$I_{\bar{2}}$	▲	▲	▲	▲	×	
$I_{\bar{3}}$	×	▲	×	▲	×	×

Existem algumas escolhas de  $i < j$  para os quais a relação  $w(i) > w(j)$  não são satisfeitas. Por exemplo, para  $i, j \in I_3$  tal que  $i < j$  temos  $w(i) = v_{i-k-r} < v_{j-k-r} = w(j)$ . Células vazias significam  $i > j$ . Uma célula marcada com  $\times$  significa que para todo  $i < j$  no respectivo conjunto, temos  $w(i) < w(j)$ . Células marcadas com  $\blacktriangle$  são as únicas tais que  $i < j$  satisfazem  $w(i) > w(j)$ .

Quando  $|i| \neq |j|$ , sabemos que  $w'$  é obtido por comutando os valores  $w(i)$  e  $w(j)$ , e também por comutando os valores  $w(-i)$  e  $w(-j)$ . Então, existe uma simetria na escolha de  $i, j$ . Por exemplo, escolher  $i < j$  tal que  $i \in I_{\bar{2}}$  e  $j \in I_{\bar{1}}$  é equivalente à escolher  $-j < -i$  tal que  $-j \in I_1$  e  $-i \in I_2$ . É suficiente verificar o caso onde  $i$  e  $j$  pertencem à  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente.

Portanto, somente temos que verificar as cinco possibilidades na tabela representadas pelas células sombreadas marcadas com  $\blacktriangle$ .

**Caso 1:** Suponha que  $i \in I_1$  e  $j \in I_3$  tal que  $w(i) > w(j)$ . Sejam  $a > x > 0$  inteiros tais que  $w(i) = u_i = a$  e  $w(j) = v_{j-k-r} = a - x$ . A permutação  $w'$  é obtida de  $w$  por comutando  $w(i) = a$  e  $w(j) = a - x$ , e comutando os respectivos negativos  $w(-i) = \bar{a}$  e  $w(-j) = \overline{a - x}$ . Em suma,

$$w = u_1 \dots a \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots (a - x) \dots v_{n-k-r}$$

$$w' = u_1 \dots a - x \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots a \dots v_{n-k-r}$$

Vamos comparar os comprimentos de  $w$  e  $w'$ . O item (i) do lema diz que todos os inteiros  $a - x + 1, \dots, a - 1$  devem pertencer aos  $\lambda'$ s. Então,

$$\begin{aligned} \{v'_q; v'_q > u'_i\} &= \{v'_q; v'_q > a - x\} = \{v'_{j-k-r, v'}, v'_{j-k-r+1}, \dots, v'_{n-k-r}\} \\ &= \{a\} \cup \{v_{j-k-r+1}, \dots, v_{n-k-r}\} \\ &= \{a\} \cup \{v_q; v_q > u_i\} \end{aligned}$$

e

$$\{v'_q; v'_q > u'_t\} = \{v_q; v_q > u_t\}, \text{ para } t \in [k], t \neq i$$

Daí,  $\mu'_i = \mu_i + 1$  e  $\mu'_t = \mu_t$ , para todo  $t \neq i$ . Segue de 4.23 que  $\alpha'_i = \alpha_i - 1$  e  $\alpha'_t = \alpha_t$ , para  $t \neq i$ , o que implica  $|\alpha| = |\alpha'| + 1$ . Como  $|\lambda| = |\lambda'|$  temos que

$$\ell(w) = |\alpha| + |\lambda| = |\alpha'| + 1 + |\lambda'| = \ell(w') + 1.$$

Portanto,  $w, w'$  é um par do tipo  $B3$ .

**Caso 2:** Suponha que  $i \in I_1$  e  $j \in I_2$  tal que  $w(i) > w(j)$ . Observe que se trocamos  $w(i) = u_i$  e  $w(j) = \overline{\lambda_{j-k-r}}$ , colocaria uma entrada negativa nas primeiras  $k$  posições de  $w'$ , o que não é permitido por 4.23. Portanto, esse não é um caso válido.

**Caso 3:** Suponha que  $i \in I_{\bar{1}}$  e  $j \in I_{\bar{2}}$  tal que  $w(i) > w(j)$ . Sejam  $a > x > 0$  inteiros tais que  $w(j) = \overline{\lambda_{k+r+1-j}} = \bar{a}$  e  $w(i) = \overline{u_{-i}} = \overline{a - x}$ . A permutação  $w'$  é obtida de  $w$  por comutando  $w(i) = \overline{a - x}$  e  $w(j) = \bar{a}$  e, os respectivos negativos  $w(-i) = a - x$  e  $w(-j) = a$ . Em suma,

$$\begin{aligned} w &= u_1 \dots a - x \dots u_k | \overline{\lambda_r} \dots \bar{a} \dots \overline{\lambda_1} v_1 \dots (a - x) \dots v_{n-k-r} \\ w' &= u_1 \dots a \dots u_k | \overline{\lambda_r} \dots \overline{a - x} \dots \overline{\lambda_1} v_1 \dots a \dots v_{n-k-r} \end{aligned}$$

Vamos comparar os comprimentos de  $w$  e  $w'$ . Pelo lema, todos os inteiros  $a - x + 1, \dots, a - 1$  estão nos  $v'$ s. Então,

$$\begin{aligned} \{v_q; v_q > u_{-i}\} &= \{v_q; v_q > a - x\} = \{a - x + 1, \dots, a - 1\} \cup \{v_q; v_q > a\} \\ &= \{a - x + 1, \dots, a - 1\} \cup \{v'_q; v'_q > u'_{-i}\} \end{aligned}$$

e

$$\{v'_q; v'_q > u'_t\} = \{v_q; v_q > u_t\}, \text{ para } t \in [k], t \neq i$$

Daí,  $\mu_{-i} = \mu'_{-i} + (x - 1)$  e  $\mu'_t = \mu_t$ , para  $t \neq -i$ . Logo, segue de 4.23 que  $\alpha'_{-i} = \alpha_{-i} + (x - 1)$  e  $\alpha'_t = \alpha_t$ , para  $t \neq -i$ , o que implica  $|\alpha| = |\alpha'| - x + 1$ . Como  $|\lambda| = |\lambda'| + x$ , temos  $\ell(w) = \ell(w') + 1$ . Portanto,  $w, w'$  é um par do tipo  $B4$ .

**Caso 4:** Suponha que  $i \in I_{\bar{2}}$  e  $j \in I_3$  tal que  $w(i) > w(j)$ . Sejam  $a > x > 0$  inteiros tais que  $w(i) = \lambda_{k+r+1-i} = a$  e  $w(j) = v_{j-k-r} = a - x$ . A permutação  $w'$  é

obtida de  $w$  por comutando  $w(i) = a$  e  $w(j) = a - x$  e comutando os respectivos negativos  $w(-i) = \bar{a}$  e  $w(-j) = \overline{a - x}$ . Em suma,

$$\begin{aligned} w &= u_1 \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \bar{a} \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots (a - x) \dots v_{n-k-r} \\ w' &= u_1 \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \overline{a - x} \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots a \dots v_{n-k-r} \end{aligned}$$

Vamos comparar os comprimentos de  $w$  e  $w'$ . Como  $w, w' \in W_n^{(k)}$ , todos os inteiros  $a - x + 1, \dots, a - 1$  devem estar nos  $u$ 's (isso pode se provado da forma do lema). denotamos por  $p \in [0, k]$  o maior inteiro tal que  $u_p < a - x$  (se necessário, tome  $u_0 = 0$ ). Claramente,  $u_{p+1} = a - x + 1, \dots, u_{p+x-1} = a - 1$ . Então,

$$\begin{aligned} \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\}, \text{ para todo } t \in [p] \\ \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\} \cup \{a\}, \text{ para todo } t \in [p+1, p+x-1] \\ \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\}, \text{ para todo } t \in [p+x, k] \end{aligned}$$

e, assim,

$$\mu'_t = \mu_t = \begin{cases} 1, & \text{se } p < t \leq p+x-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por 4.23,

$$\alpha_t = \alpha'_t = \begin{cases} 1, & \text{se } p < t \leq p+x-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e  $|\alpha| = |\alpha'| + (x - 1)$ . Claramente,  $|\lambda| = |\lambda'| + x$ , o que implica  $\ell(w) = \ell(w') + 2x - 1$ . Por hipótese,  $2x - 1$  deve ser igual à 1, o que nos leva a concluir que  $x = 1$ . Portanto,  $w, w'$  é um par do tipo  $B2$ .

**Caso 5:** Suponha que  $i \in I_2$  e  $j \in I_2$  tal que  $w(i) > w(j)$ . Primeiramente, assuma  $-i < j$ .  $w(i) = \lambda_{k+r+1+i} = a$  e  $w(j) = \bar{\lambda}_{k+r-j} = \overline{a - x}$ . A permutação  $w'$  é obtida de  $w$  por comutando  $w(i) = a$  e  $w(j) = \overline{a - x}$  e, os respectivos negativos  $w(-i) = \bar{a}$  e  $w(-j) = a - x$ . Em suma,

$$\begin{aligned} w &= u_1 \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \bar{a} \dots \overline{a - x} \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots v_{n-k-r} \\ w' &= u_1 \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \overline{a - x} \dots a \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots v_{n-k-r} \end{aligned}$$

Note que se existe algum  $\bar{\lambda}_m$  à direita de  $w(-i) = a - x$  ou  $a > v_1$ , então ele não satisfaz 4.19. Daí, devemos ter  $-i = k + r - 1, j = k + r$  e  $a < v_1$  e, ambos  $a - x$  e  $a$  de  $w'$  devem ser adicionados aos  $v$ 's. Além disso, todos os inteiros  $a - x + 1, \dots, a - 1$  devem estar nos  $u$ 's. Denotamos por  $p \in [0, k]$  o maior inteiro tal que  $u_p < a - x$ . Claramente,  $u_{p+1} = a - x + 1, \dots, u_{p+x-1} = a - 1$ . Vamos comparar os comprimentos de  $w$  e  $w'$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\} \cup \{a - x, a\}, \text{ para todo } t \in [p] \\ \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\} \cup \{a\}, \text{ para todo } t \in [p+1, p+x-1] \\ \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\}, \text{ para todo } t \in [p+x, k] \end{aligned}$$

e, assim,

$$\mu'_t = \mu_t = \begin{cases} 2, & \text{se } t \leq p \\ 1, & \text{se } p < t \leq p + x - 1 \\ 0, & \text{se } p + x - 1 < t \leq k \end{cases}$$

Por 4.23,

$$\alpha_t = \alpha'_t = \begin{cases} 2, & \text{se } t \leq p \\ 1, & \text{se } p < t \leq p + x - 1 \\ 0, & \text{se } p + x - 1 < t \leq k \end{cases}$$

e  $|\alpha| = |\alpha'| + 2p + (x - 1)$ . Claramente,  $|\lambda| = |\lambda'| + (a - x) + a$ , o que implica  $\ell(w) = \ell(w') + 2a + 2p - 1$ . Por hipótese,  $2a + 2p - 1$  deve ser igual à 1. Isso implica que  $a = 1$ ,  $p = 0$  e  $x$  é um inteiro tal que  $1 > x > 0$ . Portanto, esse não é um caso válido.

Se  $-i > j$  então podemos proceder como antes para mostrar que esse também não é um caso válido.

Finalmente, suponha que  $-i = j$ . Seja  $a > 0$  um inteiro tal que  $w(i) = \lambda_{k+r+1-i} = a$  e  $w(j) = \overline{\lambda_{k+r-j}} = \bar{a}$ . A permutação  $w'$  é obtida de  $w$  por comutando  $w(i) = a$  e  $w(j) = \bar{a}$ . Em suma,

$$\begin{aligned} w &= u_1 \dots u_k | \overline{\lambda_r} \dots \bar{a} \dots \overline{\lambda_1} v_1 \dots v_{n-k-r} \\ w' &= u_1 \dots u_k | \overline{\lambda_r} \dots a \dots \overline{\lambda_1} v_1 \dots v_{n-k-r} \end{aligned}$$

Por 4.19,  $w' \in W_n^{(k)}$  se, e somente se,  $-i = j = k + r$  e  $a < v_1$ . Então,  $a$  deve ser adicionado aos  $v$ 's. denotamos por  $p \in [0, k]$  o maior inteiro tal que  $u_p < a$ . Vamos comparar os comprimentos de  $w$  e  $w'$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\} \cup \{a\}, \text{ para todo } t \in [p] \\ \{v'_q; v'_q > u'_t\} &= \{v_q; v_q > u_t\}, \text{ para todo } t \in [p + 1, k] \end{aligned}$$

e, assim,

$$\mu'_t = \mu_t = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq p \\ 0, & \text{se } p < t \leq k \end{cases}$$

Por 4.23,

$$\alpha_t = \alpha'_t = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq p \\ 0, & \text{se } p < t \leq k \end{cases}$$

e  $|\alpha| = |\alpha'| + p$ . Claramente,  $|\lambda| = |\lambda'| + a$ , o que implica  $\ell(w) = \ell(w') + a + p$ . Por hipótese,  $a + p$  deve ser igual à 1, o que nos leva a concluir que  $a = 1$  e  $p = 0$ . Portanto,  $w, w'$  é um par do tipo B1. Claramente, nos implicitamente provamos a recíproca.  $\square$

Como consequência do Teorema 4.37, se começamos com uma permutação qualquer  $w \in W_n^{(k)}$ , estabelecemos certas condições para determinar todos os possíveis  $w' \in W_n^{(k)}$  cobertos por  $w$ .

**Corolário 4.38** (Comprimento diminuindo). *Seja  $w \in W_n^{(k)}$ .*

- (i) *Se  $w = \dots | \dots \bar{1} \dots$  então  $w$  cobre  $w' = \dots | \dots 1 \dots$*
- (ii) *Se  $w = \dots | \dots \bar{a} \dots (a-1) \dots$  então  $w$  cobre  $w' = \dots | \dots \overline{a-1} \dots a \dots$*
- (iii) *Se  $w = \dots a \dots | \dots b \dots$ , onde  $a > b$  e todos os inteiros positivos  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertencem aos  $\lambda$ 's, então  $w$  cobre  $w' = \dots b \dots | \dots a \dots$*
- (iv) *Se  $w = \dots b \dots | \dots \bar{a} \dots$ , onde  $a > b$  e todos os inteiros positivos  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertencem aos  $v$ 's, então  $w$  cobre  $w' = \dots a \dots | \dots \bar{b} \dots$*

*Demonstração.* Para as afirmações (i) e (ii), claramente  $w'$  pertence a  $W_n^{(k)}$ , o que implica  $w, w'$  são pares do tipo B1 e B2, respectivamente. Para (iii), a condição  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertence aos  $\lambda$ 's garante que  $w'$  pertence a  $W_n^{(k)}$ . Então,  $w, w'$  é um par do tipo B3. O mesmo argumento vale para (iv), concluindo que  $w, w'$  é um par do tipo B4.  $\square$

**Exemplo 4.39.** Considere  $w = 2 \ 5 | \bar{4} \ \bar{1} \ 3$ , onde  $n = 5$  e  $k = 2$ . Vamos determinar  $w' \in W_5^{(2)}$ , tal que  $w$  cobre  $w'$  seguindo o corolário 4.38. É imediato que  $w$  cobre  $25 | \bar{4} \ 1 \ 3$  que é um par do tipo B1.

Para obter um par do tipo B2, devemos escolher uma entrada  $\bar{a}$  nos  $\lambda$ 's e uma entrada  $a-1$  nos  $v$ 's. A única escolha é o par de entradas  $\bar{4}$  e 3, de modo que  $w$  cobre  $25 | \bar{3} \ \bar{1} \ 4$ .

Para obter um par do tipo B3, devemos escolher uma entrada  $a$  nos  $u$ 's e uma entrada  $b$  nos  $v$ 's tal que  $a > b$  e todos os inteiros positivos  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertencem aos  $\lambda$ 's. Escolhendo 5 e 3 obtemos uma cobertura de 4, que é o único inteiro entre  $b = 3$  e  $a = 5$  e, está contido nos  $\lambda$ 's. Assim,  $w$  cobre  $23 | \bar{4} \ \bar{1} \ 5$ . Escolhendo 6 e 3 não obtemos uma cobertura de 5 que é um número entre  $b = 3$  e  $a = 6$ , mas não pertence aos  $\lambda$ 's.

Finalmente, para obter um par de tipo B4, devemos escolher uma entrada  $b$  nos  $u$ 's e uma entrada  $\bar{a}$  nos  $\lambda$ 's tal que  $a > b$  e todos inteiros  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertencem aos  $v$ 's. Escolhendo  $b = 2$  e  $\bar{a} = \bar{4}$ , em que 3 é inteiro entre eles e está nos  $v$ 's. Obtemos que  $w$  cobre  $45 | \bar{2} \ \bar{1} \ 3$ . Colocando esses casos juntos temos os seguintes quatro pares de cobertura:

$w = 25|\bar{4} \bar{1} 3$  e  $w'_1 = 25|\bar{4} 1 3$  do tipo B1

$w = 25|\bar{4} \bar{1} \mathbf{3}$  e  $w'_2 = 25|\mathbf{3} \bar{1} 4$  do tipo B2

$w = 25|\bar{4} \bar{1} \mathbf{3}$  e  $w'_3 = 23|\bar{4} \bar{1} \mathbf{5}$  do tipo B3

$w = \mathbf{25}|\bar{4} \bar{1} 3$  e  $w'_4 = \mathbf{45}|\bar{2} \bar{1} 3$  do tipo B4

Temos também uma versão similar do Corolário 4.38, onde começamos com qualquer permutação  $w' \in W_n^{(k)}$  e queremos determinar todos os possíveis  $w \in W_n^{(k)}$  que cobrem  $w'$ .

**Corolário 4.40** (Comprimento aumentando). *Seja  $w' \in W_n^{(k)}$ .*

(i) *Se  $w' = \dots | \dots 1 \dots$  então  $w = \dots | \dots \bar{1} \dots$  cobre  $w'$*

(ii) *Se  $w' = \dots | \dots \overline{a-1} \dots a \dots$  então  $w = \dots | \dots \bar{a} \dots (a-1) \dots$  cobre  $w'$*

(iii) *Se  $w' = \dots b \dots | \dots a \dots$ , onde  $a > b$  e todos os inteiros positivos  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertencem aos  $\lambda$ 's, então  $w = \dots a \dots | \dots b \dots$  cobre  $w'$*

(iv) *Se  $w' = \dots a \dots | \dots \bar{b} \dots$ , onde  $a > b$  e todos os inteiros positivos  $b+1, b+2, \dots, a-1$  pertencem aos  $v$ 's, então  $w = \dots b \dots | \dots \bar{a} \dots$*



## 5 Diagramas

O objetivo deste capítulo é descrever as relações de cobertura do conjunto de representantes minimais em termos dos diagramas de Young (para o Tipo A) e em termos dos diagramas de Young semi-deslocados (para o Tipo B). As principais referências são os artigos [4], [8], [7], [5] a tese [6] e o livro [3].

### 5.1 Partições

**Definição 5.1.** Uma *partição inteira (padrão)*, ou simplesmente *partição*, é uma sequência finita

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

de inteiros não negativos em ordem crescente  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_r$ .

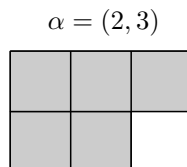
Os termos  $\alpha_i$  da partição  $\alpha$  são chamados *partes* de  $\alpha$ . O número de partes é o *comprimento* de  $\alpha$ , denotado por  $\ell(\alpha)$ , e a soma das partes de  $\alpha$ , denotado por  $|\alpha|$ , dá uma partição do número  $|\alpha|$ . Por exemplo, se  $|\alpha| = n$  dizemos que  $\alpha$  é uma partição de  $n$ .

Seja  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  uma partição. O *diagrama de Young*  $D_\alpha$  da partição  $\alpha$  é definido como o conjunto de caixas quadradas  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tal que  $1 \leq j \leq \alpha_i$ :

$$D_\alpha = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2; 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \alpha_i\}.$$

Ao desenhar tais diagramas adotaremos a convenção que a primeira coordenada  $i$  (o índice da linha) aumenta à medida que se sobe, e a segunda coordenada  $j$  (o índice da coluna) aumenta à medida que se vai da esquerda para à direita. Então o diagrama de Young de  $\alpha$  é uma coleção de  $|\alpha|$  caixas dispostas em linhas justificadas à esquerda, com  $\alpha_i$  caixas na  $i$ -ésima linha a partir da parte inferior.

Por exemplo,  $\alpha = (2, 3)$  é representado por



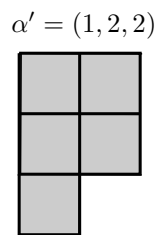
**Observação 5.2.** Esta convenção difere tanto da convenção Inglesa quanto da convenção Francesa (veja [3]).

Denote por  $\mathcal{P}_k$  o conjunto de todas as partições com comprimento no máximo  $k$ . Se  $n$  é um inteiro com  $n \geq k$ , seja  $\mathcal{P}_{k,n}$  o subconjunto de  $\mathcal{P}_k$  consistindo dos elementos

cuja maior parte é menor ou igual a  $n - k$ . Para qualquer partição  $\mu$ , seja  $\mathcal{P}_\mu$  o conjunto de todas as partições  $\alpha$  tal que  $\alpha \leq \mu$ . Em particular, se  $\mu$  é uma partição cujo diagrama de Young é o retângulo  $k \times (n - k)$ , então  $\mathcal{P}_\mu$  é idêntico a  $\mathcal{P}_{k,n}$ .

O conjugado da partição  $\alpha$  é a partição  $\alpha'$  cujo diagrama é a transposta do diagrama  $D_\alpha$ , isto é, o diagrama obtido pela reflexão na diagonal principal. Daí,  $\alpha'_i$  é o número de caixas na  $n - k - i + 1$ -ésima coluna de  $\alpha$ , ou equivalentemente,  $\alpha'_i = \text{card}\{j; \alpha_j \geq \alpha_k + 1 - i\}$ . Em particular,  $\alpha'_{n-k} = \ell(\alpha)$  e  $\alpha_k = \ell(\alpha')$ . Claramente,  $\alpha'' = \alpha$ .

Por exemplo, o conjugado de  $\alpha = (2, 3)$  acima é  $\alpha' = (1, 2, 2)$  e o diagrama de Young de  $\alpha'$  é:



**Definição 5.3.** Uma partição inteira estrita é uma sequência crescente de inteiros positivos

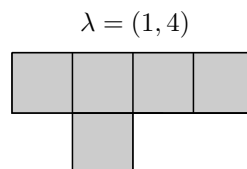
$$\lambda = (\lambda_r > \dots > \lambda_1 > 0).$$

Como no caso de  $\alpha$ , o comprimento da partição estrita  $\lambda$  é igual ao seu número de partes. Denotaremos por  $\mathcal{D}_n$  o conjunto de todas as partições estritas  $\lambda$ , com  $\lambda_r \leq n$ .

Partições estritas podem ser representadas graficamente como uma coleção finita de caixas, dispostas em forma de escada, com linhas de comprimentos iguais a  $\lambda_i$ . Esta representação é chamada *diagrama de Young estrito* e será denotada por  $SD_\lambda$ .

$$SD_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2; 1 \leq i \leq r, i \leq j \leq i + \lambda_{r+1-i} - 1\}.$$

Por exemplo,  $\lambda = (1, 4)$  é representado por



## 5.2 Diagramas de Young - Tipo A

No Lema 4.12, vimos que  $(S_n)_J$  é identificado com  $S_k \times S_{n-k}$  e  $(S_n)^J$  é identificado com o conjunto de todas as permutações Grassmannianas  $S_n^{(k)}$ .

A notação linha de  $w \in S_n^{(k)}$  pode ser identificada pela fórmula

$$w = u_1 \dots u_k | v_1 \dots v_{n-k}, \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} 0 < u_1 < \dots < u_k, \quad u_i = w(i), \quad \text{para } 1 \leq i \leq k \\ 0 < v_1 < \dots < v_{n-k}, \quad v_i = w(k+i) \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-k \end{aligned}$$

**Definição 5.4.** Seja  $w \in S_n^{(k)}$ . Definimos uma partição  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  de  $n$  por

$$\alpha_j = u_j - j,$$

isto é,  $\alpha_j$  é a diferença entre o valor na posição  $j$  e posição  $j$  correspondente, onde  $1 \leq j \leq k$ .

Para cada  $1 \leq i \leq \alpha_k$ , a conjugada de  $\alpha$  é  $\alpha'_i = \text{card}\{j; \alpha_j \geq \alpha_k + 1 - i\}$ .

Note que:

$$\ell_A(w) = |\alpha| = \sum_{j=1}^k \alpha_j, \quad \text{em que } \ell_A(w) \text{ é o comprimento de } w.$$

De fato, pelo Lema 4.2,

$$\ell_A(w) = \text{inv}(w) = \text{card}\{(i, j); i < j \text{ e } w(i) > w(j)\}.$$

Assim,  $\ell_A(w) = \sum_{j=1}^k \text{card}\{j; v_j < u_i\}$ . Escolha  $u_i \in w$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Temos que:

$$\begin{aligned} v_j < u_i \text{ ou } v_j > u_i \text{ e} \\ \text{card}\{j; v_j < u_i\} + \text{card}\{j; v_j > u_i\} = n - k \end{aligned}$$

Para cada  $i$ , podemos coletar todos os índices que são maiores que  $u_i$  que aparecem na permutação (5.1) de acordo com a posição que ocupam pela seguinte fórmula:

$$[n] - [u_i] = \{j; u_j > u_i\} \cup \{j; v_j > u_i\},$$

onde a cardinalidade é dada por

$$n - u_i = \text{card}\{u_j; u_j > u_i\} + \text{card}\{v_j; v_j > u_i\}. \quad (5.2)$$

Observe que  $\text{card}\{j; u_j > u_i\} = k - i$ . Daí,

$$\begin{aligned} \text{card}\{j; v_j > u_i\} &= n - u_i - k + i, \text{ e} \\ \text{card}\{j; v_j < u_i\} &= u_i - i = \alpha_i. \end{aligned}$$

Portanto,  $\ell_A(w) = |\alpha| = \sum_{j=1}^k \alpha_j$ .

**Lema 5.5.** A aplicação  $w \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  é uma bijeção entre  $S_n^{(k)}$  e todas as sequências de inteiros  $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq n - k$ , isto é, existe uma bijeção entre  $S_n^{(k)}$  e  $\mathcal{P}_{k,n}$ .

*Demonstração.*  $\Rightarrow$ ) Seja  $w \in S_n^{(k)}$ . Temos que:

$$w(j-1) < w(j), \text{ para todo } 1 \leq j \leq k \text{ com } w(0) = 0$$

$$w(j-1) + i \leq w(j), \text{ com } 1 \leq i \leq n - k$$

$$w(j-1) - (j-1) + i \leq w(j) - j + 1$$

$$\alpha_{j-1} + i \leq \alpha_j + 1$$

$$\alpha_{j-1} \leq \alpha_j$$

Logo,  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$  e  $\alpha_k = w(k) - k \leq n - k$ , uma vez que  $w(k) \leq n$ .

$\Leftarrow$ ) Sejam  $\alpha$  uma partição tal que  $\alpha_k \leq n - k$  e  $\alpha'_{n-k} \leq k$ . Então, os  $n$  números

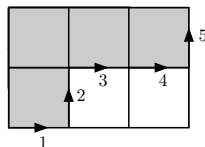
$$i_d = \alpha_d + d \quad (1 \leq d \leq k)$$

$$j_d = -\alpha'_{n-k-d+1} + d + k \quad (1 \leq d \leq n - k)$$

são uma permutação de  $\{1, \dots, n\}$ , em que  $\alpha'$  é o conjugado de  $\alpha$ .

De fato, o diagrama de Young de  $\alpha$  está contido no retângulo  $k \times (n - k)$ . Escrevemos um caminho ao longo da fronteira do diagrama de Young partindo do canto inferior esquerdo para o canto superior direito do retângulo. Enumere cada seta de 1 à  $n$  no sentido anti-horário. Os números atribuídos as setas verticais são  $i_d = \alpha_d + d$ , para  $1 \leq d \leq k$  e, por transposição, os números atribuídos as setas horizontais são  $j_d = -\alpha'_{n-k-d+1} + d + k$ , para  $1 \leq d \leq n - k$ . Logo, a permutação Grassmanniana correspondente é  $w = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$ , ou seja, as setas verticais correspondem à parte  $w(1) < \dots < w(k)$  enquanto as setas horizontais correspondem à parte  $w(k+1) < \dots < w(n)$ .  $\square$

**Exemplo 5.6.** Seja  $w = 25|134 \in S_5^{(2)}$ . A partição associada à  $w$  é  $\alpha = (1, 3)$ , pois  $\alpha_1 = w(1) - 1 = 1$  e  $\alpha_2 = w(2) - 2 = 3$ . O conjugado de  $\alpha$  é  $\alpha' = (1, 1, 2)$ . Quando considerado como um diagrama de Young,  $\alpha$  está contido no retângulo  $2 \times 3$ .



Temos que:

$$i_1 = \alpha_1 + 1 = 2, \quad i_2 = \alpha_2 + 2 = 5.$$

$$j_1 = -\alpha'_3 + 3 = 1, \quad j_2 = -\alpha'_2 + 4 = 3, \quad j_3 = -\alpha'_1 + 5 = 4.$$

Logo,  $w = (2, 5, 1, 3, 4)$ .

Em termos da partição, o Lema 4.14 pode ser reescrito como:

**Lema 5.7.** *Sejam  $w, w' \in S_n^{(k)}$  com partições associadas  $\alpha$  e  $\mu$ , respectivamente. Então,  $w$  cobre  $w'$  se, e somente se, existe  $a \in [k]$  tal que  $\mu_a = \alpha_a - 1$ .*

*Demonstração.* Uma vez que  $w$  cobre  $w'$  temos que se  $w(a) = p$  então  $w'(a) = p - 1$ , para  $a \in [k]$  e  $p \in [n]$ , e  $w(i) = w'(i)$ , para  $i \in [k - 1]$ .

$$\begin{aligned} w &= \dots p \dots | \dots \dots \dots \\ w' &= \dots p - 1 \dots | \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Portanto,  $\alpha_a = w(a) - a = p - a$  e  $\mu_a = w'(a) - a = p - 1 - a = \alpha_a - 1$ . A recíproca é imediata. □

O Lema 5.7, em termos dos diagramas de Young das partições  $\alpha$  e  $\mu$ , tem a seguinte interpretação geométrica:  $D_\mu$  é obtido a partir de  $D_\alpha$  retirando uma caixa na linha  $a$ .

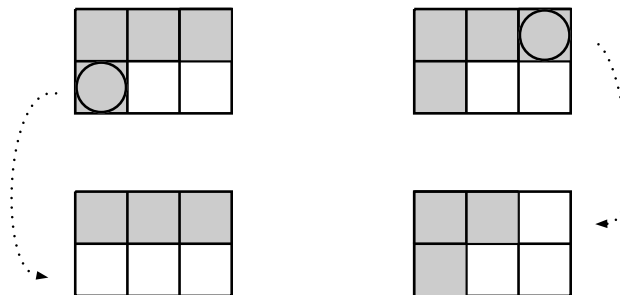
**Definição 5.8.** Um *canto* de  $D_\alpha$  é uma caixa do diagrama de Young, de modo que, se a excluirmos de  $D_\alpha$ , o diagrama resultante  $D_\mu$  é um diagrama de Young de uma partição  $\mu$ , que está associada a uma permutação Grassmanniana  $w'$  coberta por  $w$ , permutação associada a  $\alpha$ .

Em resumo, existe um canto na  $i$ -ésima linha se, e somente se,  $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ , para  $i > 1$  ou  $\alpha_1 > 0$ .

**Exemplo 5.9.** Seja  $w = 25|134 \in S_5^{(2)}$ . Queremos determinar  $w'$  tal que  $w' \leq w$ . Já vimos que a partição associada a  $w$  é  $\alpha = (1, 3)$ . Para  $a \in [2]$ , tem-se:

- i) Se  $a = 1$  então  $\mu_1 = 0$ . Logo,  $\mu = (0, 3)$
- ii) Se  $a = 2$  então  $\mu_2 = 2$ . Logo,  $\mu = (1, 2)$

Portanto,  $w$  cobre  $w'_1 = 15234$  e  $w'_2 = 24135$ .



**Corolário 5.10.**

$$w \leq z \text{ em } S_n^{(k)} \text{ se, e somente se, } \alpha_i \leq \mu_i, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 4.6,  $z$  é obtido de  $w$  por uma sequência de coberturas

$$w \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow \longrightarrow z$$

e, pelo Lema 5.7, dadas quaisquer duas permutações nesta sequência, as partições associadas a essas permutações difere de 1.  $\square$

Dada uma permutação  $w$ , existe uma bijeção entre a expressão reduzida  $w = s_1 s_2 \dots s_l$  e a notação completa  $w = w(1)w(2) \dots w(n)$ . Dessa forma, podemos recuperar a permutação em termos da expressão reduzida. Rotulamos cada caixa do retângulo com um gerador seguindo a seguinte ordem: de baixo para cima com geradores em ordem crescente e da esquerda para à direita com geradores em ordem crescente. Cada linha do retângulo será lida como um produto de geradores da direita para a esquerda. A permutação  $w$  será dada pelo produto das expressões de cada linha.

$L_k$	$s_k$	$s_{k+1}$	$\dots$	$s_{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$			
$L_j$	$s_j$	$s_{j+1}$	$\dots$	$s_{n-k+j-1}$
$\vdots$	$\vdots$			
$L_1$	$s_1$	$s_2$	$\dots$	$s_{n-k}$

**Exemplo 5.11.** O diagrama de Young associado a permutação  $w = 25|134$  é dado por:

$s_2$	$s_3$	$s_4$
$s_1$	$s_2$	$s_3$

Como  $L_1 = s_1$  e  $L_2 = s_4 s_3 s_2$  segue que  $w = s_1 s_4 s_3 s_2$ .

Vimos no Lema 5.5 que  $S_n^{(k)}$  é isomorfo ao conjunto parcialmente ordenado de todas partições de inteiros em no máximo  $k$  partes, com a maior parte no máximo  $n - k$ , isto é, uma partição cujo diagrama de Young encaixa em um retângulo  $k \times (n - k)$ . Essas partições são ordenadas pela inclusão de seus diagramas de Young.

**Exemplo 5.12.** Sejam  $W = S_5$ ,  $k = 2$ ,  $J = S \setminus \{(2, 3)\}$ . Temos que:

$$W_J = \{12345, 12435, 12543, 12354, 12453, 12534, 21345, 21435, 21543, 21354, 21453, 21534\}$$

$$W^J = \{12345, 13245, 14235, 23145, 15234, 24135, 25134, 34125, 35124, 45123\}$$

A partição associada ao elemento topo  $w_0 = (n, n - 1, \dots, 1)$  no grupo  $S_n^{(k)}$  é  $\alpha = (n - k, \dots, n - k)$ . Ela é representada pelo retângulo  $k \times (n - k)$ . A partir do

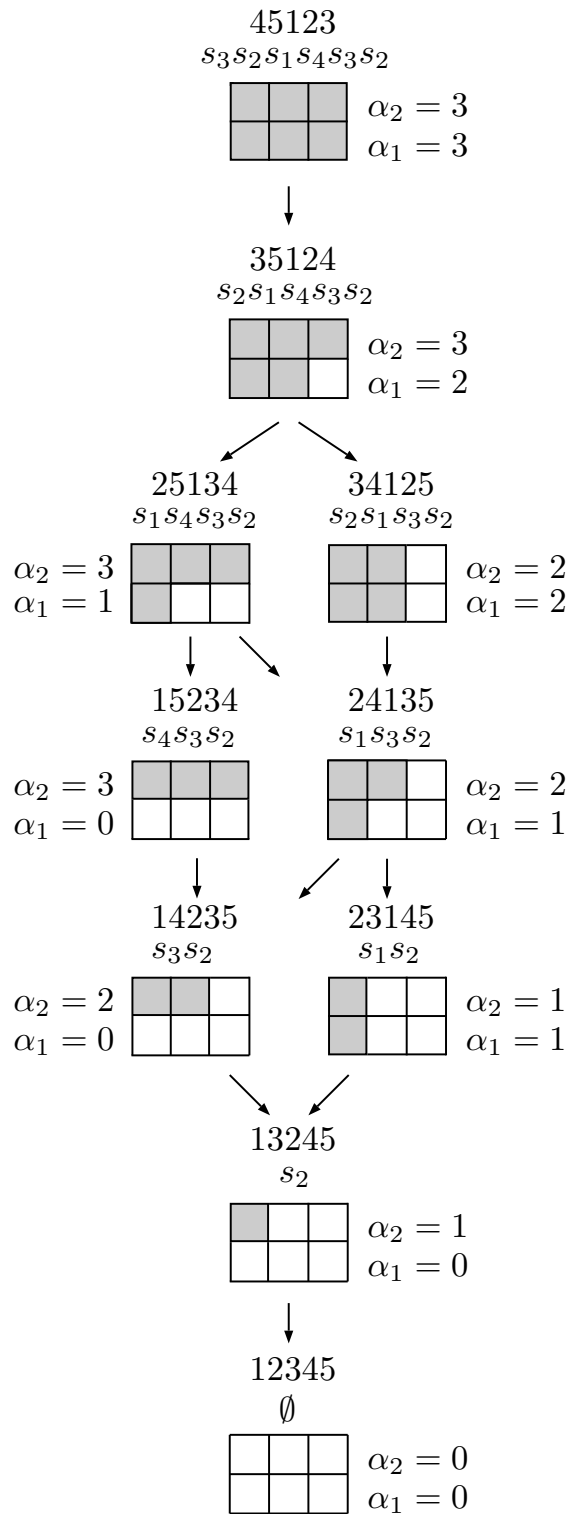
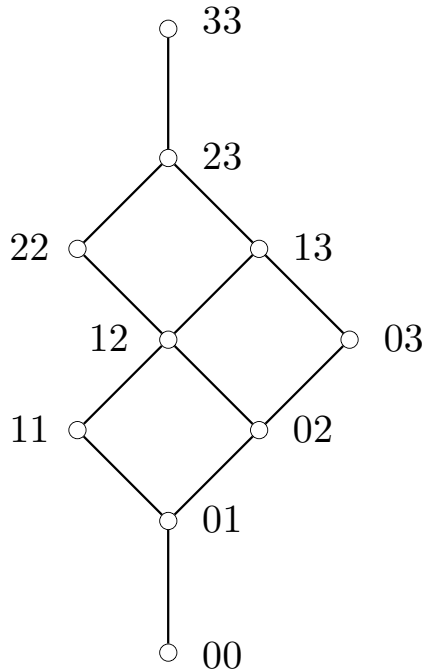


Figura 16 – Relações de cobertura em  $S_5^{(2)}$

diagrama de Young de  $w_0$  obtemos todos os outros diagramas de Young associados aos elementos de  $S_n^{(k)}$  excluindo-se os cantos dos diagramas. A Figura 16 ilustra esse processo para  $n = 5$  e  $k = 2$ . Observe que o grafo de Bruhat de  $S_5^{(2)}$  é obtido por invertendo as direções de todas as setas da Figura 16.



**Observação 5.13.** Alguns autores optam por trabalhar com ações à esquerda, por exemplo, o artigo [8]. Vamos abaixo descrever como proceder neste caso.

O subgrupo parabólico maximal  $W_J$ , em que  $J = S - \{(n - k, n - k - 1)\}$ , é o conjunto de todas as permutações obtidas por permutando os elementos dos conjuntos  $N_1$  e  $N_2$ , tal que  $N_1 = \{1, \dots, n - k\}$  e  $N_2 = \{n - k + 1, \dots, n\}$ , e,  $W^J$  é o conjunto de todas as permutações tal que os elementos de  $N_1$  e  $N_2$  aparecem na sua ordem natural.

Se  $w \in W^J$  e  $1 \leq i \leq k$  então definimos uma partição  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  de  $n$ , associada à  $w$ , por

$$\alpha_i(w) = \text{card}\{j; j \text{ aparece à direita de } n - i + 1 \text{ e } j < n - i + 1\}.$$

isto é, para determinar  $\alpha_i$  basta olhar onde está o valor  $n - i + 1$  do conjunto  $N_2$  na permutação  $w$  e contar quantos elementos de  $N_1$  estão à direita e são menores que  $n - i + 1$ .

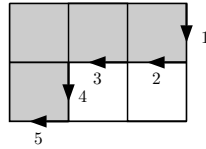
Como no caso de ações à direita, existe uma bijeção entre  $S_n^{(k)}$  e  $\mathcal{P}_{k,n}$ .

Para recuperar a permutação em termos da notação completa escreva um caminho ao longo da fronteira do diagrama de Young partindo do canto superior direito para o canto inferior esquerdo do retângulo. Atribuímos números pra cada seta de 1 à  $n$  no sentido horário. Se os números atribuídos das setas verticais são  $i'_1 < \dots < i'_k$  e cujas as setas horizontais são  $j'_1 < \dots < j'_{n-k}$ , então a permutação associada a este caminho é



$\mathbf{w} = (j'_1, \dots, j'_{n-k}, i'_1, \dots, i'_k)$ , e, a permutação  $w \in W^J$  que procuramos é a inversa de  $\mathbf{w}$ , isto é,  $w = (\mathbf{w})^{-1}$ .

Por exemplo, sejam  $w = 41253$ ,  $k = 2$  e  $n = 5$ . A partição associada à  $w$  é  $\alpha = (1, 3)$ . O diagrama de Young de  $\alpha$  está contido no retângulo  $2 \times 3$ .

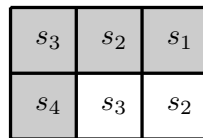


Temos que  $\mathbf{w} = (2, 3, 5, 1, 4)$  e, portanto,  $w = (4, 1, 2, 5, 3)$ .

Para recuperar a permutação em termos da expressão reduzida, rotulamos cada caixa do retângulo com um gerador seguindo a seguinte ordem: de cima para baixo com geradores em ordem crescente e da direita para à esquerda com geradores em ordem crescente. Cada coluna do retângulo será lida como um produto de geradores da cima para baixo. A permutação  $w$  será dada pelo produto das expressões de cada coluna.

$C_1$	$\dots$	$C_{n-k-1}$	$C_{n-k}$
$s_{n-k}$	$\dots$	$s_2$	$s_1$
$\vdots$			
$s_{n-k+j-1}$	$\dots$	$s_{j+1}$	$s_j$
$\vdots$			
$s_{n-1}$	$\dots$	$s_{k+1}$	$s_k$

Por exemplo, seja  $w = 41253$ . Como  $C_1 = s_3s_4$ ,  $C_2 = s_2$  e  $C_3 = s_1$ , segue que  $w = s_3s_4s_2s_1$ .



Vejam agora um exemplo.

Sejam  $W = S_5$ ,  $k = 2$ ,  $J = S \setminus \{(3, 4)\}$ ,  $N_1 = \{1, 2, 3\}$  e  $N_2 = \{4, 5\}$ . Temos que:

$$W_J = \{12345, 13245, 31245, 32145, 21345, 23145, 12354, 13254, 31254, 32154, 21354, 23154\}$$

$$W^J = \{12345, 12435, 14235, 12453, 41235, 14253, 41253, 14523, 41523, 45123\}$$

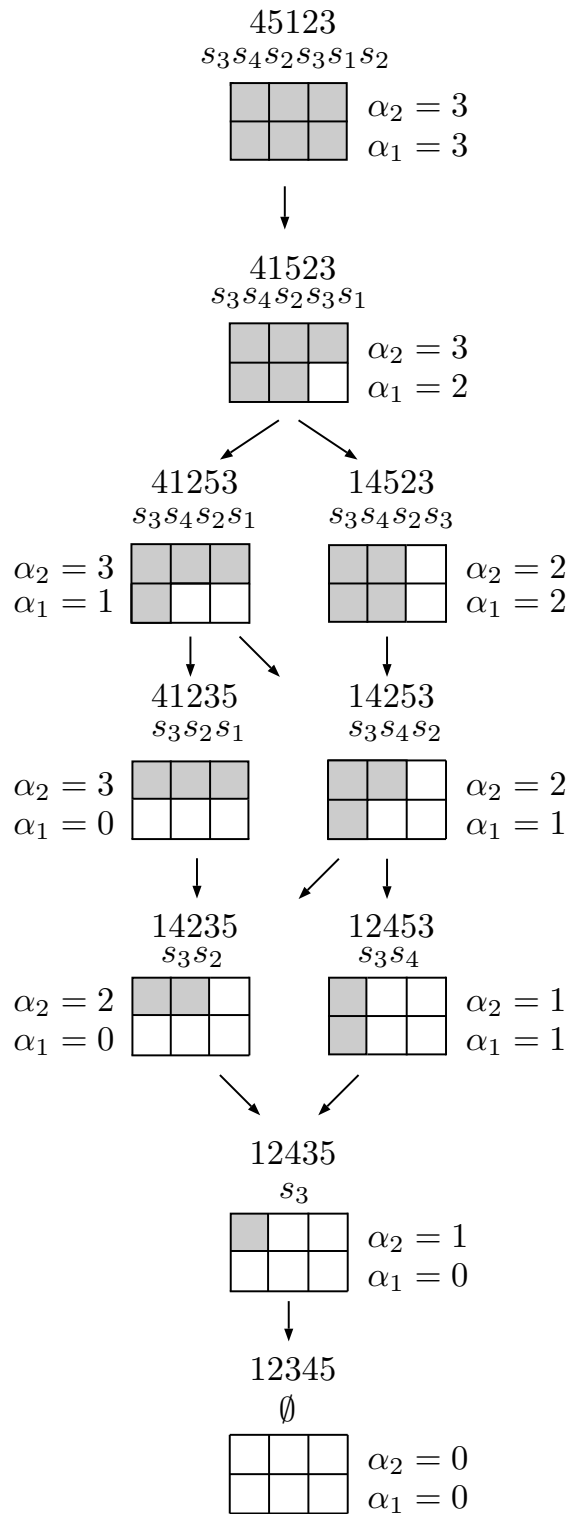


Figura 17 – Relações de cobertura em  $S_5^{(2)}$  - ação à esquerda

### 5.3 Diagramas de Young semi-deslocados - Tipo B

A descrição dos elementos  $W^J$  no caso do tipo B se dá pela combinação de uma partição padrão e uma partição estrita.

Cada elemento  $w_{u,\lambda} = w_{u,\lambda} = u_1 \dots u_k | \bar{\lambda}_r \dots \bar{\lambda}_1 v_1 \dots v_{n-k-r} \in W^J$  corresponde a uma partição dupla  $\Lambda = \alpha | \lambda$ , onde  $\alpha = (u, \lambda)$  é definida pela Equação (4.20), isto é,

$$\alpha_i = u_i - i + d_i, \text{ com } d_i = \text{card}\{j; \lambda_j > u_i\}. \quad (5.3)$$

Chamamos  $\alpha$  a *partição superior* de  $\Lambda$  e  $\lambda$  a *partição inferior* de  $\Lambda$ . Já mostramos no Lema 4.34, que o comprimento de  $w \in W_n^{(k)}$  é  $\ell_B(w) = |\alpha| + |\lambda|$ , em que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$  e  $|\lambda| = \sum_{i=1}^r \lambda_i$ .

Considere a permutação  $w = [2, 5, \bar{4}, \bar{1}, 3]$ . A partição inteira estrita  $\lambda$  corresponde as entradas negativas de  $w$ , isto é,  $\lambda = (1, 4)$  e, pela Equação (5.3), temos que  $\alpha = (2, 3)$ .

Defina  $P(k, n)$  como o conjunto de pares  $\Lambda = \alpha | \lambda$  com  $\alpha \in \mathcal{P}_{k, n-k}$  e  $\lambda \in \mathcal{D}_n$  tal que  $\alpha_1 \geq \ell(\lambda)$ , isto é,  $\Lambda$  satisfaz

$$\begin{aligned} n - k &\geq \alpha_k \geq \dots \alpha_1 \geq 0 \\ n &> \lambda_r > \dots > \lambda_1 > 0 \\ \alpha_1 &\geq \ell(\lambda). \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Lema 5.14.** *Existe uma bijeção entre  $W^{(k)}$  e  $P(k, n)$ .*

Quando queremos enfatizar que uma permutação  $w$  está associada a alguma partição dupla  $\Lambda$ , denotamos a permutação por  $w_\Lambda$ .

O par  $\Lambda = \alpha | \lambda \in P(k, n)$  pode ser representado como um diagrama de caixas que chamamos de *diagramas Young semi-deslocados*. Um diagrama Young semi-deslocado é composto por duas partes: a parte superior é o diagrama Young que se encaixa em um retângulo e a parte inferior é o diagrama de Young estrito deslocado em forma de escada.

Considere o diagrama superior  $\alpha$  à esquerda justificado no retângulo  $k \times (n - k)$  e denote por  $D_\alpha$  o conjunto de caixas quadradas com coordenadas  $(i, j)$  neste retângulo dispostos de tal forma que  $(1, 1)$  é a caixa inferior esquerda. Além disso, considere, para cada  $1 \leq i \leq r$ , que a  $i$ -ésima linha de  $\lambda$  é deslocada para a direita  $(i - 1)$  unidades. Com essa mudança, o diagrama inferior pode ser visto dentro uma partição escada com  $n$  linhas e defina  $SD_\lambda$  o conjunto de caixas quadradas com coordenadas  $(i, j)$  do diagrama inferior arranjado de tal forma que  $(1, 1)$  é a caixa superior esquerda.

O diagrama  $D_\Lambda$  de  $\Lambda = \alpha | \lambda$  é a justaposição de  $D_\alpha$  e  $SD_\lambda$ . Caixas, linhas, ou colunas que estão contidas na parte superior  $D_\alpha$  (respectivamente parte inferior  $SD_\lambda$ )

serão chamadas de *caixas superiores* (resp. inferiores), linhas ou colunas. Note que a condição  $\alpha_1 \geq \ell(\lambda)$  implica que o número de linhas no diagrama inferior não excede o número de caixas na última linha do diagrama superior.

Por exemplo, a Figura 18 apresenta o diagrama de Young semi-deslocado de  $w_\Lambda = (2, 3, 1, 4)$ .

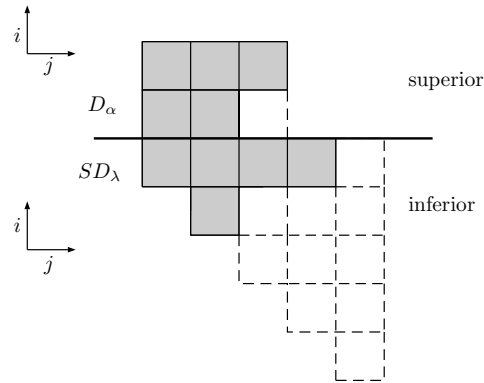


Figura 18 – Diagrama de Young semi-deslocado de  $\Lambda = 2, 3 | 1, 4$  mostrando a direção de leitura de  $D_\alpha$  e  $SD_\lambda$ .

Vejamos agora como podemos recuperar a permutação  $w$  na notação janela a partir do diagrama semi-deslocado da partição  $\Lambda$ .

Primeiramente, vamos estabelecer uma relação entre as linhas superiores e as colunas superiores com as colunas inferiores de  $D_\Lambda$ .

Dada uma linha superior  $1 \leq i \leq k$ , a  $(\alpha_i + i)$ -ésima coluna inferior na forma da escada  $n \times n$  será chamada de *relacionada horizontalmente*, ou simplesmente *H-relacionada*. Esta definição tem uma explicação geométrica em  $D_\Lambda$ : uma coluna inferior é H-relacionada se podemos desenhar uma linha de 45 graus do centro da primeira caixa desta coluna até o centro da primeira caixa de alguma linha superior.

Para qualquer coluna superior  $1 \leq j \leq n - k$ , a  $(k + j - \alpha'_{n-k-j+1})$ -ésima coluna inferior na forma escada  $n \times n$  será chamada *relacionada verticalmente* ou simplesmente *V-relacionada*. Geometricamente em  $D_\Lambda$ , suponha que uma  $t$ -ésima coluna inferior é escolhida:

- (a) se  $t \leq \alpha_1$ , então essa coluna inferior é V-relacionada;
- (b) caso contrário, se pudermos traçar uma linha de 45 graus a partir do centro da primeira caixa nesta coluna até o centro da caixa em branco imediatamente abaixo de uma caixa de  $D_\alpha$ , então essa coluna inferior é V-relacionada.

Em resumo:

**H-relacionada:**  $i$ -ésima linha superior  $\leftrightarrow$   $(\alpha_i + i)$ -ésima coluna inferior;

**V-relacionada:**  $j$ -ésima coluna superior  $\leftrightarrow$   $(k + j - \alpha'_{n-k-j+1})$ -ésima coluna inferior.

Por exemplo, as colunas  $H$ -relacionadas e as colunas  $V$ -relacionadas de  $\Lambda = 2, 3|1, 4$  são as colunas inferiores com linhas vermelhas e linhas azuis, respectivamente, na Figura 19.

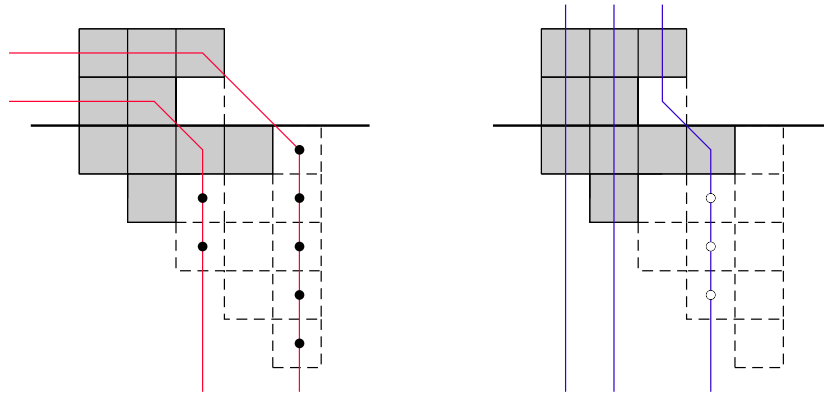


Figura 19 – Colunas  $H$ -relacionadas (à esquerda) e  $V$ -relacionadas (à direita) de  $\Lambda = 2, 3|1, 4$ . O número de pontos em cada coluna inferior são os seus comprimentos vagos.

**Definição 5.15.** O *comprimento vago* de uma coluna inferior é o número de caixas vazias abaixo das caixas de  $\lambda$  na forma da escada  $n \times n$ . Explicitamente, o comprimento vago da  $j$ -ésima coluna inferior é o número  $j - \text{card}\{i; \lambda_i + i > j\}$ .

Podemos recuperar a permutação associada com tal diagrama tomando o comprimento vago das colunas inferiores  $H$  e  $V$  relacionadas. A permutação associada a  $\Lambda = \alpha|\lambda$  é definida por  $w_{u,\lambda}$  na Equação (4.18), em que  $0 < u_1 < \dots < u_k$  é o comprimento vago das colunas  $H$ -relacionadas e  $v_1 > \dots > v_{n-k-\ell(\lambda)} > 0$  é o comprimento vago das colunas  $V$ -relacionadas. Por exemplo, a partição  $\Lambda = 2, 3|1, 4$  (ver Figura 19) corresponde ao elemento  $w = (2, 5, \bar{4}, \bar{1}, 3)$ .

Dada qualquer permutação  $w \in W^J$ , queremos determinar quais as possíveis permutações  $w' \in W^J$  tal que  $w' \leq w$  e  $\ell(w) = \ell(w') + 1$ . Fazemos isso através dos diagramas de Young semi-deslocados, ou seja, vamos dar uma interpretação do Teorema 4.37 em termos de  $D_\Lambda$  e  $D'_\Lambda$ , em que  $\Lambda = \alpha|\lambda$  e  $\Lambda' = \beta|\mu$  são as partições duplas associada a  $w$  e  $w'$ , respectivamente. Nosso primeiro passo é reescrever a definição 4.35.

**Definição 5.16.** Um *canto* de  $\Lambda$  é uma caixa do diagrama de Young semi-deslocado, de modo que, se a excluirmos de  $D_\Lambda$ , o diagrama resultante  $D'_\Lambda$  é um diagrama de Young semi-deslocado de uma partição dupla  $\Lambda'$ , que está associada a uma permutação  $w'$  que satisfaz as equações (5.4). Portanto, um canto de um diagrama é a caixa mais à direita de

uma linha onde não há caixa logo abaixo dela. Adicionalmente, nós também consideramos o canto mais à direita da última linha de  $\alpha$  sendo um canto se vale a inequação estrita  $\alpha_1 > \ell(\lambda)$ . Em resumo,

- (i) existe um canto na  $i$ -ésima linha se, e somente se,  $\alpha_{i+1} > \alpha_i$ , para  $i > 1$  ou  $\alpha_1 > \ell(\lambda)$ ;
- (ii) existe um canto na  $i$ -ésima linha de inferior se, e somente se,  $\lambda_i + 1 < \lambda_{i+1}$ . A primeira linha de  $\lambda$  sempre contém um canto.

Os cantos que estão contidos na parte superior  $D_\alpha$  (respectivamente, na parte inferior  $SD_\lambda$ ) serão chamados de *cantos superiores* (respectivamente, *inferiores*). Vamos classificar os cantos em diferentes classes com base em sua localização no diagrama. Chamamos:

- $T$ -canto é qualquer canto superior;
- $D$ -canto é qualquer canto inferior que esteja em uma caixa diagonal  $(i, i) \in SD_\lambda$ ;
- $H$ -canto é qualquer canto inferior que esteja em uma coluna inferior  $H$ -relacionada;
- $V$ -canto é qualquer canto inferior que esteja em uma coluna inferior  $V$ -relacionada e não seja diagonal.

Dado  $1 \leq t \leq \ell(\lambda)$  e  $1 \leq x \leq \lambda_t$ , suponha que  $C$  é uma caixa inferior q está na  $t$ -ésima linha inferior e  $(t + x - 1)$ -ésima coluna inferior. Então,  $C$  é chamado de *caixa intermediária* ou  $M$ -caixa de  $\wedge$  se satisfizer as seguintes condições:

- $C$  não é nem um canto nem uma diagonal, isto é,  $1 < x < \lambda_t$ ;
- $C$  pertence a uma coluna  $H$ -relacionada;
- $x > \lambda_{t+1} + 1$ ;
- $\lambda_t - x - \alpha_{p_C} \leq \alpha_{p_C - 1}$ , onde  $p_C$  é o índice  $1 \leq p_C \leq k$  tal que  $\alpha_{p_C} + k - p_C + 1 = t + x - 1$

A Figura 20 ilustra os cantos e  $M$ -caixas de  $\wedge = 2, 3|1, 4$ . Observe que ela contém todos os quatro tipos de cantos e a primeira linha superior não contém um canto desde  $\alpha_1 = \ell(\lambda)$ .

Note que, se apenas removemos uma  $M$ -caixa, não obtemos um diagrama de Young. Mas, se removemos um canto  $C$  e movemos as últimas  $(\lambda_t - x)$ -caixas da  $t$ -ésima linha inferior para a  $p_C$ -ésima linha superior, obtemos uma partição. De fato, esta partição  $\wedge' = \beta|\mu$  é dada da seguinte forma

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i + \lambda_t - x, & \text{se } i = p_C \\ \alpha_i, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\mu_j = \begin{cases} x - 1, & \text{se } j = t \\ \lambda_j, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.6)$$

Logo, a permutação  $w_{\wedge'}$  associada à  $\wedge'$  satisfaz  $w_{\wedge'} \leq w_{\wedge}$  e  $\ell(\wedge) = \ell(\wedge') + 1$ . Chamamos  $\wedge'$  de *rearranjo de  $\wedge$  com respeito à  $M$ -caixa  $C$* .

As condições de uma  $M$ -caixa  $C$  implica que todas as caixas à direita do canto  $C$  pertencem a uma coluna inferior  $V$ -relacionada.

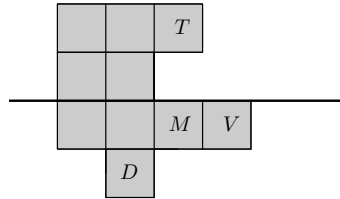


Figura 20 – Cantos e  $M$ -caixas de  $\wedge = 2, 3|1, 4$  rotulados de acordo com o seu tipo.

A Definição 4.35 pode ser reescrita como:

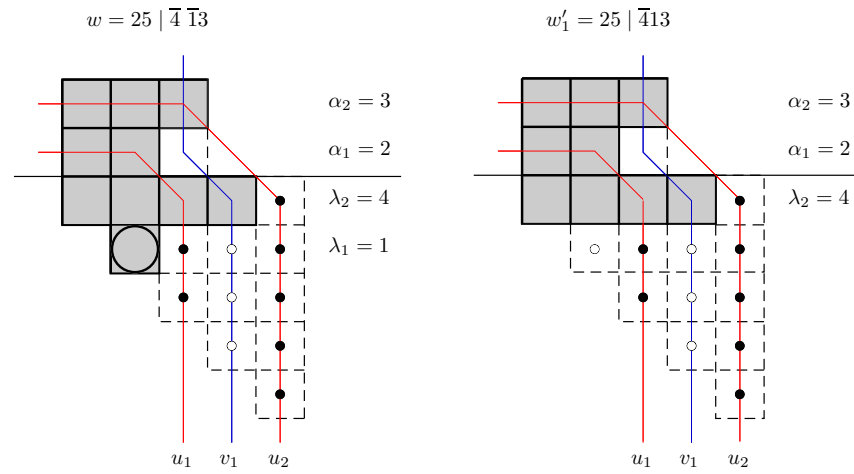
**Definição 5.17.** Sejam  $w$  e  $w'$  permutações em  $W^J$  com partições duplas  $\wedge = \alpha|\lambda$  e  $\wedge' = \beta|\mu$ , e, diagramas de Young semi-deslocados  $D_{\wedge}$  e  $D'_{\wedge}$ , respectivamente. Dizemos que:

- 1)  $w, w'$  é um par do tipo  $B1$  se  $D'_{\wedge}$  é obtido de  $D_{\wedge}$  retirando um  $D$ -canto.
- 2)  $w, w'$  é um par do tipo  $B2$  se  $D'_{\wedge}$  é obtido de  $D_{\wedge}$  retirando um  $V$ -canto.
- 3)  $w, w'$  é um par do tipo  $B3$  se  $D'_{\wedge}$  é obtido de  $D_{\wedge}$  retirando um  $T$ -canto.
- 4)  $w, w'$  é um par do tipo  $B4$  se  $D'_{\wedge}$  é obtido de  $D_{\wedge}$  retirando um  $H$ -canto ou rearranjando uma  $M$ -caixa.

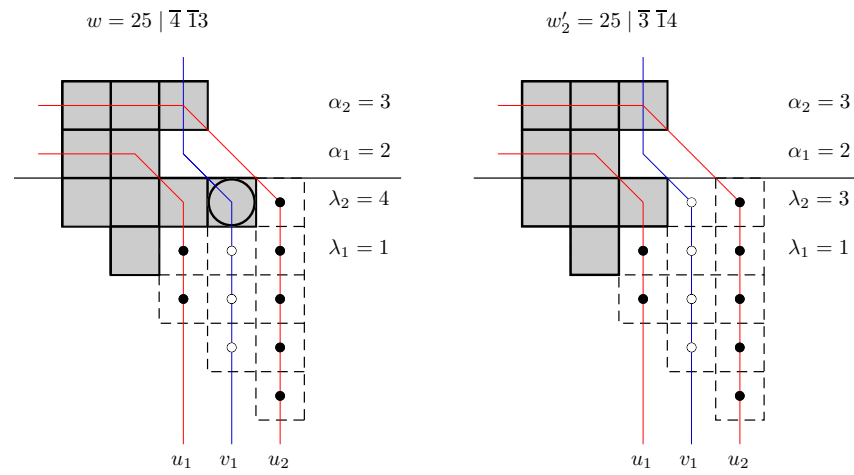
**Teorema 5.18.** Sejam  $w, w' \in W_n^{(k)}$ . Então,  $w$  cobre  $w'$  se, e somente se,  $w$  e  $w'$  é um par do tipo  $B1, B2, B3$  ou  $B4$ .

Vamos ilustrar o Teorema 5.18 com um exemplo.

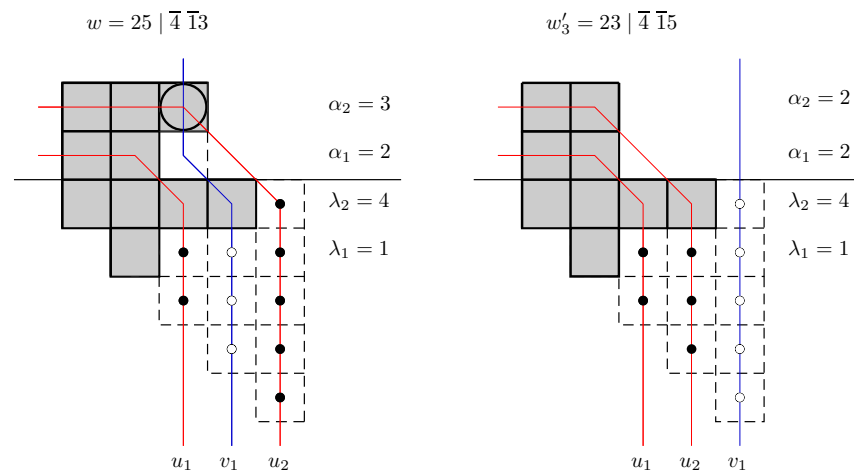
- 1) Tipo  $B1$



2) Tipo B2

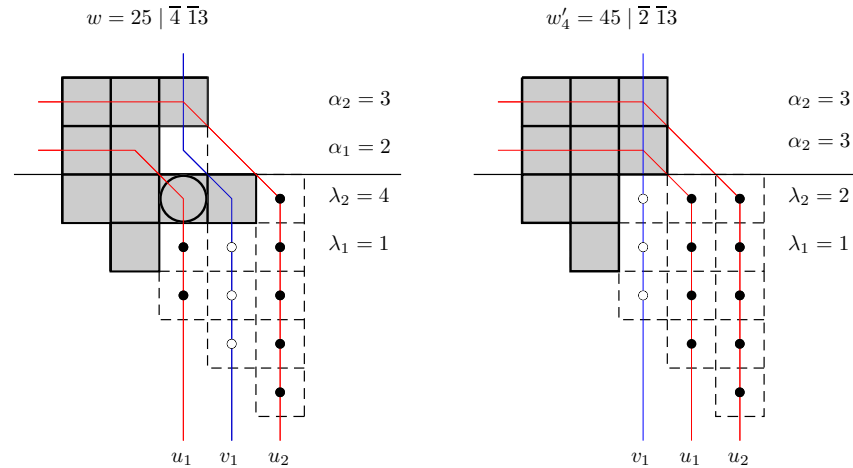


3) Tipo B3



4) Tipo B4





Outra vantagem de organizar as caixas de uma partição dupla  $\wedge$  como o diagrama de Young semi-deslocado é porque há uma maneira fácil de obter a permutação  $w_\wedge$  em termos de reflexões simples  $s_i$ . Isso é conhecido como a *expressão de leitura de linha* de  $w \in W^{(k)}$ , onde  $\wedge = \alpha|\lambda \in P(k, n)$ . Em relação à partição superior  $\alpha$ , seja  $s^T : D_\alpha \rightarrow \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$  definida, para  $1 \leq i \leq k$  e  $1 \leq j \leq n - k$ , por

$$s^T(i, j) = s_{j+i-1} \quad (5.7)$$

Para uma dada partição  $\alpha \in \mathcal{P}_{k, n-k}$  associada a  $\wedge = \alpha|\lambda \in P(k, n)$ , o mapa de leitura de linha é uma bijeção  $\eta^T : D_\alpha \rightarrow \{1, 2, \dots, |\alpha|\}$  definida atribuindo os números aumentando para as caixas de  $D_\alpha$  da direita para à esquerda e de baixo para cima. Então, podemos formar uma palavra

$$w_\alpha = s_{i_1} \dots s_{i_{|\alpha|}}, \quad (5.8)$$

onde  $s_{i_l} = s^T((\eta^T)^{-1}(l))$ , para todo  $1 \leq l \leq |\alpha|$ .

Com respeito a partição inferior  $\lambda$ , seja  $s^B : SD_\lambda \rightarrow \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ , para  $1 \leq i \leq n - k$ ,  $1 \leq j \leq n$  e  $i < j$ , por

$$s^B(i, j) = s_{i+j-(n-k)} \quad (5.9)$$

Como anteriormente, para uma dada partição  $\lambda \in D_n$  associada a  $\wedge = \alpha|\lambda \in P(k, n)$ , a leitura de linha mapa é uma bijeção  $\eta^B : SD_\lambda \rightarrow \{1, 2, \dots, |\lambda|\}$  definido por atribuir os números aumentando para as caixas de  $SD_\lambda$  da direita para à esquerda, começando da linha de baixo para a linha de cima. Então, podemos formar uma palavra

$$w_\lambda = s_{j_1} \dots s_{j_{|\lambda|}}, \quad (5.10)$$

onde  $s_{j_l} = s^B((\eta^B)^{-1}(l))$ , para todo  $1 \leq l \leq |\lambda|$ .

A concatenação de (5.8) e (5.10) nos dá  $w = w_\wedge = w_\lambda w_\alpha$ .

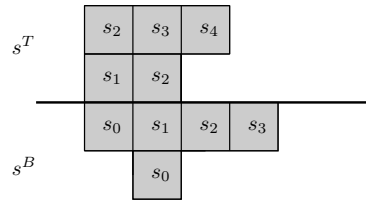


Figura 21 – Ilustração das aplicações  $s^T$  e  $s^B$  para  $\lambda = 2, 3|1, 4$ .

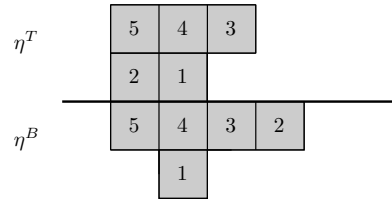


Figura 22 – Ilustração das aplicações  $\eta^T$  e  $\eta^B$  para  $\lambda = 2, 3|1, 4$ .

Por exemplo,  $w_\alpha = s_2 s_1 \cdot s_4 s_2 s_3 s_2$  e  $w_\lambda = s_0 \cdot s_3 s_2 s_1 s_0$ . Portanto,  $w = (s_0 \cdot s_3 s_2 s_1 s_0)(s_2 s_1 \cdot s_4 s_3 s_2 s_1)$ .

A partição dupla associada ao elemento topo  $w_0$  no grupo  $W_n^{(k)}$  é  $\lambda = n-k, \dots, n-k|n, n-1, \dots, k+1$ . Ela é representada pelo retângulo  $k \times (n-k)$  (correspondente a parte  $\alpha$ ) e todas as  $n-k$  linhas na forma escada (correspondente a parte  $\lambda$ ). Note que esse é o maior diagrama de Young semi-deslocado possível. A partir do diagrama de Young semi-deslocado de  $w_0$  obtemos todos os outros diagramas de Young semi-deslocado associados aos elementos de  $W_n^{(k)}$  excluindo cantos e rearranjando  $M$ -caixas. A Figura 23 ilustra esse processo para  $n = 4$  e  $k = 2$ .

Observe que o grafo de Bruhat de  $W_4^{(2)}$  é obtido por invertendo a direções de todas as setas da Figura 23. Para cada um dos tipos de cobertura é denotado usando uma cor diferente:

- setas em azul são pares do tipo B1;
- setas em amarelo são pares tipo B2;
- setas em vermelho são pares tipo B3;
- setas em verde são pares tipo B4.

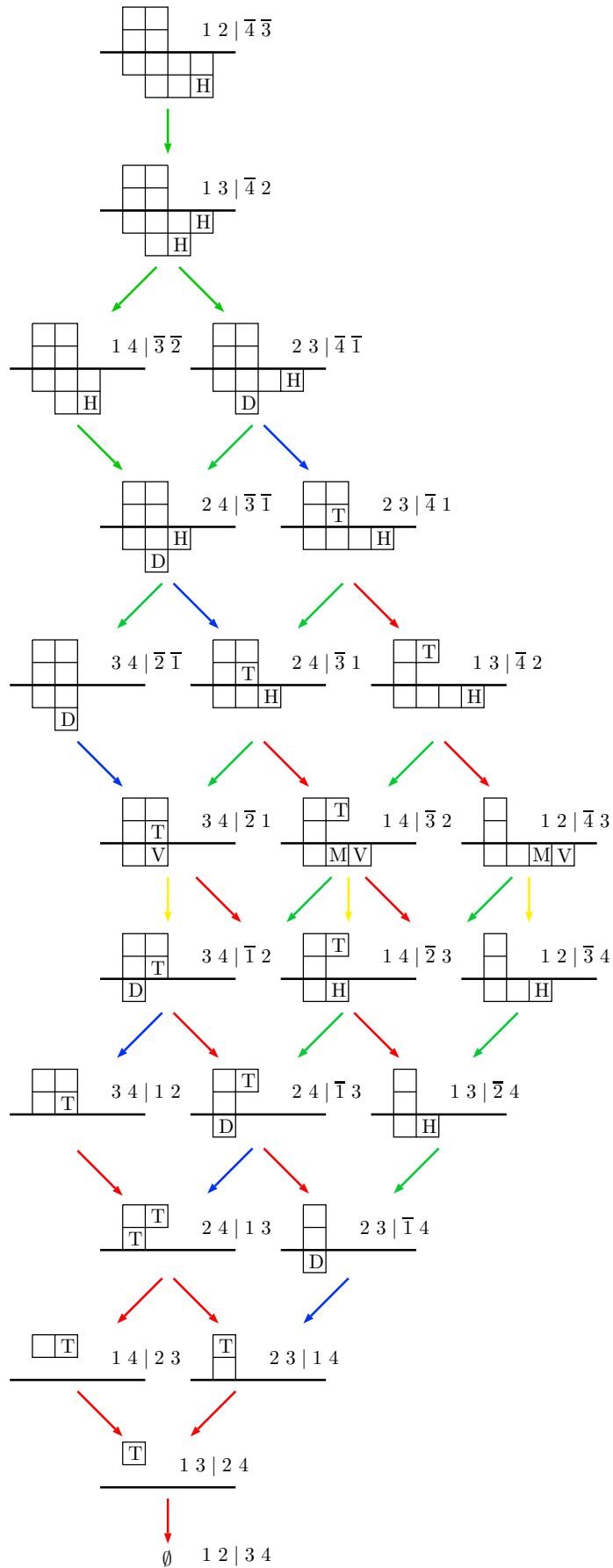


Figura 23 – Relações de cobertura em  $W_4^{(2)}$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] BJORNER, A.; BRENTI, B. *Combinatorics of Coxeter Groups*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [2] DUMMIT, D. S.; FOOTE, R. M. *Abstract algebra*. 3th ed. John Wiley and Sons, Inc, 2004.
- [3] I. G. MACDONALD., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press, 2th ed, 2015.
- [4] IKEDA, T., NARUSE H., *Excited Young diagrams and Equivariant Schubert Calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2008), no. 10, 5193–5221.
- [5] LAMBERT, J., RABELO, L., *Covering relations of  $K$ -Grassmannian permutations of type  $B$* . (2018)-submetido.
- [6] LAMBERT, J., *Combinatorics on Schubert varieties*. Tese de doutorado - Unicamp, 2017. <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/330848>
- [7] L. CASIAN; Y. KODOMA. *On the Cohomology of Real Grassmann Manifolds*. Obtido no ArXiv (2013), arXiv:1309.5520.
- [8] R. P. STANLEY. *Weyl Groups, the hard Lefschetz Theorem, and the Sperner Property*. SIAM J. Alg. Disc. Math 1 (1980), 168–184.