Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Reinaldo Loubach Sardinha

O Uso do GeoGebra no Ensino de Desenho Geométrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Juiz de Fora

2014

Reinaldo Loubach Sardinha

O Uso do GeoGebra no Ensino de Desenho Geométrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rogério Casagrande

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sardinha, Reinaldo Loubach.
O Uso do GeoGebra no Ensino de Desenho Geométrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental / Reinaldo Loubach Sardinha. – 2014.
50 f. : il.

Orientador: Rogério Casagrande.
Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Desenho Geométrico. 2. GeoGebra. I. Casagrande, Rogério, orient. II. Título.

Reinaldo Loubach Sardinha

O Uso do GeoGebra no Ensino de Desenho Geométrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 16 de agosto de 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério Casagrande - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. José Barbosa Gomes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Marcelo Oliveira Veloso
Universidade Federal de São João del-Rei

Dedico este trabalho ao meu querido pai, Vergílio José Sardinha, que durante todo o transcorrer deste curso, muito me ensinou sobre o verdadeiro sentido de palavras como "determinação" e "superação"

AGRADECIMENTOS

À Deus, em primeiro lugar, que muito me abençoou e me guardou durante todos os dias desta jornada!

Aos meus queridos Pais, em especial minha Mãe que sempre me apoiou e muito me ajudou durante o curso!

À minha amada esposa e companheira Enelania, que sempre esteve ao meu lado, me apoiando e torcendo muito por mim!

Aos meus amados e queridos filhos Lucas e Letícia, fontes de motivação!

Aos meus queridos sogros Eliel e Elza, que muito me apoiaram e sempre cuidaram da minha família durante a minha ausência!

Ao meu tio Boanerges e sua família, pela sua ajuda, apoio e caronas até a faculdade!

À minha avó Elça, pelo apoio e hospedagem em sua casa!

À minha querida irmã Roselaine, por todo o apoio e incentivo!

Aos meus cunhados e suas respectivas famílias, por toda a torcida e apoio!

À toda a minha família, tios, primos e sobrinhos, que apoiaram e torceram por mais essa conquista em minha vida!

Aos professores, em especial ao Rogério Casagrande e todos os colegas de estudo!

Ao professor Adlai, pela contribuição!

Aos grandes amigos que fiz durante o curso, em especial, Márcia e Ulisses, parceiros de trabalhos. Jorge e Miguel, pelas caronas. Marisa pelo exemplo de determinação. Haroldo, Josimar, Junior, Luiz Fernando, Marta, Marcelo, Renato, Rodrigo e todos mais!

À direção da escola onde trabalho, pelo apoio e incentivo!

À todos os meus colegas de trabalho, pela colaboração e apoio!

À todos da equipe da coordenação do PROFMAT que estão contribuindo esse curso para mais um avanço da educação em nosso país.

À CAPES pelo apoio financeiro, pois sem ele muitos não teriam como frequentar às aulas e conseguir realizar o sonho de se tornar um mestre.

O Desenho Geométrico é um jogo de raciocínio matemático que não só lhe permitirá resolver uma série de problemas abstratos da Matemática, com uma teoria muito pequena, como também desvendar uma infinidade de mistérios da Natureza, que é muito geométrica. Carlos Marmo (Cadernos Anglo - Desenho Geométrico - 7ºAno do Ensino Fundamental, pág. 3, 2012)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivos, além de relatar experiências e dificuldades vivenciadas pelo autor no ensino de Desenho Geométrico para alunos dos anos finais do ensino fundamental regular, apresentar a uma ferramenta tanto para professores quanto para alunos, que possa auxiliar o ensino e a aprendizagem do Desenho Geométrico. O objetivo principal deste trabalho é a apresentação de um recurso computacional, o GeoGebra, um software gráfico de uso livre e gratuito, como ferramenta de ajuda e apoio no ensino da disciplina de Desenho Geométrico ou mesmo na disciplina de Geometria e a proposta de introdução nas escolas publicas deste recurso. Na elaboração deste trabalho, foram realizadas pesquisas e consultas em obras e artigos, escritas por grandes autores. Este trabalho também apresenta como sugestão para professores, algumas atividades que podem ser usadas no dia-a-dia, em aulas práticas que visam ampliar o conhecimento dos alunos e buscar despertar nos mesmos, um maior interesse pelo assunto.

Palavras-chave: Desenho Geométrico. GeoGebra.

ABSTRACT

This study aims, in addition to reporting experiences and difficulties experienced by the author in teaching students Geometric Design for the final years of regular elementary school, present a tool for both teachers and students, who may assist the teaching and learning of Geometrical drawing. The main objective of this work is to present a computational resource, GeoGebra, a graphical software for free use, as help and support tool in teaching the subject of Geometric Design or in the discipline of geometry and the proposed introduction in public schools of this feature. In preparing this report, consultations and research in books and articles, written by great authors were performed. This work also presents a suggestion for teachers, some activities that can be used in day-to-day, practical lessons that aim to broaden students' knowledge and seek to awaken in them a greater interest in the subject.

Key-words: Geometric Design. GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
CBC	Conteúdos Básicos Comuns
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
PRONATEC	Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
IMPA	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
CRV	Centro de Referência Virtual do Professor

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Todos nós, logo que nascemos nos deparamos com um mundo cercado de figuras e formas geométricas. Nossos primeiros brinquedos, as decorações do nosso quarto, detalhes nas roupas de criança. Enfim, tudo ao nosso redor, está repleto de figuras e formas geométricas. Então por que a Geometria e principalmente o Desenho Geométrico são tão negligenciados no ensino hoje em dia? Essa é uma pergunta difícil de responder. Porém, suas consequencias são facilmente percebedidas nas escolas, por parte dos professores que se deparam com esses conteúdos nos poucos livros didáticos que ainda apresentam conteúdos relacionados a essas disciplinas.

Há pouco mais de dois anos, lecionando a disciplina de Desenho Geométrico para alunos dos anos finais do ensino fundamental na rede particular, tem se feito notar, uma acentuada dificuldade por parte dos alunos no que diz respeito ao uso dos materiais básicos de construção, como compasso, régua e esquadros. Essas dificuldades apresentadas pelos alunos, por sua vez acabam por gerar, em boa parte deles, o desinteresse pelo conteúdo o que acaba dificultando ainda mais o aprendizado dos mesmos. Alguns alunos até apresentam um bom conhecimento do assunto, mas que por dificuldades no manejo dos instrumentos de desenho acabam por se desestimularem e terminam por apresentarem uma queda no rendimento escolar na disciplina.

Daí, a grande pergunta: O que fazer para mudar essa situação?

Graças a oportunidade oferecida pelo IMPA e a SBM, através do PROFMAT, que muito contribuiu, não só em conhecimento, mas também na apresentação de uma gama de recursos e ferramentas, a resposta para esta questão, veio na forma de um recurso gráfico, o GeoGebra.

Preocupado com essa questão e seguindo o pensamento de Polya, que diz

> A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais daquilo que se deve ensinar. (POLYA, 1978)

Comecei a introduzir esta ferramenta gráfica em algumas aulas, o que por sinal, muito tem contribuído para o ensino do Desenho Geométrico. A sua utilização já tem produzido alguns frutos, apresentando resultados satisfatórios.

Há de se deixar bem claro que, como Wagner mesmo menciona no prefácio de uma de suas obras,

> Não se deve esquecer que não há método fácil para se aprender Matemática (ou qualquer outra coisa). A segurança que se pode adquirir em um assunto tem uma só origem: a prática, a experiência muitas das vezes repetida onde os insucessos têm tanto valor quantos os sucessos. (WAGNER, 1993)

2 O DESENHO GEOMÉTRICO

2.1 O Desenho Geométrico no Brasil

O Desenho Geométrico já ocupou papel de destaque no contexto educacional em nosso país. O Desenho Geométrico já foi inclusive, matéria eliminatória nos vestibulares para Engenharia e Arquitetura.

No início do século XX, mas exatamente a partir de 1930, com a crescente expansão industrial, o Desenho Geométrico passa a ser considerada uma disciplina curricular. Contudo, já nas décadas de 40 e 50 começam a ser realizadas discussões sobre a importância do Desenho Geométrico na formação educacional no país.

A partir de 20 de dezembro de 1961, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), publicada pelo na época presidente João Goulart, coloca então o Desenho Geométrico em segundo plano no contexto curricular.

No ano de 1970, o MEC retirou o Desenho Geométrico dos exames de vestibulares, o que lamentavelmente acarretou certa desvalorização deste conteúdo no contexto educacional. Um erro que por sua vez, acabou fazendo com que muitos colégios deixassem de lecionar Desenho Geométrico. Tal decisão do MEC muito contribuiu não só para o fracasso do ensino no Brasil assim como para a deficiente formação dos profissionais da área de engenheira e arquitetura nos últimos anos. O grande autor de livros de Desenho Geométrico, José Carlos Putnoki, em uma de suas matérias, publicada na Revista do Professor de Matemática (RPM 13, pág. 13, 1988), relata:

> Já faz um bom tempo que o desenho Geométrico foi banido das nossas escolas de primeiro e segundo graus. Coincidentemente, de lá para cá, a Geometria, cada vez mais, vem se tornando o grande terror da matemática, tanto para alunos quanto para professores. Com certeza não se trata apenas de uma coincidência, mas sim de uma consequência. (PUTNOKI, 1988)

Em 1988, na Conferência Internacional de Viena, Áustria, foram dados passos relevantes no sentido de trazer a tona novamente a importância do Desenho Geométrico. Nesta conferencia foram apresentados diversos trabalhos sobre as aplicações do Desenho Geométrico em diversas áreas tais como nas ciências, tecnologia e artes plásticas.

2.2 O Desenho Geométrico Hoje

Atualmente o Desenho Geométrico está restrito aos cursos de licenciatura, engenharias, arquitetura, artes e alguns cursos técnicos. Tem sido pouco ministrado ou inexistente nas grades curriculares do Ensino Básico das escolas publicas, sendo utilizado apenas por escolas particulares e alguns poucos estados. O que é lamentável, pois segundo Marmo,

> O Desenho Geométrico é uma matéria que permite o exercício da Interdisciplinaridade. (MARMO, 2012).

De acordo com os PCNs, responsáveis pelas propostas curriculares em todo o país, temos que

> As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. (PCN, 1998)

A educação no Estado de Minas Gerais é regida de acordo com os CBCs. Estes por sua vez trazem as seguintes orientações para o ensino do Desenho Geométrico nos anos finais do Ensino Fundamental, que podem ser vistas no quadro abaixo:

Figura 1 – CBC Matemática - Ensino Fundamental 2.

Eixo Temático III *Tema 1: Relações Geométricas entre Figuras Planas*

Espaço e Forma

TÓPICOS	HABILIDADES	Ano / Carga Horária			
		6º	7º	8º	9º
16. Construções geométricas	16.0. Conceitos				
	16.1. Construir perpendiculares, paralelas e mediatriz de um segmento usando régua e compasso.	5	5	3	
	16.2. Construir um triângulo a partir de seus lados, com régua e compasso.		5	4	
VIII. Construções geométricas	• Reconhecer o ponto médio de um segmento, a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo com figuras obtidas a partir de simetrias. • Construir com régua e compasso: a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, retas paralelas, retas perpendiculares, transporte de ângulos e de segmentos. • Construir triângulos isósceles e eqüiláteros, quadrados e hexágonos regulares.				

Fonte: CRV

3 O GEOGEBRA

3.1 A escolha do GeoGebra

A escolha do GeoGebra como ferramenta a ser usada nas aulas de Desenho Geométrico foi baseada em três pontos relevantes.

I. Se trata de um programa livre, criado pelo Instituto Internacional GeoGebra, uma organização sem fins lucrativos registrada na Áustria e com sede em Linz, Áustria. A disponibilização do *software* se dá através do *site*: `http://www.geogebra.org/`. Desta forma, não gerando qualquer ônus para a instituição de ensino. O que é mais que oportuno, já que a proposta é a introdução e utilização do mesmo nas instituições da rede pública.

II. É um *software* de matemática dinâmica multi-plataforma, ou seja, está disponível para diversos sistemas operacionais, tanto para portáteis como para computadores de mesa.

   - GeoGebra Tablet Apps:
     Disponivel na Windows Store, Apple Store e Google Play.
   - GeoGebra Desktop:
     Disponivel para Windows, Mac, Linux e Java Applet.

   Este ponto se torna muito interessante, pois hoje em dia é muito comum o uso de dispositivos móveis por parte dos alunos. Dispositivos estes, cada vez mais acessíveis, mesmo nas classes menos favorecidas. Berlinghoff e Gouvêa, em sua obra A Matemática através dos Tempos, mencionam que

   > Computadores pessoais começaram a se tornar uma realidade cada vez mais acessível financeiramente. (Berlinghoff e Gouvêa, 2010).

   Sem contar o fato de que alguns governos estaduais e mesmo o federal, estão implementando projetos que visam disponibilizar tablets para os alunos da rede pública.

III. É um *software* de fácil operacionalidade, no que diz respeito ao básico do desenho geométrico, necessário para o ensino do mesmo. Qualquer usuário com conhecimento básicos de informática e com noções básicas de geomatria, como ponto e reta, têm plenas condições de manipular o GeoGebra.

   Há diversos *sites* em que se pode adquirir facilmente manuais em português, que podem ser consultados no próprio dispositivo em que o GeoGebra está instalado, sem mesmo a necessidade de se imprimir o material para consulta, gerando assim uma contenção de custos e de papel.

3.2 O GeoGebra nas Escolas Públicas

Hoje em dia, há diversos projetos de governos tanto Estaduais como Federal, que visam implementar nas Escolas Públicas a inclusão digital, além de outros projetos que disponibilizam laboratórios de informática modernos e bem equipados.

O Governo de Minas Gerais está com um projeto de modernização de suas Escolas, projeto este que visa disponibilizar lousas digitais, que inclusive, já possuem dentre muitos outros programas instalados, o GeoGebra. Além de disponibilizar para seus professores, *tablets* e programas de capacitação para os mesmos.

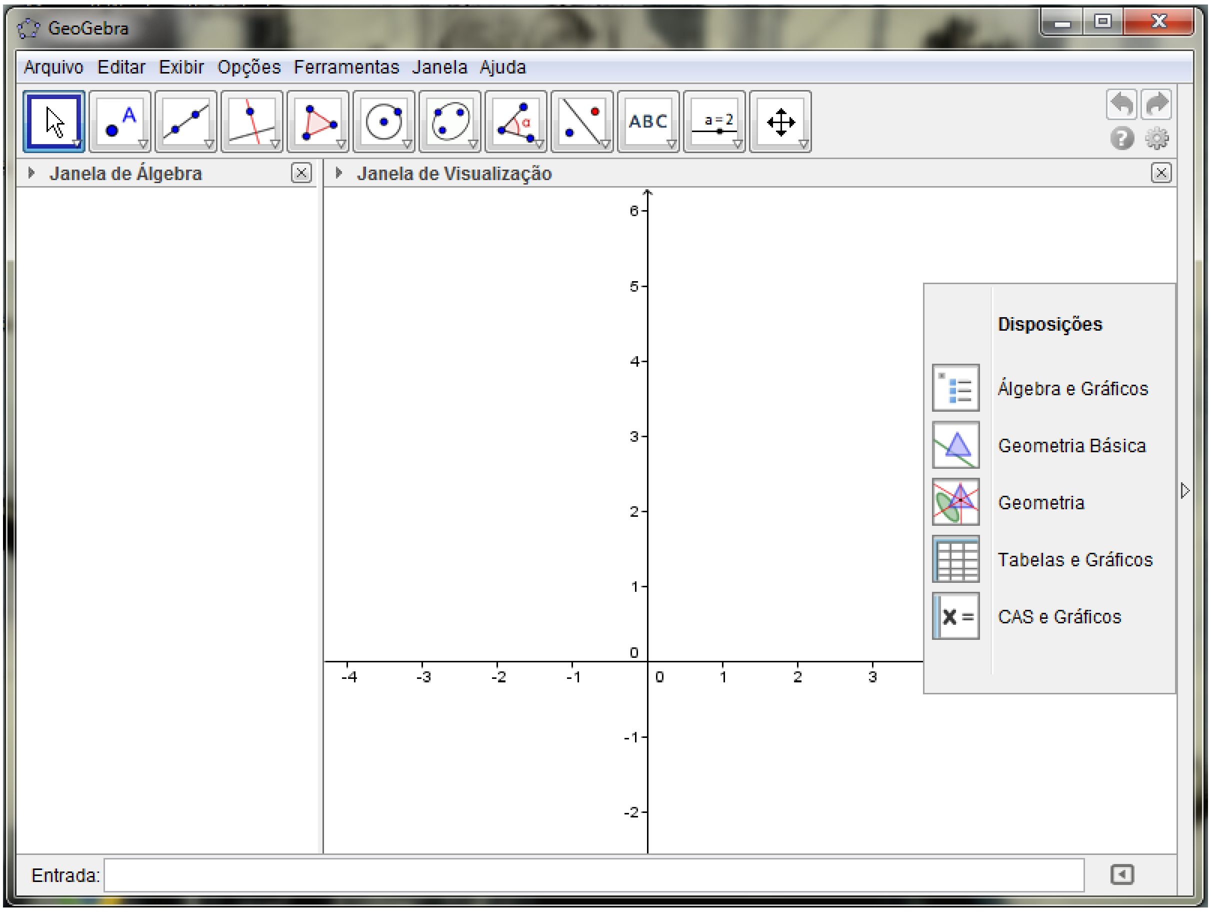
O mesmo Governo de Minas Gerais, em virtude da implementação do programa Reinventando o Ensino Médio, que visa atender todas as suas Escolas que possuem o Ensino Médio, está disponibilizando para as mesmas, novos computadores ou reestruturando muito dos já existentes laboratórios de informática.

O Governo Federal, através do PRONATEC, está implementando nas Escolas Públicas, além dos já existentes, novos laboratório com computadores modernos, especialmente para os cursos na área de informática. Contudo, os mesmos podem ser aproveitados pela comunidade escolar em horários pré-estabelecidos. Estes mesmos computadores, também já possuem, em meio aos seus diversos programas previamente instalados, o GeoGebra.

Tais condições tornam, especialmente favoráveis a implementação do GeoGebra como ferramenta de apoio e um importante material didático para auxiliar tanto no ensino da Geometria, como no ensino do Desenho Geométrico por parte daquelas escolas que resolverem incorporar a sua grade esta disciplina ou mesmo adotá-la como um projeto extra-curricular

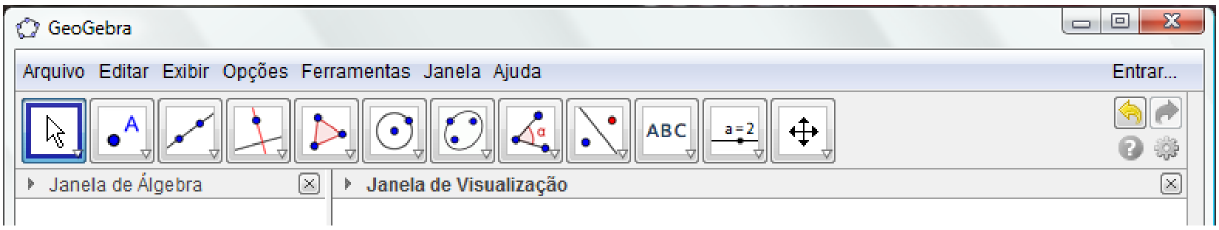
Segue abaixo figuras com a tela inicial e barra de ferramentas do GeoGebra.

Figura 2 – Tela inicial do GeoGebra.



Fonte: Autor

Figura 3 – Barra de tarefas do GeoGebra.



Fonte: Autor

4 GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Daremos nessa seção alguns resultados de Geometria Euclidiana Plana que serão usados nas seções subsequentes. Não serão apresentadas as demonstrações, mas elas podem ser consultadas em (BARBOSA, 2004), (NETO, 2013).

Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C., expôs os conhecimentos de geometria plana de seu tempo com a obra Elementos utilizando o método dedutivo, que a partir de certas afirmações chamadas "axiomas"ou "postulados", aceitas sem justificativas, deduz através de demonstrações outras afirmações.

Na Grécia antiga se entendia pela palavra número, somente número natural, não havia o conceito de números negativos, racionais, irracionais. Entretanto, eles representavam uma grandeza qualquer por um segmento de reta. Tal idéia é equivalente a dizer que todo número real positivo está associado a um ponto da semirreta graduada. Assim o calcular de hoje é o construir de antigamente.

4.1 Postulados

As figuras geométricas elementares, no plano, consideradas termos primitivos, são os pontos e as retas. Ao referirmos que um ponto se localiza entre dois pontos, estaremos utilizando a noção de que esses pontos mencionados localizam-se sobre uma mesma reta. Em seguida, apresentaremos um corpo axiomático que estará baseado nesses termos, e nas noções algébricas de conjunto, correspondência, aplicação, etc.

I Axiomas de Incidência

1. Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.
2. Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes dois pontos.

II Axiomas de Ordem

1. Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.
2. Dados dois pontos A e B sempre existe um ponto C entre A e B e sempre existe um ponto D tal que B está entre A e D.
3. Uma reta r determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta r.

III Axiomas sobre Medição de Segmentos e Ângulos

1. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.
2. Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.
3. Se o ponto C encontra-se entre A e B numa mesma reta, então $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$.
4. Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.
5. É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.
6. Se uma semirreta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$, então $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$.

IV Axioma de Congruência

Dizemos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB}=\overline{CD}$. e que dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes quando eles possuem a mesma medida . Dois triângulos são congruentes quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que seus lados e ângulos correspondentes sejam congruentes

1. Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\hat{A} = \hat{E}$ então o triângulo ABC é congruente ao triângulo EFG.

V Axioma das Paralelas

1. Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela a reta r.

Segue agora alguns resultados de Geometria Euclidiana Plana que são consequências desses postulados.

4.2 **Proposições**

- Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.
- Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta perpendicular a reta dada.
- Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.
- Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

- Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão a uma mesma distância da reta n.
- As diagonais de um paralelogramo se interceptam em um ponto que é ponto médio das duas diagonais.
- As diagonais de um um paralelogramo que possui todos os seus lados congruentes cortam-se em ângulo reto e são bissetrizes de seus ângulos.
- Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.
- Todo triângulo possui um círculo inscrito.
- As bissetrizes de um triângulo se interceptam em um ponto.

5 ATIVIDADES

As atividades aqui apresentadas visam trazer ao professor uma sugestão para trabalhar com os alunos, de forma interativa, as propriedades e conceitos básicos dos entes da geometria e do desenho geométrico. Aos alunos, uma melhor compreensão destas mesmas propriedades e conceitos.

De acordo com Wagner,

> Muitas vezes, um problema de geometria e, em particular, de construção geométrica, pode ser resolvido de diversas formas, ou seja, por caminhos diferentes[...].(WAGNER, 2009)

Em geral, as atividades aqui mencionadas se aplicam aos alunos que já possuem um conhecimento prévio e básico da geometria.

Para os alunos sem os pré-requisitos mínimos se faz necessário pelo professor responsável um nivelamento prévio dos mesmos. Pois, deve-se levar em consideração que muitas instituições não possuem em suas grades curriculares a disciplina de Desenho Geométrico. Como durante o período letivo acabam por ocorrer diversas transferências, é comum ocorrer casos em que por exemplo, um professor receba um aluno no 9º ano que nunca estudou Desenho.

5.1 Atividades Propostas Comentadas

5.1.1 Atividade I

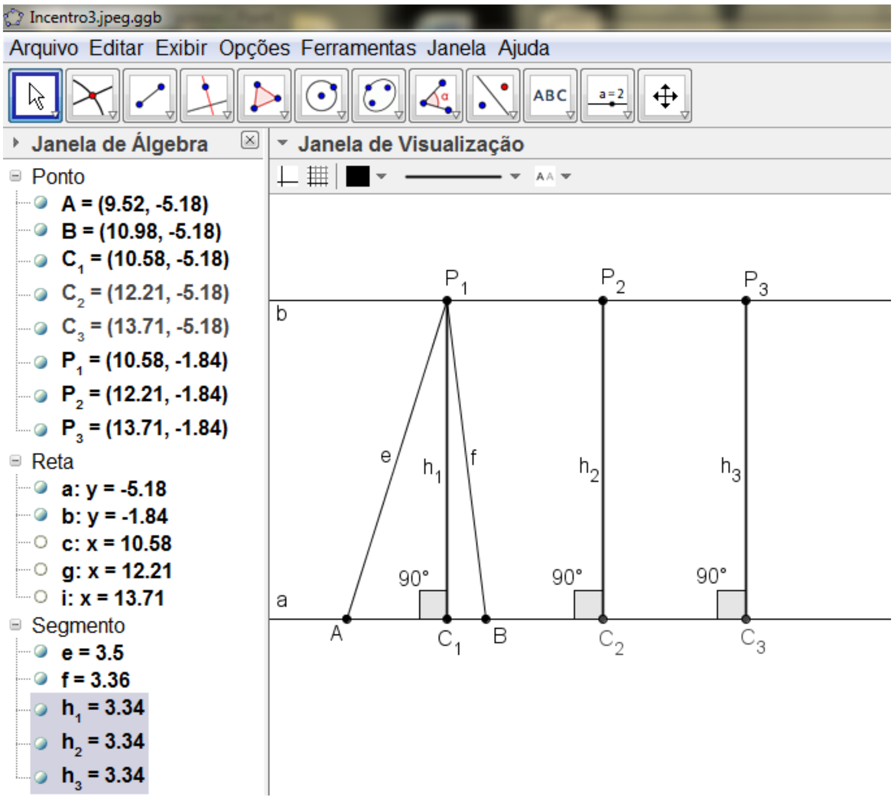
Dadas duas retas paralelas, verifique que a distância de qualquer ponto P, tomado sobre uma das retas é sempre constante até a outra reta.

Na janela gráfica do GeoGebra são dadas duas retas a e b, paralelas com distância entre elas fixada. Nesta atividade os alunos devem verificar que tomando um ponto P qualquer sobre uma das retas dadas, a distância deste ponto até a outra é sempre constante, mesmo quando o ponto P é deslocado sobre a reta ao qual ele pertence.

O aluno deverá escolher um ponto P sobre uma das retas (no caso do exemplo, na reta b) e por ele traçar uma reta perpendicular à outra reta (no caso, a reta a). O próximo passo é traçar um segmento h, unindo o ponto P ao ponto C, obtido na interseção da perpendicular com a reta a. Em seguida o aluno deve escolher dois outros pontos quaisquer (no exemplo, A e B) sobre a reta a, traçando por cada um deles, respectivamente os segmentos AP e BP ($AP = e$, $BP = f$).

Pela janela de álgebra os alunos podem observar que os segmentos e, f e h têm medidas diferentes, sendo o h o de menor medida. Podem observar também que o mesmo forma um ângulo reto (o momento é oportuno para o professor ressaltar o fato de que a menor distância entre um ponto e uma reta é uma linha reta que forma um ângulo reto com a reta). O professor deve orientar o aluno para que o mesmo faça o ponto P deslizar sobre a reta b de forma a posicioná-lo diferentemente sobre b (na figura, indicado por P_2 e P_3) e assim concluir que a distancia de qualquer ponto da reta b à reta a é sempre constante.

Figura 4 – Retas Paralelas.



Fonte: Autor

Esta atividade inclusive serve para mostrar a definição de retas paralelas: "Duas retas coplanares, não coincidentes são consideradas paralelas quando não possuírem pontos em comum, ou em outras palavras, quando todos os pontos de uma, distar k unidades da outra".

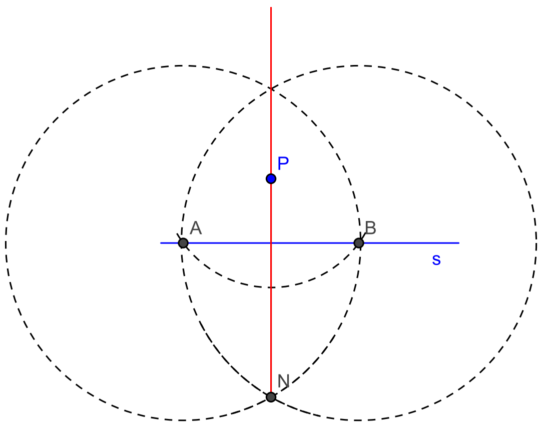
Mesmo que o GeoGebra possua a ferramenta que desenhe uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto, pode-se mostrar a construção de tal reta sem usar a ferramenta, aproveitando para reforçar conhecimentos de Geometria Euclidiana Plana e usar régua e compasso.

Construção geométrica do problema: Traçar por um ponto P dado uma reta perpendicular a uma reta s dada.

- traçar um arco de circunferência qualquer de centro em P e cortando a reta s nos pontos A e B;

- desenhar duas circunferências de mesmo raio com centros nos pontos A e B, determinando na interseção o ponto N;
- A reta que passa por P e N é perpendicular à reta s.

Figura 5 – Reta perpendicular a uma reta s dada.



Fonte: Autor

Aqui o professor pode aproveitar para recordar conceitos de Geometria, enquanto justifica que devido a construção, o triângulo PAB é isósceles e assim a mediana por P, a bissetriz do ângulo APB e a altura relativa a base AB são todas coincidentes. O mesmo ocorre com o triângulo ANB, e portanto a reta passando por P e N é perpendicular à reta s.

5.1.2 Atividade II

Dado um segmento AB, traçar a mediatriz m do segmento AB. Em seguida escolhendo um ponto P sobre m, verifique que a distância dele ao ponto A é sempre a mesma que ao ponto B.

Na janela gráfica do GeoGebra é apresentado um segmento AB onde os alunos devem traçar a mediatriz do mesmo.

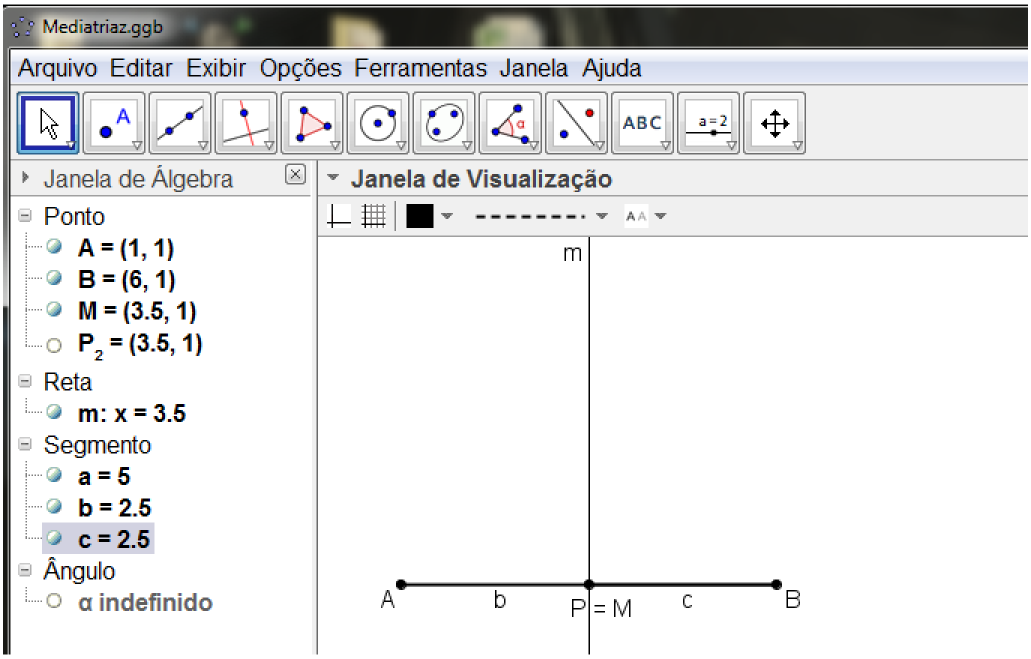
Vale salientar pelo professor responsável, que a mediatriz é sempre uma reta perpendicular ao segmento dado exatamente no seu ponto médio. O momento é oportuno para relembrar os procedimentos para se determinar o ponto médio de um segmento.

Nesta atividade os alunos devem utilizar os recursos do programa para traçar a mediatriz do segmento AB. Em seguida, devem escolher sobre a reta m (mediatriz) um ponto P, traçando os segmentos PA e PB.

Nesta etapa, os alunos devem verificar, orientados pelo professor responsável e utilizando a janela de álgebra do GeoGebra ou mesmo uma ferramenta apropriada para a indicação de medida de segmentos, que a medida dos segmentos PA e PB é realmente sempre a mesma, qualquer que seja a posição de P sobre m.

Observe as figuras.

Figura 6 – Posição inicial do ponto P.



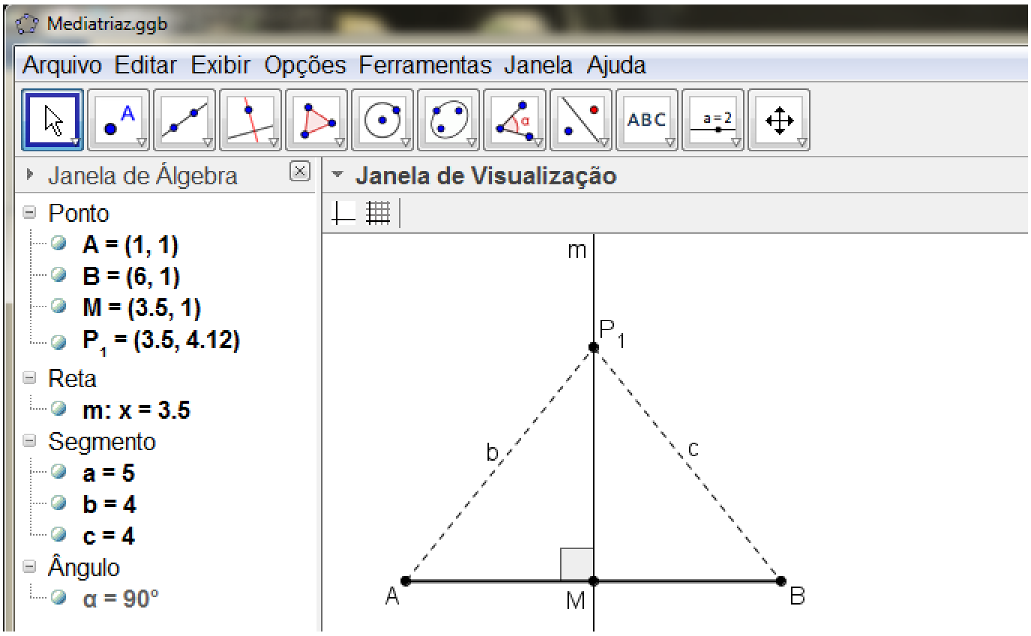
Fonte: Autor

Assim como comentado na atividade anterior, mesmo que o GeoGebra possua uma ferramenta que desenhe uma reta mediatriz a um segmento AB, pode-se mostrar aos alunos a construção de tal reta sem usar a ferramenta.

Construção geométrica do problema: Dados os pontos A e B, traçar a reta mediatriz ao segmento AB.

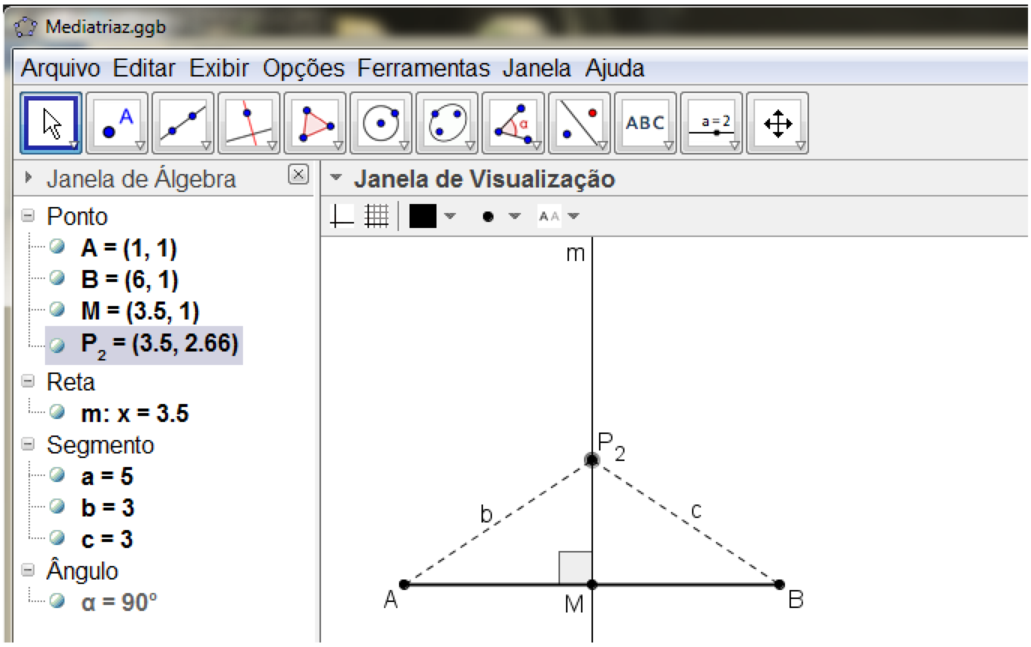
- desenhar duas circunferências de mesmo raio com centros nos pontos A e B;
- marcar os pontos de interseção C e D dos dois círculos.
- A reta que CD é mediatriz ao segmento AB.

Figura 7 – Posição 2 do ponto P.



Fonte: Autor

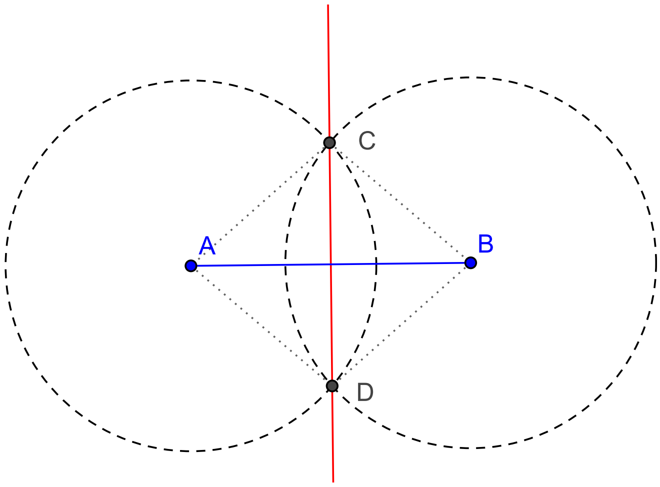
Figura 8 – Posição 2 do ponto P.



Fonte: Autor

Aqui o professor pode aproveitar para recordar conceitos de Geometria, enquanto justifica que devido a construção, tanto o triângulo ACB quanto o triângulo ADC são isósceles. Assim a mediana por C, a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e a altura relativa a base AB são todas coincidentes. O mesmo ocorre em relação ao vértice D do triângulo ADB, ou seja, o ponto de interseção dos segmentos AB e CD é ponto médio e a reta passando

Figura 9 – Traçado da Mediatriz.



Fonte: Autor

por C e D é perpendicular ao segmento AB.

Outro fato que pode ser comentado aqui é referente a interseçao das diagonais de um quadrilátero de lados iguais e sua perpendicularidade.

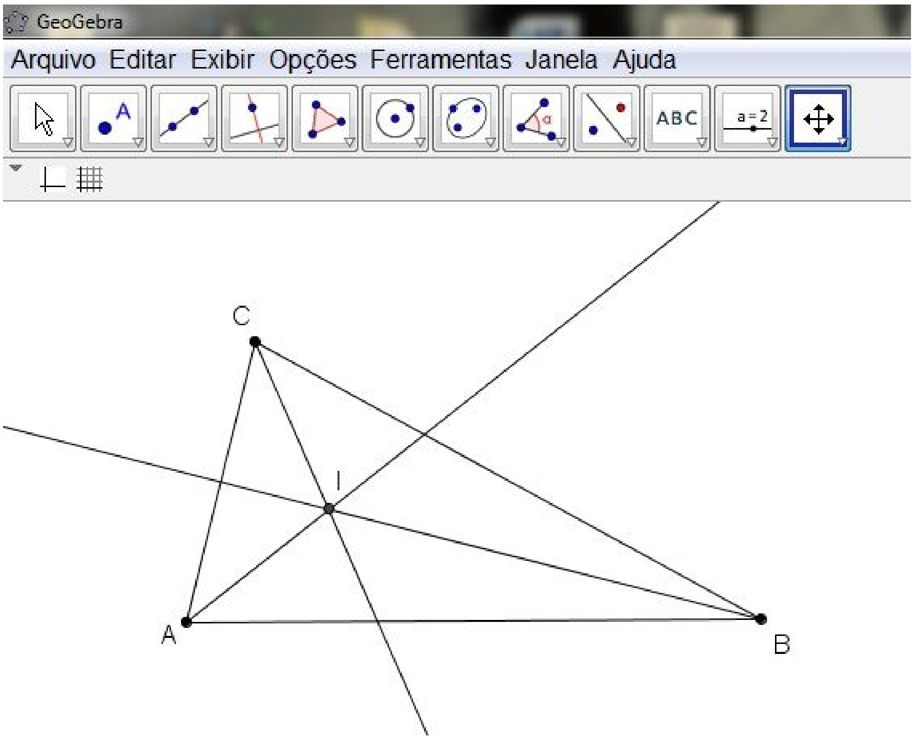
5.1.3 Atividade III

Dado um triângulo ABC qualquer, verifique que traçadas as bissetrizes de cada um dos seus ângulos internos, as mesmas sempre se encontram num único ponto.

Na janela gráfica do GeoGebra é apresentado um triangulo ABC qualquer cuja base AB está fixada. Nesta atividade os alunos devem utilizar a ferramenta "bissetriz" da barra de tarefas do programa e traçar cada uma das bissetrizes internas do triângulo dado. Em seguida eles devem verificar que traçadas essas bissetrizes, as mesmas obrigatoriamente devem se encontrar num único ponto. Nesta observação, eles devem notar que mesmo que um dos seus vértices seja deslocado da posição inicial, no caso o vértice deslocado é o C, o ponto de encontro sempre permanece internamente no triângulo. As figuras abaixo indicam algumas situações em que o vértice C foi posicionado.

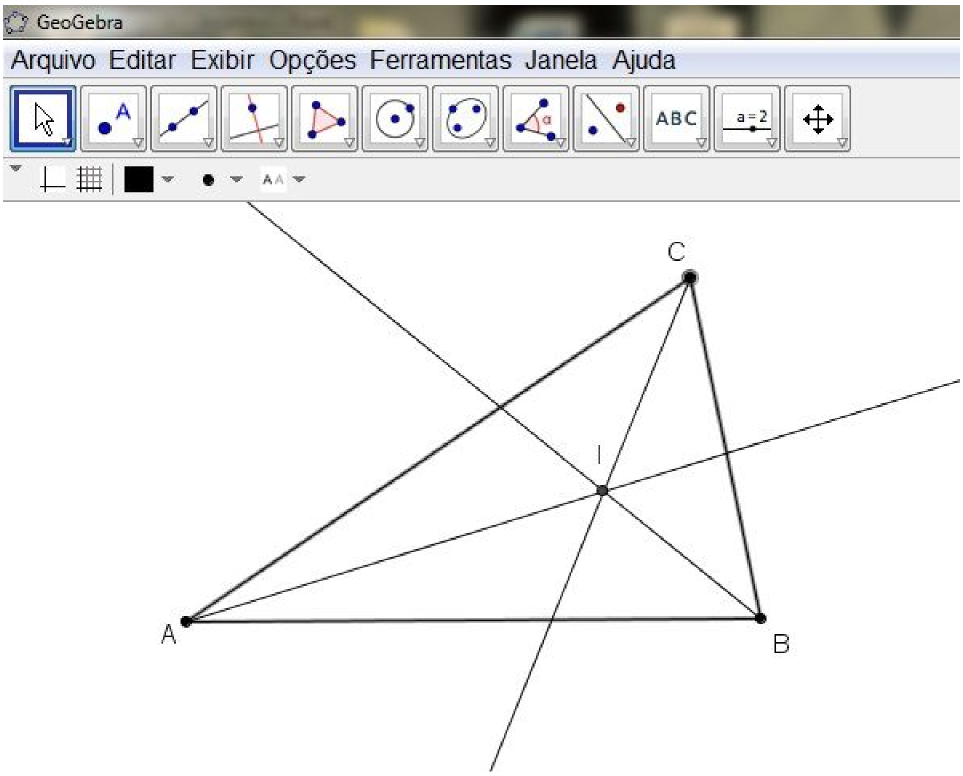
O professor responsável deve salientar que esse ponto recebe o nome de Incentro e é o centro da circunferência cujos vértices do triângulo estão localizados.

Figura 10 – Incentro - Posição inicial do vértice C.



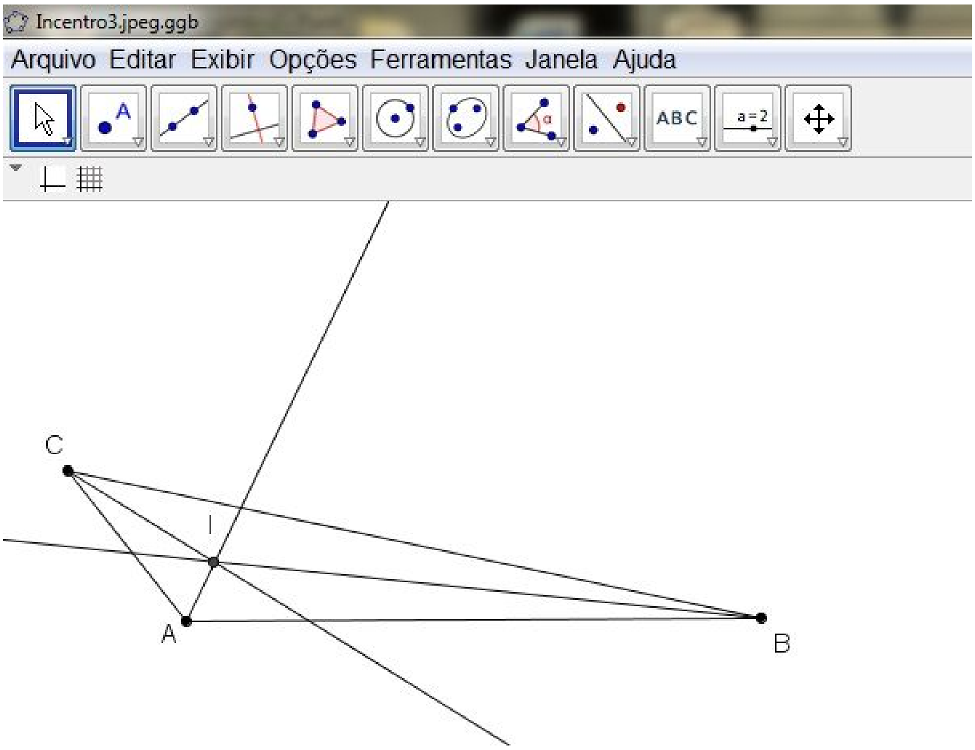
Fonte: Autor

Figura 11 – Incentro - Posição inicial do vértice C.



Fonte: Autor

Figura 12 – Incentro - Posição inicial do vértice C.



Fonte: Autor

Da mesma forma que na atividade anterior, o professor pode mostrar como construir a bissetriz de um ângulo qualquer sem usar a ferramenta "bissetriz", novamente aproveitando para recordar conceitos de Geometria Plana.

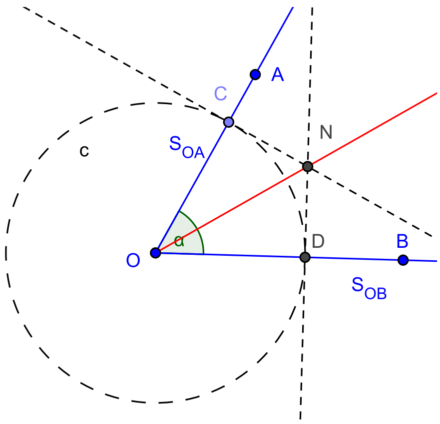
Construção geométrica do problema: Dadas as semirretas S_{OA} e S_{OB}, traçar a bissetriz do ângulo $\alpha = A\hat{O}B$.

- traçar uma circunferência qualquer de centro em A e cortando as duas semirretas;
- marque os pontos C e D, interseção da circunferência com as semirretas S_{OA} e S_{OB} respectivamente;
- por C trace uma perpendicular à semirreta S_{OA} e por D trace uma perpendicular à semirreta S_{OB};
- marque o ponto, N, interseçao das duas perpendiculares
- use a ferramenta " lugar geométrico" para traçar o lugar geométrico dos pontos equidistantes das semirretas S_{OA} e S_{OB}, clicando primeiro no ponto N e depois no ponto C.

Tal semirreta traçada é a bissetriz procurada.

O professor pode destacar aqui que devido a construção os triângulos $O\hat{C}N$ e $O\hat{D}N$ são retângulos em $D\hat{C}N$ e $O\hat{D}N$ respectivamente, tendo a mesma hipotenusa e lados OC e OD congruentes. Logo por Pitágoras verifica-se que os lados CN e DN também são congruentes. Portanto os dois triângulos são congruentes e assim verifica que os ângulos $C\hat{O}N$ e $N\hat{O}B$ são congruentes.

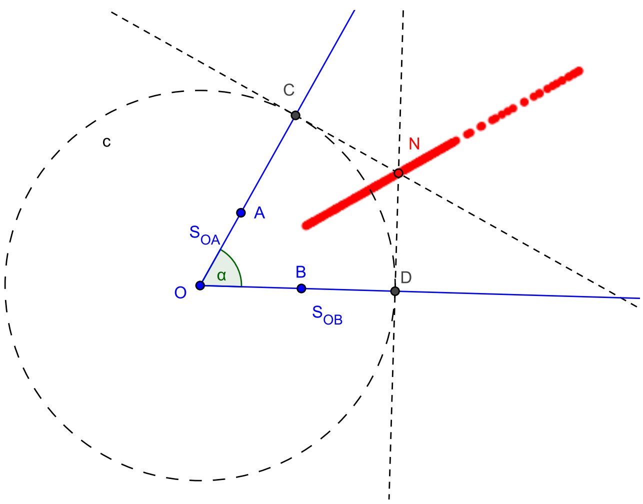
Figura 13 – Bissetriz do ângulo α.



Fonte: Autor

Observação: Antes de usar a ferramenta “lugar geométrico” o aluno pode usar a ferramenta “habilitar rastro” no ponto N e movimentar o ponto C sobre a semirreta S_{OA}, tendo uma ideia do lugar geométrico que está construindo.

Figura 14 – Bissetriz do ângulo α.



Fonte: Autor

5.1.4 Atividade IV

Dado um triângulo ABC qualquer, verifique que traçadas suas alturas, cada uma pode apresentar três situações quanto a sua posição em relação ao triângulo dado.

Na janela gráfica do GeoGebra é apresentado um triângulo ABC qualquer, cuja base AB está fixada sobre uma reta suporte r e cujo vértice C está sobre a reta s, paralela a r.

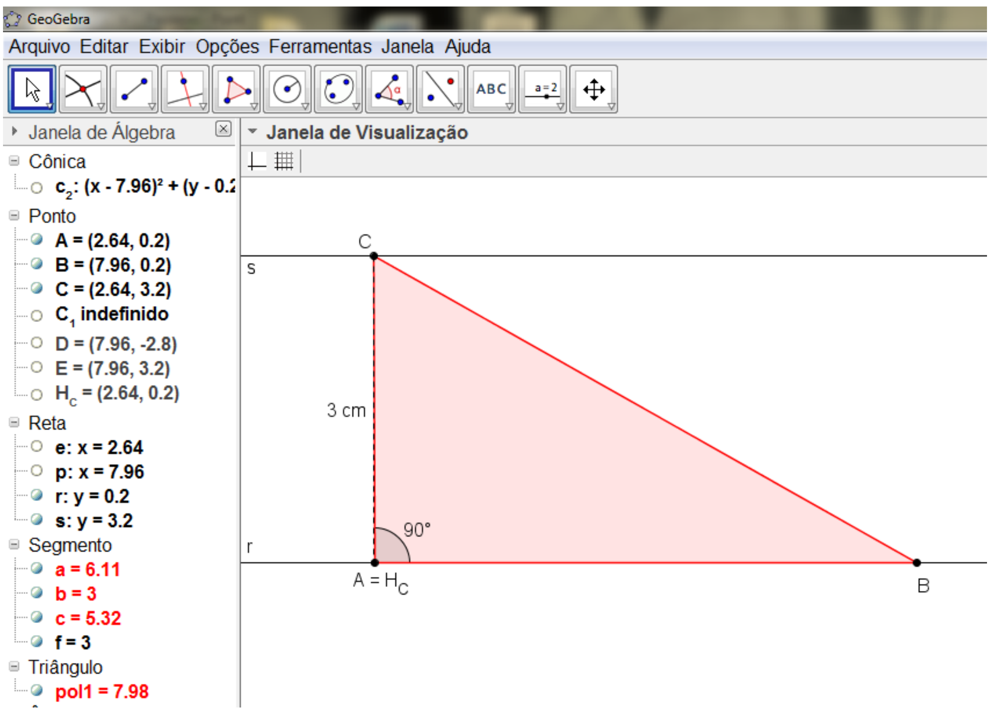
Nesta atividade os alunos devem traçar por C uma perpendicular a r, obtendo assim o ponto H_C na interseção das duas retas. Em seguida, os alunos devem traçar a altura CH_C. Os alunos devem verificar que ao deslocarem o vértice C sobre a reta s, a altura relativa ao lado AB pode ser interna ou externa ao triângulo ou mesmo coincidir com próprio lado do triângulo ABC, caso particular em que ABC é retângulo.

Vale a pena, o professor salientar que os mesmos passos podem ser realizados com qualquer dos lados do triângulo dado.

Essa é uma boa oportunidade também, para que o professor utilizando da janela de álgebra, mostre que dado um triângulo qualquer, mantida sua base e sua altura relativa a essa base, a área deste triângulo é sempre igual. Isso pode ser observado na janela de álgebra do GeoGebra, através da visualização das informações do polígono descrito.

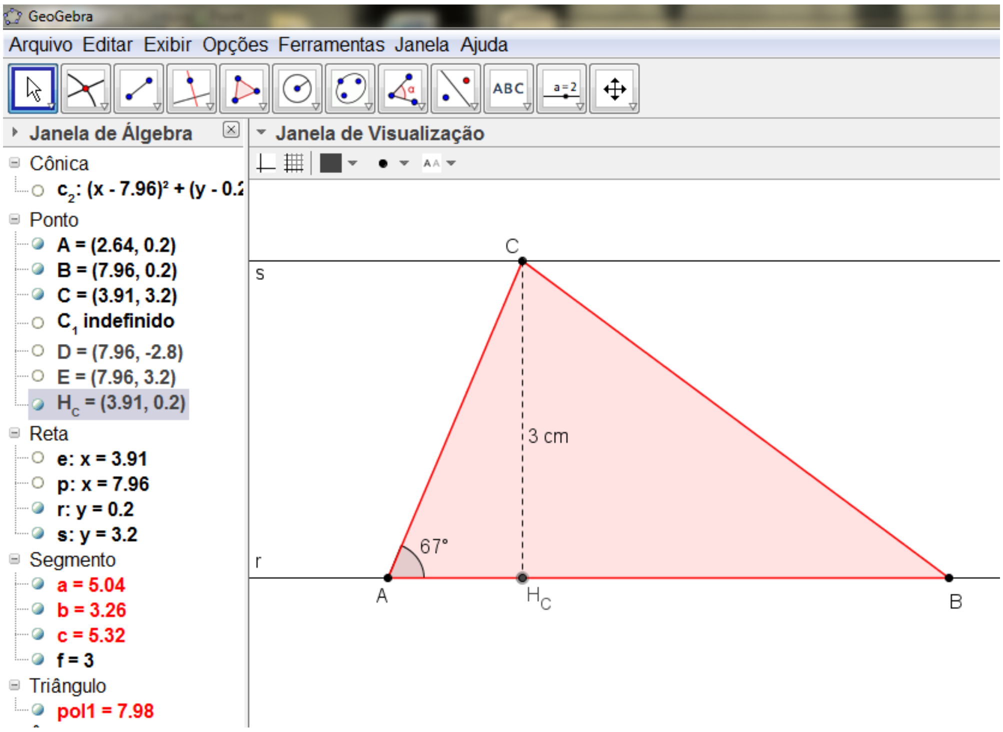
Observe as figuras.

Figura 15 – Posição inicial do vértice C.



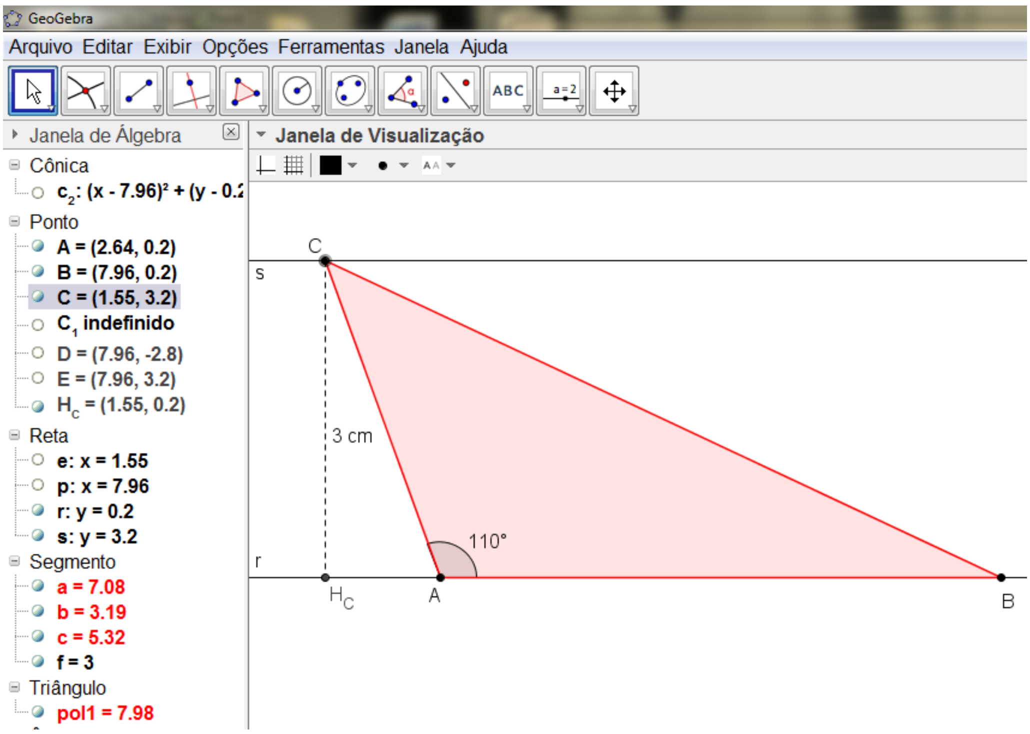
Fonte: Autor

Figura 16 – Posição 2 do vértice C.



Fonte: Autor

Figura 17 – Posição 3 do vértice C.



Fonte: Autor

5.1.5 Atividade V

Dado um segmento AB, traçar o arco capaz do ângulo de $60°$. Em seguida, escolhendo um ponto P sobre o arco, verifique se ele é realmente o vértice do ângulo de $60°$.

Na janela gráfica do GeoGebra é apresentado um segmento AB onde os alunos devem traçar um arco capaz de $60°$ apenas na parte superior.

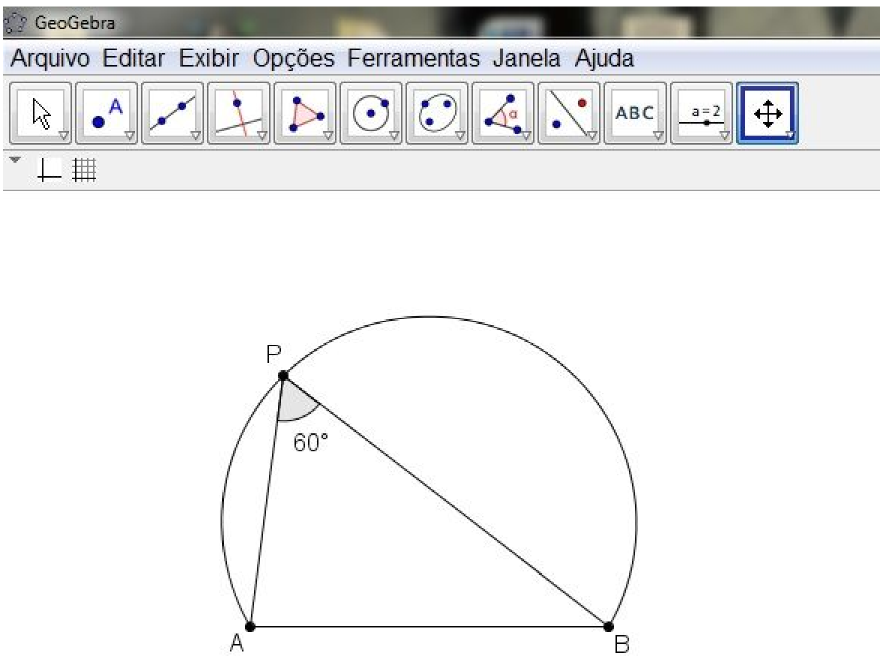
Vale salientar pelo professor que podemos sempre traçar um par de arcos capazes e que arco capaz é um lugar geométrico que, por definição, é o conjunto de todos os pontos capazes de enxergar um dado segmento sobre um ângulo α dado.

Nesta atividade, os alunos devem seguir todos os procedimentos para construção do arco capaz de $60°$, evidentemente utilizando-se dos recursos do programa. Em seguida, devem escolher sobre o arco um ponto P, traçando os segmentos PA e PB.

Nesta etapa, os alunos devem verificar, orientados pelo professor responsável e utilizando a janela de álgebra do GeoGebra ou mesmo uma ferramenta apropriada para a indicação de medida de ângulo, que o menor ângulo formado pelos segmentos PA e PB é realmente o ângulo de $60°$.

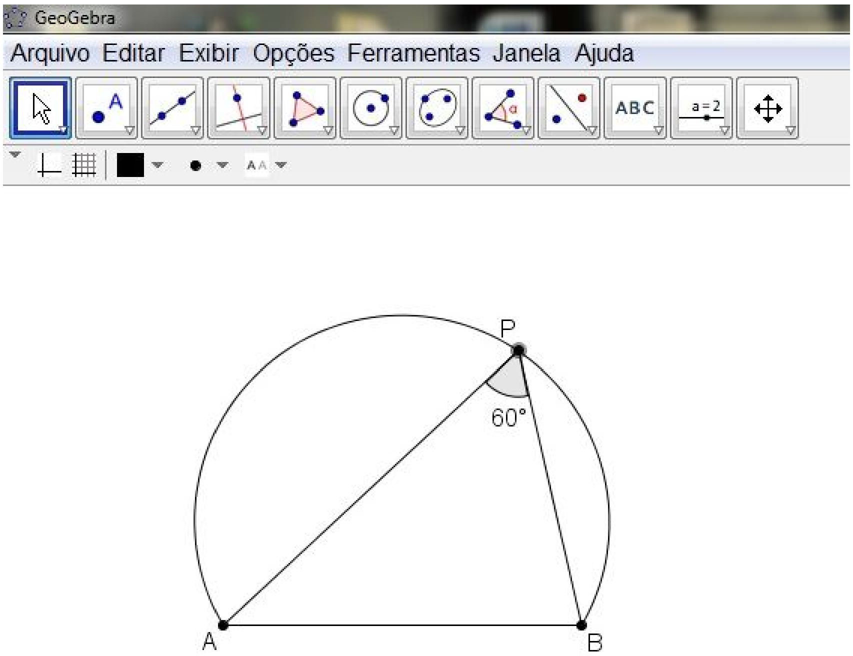
Observe as figuras.

Figura 18 – Posição inicial do ponto P.



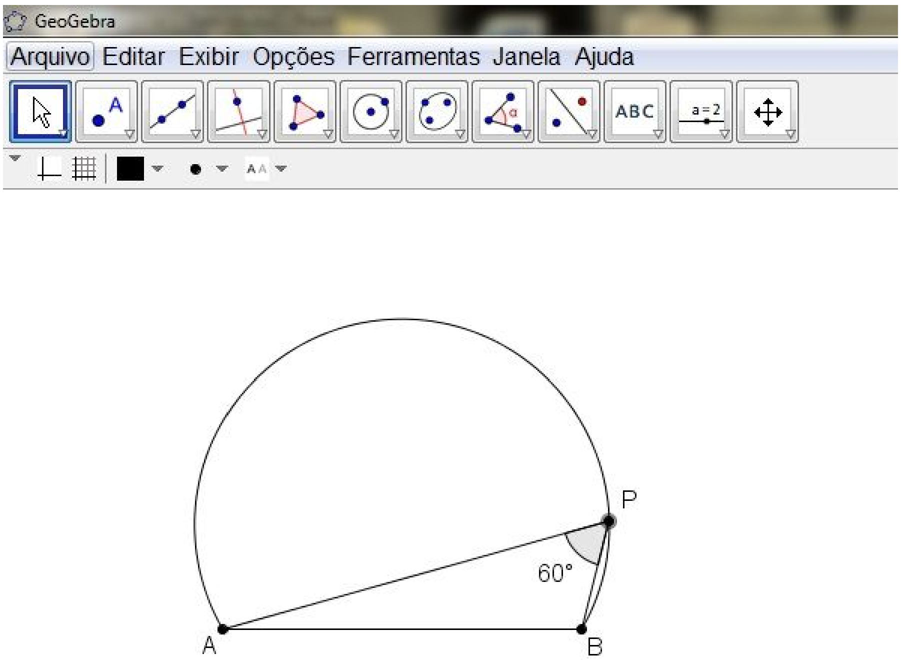
Fonte: Autor

Figura 19 – Posição 2 do ponto P.



Fonte: Autor

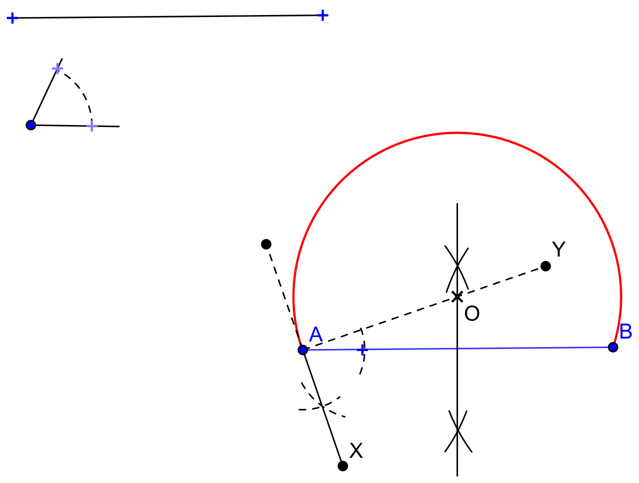
Figura 20 – Posição 3 do ponto P.



Fonte: Autor

Procedimentos para a construção geométrica do arco capaz no GeoGebra:

Figura 21 – Construção do Arco Capaz.



Fonte: Autor

Dados o segmento AB e o ângulo α

- Trace a mediatriz do segmento AB;
- Desenhe a semirreta AX tal que $B\hat{A}X = \alpha$;
- Trace por A a semirreta AY perpendicular a AX;
- A interseção de AY com a mediatriz é o ponto O, centro do arco capaz;
- Trace o arco capaz.

5.2 Conclusões

Espera-se que os alunos, através destas atividades, possam adquirir um ponto de vista muito mais amplo acerca dos conceitos estudados. Com isso, despertar neles mesmos um desejo cada vez maior de se aprofundarem nesse universo maravilhoso da matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em resumo, o uso desta ferramenta gráfica, o GeoGebra, não tem pretensão nenhuma de substituir por completo o uso das ferramentas usuais, ou seja, os matérias didáticos manipuláveis, tais como régua e compasso. Não que isso seja algo errado ou anti-didático. Cabe nesta questão, o bom senso de cada professor responsável e o contexto em que a ferramenta gráfica será aplicada. Pois, de acordo com Lorenzato,

> O uso do material didático manipulável ainda tem-se mostrado uma eficiente ferramenta para muitos alunos que, por não compreenderem a mensagem visual expressa pela tela do computador, recorrem ao material didático disponível e então prosseguem sem maiores dificuldades com o uso do recurso computacional. Portanto, para muitos alunos, o material didático ainda desempenha uma importante função de pré-requisito para que se dê a aprendizagem por meio do uso de recursos computacionais. (LORENZATO (.org), 2010)

O uso do GeoGebra nada mais é do que um poderoso recurso para auxiliar professores e alunos no ensino e aprendizado de conteúdos do Desenho Geométrico, bem como na Geometria.

Deve-se sempre levar em conta que, no ensino de qualquer conteúdo, em qualquer disciplina, o fundamental é sempre lançar mão a todos e quaisquer recursos disponíveis para se alcançar o objetivo maior que é o de transmitir o conhecimento, de forma que o mesmo seja assimilado e compreendido pelo aluno.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, João lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana (Coleção do Professor de Matemática).* Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2004.

[2] BERLINGHOFF, Willian P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A matemática através dos tempos: um guia prático para professores e entusiastas.* 2ª edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2010.

[3] CBC. Disponível em: < `http://crv.educacao.mg.gov.br/SISTEMA_CRV/index.aspx?&usr=pub&id_projeto=27&id_objeto=38903&id_pai=38679&tipo=txg&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-%20CBC&n3=Fundamental%20-%206%C2%BA%20ao%209%C2%BA&n4=Matem%C3%A1tica&b=s&ordem=campo3&cp=B53C97&cb=mma`>. Acesso em: 03 mar. 2014.

[4] CRV. Disponível em: <`http://crv.educacao.mg.gov.br/SISTEMA_CRV/index2.aspx`>. Acesso em: 03 mar. 2014.

[5] GEOGEBRA. Disponível em: <`http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/`>. Acesso em: 03 mar. 2014.

[6] LORENZATO, Sérgio (org.). *O laboratório de Ensino de matemática na Formação de professores (Coleção Formação de Professores).* 3ª edição. Campinas: Autores Associados, 2010.

[7] MARMO, Alexandre; MARMO, Carlos. *Caderno Anglo Desenho Geométrico 7º Ano, pág. 3, (Coleção Anglo ensino fundamental).* São Paulo: Editora Anglo, 2012.

[8] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Geometria (Coleção PROFMAT).* Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2013.

[9] NETTO, Sérgio Lima. *Construções Geométricas: Exercícios e Soluções (Coleção do Professor de Matemática).* Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2009.

[10] PCN. Disponível em: <`http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf`>. Acesso em: 03 mar. 2014.

[11] POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas (Tradução de Heitor Lisboa de Araujo).* Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

[12] PUTNOKI, José Carlos. *"Que se Devolvam o Euclides a Régua e o Compasso", (Revista do Professor de Matemática, Vol. 13, p. 13).* Rio de Janeiro: Editora da SBM, 1988.

[13] REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria Lúcia B. de. *"Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas".* 2ª edição. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

[14] WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, José Paulo Q. (colaborador). *Construções Geométricas (Coleção do Professor de Matemática).* 6ª edição. Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2007.

APÊNDICE A – Protocolo de Construção da Atividade I no GeoGebra

Figura 22 – Protocolo de Construção: Atividade I

1	Ponto C		C = (-0.16, -1.84)
2	Ponto D		D = (12.72, -1.84)
3	Reta a	Reta CD	a: y = -1.84
4	Reta c	Reta passando por C e perpendicular a a	c: x = -0.16
5	Ponto P	Ponto sobre c	P = (-0.16, 1.5)
6	Segmento h	Segmento [P, C]	h = 3.34
7	Reta b	Reta passando por P e paralela a a	b: y = 1.5
8	Ponto A	Ponto sobre a	A = (-1, -1.84)
9	Ponto B	Ponto sobre a	B = (1.58, -1.84)
10	Segmento e	Segmento [A, P]	e = 3.45
11	Segmento f	Segmento [P, B]	f = 3.77
12	Ângulo α	Ângulo entre B, C, P	α = 90°

Fonte: Autor

APÊNDICE B – Protocolo de Construção da Perpendicular no GeoGebra

Figura 23 – Protocolo de Construção: Perpendicular - Parte 1

1	Ponto A_1			$A_1 = (-1.64, 2.02)$
2	Ponto B_1			$B_1 = (3.2, 2.02)$
3	Segmento s		Segmento [A_1, B_1]	s = 4.84
4	Ponto P			P = (0.15, 3.07)
5	Ponto D			D = (-1.38, 2.18)
6	Ponto E			E = (1.9, 2.2)
7	Arco c		ArcoCircular[P, D, E]	c = 3.81
8	Ponto A		Ponto de interseção de c, s	A = (-1.28, 2.02)
8	Ponto B		Ponto de interseção de c, s	B = (1.58, 2.02)
9	Ponto I		Ponto sobre s	I = (1.61, 2.02)
10	Círculo d		Círculo com centro A e raio Segmento[A, I]	d: $(x + 1.28)^2 + (y - 2.02)^2 = 8.32$

Fonte: Autor

Figura 24 – Protocolo de Construção: Perpendicular - Parte 2

10	Círculo d		Círculo com centro A e raio Segmento[A, I]	d: $(x + 1.28)^2 + (y - 2.02)^2 = 8.32$
11	Círculo e		Círculo com centro B e raio Segmento[A, I]	e: $(x - 1.58)^2 + (y - 2.02)^2 = 8.32$
12	Ponto J		Ponto sobre d	J = (-0.5, -0.75)
13	Ponto K		Ponto sobre d	K = (1.17, 0.5)
14	Arco f		ArcoCircular[A, J, K]	f = 2.14
15	Ponto L		Ponto sobre e	L = (-0.99, 0.71)
16	Ponto M		Ponto sobre e	M = (0.94, -0.79)
17	Arco g		ArcoCircular[B, L, M]	g = 2.52
18	Ponto N		Ponto de interseção de f, g	N = (0.15, -0.48)
19	Segmento b		Segmento [P, N]	b = 3.55
20	Semirreta h		Semirreta com origem N passando por P	h: x = 0.15

Fonte: Autor

APÊNDICE C – Protocolo de Construção da Atividade II no GeoGebra

Figura 25 – Protocolo de Construção: Atividade II

N.	Nome	Íco...	Definição	Valor
1	Ponto A			A = (1, 1)
2	Ponto B			B = (6, 1)
3	Reta m		Mediatriz de AB	m: x = 3.5
4	Ponto P_2		Ponto sobre m	P_2 = (3.5, 3.8)
5	Segmento b		Segmento [A, P_2]	b = 3.75
6	Segmento c		Segmento [P_2, B]	c = 3.75
7	Segmento a		Segmento [A, B]	a = 5
8	Ponto M		Ponto de interseção de m, a	M = (3.5, 1)
9	Ângulo α		Ângulo entre P_2, M, A	α = 90°

Fonte: Autor

APÊNDICE D – Protocolo de Construção da Mediatriz no GeoGebra

Figura 26 – Protocolo de Construção: Mediatriz

N.	Nome	Ícone da B...	Definição	Valor
1	Ponto A			A = (-1.41, 2.61)
2	Ponto B			B = (3.12, 2.66)
3	Segmento a		Segmento [A, B]	a = 4.53
4	Círculo c		Círculo com centro A e raio 3	c: $(x + 1.41)^2 + (y - 2.61)^2 = 9$
5	Círculo d		Círculo com centro B e raio 3	d: $(x - 3.12)^2 + (y - 2.66)^2 = 9$
6	Ponto C		Ponto de interseção de c, d	C = (0.83, 4.6)
7	Ponto D		Ponto de interseção de c, d	D = (0.88, 0.67)
8	Reta b		Reta CD	b: 3.94x + 0.04y = 3.48
9	Segmento e		Segmento [C, B]	e = 3
10	Segmento f		Segmento [B, D]	f = 3
11	Segmento g		Segmento [C, A]	g = 3
12	Segmento h		Segmento [A, D]	h = 3

Fonte: Autor

APÊNDICE E – Protocolo de Construção da Atividade III no GeoGebra

Figura 27 – Protocolo de Construção: Atividade III

N.	Nome	Ícone d...	Definição	Valor
1	Ponto A	A		A = (1.2, -1.32)
2	Ponto B	A		B = (4.9, 3.46)
3	Ponto C	A		C = (10.64, -1.38)
4	Triângulo pol1		Polígono A, B, C	pol1 = 22.67
4	Segmento c		Segmento [A, B] de Triângulo pol1	c = 6.04
4	Segmento a		Segmento [B, C] de Triângulo pol1	a = 7.51
4	Segmento b		Segmento [C, A] de Triângulo pol1	b = 9.44
5	Reta d		Bissetriz de B, A, C	d: -0.44x + 0.9y = -1.71
6	Reta e		Bissetriz de B, C, A	e: -0.35x - 0.94y = -2.39
7	Reta f		Bissetriz de A, B, C	f: 0.99x + 0.11y = 5.24
8	Ponto I		Ponto de interseção de f, d	I = (5.2, 0.63)

Fonte: Autor

APÊNDICE F – Protocolo de Construção da Bissetriz no GeoGebra

Figura 28 – Protocolo de Construção: Bissetriz

N.	Nome	Ícone d...	Definição	Valor
1	Ponto O			O = (-1.74, 0.64)
2	Ponto B			B = (2.38, 0.52)
3	Ponto A			A = (-0.08, 3.6)
4	Semirreta S_{OB}		Semirreta com origem O passando por B	S_{OB}: 0.12x + 4.12y = 2.43
5	Semirreta S_{OA}		Semirreta com origem O passando por A	S_{OA}: -2.96x + 1.66y = 6.21
6	Ângulo α		Ângulo entre B, O, A	α = 62.38°
7	Ponto C		Ponto sobre S_{OA}	C = (2.14, 7.56)
8	Círculo c		Círculo por C com centro O	c: (x + 1.74)² + (y - 0.64)² = 62.96
9	Ponto D		Ponto de interseção de c, S_{OB}	D = (6.19, 0.41)
10	Reta d		Reta passando por C e perpendicular a S_{OA}	d: -1.66x - 2.96y = -25.93
11	Reta e		Reta passando por D e perpendicular a S_{OB}	e: -4.12x + 0.12y = -25.46
12	Ponto N		Ponto de interseção de d, e	N = (6.33, 5.21)
13	Lugar Geométrico lg1		LugarGeométrico[N, C]	lg1 = LugarGeométrico[N, C]

Fonte: Autor

APÊNDICE G – Protocolo de Construção da Atividade IV no GeoGebra

Figura 29 – Protocolo de Construção: Atividade IV - Parte 1

N.	Nome	Ícone ...	Definição	Valor
1	Ponto A			A = (2.64, 0.2)
2	Ponto B			B = (7.96, 0.2)
3	Reta r		Reta AB	r: y = 0.2
4	Ponto C_1			C_1 indefinido
5	Reta s_1		Reta passando por C_1 e paralela a r	s_1 indefinido
6	Reta d		Reta passando por C_1 e perpendicular a r	d indefinido
7	Reta p		Reta passando por B e perpendicular a r	p: x = 7.96
8	Círculo c_2		Círculo com centro B e raio 3	c_2: $(x - 7.96)^2 + (y - 0.2)^2 = 9$
9	Ponto D		Ponto de interseção de c_2, p	D = (7.96, -2.8)
9	Ponto E		Ponto de interseção de c_2, p	E = (7.96, 3.2)

Fonte: Autor

Figura 30 – Protocolo de Construção: Atividade IV - Parte 2

10	Reta s		Reta passando por E e perpendicular a p	s: y = 3.2
11	Ponto C		Ponto sobre s	C = (4, 3.2)
12	Triângulo pol1		Polígono A, C, B	pol1 = 7.98
12	Segmento b		Segmento [A, C] de Triângulo pol1	b = 3.3
12	Segmento a		Segmento [C, B] de Triângulo pol1	a = 4.96
12	Segmento c		Segmento [B, A] de Triângulo pol1	c = 5.32
13	Reta e		Reta passando por C e perpendicular a r	e: x = 4
14	Ponto H_c		Ponto de interseção de e, r	H_c = (4, 0.2)
15	Segmento f		Segmento [C, H_c]	f = 3
16	Ângulo α		Ângulo entre B, A, C	α = 65.54°

Fonte: Autor

APÊNDICE H – Protocolo de Construção da Atividade V no GeoGebra

Figura 31 – Protocolo de Construção: Atividade V

1	Ponto A			A = (1.66, -0.76)
2	Ponto B			B = (6.2, -0.76)
3	Segmento a		Segmento [A, B]	a = 4.54
4	Ponto B'		Rotação de B pelo ângulo -60°	B' = (3.93, -4.69)
5	Ângulo α		Ângulo entre B', A, B	α = 60°
6	Reta b		Reta AB'	b: 3.93x + 2.27y = 4.8
7	Reta c		Reta passando por A e perpendicular a b	c: -2.27x + 3.93y = -6.76
8	Reta d		Mediatriz de AB	d: x = 3.93
9	Ponto C		Ponto de interseção de d, c	C = (3.93, 0.55)
10	Segmento e		Segmento [A, C]	e = 2.62
11	Círculo f		Círculo com centro C e raio e	f: x² + y² - 7.86x - 1.1y = -8.88
12	Ponto P		Ponto sobre f	P = (4.86, 3)
13	Segmento g		Segmento [P, A]	g = 4.94
14	Segmento h		Segmento [P, B]	h = 3.99
15	Ângulo β		Ângulo entre A, P, B	β = 60°
16	Arco k		ArcoCircuncircular[B, P, A]	k = 10.98

Fonte: Autor

APÊNDICE I – Protocolo de Construção do Arco Capaz no GeoGebra

Figura 32 – Protocolo de Construção: Arco Capaz - Parte 1

N.	Nome	Ícone da ...	Definição	Valor
1	Ponto A			A = (-2.46, 2.33)
2	Ponto B			B = (2.14, 2.37)
3	Segmento a_2		Segmento [B, A]	a_2 = 4.59
4	Ponto C			C = (-1.69, 4.81)
5	Ponto D			D = (-0.01, 3.23)
6	Ponto E			E = (-0.37, 3.85)
7	Arco e		ArcoCircular[A, D, E]	e = 0.72
8	Ponto F			F = (-0.35, 0.82)
9	Ponto G			G = (0.01, 1.4)
10	Arco f		ArcoCircular[A, F, G]	f = 0.68
11	Ponto H			H = (-0.01, 3.83)
12	Ponto I			I = (-0.35, 3.19)
13	Arco g		ArcoCircular[B, H, I]	g = 0.73
14	Ponto J			J = (-0.29, 1.42)
15	Ponto K			K = (0.05, 0.82)

Fonte: Autor

Figura 33 – Protocolo de Construção: Arco Capaz - Parte 2

16 Arco h		ArcoCircular[B, J, K]	h = 0.69
17 Ponto L			L = (-0.17, 4.49)
18 Ponto M			M = (-0.17, 0.46)
19 Segmento b		Segmento [L, M]	b = 4.03
20 Ponto N			N = (7.79, 5.29)
21 Ponto P			P = (6.95, 6.3)
22 Ponto W			W = (-1.57, 2.33)
23 Ponto A_1			A_1 = (-2.16, 1.48)
24 Ponto B_1			B_1 = (-1.86, 0.58)
25 Segmento i		Segmento [A, B_1]	i = 1.85
26 Ponto C_1			C_1 = (-1.61, 1.96)
27 Ponto D_1			D_1 = (-1.63, 2.65)
28 Arco s		ArcoCircular[A, C_1, D_1]	s = 0.71
29 Ponto E_1			E_1 = (-2.52, 1.44)

Fonte: Autor

Figura 34 – Protocolo de Construção: Arco Capaz - Parte 3

30	Ponto F_1		F_1 = (-1.9, 1.62)
31	Arco t	ArcoCircular[A, E_1, F_1]	t = 0.66
32	Ponto K_1		K_1 = (-2.48, 1.84)
33	Ponto L_1		L_1 = (-1.82, 1.38)
34	Arco c_1	ArcoCircular[W, K_1, L_1]	c_1 = 0.85
35	Ponto V		V = (-3, 3.89)
36	Segmento j	Segmento [A, V]	j = 1.66
37	Ponto Y		Y = (1.14, 3.57)
38	Segmento l	Segmento [A, Y]	l = 3.8
39	Ponto X	Ponto sobre i	X = (-1.86, 0.61)
40	Ponto O	Ponto de interseção de b, l	O = (-0.17, 3.11)
41	Arco p	ArcoCircular[O, B, A]	p = 9.19
42	Ponto A_2		A_2 = (-6.76, 7.24)
43	Ponto B_2		B_2 = (-2.16, 7.28)

Fonte: Autor

Figura 35 – Protocolo de Construção: Arco Capaz - Parte 4

44	Segmento a		Segmento $[B_2, A_2]$	$a = 4.59$
45	Ponto N_1			$N_1 = (-5.18, 5.63)$
46	Ponto O_2			$O_2 = (-6.48, 5.65)$
47	Ponto P_1			$P_1 = (-6.02, 6.64)$
48	Ângulo α_1		Ângulo entre N_1, O_2, P_1	$\alpha_1 = 65.74°$
49	Segmento c_2		Segmento $[O_2, N_1]$	$c_2 = 1.3$
50	Segmento d_1		Segmento $[P_1, O_2]$	$d_1 = 1.09$
51	Ponto R_1		Ponto sobre c_2	$R_1 = (-5.58, 5.64)$
52	Ponto Q_1		Ponto sobre d_1	$Q_1 = (-6.09, 6.49)$
53	Arco k_1		ArcoCircular$[O_2, R_1, Q_1]$	$k_1 = 1.04$

Fonte: Autor