UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

FABRÍCIO VIEIRA OLIVEIRA

ULTRAPRODUTOS EM ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÕES

JUIZ DE FORA
2014

FABRÍCIO VIEIRA OLIVEIRA

ULTRAPRODUTOS EM ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÕES

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares

JUIZ DE FORA

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Fabrício Vieira.
Ultraprodutos em Espaços de Banach e Aplicações / Fabrício Vieira Oliveira. -- .
96 p.

Orientador: Carlos Alberto Santana Soares
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, .

1. Ultraprodutos. 2. Espaços de Banach. 3. Aplicações. 4. Ideais de operadores. I. Soares, Carlos Alberto Santana , orient. II. Título.

FABRÍCIO VIEIRA OLIVEIRA

ULTRAPRODUTOS EM ESPAÇOS DE BANACH E APLICAÇÕES

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Nelson Dantas Louza Junior

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior
Mestrado Acadêmico em Matemática
UFJF

Prof. Dr. Geraldo Marcio De Azevedo Botelho
UFU

Juiz de Fora, 24 de Abril de 2014.

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a minha mãe Conceição,
que me educou com seu amor .

EPÍGRAFE

"Não temais pela donzela
da alcova as janelas travadas estão
o perigo é a descrença
e o inimigo avança
num mundo em falência
abri-me senhora
porta ou consciência
não ouves cá fora o rugir do trovão? "
(Elomar Figueira Mello)

AGRADECIMENTOS

A todos os professores do Departamento de Matemática da UFJF por me presentearem com sua confiança. Especialmente ao professor Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos pelas primeiras lições em Matemática e à professora Flaviana Andréa Ribeiro pelo apoio como coordenadora do programa de mestrado e pelas aulas de Álgebra.

Ao orientador, professor Carlos Alberto Santana Soares por sua paciência em relação às circunstâncias e a minhas próprias dificuldades, guiando o trabalho ao presente resultado.

Ao professor Geraldo Márcio de Azevedo por suas importantes intervenções, que complementaram de maneira decisiva a dissertação e também minha formação acadêmica.

Ao professor Nelson Dantas Louza Junior por seus conselhos e por sua consideração com minha pessoa.

Aos colegas de curso por alegrarem minhas tardes.

A Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar aplicações da teoria de ultraprodutos em Análise Funcional em espaços de Banach, especificamente nos problemas de extensão de funções holomorfas, constantes de polarização e ideais de operadores maximais. Também é realizada uma revisão dos conceitos relacionados a topologia, aplicações multilineares, ultrafiltros e ultraprodutos de espaços de Banach.

Palavras-chaves: Espaços de Banach, ultraprodutos, aplicações multilineares, ideais de operadores.

ABSTRACT

This is work aims to present a application of the ultraproducts theory in Functional Analysis in Banach spaces, specifically in the problems of extension of holomorphic functions, polarization constants and maximal operator ideals. Also is performed a review of concepts about topology, multilinear maps, ultrafilters and ultraproducts in Banach spaces.

Keywords: Banach spaces, ultraproducts, multilinear maps, operator ideals.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PIF - Propriedade da interseção finita.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$ - Conjuntos dos números naturais.

$\mathbb{R}$ - Corpo dos números reais.

$\mathbb{C}$ - Corpo dos números complexos.

$\mathbb{K}$ - Corpo genérico ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Imf - Imagem da aplicação f.

$P(I)$ - Conjunto das partes do conjunto I.

$B_a(r)$ - Bola aberta de raio r centrada no ponto a.

$dim(Y)$ - Dimensão do espaço vetorial Y.

$< S >$ - Subespaço vetorial gerado pelo conjunto S.

$\overline{A}$ - Fecho topológico do conjunto A.

$dist(x,Y)$ - Distância de um ponto a um conjunto em um espaço métrico.

X^* - Espaço dual do espaço de Banach X.

X/Y - Espaço quociente.

$X^\perp$ - Espaço ortogonal.

$\mathcal{L}(X_1,...X_n; Y)$ - Conjunto das aplicações n-lineares contínuas entre os espaços vetoriais $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ e Y.

$\mathcal{L}^s(X_1,...X_n; Y)$ - Conjunto das aplicações n-lineares contínuas simétricas entre os espaços vetoriais $\mathrm{X}_1 \times X_2 \times ... \times \mathrm{X}_n$ e Y.

$\mathcal{P}(^nX; Y)$ - Conjunto dos polinômios homogeneos de grau n de X em Y.

$\mathcal{P}_f(^n\mathrm{X};\mathrm{Y})$ - Conjunto dos polinômios do tipo finito de grau n de X em Y.

$\mathcal{H}(A)$ - Conjunto das funções holomorfas no aberto A de um espaço de Banach.

$\mathcal{H}_b(A)$ - Conjunto das funções holomorfas do tipo limitado.

$(X_i)_U$ - Ultraproduto.

$(X)_U$ - Ultrapotência.

$\mathfrak{U}$ - Ideal de operadores.

inf - Ínfimo em um conjunto de números reais.

sup - Supremo em um conjunto de números reais.

$\lim_U$ - Limite sobre o ultrafiltro U.

A^c - Complementar do conjunto A.

$\cong$ - Isomorfismo isométrico.

$\emptyset$ - Conjunto vazio.

$l_\infty(I, X_i)$ - Espaço das famílias de norma limitada.

$\#X$ - Cardinalidade do conjunto X.

$dens(X)$ - Cardinalidade do menor conjunto denso em X.

id_X - Aplicação identidade em um conjunto X.

$posto(A)$ - Posto da aplicação linear A.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os conceitos relacionados a ultrafiltros e ultraprodutos originaram-se na Teoria de Modelos e ganharam aplicações em diversas áreas da Matemática. Por exemplo, Schoutens (2010) cita a primeira publicação da aplicação de ultraprodutos em Álgebra como sendo o atigo de Løs (1955).

No âmbito da Análise Funcional, tais técnicas possibilitaram uma forma de definir um espaço de Banach, denominado ultraroduto, a partir de uma dada família de espaços $(X_i)_{i\in I}$ indexada em um conjunto I. Em especial, quando $X_i = X$ para todo i, o ultraproduto contém uma cópia do espaço X e mais, dado um espaço X é possível construir um ultraproduto contendo também uma cópia do bidual de X (Proposição 5.8). Trata-se de uma característica interessante quando deseja-se estender funções definidas no espaço X.

O objetivo dessa dissertação é apresentar a teoria básica de ultraprodutos em espaços de Banach e demonstrar dois resultados contidos no artigo de Lindstrom e Ryan (1992), os quais utilizam a teoria de ultraprodutos aplicada a questões referentes a aplicações multilineares e funções holomorfas em espaços de Banach. Também é exposta uma aplicação da teoria de ultraprodutos no contexto dos ideais de operadores contida no artigo de Heinrich (1980).

No Capítulo 2 são resumidos os conceitos de Topologia e Análise em espaços de Banach que são pré-requisitos para a compreensão da dissertação. Os capítulos 3 e 4 exibem a teoria básica de ultrafiltros e ultraprodutos empregada em Análise Funcional, utilizando como base os textos de Sims (1982) e Heinrich (1980) e adicionando alguns resultados oportunos. O conceito central é o limite sobre um ultrafiltro. Enquanto a noção convencional de limite baseia-se na direção de uma rede (definição 3.2), no caso de limites sobre ultrafiltros, tal relação é trasferida para ordenação parcial presente no conjunto das partes do conjunto de índices. Um ultrafiltro em um conjunto I é definido como uma coleção de subconjuntos de I com algumas propriedades específicas. O ultraproduto de uma família de espaços de Banach $(X_i)_{i\in I}$, por sua vez, é definido através de uma relação de equivalência utilizando o limite sobre o ultrafiltro em um subconjunto do produto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$.

O Capítulo 5 trata das propriedades relacionadas a representação finita especificamente no caso de ultraprodutos. No Capítulo 6 é apresentada a teoria básica de aplicações multilineares, polinômios e funções holomorfas que será necessária no estudo realizado nos capítulos 7 e 8.

Os últimos três capítulos concluem a dissertação com aplicações da teoria de ultraprodutos. Os Capítulos 7 e 8 apresentam de fato os resultados trazidos por Lindstrom e Ryan (1992). No capítulo 7 é analisado o problema da extensão de funções holomorfas ao espaço bidual do domínio. Já no Capítulo 8 consideram-se as constantes de polarização de um espaço de Banach , as quais são definidas a partir dos espaços de aplicações multilineares do espaço no corpo em que está definido. É possível realizar considerações acerca das constantes de polarização de um ultraproduto a partir das constantes de polarização dos espaços da família em que está definido o ultraproduto.

O Capítulo 9 traz uma aplicação de ultraprodutos na teoria de ideais de operadores, oferecendo uma caracterização alternativa para ideais maximais apresentada no artigo de Heinrich (1980).

2 TOPOLOGIA E ANÁLISE EM ESPAÇOS DE BANACH

Este capítulo tem o objetivo de definir os conceitos básicos utilizados ao longo do desenvolvimento, bem como estabelecer alguns resultados envolvendo tais conceitos. A revisão bibliográfica teve como referências Rudin (1973), Fabian et al. (2001), Munkres (2000).

2.1 TOPOLOGIA E ESPAÇOS NORMADOS

A topologia em um conjunto define o quanto elementos estão ou não próximos. Dessa forma é apresentado o primeiro conceito:

Definição 2.1 (Topologia). *Dado um conjunto X, uma família τ de subconjuntos de X é dita uma topologia em X se verifica as seguintes propriedades:*

i - $\emptyset$ e $X \in \tau$.

ii - Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de elementos de τ então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.

iii - Se $(A_k)_{k=1,\ldots n}$ é uma família finita de elementos de τ então $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$.

O conjunto X munido de uma topologia τ é dito um espaço topológico, denotado por (X, τ). Os elementos de τ são os abertos do conjunto X. Se dois elementos de X estão contidos em um aberto, estão relativamente próximos de acordo com a topologia adotada. Um subconjunto de X é dito uma vizinhança de um ponto x se contém um aberto A que contenha x.

Definição 2.2 (Base de vizinhanças para um ponto). *Seja (X, τ) um espaço topológico e x um ponto de X. Uma família $\mathcal{B}$ de elementos τ é uma base de vizinhanças para o ponto x se:*

i - $x \in B$ para todo $B \in \tau$.

ii - Para toda vizinhança A de x, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq A$.

É comum definir topologias em conjuntos a partir de famílias menores, através de bases para topologia:

Definição 2.3 (Base para uma topologia). *Uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto arbitrário X é uma base para uma topologia, ou uma base topológica em X se verifica:*

i - $x \in X \Rightarrow \exists\ B \in \mathcal{B}$ *com* $x \in B$.

ii - $B_1,\ B_1 \in \mathcal{B}$ *e* $x \in B_1 \cap B_1 \Rightarrow \exists\ B \in \mathcal{B}$ *com* $x \in B \subset B_1 \cap B_1$.

Definida uma base topológica em um conjunto, defini-se uma topologia no mesmo, a topologia gerada pela base:

Definição 2.4 (Topologia gerada por uma base)**.** *Se $\mathcal{B}$ é uma base topológica no conjunto X, então define-se a topologia gerada por $\mathcal{B}$ como a família τ de subconjuntos de X que satisfaz a condição:*

$$U \in \tau \Leftrightarrow \textit{para cada } x \in U \textit{ existe } B \in \mathcal{B} \textit{ com } x \in B \subset U.$$

Definida a topologia em um conjunto X, pode-se estabelecer o conceito de convergência de uma sequência em X ou seja, de uma função a: $\mathbb{N} \rightarrow X$. Será utilizada a notação $a(n) = x_n$ e (x_n) para indicar a própria sequência.

Definição 2.5 (Sequência convergente)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma sequência (x_n) em X converge para o ponto $x \in X$ se para toda vizinhança V de x existe $m \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m$ então $x_n \in V$. Nesse caso utiliza-se a notação* $\lim x_n = x$.

Um conceito similar é possível para funções entre espaços topológicos:

Definição 2.6 (Convergência pontual de funções)**.** *Sejam X um conjunto arbitrário e Y um espaço topológico. Se f_n é uma sequência de funções f_n: $X \rightarrow Y$ e $f_n(x)$ converge para todo $x \in X$, então diz-se que f_n converge pontualmente para a função $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = \lim f_n(x)$.*

Dada uma sequência a: $\mathbb{N} \rightarrow X$, uma subsequência de x_n é a restrição $a|_S$ onde S é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Se σ: $S \rightarrow \mathbb{N}$ é a bijeção crescente entre os dois conjuntos, denota-se $a|_S$(s) $= x_{n_{\sigma(s)}}$ e a subsequência por (x_{n_k}).

Em um espaço topológico $(X,\ \tau)$, uma família de abertos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é dita uma cobertura para um conjunto $Y \subseteq X$ se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \supseteq Y$. Pode-se então definir a compacidade em espaço topológico:

Definição 2.7 (Conjunto compacto)**.** *Seja (X,τ) um espaço topológico. Um conjunto Y $\subseteq$ X é dito compacto se toda cobertura de abertos admite subcobertura finita. Ou seja:*

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \supseteq Y \Rightarrow \exists\ \{l_1,\ l_2, ... l_n\} \subseteq L \textit{ com } \bigcup_{k=1}^{n} A_{l_k} \supseteq Y.$$

A compacidade tem implicações importantes em convergência:

Proposição 2.1. *Sejam (X,τ) um espaço topológico e $Y \subseteq X$ compacto. Então toda sequência em Y possui subsequência convergente para um elemento de Y.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista uma sequência (x_n) de elementos de Y que não possua subsequência convergente para um elemento de Y. Então para todo $y \in Y$ existem uma vizinhança V_y e $N_y \in \mathbb{N}$ tais que para para $n > N_y$, $x_n \notin V_y$. Evidendemente $\bigcup_{y \in Y} V_y$ é uma cobertura aberta de Y. Como Y é compacto, existe uma subcobertura finita dada pelos abertos V_k, vizinhanças de y_k para $k = 1, 2, ...m$, respectivamente. Então para $n > N_k$, $x_n \notin V_k$. Tomando $N = \max_k\{N_k\}$, $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{m} V_k$ para $n > N$. Logo, para $n > N$, $x_n \notin Y$, um absurdo, portanto (x_n) possui subsequência convergente para um elemento de Y. □

Outra definição essencial relacionada a topologia é a métrica:

Definição 2.8 (Métrica)**.** *Seja X um conjunto arbitrário. Uma métrica em X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que para quaisquer x, y, $z \in X$ satisfaz :*

i - $d(x, y) \geq 0$ (é positivamente definida).

ii - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii - $d(x, y) = d(y, x)$ (é simétrica).

iv- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Um conjunto X munido de uma métrica d é dito um espaço métrico, denotado por (X, d). O conceito de bola em um espaço métrico apresenta-se de maneira intuitiva:

Definição 2.9 (Bola)**.** *Sejam (X, d) um espaço métrico, r um número real posivo e x um elemento de X. A bola aberta de raio r centrada em x é o conjunto:*

$$B_r(x) = \{ y \in X \; ; \; d(x, y) < r\}.$$

E a bola fechada de centrada em x de raio r é o conjunto:

$$B_r[x] = \{ y \in X \; ; \; d(x, y) \leq r\}.$$

É fácil verificar que a família das bolas abertas em um espaço métrico é uma base topológica, portanto uma métrica d gera uma topologia.

A partir de um espaço métrico é possível definir um outro conceito de convergência de funções:

Definição 2.10 (Convergência uniforme)**.** *Sejam X um conjunto arbitrário e Y um espaço métrico. Uma sequência de funções f_n: $X \rightarrow Y$ converge uniformemente para uma função*

$f : X \to Y$ se para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que se $n > n_0$ então $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$

Um resultado que relaciona compacidade e métrica e terá utilidade posteriormente:

Proposição 2.2. *Sejam (X, d), (Z, d') espaços métricos e $Y \subseteq X$ um subconjunto compacto. Se a função $f : X \to Z$ é contínua, então dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um real $\delta > 0$ tal que para todos $x \in X$ e $y \in Y$ com $d(x, y) < \delta$, $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista ϵ para o qual seja possível definir sequências $(x_n) \subset X$ e $(y_n) \subset Y$ para as quais $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ e $d(x_n, \mathrm{y}_n) < \frac{1}{n}$ para todo n. Pela Proposição 2.1, (y_n) possui subsequência convergente $y_{n_k} \xrightarrow{k} y \in Y$. Como f é contínua em Y, existe δ tal que :

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Mas como (y_{n_k}) converge para y, existe $t \in \mathbb{N}$ com $d(y_t, y) < \frac{\delta}{2}$ e $d(x_t, y_t) < \frac{\delta}{2}$. Dessa maneira $d(x_t, y) < \delta$, logo $d'(f(x_t), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ e:

$$d'(f(x_t), f(y)) < \tfrac{\epsilon}{2},$$
$$d'(f(y_t), f(y)) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Pela desiguldade triangular, $d'(f(x_t), f(y_t)) < \epsilon$. Isso é um absurdo, já que $x_t \in X$, $y_t \in Y$ e $d(x_t, y_t) < \delta$. □

Outra noção útil no âmbito de espaços métricos é a distância de um ponto a um conjunto.

Definição 2.11 (Distância de um ponto a um conjunto)**.** *Sejam (X, d) um espaço métrico, $Y \subseteq X$ e $x \in X$. A distância do ponto x ao conjunto Y é definida como o número real:*

$$dist(x, Y) = \inf_{\{z \in Y\}} d(x, z).$$

Uma classe particular de sequências em espaços métricos são as sequências de Cauchy:

Definição 2.12 (Sequência de Cauchy)**.** *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é uma sequência de Cauchy se para todo real $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo par n, $m > N$, tem-se $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

A partir de sequências de Cauchy define-se a noção de espaço métrico completo:

Definição 2.13 (Espaço métrico completo)**.** *Um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy é convergente.*

A teoria apresentada no trabalho destina-se especificamente a espaços vetoriais, mais especificamente a espaços normados:

Definição 2.14 (Norma em um espaço vetorial)**.** *Seja X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma norma em X é uma função $\|\|$: $X \to \mathbb{R}_0^+$ que para todos x, $y \in X$ e $a \in \mathbb{K}$, verifica as propriedades:*

i - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ii - $\|a.x\| = |a| \, . \, \|x\|$.

ii - $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Uma norma $\|.\|$ gera uma métrica d através da relação $d(x, y) = \|x - y\|$ e consequentemente uma topologia. O tema central da dissertação é voltado a espaços de Banach.

Definição 2.15 (Espaço de Banach)**.** *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo, ou seja toda sequência de Cauchy converge.*

Pode-se verificar facilmente que subespaços fechados de espaços de Banach também são espaços de Banach. Uma maneira bastante utilizada para se obter espaços de Banach a partir de um espaço de Banach inicial são espaços quocientes:

Definição 2.16 (Espaço quociente)**.** *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. O espaço vetorial X / Y das classes:*

$$[x] = \{z \in X, \, x - z \in Y\},$$

com a norma

$$\|[x]\| = \inf_{z\in[x]} \|z\|,$$

é chamado espaço quociente de X por Y.

Há uma maneira alternativa de se compreender a norma de uma espaço quociente. Se $x \in X$:

$$\|[x]\| = \inf\{\|z\|; \, z \in [x] \, \} = \inf\{\|x - y\|; \, y \in Y\} = dist(x, Y).$$

E de fato, X / Y é um espaço de Banach:

Proposição 2.3. *Se Y é um subespaço fechado do espaço de Banach X então X / Y é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $([x_n])$ uma sequência de Cauchy em $X\ /\ Y$. Então existe uma subsequência $([x_{n_k}])$ tal que $\left\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\right\| < \frac{1}{2^k}$. Logo, também existe x_{n_k} em $[x_{n_k}]$ com $dist(x_{n_k},\ [x_{n_{k+1}}]) < \frac{1}{2^k}$. A sequência (x_{n_k}) assim definida é de Cauchy em X, então $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ para algum x em X. Como:

$$\left\|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\right\| < \|[x_{n_k}] - [x]\| < \|x_{n_k} - x\|,$$

tem-se que $([x_{n_k}])$ e consequentemente $([x_n])$ converge para $[x]$ em $X\ /\ Y$. □

Um resultado de grande utilidade é o Teorema de Riesz (confira Fabian et al. (2001), página 13):

Lema 2.1 (Riesz)**.** *Se X é um espaço normado e Y é um subespaço próprio e fechado, então para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ com $\|x\| = 1$ e dist(x, Y) $\geq$ 1 - ϵ.*

2.2 DUALIDADE EM ESPAÇOS DE BANACH

O conjunto das aplicações lineares entre dois espaços vetoriais é um espaço vetorial. Em particular, dados um espaço vetorial normado X e um espaço de Banach Y o conjunto $\mathcal{L}(X;Y)$ das aplicações lineares contínuas de X em Y é um espaço de Banach com a norma:

$$\|f\| = \sup\ \{\|f(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

No caso de X ser um espaço de Banach e Y ser o corpo $\mathbb{K}$ sobre o qual X está definido, o espaço $\mathcal{L}(X;Y)$ é denotado por X^* e denominado espaço dual do espaço X. O espaço $\mathcal{L}(X^*;\mathbb{K})$ denotado por X^{**} é o espaço bidual de X. Analogamente define-se o espaço $X^{***} = (X^{**})^*$ e assim por diante. Um elemento de X^* é dito um funcional em X.

Um grande resultado relativo a dualidade é o Teorema de Hahn-Banach (confira Rudin (1973) página 59), o qual estabelece a existência de extensões para funcionais:

Proposição 2.4 (Hahn, Banach)**.** *Seja Y um subespaço do espaço normado X. Dado um funcional $f \in Y^*$, existe $\overline{f} \in X^*$ tal que $\overline{f}/_Y = f$ e $\left\|\overline{f}\right\|_Y = \|f\|_X$.*

Corolário 2.1. *Seja X um espaço normado. Para todo $x \in X \setminus \{0\}$ existe um funcional $f \in X^*$ com $\|f\| = 1$ com $f(x) = \|x\|$. Ou seja:*

$$\|x\| = \max_{\{\|f\|\leq 1\}} |f(x)|.$$

Demonstração. Tomando $Y = < x >$, define-se o funcional $f \in Y^*$ por $f(tx) = t\,\|x\|$. Tem-se que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$. Pela Proposição 2.4 é possível estender f a um funcional $\bar{f}$ em X^* com norma 1. Como todos $x \in X$ e $g \in X^*$ verificam $|g(x)| \leq \|g\|\,\|x\|$,

$$\sup_{\{g\in X^* \|g\|\leq 1\}} |g(x)| \leq \|x\|.$$

Mas o funcional definido atinge o supremo e consequentemente é igual a $\|x\|$. $\square$

Uma classe importante de espaços de Banach são os espaços reflexivos, para defini-los considera-se a seguinte proposição de fácil demonstração:

Proposição 2.5. *A aplicação $\mathfrak{I}_X$: $X \to X^{**}$ dada por $\mathfrak{I}_X(x)(f) = f(x)$ é uma imersão isométrica .*

Definição 2.17 (Espaço Reflexivo)**.** *Um espaço de Banach X é reflexivo se a aplicação definida na Proposição 2.5 é sobrejetiva.*

Uma interessante caracterização de espaços reflexivos é o Teorema de James (Fabian et al. (2001) página 84):

Proposição 2.6 (James)**.** *Um espaço de Banach X é reflexivo se e somente se para todo $f \in X^*$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = \|f\|$*

Um conceito utilizado em algumas demonstrações ao longo da dissertação é o de aplicação adjunta:

Definição 2.18 (Aplicação Adjunta)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Define-se a aplicação dual ou aplicação adjunta $T^* \in \mathcal{L}(Y^*;X^*)$ como a função que associa ao funcional $f \in Y^*$ o funcional $T^*(f) \in X^*$ definido por $T^*(f)(x) = f(T(x))$.*

Proposição 2.7. *Se X, Y são espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, então $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração. Por definição:

$$\|T^*\| = \sup_{\{\|f\|\leq 1\}} \|T^*(f)\| = \sup_{\{\|f\|\leq 1\}}(\sup_{\{\|x\|\leq 1\}} |T^*(f)(x)|) =$$
$$= \sup_{\{\|f\|\leq 1\}}(\sup_{\{\|x\|\leq 1\}} |f(T(x))|) = \sup_{\{\|x\|\leq 1\}}(\sup_{\{\|f\|\leq 1\}} |f(T(x))|).$$

Devido ao corolário 2.1:

$$\sup_{\{\|x\|\leq 1\}}(\sup_{\{\|f\|\leq 1\}} |f(T(x))|) = \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|T(x)\|$$

$\square$

Um resultado relativo à separação de subespaços em espaços de Banach (Fabian et al. (2001), página 41):

Proposição 2.8. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Se x_0 é tal que $x_0 \in X$ e $x_0 \notin Y$, então existe $f \in X^*$ com $\|f\| = 1$, $f(x) = 0$ para todo $x \in Y$ e $f(x_0) = dist(x_0,\ Y)$.*

Uma maneira alternativa de definir topologias em espaços de Banach é através das topologias fracas:

Definição 2.19 (Topologia Fraca)**.** *Seja X um espaço normado. A topologia fraca em X é a topologia gerada pela base formada pelos conjuntos do tipo:*

$$O = \{x \in X;\ |f_i(x - x_0)| < \epsilon \text{ para } i = 1,\ 2,...n\ \},$$

onde $x_0 \in X$, $n \in \mathbb{N}$, f_1, f_2,...$f_n \in X^*$ *e* $\epsilon > 0$.

Definição 2.20 (Topologia Fraca Estrela)**.** *Seja X um espaço normado. A topologia fraca estrela em* X^* *é a topologia gerada pela base formada pelos conjuntos do tipo:*

$$O^* = \{f \in X^*;\ |(f - f_0)(x_i)| < \epsilon \text{ para } i = 1,\ 2,...n\ \},$$

onde $f_0 \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, x_1, x_2,...$x_n \in X$ *e* $\epsilon > 0$.

Existem caracterizações para a convergência nas topologias fraca e fraca estrela:

Proposição 2.9. *Sejam X é um espaço normado e* (x_n) *uma sequência em X. A sequência* (x_n) *converge na topologia fraca para* $x \in X$ *se e somente se* $\lim f(x_n) = f(x)$ *para todo f em* X^*.

Demonstração. Primeiramente a afirmação:

(x_n) converge na topologia fraca para $x \Rightarrow \lim f(x_n) = f(x)$ para todo f em X^*.

Sejam $f \in X^*$ e $\epsilon > 0$ arbitrários, definindo o conjunto:

$$O = \{y \in \text{X};\ |f(x) - f(y)| < \epsilon\},$$

O é uma vizinhança de x na topologia fraca, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \in O$. Ou seja, $|f(x) - f(x_n)| < \epsilon$. Logo, $\lim f(x_n) = f(x)$.

Para provar a afirmação:

$\lim f(x_n) = f(x)$ para todo f em $X^* \Rightarrow (x_n)$ converge na topologia fraca para x,

seja V uma vizinhança de x na topologia fraca. Então existem $m \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ e funcionais f_1, f_1,...$f_n \in X^*$ tais que o conjunto

$$O = \{y \in X;\ |f_j(x) - f_j(y)| < \epsilon,\ j = 1,\ 2,...m\}$$

está contido em V. Como

$$\lim f_j(x_n) = f_j(x), \text{ para } j = 1,...m,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N$,

$$|f_j(x_n) - f_j(y)| < \epsilon,$$

ou seja, $x_n \in O \subseteq V$. Portanto (x_n) converge na topologia fraca para x. $\square$

Proposição 2.10. *Sejam X é um espaço normado e (f_n) uma sequência em X^*. A sequência (f_n) converge na topologia fraca estrela para $f \in X^*$ se e somente se* $\lim f_n(x) = f(x)$ *para todo x em X.*

Demonstração. (f_n) converge na topologia fraca estrela $\Rightarrow$ $\lim f_n(x) = f(x)$ $\forall$ x em X.

Sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. O conjunto:

$$O^* = \{g \in \mathrm{X}^*; \, |f(x) - g(x)| < \epsilon\}$$

é uma vizinhança de f na topologia fraca estrela. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $f_n \in O^*$. Ou seja, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Portanto, $\lim f_n(\mathrm{x}) = f(x)$.

Para demonstrar a afirmação:

$$\lim f_n(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ em } X \Rightarrow (f_n) \text{ converge na topologia fraca estrela,}$$

seja V^* uma vizinhança de f na topologia fraca estrela. Por definição, existem $m \in \mathbb{N}$, um real $\epsilon > 0$ e x_1, x_1,...$x_n \in X$ tais que o conjunto

$$O^* = \{g \in \mathrm{X}^*; \, |f(x_j) - g(x_j)| < \epsilon, \, j = 1, \, 2, ...m\}$$

está contido em V^*. Como

$$\lim f_n(x_j) = f(x_j), \text{ para } j = 1, ...m,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$

$$|f_n(x_j) - f(y_j)| < \epsilon,$$

ou seja, $f_n \in O^* \subseteq V^*$. Portanto (f_n) converge na topologia fraca estrela para f.

Um teorema que relaciona a topologia fraca estrela e a topologia oriunda da norma é o teorema de Goldstine (Fabian et al. (2001) página 73).

Proposição 2.11 (Goldstine)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então se B é a bola fechada unitária centrada na origem em X, o fecho de $\mathfrak{J}(B)$ em X^{**} na topologia fraca estrela é a bola fechada unitária centrada na origem em X^{**}, onde $\mathfrak{J}$ é a imersão canônica de X em X^{**}.*

3 FILTROS E ULTRAFILTROS

3.1 FILTROS

O conceito usual de convergência, por meio de sequências, não se mostra adequado para o estudo de certas propriedades acerca de espaços topológicos. Como consequência, buscaram-se novas definições, mais gerais para a convergência. Nesse sentido, há dois conceitos distintos geralmente utilizados: convergência por redes e convergência por ultrafiltros. O conceito de ultrafiltro baseia-se na ordenação parial existente no conjunto das partes de um conjunto arbitrário, equanto o conceito de rede baseia-se em conjuntos direcionados:

Definição 3.1 (Conjunto direcionado)**.** *Um conjunto não vazio I é dito direcionado se existe uma relação binária $\prec$ em I, tal que para todos α β e $\gamma \in I$, valem as propriedades:*

i - para todo $\alpha \in I$, $\alpha \prec \alpha$ (reflexividade),

ii - para todos α, β e $\gamma \in I$, $\alpha \prec \beta$ e $\beta \prec \gamma$ implica $\alpha \prec \gamma$ (transitividade),

iii - para todos α e $\beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \prec \gamma$ e $\beta \prec \gamma$.

Definição 3.2 (Rede)**.** *Uma rede em um conjunto X é uma função $N : I \longrightarrow X$ (denotando-se a função por $\{x_i\}_{i \in I}$ e N(i) por x_i) onde I é um conjunto direcionado.*

No caso de X ser um espaço topológico, diz-se que uma rede $N : I \longrightarrow X$ converge para o ponto x (denotado por $x_i \to x$) se e somente se para toda vizinhança V de x, existe $t_0 \in I$, tal que para todo $t \in I$ com $t_0 \prec t$, $x_t \in V$.

O conceito de ultrafiltro transfere para a relação de continência nos subconjuntos do conjunto de índices a noção de convergência, preservando as propriedades essenciais e desejáveis da mesma. A construção de tal conceito inicia-se com a definição de filtro.

Definição 3.3 (Filtro)**.** *Dado um conjunto I, um filtro em I é uma família não vazia F de subconjuntos de I que satisfaz as seguintes condições:*

(i) Se $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$.

(ii) Se $A \in F$ e $A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in F$.

É imediato que a família de todos os subconjuntos de um conjunto dado satisfaz as propriedades de filtro:

Exemplo 3.1 (O filtro impróprio). *Dado um conjunto I, a família de todos os subconjuntos de I, P(I), é um filtro em I, denominado filtro impróprio.*

Tais exemplos de filtro são triviais e gerais, não trazendo, portanto, características interessantes para estudo.

Definição 3.4 (Filtro próprio). *$F \subseteq P(I)$ é um filtro próprio se F é filtro e $F \neq P(I)$.*

Outro exemplo trivial de filtro é o formado por apenas um subconjunto que é o próprio conjunto.

Exemplo 3.2 (O filtro trivial ou indiscreto). *Dado um conjunto I, a família {I} é um filtro em I.*

Um tipo mais interessante de filtro são os chamados filtros discretos, definidos a partir de um elemento específico do conjunto.

Exemplo 3.3 (O filtro discreto). *Dados um conjunto I e um elemento $a \in I$, a família de subconjuntos $\{ A \subseteq I,\ a \in A\}$, denotada por F_a, é um filtro em I.*

Existe uma caracterização útil para os filtros discretos:

Proposição 3.1. *F é um filtro discreto em $a \in I \Leftrightarrow \{a\} \in F$ e $\emptyset \notin F$.*

Demonstração. A primeira implicação ($\Rightarrow$) é trivial, resta provar a volta ($\Leftarrow$).

Prova-se primeiramente que o filtro discreto F_a está contido em F. Seja A um conjunto pertencente a F_a:

$A \in F_a \Rightarrow a \in A \Rightarrow \{a\} \subseteq A \subseteq I \Rightarrow A \in F$, pela propriedade (ii) da definição de filtro.

Portanto $F_a \subseteq F$. Agora suponha por absurdo que exista um conjunto A tal que $A \in F$ e $A \notin F_a$. Então $a \notin A$, mas, por hipótese:

$$\{a\} \in F \Rightarrow \{a\} \cap A = \emptyset \in F, \text{ um absurdo.}$$

Logo $F_a \subseteq F$ e $F \subseteq F_a$, então $F_a = F$. □

Outro exemplo importante de filtro é o filtro de Fréchet:

Exemplo 3.4 (O filtro de Fréchet). *Dado um conjunto I, seja F a família dos subconjuntos de I cujo complementar é finito: $F = \{ A \subseteq I,\ A^c$ é finito $\}$. F é um filtro em I.*

Exemplo 3.5. *Se I é um espaço topológico, o conjunto F das vizinhanças de um ponto $a \in I$, definido por $F = \{ V \subseteq I,\ V$ é vizinhança de $a \}$ é um filtro em I.*

Como dito anteriormente, o filtro impróprio não é de interesse de estudo e a proposição seguinte estabelece critérios para a caracterização de tais filtros:

Proposição 3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes para um filtro F em um conjunto I:*

a - F é um filtro próprio em I.

b - $\emptyset \notin F$.

c - $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $\forall\ \{\ A_1,A_2,\ldots\ A_n\ \} \subset F$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

A propriedade c é chamada propriedade da interseção finita (PIF).

Demonstração. (a)$\Rightarrow$(b)

Suponha por absurdo que $\emptyset \in F$, então para qualquer conjunto A, $A \subseteq I$, tem-se que $\emptyset \subseteq A \subseteq I$, portanto $A \in F$, logo $F = P(I)$, ou seja F é o filtro impróprio.

(b)$\Rightarrow$(c)

Suponha por absurdo que $\emptyset \notin F$ e $\exists\ \{\ A_1,\ A_2,\ldots A_n\} \subset F$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$. Como F é filtro, a interseção finita de elementos de F pertence a F, logo $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \emptyset \subset F$, um absurdo.

(c)$\Rightarrow$(a)

Dado $A \subset I$ (assumindo $A \neq \emptyset$ e $A \neq$ I), necessariamente $A \cap A^c = \emptyset$, logo $A^c \notin F$, logo F é um filtro próprio.

□

Um fato importante e de fácil verificação é a propriedade de que a interseção arbitrária de filtros sobre um mesmo conjunto ainda é um filtro:

Proposição 3.3. *Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de filtros em I, então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um filtro em I.*

Demonstração. Primeiramente prova-se que satisfaz a propriedade (i) da Definição 3.3.

Sejam A, $B \in \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$. Para todo λ, A e $B \in F_\lambda$, logo $A \cap B \in F_\lambda$ (uma vez que F_λ é filtro), portanto $A \cap B \in \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$.

Agora para demonstrar a propriedade (ii), sejam $A \in \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ e B tais que $A \subseteq B \subseteq I$. Tem-se que $A \in F_\lambda$, para todo λ, logo $B \in F_\lambda$ (porque F_λ é filtro), consequentemente $B \in \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$. Então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ satisfaz as propriedades de filtro.

□

Uma questão interessante é como construir um filtro que contenha uma família S dada de subconjuntos I. Obviamente, o conjunto das partes de I cumpre tais requisitos, mas o interesse é em filtros menores, mais especificamente deseja-se conhecer o menor filtro que contenha S, que será denominado o filtro gerado por S.

Definição 3.5 (Filtro gerado por uma família de subconjuntos)**.** *Seja S uma família de subconjuntos de I. Define-se:*

$$F_S = \bigcap F, \textit{ tal que } F \textit{ é filtro e } S \subseteq F.$$

Claramente $S \subseteq F_S$ e F_S é um filtro (já que a intersecão arbitrária de filtros é um filtro), chamado filtro gerado pela família de subconjuntos S.

Lema 3.1. *Se S é uma família de subconjuntos de I então:*

$$F_S = \{A \subseteq I, \exists\ n \in \mathbb{N} \textit{ e } S_1, S_2, \ldots S_n \in S \textit{ tais que } \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq A\ \}.$$

Demonstração. Começando pela inclusão:

$$F_S \subseteq \{A \subseteq I, \exists \text{ n} \in \mathbb{N} \text{ e } S_1,\ S_2, \ldots S_n \in S \text{ tais que } \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq A\ \}.$$

Pela definição de F_S, basta verificar que o conjunto:

$$\{A \subseteq I, \exists \text{ n} \in \mathbb{N} \text{ e } S_1,\ S_2, \ldots S_n \in S \text{ tais que } \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq A\ \}$$

é um filtro, o que é trivial.

Para provar a inclusão contrária, sejam $A \subseteq I$ e conjuntos S_1, S_2,... $S_n \in S$ tais que $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq A$. Como F_S é filtro e contém S, $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \in F_S$, como $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq A$, $A \in F_S$.

□

No caso em que $S = \{\{a\}\}$, onde a é um elemento de I, o filtro gerado por S coincide com o filtro discreto em a, apresentado no Exemplo 3.3 ($F_{\{\{a\}\}} = F_a$).

Esta seção encerra-se com um resultado de caracterização de filtros gerados próprios:

Proposição 3.4. *Seja S uma família de subconjuntos de um conjunto não vazio I. São equivalentes as afirmações:*

a - F_S é um filtro próprio em I.

b - $\emptyset \notin S$.

c - S tem a PIF.

Demonstração. (i) F_S é próprio $\Rightarrow \emptyset \notin S$ (evidente).

(ii) $\emptyset \notin S \Rightarrow S$ tem a PIF (trivial).

(iii) S tem a PIF $\Rightarrow F_S$ é um filtro próprio:

Se S tem a PIF, então do Lema 3.1 segue que $\emptyset \notin F_S$, logo F_S é próprio.

□

3.2 ULTRAFILTROS

Apenas as propriedades de filtro não são suficientes para estabelecer as características desejadas da definição usual de limite, por exemplo na Proposição 3.5. Para tal, é necessário ainda exigir a maximalidade do filtro. Dessa maneira define-se ultrafiltro como um filtro próprio maximal pela relação de ordem gerada pela continência. Ou seja:

Definição 3.6 (Ultrafiltro)**.** *Um filtro próprio U sobre um conjunto I é um ultrafiltro se e somente se é válida a condição:*

$$F \text{ é filtro em } I \ (\ F \neq P(I)) \text{ e } U \subseteq F \Rightarrow F = U.$$

Utilizando o Lema de Zorn é possível garantir a existência de um ultrafiltro no seguinte sentido:

Proposição 3.5. *Todo filtro próprio F em I está contido em um ultrafiltro U em I.*

Demonstração. Seja o conjunto $\mathcal{F} = \{\ G\colon G$ é filtro próprio em I e $F \subseteq G\ \}$ com a ordenação parcial gerada pela inclusão. Toda cadeia em $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal. De fato, dada uma cadeia $\{G_l\}_{l\in L}$ em $\mathcal{F}$, $\bigcup_{l\in L} G_l$ é o limite superior da cadeia. Resta mostrar que $\bigcup_{l\in L} G_l \in \mathcal{F}$.

Sejam A, $B \in \{G_l\}_{l\in L}$. Assuma $A \in G_{l_1}$ e $B \in G_{l_2}$, com l_1, $l_2 \in L$. Como $\{G_l\}_{l\in L}$ é totalmente ordenada, suponha sem perda de generalidade que $G_{l_1} \supseteq G_{l_2}$. Então, A, $B \in G_{l_1}$, de forma que sendo G_{l_1} um filtro, $A \cap B \in G_{l_1} \subseteq \{G_l\}_{l\in L}$.

Analogamente, se A, B são conjuntos que verificam: $A \in \{G_l\}_{l\in L}$ e $A \subseteq B \subseteq I$, então existe $l_1 \in L$ com $A \in G_{l_1}$. Como G_{l_1} é um filtro, $B \in G_{l_1} \subseteq \{G_l\}_{l\in L}$. Portanto $\{G_l\}_{l\in L}$ verifica as propriedades de filtro.

Então, como toda cadeia possui limite superior em $\mathcal{F}$, pelo lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal U.

□

Nessa dissertação, as demonstrações baseadas na construção de ultrafiltros específicos utilizam a Proposição 3.5. Dessa maneira define-se o filtro através de uma lei de formação, passando-se a considerar o ultrafiltro mencionado na proposição, o qual beseia-se no Lema de Zorn, como consequência não se consegue explicitar todos os elementos do ultrafiltro.

Uma consequência direta da Proposição 3.5 é o fato de que qualquer coleção pode ser estendida a um ultrafiltro:

Corolário 3.1. *Qualquer coleção de subconjuntos de I com a PIF está contida em um ultrafiltro.*

Demonstração. Decorre diretamente das Proposições 3.4 e 3.5. □

Uma das principais propriedades do conceito de ultrafiltro, sobre um conjunto I, consiste no fato de que para todo subconjunto A de I obrigatoriamente A ou A^c está no ultrafiltro e apenas um:

Proposição 3.6. *Seja U um filtro sobre um conjunto I, então são equivalentes:*

(i) - U é um ultrafiltro em I.

(ii) - $\forall\ A \subseteq I$*, A ou* $A^c \in U$ *(ou exclusivo).*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$

Se para algum conjunto $A \subseteq I$ ocorresse A e $A^c \in$ U, então $A \cap A^c = \emptyset \in U$, logo pela Proposição 3.2 U não seria próprio, um absurdo. Portanto basta provar que se $A^c \notin U$, então $A \in U$.

Supondo que $A^c \notin U$, então não existe $D \in U$ com $D \subseteq A^c$ (pela propriedade (ii) da Definição 3.3), logo $D \cap A \neq \emptyset\ \forall\ D \in U$.

Considere o conjunto $\mathcal{B} = \{\ A \cap D,\ D \in U\ \}$. Como $\emptyset \notin \mathcal{B}$, $F_{\mathcal{B}}$, o filtro gerado por $\mathcal{B}$, é um filtro próprio (Proposição 3.4). E mais, $F_{\mathcal{B}}$ contém U.

De fato, dado $D \in U$, tem-se que $D \cap A \subseteq D$ e $D \cap A \in F_{\mathcal{B}}$. Então $D \in F_{\mathcal{B}}$, logo $U \subseteq F_{\mathcal{B}}$ e como U é maximal por hipótese $U = F_{\mathcal{B}}$.

Como $A \in \mathcal{B}$, $A \in \mathrm{F}_{\mathcal{B}} = U$.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Seja F um filtro próprio sobre I com $U \subseteq F$. Supondo por absurdo que $F \neq U$, $\exists\ A$ tal que $A \in F$ e $A \notin U$, então $A^c \in U \subset F$, logo $A^c \in F$. Se A e $A^c \in F$, $\emptyset \in F$, contrariando a hipótese de F ser próprio.

□

Corolário 3.2. *Se U é ultrafiltro e* $A \cup B \in U$ *, então A ou* $B \in U$*.*

Demonstração. $A \cup B \in U \Rightarrow (A \cup B)^c \notin U \Rightarrow A^c \cap B^c \notin U \Rightarrow A^c$ ou $B^c \notin U \Rightarrow A$ ou $B \in U$.

□

Corolário 3.3. *Seja U um ultrafiltro em I e $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup ... \cup I_n$. Então ao menos um I_k pertence a U.*

Demonstração. $I = \bigcup^n{}_{k=1} I_k \Rightarrow \bigcap^n{}_{k=1} I_k^c = \emptyset$, como U é próprio, $\emptyset \notin U$. Logo, pelo menos um $I_k^c \notin U$, ou seja pelo menos um $I_k \in U$.

□

Também é imediato da Proposição 3.6 que F_a, o filtro discreto no elemento a de I, é um ultrafitro, que será denominado ultrafiltro trivial:

Definição 3.7 (Ultrafiltro trivial)**.** *Um ultrafiltro U em I é dito trivial se $U = F_a$ para algum $a \in I$.*

Uma caracterização de ultrafiltros triviais é dada pela proposição:

Proposição 3.7. *Um ultrafiltro U é trivial se e somente se existe $A \in U$ com $\#A < \infty$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$

Se U é trivial, ou seja, $U = F_a$ para algum $a \in I$, por definição $\{a\} \in U$ e $\#\{a\} < \infty$.

$(\Leftarrow)$

Seja $A = \{\ a_1,\ a_2,\ ...\ a_n\ \} \in U$, um conjunto de cardinalidade n. Então $A^c \notin U$. Como $I = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup\ ...\ \{a_n\} \cup A^c$, uma vez que $A^c \notin U$, pelo Corolário 3.3, pelo menos um dos subconjuntos $\{a_k\}$ pertence a U. Sendo U um ultrafiltro, $\emptyset \notin U$. Portanto, da Proposição 3.1, resulta que U é um filtro discreto em a_k.

□

Uma definição útil em determinadas situações é a definição de ultrafiltro enumeravelmente completo.

Definição 3.8 (Ultrafiltro enumeravelmente completo)**.** *Um ultrafiltro U em I é dito enumeravelmente completo se é fechado para interseções enumeráveis, isto é:*

$$A_1,\ A_2,\ A_3, ...\ A_n, ... \in\ U \Rightarrow \textstyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\ \in\ U.$$

Caso U não seja enumeravelmente completo, U é dito enumeravelmente incompleto

Exemplo 3.6. *Se U é um ultrafiltro não trivial em $\mathbb{N}$, então U é enumeravelmente incompleto. De fato, como U é não trivial, para cada n em $\mathbb{N}$, existe $A_n \in U$ tal que n não pertença a A_n. Dessa meneira, a sequência $(A_n)_n$ verifica $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \notin U$.*

Há uma maneira alternativa de se verificar se um ultrafiltro é enumeravelmente completo:

Proposição 3.8. *Um ultrafiltro U é enumeravelmente incompleto se e somente se existe uma cadeia enumerável e decrescente de elementos de U com interseção vazia:*

$$I_1,\ I_2,\ I_3, \ldots\ I_n, \ldots \in\ U \text{ com } I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \ldots\ I_n \supseteq \ldots \text{ e } \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i = \emptyset.$$

Demonstração. ($\Leftarrow$)

Se $\emptyset \in U$, então U não pode ser ultrafiltro.

($\Rightarrow$)

Se U é enumeravelmente incompleto então existe uma sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em U com $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \notin U$. Definida a sequência de conjuntos:

$$I_n = (\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \setminus A.$$

Como A_k e $A^c \in U$ e U é ultafiltro, $I_n \in U$. Claramente $I_k \supset I_{k+1}$ e

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i = (\bigcap_{k=1}^{\infty} A) \cap A^c = A \cap A^c = \emptyset.$$

□

3.3 LIMITES SOBRE ULTRAFILTROS

Uma vez consolidada a teoria básica de ultrafiltros torna-se viável a definição de limites de famílias em um espaço topológico indexadas em um conjunto I arbitrário:

Definição 3.9 (Limite sobre um ultrafiltro). *Sejam X um espaço topológico, $(x_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de X e U um ultrafiltro em I. Dizemos que (x_i) converge sobre U para $x \in X$ (notação: $\lim_U(x_i) = x$) se para toda vizinhança V de x:*

$$\{\ i \in I\ ,\ x_i \in\ V\ \} \in\ U.$$

Evidentemente se $U \subseteq V$ são vizinhanças de x em um espaço topológico X, então

$$\{\ i \in I\ ,\ x_i \in U\ \} \subseteq \{\ i \in I\ ,\ x_i \in V\ \}.$$

De modo que:

Proposição 3.9. *Se $(V_l)_{l \in L}$ é uma base de vizinhanças para x em X (Definição 2.2) e $(x_i)_{i \in I}$ é uma família tal que para todo $l \in L$ tem-se*

$$\{ \ i \in I \ , \ x_i \in \ V_l \ \} \in \ U,$$

então $\lim_U(x_i) = x$.

Demonstração. Dada V vizinhança de x em X, existe $V_l \subseteq V$, logo

$$\{ \ i \in I \ , \ x_i \in V_l \ \} \subseteq \{ \ i \in I \ , \ x_i \in V \ \}.$$

Como por hipótese $\{ \ i \in I, \ x_i \in V_l \ \} \in U$, tem-se que $\{ \ i \in I \ , \ x_i \in V \ \} \in U$, e como V é arbritário segue que $\lim_U(x_i) = x$.

□

Assim como no caso da convergência usual através de sequências, é possível garantir a unicidade do limite quando considera-se um espaço topológico de Hausdorff.

Proposição 3.10 (Unicidade do limite)**.** *Se X é um espaço de Hausdorff e existe* $\lim_U(x_i)$*, então o limite é único.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $\lim_U(x_i) = x$, $\lim_U(x_i) = y$ e $x \neq y$. Como X é Hasudorff, existem N_x e N_y vizinhanças de x e y respectivamente tais que $N_x \cap N_y = \emptyset$. Os conjuntos $A_x = \{ \ i \in I, \ x_i \in N_x \ \}$ e $A_y = \{ \ i \in I, \ x_i \in N_y \ \}$ são disjuntos uma vez que N_x e N_y também o são, e mais, A_x e $A_y \in U$, devido à hipótese de convergência.

Então $A_x \cap A_y = \emptyset \in U$, um absurdo já que U, pela definição de ultrafiltro, é um filtro próprio (se $\emptyset \in U$, então U é o filtro imprório).

□

Exigindo também a compacidade é possível garantir a existência do limite de uma família arbitrária sobre um ultrafiltro:

Proposição 3.11. *Sejam X um espaço topológico, $Y \subseteq X$ um subconjunto compacto e U um ultrafiltro em um conjunto I. Se $(x_i)_{i \in I}$ é uma família em X tal que:*

$$\{i \in I; \ x_i \in \ Y\} \in \ U,$$

então $y = \lim_U(x_i)$ para algum $y \in \ Y$.

Demonstração. Suponha por absurdo que $(x_i)_{i \in I}$ não possua limite em Y, então para todo y em Y existe uma vizinhança N_y tal que o conjunto $A_{N_y} = \{ \ i \in I, x_i \in N_y \ \}$ não pertença a U. Evidentemente $\bigcup_{y \in K} N_y$ é uma cobertura para Y, logo pela compacidade existe uma subcobertura finita que será designada por $(N_j)_{j=1,2 \ldots n}$, com $A_j = \{i \in I, x_i \in N_j\}$.

Ainda tem-se $Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} N_j$ e $A_j \notin U$. Então $\bigcap_{j=1}^{n} A_j^c \in U$, mas:

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j^c = \bigcap_{j=1}^{n} \{ \ i \in I, \, x_i \notin N_j \ \} = \{ \ i \in I, \, x_i \notin \bigcup_{j=1}^{n} N_j \ \}.$$

Como:

$$\{ \ i \in I, \, x_i \notin Y \ \} \supseteq \{ \ i \in I, \, x_i \notin \bigcup_{j=1}^{n} N_j \ \} \in U,$$

o conjunto $\{ \ i \in I, \, x_i \notin Y \ \}$ pertence a U, o que pela Proposição 3.6 é um absurdo. Portanto, $\lim_U x_i = y$ para algum $y \in Y$. □

No caso específico de $I = \mathbb{N}$ há uma relação entre a convergência usual de sequências e convergência sobre o ultrafiltro:

Corolário 3.4. *Sejam U é ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ e X um espaço topológico de Hausdorff. Se a sequência (x_k) converge para x em X então (x_k) converge sobre U em X. E mais, se U é não trivial então $\lim_U(x_k) = x$.*

Demonstração. Se (x_k) converge para x então $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\} \cup \{x\}$ é um conjunto compacto. Pela Proposição 3.11, existe $\lim_U(x_k)$. Supondo por absurdo que $\lim_U(x_k) = y \neq x$, como X é Hausdorff, existe vizinhança V de y com $x \notin V$. Como (x_k) converge para x, o conjunto $\{ \ k \in \mathbb{N}, \, x_k \in V \ \}$ é finito, e como, por hipótese, $\lim_U(x_k) = y$, tal conjunto está em U, uma contradição já que por ser não trivial, não contém nenhum conjunto finito.

□

A recíproca do corolário anterior existe no seguinte sentido:

Corolário 3.5. *Se U é ultrafiltro em $\mathbb{N}$ e X é um espaço de Hausdorff compacto, então dada uma sequência (x_n) em X existe $\lim_U(x_i) = x$ e $\lim_U(x_i)$ é um ponto aderente da sequência.*

Demonstração. A existência de $\lim_U(x_i)$ está assegurada pela Proposição 3.11. Seja x em X tal que $\lim_U(x_i) = x$. Então pela Definição 3.9, dada V vizinhança de x:

$$\{ \ k \in \mathbb{N}, \, x_k \in V \ \} \in U.$$

Como U é ultrafiltro, $\{ \ k \in \mathbb{N}, \, x_k \in V \ \} \neq \emptyset$, logo para toda vizinhança V de x existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$, logo x é ponto aderente de (x_n).

□

Dessa maneira uma sequência não convergente em um espaço de Hausdorff compacto possuirá limite sobre o ultrafiltro:

Exemplo 3.7. *Seja K = [-1,1] o intervalo unitário fechado com a topologia usual. X é um espaço topológico de Hausdorff compacto, então se considerarmos um ultrafiltro U em* $\mathbb{N}$, $\lim_U(x_n)$ *existe para qualquer sequência (x_n) em K. Considere a sequência*

$$(x_k) = \begin{cases} 1, \text{ se } k \text{ é par} \\ -1, \text{ se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

A sequência (x_k) não converge na topologia usual, mas $\lim_U(x_k) = 1$ *, se o conjunto dos pares está no ultrafiltro, ou -1 se o conjunto dos ímpares está no ultrafiltro, necessariamente uma das duas opções ocorre.*

3.4 OPERAÇÕES COM LIMITES

Nessa seção apresentam-se alguns resultados, de certa forma até intuitivos, acerca de limites sobre ultrafiltros:

Proposição 3.12. *Sejam $(a_i)_{i\in I}$ $(b_i)_{i\in I}$ famílias em* $\mathbb{R}$*, indexadas no conjunto I sobre o qual está definido o ulrafilto U. Se o conjunto $\{ \ i \in I, \ a_i \leq b_i \ \}$ pertence a U e existem os limites* $\lim_U(a_i) = a$ *e* $\lim_U(b_i) = b$*, então $a \leq b$. Em particular se $a_i \leq b_i$ para todo i, $a \leq b$.*

Demonstração. Supondo por absurdo que $a > b$, então existe $\epsilon > 0$ tal que as bolas $B_a(\epsilon)$ e $B_b(\epsilon)$ são disjuntas. Então os conjuntos $\{ \ i \in I, \ a_i \in B_a(\epsilon) \ \}$ e $\{ \ i \in I, \ b_i \in B_b(\epsilon) \ \}$ que pertencem a U verificam:

$$\{ \ i \in I, \ a_i \in B_a(\epsilon) \ \} \cap \{ \ i \in I, \ b_i \in B_b(\epsilon) \ \} \subseteq \{ \ i \in I, \ a_i \leq b_i \ \}^c.$$

Logo $\{ \ i \in I, \ a_i \leq b_i \ \} \notin U$, contradição.

□

Proposição 3.13. *Sejam U um ultrafiltro em I, (a_i) e (b_i) famílias em* $\mathbb{R}$ *indexadas em I com* $\lim_U(a_i) = a$ *e* $\lim_U(b_i) = b$*. Então* $\lim_U(a_ib_i) = ab$.

Demonstração. Dado um número real $\epsilon > 0$ arbitrário. Como $\lim_U(a_i) = a$, existe $I' \in U$ tal que $\sup_{\{i\in I'\}} a_i < \infty$. Tome $M > \max\{\sup_{\{i\in I'\}} a_i, \ b\}$ e considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{i \in I, \ |a_ib_i - ab| < \epsilon\}, \\ I_2 &= \{i \in I, \ |a_i - a| < \frac{\epsilon}{2M}\}, \\ I_3 &= \{i \in I, \ |b_i - b| < \frac{\epsilon}{2M}\}. \end{aligned}$$

Tais conjuntos verificam as relações: I_2, $I_3 \in U$ (pela definição de limite sobre o ultrafiltro). Logo, I_2', $I_3' \in U$, onde $I_2' = I_2 \cap I'$ e $I_3' = I_3 \cap I'$. Como para todo i:

$$|a_ib_i - ab| \leq |a_i|\,|b_i - b| + |b|\,|a_i - a|,$$

segue que $I_1 \supseteq I_2' \cap I_3' \in$ U. Logo $I_1 \in U$ e $\lim_U(a_ib_i) = ab$.

□

Proposição 3.14. *Seja $(a_i)_{i\in I}$ uma família em $\mathbb{R}$ indexada no conjunto I sobre o qual está definido o ulrafilto U. Se* $\lim_U(a_i) = a$*, então* $\lim_U |a_i| = |a|$.

Demonstração. Se $\lim_U a_i = a$, então para $\epsilon > 0$ arbitrério:

$$I_1 = \{\ i \in I;\ |a_i - a| < \epsilon\} \in U.$$

Como $||a_i| - |a|| \leq |a_i - a|$, o conjunto:

$$I_2 = \{\ i \in I;\ ||a_i| - |a|| < \epsilon\}$$

verifica $I_2 \subseteq I_1$, portanto $I_2 \in U$ e como ϵ é arbitrário segue que $\lim_U |a_i| = |a|$. □

Proposição 3.15. *Sejam I um conjunto arbitrário e U um ultrafiltro em I. Se $(a_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{K}$ é tal que existe* $\lim_U a_i$*, então* $|\lim_U a_i| = \lim_U |a_i|$

Demonstração. Precisa-se mostrar que dado $\epsilon > 0$, o conjunto:

$$\{i \in I, ||\lim_U a_i| - |a_i|| < \epsilon\}$$

pertence ao ultrafiltro. Para tal, basta observar que para todos x, $y \in \mathbb{K}$ vale

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Logo,

$$\{i \in I, ||\lim_U a_i| - |a_i|| < \epsilon\} \supset \{i \in I, |\lim_U a_i - a_i| < \epsilon\} \in U,$$

portanto $|\lim_U a_i| = \lim_U |a_i|$.

□

Proposição 3.16. *Se X é um espaço vetorial topológico e (x_i) (y_i) são famílias em X indexadas em I com* $\lim_U(x_i) = x$ *e* $\lim_U(y_i) = y$*, então:*

(i) $\lim_U(x_i + y_i) = x + y$.

(ii) $\lim_U(\lambda x_i) = \lambda x$.

Demonstração. Seja N uma vizinhança de 0 em X. Existe uma vizinhança V de 0 tal que $V + V \subseteq N$, e uma vizinhança W de 0 com $\lambda \mathrm{W} \subseteq N$ (confira Rudin (1973) página 7). Então os conjuntos:

$$I_1 = \{\ i \in I,\ (x_i) + (y_i) \text{ - } (x + y) \in N\},$$

$$I_2 = \{\ i \in I,\ (x_i) \text{ - } x \in V\} \in U, \text{ pois } \lim_U(x_i) = x,$$

$$I_3 = \{\ i \in I,\ (y_i) \text{ - } y \in V\} \in U, \text{ pois } \lim_U(y_i) = y,$$

são tais que $I_1 \supseteq (I_2 \cap I_3)$. Logo, $I_1 \in U$ e $\lim_U(x_i) + (y_i) = x + y$.

Da mesma maneira, os conjuntos:

$$I_4 = \{\ i \in I,\ (\lambda x_i) \text{ - } \lambda x \in N\} \text{ e}$$

$$I_5 = \{\ i \in I,\ (x_i) \text{ - } x \in W\} \in U, \text{ pois } \lim_U(x_i) = x,$$

são tais que $I_4 \supseteq I_5$, logo $I_4 \in U$ e $\lim_U(\lambda x_i) = \lambda x$.

$\square$

4 ULTRAPRODUTOS DE ESPAÇOS DE BANACH

Este capítulo destina-se a construção e caracterização de ultraprodutos de espaços de Banach. Divide-se em três seções que se referem a definição e construção de espaços de Banach via ultraprodutos, a discussão de características estruturais acerca dos ultraprodutos e por fim uma seção dedicada a utilização de ultraprodutos iterados.

4.1 CONSTRUÇÃO DE ULTRAPRODUTOS

Uma vez estabelecida a teoria de limites sobre ultrafiltros, a meta passa a ser então utilizar os resultados obtidos para definir espaços de Banach. O método que será apresentado possui uma analogia com o completamento de um espaço métrico. O completamento $\tilde{X}$ de um espaço métrico X é um espaço definido a partir de uma relação de equivalência no conjunto das sequências de Cauchy em X, no qual existe um subconjunto denso Y que é homeomorfo a X. Agora, deseja-se, a partir de um espaço de Banach Y, definir um espaço de Banach que contenha um subespaço isometricamente isomorfo ao inicial. Tal objetivo é atingido, salvo algumas restrições, considerando-se ao invés de de sequências o limite de famílias sobre o ultrafiltro.

Definição 4.1 (Produto cartesiano). *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos. O produto cartesiano $\prod_{i\in I} A_i$ definido pela família $(A_i)_{i\in I}$ é o conjunto das funções $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tais que $f(i) \in A_i$. Denotamos $a \in \prod_{i\in I} A_i$ por $(a_i)_{i\in I}$.*

O ultraproduto será definido a partir do conjunto das famílias do produto cartesiano cujos elementos têm norma limitada:

Definição 4.2. *Dada $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach, considere o conjunto:*

$$l_\infty(I, X_i) = \{\ (x_i) \in \textstyle\prod_{i\in I} X_i\ ,\ \sup_{\{i\in I\}} \|(x_i)\| < \infty\ \}.$$

Os conjuntos $\prod_{i\in I} X_i$ e $l_\infty(I, X_i)$ possuem uma estrutura natural de espaço vetorial através das operações:

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$
$$a.(x_i) = (a.x_i).$$

Proposição 4.1. *O conjunto $l_\infty(I, X_i)$, com a norma $\|(x_i)\|_\infty = \sup_{i\in I} \|x_i\|$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Assumiremos que $\|(x_i)\|_\infty = \sup_{\{i\in I\}} \|x_i\|$ é uma norma. Seja então uma sequência de Cauchy $((x_i^k)_{i\in I})_{k\in\mathbb{N}}$ em $l_\infty(I, X_i)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para n, $m \geq n_0$, $\|(x_i^m) - (x_i^n)\|_\infty < \epsilon$, ou seja, $\sup_{\{i\in I\}} \|x_i^m - x_i^n\| < \epsilon$.

Portanto, $\|x_i^m - x_i^n\| < \epsilon$ para todo i. Logo a sequência $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X_i. Como X_i é Banach, existe y_i em X_i tal que $\lim_{k\to\infty} x_i^k = y_i$. Afirmamos que a família $(y_i)_{i\in I}$ assim construída é tal que $\lim_{k\to\infty}(x_i^k)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$ em $l_\infty(I, X_i)$.

Para verificar que $(y_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i)$, suponha por absurdo que $\sup_{\{i\in I\}} \|y_i\| = \infty$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, $\exists\ i_n \in I$ tal que $\|y_{i_n}\| > n$. Logo, como $(x_{i_n}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para (y_{i_n}), existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|x_{i_n}^{k_n}\right\| > n - 1$. Logo $\left\|(x_i^{k_n})_{i\in I}\right\|_\infty = \sup_{\{i\in I\}} \left\|x_i^{k_n}\right\| > n - 1$. Portanto a sequência $((x_i^k)_{i\in I})_{k\in\mathbb{N}}$ é ilimitada em $l_\infty(I, X_i)$, logo não pode ser de Cauchy.

Para provar que $\lim_{k\to\infty}(x_i^k)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$ em $l_\infty(I, X_i)$, seja $\epsilon > 0$. Como $(x_i)^k$ é de Cauchy , existe n_0, tal que para m, $n \geq n_0$ $\sup_{i\in I} \|x_i^m - x_i^n\| < \dfrac{\epsilon}{2}$, então:

$$\|x_i^m - x_i^n\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } i.$$

Agora, fixado i, existe $n_i > n_0$, tal que $\|x_i^{n_i} - y_i\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Logo, se $n > n_0$, tem-se que:

$$\|x_i^{n_i} - x_i^n\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \|x_i^{n_i} - y_i\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, $\|y_i - x_i^n\| \leq \|y_i - x_i^{n_i}\| + \|x_i^{n_i} - x_i^n\| < \epsilon$.

Como i é arbitrário conclui-se que $\sup_{i\in I} \|x_i^n - y_i\| < \epsilon$, ou seja, $\|(x_i^n) - (y_i)\|_\infty < \epsilon$ para $n > n_0$, pela definição usual de convergência de sequências: $\lim_{k\to\infty}(x_i^k)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$.

□

Se U é ultrafiltro em I e $(\|x_i\|)_{i\in I}$ é uma família de reais limitada, pela Proposição 3.11, existe $\lim_U \|x_i\|$. Logo pode-se definir o conjunto:

$$N_U = \{(x_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i)\ ,\ \lim_U \|(x_i)\| = 0\ \}.$$

Proposição 4.2. *N_U é um subespaço fechado de $l_\infty(I, X_i)$.*

Demonstração. O fato de N_U ser um subespaço decorre da Proposição 3.16. Para provar que N_U é fechado em $l_\infty(I, X_i)$, seja (x_i^1), (x_i^2),...(x_i^k)... uma sequência de famílias em N_U convergente para (x_i) em $l_\infty(I, X_i)$.

Suponha por absurdo que $(x_i) \notin N_U$, $\lim_U \|x_i\| = r > 0$. Por hipótese,

$$\sup_{\{i\in I\}} \left\|x_i^k - x_i\right\| \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Então $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n > n_0$, então $\|x_i^n - x_i\| < \frac{r}{4}$ para todo i. Tome $n_1 > n_0$. Tem-se a relação:

$$|\|x_i^{n_1}\| - \|x_i\|| \leq \|x_i^{n_1} - x_i\| < \tfrac{r}{4}.$$

Como $lim_U \|x_i\| = 0$, segue que

$$I_1 = \{i \in I,\ |\|x_i\| - r| < \tfrac{r}{4}\} \in U.$$

Logo para $i \in I_1$:

$$|\|x_i^{n_1}\| - r| < \tfrac{r}{2}.$$

Pela hipótese, $\lim_U \|(x_i^{n_1})\| = 0$. Então o conjunto

$$I_2 = \{i \in I,\ \|x_i^{n_1}\| < \tfrac{r}{2}\}$$

pertence ao ultrafiltro. Logo, para $i \in I_1 \cap I_2$:

$$|\|x_i^{n_1}\| - r| < \tfrac{r}{2} \text{ e } \|x_i^{n_1}\| < \tfrac{r}{2},$$

isso é um absurdo. Logo $\lim_U \|x_i\| = 0$ e N_U é um subespaço fechado.

$\square$

Definição 4.3 (Ultraproduto de uma família de espaços de Banach)**.** *O ultraproduto $(X_i)_U$ da família de espaços de Banach $(X_i)_{i\in I}$ com respeito ao ultrafiltro U sobre um conjunto I é o espaço quociente $l_\infty(I, X_i)/N_U$ equipado com a norma quociente:*

$$\|[(x_i)]\| = \inf_{(y_i)\in N_U}\{\|(x_i) - (y_i)\|_\infty\}.$$

Será utilizada a notação $(x_i)_U$ para $[(x_i)]$. No caso de $X_i = X$ para todo i, denota-se $(X_i)_U$ por $(X)_U$, sendo o ultraproduto também chamado ultrapotência de X.

Lema 4.1. *Se $(y_i) \in N_U$ e $(x_i) \in l_\infty(I, X_i)$ então:*

$$\lim_U \|y_i + x_i\| = \lim_U \|x_i\|.$$

Demonstração. Escrevendo $\lim_U \|x_i\| = r$, dado $\epsilon > 0$ arbitrário é possível definir o conjunto $I_\epsilon = \{\ i \in I,\ |\|x_i\| - r| < \epsilon\}$. Pela definição de limite sobre o ultrafiltro, $I_\epsilon \in U$, se $|\|x_i\| - r| < \frac{\epsilon}{2}$ e $\|y_i\| < \frac{\epsilon}{2}$ então $|\|y_i + x_i\| - r| < \epsilon$. Logo os conjuntos pertencem ao ultrafiltro:

$I_\epsilon^{'} = \{i \in I,\ |\|y_i + x_i\| - r| < \epsilon\} \in U,$

$I_\epsilon^{''} = \{i \in \text{I},\ \|y_i\| < \epsilon\} \in U.$

Tais conjuntos verificam $I_\epsilon^{'} \supseteq I_{\frac{\epsilon}{2}}^{''} \cap I_{\frac{\epsilon}{2}}$, logo $I_\epsilon^{'} \in U$. Como ϵ é arbitrário, pela Proposição 3.9, $\lim_U \parallel y_i + x_i \parallel = r = \lim_U \parallel x_i \parallel$.

□

Proposição 4.3. *Se a família $(x_i)_{i\in I} \in l_\infty(I, X_i)$ é representante de $(x_i)_U \in (X_i)_U$, então:*

$$\|(x_i)_U\| = \lim_U \|(x_i)\|.$$

Demonstração. Pela Definição 4.3, $\|(x_i)_U\| = \inf_{\{(y_i)\in N_U\}} \sup_{i\in I} \|x_i - y_i\|$.

Se $(y_i) \in N_U$ e assumindo $\lim_U \parallel x_i \parallel = r$, então dado $\epsilon > 0$ arbitrário, seja $I_\epsilon^{'}$ como definido na demonstração do Lema 4.1. Para $i \in I_\epsilon^{'}$, $\|x_i + y_i\| \geq r$ - ϵ. Então:

$$\sup_{\{i\in I\}} \|x_i + y_i\| \geq \sup_{\{i\in I_\epsilon^{'}\}} \|x_i + y_i\| \geq r \text{ - } \epsilon.$$

Como (y_i) e ϵ são arbitrários:

$$\inf_{\{(y_i)\in N_U\}} \sup_{\{i\in I\}} \|x_i + y_i\| \geq r.$$

Mas como N_U é um espaço vetorial, também vale a igualdade:

$$\inf_{\{(y_i)\in N_U\}} \sup_{\{i\in I\}} \|x_i - y_i\| = \inf_{\{(y_i)\in N_U\}} \sup_{\{i\in I\}} \|x_i + y_i\|.$$

De maneira que:

$$\|(x_i)_U\| = \inf_{\{(y_i)\in N_U\}} \sup_{\{i\in I\}} \|x_i - y_i\| \geq \text{r} = \lim_U \|x_i\|.$$

Para estabelecer a desigualdade oposta, dado $\epsilon > 0$, o conjunto

$$I_\epsilon^{'''} = \{\ i \in I, |\|x_i\| - r| < \epsilon\ \}$$

pertence ao ultrafiltro, já que $\lim_U \|x_i\| = r$. Defina a família $(y_i) \in N_U$ por:

$$(y_i) = \begin{cases} 0, \text{ se } i \in I_\epsilon^{'''} \\ x_i, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A fim de verificar que $(y_i) \in N_U$, seja $\epsilon_1 > 0$. Então:

$$\{i \in I, \|y_i\| < \epsilon_1\} \supseteq I_\epsilon^{'''} \in U.$$

Dessa maneira:

$$\sup_{\{i\in I\}} \|x_i - y_i\| = \sup_{\{i\in I_\epsilon^{'''}\}} \|x_i\| \leq r + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário:

$$\inf_{\{(y_i)\in N_U\}} \sup_{\{i\in I\}} \|x_i - y_i\| \leq r = \lim_U \|x_i\|.$$

Portanto

$$\|(x_i)_U\| = \lim_U \|x_i\|.$$

□

Um fato extremamente útil é que sempre é possível tomar como representante de um elemento do ultraproduto uma família em que cada membro tem a norma limitada pela norma do elemento inicial no ultraproduto:

Proposição 4.4. *Sejam U um ultrafiltro sobre um conjunto I arbitrário e $(X_i)_{i\in I}$ uma família espaços de Banach. Se $(x_i)_U \in (X_i)_U$ e $\|(x_i)_U\| < b$, então existe uma família $(y_i) \in l_\infty(I, X_i)$ com $\|y_i\| < b$ e $(y_i)_U = (x_i)_U$.*

Demonstração. Sejam $(x_i)_U \in (X_i)_U$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\|(x_i)_U\| < b$. Então, tomando (y_i) representante de $(x_i)_U$, y_i verifica $\lim_U \|y_i\| < b$ (Proposição 4.3). Logo:

$$I_1 = \{i \in I;\ \|y_i\| < b\} \in U.$$

Basta definir $z_i \in l_\infty(I, X_i)$, como:

$$z_i = \begin{cases} y_i, \text{ se } i \in \mathrm{I}_1 \\ 0, \text{ se } i \notin \mathrm{I}_1. \end{cases}$$

Então $\lim_U \|y_i - z_i\| = 0$, logo $(y_i)_U = (z_i)_U = (x_i)_U$ e $\|z_i\| < b$ para todo i.

□

4.2 ESTRUTURA DE ULTRAPRODUTOS

Com algumas hipóteses sobre os espaços X_i é possível controlar algumas características do espaço $(X_i)_U$. Nessa seção são apresentadas algumas dessas relações que complementam o Capítulo 5. As Proposições 4.5, 4.6 4.7 foram extraídas de Diestel, Jarchow e Tonge (1995) página 170.

Proposição 4.5. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo, então para quaisquer conjunto de índices I e ultraproduto U em I, a ultrapotência $(\mathbb{K})_U$ é isometricamente isomorfa a $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Defina a aplicação $\varphi\colon l_\infty(I, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dada por $\varphi((x_i)) = \lim_U x_i$. A Proposição 3.11 garante que a aplicação está bem definida, a Proposição 3.16 estabelece a linearidade da aplicação, que também é claramente sobrejetiva. Tem-se ainda que o núcleo de φ é N_U, pelo Teorema do Isomorfismo (por exemplo Hungerford (2003) página 172), existe uma bijeção linear $\tilde{\varphi}$: $l_\infty(I,\mathbb{K})/N_U = (\mathbb{K})_U \to \mathbb{K}$ ($\tilde{\varphi}((x_i)_U) = \lim_U x_i$). Portanto, dimensão de $(\mathbb{K})_U$ é 1. Para verificar que $\tilde{\varphi}$ é isometria, basta observar que:

$$\|(x_i)_U\| = \lim_U \|(x_i)\| = \tilde{\varphi}((\mathrm{x}_i)_U).$$

□

Proposição 4.6. *Se I é um conjunto de índices arbitrário, n é um número natural e $(X_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços de Banach de dimensão n, então para todo ultrafiltro U em I, $(X_i)_U$ é n-dimensional.*

Demonstração. Basta tomar para cada espaço X_i uma base $\{\ x_i^1,\ x_i^2,...\ x_i^n\ \}$ com as propriedades:

$$\left\|x_i^k\right\| = 1 \text{ e } dist(x_i^k, < x_i^1,\ x_i^2,...x_i^{k-1} >) \geq \tfrac{1}{2}.$$

Para construir tal base basta aplicar n vezes o Lema 2.1 tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ e os subespaços $Y = < x_i^1, x_i^2,...x_i^{k-1} >$. Dessa maneira demonstra-se que o conjunto de vetores $\{\ (x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U,...\ (x_i^n)_U\ \}$ é uma base em $(X_i)_U$.

Primeiramente verifica-se que de fato são n vetores distintos em $(X_i)_U$. Se $k \neq l$, então

$$\left\|(x_i^k)_U - (x_i^l)_U\right\| = \lim_U \left\|x_i^k - x_i^l\right\| > \tfrac{1}{2}.$$

Portanto os vetores são distintos.

Para mostrar que geram $(X_i)_U$, seja $(x_i)_U$ elemento de $(X_i)_U$. Para todo i, como $\{\ x_i^1,\ x_i^2,...\ x_i^n\ \}$ é uma base em X_i,

$$x_i = a_i^1 x_i^1 + a_i^2 x_i^2 + ... + a_i^n x_i^n.$$

Para $k = 1,...n$, a família de escalares $(a_i^k)_{i\in I}$ é limitada. De fato, suponha por absurdo que $(a_i^k)_{i\in I}$ seja ilimitada. Então existem p entre 1 e n e uma sequência de índices $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em I tais que $\left|a_{i_k}^p\right| > k$. Suponha também, sem perda de generalidade, que exista $M > 0$ tal que $\left|a_{i_k}^q\right| < M$ para $p \leq q \leq n$ e todo i_k. Logo:

$$\|x_i\| = \|a_i^1 x_i^1 + a_i^2 x_i^2 + ... + a_i^p x_i^p + ... + a_i^n x_i^n\| \geq$$
$$\geq \|a_i^1 x_i^1 + ... + a_i^p x_i^p\| - \left\|-a_i^{p+1} x_i^{p+1} - ... - a_i^n x_i^n\right\| \geq$$
$$\geq \left\|\tfrac{a_i^p}{2}\right\| - \left\|-a_i^{p+1} x_i^{p+1} - ... - a_i^n x_i^n\right\| \geq$$
$$\geq \left\|\tfrac{a_i^p}{2}\right\| - \|n.M\|.$$

Portanto, como $(a^p_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, segue que $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é ilimitada, o que é uma contradição, uma vez que $(x_i)_U \in (X_i)_U$. Dessa maneira, $(a^k_i)_{i\in I}$ representa um elemento em $(\mathbb{K})_U$, onde $\mathbb{K}$ é o corpo sobre o qual os espaços estão definidos. Seja a^k a imagem de $(a^k_i)_U$ em $\mathbb{K}$ pela aplicação definida na demonstração da Proposição 4.5. Afirmamos que $(x_i)_U = a^1(x^1_i)_U + a^2(x^2_i)_U + ... + a^n(x^n_i)_U$. Ou seja:

$$\lim_U \left\| \sum_{k=1}^n a^k_i x^k_i - \sum_{k=1}^n a^k x^k_i \right\| = 0.$$

Mas:

$$\lim_U \left\| \sum_{k=1}^n a^k_i x^k_i - \sum_{k=1}^n a^k x^k_i \right\| = \lim_U \left\| \sum_{k=1}^n (a^k_i - a^k) x^k_i \right\| \text{ e}$$
$$\lim_U \sum_{k=1}^n \left\| (a^k_i - a^k) x^k_i \right\| = \lim_U \sum_{k=1}^n \left| (a^k_i - a^k) \right| \left\| x^k_i \right\| = 0.$$

Como

$$\lim_U \left\| \sum_{k=1}^n (a^k_i - a^k) x^k_i \right\| \leq \lim_U \sum_{k=1}^n \left\| (a^k_i - a^k) x^k_i \right\|,$$

chega-se à igualdade desejada.

Para demonstrar que os vetores são linearmente independentes, suponha por absurdo que existam escalares a^k em $\mathbb{K}$ tais que $\sum_{k=1}^n a^k (x^k_i)_U = 0$. Então:

$$\lim_U \left\| \sum_{k=1}^n a^k x^k_i \right\| = 0.$$

Seja $m = max\ \{\ 1 \leq k \leq n,\ a^k \neq 0\ \}$. Tem-se que:

$$\lim_U \left\| a^m x^k_i + \sum_{k=1}^{m-1} a^k x^k_i \right\| = 0.$$

Então existe $j \in I$ tal que $\left\| a^m x^k_j + \sum_{k=1}^{m-1} a^k x^k_j \right\| \leq \frac{|a^m|}{2}$, um absurdo, já que por hipótese $dist(x^m_j, < x^1_j,\ x^2_j, ...x^{m-1}_j >) > \frac{1}{2}$.

□

A Proposição 4.5 é um caso específico da Proposição 4.6, mas na realidade foi utilizada na demonstração da segunda.

Proposição 4.7. *Se $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de espaços de Banach com $dim\{X_k\} \geq k$, e U é um ultrafiltro não trivial sobre $\mathbb{N}$ então o ultraproduto $(X_k)_U$ não é separável.*

Demonstração. A prova consiste em definir, em cada X_k, um conjunto de k vetores tais que seja possível de combiná-los em uma quantidade não-enumerável de vezes construindo vetores equidistantes em $(X_k)_U$.

Primeiramente é preciso definir uma quantidade não enumerável de bijeções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Considerando inicialmente o conjunto:

$$B = \{\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) \leq n\},$$

é possível definir uma coleção S de subconjuntos de B da seguinte maneira:

$$L \in S \iff f \text{ e } g \in L \text{ então } f(n) = g(n) \text{ apenas um número finito de vezes.}$$

A relação de continência gera uma ordenação parcial em S. Desejamos mostrar que toda cadeia $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ em S possui um elemento maximal a fim de aplicar o Lema de Zorn (Hungerford (2003) página 13). Para isso, seja uma cadeia $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ em S, prova-se que $\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha$ é um elemento maximal para a cadeia L_α em S. Evidentemente $\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha \supseteq L_\alpha$ para todo α, resta provar que $\bigcup_\alpha L_\alpha$ está em S. Sejam f e g em $\bigcup_\alpha L_\alpha$, então existem elementos L_{α_1} e L_{α_2} na cadeia com $f \in L_{\alpha_1}$, $g \in L_{\alpha_2}$. Sendo uma cadeia, $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ é totalmene ordenada. Pode-se supor então, sem perda de generalidade, que $L_{\alpha_1} \supseteq L_{\alpha_2}$, logo f e $g \in L_{\alpha_2}$ que por sua vez está em S. Então $f(n) = g(n)$ apenas um número finito de vezes, conclui-se que $\bigcup_{\ \alpha} L_\alpha$ está em S.

Pelo Lema de Zorn, S possui um elemento maximal L_0. Além disso, L_0 é não-enumerável. De fato, supondo por absurdo que L_0 seja enumerável, $L_0 = \{f_1,\ f_2, \ldots\ \}$. É possível então construir uma função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte maneira:

$$g(k) = \begin{cases} g(1) = f_1(1) \\ g(2) \in \{1, 2\} \setminus \{f_1(2)\} \\ \vdots \\ g(n) \in \{1, 2, \ldots n\} \setminus \{f_1(n),\ f_2(n), \ldots f_{n-1}(n)\} \\ \vdots \end{cases}$$

Sendo g definida dessa forma, tem-se que: $\{g\} \notin L_0$ e $\{g\} \cup L_0 \in S$, contrariando a maximalidade de L_0. Portanto, L_0 não é enumerável.

A partir de L_0, é definida uma família não-enumerável de vetores em $(X_k)_U$ equidistantes. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $\{x_k^1,\ x_k^2\ \ldots\ x_k^k\}$ um subconjunto de X_k com $\|x_k^n\| = 1$ para todos n e k, $\|x_k^n - x_k^m\| > \frac{1}{2}$ se $m \neq n$ (assim como na demonstração da Proposição 4.6). Então para cada f em L_0 defini-se o vetor $(y_k^f)_U \in (X_k)_U$ com $y_k^f = x_k^{f(k)}$. Se f e g são funções distintas em L_0, então o conjunto:

$$\{k \in \mathbb{N},\ \left\| y_k^{f(k)} - y_k^{g(k)} \right\| > \tfrac{1}{2}\}^c$$

é finito. Logo como U é não trivial, pela Proposição 3.12:

$$\left\| (y_k^f)_U - (y_k^g)_U \right\| > \tfrac{1}{2}.$$

Então existe uma quantidade não-enumerável de vetores em $(X_k)_U$ cujas distâncias dois a dois são maiores que $\frac{1}{2}$, logo $(X_k)_U$ não é separável.

□

Outra relação, de certa forma intuitiva, existe quando se considera ultraprodutos e espaços quocientes, mas primeiro é necessário mostrar que o ultraproduto de um subespaço é um subespaço do ultraproduto do espaço original:

Lema 4.2. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço fechado de X. Para todo ultrafiltro U, $(Y)_U$ é isometricamente isomorfo a um subespaço de $(X)_U$.*

Demonstração. Basta considerar a aplicação $J : (\mathrm{Y})_U \to (\mathrm{X})_U$ dada pela inclusão, uma vez que se $(y_i) \in (\mathrm{Y})_U$ então $(y_i) \in (\mathrm{X})_U$. A boa definição e a linearidade da aplicação, bem como o fato de ser uma isometria, são de verificações triviais. Logo, $J((\mathrm{Y})_U)$ é um subespaço fechado de $(\mathrm{X})_U$. □

Dessa maneira, $(\mathrm{Y})_U$ pode ser identificado como um subespaço fechado de $(\mathrm{X})_U$ e faz sentido enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.8. *Seja Y subespaço fechado do espaço de Banach X. Para todo ultrafiltro U, $(X/Y)_U \cong (X)_U/(Y)_U$.*

Demonstração. A isometria considerada é φ: $(X/Y)_U \to (X)_U/(\mathrm{Y})_U$, dada pela relação: $\varphi(([x]_i)_U) = [(x_i)_U]$.

Uma vez que $(Y)_U$ pode ser considerado um subespaço fechado através da identificação indicada no Lema 4.2, pode-se definir $(X)_U/(Y)_U$.

Para verificar a boa definição de φ, sejam $(a_i)_U$, $(b_i)_U$ elementos de $(X/Y)_U$, com $([a_i])_U = ([b_i])_U$. Logo a_i, $b_i \in X/Y$ e $\lim_U \|[a_i] - [b_i]\| = \lim_U dist(a_i - b_i, Y) = 0$. Então dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno:

$$I_1 = \{\ i \in I,\ dist(a_i - b_i, Y) < \epsilon\}.$$

Então é possível estabelecer uma família $(y_i)_{i \in I_1}$ com $y_i \in Y$ e $\|(a_i - b_i) - y_i)\| < \epsilon$. Defina $(z_i)_U \in (Y_i)_U$ como:

$$z_i = \begin{cases} y_i, \text{ se } i \in I_1 \\ 0, \text{ se } i \notin I_1 \end{cases}$$

Dessa maneira $\|(a_i)_U - (b_i)_U - (z_i)_U\| < \epsilon$, como ϵ é arbitrariamente pequeno, segue que $dist((a_i)_U - (b_i)_U, (Y_i)_U) = 0$, então $[(a_i)_U] = [(b_i)_U]$ e φ está bem definida.

Para verificar que é isometria, seja $([x_i])_U \in (X/Y)_U$. Então:

$$\|([x_i])_U\| = \lim_U \|[x_i]\| = \lim_U dist(x_i, Y) = \lim_U \inf_{y \in Y} \|x_i - y\| \text{ e}$$

$$\|[(x_i)_U]\| = dist((x_i)_U, (Y)_U) = \inf_{(y_i)_U \in (Y)_U} \lim_U \|x_i - y_i\|.$$

Supondo por absurdo que $\|([x_i])_U\| > \|[(x_i)_U]\|$ então

$$\lim_U \inf_{y\in Y} \|x_i - y\| > \inf_{(y_i)_U\in(Y)_U} \lim_U \|x_i - y_i\|.$$

Logo existe $(z_i)_U \in (Y)_U$ tal que

$$\lim_U \inf_{y\in Y} \|x_i - y\| > \lim_U \|x_i - z_i\|.$$

Isso é absurdo pois para todo i vale:

$$\inf_{y\in Y} \|x_i - y\| \leq \|x_i - z_i\|.$$

Agora supondo $\|([x_i])_U\| < \|[(x_i)_U]\|$, vale a desigualdade:

$$\lim_U \inf_{y\in Y} \|x_i - y\| < \inf_{(y_i)_U\in(Y)_U} \lim_U \|x_i - y_i\|,$$

o que implica que o seguinte conjunto pertence ao ultrafiltro U:

$$I_1 = \{i \in I;\, \inf_{y\in Y} \|x_i - y\| < \inf_{(y_i)_U\in(Y)_U} \lim_U \|x_i - y_i\|\}.$$

Pode-se definir, dessa maneira, uma família $(z_i)_{i\in I_1}$ com $z_i \in Y$, a qual verifica $\|x_i - z_i\| < \inf_{(y_i)_U\in(Y)_U} \lim_U \|x_i - y_i\|$. Definindo um elemento $(a_i)_U \in (Y)_U$ com:

$$a_i = \begin{cases} z_i, \text{ se } i \in I_1 \\ 0, \text{ se } i \notin I_1, \end{cases}$$

o elemento $(a_i)_U$ verifica a relação $\|(x_i)_U - (a_i)_U\| < \inf_{(y_i)_U\in(Y)_U} \lim_U \|x_i - y_i\|$, um absurdo. Portanto $\|([x_i])_U\| = \|[(x_i)_U]\|$ e a aplicação φ é isometria e logo injetora. A linearidade e sobrejetividade da aplicação são triviais. □

4.3 ULTRAPRODUTOS ITERADOS

Esta seção destina-se a demonstrar as possibilidades de utilização de ultraprodutos iterados como uma extensão natural da teoria de ultraprodutos já apresentada.

Definição 4.4 (Produto Cartesiano de Ultraprodutos)**.** *Sejam U e V ultrafiltros respectivamente nos conjuntos I e J. Defini-se o produto cartesiano dos ultrafiltros U e V, denotado por $U \times V$, como a família de subconjuntos $K \subseteq I \times J$ que verificam*

$$\{j \in J;\ \{i \in I\ ;\ (i, j) \in K\} \in U\} \in V.$$

Lema 4.3. *O conjunto $U \times V$ é um ultrafiltro em $I \times J$.*

Demonstração. Dado $K \subseteq I \times J$ define-se, para cada $j \in J$, $\pi_j(K) = \{i \in I;\ (i, j) \in K\}$. Sejam $K_1, K_2 \in U \times V$. Então:

$$J_1 = \{j \in J;\, \pi_j(K_1) \in U\} \in V,$$
$$J_2 = \{j \in J;\, \pi_j(K_2) \in U\} \in V.$$

Se $\pi_j(K_1)$, $\pi_j(K_2) \in U$, então:

$$\pi_j(K_1 \cap K_2) = \pi_j(K_1) \cap \pi_j(K_2) \in U$$

e tem-se as seguintes inclusões:

$$J_1 \cap J_2 \subseteq \{j \in J,\, \pi_j(K_1) \cap \pi_j(K_2) \in U\} = \{j \in J,\, \pi_j(K_1 \cap K_2) \in U\},$$

de maneira que:

$$\{j \in J,\, \pi_j(K_1 \cap K_2) \in U\} \in U.$$

Logo $K_1 \cap K_2 \in U \times V$. Se $K \in U \times V$ e $K \subseteq K' \subseteq I \times J$, então, segue que $\pi_j(K') \supseteq \pi_j(K) \in U$, logo:

$$\{j \in J;\, \pi_j(K\text{'}) \in U\} \supseteq \{j \in J;\, \pi_j(\mathrm{K}) \in U\} \in V.$$

Portanto K' $\in U \times V$. Se $I_0 \in U$ e $J_0 \in V$, então $I_0 \times J_0 \in U \times V$, logo $U \times V \neq \emptyset$ e consequentemente é um filtro. Para verificar que $U \times V$ é um ultrafiltro, seja K um subconjunto de $I \times J$ tal que $K \notin U \times V$. Segue que:

$$\{j \in J;\, \pi_j(K) \in U\} \notin V.$$

Dessa maneira:

$$\{j \in J;\, \pi_j(K) \notin U\} \in V.$$

Como

$$\pi_j(\mathrm{K}) \notin U \Leftrightarrow \pi_j(K^c) = \pi_j(\mathrm{K})^c \in U,$$

tem-se que:

$$\{j \in J;\, \pi_j(K^c) \in U\} \in V.$$

Portanto, $K^c \in U \times V$ e $U \times V$ é um ultrafiltro de acordo com a Proposição 3.6. $\square$

Proposição 4.9. *Sejam U e V ultrafiltros respectivamente nos conjuntos I e J e $(X_{ij})_{ij \in I \times J}$ uma família de espaços de Banach. Então:*

$$(X_{ij})_{U \times V} \cong ((X_{ij})_U)_V.$$

Demonstração. Seja $\widetilde{x} = (x_{ij})_{ij \in I \times J} \in l_\infty(I \times J, X_{ij})$. Para cada $j \in J$, $(x_{ij})_{i \in I} \in l_\infty(I, X_{ij})$. Então definindo $\pi_j(\widetilde{x}) = (x_{ij})_U \in (X_{ij})_U$, tem-se que $(\pi_j(\widetilde{x}))_{j \in J} \in l_\infty(J, (X_{ij})_U)$. Pode-se definir a aplicação:

$$\pi \colon l_\infty(I \times J, X_{ij}) \to ((X_{ij})_U)_V$$
$$\widetilde{x} \hookrightarrow (\pi_j(\widetilde{x}))_V.$$

A aplicação π é linear e também sobrejetora. De fato, dado $x \in ((\mathrm{X}_{ij})_U)_V$, então existe uma família $x_j \in (X_{ij})_U$ com $\|x_j\| \leq 2\|x\|$ para todo j em J e $x = (x_j)_U$. Da mesma forma, para cada j existe uma família x_{ij} tal que $x_j = (x_{ij})_U$ com x_{ij} em X_{ij} e verificando $\|x_{ij}\| \leq 2\|x_j\|$.

Assim sendo, $\widetilde{x} = (x_{ij})_{ij \in I \times J} \in l_\infty(I \times J, X_{ij})$, com $\|x_{ij}\| \leq 4\|x\|$ para todos i e j. Então $\pi(\widetilde{x}) = x$. Vejamos que

$$\|\pi(\widetilde{x})\| = \lim_{U \times V} \|x_{ij}\|.$$

Sejam $r = \lim_{U \times V} \|x_{ij}\|$ e $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. Então

$$K_\epsilon = \{(i,\, j) \in I \times J \colon |\|x_{ij}\| - r| < \epsilon\} \in U \times V,$$

$$J_0 = \{j \in J;\, \{I \in I;\, |\|x_{ij}\| - r| < \epsilon\} \in U\} = \{j \in J;\, \pi_j(\mathrm{K}_\epsilon) \in U\} \in V.$$

Para cada $j \in J_0 \in V$:

$$\{i \in I;\, |\|x_{ij}\| - r| < \epsilon\} \in U,$$

$$|\|\pi_j(\widetilde{x})\| - r| < \epsilon,\ \forall\, j \in J_0,$$

$$|\|\pi(\widetilde{x})\| - r| = |\lim_U \|\pi_j(\widetilde{x})\| - r| \leq \epsilon.$$

Portanto $\|\pi(\widetilde{x})\| = r$. Como consequência o núcleo da aplicação π é o elemento neutro de $(X_{ij})_{U \times V}$, para estabelecer a isometria desejada basta considerar a aplicação quociente $\widetilde{\pi}$ de π. □

Dessa forma fica demonstrado que o ultraproduto de um ultraproduto é novamente um ultraproduto. Segundo Sims (1982) página 103, a teoria de ultraprodutos iterados é utilizada na demonstração de importantes resultados citando duas proposições devidas a Stern (1978) as quais são reproduzidas a seguir:

Proposição 4.10 (Versão do Teorema do Isomorfismo de Keisler-Shelah para espaços de Banach)**.** *Sejam X um espaço de Banach e U e V ultrafiltros nos conjuntos I e J. Então existem um conjunto K e um ultrafiltro W em K tais que:*

$$(X)_{U\times W} \cong (X)_{V\times W}.$$

Proposição 4.11 (Versão do Teorema de Löwenheim-Skolem para espaços de Banach)**.** *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço de dimensão infinita de X. Então existem um subespaço Z e um ultrafiltro U com $Y \subseteq Z \subseteq X$ e dens(Y) = dens(Z) e $(Z)_U \cong (X)_U$ (onde dens(Y) é a menor cardinalidade possível para um conjunto denso em Y).*

5 ULTRAPRODUTOS E REPRESENTAÇÃO FINITA

O interesse neste capítulo é relacionar determinadas propriedades com os subespaços de dimensão finita, lançando mão, conjuntamente do conceito de representação finita. Primeiramente são analisadas relações entre propriedades locais do ultraproduto $(X_i)_U$ e dos espaços X_i que constituem a família. Dessa maneira torna-se viável demonstrar resultados de grande relevância, como por exemplo a Proposição 5.8, que estabelece a existência de um ultrafiltro para o qual a ultrapotência $(X)_U$ contém uma cópia do bidual X^{**}.

Iniciando com o conceito de ϵ-isomorfismo:

Definição 5.1 (ϵ-isomorfismo)**.** *Se ϵ é um número real positivo e X, Y são espaços de Banach, um operador $T : X \to Y$ é um ϵ-isomorfismo se T é um isomorfismo e ocorrem as duas desigualdades:*

$$\|T\| \leq 1+\epsilon,$$
$$\|T^{-1}\| \leq 1+\epsilon.$$

Um resultado que será útil nas próximas demonstrações é o lema a seguir:

Lema 5.1. *Se um operador $T : X \to Y$ é um ϵ-isomorfismo, então para todo $0 \neq x \in X$, $|\|T(x)\| - \|x\|| \leq \epsilon \|x\|$.*

Demonstração. Supondo por absurdo que para um $0 \neq x \in X$, $|\|T(x)\| - \|x\|| > \epsilon \|x\|$, então uma das duas inequações ocorre:

$$\|T(x)\| - \|x\| > \epsilon \|x\| \text{ ou}$$
$$\|T(x)\| - \|x\| < -\epsilon \|x\|.$$

Equivalentemente:

$$\tfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} > \epsilon + 1 \text{ ou}$$
$$\tfrac{\|x\|}{\|T(x)\|} > \tfrac{1}{1-\epsilon}.$$

Tem-se as implicações:

$$\tfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} > \epsilon + 1 \Rightarrow \|T\| > \epsilon + 1.$$
$$\tfrac{\|x\|}{\|T(x)\|} > \tfrac{1}{1-\epsilon} \Rightarrow \|T^{-1}\| > \tfrac{1}{1-\epsilon}$$

Como $\epsilon+1 \leq \frac{1}{1-\epsilon}$, temos que $\|T^{-1}\| > \epsilon+1$, logo nas duas possibilidades tem-se um absurdo pois T é um ϵ-isomorfismo.

□

Dados um ultrafiltro U em um conjunto I e uma família de espaços de Banach X_i indexados em I, é possível estabelecer algumas propriedades dos espaços X_i, a partir do ultraproduto $(X_i)_U$:

Proposição 5.1. *Sejam $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach e M um subespaço de dimensão finita do ultraproduto $(X_i)_U$ e seja $\epsilon > 0$. Então existem $I_0 \in U$ e subespaços $M_i \subseteq X_i$ $(i \in I_0)$, os quais são ϵ-isomorfos a M .*

Demonstração. Seja $\{x^k\}_{k=1}^n$ uma base algébrica de M, com representações $x^k = (x_i^k)_U$. Definem-se os subespaços $M_i \subseteq X_i$, como $M_i = < x_i^k >_{k=1}^n$ e os operadores $T_i : M \to M_i$ dados por $T_i(x^k) = x_i^k$.

Será provado que $(T_i)_U$ está em $(\mathcal{L}(M,\ M_i))_U$ ou seja $\{\|T_i\|\}_{i\in I}$ é limitado. Seja $x \in M$, supondo $x = \sum_{k=1}^n a_k x^k$, então:

$$\|T_i\| = \sup_{\{x\neq 0\}} \frac{\|T_i(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\{x\neq 0\}} \frac{\left\|T_i(\sum_{k=1}^n a_k x^k)\right\|}{\left\|\sum_{k=1}^n a_k x^k\right\|} = \sup_{\{x\neq 0\}} \frac{\left\|\sum_{k=1}^n a_k x_i^k\right\|}{\left\|\sum_{k=1}^n a_k x^k\right\|}.$$

Como $(\mathrm{x}_i^k) \in l_\infty(I, X_i)$, existe C tal que $\left\|x_i^k\right\| \leq C$ para todo i e todo k. Logo:

$$\|T_i\| \leq C. \sup_{\{x\neq 0\}} \frac{\sum_{k=1}^n \|a_k\|}{\left\|\sum_{k=1}^n a_k x^k\right\|}.$$

Denotando $b_k = \frac{a_k}{\max_k\{\|a_k\|\}}$ $(\|b_k\| \leq 1)$, tem-se:

$$\|T_i\| \leq C.\sup_{\{x\neq 0\}} \frac{\sum_{k=1}^n \|b_k\|}{\left\|\sum_{k=1}^n b_k x^k\right\|} \leq C. \sup_{\{x\neq 0\}} \frac{n}{\left\|\sum_{k=1}^n b_k x^k\right\|}.$$

Pela definição de b_k, existe k tal que $\|b_k\| = 1$. Se $s = \min_k dist(x^k, < x^j >_{j\neq k})$, então:

$$\left\|\sum_{k=1}^n b_k x^k\right\| \geq s,$$
$$\|T_i\| \leq \frac{C.n}{s},$$

Portanto $\{\|T_i\|\}_{i\in I}$ é limitado, logo $(T_i(x))_U \in (X_i)_U$ e mais, utilizando a Proposição 4.3:

$$\lim_U \|T_i(x)\| = \lim_U \left\|\sum_{k=1}^n a_k x_i^k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n a_k (x_i^k)_U\right\| = \|x\|.$$

Pela definição de limite sobre o ultrafiltro, fixado x, para todos δ, a, b reais que verificam $a > 1$, $1 > b > 0$ e $\delta > 0$:

$$\{\ i \in I,\, b\,\|x\| \leq \|T_i(x)\| \leq a\,\|x\|\} \in U.$$

Agora dado $\epsilon > 0$ é possível construir um conjunto $I_0 \in U$ como no enunciado. Seja δ tal que $\delta \leq \frac{\epsilon}{2C}$. Como M tem dimensão finita, a esfera unitária é compacta, logo é possível construir uma cobertura finita em M com bolas $\{B_\delta(y_k)\}_{k=1}^n$ com $\|y_k\| = 1$. Tem-se as desgualdades:

$$0 < \tfrac{1}{1-\epsilon} \text{ - } \tfrac{\epsilon}{2} < 1,$$
$$1 < 1 + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Então para k entre 1 e n:

$$J_k = \{\ i \in I,\, \tfrac{1}{1+\epsilon} \text{ - } \tfrac{\epsilon}{2} < \|T_i(y_k)\| < 1 + \tfrac{\epsilon}{2}\} \in U.$$

Define-se $I_0 \in U$ como $I_0 = \bigcap_{k=1}^n I_k$. Dado $x \in M$ com $\|x\| = 1$, existe y_k tal que $\|x - y_k\| < \delta$, de maneira que para todo $i \in I_0$:

$$\|T_i(x) - T_i(y_k)\| \leq C\ \|x - y_k\| \leq C\ \delta \leq \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Logo:

$$\|T_i(y_k)\| \text{ - } \tfrac{\epsilon}{2} \leq \|T_i(x)\| \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \|T_i(y_k)\|.$$

Portanto:

$$\tfrac{1}{1+\epsilon} \leq \|T_i(x)\| \leq 1 + \epsilon,$$

e como x é arbitrário na esfera unitária:

$$\tfrac{1}{1+\epsilon} \leq \|T_i\| \leq 1 + \epsilon.$$

Como

$$\|T_i\| = \left\|T_i^{-1}\right\|^{-1} \text{ e}$$
$$\left\|T_i^{-1}\right\| \leq 1 + \epsilon,$$

T_i é um ϵ-isomorfismo.

$\square$

Em contraposição à proposição anterior, também é possível estabelecer propriedades para um ultraproduto específico, a partir de informações sobre os espaços que constituem a família X_i:

Proposição 5.2. *Sejam Y um espaço de Banach e $(X_j)_{j\in J}$ uma família de espaços de Banach. Se para todo $\epsilon > 0$ e todo subespaço M de dimensão finita de Y, existe um espaço X_j tal que M é ϵ-isomorfo a um subespaço de X_j, então existe um ultrafiltro U em um conjunto de índices $I \subseteq J$ tal que Y é isométrico a um subespaço de $(X_i)_U$.*

Demonstração. Seja I a coleção de pares:

$$I = \{\ (M,\, \epsilon), \text{ com } M \text{ subespaço de } Y \text{ com dimensão finita, } 0 < \epsilon \leq 1\},$$

utilizando-se a notação: $i = (M_i,\, \epsilon_i)$. Considere a ordenação parcial em I definida por:

$$(M_1,\, \epsilon_1) \prec (M_2,\, \epsilon_2) \Longleftrightarrow M_1 \subset M_2 \text{ e } \epsilon_1 \geq \epsilon_2$$

e, para cada $i \in I$, o conjunto:

$$R_i = \{\ j \in I, i \prec j\}.$$

A família $L = (R_i)_{i\in I}$ tem a propriedade da interseção finita. De fato, se $R_1, R_2, ...R_n$ são elementos de $(R_i)_{i\in I}$, então

$$\bigcap_{k=1}^{n} R_k = \{(M,\, \epsilon),\, (M',\, \epsilon') \prec (M,\, \epsilon)\},$$

onde $\epsilon' = \min_k\{\epsilon_k\}$ e $M' = < M_k >_{k=1}^{n}$. Logo, $(R_i)_{i\in I}$ tem a PIF e, de acordo com a proposição 3.4, existe um filtro próprio que contém L. Pela proposição 3.5, existe um ultrafiltro U em I que contém L.

Por hipótese, para todo $i \in I$ existe um ϵ_i-isomorfismo $T_i\colon M_i \to N_i$, com $N_i \subseteq X_i$. Define-se então a aplicação $J\colon Y \to (X_i)_U$ como sendo $J(x) = (y_i)_U$ onde (y_i):

$$y_i = \begin{cases} T_i(x), \text{ se } x \in M_i \\ 0, \text{ se } x \notin M_i. \end{cases}$$

Decorre da construção do ultrafiltro U, que dados $x^1,\, x^2 \in Y$:

$$\{j \in I, x^1 \in M_j \text{ e } x^2 \in M_j\} = \{j \in I, < x^1, x^2 >\subseteq M_j\} =$$
$$= \{j \in I, < x^1, x^2 >\subseteq M_j \text{ e } 1 \geq \epsilon_j\} = \{j \in I, i \prec j\} \in U,$$

onde $i = (< x^1, x^2 >, 1)$ $i \in I$. Logo,

$$J(x^1 + x^2) = (T_i(x^1 + x^2))_U = (T_i(x^1))_U + (T_i(x^2))_U = J(x^1) + J(x^2).$$

Portanto, J é linear. Para provar que se trata de uma isometria, fixado x, seja ϵ_0 arbitrariamente pequeno. Define-se o conjunto I_0 por:

$$I_0 = \{i \in I,\, x \in M_i \text{ e } \epsilon_i \leq \epsilon_0\} \supset \{i \in I,\, (< x >,\, \epsilon_0) \prec (M_i,\epsilon_i)\} \in L.$$

Por meio da construção, U contém todos os elementos de L, portanto, $I_0 \in U$. Se $i \in I_0$ então $x \in M_i$ e $\epsilon_0 \geq \epsilon_i$, de maneira que (y_i) satisfaz:

$$(1+\epsilon_0)^{-1}\,\|x\| \leq (1+\epsilon_i)^{-1}\,\|x\| \leq \|y_i\| \leq (1+\epsilon_i)\|x\| \leq (1+\epsilon_0)\|x\|.$$

Aplicando a Proposição 3.12:

$$(1+\epsilon_0)^{-1}\,\|x\| \leq \lim_U \|y_i\| \leq (1+\epsilon_0)\|x\|$$

e como ϵ_0 é arbitrário, $\lim_U \|y_i\| = \|x\|$, portanto J é isometria. A linearidade de J decorre da linearidade de cada T_i.

$\square$

Um conceito que será útil para estabelecer as próximas proposições é o conceito de representação finita:

Definição 5.2 (Representação finita)**.** *Um espaço de Banach Y é finitamente representável em um espaço de Banach X se para todo subespaço de dimensão finita M de Y e todo $\epsilon > 0$, existe um ϵ-isomorfismo de M em um subespaço $N \subseteq X$.*

Exemplo 5.1. *O espaço l_2, formado pelas sequências de reais com quadrado somável é finitamente representável em todo espaço de Banach com dimensão infinita (confira Fabian et al. (2001), página 291).*

Decorre diretamente dos resultados anteriores a seguinte caracterização:

Proposição 5.3. *Y é finitamente representável em X se, e somente se, existe um ultrafiltro U tal que Y é isometricamente isomorfo a um subespaço de $(X)_U$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Decorre da Proposição 5.2.

$(\Leftarrow)$ Decorre da Proposição 5.1 $\square$

A primeira proposição proveniente do conceito de representação finita é a:

Proposição 5.4. *Se Y é um espaço de Banach separável e finitamente representável em X, então Y é isométrico a um subespaço de $(X)_U$ para cada ultrafiltro U enumeravelmente incompleto.*

Demonstração. Seja U um ultrafiltro enumeravelmente incompleto, então existe uma cadeia $I = I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$ com $I_k \in U$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_k = \emptyset$. Dessa maneira, para todos $i \in I$ e $m \in \mathbb{N}$, ou $i \in I \setminus I_m$ ou existe um único $n \geq m$ tal que $i \in I_n \setminus I_{n+1}$.

Como Y é separável existe um subconjunto enumerável $L \subset Y$ linearmente independente e com $< L >$ denso em Y. De fato, dado um subconjunto enumerável $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denso em Y, defina indutivamente $(x_n) \subset Y$ e $(m_n) \subset \mathbb{N}$. Para $n = 1$,

$$x_1 = z_1 \text{ e } m_1 = 1.$$

Para $n > 1$, se $dim(X) = m_{n-1}$, defina

$$L = \{x_1,\ x_2,...x_{m_{n-1}}\}.$$

Para $n > 1$, se $dim(X) > m_{n-1}$ e $z_n \notin < x_1, ...x_{m_{n-1}} >$, defina

$$m_n = m_{n-1} + 1 \text{ e } x_{m_n} = z_n.$$

Para $n > 1$, se $dim(X) > m_{n-1}$ e $z_n \in < x_1, ...x_{m_{n-1}} >$

$$m_n = m_{n-1}.$$

Dessa maneira, se $dim(X) = \infty$, então $L = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por hipótese, para todo número natural n existe um $\frac{1}{n}$-isomorfismo sobre a imagem T_n: $< x_k >_{k=1}^{n} \to Y$. Dedefine-se então $T : Y \to (X)_U$ primeiramente para cada $x_m \in L$, depois estendendo linearmente para $< L >$ (uma vez que L é uma base para $< L >$) e por fim estendendo para todo o conjunto Y continuamente. Então se $x_m \in L$, define-se $J(x_m) = (y_i^m)_U$ onde:

$$y_i^m = \begin{cases} 0, \text{ se } i \in I \setminus I_m \\ T_n(x_m), \text{ se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Temos que se $i \in I_n \setminus I_{n+1} \in U$, $\|y_i^m\|$ verifica (pela Proposição 5.1):

$$(1 \text{ - } \tfrac{1}{n})\ \|x_m\| \leq \|y_i^m\| \leq (1 + \tfrac{1}{n})\|x_m\|.$$

Então, como pode se tomar n arbitrariamente grande, $\lim_U \|y_i^m\| = \|x_m\|$, J é isometria em L.

Seja x pertencente a $< L >$, ou seja, $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{m_k}$, com $x_{m_k} \in L$. Logo J é estendido a $< L >$:

$$J(x) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k J(x_{m_k}).$$

Mostra-se que para ϵ arbitrariamente pequeno:

$$(1 - \epsilon)\|x\| \leq J(x) \leq (1 + \epsilon)(\|x\|.$$

Dado $\epsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ com $N > m_k$ para todo k e $N > \frac{1}{\epsilon}$. Temos por definição que $J(x) = (w_i)_U = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_i^m)_U$. Se $i \in I_N \backslash I_{N+1} \in U$, $w_i = T_n(x)$ então pelo Lema 5.1:

$$(1 - \tfrac{1}{N}) \|x\| \leq \|w_i\| \leq (1 + \tfrac{1}{N}) \|x\|.$$

Logo:

$$(1 - \tfrac{1}{N}) \|x\| \leq \|J(x)\| \leq (1 + \tfrac{1}{N}) \|x\|$$

e como $N > \frac{1}{\epsilon}$:

$$(1 - \epsilon) \|x\| \leq \|J(x)\| \leq (1 + \epsilon) \|x\|.$$

Portanto, sendo ϵ arbitrariamente pequeno $\|J(x)\| = \|x\|$. Se $x \in \overline{< L >}$, existe uma sequência $(a_k) \in < L >$ com (a_k) convergindo para x, define-se então:

$$J(x) = \lim_{k \to \infty} J(a_k).$$

Como (a_k) converge e $\|J(a_m) - J(a_n)\| \leq \|J\| \|a_m - a_n\|$, com $\|J\|$ definido em $< L >$, o limite existe está bem definido. Além disso:

$$\|J(x)\| = \lim_k \|J(a_k)\| = \lim_k \|a_k\| = \|x\|.$$

Logo J pode ser definida como uma isometria linear em $\overline{< L >} = Y$.

□

Outro conceito de utilidade, proveniente da idéia de representação finita, é a super-reflexividade:

Definição 5.3 (Espaço super-reflexivo)**.** *Um espaço de Banach X é super-reflexivo se cada espaço de Banach Y finitamente representável em X é reflexivo.*

Também existe uma caracterização de espaços super-reflexivos.

Proposição 5.5. *Um espaço de Banach X é super-reflexivo se, e somente se, cada ultra-produto $(X)_U$ é reflexivo para todo ultrafiltro U.*

Demonstração. ($\Rightarrow$)

Para todo ultafiltro U, $(X)_U$ é isometricamente isomorfo a um subespaço M de $(X)_{U'}$ para algum ultrafiltro U'. Evidentemente, para $U' = U$ e M $= (X)_U$. Decorre então da Proposição 5.3 que $(X)_U$ é finitamente representável em X e como, por hipótese X é super-reflexivo, segue que $(X)_U$ é reflexivo.

($\Leftarrow$)

Seja Y finitamente representável em X. Pela Proposição 5.3 existe um ultrafiltro U tal que Y é isometricamente isomorfo a um subespaço de $(X)_U$, logo , como $(X)_U$ é reflexivo, Y também é reflexivo.

□

Dados dois espaços de Banach $X \supseteq Y$, existe para a super-reflexividade uma relação equivalente ao caso da reflexividade:

Proposição 5.6. *Seja Y subespaço fechado do espaço de Banach X. Se Y e X/Y são super-reflexivos então X é super-reflexivo.*

Demonstração. Se Y é super-reflexivo, pela Proposição 5.5, para todo ultrafiltro U, $(Y)_U$ é reflexivo. Se X/Y é super-reflexivo, como $(X/Y)_U \cong (X)_U/(Y)_U$ (Proposição 4.8), também temos que $(X)_U/(Y)_U$ é reflexivo. Se $(Y)_U$ e $(X)_U/(Y)_U$ são reflexivos, então $(X)_U$ é reflexivo (em Fabian et al. (2001), página 97). Logo pela Proposição 5.5, X é super-reflexivo. □

A próxima meta é provar que para algum ultrafiltro U, X^{**} é isometricamente isomorfo a um subespaço de $(X)_U$. Para tal consideremos a seguinte proposição:

Proposição 5.7 (Princípio da reflexividade local)**.** *Para cada subespaço de dimensão finita $M \subset X^{**}$ e cada conjunto finito $\{f_1, f_2, \ldots f_n\} \subset X^*$ e cada $\epsilon > 0$, existe um operador T: $M \to X$ que é um ϵ-isomorfismo sobre a imagem e satisfaz:*

$$T|_{M\cap X} = id_{M\cap X} \text{ e}$$

$$f_k(T(u)) = u(f_k), \text{ para } u \in M \text{ e } k = 1,\ 2,\ \ldots\ n.$$

A demonstração pode ser encontrada em Fabian et al. (2001) página 292. A Proposição 5.7 afirma, em particular, que X^{**} é finitamente representável em X, logo de acordo com a Proposição 5.3, existe um ultrafiltro U tal que X^{**} é isometricamente isomorfo a $(X)_U$, mas, através da Proposição 5.7, é possível estabelecer um resultado mais forte utilizando o conceito de projeção unitária:

Definição 5.4 (Projeção unitária)**.** *Seja X um espaço de Banach. Uma aplicação linear T: $X \to X$ é dita uma projeção unitária em X, se $T(T(x)) = T(x)$ para todo x em X e $\|T\| \leq 1$*

Proposição 5.8. *Para cada espaço de Banach X existe um ultrafiltro U e um isomorfismo isométrico sobre sua imagem J de X^{**} em $(X)_U$ tal que $J(X^{**})$ é imagem de uma projeção unitária em $(X)_U$ e a restrição de J a X é a inclusão canônica de X em $(X)_U$.*

Demonstração. Considere:

$$I = \{ \ (M, \ N, \ \epsilon), \text{ com } M \subseteq \mathrm{X}^{**}, \ N \subseteq X^* \text{ subespaços de dimensão finita e } 0 < \epsilon \leq 1\},$$

com a seguinte relação de ordenação parcial:

$$(M_1, \ N_1, \ \epsilon_1) \prec (M_2, \ N_2, \ \epsilon_2) \Leftrightarrow M_1 \subset M_2, \ N_1 \subset N_2, \ \epsilon_1 \geq \epsilon_2.$$

A Proposição 5.7 afirma que, para cada $i = (M_i, \ N_i, \ \epsilon_i) \in I$, existe um ϵ_i-isomorfismo sobre a imagem $T_i : M_i \to X$, satisfazendo:

$$T_i|_{M_i \cap X} = id_{M_i \cap X} \text{ e}$$
$$f(T_i(u)) = u(f), \text{ para } u \in M_i \text{ e } f \in N_i.$$

Para cada $i = (M_i, \ N_i, \ \epsilon_i) \in I$, considere o conjunto R_i dado por:

$$R_i = \{j \in I, i \prec j\}.$$

A família $L = (R_i)_{i \in I}$ tem a propriedade da interseção finita. Se R_1, R_2, ... R_n pertencem a $(R_i)_{i \in I}$ então

$$\textstyle\bigcap_{k=1}^{n} R_k = \{(M, \ N, \ \epsilon), \ (M', \ N', \ \epsilon') \prec (M, \ N, \ \epsilon)\},$$

com $\epsilon' = \min_k\{\epsilon_k\}$, $M' = < M_k >_{k=1}^{n}$ e $N' = < N_k >_{k=1}^{n}$. Logo, $(R_i)_{i \in I}$ possui a propriedade de interseção finita e, utilizando a proposição 3.4, existe um filtro próprio que contém L. Pela proposição 3.5, existe um ultrafiltro U em I que contém L. Então defina a aplicação J: $X^{**} \to (X)_U$ como $J(u) = (x_i)_U$, onde :

$$x_i = \begin{cases} T_i(u), \text{ se } u \in M_i \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Segue da construção do ultrafiltro U, que dados u^1, $u^2 \in X^{**}$:

$$\{j \in I, u^1 \in M_j \text{ e } u^2 \in M_j\} = \{j \in I, < u^1, u^2 > \subseteq M_j\} =$$
$$= \{j \in I, < u^1, u^2 > \subseteq M_j, \ \{0\} \subseteq N_j \text{ e } 1 \geq \epsilon_j\} = \{j \in I, i \prec j\} \in U$$

onde $i = (< u^1, u^2 >, \ \{0\}, \ 1) \in I$. Logo,

$$J(u^1 + u^2) = (T_i(u^1 + u^2))_U = (T_i(u^1) + T_i(u^2))_U = J(u^1) + J(u^2),$$

provando a linearidade de J. Para verificar que J é isometria, sejam $u \in X^{**}$ e $\epsilon_0 > 0$, defina o conjunto:

$$I_0 = \{ \ (M, \ N, \ \epsilon) \in I \ , \ \epsilon_0 > \epsilon, \ M \supseteq < u > \text{ e } N \text{ qualquer } \} \in U.$$

Se $i \in I_0$, então

$$(1-\epsilon_0)\,\|u\| \leq \|x_i\| \leq (1+\epsilon_0)\,\|u\|.$$

Logo, tomando o limite sobre o ultrafiltro e utilizando a Proposição 3.12:

$$(1-\epsilon_0)\,\|u\| \leq \lim_U \|x_i\| \leq (1+\epsilon_0)\,\|u\|.$$

Como ϵ_0 é arbitrário, $\lim_U \|x_i\| = \|u\|$, portanto, J é isometria.

Para construir a projeção considere a aplicação $Q : (X)_U \to X^{**}$ que associa $(x_i)_U$ a aplicação $w^*\text{-}\lim_U x_i : X^* \to \mathbb{K}$, com $w^*\text{-}\lim_U x_i(f) = \lim_U f(x_i)$.

Fixado $(x_i) \in l_\infty(I, X)$, $w^*\text{-}\lim_U x_i$ é uma aplicação linear contínua. Sua boa definição equivale a seguinte implicação:

$$\lim_U \|x_i - y_i\| = 0 \Rightarrow w^*\text{-}\lim_U x_i = w^*\text{-}\lim_U y_i.$$

Para provar a implicação, basta observar que:

$$\lim_U \|f(x_i) - f(y_i)\| \leq \lim_U \|f\|\,\|(x_i) - f(y_i)\| = 0.$$

A linearidade é trivial, para verificar a continuidade, considere primeiramente que para toda $f \in X^*$, a família $(f(x_i))$ é limitada no corpo $\mathbb{K}$, portanto $\lim_U f(x_i)$ existe. Tomando f com $\|f\| = 1$, então para todo $i \in I$:

$$|f(x_i)| \leq \|x_i\|.$$

Portanto, utilizando a Proposição 3.15:

$$|\lim_U f(x_i)| = \lim_U |f(x_i)| \leq \|(x_i)_U\|.$$

A última desigualdade estabelece a continuidade de $w^*\text{-}\lim_U x_i$ e também a desigualdade $\|Q\| \leq 1$. Para tal, basta observar que:

Define-se a projeção P desejada do enunciado P: $(X)_U \to (X)_U$ como $P = J \circ Q$. Tem-se que $\|P\| \leq 1$ e $ImP \subseteq ImJ$, resta mostrar que $P|_{J(X^{**})}$ é a identidade, ou seja:

$$u \in \mathrm{X}^{**} \Rightarrow J(Q(J(u))) = J(u),\ Q(J(u))(f) = u(f),$$

ou alternativamente $Q(J(u)) = u$. Para tal prova-se que para todo $f \in \mathrm{X}'$:

$$Q(J(u))(f) = \lim_U f(x_i).$$

Onde $(x_i)_U = J(u)$. Considere o conjunto

$$I_0 = \{(M,\, N,\, \epsilon) \in I,\, u \in M,\, f \in N \text{ e } \epsilon \leq 1\} \in U.$$

Se $i \in I_0$, $u(f) = f(T_i u) = f(x_i)$, então $\lim_U f(x_i) = u(f)$. $\square$

6 APLICAÇÕES MULTILINEARES E FUNÇÕES HOLOMORFAS

A teoria apresentada neste capítulo baseia-se nos textos de Mujica (1986) e Dineen (1999). O objetivo principal é conceituar polinômios e funções holomorfas em espaços de Banach destacando características e proposições importantes que serão necessários para a compreensão do conteúdo dos capítulos 7 e 8.

6.1 APLICAÇÕES MULTILINEARES

Começamos com a definição de aplicação multilinear:

Definição 6.1 (Aplicação multilinear)**.** *Sejam X_1, X_2, ...X_n, Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Uma aplicação $A : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$ é uma aplicação n-linear se é linear em cada variável separadamente.*

O conjunto da aplicações n-lineares $A : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y$ será denotado por $\mathcal{L}_a(X_1,\ X_2,...X_n;\ Y)$. É trivial verificar que tal conjunto possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações canônicas.

Se os espaços vetoriais considerados são espaços normados, será considerada a norma em $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ dada por:

$$\|(x_1, x_2, ...x_n)\| = \max_{k=1:n} \|x_k\|.$$

Nesse caso, o conjunto das aplicações n-lineares contínuas é um subespaço de $\mathcal{L}_a(X_1,\ X_2,...X_n;\ Y)$ e será denotado por $\mathcal{L}(X_1,\ X_2,...X_n;\ Y)$. Tais espaços podem ser considerados espaços normados de acordo com a seguinte norma:

Proposição 6.1. *A aplicação $\|.\|$: $\mathcal{L}(X_1,\ X_2,...X_n;\ Y) \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\|A\| = \sup_{\{x\in X_1\times X_2\times ...\times X_n, \|x\|\leq 1\}} \|A(x)\|,$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X_1,\ X_2,...X_n;\ Y)$.

Demonstração. Primeiramente é preciso demonstrar que a norma está definida para toda aplicação A contínua. Se A é contínua então, particulamente, é contínua na origem, logo existe $\delta > 0$, tal que se $\|y\| \leq \delta$ então $\|A(y)\| < 1$ ou seja, se $\|x\| \leq 1$ então

$$\|A(x)\| = \frac{1}{\delta^n} \|A(\delta x)\| \leq \frac{1}{\delta^n}.$$

Logo a norma está bem definida. Agora se $(x_1,\ x_2,...x_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ com $x_k \neq 0$,

$$\left\|A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, \ldots \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| \leq \|A\|.$$

Então

$$\|A(x_1, x_2, ...x_n)\| \leq \|A\| \, \|x_1\| \, \|x_2\| \ldots \|x_n\|.$$

No caso de $x_k = 0$ para algum k,

$$\|A(x_1, x_2, ...x_n)\| = \|A\| \, \|x_1\| \, \|x_2\| \ldots \|x_n\| = 0.$$

Portanto se $\|A\| = 0$, então $A = 0$. Para demonstrar que $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$ para todo λ em $\mathbb{K}$ basta observar que

$$\sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|\lambda A(x)\| = \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} |\lambda| \, \|A(x)\| = |\lambda| \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|A(x)\|.$$

E pela a desigualdade triangular,

$$\sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|(A+B)(x)\| = \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|A(x) + B(x)\| \leq \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|A(x)\| + \|B(x)\| \leq$$
$$\leq \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|A(x)\| + \sup_{\{\|x\|\leq 1\}} \|B(x)\|.$$

Logo $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. □

O espaço $\mathcal{L}(X_1,\, X_2,...X_n;\, Y)$ com a norma definida na Proposição 6.1 é de fato um espaço de Banach:

Proposição 6.2. *Se Y é um espaço de Banach então o espaço $\mathcal{L}(X_1,\, X_2,...X_n;\, Y)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Tome uma sequência de Cauchy (A_k) arbitrária em $\mathcal{L}(X_1,\, X_2,...X_n;\, Y)$, demonstra-se que a aplicação $A : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ definida por

$$A(x_1,\, x_2,...x_n) = \lim_{k\to\infty} A_k\ (x_1,\, x_2,...x_n)$$

pertence a $\mathcal{L}(X_1,\, X_2,...X_n;\, Y)$ e $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. Como

$$\|A_r(x_1, x_2, ...x_n) - A_s(x_1, x_2, ...x_n)\| \leq \|A_r - A_s\| \, \|x_1\| \, \|x_2\| \ldots \|x_n\|,$$

e a sequência (A_k) é de Cauchy, segue que a aplicação A está bem definida. Da linearidade do limite e da n-linearidade de cada A_k, decorre que A é n-linear. Para verificar que A é contínua, seja $y \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ com $\|y\| \leq 1$. Uma vez que existe $\lim_{k\to\infty} A_k(y)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $r,\, s \geq k_0$:

$$\|A_r(y) - A_s(y)\| \leq 1.$$

Então para $k \geq k_0$:

$$\|A_k(y)\| \leq \|A_{k_0}(y)\| + 1 \leq \|A_{k_0}\| + 1.$$

Logo $\|A\| \leq \|A_{k_0}\| + 1$, portarto A é contínua. Para estabelecer que a sequência verifica $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, seja $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo par r, $s \geq m$:

$$\|A_r - A_s\| \leq \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Novamente, considerando $y \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ com $\|y\| \leq 1$, para r, $s \geq m$:

$$\|A_r(y) - A_s(y)\| \leq \|A_r - A_s\|.$$

Então se $r \geq m$:

$$\lim_{s\to\infty} \|A_r(y) - A_s(y)\| < \epsilon.$$

Portanto devido à arbitrariedade na escolha de y, $\|A_r(y) - A(y)\| < \epsilon$, conclui-se então $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. □

No caso em que $X_1 = X_2 =... = X_n = X$, o espaço $\mathcal{L}_a(X_1, X_2,...X_n; Y)$ é denotado por $\mathcal{L}_a(^nX; Y)$ e analogamente $\mathcal{L}(^nX; Y)$.

Uma classe importante dentro das aplicações multilineares são as aplicações multilineares simétricas, para defini-las considere o conjunto das bijeções em $\{1, 2,...n\}$, designado por $\mathcal{S}_n$.

Definição 6.2 (Aplicação multilinar simétrica)**.** *Uma aplicação $A \in \mathcal{L}_a(^nX; Y)$ é dita simétrica se:*

$$A(x_1, x_2,...x_n) = A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)},...x_{\sigma(n)})$$

para todos x_1, x_2,...$x_n \in X$ e toda $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

O conjunto das aplicações n-lineares simétricas de X em Y será denotado por $\mathcal{L}_a^s(^nX; Y)$. Sendo X, Y espaços vetoriais normados, o conjunto das aplicações n-lineares simétricas contínuas de X em Y será denotado $\mathcal{L}^s(^nX; Y)$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ será adotada a notação:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 +...+ \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2!...\alpha_n!$$

Dessa maneira se $A \in \mathcal{L}_a(^nX; Y)$, x_1, x_2,...$x_m \in X$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2,...\alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ e também $|\alpha| = n$, será utilizada a notação:

$$A(x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2}...x_m^{\alpha_m}) = A(\overbrace{x_1...x_1}^{\alpha_1 vezes},\ \overbrace{x_2...x_2}^{\alpha_2 vezes},...\overbrace{x_m...x_m}^{\alpha_m vezes}).$$

Os conjuntos $\mathcal{L}_a^s(^nX;\ Y)$ e $\mathcal{L}^s(^nX;\ Y)$ possuem estrutura de espaço vetoriais com as operações canônicas, de modo que são subespaços, respectivamente de $\mathcal{L}_a(^nX;\ Y)$ e $\mathcal{L}(^nX;\ Y)$. A seguinte proposição estabelece que $\mathcal{L}^s(^nX;\ Y)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(^nX;\ Y)$:

Proposição 6.3. *A aplicação $\varphi : \mathcal{L}(^nX;Y) \to \mathcal{L}^s(^nX;Y)$ que associa a aplicação A à aplicação A^s definida por:*

$$A^s(x_1,\ ...,\ x_n) = \tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} A(x_{\sigma(1)},\ ...,\ x_{(n)})$$

é linear e sobrejetiva e verifica $\|A^s\| \leq \|A\|$.

A demonstração é trivial e deixada como exercício. Um resultado importante cuja demonstração também será omitida é a fórnula de Leibniz (Mujica (1986), página 5):

Proposição 6.4 (Fórmula de Leibniz)**.** *Se $A \in \mathcal{L}_a^s(X^n;\ Y)$ e $x_1,\ x_2,...x_m \in X$, então*

$$A((x_1\ +\ x_2\ +...+\ x_m)^n) = \textstyle\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m;|\alpha|=n} \tfrac{n!}{\alpha!} A(x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2}...x_m^{\alpha_m}).$$

A fórmula de Leibniz é comumente utilizada na demonstração da fórmula de polarização, a qual estabelece que uma aplicação n-linear simétrica é definida pela imagem dos elementos da forma x^n (Mujica (1986), página 6).

Proposição 6.5 (Fórmula de Polarização)**.** *Dada uma aplicação $A \in \mathcal{L}_a^s(^nX;Y)$, então para $x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...x_n \in X$:*

$$A(x_1,\ x_2,\ x_3,...x_n) = \tfrac{1}{n!2^n}\textstyle\sum_{\epsilon_k=\pm1}\epsilon_1\epsilon_2...\epsilon_n A(x_0\ +\ \epsilon_1 x_1\ +...+\ \epsilon_n x_n)^n.$$

6.2 POLINÔMIOS

A partir de aplicações multilineares é possível definir polinômios, ou seja, um tipo específico de aplicação entre dois espaços de Banach:

Definição 6.3 (Polinômio n-homogêneo)**.** *Sejam X, Y espaços de Banach. Uma aplivação $P : X \to Y$ é um polinômio n-homogêneo (ou homogêneo de grau n) se existe uma aplicação n-linear contínua $A : X^n \to Y$ tal que $P(x) = A(x^n)$ para todo x em X.*

Sendo A uma aplicação n-linear contínua, o polinômio P associado será uma aplicalção contínua. O conjunto dos polinômios n-homogêneos entre espaços de Banach X e Y é também um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar canônicas, o qual será denotado por $\mathcal{P}(^nX;Y)$. Evidentemente, pela definição 6.3 pode haver mais de uma aplicação associada a um polinômio, ou seja, aplicações $A \neq A$' *in*

$\mathcal{L}(^nX;Y)$ com $A'(x^n) = A(x^n)$ para todo x em X. Porém essa multiplicidade desaparece quando considera-se apenas aplicações simétricas contínuas, pois como consequência do fórmula de polarização temos:

$$\left.\begin{array}{l} A,\ A' \in L^s(^nX;Y) \\ A'(x^n) = A(x^n),\ \forall\ x \end{array}\right\} \Rightarrow A = A'.$$

E mais, se A é uma aplicação simétrica n-linear e $P(x) = A(x^n)$ para todo x em X, então a aplicação simétrica A^s associada pela Proposição 6.3 também cumpre a condição $P(x) = A^s(x^n)$ para todo x em X. Dessa maneira para cada elemento P de $\mathcal{P}(^nX;Y)$ existe uma única aplicação A em $\mathcal{L}^s(^nX;Y)$ que cumpre $P(x) = A(x^n)$ para todo x em X, tal aplicação é dita a aplicação simétrica associada ao polinômio P.

É possível definir polinômios homogêneos de graus arbitrários a partir de funionais lineares pois se $f_k \in \mathrm{X}^*$ então a aplicação $\sum_{k=1}^m c_k f_k^n : X \to Y$ dada por:

$$\textstyle\sum_{k=1}^m c_k f_k^n(x) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(x)^n,$$

Com $c_k \in Y$, é um polinômio n-homogêneo.

Definição 6.4 (Polinômio do tipo finito)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach. Um polinômio n-homogêneo P : X $\to$ Y é do tipo finito se* $P = \sum_{k=1}^m c_k f_k^n$*, para* $m \in \mathbb{N}$*,* $c_k \in Y$ *e* f_k *em* X^**, ou seja, P(x) =* $\sum_{k=1}^m c_k f_k(x)^n$ *para x em X.*

O conjunto dos polinômios n-homogêneos de tipo finito entre os espaços de Banach X e Y será denotado por $\mathcal{P}_f(^nX;Y)$ o qual é um subespaço de $\mathcal{P}(^nX;Y)$. No caso específico de Y ser o corpo dos escalares existem algumas características específicas acerca desses polinômios:

Proposição 6.6. *Seja X um espaço de Banach sobre o corpo* $\mathbb{K}$*. Se X tem dimensão finita, então* $\mathcal{P}_f(^nX;\mathbb{K}) = \mathcal{P}(^nX;\mathbb{K})$*.*

Demonstração. Seja $\{x_1,\ x_2,...x_p\}$ uma base de X. Se $P \in \mathcal{P}(^nX;\mathbb{K})$ e $x \in X$, então

$$x = \textstyle\sum_{j=1}^p a_j x_j = \sum_{j=1}^p f_j(x) x_j,$$

onde $f_j \in X^*$ é o funcional que associa x ao escalar a_j. Se A é a aplicação simétrica associada a P:

$$P(x) = P(\textstyle\sum_{j=1}^p f_j(x)x_j) = A(\sum_{j=1}^p f_j(x)x_j)^n.$$

A Proposição 6.4 estabelece que:

$$A(\textstyle\sum_{j=1}^p f_j(x)x_j)^n = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m;|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} f_1^{\alpha_1}(x) f_2^{\alpha_2}(x)...f_p^{\alpha_p}(x) A(x_1^{\alpha_1}\ x_2^{\alpha_2}...x_p^{\alpha_p}).$$

Como para cada α, $A(x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}...x_p^{\alpha_p})$ é constante escalar e $f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2}...f_p^{\alpha_p} \in \mathcal{P}_f(^n X; \mathbb{K})$ (Dineen (1999), página 42), segue que $P \in \mathcal{P}_f(^n X; \mathbb{K})$ e consequentemente a igualdade entre os espaços $\mathcal{P}_f(^n X; \mathbb{K})$ e $\mathcal{P}(^n X; \mathbb{K})$.

□

Corolário 6.1. *Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, $P \in \mathcal{P}(^n X; \mathbb{K})$ e T um operador de posto finito em X. Então $P \circ T \in \mathcal{P}_f(^n X; \mathbb{K})$*

Demonstração. Se T é um operador de posto finito, então sua imagem tem dimensão finita. Dessa maneira, $P|_{T(X)}$, devido à Proposição 6.6, é um polinômio do tipo finito, denotado por $P' : T(X) \to \mathbb{K}$. Assuma $P' = \sum_{k=1}^{m} a_k (f_k)^n$, com $f_k \in T(X)^*$ e $a_k \in \mathbb{K}$ para todo k. Então $P \circ T = \sum_{k=1}^{m} a_k (f_k \circ T)^n$, com $f_k \circ T \in X^*$ e $a_k \in \mathbb{K}$ para todo k. Portanto $P \circ T$ é um polinômio do tipo finito. □

6.3 APLICAÇÕES HOLOMORFAS

Aplicações holomorfas em espaços de Banach são uma forma de generalização do conceito originário da análise complexa. Uma função será holomorfa se em cada ponto do domínio existir uma vizinhança na qual a função coincide com uma série de potências ou série polinomial. Antes de defini-las são necessárias algumas considerações:

Definição 6.5 (Série de potências). *Sejam X e Y espaços de Banach, uma série de potências de X em Y no ponto $a \in X$ é uma série do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$, com P_n em $\mathcal{P}_a(^n X; Y)$, sendo que $\mathcal{P}_a(^0 X; Y)$ indica o conjunto das aplicações constante.*

Serão utilizados dois tipos de convergência para séries a convergência uniforme e convergência absoluta:

Definição 6.6 (Convergência uniforme de séries). *Se $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$ é uma série de potências entre X e Y em torno do ponto a, e U é um subconjubto de X, a série converge uniformemente em U se para todo $x \in U$ existe $f(x) \in Y$ dado por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a) = f(x),$$

e dado $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m > m_0$,

$$\|f(x) - \sum_{n=0}^{m} P_n(x - a)\| < \epsilon,$$

para todo x em U.

Definição 6.7 (Convergência absoluta de séries). *Se $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$ é uma série de potências entre X e Y em torno do ponto a, e U é um subconjubto de X, a série converge absolutamente em U se, para todo x em U, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n(x - a)\|$ é convergente.*

O raio de convergência de uma série de potência baseia-se na convergência uniforme:

Definição 6.8 (Raio de convergência)**.** *O raio de convergênca de uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$ *é supremo dos valores de* r *para os quais a série converge uniformemente em* $\bar{B}_a(r)$*. No caso de a série convergir para todo* $r > 0$*, diz-se que a mesma possui raio de convergência infinito* ($r = +\infty$)*. Da mesma maneira, se a série converge apenas para* $x = a$*, diz-se que a série possui raio de convergência nulo.*

A dependência do raio de convergência de uma série em relação à sequência de parcelas da série é expressa pela fórmula de Cauchy-Hadamard:

Proposição 6.7. *Seja* $R > 0$ *o raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$*, então:*

(i) R *é dado pela Fórmula de Cauchy-Hadamard*

$$\tfrac{1}{R} = \limsup \|P_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(ii) A série $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$ *converge absolutamente em* $\bar{B}_a(r)$ *para todo* r *tal que* $0 \leq r < R$*.*

Demonstração. (i) Seja R o raio de convergência e r tal que $0 < r < R$. Por definição de R, a série polinomial converge uniformemente em $\bar{B}_a(r)$. Defina a função:

$$f : \bar{B}_a(r) \to Y,$$

$$f(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x - a).$$

Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$ e $x \in \bar{B}_a(r)$:

$$\| \textstyle\sum_{n=1}^{m} P_n(x - a) \text{ - } f(x) \| \leq 1.$$

Então, para $m \geq m_0$ e $t \in \bar{B}_0(r)$ vale $\|P_m(t)\| \leq 2$ (pois nesse caso é válida a desigualdade $\| \sum_{n=m_0}^{\infty} P_n(t) \| \leq 1$). Logo $\|P_m\| \leq 2r^{-m}$, o que implica:

$$\limsup \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \tfrac{1}{r}.$$

Como é possível tomar r arbitrariamente próximo de R segue que :

$$\limsup \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \leq \tfrac{1}{R} .$$

Para demonstrar a desigualdade oposta, seja $L = \limsup \|P_m\|^{\frac{1}{m}}$. Suponha que $L < \infty$ e tomando r tal que $0 < r < \frac{1}{L}$.

Seja s com $r < s < \frac{1}{L}$. Tome $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq m_0$, $\|P_m\| \leq \frac{1}{s}$. Dessa forma:

$$\|P_m(x-a)\| \leq (\tfrac{r}{s})^m.$$

Para todo $x \in \bar{B}_a(r)$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x-a)$ converge absolutamente e uniformemente em $\bar{B}_a(r)$, provando a afirmação (ii). Pela definição do raio de convergência R, segue que $R \geq r$. Como pode-se tomar r arbitrariamente próximo de $\frac{1}{L}$ tem-se que:

$$\limsup \|P_m\|^{\frac{1}{m}} \geq \tfrac{1}{R},$$

concluindo a demostração. □

O próximo objetivo é demonstrar a unicidade da representação de uma séries de potências.

Proposição 6.8. *Seja $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no espaço de Banach Y. Se existe um real $r > 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ \lambda^n = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq r$, então $c_n = 0$ para todo n.*

Demonstração. A prova se dá por indução. Tomando $\lambda = 0$ decorre que $c_0 = 0$, agora supondo que $c_k = 0$ para $k = 1, 2...m$, prova-se que $c_{m+1} = 0$.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\ r^n$ converge, existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|c_n\|\, r^n \leq C$ para todo n e como $c_k = 0$ para $k = 1, 2...m$:

$$c_{m+1} = \text{-} \sum_{n=m+2}^{\infty} c_{n-m-1}\ \lambda^{n-m-1} \text{ para } 0 < |\lambda| \leq r.$$

Em especial tomando λ tal que $|\lambda| \leq \frac{r}{2}$:

$$\|c_{m+1}\| \leq |\lambda| \sum_{n=m+2}^{\infty} Cr^{-n}(\tfrac{r}{2})^{n-m-1} = 2|\lambda|\, Cr^{-m-2}.$$

E como pode-se tomar $|\lambda|$ arbitrariamente próximo a 0 decorre que $c_{m+1} = 0$. □

Corolário 6.2. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-a)$ uma série de potências de X em Y. Se existe um real $r > 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-a) = 0$ para todo x em $B_a(r)$, então $P_n = 0$ para todo n.*

Torna-se viável então, definir o conceito de função holomorfa:

Definição 6.9 (Aplicação holomorfa)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e U um subconjunto aberto de X. Uma aplicação $f : U \to Y$ é holomorfa ou analítica se para todo $a \in U$ existem uma bola $B_a(r) \subset U$ e uma sequência de polinômios $P_n \in \mathcal{P}_a(^nX; Y)$ tais que a série:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x \text{ - } a)$$

converge uniformemente em $B_a(r)$ para f.

O conjuto das funções holomorfas de U em Y possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações canônicas o qual será denotado por $\mathcal{H}(U;Y)$. No caso particular de $Y = \mathbb{C}$, a notação é simplificada $\mathcal{H}(U;\mathbb{C}) = \mathcal{H}(U)$. Como consequência do Corolário 6.2, se f é holomorfa então a série de polinômios é única.

7 EXTENSÕES DE APLICAÇÕES

O presente capítulo trata de extensões de aplicações multilineares, polinômios e funções holomorfas definidas em espaços de Banach. No caso de aplicações lineares há uma maneira bastante natural de definir a extensão, para extensões de funções holomorfas é necessária uma argumentação mais densa. É realizada uma síntese dos resultados apresentados por Lindstrom e Ryan (1992), sendo o Corolário 7.3, que trata de extensão de funções holomorfas ao espaço bidual, o de maior relevância.

7.1 ULTRAPRODUTO DE APLICAÇÕES MULTILINEARES

Esta seção se refere ao chamado ultraproduto de aplicações multilineares e polinômios, destacando-se a relação entre o ultraproduto de espaços de aplicações e o espaço de aplicações entre ultraprodutos.

Sejam $(X_i^1)_{i\in I}$, $(X_i^2)_{i\in I}$,...$(X_i^n)_{i\in I}$ e $(Y_i)_{i\in I}$ famílias de espaços de Banach indexadas no mesmo conjunto I. Então para cada i, o espaço $\mathcal{L}(X_i^1,\, X_i^2,...X_i^n;\, Y_i)$ também é Banach, então é possível definir o ultraproduto $(\mathcal{L}(X_i^1,\, X_i^2,...X_i^n;\, Y_i))_U$.

Deseja-se compreender qual a relação entre os espaços $(\mathcal{L}(X_i^1,\, X_i^2,...X_i^n;\, Y_i))_U$ e $\mathcal{L}((X_i^1)_U,\, (X_i^2)_U,...(X_i^n)_U;\, (Y_i)_U)$.

Proposição 7.1. *Dadas famílias de espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ $(X_i^1)_{i\in I}$,...$(X_i^n)_{i\in I}$ e $(Y_i)_{i\in I}$ indexadas no conjunto I no qual está definido o ultrafiltro U, a aplicação:*

$$F\colon (\mathcal{L}(X_i^1,\, X_i^2,...X_i^n;\, Y_i))_U \longrightarrow \mathcal{L}((X_i^1)_U,\, (X_i^2)_U,...(X_i^n)_U;\, (Y_i)_U)$$

que associa o elemento $(A_i)_U$ à aplicação A_U:

$$A_U\colon (X_i^1)_U \times (X_i^2)_U \times ... \times (X_i^n)_U \longrightarrow (Y_i)_U$$

definida por $A_U((x_i^1)_U,\, (x_i^2)_U,...(x_i^n)_U) = (A_i(x_i^1,\, x_i^2,...x_i^n))_U$ é uma imersão isométrica linear.

Demonstração. A demostração deve provar três afirmações: (i) A_U está bem definida, é contínua e n-linear, (ii) F está bem definida e é linear (iii) F é uma isometria.

(i) Boa definição de A_U.

Sejam $(x_i^k)_U$ e $(y_i^k)_U$ elementos $(X_i^k)_U$ para $k = 1,\, 2...n$ com $(x_i^k)_U = (y_i^k)_U$. Então para todo i:

$$\|A_i(x_i^1 - y_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| \leq \|A_i\|\ \|x_i^1 - y_i^1\|\ \|x_i^2\|...\|x_i^n\|.$$

Como por hipótese $\lim_U \|x_i^1 - y_i^1\| = 0$, verifica-se que:

$$A_U((x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = A_U((y_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U).$$

Da mesma meneira demonstra-se que:

$$A_U((y_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = A_U((y_i^1)_U,\ (y_i^2)_U, ...(x_i^n)_U).$$

E por fim, repetindo o processo n vezes e utilizando a transitividade da igualdade:

$$A_U((x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = A_U((y_i^1)_U,\ (y_i^2)_U, ...(y_i^n)_U).$$

A n-linearidade decore do fato de cada A_i ser n-linear e a continuidade decorre do fato de que se $\|(x_i^k)_U\| = 1$ para $k = 1,\ 2, ...n$, então:

$$\|A_U((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U)\| = \lim_U \|A_i(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| \leq \lim_U \|A_i\|\, \|x_i^1\|\, \|x_i^2\| ... \|x_i^n\|.$$

Logo pela Proposição 3.13, $\|A_U\| < \infty$.

(ii) F está bem definida.

Sejam (A_i) e (B_i) representantes da mesma classe em $(\mathcal{L}(X_i^1,\ X_i^2, ...X_i^n;\ Y_i))_U$, então:

$$\lim_U \|A_i - B_i\| = 0.$$

Dessa forma, se $(x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U \in (X_i^1)_U \times (X_i^2)_U \times ... \times (X_i^n)_U$:

$$\|A_U((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) - B_U((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U)\| =$$
$$= \lim_U \|A_i(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n) - B_i(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| =$$
$$= \lim_U \|(A_i - B_i)(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\|.$$

E através da desigualde:

$$\lim_U \|(A_i - B_i)(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| \leq \lim_U \|A_i - B_i\|\, \|x_i^1\|\, \|x_i^2\| ... \|x_i^n\|,$$

conclui-se que:

$$\|A_U((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) - B_U((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U)\| = 0.$$

Consequentemente, como $(x_i^k)_U$ são arbitrários, $A_U = B_U$. A linearidade é trivial.

(iii) Para verificar que a aplicação é uma isometria, deve-se provar que:

$$\|A_U\| = \lim_U \|A_i\|.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de $\|A_i\|$, para cada i seja $(x_i^1,\ x_i^2,...x_i^n)$ um elemento de $X_i^1 \times X_i^2 \times ... \times X_i^n$, tal que:

$$\left\|x_i^k\right\| \leq 1 \text{ e}$$
$$\|A_i\| \text{ - } \epsilon < \|A_i(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\|.$$

A família (x_i) assim definida verifica:

$$\left\|(x_i^k)_U\right\| \leq 1 \text{ e}$$
$$\lim_U \|A_i\| \text{ - } \epsilon < \lim_U \|A_i(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| \leq \|A_U\|.$$

Como ϵ é arbitário $\lim_U \|A_i\| \leq \|A_U\|$. Para a desigualdade inversa, pela definição de $\|A_U\|$, existe $(x_i^1,\ x_i^2,...x_i^n) \subseteq X_i^1 \times X_i^2 \times ... \times X_i^n$ uma família tal que:

$$\left\|(x_i^k)_U\right\| \leq 1 \text{ e}$$
$$\|A_U\| \text{ - } \epsilon < \|A_U((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U)\|.$$

Portanto:

$$\|A_U\| \text{ - } \epsilon < \lim_U \|A_i(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| \leq \lim_U \|A_i\| \, \|x_i^1\| \, \|x_i^2\| \ldots \|x_i^n\| =$$
$$= \lim_U \|A_i\| \ \|(x_i)_U\| \leq \lim_U \|A_i\|.$$

Então, como ϵ é arbitrário :

$$\|A_U\| \leq \lim_U \|A_i\|.$$

Conclui-se que $\|A_U\| = \lim_U \|A_i\|$. □

Corolário 7.1. *Dadas famílias de espaços de Banach $(X_i^1)_{i\in I}$, $(X_i^2)_{i\in I}$,...$(X_i^n)_{i\in I}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ e indexadas no conjunto I no qual está definido o ultrafiltro U, a aplicação:*

$$F\colon (\mathcal{L}(X_i^1,\ X_i^2,...X_i^n; \mathbb{K}))_U \longrightarrow \mathcal{L}((X_i^1)_U,\ (X_i^2)_U,...(X_i^n)_U; \mathbb{K}),$$

que associa o elemento $(A_i)_U$ à aplicação A_U:

$$A_U\colon (X_i^1)_U \times (X_i^2)_U \times ... \times (X_i^n)_U \longrightarrow \mathbb{K}$$

definida por $A_U((x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U,...(x_i^n)_U) = \lim_U A_i(x_i^1,\ x_i^2,...x_i^n)$ é uma imersão isométrica.

Demonstração. Basta compor as isometrias das Proposições 7.1 e 4.5. □

Os resultados valem de forma análoga para o caso de polinômios ao invés de aplicações multilineares:

Proposição 7.2. *Dadas famílias de espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ $(X_i)_{i\in I}$ e $(Y_i)_{i\in I}$ indexadas no conjunto I no qual está definido o ultrafiltro U, a aplicação:*

$$F\colon (\mathcal{P}(^n X_i;\, Y_i))_U \longrightarrow \mathcal{P}((X_i)_U;\, (Y_i)_U),$$

que associa o elemento $(P_i)_U$ à aplicação P_U:

$$P_U\colon (X_i)_U \longrightarrow (Y_i)_U,$$

definida por $P_U((x_i)_U) = (P_i(x_i))_U$ é uma imersão isométrica.

Demonstração. A demonstração é idêntica à demostração da Proposição 7.1. Para verificar que P_U está bem definida, basta observar que $P_U(x_i)_U = A_U(x_i)_U^n$ e que A_U está bem definida pela Proposição 7.1

Para provar a boa definição de F, sejam $(P_i)_U$, $(Q_i)_U$ elementos de $(\mathcal{P}(^n X_i; Y_i))_U$ com $(P_i)_U = (Q_i)_U$. Para cada $i \in I$, sejam A_i e B_i as aplicações n-lineares simétricas associadas a P_i e Q_i respectivamente. Como A_i - B_i é a simétrica associada ao polinômio P_i - Q_i e por hipótese $\lim_U \|P_i - Q_i\| = 0$, então $\lim_U \|A_i - B_i\| = 0$. Dessa forma, para um elemento arbitrário $(x_i)_U \in (X_i)_U$:

$$\|P_U((x_i)_U) - Q_U((x_i)_U)\| = \lim_U \|(A_i - B_i)(x_i)_U^n\| \leq \lim_U \|A_i - B_i\| \, \|x_i\|^n = 0.$$

Portanto $P_U((x_i)_U) = Q_U((x_i)_U)$ e F está bem definida. Para demonstrar que F é uma isometria, demonstra-se primeiro que $\|(P_i)_U\| \leq \|P_U\|$. Dado ϵ arbitrariamente pequeno, para cada $i \in I$, pela definição de $\|P_i\|$, existe $x_i \in X_i$ com $\|x_i\| \leq 1$ e

$$\|P_i\| \text{ - } \epsilon \leq \|P_i(x_i)\|.$$

Tomando o limite sobre o ultrafiltro:

$$\lim_U \|P_i\| \text{ - } \epsilon \leq \|P_U((x_i)_U)\| \leq \|P_U\|.$$

Como ϵ é arbitrário, chega-se à desigualdade desejada. Para provar a desigualdade contrária: $\|(P_i)_U\| \geq \|P_U\|$, novamente seja ϵ arbitrariamente pequeno. Pela definição de $\|P_U\|$, existe $(x_i)_U \in (X_i)_U$ com $\|(x_{iU}\| \leq 1$ e

$$\|P_U\| \text{ - } \epsilon \leq \|P_U((x_i)_U)\|.$$

Ou seja:

$$\|P_U\| \text{ - } \epsilon \leq \lim_U \|P_i(x_i)\| \leq \lim_U \|P_i\| \, \|(x_i)\| \leq \lim_U \|P_i\|,$$

provando a desigualdade e o fato de F ser isometria, pois $\|(P_i)_U\| = \|P_U\|$. □

Corolário 7.2. *Dadas famílias de espaços de Banach sobre o corpo* $\mathbb{K}$ $(X_i)_{i\in I}$ *e* $(Y_i)_{i\in I}$ *indexadas no conjunto* I *no qual está definido o ultrafiltro* U*, a aplicação:*

$$F\colon (\mathcal{P}(^n X_i))_U \longrightarrow \mathcal{P}(^n (X_i)_U)$$

que associa o elemento $(P_i)_U$ *à aplicação* P_U*:*

$$P_U\colon (X_i)_U \longrightarrow \mathbb{K},$$

definida por $P_U((x_i)_U) = \lim_U P_i(x_i)$ *é uma imersão isométrica.*

Demonstração. Basta compor as isometrias das Proposições 7.2 e 4.5. □

7.2 EXTENSÕES DE APLICAÇÕES MULTILINEARES

Dada uma aplicação n-linear contínua $A \in \mathcal{L}(^n X; \mathbb{K})$ existe uma maneira natural de estender a aplicação A para $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(^n (X)_U; \mathbb{K})$:

$$\widetilde{A}((x_i^1)_U,\, (x_i^2)_U, \ldots (x_i^n)_U) = \lim_U\, A(x_i^1,\, x_i^2, \ldots x_i^n),$$

onde $(x_i^k)_U \in (X)_U$ para $k = 1, 2, \ldots n$. A existência e unicidade do limite estão asseguradas pela continuidade de A e pelas Proposições 3.10 e 3.11. Como A é n-linear e o limite sobre o ultrafiltro é linear, a aplicação $\widetilde{A}$ será n-linear. O fato de $\widetilde{A}$ ser extensão de A decorre da imersão de X em $(X)_U$. Mais ainda a extensão definida dessa maneira preserva a norma da aplicação original:

Proposição 7.3. *Sejam* X *um espaço de Banach e* A *uma aplicação* n*-linear contínua simétrica em* X^n*. Dado um ultrafiltro em um conjunto* I *arbitrários, existe uma extensão* $\widetilde{A}$ *de* A *com* $\widetilde{A} \in \mathcal{L}^s(^n (X)_U; \mathbb{K})$ *e* $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$*.*

Demonstração. Primeiramente é necessário demonstrar que a aplicação considerada está bem definida, ou seja, que a imagem independe do representante da classe em $(X)_U$. Para tal, sejam $(x_i^k)_U$ e $(y_i^k)_U$ elementos $(X)_U$ para $k = 1, 2 \ldots n$ com $(x_i^k)_U = (y_i^k)_U$. Mostra-se que:

$$\widetilde{A}((x_i^1)_U,\, (x_i^2)_U, \ldots (x_i^n)_U) = \widetilde{A}((y_i^1)_U,\, (y_i^2)_U, \ldots (y_i^n)_U).$$

Primeiramente demonstra-se que:

$$\widetilde{A}((x_i^1)_U,\, (x_i^2)_U, \ldots (x_i^n)_U) = \widetilde{A}((y_i^1)_U,\, (x_i^2)_U, \ldots (x_i^n)_U).$$

Como A é n-linear,

$$A(x_i^1,\, x_i^2, \ldots x_i^n) - A(y_i^1,\, x_i^2, \ldots x_i^n) = A(x_i^1 - y_i^1,\, x_i^2, \ldots x_i^n).$$

E para todo $i \in I$ vale a desigualdade:

$$\|A(x_i^1 - y_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| \leq \|A\| \; \|x_i^1 - y_i^1\| \; \|x_i^2\|...\|x_i^n\| \; .$$

Como por hipótese $(x_i^1)_U = (y_i^1)_U$, $\lim_U \|x_i^1 - y_i^1\| = 0$, então:

$$\lim_U \|A(x_i^1 - x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)\| = 0.$$

Logo:

$$\widetilde{A}((x_i^1)_U \text{ - } (y_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = 0 \text{ e}$$
$$\widetilde{A}((x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = \widetilde{A}((y_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U).$$

Analogamente, demonstra-se que

$$\widetilde{A}((y_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = \widetilde{A}((y_i^1)_U,\ (y_i^2)_U, ...(x_i^n)_U).$$

E repentindo o processo n vezes conclui-se que

$$\widetilde{A}((y_i^1)_U,\ (y_i^2)_U, ...(y_i^{n-1})_U),\ (x_i^n)_U) = \widetilde{A}((y_i^1)_U,\ (y_i^2)_U, ...(y_i^{n-1})_U),\ (y_i^n)_U).$$

Por fim, utilizando a transitividade da relação de igualdade:

$$\widetilde{A}((x_i^1)_U,\ (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U) = \widetilde{A}((y_i^1)_U,\ (y_i^2)_U, ...(y_i^n)_U),$$

conclui-se que $\widetilde{A}$ está bem definida. Como $\widetilde{A}$ é extensão da aplicação A, necessariamente $\|\widetilde{A}\| \geq \|A\|$. Para estabelecer a desigualdade oposta e consequentemente a continuidade de $\widetilde{A}$, sejam $(x_i^k)_U \in (X)_U$ para $k = 1,\ 2, ...3$, com $\|(x_i^k)_U\| \leq 1$. Pela Proposição 4.4, pode-se assumir que $\|\ x_i^k\ \| \leq 1$ para todos i e k. Então para todo $i \in I$:

$$|A(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)| \leq \|A\| \; \|x_i^1\| \; \|x_i^2\|...\|x_i^n\| \leq \|A\|.$$

E tomando o limite sobre o ultrafiltro U e utilizando a Proposição 3.15:

$$\lim_U |A(x_i^1, x_i^2, ...x_i^n)| = \left|\widetilde{A}((x_i^1)_U, (x_i^2)_U, ...(x_i^n)_U)\right| \leq \|A\|.$$

Logo:

$$\|\widetilde{A}\| \leq \|A\|.$$

Por fim, a simetria de $\widetilde{A}$ decorre imediatamente da simetria de A. $\square$

Uma vez definida a extensão de uma aplicação multilinear simétrica contínua, pode-se também definir a extensão de um polinômio em um espaço de Banach.

Proposição 7.4. *Sejam U um ultrafiltro em um conjunto I arbitrário e X um espaço de Banach. Se P é um polinômio n-homogeneo contínuo em X então existe uma extensão $\widetilde{P}$ de P a $(X)_U$ com $\|\widetilde{P}\| = \|P\|$.*

Demonstração. Define-se $\widetilde{P}$: $(X)_U \to \mathbb{K}$ da seguinte maneira:

$$\widetilde{P}((\mathrm{x}_i)_U) = \widetilde{A}((x_i)_U,\, (x_i)_U, ...(x_i)_U),$$

onde $\widetilde{A}$ é a extensão (de acordo com a Proposição 7.3) da aplicação A n-linear simétrica contínua associada a P. A boa definição de $\widetilde{P}$ resulta da boa definição de $\widetilde{A}$. Para verificar a igualdade entre as normas basta verificar que $\|\widetilde{P}\| \leq \|P\|$, uma vez que a desigualdade $\|\widetilde{P}\| \geq \|P\|$ resulta do fato de $\widetilde{P}$ ser extensão. Portanto, seja $(x_i)_U \in$ com $\|(\mathrm{x}_i)_U\| \leq 1$. Pela proposição 4.4, pode-se assumir que $\|x_i\| \leq 1$ para todo $i \in I$. Logo:

$$|P(x_i)| \leq \|P\|.$$

Então tomando o limite sobre o ultrafiltro U e utilizando a Proposição 3.15:

$$\lim_U |P(x_i)| = |\lim_U P(x_i)| \leq \|P\|,$$

daí resulta que $\|\widetilde{P}(x_i)_U\| \leq \|P\|$ e consequentemente $\|\widetilde{P}\| \leq \|P\|$. □

Proposição 7.5. *Sejam X um espaço de Banach, $f \in \mathcal{H}(X)$ e I um conjunto não -vazio arbitrário. Então para todo ultrafiltro U em I, existem um aberto conexo O_f de $(X)_U$ contendo X e uma função $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(O_f)$ a qual é extensão de f.*

Demonstração. A função f considerada será dada por:

$$\widetilde{f}((x_i)_U) = \lim_U f(x_i), \text{ com } (x_i)_U \in O_f.$$

Para construir o aberto O_f, seja z um elemento arbitrário de X. Como f é holomorfa, seja R_z o raio de convergência da serie de polinômios em z:

$$f = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n \text{ em } B_{R_z}(z).$$

Logo se $r < R_z$, f é limitada em $B_r[z]$. E como pela Proposição 7.4, $\|\widetilde{P}\| = \|P\|$, a série $\sum_{\infty}^{n=0} \widetilde{P}_n$ tem o mesmo raio de convergência R_z em $(X)_U$. Dessa maneira é possível definir uma função holomorfa $\widetilde{f}_z$ em $B_{R_z}(z) \subseteq (X)_U$:

$$\widetilde{f}_z((\mathrm{x}_i)_U) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_n((x_i)_U \text{ - } z).$$

Demonstra-se que $\widetilde{f}_z = \widetilde{f}\Big|_{B_{R_z}(z)}$. De fato seja $(x_i)_U$ um elemento de $(X)_U$ tal que $\|(x_i)_U \text{ - } z\| = r < R_z$, logo:

$$\lim_U \|x_i \text{ - } z\| = r.$$

Seja η um real positivo tal que $\eta + r < R_z$. Considerando os conjuntos I_1 e I_2:

$$I_1 = \{i \in I;\ \|x_i - z\| \leq R_z\},$$
$$I_2 = \{i \in I;\ r - \eta < \|x_i - z\| < r + \eta\},$$

os conjuntos verificam a relação $I_1 \supseteq I_2$. Através da Definição 3.9 $I_2 \in U$, logo pela Definição 3.3 $I_1 \in U$. Como I_1 pertence ao ultrafiltro e f é limitada em B_{R_z}(z), pelas Proposições 3.11 e 3.10, $\lim_U f(x_i)$ existe e é único.

E também, dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > N$ e todo $i \in I_1$:

$$|f(x_i) - \textstyle\sum_{n=0}^{m} P_n(x_i - z)| < \epsilon.$$

Novamente pela 3.11 existe o limite sobre o ultrafiltro e por meio da Proposição 3.15:

$$\left|\lim_U f(x_i) - \textstyle\sum_{n=0}^{m} \widetilde{P}_n((x_i)_U - z)\right| < \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, $\lim_U f(x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{P}_n((x_i)_U - z) = \widetilde{f}_z((x_i)_U)$, portanto independe do representante da classe $(x_i)_U$. Logo é possível definir O_f como $O_f = \bigcup_{z \in X} B_{R_z}(z)$ e $\widetilde{f}_z((x_i)_U) = \lim_U f(x_i)$. □

Corolário 7.3. *Sejam X um espaço de Banach e $f \in \mathcal{H}(X)$. Então existem um aberto conexo Ω de X^{**} contendo X e uma função $\widetilde{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ a qual é extensão de f.*

Demonstração. Basta utilizar na Proposição 7.5 o ultrafiltro definido na proposição 5.8 e fazer $\Omega = O_f \cap X^{**}$. □

A construção pode ser simplificada no caso das aplicações holomorfas do tipo limitado:

Definição 7.1 (Aplicações Holomorfas do Tipo Limitado)**.** *Uma aplicação f: $U \to \mathbb{C}$ holomorfa definida no aberto U do espaço de Banach X é do tipo limitado se é limitada em cada subconjunto limitado de U.*

O conjunto das aplicações holomorfas do tipo limitado no espaço de Banach X será denotado por $\mathcal{H}_b(X)$ e é um subespaço de $\mathcal{H}(X)$.

Corolário 7.4. *Sejam X um espaço de Banach e $f \in \mathcal{H}_b(X)$. Então existe uma função $\widetilde{f}$ em $\mathcal{H}_b((X)_U)$ a qual é extensão de f.*

Demonstração. A demostração é análoga à demonstração da Proposição 7.5, porém com uma modificação na construção do conjunto O_f para $z = 0$. Como f é do tipo limitado, f é contínua em $B_n(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto está definido $\lim_U f(x_i)$ para todo $(x_i)_U$ em $B_n(0)$. Considerando que $(X)_U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0)$ pode-se tomar $O_f = (X)_U$. $\square$

8 CONSTANTES DE POLARIZAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH

O segundo resultado demonstrado por Lindstrom e Ryan (1992) estabelece uma relação entre as constantes de polarização de ultraproduto e as constantes de polarização dos espaços constituintes da família. Para a demonstração desse resultado é necessário apresentar uma síntese da teoria de dualidade em ultraprodutos, bem como conceituar algumas das propriedades de aproximação em espaços de Banach.

8.1 ULTRAPRODUTOS E DUALIDADE

Essa seção destina-se a uma análise da relação entre os espaços $(X_i^*)_U$ e $(X_i)_U^*$ com destaque para a dualidade local de ultraprodutos, Proposição 8.3.

Decorre imediatamente da Proposição 7.1 o seguinte resultado:

Corolário 8.1. *A aplicação J: $(X_i^*)_U \to (X_i)_U^*$ que associa cada elemento $(f_i)_U \in (X_i^*)_U$ à aplicação $f_U : (X_i)_U \to \mathbb{K}$ dada por $f_U((x_i)_U) = \lim_U f_i(x_i)$ é uma imersão isométrica linear.*

Uma questão que surge do Corolário 8.1 é em quais condições a aplicação J é de fato uma isometria, ou seja sobrejetora. Tal questão começa a ser respondida parcialmente:

Proposição 8.1. *Sejam $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach e U um ultrafiltro em I. Se $(X_i)_U$ é reflexivo então a aplicação J considerada no Corolário 8.1 é sobrejetora.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $(X_i)_U$ seja reflexivo e a aplicação J não seja sobrejetora. Então $J((X_i^*)_U)$ é um subespaço próprio e fechado de $(X_i)_U^*$. Pela Proposição 2.8, existe um funcional $x^{**} \in (X_i)_U^{**}$ com $\|x^{**}\| = 1$ e $x^{**}(f) = 0$ para todo $f \in J((X_i^*)_U)$. Como $(X_i)_U$ é reflexivo, existe $x \in (X_i)_U$ ($x = (x_i)_U$) tal que $\|x\| = 1$ e $f(x) = 0$ para todo $f \in J((X_i^*)_U)$. Pela definição da aplicação J, tem-se que $\lim_U f_i(x_i) = 0$ para todo $(f_i)_U \in (X_i^*)_U$.

Para cada i escolhe-se $g_i \in X_i^*$ tal que $\|g_i\| = 1$ e $g_i(x_i) = \|x_i\|$. Então $(g_i)_U$ pertence a $(X_i^*)_U$. Porém $\lim_U g_i(x_i) = \lim_U \|x_i\| = \|x\| = 1$, uma contradição. □

Uma recíproca para a proposição anterior é válida em um caso particular:

Proposição 8.2. *Se $(X_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços de Banach, U é um ultrafiltro enumeravelmente incompleto em I e a aplicação J considerada no Corolário 8.1 é sobrejetora, então $(X_i)_U$ é reflexivo.*

Demonstração. Seja $f \in (X_i)_U^*$. Por hipótese, existe $(f_i)_U \in (X_i^*)_U$ tal que $f = J(f_i)_U$. A Proposição 3.8 estabelece a existência de uma cadeia decrescente em U: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq$... com $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$.

Então, para cada $i \in I$ existe um $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $i \in I_{n_i} \setminus I_{n_i+1}$. Por meio da definição de $\|f_i\|$, é possível escolher $x_i \in X_i$ com $\|x_i\| = 1$ e $\|f_i\| \geq |f_i(x_i)| \geq \|f_i\|$ - $\frac{1}{n_i}$.

Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno seja $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Tem-se que

$$\{i \in I \ ; \ \tfrac{1}{n_i} < \epsilon \ \} \supseteq I_{n_0} \in U.$$

Então $\lim_U \frac{1}{n_i} = 0$. Dessa maneira:

$$\|f_i\| \geq \lim_U |f_i(x_i)| \geq \lim_U \|f_i\| - \tfrac{1}{n_i} = \lim_U \|f_i\| = \|f\|.$$

Logo $f((x_i)_U) = \lim_U f_i(x_i) = \|f\|$ e pela Proposição 2.6 $(X_i)_U$ é reflexivo □

Corolário 8.2. *Se $(X_i)_{i\in I}$ é uma família de espaços de Banach e U é um ultrafiltro enumeravelmente incompleto em I, a aplicação J considerada no Corolário 8.1 é sobrejetora se e somente se $(X_i)_U$ é reflexivo.*

A proposição a seguir é a mais relevante dessa seção, confira Sims (1982) página 82.

Proposição 8.3 (Dualidade Local de Ultraprodutos)**.** *Sejam $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços de Banach e U um ultrafiltro em I. Então, para cada subespaço de dimensão finita $M \subseteq (X_i)_U^*$, todo $\epsilon > 0$ e todo subespaço de dimensão finita $N \subseteq (X_i)_U$, existe um ϵ-isomorfismo sobre a imagem $T : M \to (X_i^*)_U$ satisfazendo:*

i - $J(T(f)) = f$ para todo $f \in M \cap J((X_i^*)_U)$,

ii - $J(T(f))((x_i)_U) = f(x_i)_U))$ para todos $f \in M$ e $(x_i)_U \in N$,

onde J é a imersão isométrica cosiderada no Corolário 8.1.

8.2 PROPRIEDADES DE APROXIMAÇÃO

Para estabelecer alguns dos resultados desse capítulo, é necessário exigir determinadas propriedades de aproximação acerca dos espaços envolvidos. Serão utilizados os conceitos de propriedade da aproximação de Grothendieck, aproximação métrica, aproximação λ-limitada, aproximação λ-uniforme e aproximação λ+uniforme.

Definição 8.1 (Propriedade da aproximação de Grothendieck)**.** *Um espaço de Banach X tem a propriedade da aproximação de Grothendieck se existe uma rede $(S_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ (Definição 3.2) de operadores de posto finito tal que para todo subconjunto compacto $K \subset X$ e todo real $\epsilon > 0$ existe $\alpha \in \Gamma$ tal que $\|S_\beta(x) - x\| < \epsilon$ para todo x em K e todo $\beta > \alpha$.*

Definição 8.2 (Propriedade da aproximação métrica)**.** *Um espaço de Banach X tem a propriedade da aproximação métrica se possui a propriedade da aproximação de Grothendieck com $\|S_\gamma\| \leq 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$.*

Definição 8.3 (Propriedade da aproximação λ-limitada)**.** *Se λ é um número real positivo, um espaço de Banach X tem a propriedade da aproximação λ-limitada se possui uma família $(S_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de operadores de posto finito que cumpra o requisito para a propriedade da aproximação de Grothendieck e além disso verifica $\lim_\Gamma \|S_\gamma\| \leq \lambda$.*

Decorre das definições que a propriedade da aproximação 1-limitada implica na propriedade da aproximação métrica. Vale ressaltar também a seguinte caracterição para a propriedade da aproximação λ-limitada, cuja demonstração pode ser encontrada em Johnson, Rosenthal e Zippin (1971), página 489:

Proposição 8.4. *Um espaço de Banach X tem a propriedade da aproximação λ-limitada se e somente se dados ϵ um real positivo e um subespaço de dimensão finita $M \subseteq X$, existe um operador S em X de posto finito com $S|_M = id_M$ e $\|S\| \leq \lambda + \epsilon$.*

Definição 8.4 (Propriedade da aproximação λ-uniforme)**.** *Se λ é um número real positivo, um espaço de Banach X tem a propriedade da aproximação λ-uniforme se para todo número $n \in \mathbb{N}$, existe um natural $m(n)$ tal que dado um subespaço n-dimensional $M \subseteq X$ existe um operador S em X que verifica $S|_M = id_M$, $\|S\| \leq \lambda$ e o posto de S é menor que $m(n)$.*

Definição 8.5 (Propriedade da aproximação λ+uniforme)**.** *Seja λ é um número real positivo. Um espaço de Banach X tem a propriedade da aproximação λ+uniforme se para todo $\epsilon > 0$, X possui a propriedade da aproximação $(\lambda + \epsilon)$-uniforme.*

Proposição 8.5. *Seja X um espaço de Banach. Então X possui a propriedade da aproximação λ+uniforme se e somente se $(X)_U$ possui a propriedade da aproximação λ-limitada para todo ultrafiltro U em I arbitrário.*

Demonstração. Se X possui a propriedade da aproximação λ+uniforme $\Rightarrow$ $(X)_U$ possui a propriedade da aproximação λ-limitada para todo U.

Dado um ultrafiltro U em conjunto I, sejam n um natural e $M \subset (X)_U$ um subespaço n-dimensional e $\epsilon > 0$. Pela Proposição 5.1 existem $I_1 \in U$ e famílias $(M_i)_{i\in I_1}$ de espaços de dimensão n e $(T_i)_{i\in I_1}$ de ϵ-isomorfismos entre M e M_i. Por hipótese, existe S_i: $X \to X$ com $S|_{M_i} = id_{M_i}$ e $\|S_i\| \leq \lambda + \epsilon$ e posto de S menor que $m(n)$. Compondo os operadores S_i e T_i pode-se definir operadores de $P_i = T_i \circ S_i$ para i em I_1 e $P_i = 0$ para i em I_1^c. Então seja P_U: $(X)_U \to (X)_U$ definido como na Proposição 7.1:

$$P_U|_M = id_M,\ \|P_U\| \leq \lambda + \epsilon \text{ e posto de } P_U \text{ é finito .}$$

Logo $(X)_U$ possui a propriedade da aproximação λ-limitada. Agora para provar a segunda implicação:

$(X_i)_U$ possui a propriedade da aproximação λ-limitada para todo $U \Rightarrow$ cada espaço X_i possui a propriedade da aproximação λ+uniforme

Seja U um ultrafiltro enumeravelmente completo (Definição 3.8) em $\mathbb{N}$, assumindo que $(X)_U$ possui a propriedade da aproximação λ-limitada, basta provar dados ϵ arbitrário e uma sequência de espaços n-dimensionais $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$, existe $I_1 \in U$ e um natural m com operadores $T_i : X \to X$ que para i em I_1 verificam:

$$T_i|_{M_i} = id_{M_i},\ \|T_i\| \leq \lambda + \epsilon,\ posto(T_i) \leq m.$$

Para tal, sejam $\delta > 0$ e $M \subseteq (X)_U$ um subespaço n-dimensional, assumindo $M = (M_i)_U$. Por hipótese, existe $S \in \mathcal{L}((X)_U; (X)_U)$ com:

$$S|_M \text{ e } \|S\| \leq \lambda + \delta.$$

Tomando $m = posto(S)$ e seja $\{x^1, x^2, ...x^m\}$ uma base de $Im(S)$ com $\{x^1, x^2,...x^n\}$ base de M. O operador S pode ser representado como:

$$S = \textstyle\sum_{k=1}^{m} g^k x^k,$$

onde $g^k \in (X)_U^*$. Utilizando a dualidade local de ultraprodutos (Proposição 8.3) existem $f^k \in (X^*)_U$ $(k = 1, 2,...n)$ tais que o operador $T : \mathcal{L}((X)_U \to \mathcal{L}((X)_U$ dado por:

$$T = \textstyle\sum_{k=1}^{m} f^k x^k$$

verifica:

$$T(x) = S(x) \text{ e } \|T\| \leq (1 + \delta)\|S\|,\ \forall x \in M.$$

Tome representações $(f_i^k)_U = f^k$ e $(x_i^k)_U = x^k$ e defina:

$$T_i = \textstyle\sum_{k=1}^{m} f_i^k x_i^k.$$

Dessa maneira, decorre que para todo $x = (x_i)_U$ em M:

$$\lim_U \|T_i(x_i) - x_i\| = 0 \text{ e } \lim_U \|T_i\| = \|T\|.$$

Logo para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $I_n \in U$ dado por:

$$I_n = \{\ i \in I;\ \|T_i(x_i) - x_i\| < \tfrac{1}{n} \text{ e } \|T_i\| < \|T\| + \tfrac{1}{n}\}.$$

Como U é enumeravelmente completo, então $I_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \in U$ e se i pertence a I_0 e x_i em M_i vale:

$$\|T_i(x) - x\| = 0 \text{ e } \|T_i\| = \|T\| \leq (1+\delta)(\lambda+\delta).$$

Como δ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, segue que para $\epsilon > 0$ arbitrário:

$$T_i|_{M_i} = id|_{M_i} \text{ e } \|T_i\| \leq \lambda + \epsilon.$$

□

8.3 CONSTANTES DE POLARIZAÇÃO

Constantes de polarização são indicadores que podem fornecer algumas informações acerca da estrutura geométrica do espaço. Por exemplo, através delas pode-se estimar normas de elementos de classes específicas de polinômios em espaços determinados. É o artigo de Pappas e Révész (2004) que analisa o caso das constantes de polarização em espaços de Hilbert. Já Sarantopolous (1986) determina cotas para as normas de aplicações em espaços de medida e Harris (1975) estabelece limites para derivadas de funções holomorfas utilizando o conceito de constantes de polarização.

Para definir constantes de polarização é necessária a percepção de que a identidade de polarização (Proposição 6.5) estabelece limites para a norma de uma aplicação n-linear de um espaço de Banach no corpo partindo da norma do polinômio n-homogêneo associado:

$$\|P\| \leq \|A\| \leq \tfrac{n^n}{n!} \|P\|.$$

Pode-se então definir constantes de polarização:

Definição 8.6 (Constantes de Polarização de um Espaço de Banach)**.** *Sejam X um espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}$. A constante de polarização K_n é definida como:*

$$K_n = \inf\{M \in \mathbb{R};\ \|A_P\| \leq M\|P\|\ \forall\ P \in \mathcal{P}(^n X)\},$$

onde A_P é a aplicação n-linear simétrica associada ao polinômio P. Evidentemente K_n verifica as desigualdades:

$$1 \leq K_n \leq \tfrac{n^n}{n!}.$$

Então para uma família arbitrária de espaços de Banach $(X_i)_{i\in I}$ e um ultrafiltro U em I, para todo n existe $\lim_U K_n(X_i)$.

Há uma maneira alternativa de definir as constantes de polarização:

Proposição 8.6. *Se X é um espaço de Banach, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a igualdade:*

$$K_n = \sup_{\{P\in\mathcal{P}(^n X), \|P\|\leq 1, \|x_k\|\leq 1\}}\left\{\tfrac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1} \epsilon_1 \ldots \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + \ldots + \epsilon_n x_n)\right|\right\}.$$

Demonstração. Primeiramente demonstremos que

$$K_n = \sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0\}} \frac{\|A_P\|}{\|P\|}.$$

Pela definição de supremo, para todo $P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0$:

$$\sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0\}} \frac{\|A_P\|}{\|P\|} \geq \frac{\|A_P\|}{\|P\|},$$

ou seja,

$$\|P\|(\sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0\}} \frac{\|A_P\|}{\|P\|}) \geq \|A_P\|.$$

Portanto, pela definição de K_n, segue que

$$K_n \leq \sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0\}} \frac{\|A_P\|}{\|P\|}.$$

Para estabelecer a desigualdade oposta, suponha por absurdo que

$$K_n < \sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0\}} \frac{\|A_P\|}{\|P\|}.$$

Então existe $P' \in \mathcal{P}(^nX), P' \neq 0$, tal que

$$\frac{\|A_{P'}\|}{\|P'\|} > K_n.$$

Mas, pela definição de K_n, existe $M' \in \mathbb{R}$ com:

$$\frac{\|A_{P'}\|}{\|P'\|} > M' \geq K_n$$

e que cumpre a condição:

$$\|A_P\| \leq M' \|P\|,$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^nX)$. Isso é um absurdo, portanto:

$$K_n = \sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), P \neq 0\}} \frac{\|A_P\|}{\|P\|}.$$

Agora como a relação $P \mapsto A_P$ é linear,

$$K_n = \sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), \|P\| \leq 1\}} \|A_P\|.$$

Então pela identidade de polarização pode-se estabelecer K_n como:

$$K_n = \sup_{\{P \in \mathcal{P}(^nX), \|P\| \leq 1, \|x_k\| \leq 1\}} \{\frac{1}{2^n n!} \left|\sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n)\right|\}.$$

□

8.4 CONSTANTES DE POLARIZAÇÃO E ULTRAPRODUTOS

O primeiro resultado referente a constantes de polarização em ultraprodutos é uma desigualdade:

Proposição 8.7. *Dados uma família de espaços de Banach sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ $(X_i)_{i\in I}$ e um ultrafiltro U em I então para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade:*

$$\lim_U K_n(X_i) \leq K_n((X_i)_U).$$

Demonstração. Supondo por absurdo que $\lim_U K_n(X_i) > K_n((X_i)_U)$, então existem um real b e $I_1 \in U$ tais que se $i \in I_1$:

$$K_n(\mathrm{X}_i) > b > K_n((X_i)_U)\ .$$

Ou seja, existe $P_i \in \mathcal{P}(^n X_i)$, com $\|P_i\| \leq 1$ e $\|A_i\| > b$, onde A_i é a aplicação n-linear simétrica associada a P_i. Definindo então a aplicação $\overline{A}_U \in (\mathcal{L}_s(^n X_i))_U$ como sendo $\overline{A}_U = (\overline{A}_i)_U$ e:

$$\overline{A}_i = \begin{cases} A_i, \text{ se } i \in I_1 \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

evidentemente $\left\|(\overline{A}_i)_U\right\| \geq b$. Analogamente define-se $\overline{P}_U \in (P(^n X_i))_U$ como $\overline{P}_U = (\overline{P}_i)_U$ e:

$$\overline{P}_i = \begin{cases} P_i, \text{ se } i \in I_1 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Tem-se $\left\|(\overline{P}_i)_U\right\| \leq 1$. Considerando as imagens de $(\overline{P}_i)_U$ e $(\overline{A}_i)_U$ pelas imersões das Proposições 7.2 e 7.1 respectivamente, $P_U \in \mathcal{P}(^n(\mathrm{X}_i)_U)$ e $A_U \in \mathcal{L}(^n(X_i)_U)$ verificando $\|P_U\| \leq 1$ e $\|A_U\| \geq b$. Como A_U é a aplicação n-linear simétrica associada a P_U, conclui-se que $K_n((X_i)_U) \geq b$, um absurdo. □

O objetivo agora passa a ser demonstrar a desigualdade oposta, a qual não será válida no caso geral, sendo necessário exigir uma propriedade de aproximação em $(X_i)_U$. Começando pela seguinte relação:

Proposição 8.8. *Se o espaço de Banach X tem a propiedade da aproximação métrica (Definição 8.2) e $P \in \mathcal{P}(^n X)$, então para todo compacto $K \subseteq X$ e todo $\epsilon > 0$, existe $Q \in P_f(^n X)$ tal que:*

$$\|Q\| \leq \|P\| \text{ e } |P(x) - Q(x)| < \epsilon \text{ para } x \in K.$$

Demonstração. Utilizando a Proposição 2.2, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $y \in K$ e $\|x - y\| < \delta$ vale:

$$|P(x) - P(y)| < \epsilon.$$

Através da propriedade da aproximação métrica de X, existe um operador de posto finito S em X com $\|S\| \leq 1$ e $\|S(y) - y\| < \delta$ para y em K. Então, se $y \in K$, $|P(S(y)) - P(y)| \leq \epsilon$. Pelo Corolário 6.1, $Q = P \circ S \in P_f(^nX)$. Evidentemente

$$\|P \circ S\| \leq \|P\| \, \|S\| \leq \|P\|.$$

□

Corolário 8.3. *Se X é um espaço de Banach que possui a propriedade da aproximação métrica, então para todo n natural:*

$$K_n(X) = \sup_{\{P \in \mathcal{P}_f(^nX), \|P\| \leq 1, \|x_k\| \leq 1\}} \frac{1}{2^n n!} \left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right|.$$

Demonstração. Chame

$$\sup_{\{P \in \mathcal{P}_f(^nX), \|P\| \leq 1, \|x_k\| \leq 1\}} \{ \frac{1}{2^n n!} \left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right| \} = a.$$

Evidentemente $1 \leq a \leq \frac{n^n}{n!}$ e $K_n(X) \geq a$, em consequência da Proposição 8.6 e do fato de $\mathcal{P}_f(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$. Para provar que $K_n(X) \leq a$, suponha por absurdo que $K_n(X) > a$, então existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$K_n(X) > a + \epsilon.$$

Logo existem $P \in P(^nX)$ e $(x_k)_{k=1}^n \in X$, com $\|x_k\| \leq 1$, tais que

$$\frac{1}{2^n n!} \left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right| > \epsilon + \frac{1}{2^n n!} \left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n Q(\epsilon_1 y_1 + ... + \epsilon_n y_n) \right|,$$

para todo $Q \in \mathcal{P}_f(^nX)$ e todos $(y_k)_{k=1}^n \in X$, com $\|y_k\| \leq 1$. Em particular a desigualdade é válida para $y_k = x_k$. De modo que:

$$\frac{1}{2^n n!} (\left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right| - \left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n Q(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right|) > \epsilon.$$

Logo:

$$\frac{1}{2^n n!} (\left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) - \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n Q(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right|) > \epsilon.$$

Pela Proposição 8.8, existe $\overline{Q} \in \mathcal{P}_f(^nX)$ tal que:

$$\left\|\overline{Q}\right\| \leq \|P\| \text{ e } \left|P(x) - \overline{Q}(x)\right| < \epsilon \text{ para } x \in K,$$

onde $K = \bigcup_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n$. Então:

$$\frac{1}{2^n}(\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P(\epsilon_1 x_1+...+\epsilon_n x_n)-\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n \overline{Q}(\epsilon_1 x_1+...+\epsilon_n x_n)\right|)<\epsilon.$$

Portanto:

$$\frac{1}{2^n n!}(\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P(\epsilon_1 x_1+...+\epsilon_n x_n)-\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n \overline{Q}(\epsilon_1 x_1+...+\epsilon_n x_n)\right|)<\epsilon,$$

o que é uma contradição. □

Se o ultraproduto $(X_i)_U$ possui a propriedade da aproximação métrica é possível estabelecer as constantes de polarização exclusivamente a partir do conjunto $(\mathcal{P}_f(^n X_i))_U$ do ultraproduto dos polinômios do tipo finito em cada X_i.

Proposição 8.9. *Se $(X_i)_U$ possui a propriedade da aproximação métrica, então para todo n natural:*

$$K_n((X_i)_U)=\sup_{\{P\in F(\mathcal{P}_f(^n X_i))_U,\|P\|\leq 1,\left\|(x_i^k)_U\right\|\leq 1\}}\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P(\epsilon_1 (x_i^1)_U+...+\epsilon_n (x_i^n)_U)\right|\},$$

onde F é a imersão considerada no Corolário 7.2. Ou seja:

$$K_n((X_i)_U)=\sup_{\{(P_i)_U\in(\mathcal{P}_f(^n X_i))_U,\|(P_i)_U\|\leq 1,\left\|(x_i^k)_U\right\|\leq 1\}}\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n \lim_U P_i(\epsilon_1 x_i^1+...+\epsilon_n x_i^n)\right|.$$

Demonstração. Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $\eta>0$ arbitrários. Pelo Corolário 8.3 existem $P\in\mathcal{P}_f(^n(X_i)_U)$ e $(y_i^k)_U\in(X_i)_U$ tais que $\|P\|\leq 1$, $\left\|(y_i^k)_U\right\|\leq 1$ para $k=1,\ 2....n$ e:

$$K_n((X_i)_U)\leq\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P(\epsilon_1 (y_i^1)_U+...+\epsilon_n (y_i^n)_U)\right|+\eta.$$

Considere $P=\sum_{j=1}^m a_j f_j^n$ com $f_j\in(X_i)_U^*$ e $a_j\in\mathbb{K}$. Defina os espaços de dimensão finita $M=<f_1,\ f_2,\ ...f_m>$ e $N=<y_1,\ y_2,\ ...y_n>$. Então $M\subset(X_i)_U^*$ e $N\subset(X_i)_U$. Pela dualidade local de ultraprodutos (Proposição 8.3), dado um real $\epsilon>0$, existe um ϵ-isomorfismo $T:M\to(X_i^*)_U$ tal que :

$$J(T(f))((x_i)_U)=f((x_i)_U),$$

para todos $f\in(X_i)_U^*$ e $(x_i)_U\in(X_i)_U$, sendo $J:(X_i^*)_U\to(X_i)_U^*$ a imersão isométrica considerada no Corolário 8.1. Para tomar um elemento Q na imagem de F, sejam os funcionais $g_j=J(T(f_j))\in(X_i)_U^*$ e $Q=\sum_{j=1}^m a_j g_j^n$. Então $Q\in(\mathcal{P}_f(^n X_i))_U$ e:

$$P(\epsilon_1(y_i^1)_U+...+\epsilon_n(y_i^n)_U)=Q(\epsilon_1(y_i^1)_U+...+\epsilon_n(y_i^n)_U).$$

A fim de estimar a norma de Q, seja $(x_i)_U\in(X_i)_U$, com $\|(x_i)_U\|\leq 1$. Tem-se que:

$$Q((x_i)_U)=\sum_{j=1}^m a_j(F(T(f_j))(x_i)_U)^n\ .$$

Considerando a imersão canônica $\mathfrak{I}$ (Proposição 2.5) e a aplicação adjunta de JT dada por $(JT)^*$: $(X_i)_U^{**}\to M^*$ (Definição 2.18), verifica-se que:

$$J(T(g_j))(x_i)_U = (JT)^*(\mathfrak{I}((x_i)_U))(g_j)).$$

Denotando $z = (JT)^*(\mathfrak{I}((x_i)_U))$, $z \in M^*$. Além disso:

$$\|(FT)^*\| = \|FT\| \leq \|F\| \, \|T\| \leq 1 + \epsilon.$$

Logo, como $\|\mathfrak{I}((x_i)_U))\| = \|(x_i)_U\|$, tem-se que $\|z\| \leq 1 + \epsilon$. Como $z \in M^*$ e M é subespaço de $(X_i)_U^*$, pelo Teorema de Hahn-Banach (Proposiçao 2.4) existe uma extensão $\overline{z} \in (X_i)_U^{**}$ de z com $\|\overline{z}\| \leq 1 + \epsilon$.

Pelo teorema de Goldstine (proposição 2.11) existe uma sequência $(z_i^k)_U$ em $(X_i)_U$ tal que $I((z_i^k)_U)$ converge para $\overline{z}$ na topologia fraca estrela de $(X_i)_U^{**}$, ou seja:

$$\lim_{k \to \infty} \mathfrak{I}((z_i^k)_U)(f) = \overline{z}(f) \text{ para todo } f \in (X_i)_U^*.$$

Então para $j = 1, 2,...m$ a sequência $f_j((z_i^k)_U)$ converge para $\overline{z}(f_j)$, e além disso $\left\|(z_i^k)_U\right\| = \|\overline{z}\| \leq 1 + \epsilon$, logo:

$$\left|\sum_{j=1}^m a_j (f_j((z_i^k)_U))^n\right| = \left|P((z_i^k)_U)\right| \leq (1 + \epsilon)^n.$$

Para estimar $\|Q\|$, primeiramente será estimado $|Q((x_i)_U)|$ a partir de $\left|P((z_i^k)_U)\right|$:

$$\left|P((z_i^k)_U) - Q((x_i)_U)\right| = \left|\sum_{j=1}^m a_j (f_j((z_i^k)_U))^n - \sum_{j=1}^m a_j (\overline{z}(f_j))^n\right| = \left|\sum_{j=1}^m a_j [(f_j((z_i^k)_U))^n - (\overline{z}(f_j))^n]\right|.$$

Como existe $L \in \mathbb{R}$ que cumpre:

$$\left\|\overline{z}(f_j)^k f_j(z_k)^{n-k}\right\| < L,$$

é possível escolher $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|f_j((z_i^{k_0})_U) - \overline{z}(f_j)\right\| \leq \frac{\epsilon}{m.L.a}$ para $j = 1, 2,...m$, onde $a = \max_k |a_k|$. Para r e $s \in \mathbb{K}$ arbitrários, vale a igualdade:

$$r^n - s^n = (r - s)\sum_{k=0}^n r^{n-k} s^k.$$

Consequentemente:

$$\left|\sum_{j=1}^m a_j (f_j((z_i^{k_0})_U))^n - (\overline{z}(f_j))^n\right| \leq \left|\sum_{j=1}^m a_j (\tfrac{\epsilon}{m.L.a}) L\right| = \epsilon.$$

Dessa forma $\left|P((z_i^{k_0})_U) - Q((x_i)_U)\right| \leq \epsilon$. Como $\left|P((z_i^{k_0})_U)\right| \leq (1 + \epsilon)^n$, então $|Q((x_i)_U)| \leq (1 + \epsilon)^n + \epsilon$. Portanto, uma vez que $(x_i)_U$ é arbitrário conclui-se que

$$\|Q\| \leq (1 + \epsilon)^n + \epsilon.$$

Tomando então $R \in (\mathcal{P}_f(^n X_i))_U$ com $\|R\| \leq 1$ dado por:

$$R = \frac{1}{(1+\epsilon)^n + \epsilon} Q,$$

o polinômio R verifica:

$$\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n R(\epsilon_1(y_i^1)_U+...+\epsilon_n(y_i^n)_U)\right| = \frac{1}{(1+\epsilon)^n+\epsilon}\ \frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P(\epsilon_1(y_i^1)_U+...+\epsilon_n(y_i^n)_U)\right|.$$

Logo:

$$\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n R(\epsilon_1(y_i^1)_U+...+\epsilon_n(y_i^n)_U)\right| \geq \frac{1}{(1+\epsilon)^n+\epsilon}(\mathrm{K}_n((\mathrm{X}_i)_U) - \eta).$$

Como ϵ e η são arbitrariamente pequenos, segue que

$$K_n((\mathrm{X}_i)_U) = \sup_{\{(Q_i)_U\in(\mathcal{P}_f({}^nX_i))_U, \|Q_i)_U\|\leq 1, \left\|(x_i^k)_U\right\|\leq 1\}}\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n \lim_U Q_i(\epsilon_1 x_i^1+...+\epsilon_n x_i^n)\right|.$$

□

Pode-se então estabelecer a seguinte desigualdade acerca de constantes de polarização de ultraprodutos:

Proposição 8.10. *Dados uma família de espaço de Banach $(X_i)_{i\in I}$ e um ultrafiltro U em I, se $(X_i)_U$ possui a propriedade da aproximação métrica então para todo $n\in\mathbb{N}$ vale a desigualdade.*

$$\lim_U K_n(X_i) \geq K_n((X_i)_U).$$

Demonstração. Seja $\epsilon>0$, um número real arbitrariamente pequeno. Pela Proposição 8.9 existem $(P_i)_U\in(\mathcal{P}_f({}^nX_i))_U$ e $(y_i^k)_U\in(X_i)_U$ tais que $\|P\|\leq 1$, $\left\|(y_i^k)_U\right\|\leq 1$ definidos para $k=1,\ 2....n$ e:

$$K_n((X_i)_U) \leq \frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n \lim_U P_i(\epsilon_1 y_i^1+...+\epsilon_n y_i^n)\right| + \epsilon.$$

Utilizando as Proposições 3.16 e 3.14,

$$K_n((\mathrm{X}_i)_U) \leq \lim_U \frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P_i(\epsilon_1 y_i^1+...+\epsilon_n y_i^n)\right| + \epsilon.$$

Como

$$\frac{1}{2^n n!}\left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1}\epsilon_1...\epsilon_n P_i(\epsilon_1 y_i^1+...+\epsilon_n y_i^n)\right| \leq K_n(\mathrm{X}_i),$$

segue que:

$$K_n((X_i)_U) \leq \lim_U K_n(X_i) + \epsilon.$$

Pelo fato de ϵ ser arbitrário segue a desigualdade desejada. □

Corolário 8.4. *Dados uma família de espaços de Banach $(X_i)_{i\in I}$ e um ultrafiltro U em I, se $(X_i)_U$ possui a propriedade da aproximação métrica então para todo $n\in\mathbb{N}$ vale a relação:*

$$\lim_U K_n(X_i) = K_n((X_i)_U).$$

Corolário 8.5. *Se X é um espaço de Banach que possui a propriedade da aproximação 1+uniforme e U é um ultrafiltro em um conjunto I, então para todo natural n:*

$$K_n(X) = K_n((X)_U).$$

Demonstração. Decorre da Proposição 8.5. □

Utilizando argumentos similares aos utilizados na Proposição 8.9 é possível estabelecer um resultado análogo para o caso do bidual:

Proposição 8.11. *Se X é um espaço de Banach para o qual X^{**} possui a properidade da aproximação métrica, então para todo natural n:*

$$K_n(X) = K_n(X^{**}).$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\eta > 0$ arbitrários. Pelo Corolário 8.3 existem $P \in \mathcal{P}_f({}^n X^{**})$ e $y_k \in X^{**}$ tais que $\|P\| \leq 1$, $\|y_k\| \leq 1$ para $k = 1, 2....n$ e:

$$K_n(\mathrm{X}^{**}) \leq \frac{1}{2^n n!} \left|\sum_{\epsilon_k=\pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n P(\epsilon_1 y_1 + ... + \epsilon_n y_n)\right| + \eta.$$

Considere $P = \sum_{k=1}^m a_k f_k^n$ com $f_k \in X^{**}$, $a_k \in \mathbb{K}$ e defina os subespaços:

$$M = < f_k >_{k=1}^m \subseteq X^{***} \text{ e } N = < y_k >_n^{k=1} \subseteq X^{**}.$$

É possível aplicar o princípio da reflexividade local (Proposição 5.7) em X^*, logo existem $(x_k^*)_{k=1}^m$ em X^* com $y(x_k^*) = f_k(y)$ para y em N. Então o polinômio $Q \in \mathcal{P}_f({}^n X^{**})$ dado por $Q = \sum_{k=1}^m a_k (x_k^*)^n$ possui as mesmas propriedades de P.

Como consequência do teorema de Goldstine (Proposição 2.11) decorre a igualdade $\|Q\| = \|Q|_X\|$.

De fato, dado ϵ >0 arbitrário, existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que

$$||Q(x^{**})| - \|Q\|| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \text{ e}$$
$$\|x\| \leq 1.$$

Então existe uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, com $\|z_n\| \leq 1$, que converge para x em X^{**} na topologia fraca estrela. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x^{**}(x_k^*) - x_k^*(z_{n_0})| < (\tfrac{\epsilon}{2.m.a})^n,$$

onde $a = \max_k |a_k|$. Dessa maneira,

$$|Q(x^{**}) - Q(z_{n_0})| = |\sum_{k=1}^m a_k x^{**}(x_k^*) - \sum_{k=1}^m a_k x_k^*(z_{n_0})| \leq m.a.\tfrac{\epsilon}{2.m.a} = \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Logo $||Q(z_{n_0})| - \|Q\|| \leq \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, segue que $\|Q\| = \|Q|_X\|$.

Aplicando novamente o princípio da reflexividade local, dessa vez ao espaço X e considerando os subespaços N e $M' = < x_k^* >_{k=1}^m \subseteq X^*$, existe um ϵ - isomorfismo $S : N \to X$ tal que:

$$x^*(S(y)) = y(x^*) \text{ para todos } x^* \in M' \text{ e } y \in N.$$

Tomando $x_k = S(y_k)$ tem-se que $\|x_k\| \leq 1 + \epsilon$ e :

$$Q(\epsilon_1 y_1 + ... + \epsilon_n y_n) = Q(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n).$$

Dessa maneira:

$$K_n(\mathrm{X}^{**}) \leq \frac{1}{2^n n!} \left| \sum_{\epsilon_k = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_n Q(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n) \right| + \eta.$$

Como $\|Q\| \leq 1$ segue que:

$$K_n(\mathrm{X}^{**}) \leq (1 + \epsilon)^n K_n(X) + \eta.$$

Logo $K_n(X^{**}) \leq K_n(X)$. A desigualdade $K_n(X^{**}) \geq K_n(X)$ decorre do fato de X estar imerso em X^{**}. $\square$

9 ULTRAPRODUTO DE IDEAIS DE OPERADORES

Este capítulo apresenta uma aplicação de ultraprodutos à teoria de ideais de operadores com a caracterização de ideais maximais apresentada no artigo de Heinrich (1980). As referências utilizadas para a teoria de ideais foram Pietsch (1980), Mihailov e Stan (2001) e Defant e Floret (1993).

Definição 9.1 (Ideal de Operadores)**.** *Uma classe $\mathfrak{U}$ de ternos $(T_i,\ X_i,\ Y_i)$ onde X_i e Y_i são espaços de Banach arbitrários sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ e T_i é uma aplicação em $\mathcal{L}(X_i;\ Y_i)$ é dita um ideal de operadores se verifica as seguintes propriedades (utilizando a notação $\mathfrak{U} \cap \mathcal{L}(X;\ Y) = \mathfrak{U}(X;\ Y)$):*

(i) $id_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{U}(\mathbb{K};\ \mathbb{K})$, onde $id_{\mathbb{K}}$ é a identidade em $\mathbb{K}$

(ii) Se T_1 e $T_2 \in \mathfrak{U}(X;\ Y)$ então $T_1 + T_2 \in \mathfrak{U}(X;\ Y)$

(iii) Se $T \in \mathcal{L}(X_1;\ X)$, $S \in \mathfrak{U}(X;\ Y)$ e $R \in \mathcal{L}(Y;\ Y_1)$ então $RST \in \mathfrak{U}(X_1;\ Y_1)$

Definição 9.2 (Quase Norma)**.** *Seja $\mathfrak{U}$ um ideal de operadores. Uma função $\alpha\colon \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^+$ é uma quase norma se satisfaz as propriedades:*

(i) $\alpha(id_{\mathbb{K}}) = 1$, onde $id_{\mathbb{K}}$ é a identidade no corpo $\mathbb{K}$.

(ii) Para cada par X, Y existe uma constante K tal que para todos T_1, T_2 em $\mathfrak{U}(X;\ Y)$ vale:

$$\alpha(T_1 + T_2) \leq K[\alpha(T_1) + \alpha(T_1)].$$

(iii) Se $T \in \mathcal{L}(X_1;\ X)$, $S \in \mathfrak{U}(X;\ Y)$ e $R \in \mathcal{L}(Y;\ Y_1)$ então:

$$\alpha(RST) \leq \|R\|\ \alpha(S)\ \|T\|.$$

Um ideal no qual está definido uma quase norma é dito um ideal quase normado, sendo denotado por $(\mathfrak{U},\ \alpha)$.

Definição 9.3 (Partes de Dimensão Finita de um operador)**.** *Se T é um operador em $\mathcal{L}(X;\ Y)$, as partes de dimensão finita do operador T são as aplicações do tipo $Q_N T J_M$, onde $M \subseteq X$ e $N \subseteq Y$ são subespaços respectivamente de dimensão finita e de codimensão finita ($\dim(Y/N)$ é finita), $Q_N\colon\ Y \to\ Y/N$ é a aplicação quociente e $J_M\colon\ M \to X$ é a inclusão.*

Definição 9.4 (Ideal Maximal)**.** *Um ideal quase normado é um ideal maximal se possui a seguinte propriedade:*

$$\sup_{\{M,N\}} \alpha(Q_N T J_M) = C < \infty \Rightarrow T \in \mathfrak{U} \text{ e } \alpha(T) \leq C.$$

Exemplo 9.1. *Sejam X e Y espaços de Banach, um operador $T \in \mathcal{L}(X,\, Y)$ é L_p-fatorável se existem aplicações $T_1\colon X \to L_p(\mu)$ e $T_2\colon L_p(\mu) \to Y^{**}$ tais que $\mathfrak{I}_Y T = T_2 T_1$, com μ uma medida qualquer e $\mathfrak{I}_Y$ a imersão canônica de Y em Y^{**}.*

O conjunto dos operadores L_p-fatoráveis é um ideal quase normado com a quase norma $\alpha(T) = \inf_{\{T_1,T_2\}} \|T_1\|\,\|T_2\|$. Heinrich (1980) cita um resultado presente no artigo de Kwapien (1972) o qual utiliza as ideias presentes na Proposição 9.1 para demonstrar que o ideal dos operadores L_p-fatoráveis é um ideal maximal.

Proposição 9.1. *Um ideal de operadores quase normado $(\mathfrak{U},\, \alpha)$ é maximal se e somente se verifica as condições:*

(i) Se $T_i \in \mathfrak{U}(X_i;\, Y_i)$ e $\alpha(T_i) \leq C < \infty$ para $i \in I$, então para todo ultrafiltro U em I, $T_U \in \mathfrak{U}((X_i)_U;\, (Y_i)_U)$, onde T_U está definida na Proposição 7.1.

(ii) Se $T \in \mathcal{L}(X;\, Y)$ e $\mathfrak{I}_Y T \in \mathfrak{U}(X;\, Y^{**})$ então $T \in \mathfrak{U}(X;\, Y)$, onde a aplicação $\mathfrak{I}_Y\colon Y \to Y^{**}$ é a imersão canônica.

A propriedade (i) é conhecida como ultraestabilidade e a propriedade (ii) como regularidade.

Demonstração. ($(\mathfrak{U},\, \alpha)$ é ultraestável regular $\Rightarrow$ $(\mathfrak{U},\, \alpha)$ é maximal)

Seja $(\mathfrak{U},\, \alpha)$ um ideal que possua as propriedades de ultraestabilidade e regularidade. Suponha $T \in \mathcal{L}(X,\, Y)$ e $\sup_{\{M,N\}} \alpha(Q_N T J_M) = C < \infty$. Considerando I como o conjunto dos pares do tipo $(M,\, N)$ com a ordenação:

$$(M_1,\, N_1) \prec (M_2,\, N_2) \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \text{ e } N_1 \supseteq N_2,$$

e considerando, para cada $i = (M_i,\, N_i)$, o conjunto:

$$V_i = \{j \in I, i \prec j\}.$$

A família $L = (V_i)_{i \in I}$ tem a propriedade da interseção finita. Dados V_1, V_2, ... V_n elementos de $(V_i)_{i\in I}$, então $\bigcap_{k=1}^n V_k = \{(M,\, N),\, (M',\, N') \prec (M,\, N)\}$, onde $N' = \bigcap_{k=1}^n N_k$ e $M' = < M_k >_{k=1}^n$.

Portanto existe um ultrafiltro U em I contendo L (proposição 3.5). É possível definir uma aplicação $J\colon X \to (M_i)_U$ como $J(x) = (x_i)_U$, sendo x_i dado por:

$$x_i = \begin{cases} x, \text{ se } x \in M_i \\ 0, \text{ se } x \notin M_i. \end{cases}$$

Dados x^1, $x^2 \in X$, segue da construção do ultrafiltro U:

$$\{j \in J, x^1 \in M_j \text{ e } x^2 \in M_j\} = \{j \in J, < x^1, x^2 > \subseteq M_j\} =$$
$$= \{j \in J, < x^1, x^2 > \subseteq M_j \text{ e } Y \supseteq N_j\} = \{j \in J, i \prec j\} \in U,$$

onde $i = (< x^1, x^2 >, Y) \in I$. Logo, para x^1, $x^2 \in X$,

$$J(x^1 + x^2) = (x^1 + x^2)_U = (x^1)_U + (x^2)_U,$$

provando a linearidade de J que também é claramente limitada. Defina também a aplicação Q: $(Y/N_i)_U \to Y^{**}$ como

$$Q([y_i])_U(g) = \lim_U g(y_i),$$

onde $g \in Y^*$ e $[y_i]$ é um elemento de Y/N_i. Para verificar a boa definição de Q, basta provar a implicação:

$$\|([y_i])_U\| = 0 \Rightarrow \lim_U g(y_i) = 0.$$

Dados $g \in Y^*$ e $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, seja N_g o núcleo de g. Como N_g tem dimensão finita, o conjunto

$$I_1 = \{(M_i, N_i) \in I, \{0\} \subseteq M_i \text{ e } N_g \supseteq N_i\}$$

pertence ao ultrafiltro U, devido à maneira como foi construído. Também,

$$I_2 = \{(M_i, N_i) \in I, dist(y_i, N_i) < \tfrac{\epsilon}{\|g\|}\}$$

pertence a U, já que $\|([y_i])_U\| = 0$. Portanto se $i \in I_1 \cap I_2$, $dist(y_i, N_g) < \frac{\epsilon}{\|g\|}$, logo existe $z_i \in N_g$ com $\|z_i - y_i\| < \frac{\epsilon}{\|g\|}$, segue que

$$\|g(z_i - y_i)\| \leq \|g\| \, \|z_i - y_i\| < \epsilon,$$

então $\|g(y_i)\| < \epsilon$, de maneira que

$$\{i \in I, \|g(y_i)\| < \epsilon\} \supseteq (I_1 \cap I_2) \in U.$$

Segue que $\lim_U g(y_i) = 0$.

Denote, para $i \in I$, $T_i = Q_{N_i} T J_{M_i}$. Tem-se que $(T_i)_U \in (\mathcal{L}(M_i, Y/N_i))_U$, logo pode-se considerar a aplicação associada T_U: $(M_i)_U \to (Y/N_i)_U$ segundo a Proposição 7.1. A aplicação $Q(T_U(J))$: $X \to Y^{**}$ verifica para todo g em Y^*:

$$Q(T_U(J(x)))(g) = Q(T_U((x_i)_U))(g) = Q(T_i x_i)_U(g) =$$
$$= Q(Q_{N_i} T J_{M_i} x_i)_U(g) = Q(Q_{N_i} T(x))_U(g) = Q([T(x)]_i)_U(g) =$$
$$= \lim_U g(T(x)) = \mathfrak{I}_Y T(x)(g)$$

onde $\mathfrak{I}_Y\colon Y \to Y^{**}$ é a imersão canônica. Dessa maneira:

$$Q(T_U(J)) = \mathfrak{I}_Y T.$$

Utilizando a ultraestabilidade, a aplicação T_U pertence a $\mathfrak{U}((M_i)_U;\, (Y/N_i)_U)$. Pela definição de ideal de operadores, $\mathfrak{I}_Y$T $\in \mathfrak{U}(X;\, Y^{**})$ e pela propriedade de regularidade, T pertence a $\mathfrak{U}(X;\, Y)$.

($(\mathfrak{U},\, \alpha)$ é maximal $\Rightarrow$ $(\mathfrak{U},\, \alpha)$ é ultraestável e regular)

Seja $(\mathfrak{U},\, \alpha)$ um ideal maximal. Para verificar a ultraestabilidade, será consideranda uma família $T_i \in \mathfrak{U}(X_i,\, Y_i)$ tal que $\alpha(T_i) \leq C < \infty$ para todo i em I. Demonstra-se que $\sup_{\{M,N\}} \alpha(Q_N T_U J_M) = C < \infty$ logo, pela maximalidade do ideal $\mathfrak{U}$, tem-se que T_U está em $\mathfrak{U}((X_i)_U;\, (Y_i)_U)$.

Sejam $M \subseteq (X_i)_U$ subspaço de dimensão finita e $N \subseteq (Y_i)_U$ subspaço de codimensão finita. Os espaços M e $(Y_i)_U/N$ possuem dimensão finita, então α é contínua no espaço $\mathcal{L}(M;\, (Y_i)_U/N)$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T - Q_N T_U J_M\| < \delta \Rightarrow |\alpha(T) - \alpha(Q_N T_U J_M)| < \epsilon$$

onde $T \in \mathcal{L}(M;\, (Y_i)_U/N)$.

Pela Proposição 5.1, para i em $I_0 \in U$, existem ϵ-isomorfismos $R_i\colon M \to M_i$.

Por ser de dimensão finita, o espaço $(Y_i)_U/N$ é isométrico ao espaço $((Y_i)_U/N)^*$ que por sua vez é isométrico ao espaço $N^\perp$ (Fabian et al. (2001), página 41). Tem-se

$$N^\perp \xrightarrow{g} ((Y_i)_U/N)^* \xrightarrow{f} (Y_i)_U/N,$$

com f e g isometrias. Então $N^\perp$ é subespaço de dimensão finita de $(Y_i)_U^*$.

Pela dualidade local em ultraprodutos (8.3), para todo $\epsilon' > 0$ arbitrário, existe um ϵ'-isomorfismo $S\colon N^\perp \to S(N^\perp) \subseteq (Y_i^*)_U$. O espaço $S(N^\perp)$ é um subespaço de dimensão finita em $(Y_i^*)_U$, logo, para i em $I_1 \in U$, existem ϵ'-isomorfismos $S_i'\colon N_i' \to S(N^\perp)$, sendo N'_i subespaço de dimensão finita de Y_i^* (Proposição 5.1). Existe N_i tal que Y_i/N_i é isométrico a N'_i ou de maneira resumida:

$$Y_i/N_i \xrightarrow{h} N_i' \xrightarrow{S_i'} (Y_i^*)_U \supseteq S(N^\perp) \xrightarrow{S^{-1}} (N^\perp)$$

onde S, S_i' são ϵ'-isomorfismos e h isometria. Dessa forma, compondo as aplicações assim definidas e tomando $\epsilon' > 0$ suficientemente pequeno, podem-se estabelecer ϵ-isomorfismos $S_i : Y_i/N_i \to (Y_i)_U/N$ com $S_i = f(g(S^{-1}(S_i(h))))$, para $i \in I_0 \cap I_1$. Considere aplicação $S_i Q_{N_i} T_i J_{M_i} R_i\colon M \to (Y_i)_U/N$, tem-se que:

$$\alpha(S_i Q_{N_i} T_i J_{M_i} R_i) \leq \|S_i Q_{N_i}\|\, \alpha(T_i)\, \|J_{M_i} R_i\| \leq (1+\epsilon)^2 C.$$

Também existe $i_0 \in I_0 \cap I_1$ tal que

$$\left\| Q_N T J_M - S_{i_0} Q_{N_{i_0}} T_{i_0} J_{M_{i_0}} R_{i_0} \right\| < \alpha.$$

Logo,

$$\left| \alpha(S_{i_0} Q_{N_{i_0}} T_{i_0} J_{M_{i_0}} R_{i_0}) - \alpha(Q_N T J_M) \right| < \epsilon,$$

então

$$\alpha(Q_N T J_M) < \epsilon + \alpha(S_{i_0} Q_{N_{i_0}} T_{i_0} J_{M_{i_0}} R_{i_0}) \leq \epsilon + (1 + \epsilon)^2 C.$$

Como ϵ é arbitrariamente pequeno, segue que $\alpha(Q_N T J_M) \leq C$. Portanto, como o ideal é maximal, $T_U \in \mathfrak{U}((X_i)_U;\, (Y_i)_U)$ e $\alpha(T_U) \leq C$.

Para verificar a regularidade, suponha que $\mathfrak{I}_Y T \in \mathfrak{U}(X;\, Y^{**})$. Para cada M subespaço de dimensão finita de X, seja $R\colon \mathfrak{I}_Y T(M) \to Y$ o ϵ-isomorfismo descrito na Proposição 5.7. Dessa maneira:

$$Q_N T_M = Q_N R \mathfrak{I}_Y T_M.$$

Como $\mathfrak{I}_Y T(M)$ pertence ao ideal:

$$\alpha(Q_N T_M) = \alpha(Q_N R \mathfrak{I}_Y T_M) \leq \|Q_N R\|\ \alpha(\mathfrak{I}_Y T)\ \|T_M\|.$$

Portanto $\alpha(Q_N T_M) \leq \alpha(\mathfrak{I}_Y T)$. Da maximalidade de $\mathfrak{U}$, decorre que $T \in \mathfrak{U}$. $\square$

REFERÊNCIAS

DEFANT, A.; FLORET, K. Tensor norms and operators ideals. *North-Holland Matematics Studies*, Elsevier, Amsterdan, v. 176, 1993.

DIESTEL, J.; JARCHOW, H.; TONGE, A. *Absolutely Summing Operators*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1995.

DINEEN, S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

FABIAN, M. et al. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. New York, NY, USA: Sringer, 2001.

HARRIS, L. Bounds on the dervativies of holomorphic functions of vectors. *Colloque d'Analyse*, L. Nachbin, Hermann, Paris, p. 145–163, 1975.

HEINRICH, S. Ultraproducts in Banach space theory. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, v. 1, n. 313, p. 1–220, 1980.

HUNGERFORD, T. W. *Algebra*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 2003.

JOHNSON, W. B.; ROSENTHAL, H. P.; ZIPPIN, M. On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics*, v. 9, p. 488–506, 1971.

KWAPIEN, S. On operators factorizable through L_p-spaces. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, Société Mathématique de France, v. 31-32, p. 215–225, 1972.

LINDSTROM, M.; RYAN, R. Applications of ultraproducts to infinite dimensional holomorphy. *Mathematica Scandinavica*, v. 71, n. 2, p. 229–242, 1992.

LǾS, J. Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d´algèbres. *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, North-Holland Publishing, Amsterdam, v. 1, n. 60, p. 98–103, 1955.

MIHAILOV, D.; STAN, I. Quasi normed operator ideals on Banach spaces and interpolation. *Novi Sad J. Math.*, Novi sad, v. 31, n. 2, p. 15–26, 2001.

MUJICA, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*. New York, NY, USA: Elsevier, 1986.

MUNKRES, J. R. *Topology*. New York, NY, USA: Prentice Hall, 2000.

PAPPAS, A.; RÉVÉSZ, S. G. Linear polarization constants of Hilbert spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, n. 300, p. 129–146, 2004.

PIETSCH, A. *Operators Ideals*. Berlin: North-Holland, 1980.

RUDIN, W. *Functional Analysis*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1973.

SARANTOPOLOUS, I. Estimates for polynomial norms on $L_p(\mu)$ spaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, n. 99, p. 263–271, 1986.

SCHOUTENS, H. *The Use of Ultraproducts in Commutative Algebra*. Berlin: Springer, 2010.

SIMS, B. Ultra-techniques in Banach space theory. *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, v. 1, n. 60, p. 1–117, 1982.

STERN, J. Ultrapowers and local properties of Banach spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 240, p. 231–252, 1978.