

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de Doutorado

**Tensor Energia-Momento de Vácuo em
Teoria Quântica de Campos
com Quebra Espontânea de Simetria**

Baltazar Jonas Ribeiro Morais

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Juiz de Fora–MG, Brasil

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de Doutorado

**Tensor Energia-Momento de Vácuo em
Teoria Quântica de Campos
com Quebra Espontânea de Simetria**

Autor: Baltazar Jonas Ribeiro Morais

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em Física.

23 DE ABRIL DE 2015

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Dedico este trabalho à minha esposa Elaine, à mamãe, aos meus
irmãos Dário e Mariana, aos meus tios maternos e
à minha avó Luiza.

Também o dedico à turma que partiu antes do combinado:
Meu avô Baltazar, Bosquinho e o tio sempre amado
Petrônio (ti Tõe).

In Memoriam

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por estar sempre comigo. Agradeço à minha mãe Mariza por ter me dado a vida e me proporcionado oportunidades singulares. Agradeço aos meus grandes companheiros e irmãos Dário e Mariana, meus tios maternos por terem me guiado pelos caminhos corretos e minha avó Luiza, sempre me alegrando com seu característico senso de humor. O meu muito obrigado à minha esposa Elaine, que sempre esteve ao meu lado, me dando apoio e suporte de maneira incondicional.

Agradeço ao Prof. Dr. Ilya L. Shapiro, pela orientação no período de meu doutorado, pela sugestão de assuntos para trabalhar, pelas discussões e esclarecimentos.

Gostaria de agradecer também aos pesquisadores Peter Lavrov, Manoel Asorey e Flávia Sobreira, que colaboraram no desenvolvimento do trabalho aqui apresentado.

Agradeço ao meu amigo Dante Pereira, pelas frutíferas conversas, pelos valorosos aconselhamentos e pela sincera amizade. Agradeço ainda aos amigos que comigo dividiram o ambiente de trabalho, sempre bem humorados e compreensivos. São os membros da nossa antiga sala vinte e dois: Alberto, Alan, Lucas, Marcelo, Wesley e Tiago Rochedo. E ainda ressalto nosso distinto amigo e membro convidado, Felipe Salles com quem sempre dividi prazerosas conversas. Agradeço também a todos os amigos e colegas, com os quais compartilhei momentos importantes e alegres durante esses quatro anos.

Não posso deixar de agradecer ao senhor Domingos Lopes, pessoa gentil, cortez e inacreditavelmente eficaz. Sempre nos atendendo com paciência e respeito.

Finalmente, agradeço à CAPES e FAPEMIG pelo apoio ao projeto do meu doutorado.

“ À luz do conhecimento já adquirido, o resultado obtido parece quase normal e qualquer estudante inteligente o advinha com facilidade. Assim a pesquisa procede por momentos distintos e prolongados, intuição, cegueira, exaltação e febre. Vem dar, um dia, nesta alegria e conhece tal alegria aquele que viveu estes momentos incomuns.”

Albert Einstein

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, nós obtemos o potencial efetivo para um campo escalar no espaço-tempo curvo, usando dois tipos de regularização *cut-off* covariante. O primeiro deles é baseado na representação de momento local e coordenadas normais de Riemann, enquanto que o segundo é baseado na representação de tempo próprio de Fock-Scwinger-DeWitt. Nós mostramos, para o exemplo de um campo escalar com auto interação, que ambos os métodos produzem resultados iguais para as divergências. No entanto, o primeiro método fornece informações mais detalhadas com respeito à parte finita. Além disso, nós calculamos também a contribuição, a um loop, de um férmion massivo. Finalmente, discutimos as equações do grupo de renormalização, bem como sua aplicação para teorias de multi-massa.

Na segunda parte deste trabalho, usamos a equação para o potencial efetivo previamente obtida e estudamos o tensor energia-momento renormalizado de vácuo. Embora este tensor tenha sido profundamente estudado pela comunidade científica por décadas, notava-se a presença de alguns aspectos duvidosos. Realizamos um estudo sobre a implementação do momento *cut-off* de maneira covariante. Uma parte qualitativamente nova é o cálculo do tensor energia-momento, no caso da quebra espontânea de simetria. Apesar da complexidade do assunto, mostramos que o resultado final satisfaz as leis de conservação e isso permite controlar bem o resultado final.

Palavras chave: Potencial efetivo; Coordenadas normais; Espaço curvo; Grupo de renormalização; Esquema de renormalização.

Áreas do conhecimento: Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo; Gravitação.

Abstract

In the first part of this work, we consider derivation of the effective potential for a scalar field in curved space-time within the physical regularization scheme, using two sorts of covariant cut-off regularizations. The first one is based on the local momentum representation and Riemann normal coordinates and the second is operatorial regularization, based on the Fock-Schwinger-DeWitt proper-time representation. We show, on the example of a self-interacting scalar field, that these two methods produce equal results for divergences, but the first one gives more detailed information about the finite part. Furthermore, we calculate the contribution from a massive fermion loop and discuss renormalization group equations and their interpretation for the multi-mass theories.

In the second part of the work, we study the renormalized energy-momentum tensor of vacuum. This tensor has been deeply explored many years ago. The main result of these studies was that such a tensor should satisfy the conservation laws which reflects the covariance of the theory in the presence of loop corrections. In view of this general result we address two important questions, namely how to implement the momentum cut-off in a covariant way and whether this general result holds in the theory with Spontaneous Symmetry Breaking. In the last case some new interesting details arise and although the calculations are more involved we show that the final result satisfies the conservation laws.

Keywords : Effective potential; Curved space; Normal coordinates; Renormalization group; Renormalization schemes

Knowledge areas : Quantum Field Theory in curved space-time;

Gravitation.

Lista de Publicações

- Sobreira F., Ribeiro B. J. & Shapiro I. L., *Effective potential in curved space and cut-off regularizations*, Phys. Lett. **B 705**, 273-278 (2011).
- Asorey M., Lavrov P. M., Ribeiro B. J. & Shapiro I. L., *Vacuum stress tensor in spontaneous symmetry breaking theory*, Phys. Rev. **D 85**, 104001 (2012).

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Publicações	vi
Conteúdo	vii
Lista de figuras	viii
1 Introdução	1
2 A Abordagem da Ação Efetiva	8
2.1 Funções de Green	9
2.2 Expansão em <i>loop</i> para a ação efetiva	13
2.3 Método de Schwinger-DeWitt	15
2.4 Equações do Grupo de Renormalização	19
3 O Potencial Efetivo no Espaço-Tempo Curvo	22
3.1 Potencial efetivo no espaço-tempo plano	24
3.1.1 Cálculo diagramático	26
3.2 Potencial efetivo no espaço-tempo curvo	29
3.2.1 Momento <i>cut-off</i> covariante	30
3.2.2 Potencial efetivo e as coordenadas normais de Riemann	31
3.2.3 Regularização <i>cut-off</i> de tempo próprio	34
3.2.4 Férmions	36
3.2.5 Grupo de Renormalização	37

4	O Tensor Energia-Momento no Contexto da Quebra Espontânea de Simetria	40
4.1	Sobre a renormalização no espaço-tempo curvo	43
4.2	Quebra espontânea de simetria e tensor energia-momento no espaço-tempo curvo	46
4.3	Covariância e conservação do tensor energia-momento de vácuo	50
4.4	Tensor energia-momento: parte clássica	52
4.5	Cálculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_v$	54
4.6	Cálculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_i$	57
5	Conclusão	64
A	Coordenadas normais de Riemann (ferramental matemático)	66
B	Equações de movimento efetivas	68
	Bibliografia	70

Lista de Figuras

- 3.1 Expansão diagramática em *loop* para o potencial efetivo. 27
- 3.2 Diferentes diagramas associados com o termo φ^4 na expansão a um *loop* do potencial efetivo. 28

Capítulo 1

Introdução

Durante muito tempo, a compreensão do homem em relação ao mundo que o cerca se resumia à visão Newtoniana da natureza e o pensamento científico se estabelecia sobre as bases de uma versão clássica e determinista do mundo. Até o início do século XX, acreditava-se que a Mecânica Clássica era suficientemente capaz de explicar todos os fenômenos físicos. Neste contexto, a equação dinâmica de Newton desempenhou um papel fundamental, pois ela descreve, por meio de equações diferenciais de segunda ordem, o movimento de um sistema de partículas massivas. Uma vez que conhecemos posição e velocidade iniciais de uma dada partícula, podemos obter todas as informações sobre o sistema e o movimento fica, dessa forma, completamente determinado. Essa maneira de descrever a natureza foi o paradigma da ciência durante muitos anos.

Com a melhoria no entendimento da eletricidade e dos fenômenos magnéticos, Maxwell se valeu do conceito de campo para descrever com sucesso a física da eletricidade e do magnetismo. A solução das equações de Newton representam uma trajetória dinâmica, na qual associa-se para cada instante de tempo, um vetor no espaço. Um campo, por outro lado, é uma relação que associa, para cada ponto no espaço e cada instante de tempo, uma quantidade que pertence a um dado espaço. Um dos grandes triunfos de Maxwell foi obter uma formulação dinâmica, onde os campos elétrico e magnético eram descritos como sendo duas manifestações de uma única entidade: o campo eletromagnético.

Uma das predições mais relevantes da teoria do eletromagnetismo foi a finitude da velocidade de propagação da radiação eletromagnética, independentemente do sistema de referência inercial, o que representou uma característica nova e que não estava presente no arcabouço da Mecânica Clássica, onde se acredita que a informação se propagava instan-

taneamente.

Além disso, a constância da velocidade da luz entrava em contradição com as, até então bem estabelecidas, transformações de Galileu. Com o intuito de superar estas dificuldades, Einstein desenvolveu a teoria da Relatividade Especial, na qual a constância da velocidade da luz, num sistema inercial de referência era considerado como um postulado da teoria. A Relatividade Especial apresentou uma nova maneira, até então desconhecida, de entendermos o espaço e o tempo onde ambos formam uma estrutura quadri-dimensional chamada de espaço-tempo.

No mesmo período que Einstein desenvolveu a Relatividade Especial, outra importante teoria que mudaria o panorama da ciência estava nos estágios iniciais de seu desenvolvimento. A Mecânica Quântica surgiu da necessidade de explicar certos resultados experimentais (por exemplo a catástrofe do ultra-violeta e o efeito fotoelétrico), que não podiam ser compreendidos no âmbito da Mecânica Clássica e do Eletromagnetismo.

Alguns anos mais tarde, a Mecânica Quântica e a Relatividade Especial se tornariam aceitas pela comunidade científica como sendo as teorias mais adequadas para descrever os fenômenos aos quais elas se aplicam. Entretanto, logo percebeu-se que não havia uma compatibilidade entre essas duas teorias, pois na Relatividade Especial, espaço e tempo desempenham o mesmo papel no contexto da formulação matemática desta teoria. Já na Mecânica Quântica, o tempo desempenha um papel privilegiado, que pode ser visto já na equação de Schroedinger. Para compatibilizar a Relatividade Especial e a Mecânica Quântica, finalmente desenvolveu-se uma teoria relativisticamente invariante conhecida como Teoria Quântica de Campos (TQC). Uma importante diferença entre a Mecânica Quântica e a TQC diz respeito à descrição de partículas. Na Mecânica Quântica, a função de onda é um elemento do espaço de Hilbert e descreve um sistema com um número de partículas fixo. Na TQC, o campo é um operador atuando no espaço de Fock e descreve estados quânticos com número de partículas variável, ou seja, na TQC o número de partículas não é constante, o que nos leva à descrição do fenômeno de criação de partículas de modo que os operadores associados aos campos são interpretados por meio de operadores de criação e aniquilação de partículas.

Uma das contribuições mais importantes para o desenvolvimento da TQC foi apresentada por Feynman em 1942 em sua tese de doutorado [49], onde ele desenvolveu o formalismo conhecido como método de integração de caminho. A integração (soma) de

caminhos resulta numa amplitude de transição para os processos quânticos representada por uma soma sobre todos os possíveis caminhos no espaço de configuração entre os estados inicial e final do processo que se deseja descrever. Nesta formulação, a integração deve conter, na versão Euclidiana, a ação clássica como o argumento negativo de uma exponencial, sendo que aqueles caminhos que mais se aproximarem da trajetória clássica devem contribuir de maneira mais significativa para a integração.

Sabe-se que vários métodos aproximativos tem sido importantes ferramentas para o estudo de fenômenos no âmbito da TQC, a razão disto é que esta teoria apresenta problemas complexos, para os quais obter uma solução exata, em grande parte dos casos, é praticamente impossível. Em função de suas características, o método de integração de caminhos se torna particularmente adequado para ser aplicado na construção de diferentes aproximações, inclusive na aproximação semi-clássica, no caso de teoria em espaço-tempo curvo.

Um dos esquemas de aproximação mais importantes, especialmente por sua forma covariante, é o método de campo de fundo, que foi em grande parte desenvolvido por DeWitt [41, 42]. No contexto deste método podemos dizer que a quantidade mais importante é a ação efetiva (AE) [27], a qual é um funcional do campo de fundo e, em princípio, contém toda a informação sobre a teoria quântica. Para que a TQC seja consistente no que diz respeito a descrever os processos de espalhamento, ela deve ser capaz de fornecer amplitudes de probabilidade de uma variedade destes processos, onde a matriz de espalhamento é conhecida como matriz S. A AE determina o propagador e as funções de vértice levando em consideração, de maneira adequada, todas as correções quânticas. Dessa forma, podemos dizer que por meio da AE pode-se determinar a matriz S e conseqüentemente obtém-se um estudo bem fundamentado sobre o processo de espalhamento [39, 75, 79].

Na discussão acima apresentada nota-se a ausência de um importante elemento, no sentido em que as teorias citadas não levam em consideração a Relatividade Geral (RG). A RG é uma teoria para o campo gravitacional, na qual espaço-tempo e campo gravitacional são descritos, respectivamente, por uma variedade e por um tensor simétrico não-degenerado chamado métrica, $g_{\mu\nu}$. A RG descreve eficazmente uma grande quantidade de fenômenos gravitacionais. No entanto, em um certo nível mais fundamental, acredita-se na existência de uma versão quantizada desta teoria. Meritórios esforços tem sido feitos por parte da comunidade científica para encontrar uma teoria consistente que corresponda a uma gra-

vidade quântica e este ainda é um problema em aberto. Embora muitos modelos teóricos apontem para a unificação da mecânica quântica com a RG, nenhum deles parece ser consistente em absoluto.

Uma das grandes dificuldades que surge quando se busca uma teoria para a gravidade quântica tange o aspecto da não-renormalizabilidade da teoria. Em outras palavras, aparecem certas infinitudes na teoria quantizada que não podem ser adequadamente removidas. Contudo, uma abordagem bem estabelecida e que aponta na direção de encontrar uma teoria quantizada para a gravitação é o que conhecemos como TQC no espaço curvo [23]. Nesta teoria, o campo gravitacional representa um campo de fundo clássico para os campos quânticos de matéria. Por esta razão, dizemos que a TQC no espaço-tempo curvo é uma teoria semi-clássica da gravitação. A equação que descreve o comportamento do tensor métrico ponto a ponto no espaço-tempo é dado por

$$\frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{mat} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac}, \quad (1.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal de Newton, $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}^{mat}$ é o tensor energia-momento (TEM) de matéria e $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac}$, o TEM de vácuo.

Um dos maiores triunfos desta teoria é o que conhecemos como radiação Hawking [58], segundo a qual um buraco negro emite radiação térmica, assim como um corpo negro, em função de efeitos quânticos. O processo descrito pela radiação Hawking reduz a massa do buraco negro, razão pela qual esse processo também é conhecido como evaporação de buracos negros.

Observe que a quantidade $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac}$ na equação (1.1) representa correções quânticas para o TEM vácuo, ou seja, contribuição de matéria quântica para a gravitação, que é clássica. De modo que, em particular, para o caso em que $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac} = 0$, estamos trabalhando no regime clássico e a equação (1.1) se reduz à equação de Einstein para a gravitação. Muitos estudos, a partir dos anos 70, foram dedicados à avaliação de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac}$, veja Ref. [23] (e referências correlacionadas). De maneira especial, estamos interessados em entender como a quebra espontânea de simetria (QES) afeta a quantidade $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac}$ mencionada acima.

Uma das importantes questões da TQC no espaço-tempo curvo é o cálculo do TEM de vácuo, pois os campos de matéria e partículas, estão diretamente associadas às equações cosmológicas e gravitacionais na forma do TEM de matéria. Dessa forma, é razoável esperar que os efeitos das flutuações do campo se façam notar nas correspondentes equações de

estado. Como exemplo podemos citar o fato do traço do TEM para a radiação ter um traço não nulo em razão da anomalia conforme. Esta anomalia faz com que apareçam alguns efeitos relevantes na equação de estado para a radiação na fase em que esta era predominante no universo [86]. Por outro lado, as correções quânticas não conferem ao conteúdo de matéria um caráter relativístico, e assim as equações de estado para as partículas massivas e matéria bariônica não devem se alterar muito. No entanto, se levarmos em consideração os efeitos do vácuo quântico, a situação pode ser bem diferente daquela em que consideramos o setor de matéria.

As correções quânticas acima mencionadas, podem ser relevantes no setor de vácuo de baixas energias e seria razoável esperar que os efeitos quânticos associados com tais correções pudessem ser obtidos por meio de uma aproximação no arcabouço da TQC. No entanto, como pode-se observar em [87], não há métodos regulares que efetivamente nos conduzam a tais resultados. A razão disso é que a correção quântica para a AE de vácuo se reduz, neste caso, a uma soma escrita em termos de produtos infinitos de componentes do tensor de curvatura, o que gera um problema, uma vez que teríamos de adicionar uma infinidade de termos não-locais. Uma possível solução para o problema seria, em princípio, abandonar a covariância e trabalhar com a parametrização conforme da métrica de fundo, calculando assim, as correções quânticas [88]. Só que para isso, teríamos que trabalhar no regime de altas energias onde existe uma certa confiabilidade no procedimento de subtrações mínimas. Observe que como foi mencionado acima, estamos interessados em calcular as correções quânticas no regime de baixas energias, o que torna a idéia de abandonar a covariância e usar a parametrização conforme da métrica de fundo para o cálculo das correções quânticas, pouco prolífera.

Na tentativa de encontrar uma aproximação alternativa para calcular as correções quânticas, alguns autores obtiveram resultados que se baseiam numa regularização *cut-off* onde a métrica considerada é a métrica cosmológica conformalmente plana [21, 65] (veja também [61]). Nestes trabalhos, a regularização *cut-off* no espaço dos momentos é utilizada para calcular quantidades como “densidade de energia” e “pressão” do vácuo. No desenvolvimento de tais trabalhos considera-se a expansão do Universo por meio de uma série perturbativa no parâmetro de Hubble H . A ordem zero desta expansão foi calculada e discutida em detalhes em Refs. [37] e [2]. Este procedimento não covariante é produto da equação do estado de vácuo para a radiação $p_{vac} = \rho_{vac}/3$, esta equação nos guia no

sentido de entender o aparecimento da não covariância e de restaurar a covariância *ad hoc* [71]. Neste ponto, DeWitt esclareceu que [37] o resultado em si advém propriamente de uma regularização não covariante.

No caso descrito acima, onde se usa a regularização *cut-off* e a métrica cosmológica conformalmente plana, usa-se também a subtração do resultado do espaço-tempo plano [2], isso resulta numa equação de estado para o vácuo que é proporcional ao produto dos quadrados da constante de Hubble H^2 e do parâmetro *cut-off*. Este resultado indica uma contradição para a covariância geral da AE, e as características bem estabelecidas da renormalização em espaços curvos são violadas [23, 27, 63]. Os resultados dos cálculos associados com a situação acima apresentada, embora inconsistentes com um esquema de renormalização no espaço-tempo curvo bem estabelecido, não devem ser negligenciados por completo, pois eles abrem caminho para a possibilidade de estudo das correções do tipo $\mathcal{O}(H^2)$ para a energia de vácuo. É válido ainda ressaltar que o problema da implementação da regularização *cut-off* de maneira covariante, foi solucionado (considerando-se a representação de momentos local) em [22], com base nos resultados de Ref. [93].

A situação acima apresentada constitui o conteúdo motivacional desta tese.

Devido à grande importância que a abordagem da AE tem no desenvolvimento deste trabalho, dedicamos parte do Capítulo dois desta tese à descrição desta abordagem. Ressaltamos que este Capítulo não tem conteúdo original e é incluído por razões de consistência geral da tese. É importante lembrar que a AE é uma das ferramentas mais poderosas na TQC e gravitação quântica, pois, como foi mencionado acima, a partir dela pode-se obter as informações sobre a teoria considerada. Apresentamos as funções de Green e a expansão em *loop* para a AE. Uma ferramenta de cálculo em espaços curvos que utilizaremos no decorrer do trabalho é o método de Schwinger-DeWitt. Apresentamos uma breve revisão sobre este método, o qual também será utilizado para realizar o cálculo do potencial efetivo no espaço-tempo curvo. Apresentamos ainda uma breve revisão sobre as equações do grupo de renormalização, pois as mesmas são necessárias na interpretação dos resultados obtidos no capítulo seguinte.

Começamos o Capítulo três com uma revisão sobre o cálculo do potencial efetivo no espaço-tempo plano. Em seguida, calculamos o potencial efetivo para um campo escalar no espaço-tempo curvo dentro do esquema físico de regularização, usando dois tipos de regularizações *cut-off* covariantes. A primeira delas é baseada na representação local de momentos e nas coordenadas normais de Riemann [76] e a segunda se baseia na representação de tempo próprio de Fock-Schwinger-DeWitt¹. Nós mostramos que, no contexto de um campo escalar com auto-interação, estes dois métodos produzem resultados iguais para as divergências. No entanto, o primeiro método nos fornece informações mais detalhadas a respeito da parte finita. Além disso, calculamos também a contribuição de um férmion massivo a um *loop* e discutimos as equações do grupo de renormalização, bem como suas respectivas interpretações para teorias com massas dos campos quânticos diferentes.

No Capítulo quatro mostramos que, no caso de teorias com quebra espontânea de simetria no espaço-tempo curvo, a quantidade $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{vac}$ ganha a contribuição de um novo termo, inédito na literatura. De modo geral, o Capítulo é dedicado ao estudo deste novo termo. Consideramos as leis de conservação para o TEM, que refletem diretamente, na covariância da teoria na presença de correções quânticas. Com base neste resultado, nós levantamos duas questões importantes. A primeira delas diz respeito a como implementar o momento *cut-off*, de maneira covariante. A segunda delas está relacionada com a possibilidade de saber se este resultado geral se insere no contexto da quebra espontânea de simetria. Neste caso, com base nos cálculos apresentados no decorrer deste Capítulo, nós mostramos que o resultado final está de acordo com as leis de conservação para o TEM.

¹Por razões de simplicidade, usaremos a partir deste ponto, a expressão: tempo próprio de DeWitt.

Capítulo 2

A Abordagem da Ação Efetiva

Neste Capítulo, apresentamos uma revisão sobre a abordagem da ação efetiva (AE), cuja importância para a construção da TQC é notável. Em particular, conhecendo a AE, podemos calcular a matriz S . Conforme veremos mais adiante, as derivadas funcionais da AE possuem relevância para o cálculo de amplitudes de transição. Por exemplo, a derivada funcional de ordem quadrática da AE com respeito ao campo nos fornece uma quantidade que contém as correções quânticas para o propagador do campo. Derivadas funcionais da AE superiores à ordem dois, determinam as funções de vértice. Dessa forma, dizemos que a ação efetiva é o funcional gerador das funções de vértice.

Neste ponto, é relevante ressaltar que, através de um conhecimento prévio das funções de vértice, juntamente com o propagador da teoria, é possível determinar as funções de Green, e por meio destas é possível conhecer, como mencionamos acima, a matriz completa dos processos de espalhamento, ou seja, a matriz S . Todavia, as quantidades fundamentais da TQC, como o propagador e as funções de vértice, se baseiam em variações funcionais da quantidade $\Gamma[\varphi]$. Por esta razão dizemos que a ação efetiva $\Gamma[\varphi]$ é a quantidade mais importante da teoria considerada, visto que a partir dela, podemos obter toda a informação para construir a TQC.

Começamos com uma breve revisão sobre as funções de Green, onde obtemos o propagador da teoria no ramo do método de campo de fundo, que descreve todas as correções quânticas. Em seguida apresentamos uma revisão sobre a expansão em *loops* para a AE, sobre o método de Schwinger-DeWitt e sobre as equações do Grupo de Renormalização.

2.1 Funções de Green

Para fundamentar a abordagem da AE é necessário começar com o funcional gerador das funções de Green, a quantidade $Z[J]$,

$$Z[J] = \int D\varphi e^{(S+J\varphi)} = \int D\varphi e^{iS_0+iS_{int}+iJ\varphi}, \quad (2.1)$$

onde a ação da teoria livre é

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (2.2)$$

e o termo de interação é escrito como

$$S_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \varphi^4. \quad (2.3)$$

Podemos expandir $Z[J]$ em potências de J , ao fazermos isso obtermos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int d\varphi e^{iS} \left[1 + i \int d^4x_1 J(x_1) \varphi(x_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 J(x_1) J(x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) + \dots \right] \\ &= \frac{i^s}{s!} \sum_{s=0}^{\infty} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_s J(x_1) \dots J(x_s) \int D\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_s) e^{iS[\varphi]}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Introduzindo a notação (veja [75, 103] para maiores detalhes)

$$G^s(x_1, \dots, x_s) = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_s) \rangle = \frac{\int D\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_s) e^{iS}}{\int D\varphi e^{iS_0}}, \quad (2.5)$$

podemos reescrever a equação (2.4) como

$$Z[J] = Z[0] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_s J(x_1) \dots J(x_s) G^{(s)}(x_1 \dots x_s), \quad (2.6)$$

onde

$$Z[0] = \int D\varphi e^{iS_0}. \quad (2.7)$$

As quantidades $G^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ definidas acima são as chamadas funções de Green de n pontos, as quais podem ser escritas, levando em consideração a equação (2.7), como

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{i^n Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (2.8)$$

A quantidade $G^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ é escrita em termos da variação funcional n-ésima da quantidade $Z[J]$ com relação à fonte $J(x)$, razão pela qual esta quantidade é conhecida como a funcional geratriz das funções de Green.

Outra maneira de escrever a quantidade $Z[J]$ é através da consideração da expansão no parâmetro λ . Podemos citar como exemplo a função de Green de dois pontos, que descreve a propagação de uma partícula de x_1 a x_2 , assim tomando $s = 2$ na equação (2.5), temos

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) | 0 \rangle + \frac{(-i\lambda)}{4!} \int d^4x \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi^4(x) | 0 \rangle \\ &+ \frac{(-i\lambda)^2}{(4!)^2} \int d^4x \int d^4y \langle 0 | \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi^4(x) \varphi^4(y) | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

A função de Green $G^{(2)}(x_1, x_2)$, descreve a propagação na teoria com interação entre os pontos x_1 e x_2 . No entanto, na teoria livre, ou seja, em ordem zero de λ , a função de dois pontos é o propagador (da teoria livre) $D(x_1 - x_2)$, de tal maneira que $G^{(2)}(x_1, x_2) = iD(x_1 - x_2)$.

É claro que ao escrevermos os diagramas de Feynman correspondentes à relação (2.8), encontramos diagramas que são conectados [79] e diagramas não-conectados. Em outras palavras, a equação (2.8) não representa uma relação que nos fornece apenas diagramas conectados. Para descrever a física que está ligada com os processos de espalhamento, precisamos trabalhar somente com funções de Green conectadas¹, tal fato torna notória a necessidade de uma equação análoga à equação (2.8) que nos permita obter exclusivamente os diagramas conectados. No desenvolvimento que se segue vamos apresentar tal equação e explicitar a relação das funções de Green conectadas com a AE, a qual é o objeto principal de nosso estudo.

É importante ressaltar que as funções de Green que estão diretamente ligadas com os elementos da matriz S são as chamadas funções de Green conexas. Em particular, estamos interessados numa classe mais especial das funções de Green conexas conhecida como *one particle irreducible*, 1PI. É essa classe de funções de Green que está diretamente ligada aos elementos da matriz S e o que garante tal afirmação é a fórmula de redução LSZ (veja por exemplo, [24, 75, 101]). Neste contexto, os diagramas são tais que não podem ser divididos em dois pelo corte de uma linha interna. Estes diagramas correspondem exatamente às

¹As funções de Green conectadas são adequadas, porque as não-conectadas podem ser encontradas em função delas.

funções de Green acima definidas como 1PI.

Introduzimos o funcional gerador das funções de Green conectadas $W[J]$ através da seguinte relação

$$G_n^c(x_1, x_2, \dots, x_n|J) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta iJ(x_1)\delta iJ(x_2)\dots\delta iJ(x_n)}. \quad (2.10)$$

Uma importante diferença com a equação (2.8) é que aqui não colocamos $J = 0$ depois de tomar as derivadas funcionais.

As quantidades $Z[J]$ e $W[J]$ estão relacionadas da seguinte maneira [27]

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (2.11)$$

Em seguida definimos o campo médio através da relação

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0|T\hat{\varphi}(x)\exp(i\int dx\hat{\varphi}(x)J(x))|0\rangle}{\langle 0|T\exp(\int dx\hat{\varphi}(x)J(x))|0\rangle} \equiv \varphi(x), \quad (2.12)$$

ou seja,

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (2.13)$$

Esta última relação representa a equação para encontrar a fonte $J(x)$. O campo médio é um funcional da fonte externa $J(x)$. É possível mostrar que a derivada funcional do campo médio com respeito a fonte externa $J(x)$, é o propagador. Assim, se a matriz para o propagador for não degenerada, podemos escrever a fonte externa como um funcional de φ . Por meio desta propriedade, é possível mostrar [39, 43] que existe um funcional $\Gamma[\varphi]$, o qual chamamos de ação efetiva, que depende do campo médio e pode ser escrito em termos da seguinte relação [27]

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int dx\varphi(x)J(x). \quad (2.14)$$

Assim, dizemos que a ação efetiva $\Gamma[\varphi]$ é um funcional do campo médio $\varphi(x)$.

Em seguida apresentamos algumas propriedades importantes do funcional $\Gamma[\varphi]$. Inicialmente lembremos que para o caso da ação clássica contendo um termo de interação entre o campo φ e a fonte externa $J(x)$, a equação clássica de movimento é dada por

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x). \quad (2.15)$$

De maneira inteiramente análoga, podemos escrever uma equação de movimento para a ação efetiva. Naturalmente, para chegarmos a tal equação é necessário tomar a variação de $\Gamma[\varphi]$ com respeito a $\varphi(x)$ em ambos os lados da equação (2.14). Tal variação produz

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int dy \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)} - J(x) - \int dy \varphi(y) \frac{\delta J(y)}{\delta \varphi(x)}. \quad (2.16)$$

Substituindo a equação (2.13) na equação (2.16), resulta que

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \quad (2.17)$$

Esta última equação representa a equação efetiva de movimento associada com a dinâmica do campo médio. Ao compararmos as equações (2.15) e (2.17), podemos concluir que o funcional $\Gamma[\varphi]$ desempenha na teoria quântica, o mesmo papel que a ação $S[\varphi]$ desempenha na teoria clássica. Por esta razão, chamamos ao funcional $\Gamma[\varphi]$ de ação efetiva.

Mas de que forma o propagador da teoria estaria relacionado com a ação efetiva? Para responder a esta pergunta vamos tomar a variação com respeito à fonte externa $J(x)$ em ambos os lados da equação (2.13), e também a variação com respeito ao campo φ em ambos os lados da equação (2.17), de tal maneira que

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = \frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(y)} \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)}. \quad (2.19)$$

Com base nas equações (2.18) e (2.19), podemos escrever que

$$\int dy \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} = - \int dy \frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(z)} = -\delta(x-z). \quad (2.20)$$

A quantidade $G_2^c(x, y|J)$ está definida na equação (2.10). Então chegamos, se considerarmos $n = 2$ na equação (2.10), à seguinte igualdade

$$\int dz G_2^c(x, y|J) \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(z)} = \delta(x-z). \quad (2.21)$$

A partir desta última equação concluímos que

$$G_2^c(x, y|J) = \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \right)^{-1}. \quad (2.22)$$

Dessa forma, dizemos que a relação (2.21) define o propagador da teoria. Tal propagador é considerado como o propagador do campo de fundo, o qual contém todas as correções quânticas. Derivadas funcionais da ação efetiva, superiores à ordem dois, determinam todas as funções de vértice da teoria quântica [27]. Dessa forma, dizemos que a ação efetiva é o funcional gerador das funções de vértice. Neste ponto, é relevante ressaltar que, através de um conhecimento prévio das funções de vértice, juntamente com o propagador da teoria, é possível determinar as funções de Green, e por meio destas, é possível conhecer a matriz

de espalhamento, ou seja, a matriz S [101]. Note que toda a construção apresentada acima se baseia em variações funcionais da quantidade $\Gamma[\varphi]$. Por esta razão dizemos que a ação efetiva $\Gamma[\varphi]$ é a quantidade mais importante da teoria considerada, visto que a partir dela, podemos obter todas as informações para construir a TQC [7, 27, 39, 43].

2.2 Expansão em *loop* para a ação efetiva

De acordo com o que foi apresentado previamente, a quantidade $Z[J]$ pode ser escrita em termos de W , que é o funcional gerador das funções de Green conectadas, essa relação é descrita pela equação (2.11). Por outro lado, sabemos as quantidades Γ e W estão relacionadas pela equação (2.14). Vamos então substituir (2.14) em (2.11), o que resulta em

$$Z[J] = \exp\left(\frac{iW[J]}{\hbar}\right) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma[\phi] + \int dx \phi(x)J(x)\right)\right], \quad (2.23)$$

onde denotamos o campo médio por ϕ . Observe que restauramos a quantidade \hbar de maneira que possamos usá-la como um parâmetro de expansão em *loops*.

Lembre que a fonte externa $J(x)$ é descrita pela equação (2.17). Por outro lado, sabemos que a integração funcional que descreve a teoria de campos é dada pela equação

$$Z[J] = \int D\varphi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi] + \int dx \varphi(x)J(x)\right)\right]. \quad (2.24)$$

Como as equações (2.23) e (2.24) descrevem a mesma quantidade, podemos igualá-las, lembrando que o campo φ pode ser escrito como um campo que descreve uma configuração estável acrescida de uma quantidade que deve flutuar em torno dessa configuração estável, ou seja, vamos usar que $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$, onde naturalmente, ϕ é o que chamamos de campo de fundo. Então resulta que

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right) = \int D\varphi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi + \phi] - \int dx \varphi(x) \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)}\right)\right], \quad (2.25)$$

onde foi usada a relação $J = \delta\Gamma/\delta\varphi$. Vamos realizar uma mudança de variáveis $\varphi = \hbar^{1/2}\varphi$. Expandindo o funcional $S[\hbar^{1/2}\varphi + \phi]$ numa série de potências de $\phi(x)$ e agrupando os termos adequadamente, obtemos

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma[\phi] - S[\phi]\right)\right\} = \int D\varphi \exp\left[\frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2-1}}{n!} S_n \varphi^n - \hbar^{-1/2}\varphi(\Gamma_1[\phi] - S_1[\phi])\right], \quad (2.26)$$

onde denotamos que

$$S_n = \frac{\delta^n S}{\delta \phi^n}, \quad \Gamma_1[\phi] = \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} \quad e \quad \varphi \Gamma_1[\phi] = \int dx \varphi(x) \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)}. \quad (2.27)$$

É razoável esperar que a AE seja escrita como a soma de duas parcelas. A primeira delas corresponderia a uma contribuição clássica $S[\phi]$ e a segunda a uma contribuição quântica (a qual vamos denotar por $\bar{\Gamma}[\phi]$), de tal maneira que $\Gamma[\phi] = S[\phi] + \bar{\Gamma}[\phi]$. Mas a quantidade $\bar{\Gamma}[\phi]$ deve representar todas as correções quânticas para a ação clássica, isso nos permite escrever essa quantidade como uma série de potências em \hbar

$$\bar{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi], \quad (2.28)$$

essa expansão é chamada de expansão em *loop*, onde o número de *loops* é dado pela potência de \hbar . Com base no que foi apresentado, podemos reescrever a equação (2.26) sob a forma

$$\exp\left(i \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1} \bar{\Gamma}[\phi]^{(n)}\right) = \int D\varphi \exp\left[\frac{1}{2} S_2[\phi] \varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2-1}}{n!} S_n \varphi^n - \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{-1/2+n} \varphi \bar{\Gamma}_1^{(n)}[\phi]\right]. \quad (2.29)$$

As quantidades funcionais que estão na exponencial do lado direito dessa última equação representam a ação de uma teoria cujo propagador está associado com o termo quadrático $S_2 \varphi^2$ e termos de ordem superior à ordem quadrática representam as interações entre os campos.

Da equação (2.29) resulta que

$$\exp(i \bar{\Gamma}^1[\phi]) = \int D\varphi \exp\left(\frac{1}{2} S_2 \varphi^2\right) = \text{Det}^{-1/2} S_2[\varphi]. \quad (2.30)$$

Logo

$$\bar{\Gamma}^1[\phi] = \frac{i}{2} \ln \text{Det} S_2[\varphi] = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln S_2[\varphi]. \quad (2.31)$$

Esta expressão nos permite calcular a correção a um *loop* para a AE, a qual é o objeto importante da TQC, pois várias informações da teoria quântica estão contidas na estrutura de funcional da AE de um *loop*. No entanto, aparecem termos que apresentam divergências. A maneira como procedemos neste caso, é adicionar os contratermos, os quais cancelam os termos divergentes. A ação que contém os contratermos é chamada de ação clássica renormalizada.

No que tange o aspecto do procedimento utilizado nesta seção para o desenvolvimento da expansão em *loop*, é notório o fato de que na equação (2.25) o campo foi considerado

sob o aspecto de uma reparametrização, na medida em que usamos $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$. Contudo, o que fundamenta tal reparametrização é o chamado método de campo de fundo [1].

2.3 Método de Schwinger-DeWitt

O método de Schwinger-DeWitt nos permite calcular, de maneira covariante, correções quânticas a um *loop* para a AE. Uma abordagem que antecede este método e que foi de importância capital para o desenvolvimento do mesmo foi a técnica do *heat kernel*². Para ser mais preciso, em 1937 Fock mostrou que é possível representar as funções de Green como integrais sobre uma variável auxiliar (tempo próprio) de um núcleo (*kernel*) que satisfaz a uma equação de calor [51]. Mais tarde, Schwinger percebeu que a abordagem apresentada por Fock se encaixava no contexto da renormalização e da invariância de calibre na TQC [81]. Estes dois trabalhos acima citados, basicamente introduziram o método do *heat kernel* na TQC (mais especificamente para a eletrodinâmica quântica). Posteriormente, DeWitt aplicou os resultados de Schwinger para a realização de cálculos em espaços curvos [39, 40, 41, 42]. A relevância de descrever o método de Schwinger-DeWitt nesta seção, se deve ao fato de que vamos usá-lo para calcular, no Capítulo 3, o potencial efetivo no espaço-tempo curvo. Por esta razão, apresentamos no que se segue uma exposição breve sobre este método e uma versão completa pode ser encontrada em [39].

Começamos esta abordagem com a equação para o propagador no espaço-tempo curvo

$$\sqrt{-g} \hat{\mathcal{H}} G(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (2.32)$$

A quantidade $\hat{\mathcal{H}}$ é um operador que atua no espaço dos campos ϕ e é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = \Delta + \left(\hat{P} - \frac{\hat{1}}{6} R \right) \quad (2.33)$$

onde

$$\Delta = \hat{1} g^{\mu\nu} \hat{\mathcal{D}}_\mu \hat{\mathcal{D}}_\nu. \quad (2.34)$$

Nesta última equação, temos que

$$\hat{\mathcal{D}}_\mu = \nabla_\mu + \hat{h}_\mu \quad (2.35)$$

²Vamos usar a expressão *heat kernel* ao invés de núcleo de calor.

representa a derivada covariante generalizada, a qual obedece à seguinte relação de comutação

$$[\hat{\mathcal{D}}_\mu, \hat{\mathcal{D}}_\nu]\phi = \hat{S}_{\mu\nu}\phi. \quad (2.36)$$

Observe que a quantidade Δ definida na equação (2.34) pode ser escrita, por meio da equação (2.35), como

$$\Delta = g^{-1/2}(\nabla_\mu + \hat{h}_\mu)g^{1/2}g^{\mu\nu}(\nabla_\nu + \hat{h}_\nu). \quad (2.37)$$

Então resulta das equações (2.33) e (2.37) que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= g^{-1/2}(\nabla_\mu + \hat{h}_\mu)g^{1/2}g^{\mu\nu}(\nabla_\nu + \hat{h}_\nu) + \left(\hat{P} - \frac{\hat{1}}{6}R\right) \\ &= \hat{1}\square + 2\hat{h}_\mu\nabla^\mu + \hat{\Pi}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde nesta última passagem identificamos as seguintes quantidades

$$\begin{aligned} \square &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu, \\ \hat{h}^\mu &= g^{\mu\nu}\hat{h}_\nu, \\ \hat{\Pi} &= \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6}R + \nabla_\mu\hat{h}^\mu + \hat{h}_\mu\hat{h}^\mu. \end{aligned} \quad (2.39)$$

É possível mostrar que

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_\mu\hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu\hat{h}^\mu, \\ \hat{S}_{\mu\nu} &= \hat{1}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \nabla_\nu\hat{h}_\mu - \nabla_\mu\hat{h}_\nu + \hat{h}_\mu\hat{h}_\nu - \hat{h}_\nu\hat{h}_\mu. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Na descrição que se segue, vamos considerar a função de Green $G(x, x')$ como sendo o elemento matricial de um operador \hat{G} , de modo que $G(x, x') = \langle x|\hat{G}|x'\rangle$, onde o operador \hat{G} atua no espaço de Hilbert [81]. Os vetores $|x'\rangle$ são auto-vetores de um conjunto de operadores hermitianos que comutam \mathbf{x}^μ , logo

$$\mathbf{x}^\mu|x\rangle = x^\mu|x\rangle \quad e \quad \langle x|x'\rangle = \delta(x, x'). \quad (2.41)$$

Escrevendo a equação (2.32) na forma de operador, temos

$$\hat{\mathcal{H}}\hat{G} = \hat{1}. \quad (2.42)$$

O operador \hat{G} admite representação integral [81] em termos da variável auxiliar³ s

$$\hat{G} = \hat{\mathcal{H}}^{-1} = i \int_0^\infty e^{-is\hat{\mathcal{H}}} ds. \quad (2.43)$$

³Esta variável auxiliar corresponde ao tempo próprio de DeWitt.

Uma vez que $G(x, x')$ é um elemento do operador matricial \hat{G} podemos escrever, por meio da equação (2.43), o seguinte elemento de \hat{G}

$$G(x, x') = i \int_0^\infty \langle x, s | x', 0 \rangle ds, \quad (2.44)$$

onde nesta última passagem usamos que $\langle x, s | x', 0 \rangle = \langle x | e^{-i\hat{H}s} | x' \rangle$. No entanto, a quantidade $\langle x, s | x', 0 \rangle$ é uma amplitude de transição, que denotamos por $\hat{U}(x, x', s) = \langle x, s | x', 0 \rangle$, e essa amplitude deve satisfazer uma equação parecida com a equação de Schroedinger (que também é chamada de equação do *heat kernel*)

$$i \frac{\partial}{\partial s} \hat{U}(x, x', s) = \langle x, s | \hat{\mathcal{H}} | x', 0 \rangle. \quad (2.45)$$

Neste ponto, seria interessante recordar que a proposta deste método é encontrar o propagador no espaço-tempo curvo, ou seja, resolver a equação (2.32). Contudo, levando em consideração o desenvolvimento acima apresentado, tudo que precisamos fazer é determinar a amplitude de transição $\hat{U}(x, x', s)$ que é dada pela equação (2.45), ou seja, estamos diante de um problema dinâmico governado pelo operador $\hat{\mathcal{H}}$. Naturalmente, uma vez que já conhecemos a quantidade $\hat{U}(x, x', s)$, o próximo passo é substituir o resultado encontrado na equação (2.44) e considerar a integração em ds . Essa tarefa se torna possível se escrevermos o seguinte ansatz [67] para a amplitude de transição

$$\hat{U}(x, x', s) = -i(4\pi)^{-n/2} [D(x, x')]^{1/2} s^{-n/2} \exp [i \sigma(x, x')/2s] \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'), \quad (2.46)$$

onde n representa a dimensão do espaço-tempo e quantidade $D(x, x')$ é o determinante de Van Vleck-Morette [68]

$$D(x, x') = \det \left(- \frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^\mu \partial x'^\nu} \right). \quad (2.47)$$

A quantidade $\sigma(x, x')$ é um bi-escalar conhecido como intervalo geodésico. Este intervalo é metade do quadrado da distância geodésica entre os pontos (x, τ) e (x', τ') e dizemos que ele é um bi-escalar, devido ao fato de que ele se transforma como um escalar em ambos os pontos mencionados.

Vamos adotar a seguinte notação para o limite de coincidência

$$\hat{a}_k(x, x) = \lim_{x \rightarrow x'} \hat{a}_k(x, x') = \hat{a}_k |. \quad (2.48)$$

Ainda com relação à equação (2.46) assumimos (com base na notação previamente definida) que

$$\hat{a}_0 | = \hat{1}. \quad (2.49)$$

Para determinar os coeficientes \hat{a}_k | devemos substituir a equação (2.46) na equação (2.45), de modo que

$$\hat{U}(x, x', s) = \exp(is\hat{\mathcal{H}})\delta(x, x') = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{[D(x, x')]^{1/2}}{s^{n/2}} \exp\left[\frac{i\sigma(x, x')}{2s}\right] \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \quad (2.50)$$

Substituindo então $\hat{U}(x, x', s) = \exp(is\hat{\mathcal{H}})\delta(x, x')$ na equação do *heat kernel*

$$\left(i\frac{\partial}{\partial s} + \hat{\mathcal{H}}\right)\hat{U}(x, x', s) = 0, \quad (2.51)$$

é possível mostrar que [11, 39]

$$\hat{a}_1 | = \hat{P}, \quad (2.52)$$

$$\hat{a}_2 | = \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \square R) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}\square\hat{P} + \frac{1}{12}\hat{S}_{\mu\nu}^2, \quad (2.53)$$

onde as quantidades \hat{P} e $\hat{S}_{\mu\nu}$ são descritas pelas equações (2.40). Lembre que a quantidade \hat{a}_0 | é descrita pela equação (2.49).

Podemos também analisar o problema do ponto de vista da AE, isso nos permite tirar algumas conclusões importantes sobre as divergências que estão associadas com os coeficientes \hat{a}_k |. Vamos então considerar que $S_2[\phi] = \hat{\mathcal{H}}$ na equação (2.31), o que nos permite escrever

$$\delta\bar{\Gamma}^1[\phi] = \frac{i}{2} \delta(\text{Tr} \ln \hat{\mathcal{H}}) = \frac{i}{2} \text{Tr} [\hat{\mathcal{H}}^{-1} \delta\hat{\mathcal{H}}]. \quad (2.54)$$

Novamente, o propagador $\hat{\mathcal{H}}^{-1}$ admite representação integral descrita na equação (2.43) e a equação (2.54) fica reescrita como

$$\delta\bar{\Gamma}^1[\phi] = \frac{i}{2} \text{Tr} \left\{ \delta\hat{\mathcal{H}} \int_0^\infty i ds e^{-is\hat{\mathcal{H}}} \right\} = \delta \left\{ \frac{-i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{\mathcal{H}}} \right\}. \quad (2.55)$$

Portanto,

$$\bar{\Gamma}^1[\phi] = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{\mathcal{H}}}. \quad (2.56)$$

Em Ref. [39] o operador evolução temporal $\hat{U}(x, x'; s) = e^{-is\hat{\mathcal{H}}}$ é definido como

$$\hat{U}(x, x'; s) = \frac{1}{(4\pi i)^{n/2}} \frac{D^{1/2}(x, x')}{s^{n/2}} e^{i\frac{\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k(x, x'), \quad (2.57)$$

Como explicado acima, esta última equação obedece a uma equação diferencial parcial do tipo equação do calor e após algumas considerações, que não serão aqui abordadas, os resultados para os coeficientes \hat{a}_0 |, \hat{a}_1 | e \hat{a}_2 | coincidem (no caso do campo escalar) com as equações (2.49), (2.52) e (2.53). Substituindo a equação (2.57) na equação (2.56), temos

$$\bar{\Gamma}^1[\phi] = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{(4\pi i)^{n/2}} \frac{D^{1/2}(x, x')}{s^{n/2}} e^{i\frac{\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{a}_k(x, x'). \quad (2.58)$$

A expressão (2.58) foi estudada em muitos aspectos, começando com [39]. Um dos resultados importantes (veja Ref.[11]) é que as divergências ultra-violeta estão relacionadas apenas com o limite inferior de integração. É válido ressaltar também que para 4 dimensões, a contribuição a um *loop* para a AE apresenta divergências que estão associadas a apenas três termos desta última equação. Em particular, para o caso quadri-dimensional, as divergências quárticas, quadráticas e logarítmicas estão associadas com os valores $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$ respectivamente.

É importante ainda destacar que a equação (2.58) possui uma certa restrição, pois ela leva a certos problemas de interpretação para o caso em que $m = 0$. Com o intuito de estudar o caso de teorias que levam em consideração campos sem massa, tais como teorias de gauge ou gravidade quântica, Vilkovisky propôs um novo método [97], o qual ficou conhecido como teoria de perturbação covariante e foi desenvolvido numa série de trabalhos [10, 12, 13, 14].

2.4 Equações do Grupo de Renormalização

Uma consequência do processo de renormalização é que os resultados obtidos no fim do processo podem depender da escolha da escala de renormalização μ . Existe um grupo de transformações associadas com a variação do parâmetro μ . É preciso ressaltar que existe também uma simetria que advém da dependência do parâmetro μ acima mencionada, de tal maneira que o grupo de transformações que diz respeito à variação do parâmetro μ é chamado de grupo de renormalização (GR) [35]. Nesta parte do trabalho, vamos seguir a abordagem descrita em [27, 69] para obter as equações do GR no espaço-tempo curvo. Aqui vamos apresentar tudo com base na regularização dimensional para trabalhar no espaço-tempo curvo. No entanto, quando calcularmos no capítulo seguinte, as equações do GR para os parâmetros do potencial efetivo, vamos usar a regularização *cut-off*.

Vamos considerar o funcional gerador das funções de Green “nuas” (*bare*), o qual é dado por

$$e^{iW_0[J_0]} = \int D\varphi_0 e^{i(S_0[\varphi_0, p_0] + \varphi_0 J_0)} \quad (2.59)$$

e o funcional gerador das funções de Green renormalizadas,

$$e^{iW[J]} = \int D\varphi e^{i(S[\varphi, p] + \varphi J)}, \quad (2.60)$$

onde a quantidade p representa um conjunto de parâmetros tais como constantes de acoplamento, massas e alguns outros. Da mesma forma, na equação (2.59), p_0 representa o conjunto de parâmetros “nus”. Em seguida vamos considerar que, de acordo com a renormalização multiplicativa $S_0[\varphi_0, p_0] = S[\varphi, p]$, vamos ainda nos valer da seguinte mudança de variáveis $\varphi_0 \rightarrow Z_1^{1/2}\varphi$, onde φ_0 e φ são campos escalares médios. Ressaltamos que na breve exposição que se segue, adotamos a abordagem de campos escalares. Mas pode-se, em princípio, obter a generalização para outros campos. As considerações acima apresentadas nos permitem concluir, das equações (2.59) e (2.60) que $W_0[J_0] = W[J]$. Assim,

$$J = \mu^{(n-4)} Z_1^{1/2} J_0. \quad (2.61)$$

Dessa forma, o campo médio deve satisfazer à seguinte relação

$$\varphi_0 = \frac{\delta W_0}{\delta J_0} \mu^{(n-4)} Z_1^{1/2} \varphi. \quad (2.62)$$

A AE pode ser escrita como

$$\Gamma[\varphi_0] = W_0[J_0] - \varphi_0 J_0 = \Gamma[\varphi], \quad (2.63)$$

ou seja,

$$\Gamma_0[g_{\mu\nu}, \varphi_0, p_0, n] = \Gamma[g_{\mu\nu}, \varphi, p, \mu, n], \quad (2.64)$$

onde μ é a escala de energia típica e n o parâmetro de regularização dimensional. Observe que o lado esquerdo da equação (2.64) não depende da quantidade μ , isso nos permite escrever que

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma[g_{\mu\nu}, \varphi, p, \mu, n] = 0. \quad (2.65)$$

Consequentemente,

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial}{\partial p} + \int d^n x \sqrt{-g} \mu \frac{d\varphi(x)}{d\mu} \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \right] \Gamma[g_{\mu\nu}, \varphi, p, \mu, n] = 0. \quad (2.66)$$

Em seguida, vamos denotar

$$\mu \frac{dp}{d\mu} = \beta_p(n) \quad (2.67)$$

e

$$\mu \frac{d\varphi(x)}{d\mu} = \gamma(n)\varphi(n), \quad (2.68)$$

onde chamamos a quantidade $\beta_p(n)$ na equação (2.67) de função beta, ou simplesmente, função- β . Por meio das equações (2.66), (2.67) e (2.68), podemos escrever que

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_p(n) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma(n) \int d^n x \sqrt{-g} \mu \varphi(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \right] \Gamma[g_{\mu\nu}, \varphi, p, \mu, n] = 0. \quad (2.69)$$

Esta última equação é conhecida como a equação do grupo de renormalização para a AE e pode ser usada, no espaço-tempo curvo, em diferentes contextos, inclusive no contexto do cálculo do potencial efetivo [29]. Com relação a interpretação do parâmetro μ em termos de valores físicos, pode-se citar o exemplo da Eletrodinâmica Quântica, onde este parâmetro é interpretado como escala de energia. Como veremos no capítulo seguinte, esta interpretação não se aplica para o caso do potencial efetivo de campos escalares e fermiônicos.

Capítulo 3

O Potencial Efetivo no Espaço-Tempo Curvo

Recentemente houve um crescente interesse sobre os esquemas físicos de regularização e renormalização no espaço-tempo curvo. Em particular, podemos mencionar os trabalhos que tratam do TEM no vácuo na regularização *cut-off* de momentos [2, 21, 37, 65, 66, 70, 73] e a intensa discussão sobre a interpretação física do grupo de renormalização [8, 25, 44, 78, 85, 86, 87, 89, 90, 102].

Uma das características da abordagem do *cut-off* é que esta regularização pode produzir uma quebra explícita da invariância local de Lorentz [37] e também da covariância geral. Assim, seria interessante ter um exemplo de cálculos baseados no *cut-off* que preservem ambas as simetrias explicitamente.

O potencial efetivo de um campo escalar no espaço-tempo curvo foi estudado em vários trabalhos começando com [29, 56, 62, 91] (veja [27] para outras referências). Em particular, uma expressão bem geral para tal potencial efetivo foi obtida em [29] através do método do grupo de renormalização. Na verdade isso está ligado com o esquema de subtrações mínimas de renormalização quando os efeitos de massa dos campos quânticos é ou ignorado ou levado em consideração pelo método heurístico. Uma motivação adicional para esquemas de regularização e renormalização mais físicos vem de considerações inflacionárias. No recente trabalho [19] observa-se que (veja também trabalhos prévios [94]) a inflação de Higgs, similar à originalmente inventada por A. Guth [57], pode ser consistente com testes observacionais uma vez que se leva em consideração que o campo de Higgs H se acopla não-minimamente com a curvatura escalar. Deve-se ainda comentar

que o termo correspondente ξRH^*H é necessário para que o modelo de partículas elementares seja multiplicativamente renormalizável no espaço-tempo curvo [27]. O valor de ξ deve ser da ordem de $10^4 - 10^5$, no caso da inflação consistente, mas isso não representa um problema, porque a quantidade dimensional $|\xi R|$ não excede o quadrado da massa de Higgs. A grande diferença entre a inflação de Higgs e os modelos inflacionários baseados no *inflaton* é que o campo de Higgs foi recentemente detectado experimentalmente com uma grande certeza. Assim o modelo de [19, 57] deve ser considerado como o primeiro candidato a descrever um paradigma inflacionário [84]. De acordo com os trabalhos sobre inflação de Higgs [9, 20] (veja também [92] e referências correlacionadas), as correções quânticas do grupo de renormalização para o potencial de Higgs desempenham um papel essencial neste modelo inflacionário, de tal maneira que se as levamos em consideração, temos como consequência importantes restrições para a massa de Higgs. Este resultado se baseia no já bem conhecido grupo de renormalização associado com o potencial efetivo no espaço-tempo curvo, completamente equivalente com o qual foi precursoramente desenvolvido em [29, 27], e trata de contribuições a um ou mais *loops*. No entanto, na medida em que tais considerações estão baseadas no esquema de subtrações mínimas, seria lícito verificar qual é o efeito das massas dos campos quânticos através de um cálculo direto. Neste sentido, voltamos nossa atenção para a *cut-off* covariante e para os efeitos de massas no potencial de Higgs no espaço-tempo curvo, e assim calculamos, a um *loop*, o potencial efetivo de um campo escalar no espaço-tempo curvo.

Consideramos dois tipos de regularização *cut-off*. A primeira se baseia na representação de momentos local, que está ligada com as coordenadas normais de Riemann e a segunda, também chamada de regularização operatorial, se baseia na representação de Fock-Schwinger-DeWitt do tempo próprio. Recentemente, demonstrou-se que estes dois tipos de regularização produzem resultados equivalentes no espaço-tempo plano [64]. Em virtude disso, nossos cálculos podem ser vistos como uma tentativa de extensão desta recente demonstração para o espaço-tempo curvo¹.

Começamos este capítulo como uma descrição sobre o potencial efetivo no espaço-tempo plano. Em seguida apresentamos uma versão sobre cálculos em espaços curvos começando com uma visão focada nos diagramas de Feynman. Em seguida apresentamos

¹Na verdade, no espaço-tempo curvo temos uma pequena diferença entre os dois métodos no que diz respeito à parte finita do potencial efetivo, como vai ficar claro nas próximas seções.

uma breve discussão sobre o momento *cut-off* covariante e posteriormente fazemos o cálculo do potencial efetivo para um campo escalar na presença de auto-interação do ponto de vista da regularização *cut-off* na representação local de momentos. Consideramos também um esquema de regularização *cut-off* operatorial tecnicamente mais simples. Usamos ainda nosso método de cálculo para analisar o caso de campos fermiônicos. Finalmente, na última seção a dependência da quantidade μ e as equações do grupo de renormalização são abordadas para os parâmetros da teoria em discussão.

3.1 Potencial efetivo no espaço-tempo plano

Nesta seção encontra-se uma consideração sobre o potencial efetivo no espaço plano. Para uma exposição pedagógica sobre o assunto com maiores detalhes veja Ref. [98]. Considerações similares foram recentemente publicadas em [15], para um modelo de dois campos escalares acoplados a férmions sem massa.

O potencial efetivo no espaço plano é bem conhecido [34] (considerações sobre o caso massivo são descritas em Ref. [98], onde a consideração é feita via diagramas de Feynman). Podemos obter o mesmo resultado dos trabalhos acima citados via método funcional de integral de caminhos. Começamos com a expansão da AE do campo escalar em derivadas,

$$\Gamma(\varphi) = \int d^4x \left[-V_{eff}(\varphi) + \frac{1}{2}Z(\varphi)(\nabla\varphi)^2 + \dots \right], \quad (3.1)$$

onde a quantidade $V_{eff}(\varphi)$ é o potencial efetivo, o qual corresponde ao termo de ordem zero numa expansão nas derivadas do campo escalar médio. O potencial efetivo, no nível de um *loop*, é dado por

$$V_{eff}(\varphi) = m^2\varphi^2 + V(\varphi) + \bar{V}_0(\varphi), \quad (3.2)$$

onde $m^2\varphi^2 + V(\varphi)$ é a parte clássica. A contribuição de um *loop* tem a forma

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{V}_0(\varphi) &= \frac{i}{2} \text{Tr} \ln S_2(\varphi) - \frac{i}{2} \text{Tr} \ln S_2(\varphi = 0) \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} \ln [(\square + m^2)^{-1}(\square + m^2 + V'')]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vamos denotar a quantidade V' como a derivada primeira do potencial com respeito ao campo e V'' como a derivada segunda. Nesta última equação, $S_2(\varphi = 0)$ é a forma bilinear da ação clássica no formalismo de campo de fundo [59]. O termo $\text{Tr} \ln S_2(\varphi = 0)$ da equação (3.3) pode ser visto como uma normalização de uma integral funcional. Na

verdade, podemos realizar os cálculos sem este termo, mas neste caso observaríamos a presença de divergências mais fortes, em outras palavras, a presença deste termo faz com que divergências mais fortes se cancelem e isso nos poupa algum trabalho na hora de adicionar os contratermos. Ressaltamos ainda que este termo surge naturalmente da representação diagramática do potencial efetivo [98]. No espaço-tempo curvo o termo $\text{Tr} \ln S_2(\varphi = 0)$ passa a depender da métrica e dessa forma se torna relevante. Aqui e no que se segue vamos omitir o fator de volume infinito.

Note que a contribuição a um *loop* descrita pela equação (3.3) representa uma correção quântica para a expressão completa $V(\varphi) + m^2\varphi^2$ e não somente para a quantidade $V(\varphi)$, adotaremos também estas premissas no que se segue.

Levando em conta a consideração no espaço-tempo curvo, vamos denotar o potencial efetivo no espaço-tempo plano como \bar{V}_0 . Por meio da equação (3.3) escrevemos que

$$-\int d^4x \bar{V}_0(\varphi) = \frac{i}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{-k^2 + m^2 + V''}{-k^2 + m^2} \right). \quad (3.4)$$

Em seguida vamos considerar a rotação de Wick na integral sobre k . Neste caso lembre que $k_0 = ik_4$, $-k^2 \rightarrow k^2$, então temos que

$$-\int d^4x \bar{V}_0(\varphi) = -\frac{1}{2} \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{k^2 + m^2 + V''}{k^2 + m^2} \right). \quad (3.5)$$

Para realizar a integração vamos usar as coordenadas esféricas, onde $\int d^4k = 2\pi^2 \int_0^\infty k^3 dk = \pi^2 \int_0^\infty k^2 dk^2$. Vamos usar também a regularização *cut-off*, por meio da qual

$$\int_0^\infty = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_0^\Omega. \quad (3.6)$$

Vamos denotar ainda, a partir deste ponto, a dependência da quantidade \bar{V}_0 com respeito da métrica Minkowskiana. Então resulta que

$$\bar{V}_0(\varphi, \eta_{\mu\nu}) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\Omega k^2 dk^2 \ln \left(\frac{k^2 + m^2 + V''}{k^2 + m^2} \right). \quad (3.7)$$

Depois de resolver as integrações chegamos nos seguintes resultados

$$\bar{V}_0(\varphi, \eta_{\mu\nu}) = \bar{V}_0 = \bar{V}_0^{div} + \bar{V}_0^{fin}, \quad (3.8)$$

$$\bar{V}_0^{div} = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \Omega^2 V'' - \frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 \ln \left(\frac{\Omega^2}{m^2} \right) \right\}, \quad (3.9)$$

$$\bar{V}_0^{fin} = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 \ln \left(1 + \frac{V''}{m^2} \right) - \frac{1}{4} (m^2 + V'')^2 \right\}. \quad (3.10)$$

A contribuição quântica (3.8) deve ser associada com os contratermos locais apropriados, os quais escolhemos como tendo a seguinte forma²

$$\Delta V_0 = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ -\Omega^2 V'' + \frac{1}{2}(m^2 + V'')^2 \ln \left(\frac{\Omega^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{4}(m^2 + V'')^2 \right\}. \quad (3.11)$$

Observe que eliminamos as divergências quadráticas e logarítmicas e chegamos na forma simples do potencial efetivo renormalizado.

$$\begin{aligned} V_{ren,0}^{eff}(\varphi, \eta_{\mu\nu}) &= m^2 \varphi^2 + V + \bar{V}_0 + \Delta V_0 \\ &= m^2 \varphi^2 + V + \frac{1}{64\pi^2} (m^2 + V'')^2 \ln \left(\frac{m^2 + V''}{\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Uma breve análise dos contratermos presentes na equação (3.11) nos mostra que a teoria renormalizável é tal que a estrutura $V(\varphi) = const \times \varphi^4$ se faz presente. A razão disso é que para o potencial considerado $V(\varphi)$, os contratermos tem a mesma forma do potencial clássico, somado a uma constante cosmológica. A seguir vamos ver que as mesmas características se fazem notar no espaço-tempo curvo, quando o termo não-mínimo $\xi R\varphi^2$ for introduzido.

3.1.1 Cálculo diagramático

Nesta seção, vamos calcular o potencial efetivo no espaço-tempo plano através dos diagramas de Feynman. Essencialmente o que precisamos encontrar são os diagramas que correspondem à função de Green de n pontos $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. É importante lembrar que a ação com a qual estamos trabalhando é do tipo $S = S_0 + S_{int}$, onde as quantidade S_0 e S_{int} são dadas, respectivamente, pelas equações (2.2) e (2.3). Conseqüentemente, devemos considerar diagramas que correspondam a auto-interação, ou seja, de cada vértice devem emanar quatro linhas. Uma vez que as funções de Green de n pontos podem ser escritas em termos de uma expansão em série de potências em λ , o número de vértices de cada diagrama deve corresponder à ordem da expansão em λ e o número de pontos externos deve corresponder à ordem de n na equação (2.5). Ressaltamos que estamos interessados nas correções a um *loop*, então os diagramas que devemos considerar estão representados na figura abaixo

²Por conveniência incluímos os contratermos finitos em ΔV , isso pode ser devidamente compensado por uma mudança em μ .

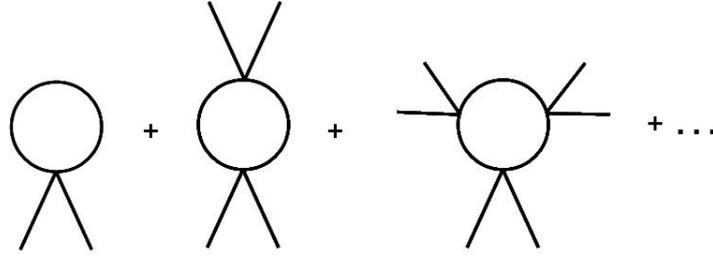


Figura 3.1: Expansão diagramática em *loop* para o potencial efetivo.

O primeiro diagrama da figura 3.1 possui um vértice, isso nos mostra que ele diz respeito à primeira ordem da expansão em λ . Desse vértice emanam quatro linhas, ou seja, o termo de interação é de fato do tipo $\lambda\varphi^4$. Este diagrama possui ainda dois pontos externos, o que indica que estamos trabalhando com a função de dois pontos.

Usando as regras de Feynmann [79], o primeiro diagrama deve corresponder³ a

$$(-i\lambda)\varphi^2 \frac{1}{4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.13)$$

onde usamos que as linhas externas levam a momentos nulos. Em outras palavras, como linhas externas não estão associadas ao propagador observamos nesta última equação apenas uma integração nos momentos. O primeiro diagrama da figura 3.1 possui apenas um vértice, isso justifica a presença do termo $i\lambda$ na equação (3.13). Ainda com relação a esta equação observamos que para cada “perna” temos um termo φ .

O fator de simetria é calculado através da seguinte relação

$$s = \frac{1}{(2n)!} s_n d_n, \quad (3.14)$$

onde s_n é o fator de simetria de um diagrama individual e d_n é o número de diagramas diferentes. Em particular para o segundo diagrama da figura 3.1 temos na verdade 3 tipos de representações conforme indica a figura abaixo

³Embora a rotação de Wick tenha sido previamente discutida, vamos aqui trabalhar no espaço de Minkowski.

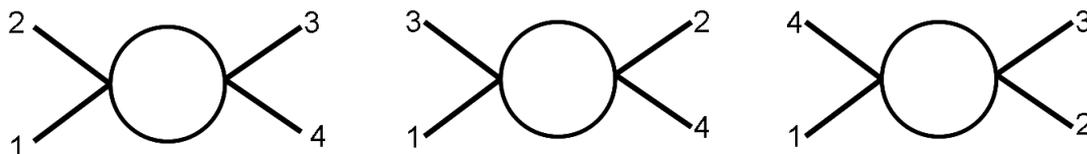


Figura 3.2: Diferentes diagramas associados com o termo φ^4 na expansão a um *loop* do potencial efetivo.

Dessa forma, devemos ter para este caso ($n = 2$) que $d_2 = 3$ e de acordo com o teorema de Wick, sabemos que $s_2 = 1/2$. Então, o fator de simetria para o segundo diagrama representado na figura 3.1 deve ser $1/16$ e a representação integral para este diagrama é dada⁴ por

$$(-i\lambda\varphi)^2 \frac{1}{16} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2. \quad (3.15)$$

De maneira geral pode-se mostrar que, para o n -ésimo diagrama com $2n$ pernas externas existem $d_n = (2n - 1)(2n - 3)$ diagramas distintos e o fator de simetria de um diagrama individual é dado por $s_n = (n - 1)!/2$, de modo que o fator de simetria do n -ésimo diagrama é dado por $s = (1/2n)(1/2)^n$. Estas considerações nos conduzem à seguinte forma para as correções quânticas a um *loop* para o potencial efetivo

$$\begin{aligned} \bar{V}_0 &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda\varphi^2}{2} \right)^n \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^n \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\lambda\varphi^2/2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para renormalizar a última equação poderíamos adicionar os contratermos, assim como fizemos na seção anterior. No entanto, esta tentativa não é válida aqui, pois ainda não conhecemos o potencial efetivo para que possamos efetuar o procedimento de adicionar os contratermos. Por esta razão, vamos nos valer das condições de renormalização

$$\left. \frac{d^2 V_{eff}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = m_R^2 \quad e \quad \left. \frac{d^4 V_{eff}}{d\varphi^4} \right|_{\varphi=0} = \lambda_R, \quad (3.17)$$

onde m_R e λ_R representam a massa m e a constante λ na versão renormalizada.

Em seguida vamos levar em consideração que $V_{eff}(\varphi) = (1/2)m^2\varphi^2 + V(\varphi) + \bar{V}_0(\varphi)$, onde $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4!$ e $\bar{V}_0(\varphi)$ é dado pela equação (3.16). Então resulta que

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\lambda\varphi^2/2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right). \quad (3.18)$$

⁴Note que linhas externas correspondem a momentos nulos, motivo pelo qual as mesmas são negligenciadas.

Agora por meio das condições de renormalização e da equação (3.18) obtemos que

$$m^2 = m_R^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.19)$$

$$\lambda = \lambda_R - \frac{3}{2} i \lambda^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2. \quad (3.20)$$

Substituindo as equações (3.19) e (3.20) na equação do potencial efetivo, obtemos depois de uma simples álgebra que

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{1}{2} m_R^2 \varphi^2 + \frac{\lambda_R}{4!} \varphi^4 - \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \left[1 - \frac{(\lambda_R \varphi^2 / 2)^2}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \right] - \frac{1}{4} \lambda_R \varphi^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} - i \frac{\lambda_R^2}{16} \varphi^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m_R^2 + i\epsilon} \right)^2. \quad (3.21)$$

Resolvendo as integrações em p^0 , resulta que

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{1}{2} m_R^2 \varphi^2 + \frac{\lambda_R}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_R^2 + \lambda_R \varphi^2 / 2} - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_R^2} \right) + \frac{\lambda_R \varphi^2}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_R^2}} - \frac{\lambda_R^2 \varphi^4}{64} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\mathbf{p}^2 + m_R^2)^{3/2}}. \quad (3.22)$$

Após efetuar todas as integrações nesta última equação, o resultado para o potencial efetivo fica escrito na forma

$$V_{eff}(\varphi) = \frac{1}{2} m_R^2 \varphi^2 + \frac{\lambda_R}{4!} \varphi^4 + \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{16} \left(m_R^2 + \frac{\lambda_R \varphi^2}{2} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda_R \varphi^2}{2m_R^2} \right) - \frac{1}{32} \lambda_R m_R^2 \varphi^2 - \frac{3}{128} \lambda_R^2 \varphi^4 \right]. \quad (3.23)$$

Esta última equação é equivalente à expressão para o potencial efetivo renormalizado, que foi encontrada anteriormente na Seção (3.1). Contudo, estamos tratando com as quantidades m^2 e λ na forma renormalizada, ou seja, para encontrar essas quantidades utilizamos as condições de renormalização descritas pela equação (3.17). Por esta razão, a expressão para o potencial efetivo (3.23) não contém o parâmetro μ .

3.2 Potencial efetivo no espaço-tempo curvo

Uma vez que o alvo principal desta parte do trabalho tange o aspecto da aplicação à cosmologia, seria lícito estender os resultados conhecidos para o potencial efetivo no que se refere a levar em consideração a curvatura.

Em particular estamos interessados, neste trabalho, na ordem linear na curvatura. A razão disto é que a primeira ordem é suficiente para a nossa proposta de trabalho e

porque nossos cálculos se tornam demasiadamente complexos se trabalhamos uma ordem a cima. Entretanto, as coordenadas normais de Riemann viabilizam, em princípio, a possibilidade de se fazer cálculos em qualquer ordem desejada no tensor de curvatura e nas suas derivadas, além serem muito úteis quando se avalia contribuições de *loops* superiores. Nesta parte do trabalho seguimos basicamente a abordagem apresentada em Ref. [93].

3.2.1 Momento *cut-off* covariante

Conforme foi mencionado anteriormente, o potencial efetivo é definido como o termo de ordem zero na expansão de derivadas da ação efetiva de um campo escalar médio,

$$\Gamma[\varphi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -V_{eff}(\varphi) + \frac{1}{2}Z(\varphi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi, +\dots \right\}. \quad (3.24)$$

O cálculo da quantidade $V_{eff}(\varphi)$ pode ser feito considerando-se φ como constante, em diferentes teorias com diferentes tipos de campos quânticos. Neste trabalho consideramos dois exemplos, sendo o primeiro deles a auto interação de um campo escalar e o segundo um campo fermiônico com acoplamento de Yukawa para o *background* escalar, ambos no espaço-tempo curvo.

Nosso ponto de partida é a ação para um campo escalar

$$S_0[\varphi, g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}(m^2 - \xi R)\varphi^2 - V(\varphi) \right\}, \quad (3.25)$$

onde $V(\varphi) + m^2\varphi^2$ é o termo mínimo de potencial e $\xi R\varphi^2$ é o termo de acoplamento não-mínimo, o qual é fundamental para que a teoria seja renormalizável no espaço-tempo curvo. No espaço-tempo plano o escalar de curvatura é nulo ($R = 0$) e assim o termo de acoplamento não-mínimo também deve ser nulo. Nossa proposta é calcular as correções a um *loop* para a equação (3.25) no caso de escalar constante. Os cálculos são feitos no espaço-tempo quadri-dimensional e estamos particularmente interessados no caso renormalizável em que $V = \lambda\varphi^4/4!$. Contudo, vamos nesta seção usar a notação geral $V(\varphi)$ como sendo mais compacta e geral. Também enfatizamos que a teoria do campo escalar, cuja ação é dada pela equação (3.25) é renormalizável no ramo da gravitação semi-clássica [27], onde a métrica não é quantizada e representa um *background* clássico para campos quânticos de matéria (no nosso caso campos escalares). A consistência e o *status* da aproximação semiclássica foram recentemente discutidos em Ref. [84].

3.2.2 Potencial efetivo e as coordenadas normais de Riemann

As coordenadas normais de Riemann são uma ferramenta útil para calcular quantidades locais como divergências ou o potencial efetivo. Estas coordenadas se baseiam em linhas geodésicas que ligam algum ponto fixo $P'(x^{\mu'})$ a outros pontos. Sempre é possível assumir que $g_{\mu\nu}(P') = \eta_{\mu\nu}$. Pode-se fixar as condições iniciais para as linhas geodésicas de tal maneira que a métrica no ponto $P(x^\mu)$ seja escrita como uma série de Taylor em torno do ponto $y^\mu = x^\mu - x^{\mu'}$. Os coeficientes de tal expansão estão associados ao tensor de curvatura, às suas contrações e às derivadas covariantes no ponto P' . Em especial, estamos interessados nesta parte do trabalho, como já foi dito acima, em termos de primeira ordem na curvatura e assim todas as expansões serão consideradas como sendo de primeira ordem. Por exemplo, para o tensor métrico encontramos que [76]

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x') - \frac{1}{3}R_{\alpha\nu\beta\nu}(x')y^\mu y^\nu. \quad (3.26)$$

O operador bilinear da ação (3.25) é dado por

$$-\hat{H} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S_0}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x')} = \square + m^2 - \xi R + V''. \quad (3.27)$$

Expandindo adequadamente o operador \square em coordenadas de Riemann resulta que

$$-\hat{H} = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta \partial_\mu\partial_\nu - \frac{2}{3}R^\alpha{}_\beta y^\beta \partial_\alpha + m^2 - \xi R + V''. \quad (3.28)$$

Sem dúvida alguma, o termo $-\xi R$ também pode ser expandido, mas na medida em que nos interessa apenas termos que estão dentro da ordem considerada $\mathcal{O}(R)$, essa expansão deixa de ser relevante.

A principal vantagem da representação de momentos local é que todas as considerações podem ser feitas no espaço-tempo plano (mas com os elementos modificados da técnica de Feynman) e o resultado para uma dada quantidade local é sempre covariante. A equação para o propagador do campo escalar possui a seguinte forma

$$\hat{H}G(x, x') = -g^{1/4}(x')\delta(x, x')g^{1/4}(x). \quad (3.29)$$

Uma maneira menos árdua de realizar os cálculos é trabalhar com o propagador modificado [31] $\bar{G}(x, x')$, onde

$$\hat{H}\bar{G}(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (3.30)$$

É de grande importância para nós que o lado direito desta última equação não dependa da métrica, pois necessitamos usar a relação $\text{Tr} \ln \hat{H} = -\text{Tr} \ln G(x, x')$ para podermos obter a dependência da curvatura. A forma explícita para $\bar{G}(x, x')$ é bem conhecida [31] para o caso livre $V'' = 0$. Mas uma vez que $V'' = \text{const}$, podemos simplesmente substituir m^2 por $\tilde{m}^2 = m^2 + V''$ e assim obter na primeira ordem em R que

$$\bar{G}(y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{iky} \left[\frac{1}{k^2 + \tilde{m}^2} - \frac{(\xi - 1/6)R}{(k^2 + \tilde{m}^2)^2} \right]. \quad (3.31)$$

Agora, basta expandir $\text{Tr} \ln \hat{H} = -\text{Tr} \ln G(x, x')$ na primeira ordem na curvatura. Neste sentido vamos definir

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 R + \mathcal{O}(R^2), \quad (3.32)$$

$$\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_1 R + \mathcal{O}(R^2) \quad (3.33)$$

e considerar que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \bar{G}(x, x') &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\hat{H}_0 + \hat{H}_1 R) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}_0 + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\bar{G}_0 \hat{H}_1 R). \end{aligned} \quad (3.34)$$

O primeiro termo nesta última expressão já foi calculado numa seção prévia, ele corresponde à contribuição do espaço-tempo plano. O segundo termo pode ser desenvolvido como se segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\bar{G}_0 \hat{H}_1 R) &= - \int d^4 x V_1 R = \frac{1}{2} \text{Tr} [\bar{G}_0^{-1}(x'', x') \bar{G}_1(x', x)] R \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' [\bar{G}_0^{-1}(x, x') \bar{G}_1(x', x)] R \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 x' R \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x'-x)} \bar{G}_0^{-1}(k) \bar{G}_1(p) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x R \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{G}_0^{-1}(k) \bar{G}_1(-k). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Resolvendo esta última integração⁵ temos depois de algumas simples transformações, os seguintes resultados

$$\bar{V}(\varphi, g_{\mu\nu}) = \bar{V}_0 + \bar{V}_1 R, \quad \bar{V}_1 = \bar{V}_1^{div} + \bar{V}_1^{fin}, \quad (3.36)$$

⁵Lembre que $\bar{G}_1(k) = \bar{G}_1(-k)$.

$$\bar{V}_1^{div} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left\{ -\Omega^2 + (m^2 + V'') \ln \left(\frac{\Omega^2}{m^2} \right) \right\}, \quad (3.37)$$

$$\bar{V}_1^{fin} = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) (m^2 + V'') \ln \left(\frac{m^2 + V''}{m^2} \right). \quad (3.38)$$

Da mesma forma que procedemos no caso do espaço-tempo plano, devemos modificar o potencial através da adição de contratermos

$$\Delta V_1 = \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left\{ \Omega^2 - (m^2 + V'') \ln \left(\frac{\Omega^2}{\mu^2} \right) \right\}. \quad (3.39)$$

Desta forma é possível eliminar as divergências quadráticas e logarítmicas, de tal maneira que

$$V_{ren}^{eff,1}(g_{\mu\nu}, \varphi) = -\xi\varphi^2 - \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) (m^2 + V'') \ln \left(\frac{m^2 + V''}{\mu^2} \right). \quad (3.40)$$

Naturalmente, uma teoria renormalizável no espaço-tempo curvo deve conter o termo não-mínimo na expressão clássica (3.25). Na ausência deste termo nós não podemos lidar com os contratermos correspondentes (3.39). Agora fazendo uma generalização covariante do resultado do espaço-tempo plano (3.12) e somando devidamente com (3.40), chegamos na equação completa renormalizada para o potencial efetivo a um *loop*

$$\begin{aligned} V_{ren}^{eff}(g_{\mu\nu}, \varphi) &= \rho_\Lambda + \frac{1}{2}(m^2 - \xi R)\varphi^2 + V \\ &+ \frac{\hbar}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2}(m^2 + V'')^2 - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R(m^2 + V'') \right] \ln \left(\frac{m^2 + V''}{\mu^2} \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde restauramos o parâmetro de expansão em *loop* \hbar e também incluímos o termo de densidade clássica de constante cosmológica, ρ_Λ . Note que a ambiguidade que surge por causa do parâmetro μ pode ser eliminada se impusermos condições de renormalização. Além disso, μ cancela automaticamente se nós levarmos em consideração as relações de renormalização para o acoplamento λ e a massa m no caso renormalizável $\lambda\varphi^4/4$. Isso vem da independência geral do parâmetro μ da AE. Entretanto, no espaço-tempo curvo a dependência de μ pode ser uma ferramenta útil para se explorar diferentes limites da AE, como por exemplo o limite de curtas distâncias, o limite de campos escalares fortes ou uma combinação de ambos [27, 29] (e referências relacionadas). Além do mais, de acordo com uma discussão recente [87] a dependência de μ pode ser uma indicação para a dependência da escala física (*running*) da constante cosmológica.

Uma avaliação numérica da importância relativa do termo gravitacional na equação (3.41) depende fortemente da massa m do campo considerado, do valor de ξ e da magnitude

do escalar de curvatura num dado problema físico. A relação entre os termos de natureza “plana” e “curva” na equação (3.41) é a mesma para os termos clássicos e quânticos a um *loop*. Para o caso em que o campo escalar está associado ao modelo de Higgs padrão, nós assumimos que a massa é da ordem de 100 GeV. A magnitude de ξ , necessária para o modelo de inflação de Higgs [19], é de 4×10^4 . Então é fácil ver que o valor da curvatura, quando o termo gravitacional na equação (3.41) se torna dominante, é inferido através da relação $\xi R = m^2$, assim o valor crítico encontrado é $R \sim 0,25 \text{ GeV}^2$. No cenário cosmológico o valor correspondente do parâmetro de Hubble é $H \sim \text{GeV}$, o qual é muito superior ao valor fenomenologicamente aceito. Isso mostra que o valor de ξ não é grande, pois o produto dimensional ξR possui um valor pequeno no período inflacionário. Mas, por outro lado, conforme foi discutido em [9, 20] (e referências relacionadas) as previsões da teoria são suficientemente sensíveis às correções quânticas e isso nos leva a uma restrição para a massa de Higgs.

3.2.3 Regularização *cut-off* de tempo próprio

Uma outra possibilidade de implementar a regularização *cut-off* de maneira covariante é usar a representação do tempo próprio de Schwinger-DeWitt. Um cálculo similar para o caso sem massa, usando a regularização dimensional foi feito em Ref. [60]. A AE pode ser escrita como (na versão euclidiana)

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = \frac{1}{2} \text{Tr} \lim_{x' \rightarrow x} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}, \quad (3.42)$$

onde L é o parâmetro de *cut-off*. Lembre que o núcleo de propagação de calor (*heat kernel*), pode ser escrito como [39] (veja também [6, 11] e referências relacionadas)

$$\hat{U}(x, x'; s) = e^{-is\hat{H}} \delta(x, x') = \hat{U}_0(x, x'; s) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'), \quad (3.43)$$

onde

$$\hat{U}_0(x, x'; s) = \frac{1}{(4\pi i)^{n/2}} \frac{D^{1/2}(x, x')}{s^{n/2}} e^{\frac{i\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s}, \quad (3.44)$$

onde, como já sabemos, $\sigma(x, x')$ é a distância geodésica entre dois pontos x e x' , a qual satisfaz a identidade

$$2\sigma = (\nabla\sigma)^2 = \sigma^\mu \sigma_\mu \quad (3.45)$$

e D é o determinante de Van Vleck-Morrette dado pela equação (2.47).

Conforme já foi mencionado (veja também [39, 6, 7, 11]), as divergências estão concentradas no limite de coincidência dos três primeiros coeficientes de Schwinger-DeWitt

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} a_0 L^4 + a_1 L^2 + a_2 \ln \left(\frac{L^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.46)$$

onde definimos⁶

$$a_k = \lim_{x' \rightarrow x} \hat{a}_k(x, x'). \quad (3.47)$$

As expressões para a_0 , a_1 e a_2 são bem conhecidas [39] (veja também o apêndice B de [52] para as expressões com regularização *cut-off*). No caso do campo escalar quântico em primeira ordem em R , obtemos imediatamente de (3.46) que

$$\begin{aligned} \bar{V}_{div}^{(1)}(escalar) &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \left\{ -\frac{L^4}{2} + \left[m^2 + V'' - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] L^2 \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{2} (m^2 + V'')^2 - (m^2 + V'') \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right] \ln \left(\frac{L^2}{\mu^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde novamente negligenciamos termos de ordem superior na curvatura. Uma comparação entre os dois tipos de *cut-off* nos levam à conclusão de que a quantidade $\bar{V}_{div}^{(1)}(escalar)$ descrita pela equação (3.48) é igual a soma das equações (3.9) e (3.37), se identificarmos os dois parâmetros de *cut-off* Ω e L .

Neste ponto é possível fazer uma comparação entre os dois esquemas de *cut-off* utilizados. Ambos dão contribuições equivalentes para a parte divergente. No entanto, o método de momento *cut-off* local fornece ainda expressões completas no que diz respeito à parte finita do potencial efetivo a um *loop* (3.10) e (3.38). Neste caso, por meio do esquema do tempo próprio, pode-se chegar na mesma expressão (3.41) através da abordagem do grupo de renormalização [29]. Contudo, isso requer uma identificação *ad hoc* de μ^2 com $m^2 + V''$. Ao mesmo tempo, no método de *cut-off* de momentos locais essa identificação aparece de maneira natural, porque neste caso trabalhamos diretamente com a parte finita do potencial efetivo renormalizado (3.41). Neste momento é natural pensar em calcular o potencial efetivo diretamente usando o método de somar as séries de Schwinger-DeWitt [12]. Entretanto, esta idéia encontra um obstáculo quando ela é usada para calcular quantidades estáticas como por exemplo correções quânticas para a constante cosmológica [53], pois nesta situação surge como resultado um fator de forma, que é dado por uma função algébrica do operador D'Alambertiano \square (Laplaciano covariante no caso Euclidiano) que

⁶No capítulo anterior, usamos a notação definida na equação (2.48) para representar o limite de coincidência. A partir de agora, para representar este limite, usaremos a notação definida na equação (3.47).

atua na curvatura generalizada. No caso estático, quando o operador \square atua numa constante, obtem-se zero e assim este método é ineficiente em sua forma original. O mesmo se aplica para o caso do potencial do campo escalar, porque de acordo com a equação (3.24), as derivadas de um escalar vão para o próximo termo da expansão da AE em derivadas. Um exercício interessante seria modificar a série de Schwinger-DeWitt de tal maneira que a obtenção das correções quânticas da parte finita para a constante cosmológica ou para o potencial de um campo escalar (essas duas últimas quantidades foram analisadas em [87]) seja possível. No entanto, as perspectivas positivas de tais esforços ainda não estão claras. Ao mesmo tempo, pode-se perfeitamente calcular o potencial efetivo na forma de uma expansão no tensor de curvatura diretamente via coordenadas normais, como foi feito anteriormente. Com base nos argumentos acima apresentados podemos concluir que ambos os métodos se complementam mutuamente, pois eles viabilizam a identificação entre μ^2 e $m^2 + V''$ ou entre expressões similares que aparecem em outros modelos.

3.2.4 Férmiões

Com o objetivo de explorar a equivalência entre os dois esquemas de *cut-off* acima descritos, podemos analisar o caso de um campo fermiônico com interação de Yukawa.

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} i\bar{\Psi}(\gamma^\mu \nabla_\mu - im_f - ih\varphi)\Psi. \quad (3.49)$$

Como estamos interessados no cálculo do potencial efetivo, podemos considerar o campo φ como constante. Vamos denotar

$$\tilde{m} = m_f + h\varphi. \quad (3.50)$$

Levando em consideração a paridade de Grassmann, o objeto de nosso interesse é (na versão pseudo-Euclidiana)

$$\bar{\Gamma}_f^{(1)}[\varphi, g_{\mu\nu}] = -i \text{Tr} \ln \hat{H}_f, \quad (3.51)$$

onde $\hat{H}_f = i(\gamma^\mu \nabla_\mu - i\tilde{m})$. Como o resultado deve ser ímpar em \tilde{m} [16], vamos levar em consideração a transformação

$$\text{Tr} \ln \hat{H}_f = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\hat{H}_f \hat{H}_f^*), \quad (3.52)$$

onde $\hat{H}_f^* = i(\gamma^\mu \nabla_\mu + i\tilde{m})$. O produto $\hat{H}_f \hat{H}_f^*$ pode ser escrito como

$$\hat{H}_f \hat{H}_f^* = -\left(\square - \frac{1}{4}R + \tilde{m}^2\right). \quad (3.53)$$

Usando o método do tempo próprio chegamos na seguinte expressão para as divergências

$$\bar{V}_{div}^{(1)}(fer) = -\frac{2}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{L^4}{2} + \left(\tilde{m}^2 - \frac{1}{12}R \right) L^2 - \frac{1}{2} \left(\tilde{m}^4 - \frac{1}{6}R\tilde{m}^2 \right) \ln \left(\frac{L^2}{\mu^2} \right) \right\}, \quad (3.54)$$

onde termos de curvatura de ordem superior foram negligenciados. Lembre que as quantidades $\bar{\Gamma}_{div}^{(1)}$, a_1 e a_2 são descritas pelas equações (3.46), (2.52) e (2.53) respectivamente.

Nos valendo da equivalência entre os dois esquemas de *cut-off* podemos escrever a parte finita da contribuição renormalizada a um *loop* para o potencial efetivo

$$\bar{V}_{ren}^{(1)}(fer) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\tilde{m}^4 - \frac{1}{6}R\tilde{m}^2 \right) \ln \left(\frac{\tilde{m}^2}{\mu^2} \right). \quad (3.55)$$

Quando comparamos este resultado como esquema de renormalização de subtrações mínimas, a identificação correta para μ^2 é a expressão $\tilde{m}^2 = (m_f + h\varphi)^2$.

3.2.5 Grupo de Renormalização

Vamos nos focar no resultado para o escalar (3.41) e usá-lo como um exemplo de como as equações do grupo de renormalização para os parâmetros do potencial podem ser obtidas. Neste sentido, vamos restringir nossas considerações para o caso renormalizável $V = \lambda\varphi^4/4!$, de tal maneira que $V'' = \lambda\varphi^2/2$ e $\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_1 R$. Os contratermos ΔV_0 e ΔV_1 , descritos pelas equações (3.11) e (3.39) respectivamente, possuem a mesma dependência de φ que os seus correspondentes termos clássicos.

Com o objetivo de obter as equações do grupo de renormalização para os parâmetros em questão precisamos assumir que o potencial efetivo renormalizado é igual ao potencial efetivo nu (*bare*). Ao assumirmos isto estamos nos valendo de uma característica intrínseca da AE que pode ser facilmente provada de uma maneira geral [27]. Com relação à parte finita do potencial, a aparente dependência que existe entre o potencial efetivo renormalizado (3.41) e a quantidade μ deve ser compensada pela dependência dos parâmetros independentes da teoria λ , m e ρ_Λ com respeito a μ . Assim, é possível encontrar as quantidades λ , m e ρ_Λ diretamente por meio da equação (3.41). Contudo, ao invés disso, vamos obter as funções- β correspondentes da renormalização infinita da ação clássica de maneira similar ao que foi feito no esquema-MS⁷ e regularização dimensional [27].

O potencial clássico (acrescido da massa e do termo não-mínimo) na presença dos contratermos, forma o potencial clássico renormalizado, o qual deve ser igual ao potencial

⁷Vamos denotar o esquema de subtrações mínimas como esquema-MS.

nu, de modo que

$$\rho_\Lambda + (m^2 - \xi R)\varphi^2 + \frac{\lambda\varphi^4}{4!} + \Delta V_0 + R\Delta V_1 = \rho_{\Lambda(0)} + [m_{(0)}^2 - \xi_{(0)}R]\varphi^2 + \frac{\lambda_{(0)}\varphi^4}{4!}. \quad (3.56)$$

O lado esquerdo desta última equação depende explicitamente de μ , enquanto que o lado direito não. Esta condição deve ser satisfeita para todos os termos individualmente, pois existem quantidades arbitrárias φ e R .

Assim, usando as equações (3.11) e (3.39), chegamos nas equações

$$\rho_{\Lambda(0)} = \rho_\Lambda + \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2}, \quad (3.57)$$

$$m_{(0)}^2 = m^2 + \frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2}, \quad (3.58)$$

$$\xi_{(0)} = \xi + \frac{\lambda}{2(4\pi)^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2}, \quad (3.59)$$

$$\lambda_{(0)} = \lambda + \frac{4!\lambda^2}{16(4\pi)^2} \ln \frac{\Omega^2}{\mu^2}. \quad (3.60)$$

Neste ponto podemos aplicar o procedimento convencional de tomar as derivadas $\mu \frac{d}{d\mu}$ das quantidades $\lambda_{(0)}$, $m_{(0)}^2$, $\xi_{(0)}$ e $\rho_{\Lambda(0)}$ e igualar essas derivadas a zero. O resultado encontrado para as funções- β é dado por

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\rho_\Lambda}{d\mu} &= \frac{m^4}{2(4\pi)^2}, & \rho_\Lambda(\mu_0) &= \rho_{\Lambda,0}; \\ \mu \frac{dm^2}{d\mu} &= \frac{\lambda}{(4\pi)^2} m^2, & m^2(\mu_0) &= m_0^2; \\ \mu \frac{d\xi}{d\mu} &= \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right), & \xi(\mu_0) &= \xi_0; \\ \mu \frac{d\lambda}{d\mu} &= \frac{3\lambda^3}{(4\pi)^2}, & \lambda(\mu_0) &= \lambda_0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde os pontos iniciais das trajetórias do grupo de renormalização são definidos num valor de referência (escala) μ_0 . Consequentemente, resulta que

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \frac{3\hbar\lambda_0^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (3.62)$$

onde restauramos convenientemente a quantidade \hbar .⁸

Pode-se verificar que se substituirmos estas soluções na equação para o potencial efetivo renormalizado (3.41), a dependência com relação a μ desaparece completamente em termos do tipo $\mathcal{O}(\hbar)$. Definitivamente, isso não significa que o potencial efetivo passa a ser trivial,

⁸Observe que a solução no esquema-MS é bem mais complicada, veja Ref. [17].

pois o conteúdo real das correções quânticas está relacionado com a dependência com respeito a φ , a qual não muda pelo procedimento descrito acima. É possível então concluir que a dependência de μ nada mais é do que uma ferramenta útil para que possamos obter a dependência de φ e de suas derivadas (ou de algum outro campo médio). Esta ferramenta se torna especificamente importante nos casos em que a obtenção da dependência explícita dos campos e de suas derivadas não é possível, conforme foi discutido recentemente em Ref. [87] para o caso de campo gravitacional externo.

Ressaltamos ainda que a relação entre a dependência de μ e o potencial efetivo real pode ser consideravelmente não trivial em modelos mais complicados. Considere como exemplo uma teoria onde o campo escalar esteja acoplado com diferentes férmions de massas distintas. De acordo com o resultado da seção precedente, ou seja, com a equação (3.55), não existe uma identificação única de μ neste caso. Assim, é necessário tomar um certo cuidado quando se usar os resultados do grupo de renormalização para teorias massivas, especialmente quando massas diferentes estiverem presentes.

Capítulo 4

O Tensor Energia-Momento no Contexto da Quebra Espontânea de Simetria

O desenvolvimento deste capítulo se baseia na abordagem apresentada em Ref. [5].

Tradicionalmente, o cálculo de correções quânticas para o TEM de vácuo é uma das mais importantes questões da TQC no espaço-tempo curvo. As razões para o interesse especial neste problema se devem ao fato de os campos de matéria e partículas fazerem parte do contexto das equações cosmológicas e gravitacionais na forma do TEM da matéria, o qual é usualmente considerado como um fluido. Os efeitos quânticos das flutuações do campo deve acrescentar algumas contribuições nas equações de estado correspondentes. O exemplo mais relevante, provavelmente, é que o TEM para a radiação “ganha” um traço não nulo em função da anomalia (do traço) conforme, a qual muda a equação de estado para a radiação com alguns possíveis efeitos relevantes na fase do Universo em que dominava a radiação [86]. De maneira oposta a isso, a equação de estado para as partículas massivas e para a matéria bariônica, em geral, não mudam essencialmente, porque as correções quânticas não podem fazer com que um conteúdo de matéria se torne relativístico.

A situação é bem diferente no caso de efeitos do vácuo quântico, que podem ser muito mais relevantes que os efeitos do setor de matéria. Existem algumas publicações recentes sobre este assunto, incluindo aquelas que tratam dos possíveis efeitos dos campos quânticos de matéria massiva na Cosmologia e na Astrofísica. Em particular pode-se ver

nas referências [8, 44, 48, 86, 89, 90], que as correções quânticas podem ser definidas na base somente da covariância geral, em termos de um único parâmetro livre ν . Algumas consequências observacionais das possíveis correções quânticas foram exploradas em [46, 55] e nos conduzem a estabelecer um limite superior para a magnitude de ν . Assim, a mesma forma única das correções foram aplicadas também à Astrofísica [90] e foram observados [78] resultados bem precisos no que diz respeito à descrição de curvas de rotação para um conjunto de amostras para galáxias discoidais, sem que seja necessário introduzir uma grande quantidade de conteúdo de matéria escura (para mais exemplos veja [45]). Outras aplicações à Cosmologia e Astrofísica foram também discutidas em [47].

As aplicações acima mencionadas estão baseadas numa premissa única, porém não trivial, de existência de correções quânticas relevantes no setor de vácuo de baixas energias. Claramente, o desenvolvimento mais desejável seria obter tais efeitos quânticos na base regular, dentro de uma aproximação rigorosa na TQC. Este problema foi discutido em [87] e a conclusão final foi, em respeito aos métodos existentes, essencialmente negativa. A correção quântica requerida para a AE de vácuo deveria ser dada pela soma de produtos infinitos de componentes do tensor de curvatura com um número infinito de inserções não locais, o que deixa o processo de cálculo efetivamente impraticável. Pode-se observar que a situação se torna muito mais evidente se nós desistirmos da covariância e usarmos, por exemplo, a parametrização conforme da métrica de fundo. Neste caso, é possível calcular as correções quânticas [88]. Entretanto, este método não é seguro e também é aplicável somente no regime de altas energias, quando o procedimento de subtrações mínimas é, a princípio, confiável.

Seria ideal se existisse alguma aproximação alternativa para a obtenção de correções quânticas. Recentemente alguns autores apresentaram trabalhos onde o resultado foi obtido por meio de uma regularização *cut-off* com a métrica cosmológica conformalmente plana [21, 65] (veja também [61]). A idéia principal é realizar os cálculos de densidade de “energia” e “pressão” do vácuo na regularização de momento *cut-off*, levando em consideração a expansão do Universo, de maneira perturbativa, ordem a ordem no parâmetro de Hubble H . A ordem zero nesta aproximação foi considerada por Akhmedov em Ref. [2] e também, anteriormente por DeWitt [37]. O procedimento não covariante baseado na regularização *cut-off*, troca, a equação de estado $p_{vac} = -\rho_{vac}$ que corresponde à constante cosmológica, pela equação de estado da radiação $p_{vac} = \rho_{vac}/3$. Uma discussão deste resul-

tado na regularização de Pauli-Villars pode ser encontrada em [71]. Antes disso, DeWitt explicou o resultado em termos gerais, como sendo consequência de uma regularização não covariante. Os cálculos de [21, 65] foram baseados na subtração do resultado do espaço-plano de [2], que conduzem à nova equação de estado para o vácuo, a qual é proporcional à constante de Hubble ao quadrado H^2 vezes o quadrado do parâmetro de *cut-off*. O problema principal com este resultado é que ele ou, aparentemente, contradiz a covariância geral da AE, ou a localidade dos contratermos requeridos. Neste caso nós encontramos uma violação das características fundamentais bem estabelecidas da renormalização em espaços curvos (veja também os livros [23, 27] e os artigos [63]). Entretanto, os resultados destes cálculos devem ser considerados como uma motivação para o estudo da possível existência de correções do tipo $\mathcal{O}(H^2)$ para a energia de vácuo na Cosmologia. Ao mesmo tempo, entender melhor estes resultados no nível técnico é de grande relevância. Estas considerações representam uma das principais motivações do presente trabalho. Além disso, é interessante compreender como os cálculos na regularização *cut-off* podem ser realizados de maneira covariante. Este problema foi recentemente solucionado em [22] com base na representação de momentos local nas coordenadas normais de Riemann (alternativamente, pode-se conseguir a covariância de expressões finitas através da imposição, passo a passo, da lei de conservação, na medida em que se adiciona os contratermos não covariantes especialmente ajustados [65, 66]). Além do mais, existe uma possibilidade que merece ser analisada com mais detalhes. O termo de constante cosmológica consiste de duas contribuições principais [99], a primeira delas é conhecida como um termo clássico de vácuo e a segunda como termo induzido. O teorema de proibição (*no-go*) [87] estabelece que a contribuição quântica diz respeito somente à parte de vácuo e assim, existe a possibilidade de encontrarmos termos do tipo $\mathcal{O}(H^2)$ como correções quânticas para a energia de vácuo da parte induzida. Como pode-se observar no texto precedente, para a contribuição induzida, o procedimento para obter o TEM da AE não é tão direto e simples como o método para se determinar a contribuição da parte de “vácuo”. O cálculo em questão requer um maior esforço e está relacionado com a proposta principal do presente trabalho.

Nós vamos obter a contribuição quântica para o TEM a partir do termo induzido, de maneira covariante, em aproximação linear na curvatura e vamos eventualmente mostrar que nesta aproximação, o TEM de vácuo é local, satisfaz a lei de conservação e consequentemente pode ser escrito como uma combinação linear da métrica e do tensor de

Einstein.

4.1 Sobre a renormalização no espaço-tempo curvo

A renormalização da teoria quântica de campos de matéria no espaço-tempo curvo foi um conteúdo de investigação muito explorado, começando com Ref. [96]. A maneira mais simples para remover divergências, de acordo com um procedimento de renormalização consistente, está relacionada com o método da AE [26, 27, 95]. O resultado final de todos estes estudos podem ser formulados de uma maneira simples como se segue: a teoria dos campos quânticos de matéria, renormalizável no espaço-tempo plano, pode ser formulada como sendo também renormalizável no espaço-tempo curvo, se existir uma regularização que seja consistente com a covariância geral e com as simetrias de gauge da teoria. A renormalizabilidade significa que as divergências da AE são locais e as suas expressões covariantes gerais devem ser compatíveis com as simetrias de gauge dadas.

Da perspectiva da AE, a renormalização do TEM parece bem trivial, pois tudo que é necessário fazer é encontrar a quantidade Γ , e em seguida considerar a derivada variacional com respeito a métrica

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g(x)}} g_{\mu\alpha}(x) g_{\nu\beta}(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{\alpha\beta}(x)}. \quad (4.1)$$

Além disso, é necessário introduzir os contratermos na AE, isso implica que devemos também adicioná-los na quantidade Γ (4.1), que é equivalente a realizar uma subtração especial dos termos divergentes. Tal subtração deve corresponder exatamente aos contratermos locais e covariantes. Os coeficientes da parte finita devem ser fixados, por meio da imposição das condições de renormalização na ação clássica renormalizada e/ou no TEM renormalizado. Para esta finalidade, devemos escolher a ação clássica de uma maneira especial, de modo que nela seja possível incluir todas as estruturas possíveis de contratermos. Os argumentos de covariância e localidade nos levam à seguinte forma para a ação clássica

$$S_{vac} = S_{EH} + S_{HD}, \quad (4.2)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica e S_{HD} , a ação correspondente às derivadas superiores. As quantidades S_{EH} e S_{HD} são descritas, respectivamente,

por

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad (4.3)$$

e

$$S_{HD} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2\}, \quad (4.4)$$

onde $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + (1/3)R^2$ é o quadrado do tensor de Weyl e $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R^2$ é o integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet.

No presente trabalho, estamos interessados em cálculos covariantes em torno do espaço-tempo plano numa aproximação linear da curvatura. Isso quer dizer que vamos sistematicamente ignorar a contribuição que diz respeito a derivadas superiores (4.4) e em geral, vamos negligenciar termos do tipo $\mathcal{O}(R)^2$ e $\mathcal{O}(\square R)$. Consequentemente, a forma de estruturas divergentes que podemos encontrar para a quantidade $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ está restrita a dois termos. O primeiro deles é proporcional à métrica $g_{\mu\nu}$, a qual é responsável pela renormalização do termo de constante cosmológica. O segundo deles é proporcional ao tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}$, o qual é responsável pela renormalização do termo de Einstein-Hilbert na AE.

Nossos cálculos serão efetuados na representação de momentos local, baseada nas coordenadas normais de Rieman (a informação técnica sobre estas coordenadas está no Apêndice A). Vamos usar também a regularização *cut-off* no espaço Euclidiano de momentos locais. Esta regularização tem-se mostrado equivalente ao *cut-off* da integral de tempo próprio no formalismo de Schwinger no espaço-tempo plano [64], conforme vimos no capítulo anterior, e recentemente foi usada em Ref. [93] (veja também o Capítulo 3 da presente tese) para calcular o potencial efetivo de um campo escalar no espaço-tempo curvo.

Uma aproximação alternativa para renormalizar o TEM no espaço-tempo curvo seria trabalhar diretamente com a expressão clássica para o TEM, calculando a sua média no vácuo. Esta aproximação é mais tradicional [23]. Os cálculos covariantes foram efetuados em [32] e [33] por meio da separação de pontos (*point-splitting*), usando ou não o método da AE. A estrutura covariante das divergências do TEM, que foram descritas previamente, é restaurada no limite de *splitting* zero, mas somente se este limite for tomado de uma maneira especial invariante.

Vamos considerar o resultado de [32] para a parte das correções quânticas do TEM que corresponde à divergências quárticas. Para manter a simplicidade vamos trabalhar com

expressões do espaço-tempo plano, porque as divergências quárticas não são essencialmente afetadas pela escolha da métrica. O resultado de [32, 33] é

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{quart. div}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} \left(g_{\mu\nu} - 4 \frac{n_\mu n_\nu}{n_\beta n^\beta} \right), \quad (4.5)$$

onde n_α é um pequeno quadri-vetor não-nulo, definindo a regularização de separação de pontos das funções de Green correspondentes $G(x, x) \rightarrow G(x, x + n)$. Agora, se nos escolhermos o vetor n na direção temporal $n = (\epsilon^2, 0, 0, 0)$ resulta que

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{quart. div}} = -\frac{1}{2\pi^2 \epsilon^4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Observe que a componente que corresponde às divergências quárticas do tensor energia momento total, possui traço nulo. Este resultado está de acordo com o resultado que corresponde ao momento *cut-off* simples no espaço plano [2]. Conforme se pode observar em Ref. [37], não existe neste sentido, nenhum tipo de contradição com a invariância de Lorentz das divergências, isso porque a origem de (4.6) está relacionada com o uso de uma regularização não covariante. No caso da separação de pontos (*point-splitting*) com direção temporal, a quebra da invariância de Lorentz se deve à escolha não relativística $n = (\epsilon^2, 0, 0, 0)$. No caso da regularização *cut-off*, a origem do aspecto não covariante é, num certo sentido, diferente, mas desde que ela seja igualmente não relativística, o resultado final é o mesmo.

É razoável esperar que regularizações que fossem invariantes de Lorentz estivessem de acordo com [32, 33]

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{quart. div}} = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Note que este tensor é proporcional ao tensor métrico Minkowskiano e pode ser interpretado como uma contribuição divergente padrão para a energia do ponto zero ou como um termo de constante cosmológica.

4.2 Quebra espontânea de simetria e tensor energia-momento no espaço-tempo curvo

Nesta parte do trabalho seguimos basicamente a abordagem apresentada em Ref. [54]. Começamos com a ação clássica para o campo escalar real ϕ , com acoplamento não-mínimo e auto-interação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \xi R \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\}. \quad (4.8)$$

A equação dinâmica para ϕ tem a forma

$$-\square \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi - \frac{1}{6} \lambda \phi^3 = 0. \quad (4.9)$$

Consequentemente, o valor esperado de vácuo (VEV) para o campo escalar é então definido como solução da equação

$$-\square v + m^2 v + \xi R v - \frac{1}{6} \lambda v^3 = 0. \quad (4.10)$$

Se a interação entre a curvatura e o campo for mínima $\xi = 0$, temos a QES padrão e a solução da equação (4.10) é dada por

$$v_0^2 = \frac{6m^2}{\lambda}. \quad (4.11)$$

Entretanto, no espaço-tempo curvo, a interação mínima $\xi = 0$ é inconsistente do ponto de vista da renormalizabilidade da teoria [27]. Em outras palavras, na presença de campo gravitacional, a teoria é renormalizável somente com o termo ξR . Vamos tentar encontrar soluções da equação (4.11), onde $\phi = \phi_0 = \text{constante}$. Observe que se o campo é constante, termos do tipo $\square \phi_0$ devem ser nulos, então temos que

$$(m^2 + \xi R) \phi_0 = \frac{1}{6} \lambda \phi_0^3. \quad (4.12)$$

Mas se $\phi_0 = v$, resulta que

$$v^2 = \frac{6(m^2 + \xi R)}{\lambda}. \quad (4.13)$$

Note que se considerarmos $\xi = 0$ nesta última equação, recaímos na solução bem conhecida (4.10). No entanto, a equação (4.13) apresenta uma contradição, pois nesta equação, v depende da curvatura R , mas a curvatura, por sua vez não é constante. Por exemplo, no

caso da métrica cosmológica, R depende da constante de Hubble, a qual varia no tempo. Então podemos concluir que v não é constante e chegamos à contradição.

Com o intuito de resolver esta contradição, os autores em Ref. [54] consideram v como uma série de potências em ξR

$$v(x) = v_0 + v_1(x) + v_2(x) + \dots, \quad (4.14)$$

onde v_0 é dado pela equação (4.11). Estamos interessados apenas nos termos de v que são proporcionais a ordem linear da curvatura, por esta razão vamos substituir a relação $\phi = v = v_0 + v_1$ na equação (4.9), de modo que

$$-\square(v_0 + v_1) + m^2(v_0 + v_1) + \xi R(v_0 + v_1) - \frac{1}{6}\lambda(v_0 + v_1)^3 = 0. \quad (4.15)$$

Agora, usando a equação (4.11) e considerando que $\square v_0 = 0$, temos

$$-\square v_1 + m^2 v_0 + m^2 v_1 - \frac{m^2}{v_0^2} \left(v_0^3 + 3v_0^2 v_1 + 3v_0 v_1^2 + v_1^3 \right) + \xi R v_0 + \xi R v_1 = 0. \quad (4.16)$$

No contexto de linearidade da curvatura, podemos desconsiderar termos do tipo Rv_1 , v_1^2 and v_1^3 . Por meio destas considerações podemos reescrever a equação (4.16) sob a forma

$$-\square v_1 - 2m^2 v_1 + \xi R v_0 = 0. \quad (4.17)$$

Usando novamente a equação (4.11) resulta que

$$\left(\square + \lambda v_0^2/3 \right) v_1 = \xi R v_0. \quad (4.18)$$

De onde vemos que

$$v_1 = \frac{\xi v_0}{\square + \lambda v_0^2/3} R, \quad (4.19)$$

ou

$$v_1 = \frac{\xi v_0}{\square + 2m^2} R. \quad (4.20)$$

É claro que é possível calcular os termos da expansão em v para qualquer ordem desejável e o próximo passo seria calcular v_2 de maneira análoga à utilizada para calcular v_1 . Contudo, o escopo deste trabalho assume que consideremos apenas a primeira ordem em R . Vamos então manter nosso foco na equação (4.20) e simplificá-la de tal maneira que termos que representem potências superiores e derivadas do escalar de curvatura possam ser negligenciados. Esta aproximação vale apenas para valores suficientemente grandes da

massa física para a configuração de campo que flutua em torno do mínimo, $2m^2 = \lambda v_0^2/3$.

Então concluímos que

$$\frac{1}{\square + 2m^2} R = \frac{1}{2m^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\square}{2m^2}} \right) R = \frac{1}{2m^2} \left(1 - \frac{\square}{2m^2} + \dots \right) R \approx \frac{1}{2m^2} R. \quad (4.21)$$

Ou seja,

$$v_1 \approx \frac{3\xi}{\lambda v_0} R. \quad (4.22)$$

Esta última equação também é consistente com a equação (4.13).

A mesma solução pode ser obtida diretamente da equação (4.10) se desconsiderarmos o termo $\square v$ e usarmos a equação (4.11). No entanto, a consideração apresentada acima é mais completa e melhor, visto que ela nos permite controlar a aproximação. Em cálculos posteriores vamos usar a expressão para a solução clássica da teoria no ponto de mínimo do problema da QES,

$$\phi_{0c} = v = v_0 + v_1, \quad \text{onde} \quad v_0^2 = \frac{6m^2}{\lambda} \quad \text{e} \quad v_1 = \frac{3\xi}{\lambda v_0} R. \quad (4.23)$$

A renormalização do setor de vácuo da teoria com QES está descrita em Ref. [54], portanto, não vamos elaborá-la aqui. Ao invés disso, vamos discutir a definição do TEM num nível quântico para a teoria com QES. O tensor de energia-momento clássico do campo ϕ com a presença de uma métrica externa $g = g_{\mu\nu}$ é definido pela relação

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta S[g, \phi]}{\delta g_{\alpha\beta}}. \quad (4.24)$$

No nível quântico, o TEM é dado por

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left\langle 0 \left| \frac{\delta S(g, \hat{\phi})}{\delta g_{\alpha\beta}} \right| 0 \right\rangle, \quad (4.25)$$

onde $\hat{\phi}$ é o campo quantizado, $\hat{\phi} \sim u \hat{a}^\dagger + u^* \hat{a}$, e $\hat{a} |0\rangle = 0$.

De acordo com o que já foi apresentado, vamos seguir a representação funcional da TQC, que tem como objeto essencial o funcional gerador das funções de vértice $\Gamma = \Gamma[g, \phi]$, conforme discutimos no Capítulo 2. Para o caso do campo escalar temos [27]

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Gamma[g, \phi] \right\} = \int d\bar{\phi} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(S[g, \bar{\phi} + \phi] - \frac{\delta \Gamma[g, \phi]}{\delta \phi} \bar{\phi} \right) \right\}. \quad (4.26)$$

No presente trabalho vamos nos restringir à aproximação de um *loop*, então escrevemos a AE como a soma da contribuição clássica e da contribuição que corresponde à contribuição quântica em primeira ordem em \hbar

$$\Gamma^{(1)}[\phi, g_{\mu\nu}] = S[\phi, g_{\mu\nu}] + \hbar \bar{\Gamma}^{(1)}[\phi, g_{\mu\nu}]. \quad (4.27)$$

O TEM do vácuo pode ser escrito a um *loop* como

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle^{(1)} = T_{\mu\nu}(x) + \bar{T}_{\mu\nu}^{(1)}(x), \quad (4.28)$$

onde a primeira contribuição é clássica

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \Big|_{\phi \rightarrow \phi_0}. \quad (4.29)$$

O segundo termo da equação (4.27) representa a correção quântica a um *loop* para o TEM

$$\bar{T}_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{2\hbar}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta \bar{\Gamma}^1}{\delta g_{\alpha\beta}} \Big|_{\phi \rightarrow \phi_0}. \quad (4.30)$$

Em ambos os casos ϕ_0 é solução da equação de movimento. Para trabalhar com uma teoria puramente clássica, devemos substituir $\phi_0 = \phi_{0c}$ na equação (4.29). O campo ϕ_{0c} está definido na equação (4.23) e ele representa a configuração estável de campo, em torno da qual ocorrem as flutuações do campo quântico. Nesse sentido, definimos o campo ϕ_0 como sendo a soma de uma solução clássica e de um termo proporcional a \hbar , o último representa a correção quântica

$$\phi_0 = \phi_{0c} + \hbar\phi_1. \quad (4.31)$$

Nosso objetivo é compreender como o campo ϕ_0 escrito na forma (4.31) vai alterar ou modificar a equação para o valor esperado no vácuo do TEM. Para determinar a quantidade ϕ_1 , vamos considerar a correção a um *loop* para a ação efetiva, o que nos leva à seguinte equação

$$\frac{\delta S[g, \phi_0]}{\delta \phi} + \hbar \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_0]}{\delta \phi} = 0, \quad (4.32)$$

onde a substituição $\phi \rightarrow \phi_0$ deve ser considerada após o cálculo da derivada variacional.

Contudo, nossa proposta é usar a equação (4.31), isso nos fornece

$$\frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi \delta \phi} \phi_1 + \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi} = 0, \quad (4.33)$$

logo

$$\phi_1 = -\left(\frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi}. \quad (4.34)$$

Substituindo essa última equação na equação (4.31) temos

$$\phi_0 = \phi_{0c} - \hbar \left(\frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi}. \quad (4.35)$$

Por outro lado se considerarmos a expressão para o TEM com o campo ϕ_0 escrito na forma (4.31) teremos que

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} \left[S[g, \phi_0] + \hbar \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_0] \right] \Big|_{\phi_0 = \phi_{0c} + \hbar \phi_1} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left\{ \frac{\delta S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}} + \hbar \frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta} \delta \phi} \phi_1 + \hbar \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi} \right\}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo ϕ_1 descrito pela equação (4.34) nesta última equação resulta que

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left[\frac{\delta S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}} + \hbar \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}} \right. \\ &\quad \left. - \hbar \frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi} \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

O primeiro termo desta última equação é clássico, o segundo é típico da teoria livre [33]. No entanto o último termo, que aparece pela primeira vez na literatura em Ref. [5], possui um caráter singular, pois ele vem do fato de estarmos trabalhando com uma teoria com interação. Portanto, este termo no contexto da teoria livre é nulo.

Vamos definir

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle_v + \langle T_{\mu\nu} \rangle_i, \quad (4.38)$$

onde

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_v = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left[\frac{\delta S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}} + \hbar \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}} \right] \quad (4.39)$$

e

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_i = \frac{2\hbar}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left[\frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta} \delta \phi} \left(\frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi} \right]. \quad (4.40)$$

As quantidades $\langle T_{\mu\nu} \rangle_i$ e $\langle T_{\mu\nu} \rangle_v$ representam as contribuições induzida e de vácuo para o TEM respectivamente. Ambas as contribuições serão calculadas neste trabalho no contexto da QES.

4.3 Covariância e conservação do tensor energia-momento de vácuo

A conservação do TEM de vácuo sempre foi considerada como um requisito de consistência da teoria (veja [23] e referências correlacionadas). Uma vez que estamos usando

a aproximação para derivadas pequenas, a condição de conservação $\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ juntamente com o fato de que o TEM deve ser considerado como a derivada variacional da ação efetiva covariante, fixa a forma algébrica do TEM completamente, resultando em dois parâmetros numéricos no caso da parte finita e das divergências quadráticas e logarítmicas e num único parâmetro numérico para o caso das divergências quárticas.

Em seguida explicamos as razões desta importância especial da lei de conservação. Para a parte divergente da AE a situação é especialmente simples, porque como sabemos, ela deve ser local e a discussão desta parte em espaços curvos foi considerada em Ref. [63]. Conforme já foi discutido, no setor com derivadas inferiores isso significa que os possíveis contratermos devem ter a forma de um termo de Einstein-Hilbert e da constante cosmológica. Conseqüentemente, a parte divergente do TEM de vácuo deve ter a seguinte estrutura

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = C_1 g_{\mu\nu} + C_2 G_{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

onde $C_1 = k_4 \Omega^4 + k_2 \Omega^2 + k_L \ln(\Omega/\mu_0)$ e $C_2 = l_2 \Omega^2 + l_L \ln(\Omega/\mu_0)$. k_4 , k_2 , k_L , l_2 e l_L são constantes numéricas. Os valores destas constantes devem depender da escolha da teoria quântica e da ordem da expansão em *loop*, mas a estrutura da parte divergente deve ter sempre a forma apresentada em (4.41). No que diz respeito à parte finita do TEM de vácuo, é possível imaginar uma expressão bem mais complicada do que a apresentada acima (4.41), como por exemplo uma série infinita de curvaturas e funções de Green [87]. É possível ter uma indicação a respeito desta possibilidade através do cálculo de variáveis conformes [88]. Entretanto, como nossos cálculos são relativamente simples, pois foram feitos com base na aproximação $\mathcal{O}(R)$, não há espaço para não localidades na ação efetiva. Então, o que podemos esperar como resultado é alguma quantidade que tenha os mesmos termos que estão presentes na equação (4.41), cuja estrutura, é a única que pode ser obtida a partir de um princípio variacional e que ao mesmo tempo satisfaz à lei de conservação.

A ação efetiva Γ é um funcional escalar covariante que depende do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e do campo escalar ϕ . Se considerarmos uma transformação infinitesimal geral de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x)$, de modo que estes dois campos se transformem de acordo com regras bem conhecidas

$$\delta g_{\mu\nu} = -\nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu \quad (4.42)$$

e

$$\delta\phi = -\xi^\mu \partial_\mu \phi, \quad (4.43)$$

então a identidade de Noether para a invariância de difeomorfismo de Γ é

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma[g, \phi]}{\delta g_{\mu\nu}} \nabla_\mu \xi_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma[g, \phi]}{\delta\phi} \xi^\mu \nabla_\mu \phi \right\} = 0. \quad (4.44)$$

Integrando por partes esta última equação, obtemos a lei de conservação $\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\phi_0} = 0$, onde usamos que a derivada funcional é nula na camada de massa, ou seja,

$$\frac{\delta\Gamma[g, \phi_0]}{\delta\phi} = 0. \quad (4.45)$$

Agora, vamos observar como estas considerações podem ser feitas se realizarmos uma expansão de $\Gamma[g, \phi_0]$ em série de \hbar . Vale lembrar que estamos interessados apenas no termo de primeira ordem dessa expansão. Por meio das equações (4.27) e (4.29), vemos que para a ordem zero de \hbar devemos ter que $\delta S[g, \phi_{0c}]/\delta\phi = 0$ e a lei de conservação é obtida para o nível clássico $\nabla^\mu T_{\mu\nu}|_{\phi_{0c}} = 0$. Contudo, a solução $\phi_0 = \phi_{0c} + \hbar\phi_1$ deve garantir que ϕ_0 seja solução das equações de movimento a um *loop* e para que essa situação seja contemplada, a seguinte equação deve ser válida

$$\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}(\phi_{0c}) \rangle_v + \nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}(\phi_{0c}) \rangle_i = 0. \quad (4.46)$$

Esta última equação nos diz que a soma das contribuições de vácuo e induzida do TEM, descritas pelas equações (4.39) e (4.40), respectivamente, deve satisfazer a lei de conservação.

4.4 Tensor energia-momento: parte clássica

Nesta parte do trabalho vamos calcular a contribuição clássica do TEM de vácuo e em partes posteriores, as contribuições quânticas a um *loop*. Consideraremos o TEM no estado de vácuo, o qual é caracterizado pelo VEV definido na equação (4.23). Tomando a variação da ação clássica com respeito da métrica, obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{S[g, \phi]}{\delta g_{\alpha\beta}} = \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} (\nabla\phi)^2 + (1 - 2\xi) (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) \\ &+ 2\xi\phi (g_{\mu\nu}\square\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi) + \xi\phi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{24}g_{\mu\nu}\phi^4. \end{aligned} \quad (4.47)$$

O traço do TEM, nas equações de movimento (4.9) tem a forma

$$T_{\mu}^{\mu} = (6\xi - 1)[(\nabla\phi)^2 + R\phi^2 - \frac{\lambda}{6}\phi^4] + 2(1 - 3\xi)m^2\phi^2. \quad (4.48)$$

Observe que para $m^2 = 0$ e $\xi = 1/6$ temos $T_{\mu}^{\mu} = 0$. Entretanto estamos interessados no caso massivo, dado pela equação (4.23). Neste ponto seria interessante discutir sobre a aproximação $\mathcal{O}(R)$ que usaremos nesta seção. A principal questão é saber como tratar as derivadas de $\phi_{0c} = v_0 + v_1$. Uma vez que v_0 é constante, as suas derivadas são naturalmente nulas. Mas a derivada de v_1 produz

$$\nabla_{\alpha}\phi_{0c} = \nabla_{\alpha}v_1 = \frac{3\xi}{\lambda v_0}\nabla_{\alpha}R. \quad (4.49)$$

Contudo, o termo $\nabla_{\alpha}R$ está fora do âmbito por nós considerado¹, pois ele não corresponde à ordem linear em R . Isso implica que termos do tipo derivadas da curvatura serão negligenciados, o que torna possível que consideremos a curvatura como sendo constante, ou ainda que v_1 é constante, já que ambas as quantidades possuem derivadas nulas. Substituindo a equação (4.23) na equação (4.47) e considerando apenas termos lineares na curvatura, obtemos que

$$T_{\mu\nu}(\phi_{0c}) = \xi v_0^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) - \frac{\lambda v_0^4}{12} g_{\mu\nu}. \quad (4.50)$$

Essa última equação representa a contribuição induzida para as equações de Einstein, que neste caso são escritas como

$$\left(\frac{1}{8\pi G_{vac}} + \frac{1}{8\pi G_{ind}} \right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) - \left(\rho_{\Lambda}^{vac} + \rho_{\Lambda}^{ind} \right) g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{matéria}, \quad (4.51)$$

onde

$$\frac{1}{8\pi G_{ind}} = -\xi v_0^2 \quad e \quad \rho_{\Lambda}^{ind} = -\frac{\lambda v_0^4}{12} \quad (4.52)$$

e as quantidades G_{vac} e ρ_{Λ}^{vac} denotam a constante de Newton do vácuo e a densidade de constante cosmológica respectivamente. Essas constantes não dependem dos parâmetros que estão originalmente na ação da teoria. Por outro lado, as quantidades G_{ind} e ρ_{Λ}^{ind} são quantidades induzidas que dependem dos detalhes da teoria quântica em questão.

Os valores da constante cosmológica induzida e de vácuo são no mínimo cinquenta e cinco ordens de magnitude maiores do que a soma dessas quantidades apresentada em

¹Para que a ação descrita pela equação (4.8) seja adimensional, as quantidades ∇_{μ} e R e devem ter dimensão de massa ao quadrado. Conseqüentemente, o termo $\nabla_{\alpha}R$ tem dimensão de massa elevada à quarta potência, o que no permite negligenciá-lo em nossas considerações.

(4.51), esse é conhecido como o problema da constante cosmológica [99]. Com respeito a G_{ind} , conhecemos a seguinte relação

$$\frac{G_{ind}}{G_{vac}} = -\frac{8\pi\xi v_0^2}{M_P^2}, \quad (4.53)$$

o quociente G_{ind}/G_{vac} é pequeno para o caso do modelo padrão, onde $v_0^2 \approx 10^5 GeV^2$. No caso considerado, o valor de ξ corresponde à inflação de Higgs $\xi \approx 4 \times 10^4$. Como M_P possui um valor alto, $M_P \approx 10^{38} GeV^2$, podemos dizer que $G_{ind} \ll G_{vac}$ e a quantidade G_{ind} não é relevante no modelo padrão.

No entanto, nas teorias de grande unificação (TGU), para o caso das versões supersimétricas, a situação é bem diferente. Neste caso, temos $v_0^2 \approx 10^{32} GeV^2$. Então para a magnitude de ξ acima mencionada, podemos estimar que $G_{ind} \approx G_{vac}$. Isso significa que nas versões mencionadas para as TGU, o termo induzido presente na equação (4.51), é relevante.

4.5 Cálculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_v$

Nosso ponto de partida será a AE a um *loop* $\bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi]$. Por construção, esta é a AE na teoria com QES. Pode-se escrever, usando uma expansão nas derivadas,

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\bar{V}_{eff}(\phi) + \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \cdot k_\phi \left(\frac{\square}{m^2} \right) \nabla^\mu \phi + \frac{1}{2} \phi^2 k_\xi \left(\frac{\square}{m^2} \right) R + \dots \right\}, \quad (4.54)$$

onde o potencial efetivo tem a forma

$$\bar{V}_{eff}(\phi) = V_0 + V_1 R + \mathcal{O}(R^2). \quad (4.55)$$

O potencial efetivo foi calculado por meio do *cut-off* covariante em [93] (veja também o Capítulo 3). Na equação (4.54) $k_\phi \left(\frac{\square}{m^2} \right)$ e $k_\xi \left(\frac{\square}{m^2} \right)$ são os fatores de forma, que também contém potências diferentes nas derivadas. A expansão em (4.54) é infinita, mas nós podemos facilmente “limitá-la” se considerarmos a mesma aproximação usada na seção precedente. Para $\xi = 0$ nós sabemos que $\phi_{0c} = const$, conforme indica a equação (4.9). Dessa forma, quaisquer derivadas de ϕ_{0c} são na verdade proporcionais a ξ e também a R .

Na medida em que estamos interessados em termos do tipo $\mathcal{O}(R)$, podemos considerar somente a parte constante dos fatores de forma k_ϕ e k_ξ . Assim, podemos escrever que

$$k_\phi \left(\frac{\square}{m^2} \right) \rightarrow Z(\phi), \quad e \quad k_\xi \left(\frac{\square}{m^2} \right) \rightarrow \chi(\phi). \quad (4.56)$$

Além do mais, na aproximação considerada o termo $\frac{1}{2}\phi^2 \chi(\phi) R$ é uma parte do potencial efetivo $V_1 = V_1(\phi)$. Então, para nós $\bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi]$ se torna

$$\bar{\Gamma}^{(1)}(g, \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\bar{V}_{eff}(\phi) + \frac{1}{2} Z(\phi) (\nabla\phi)^2 \right\}, \quad (4.57)$$

onde $\bar{V}_{eff} = V_0(\phi) + V_1(\phi) R$ e $\phi \rightarrow \phi_{0c}$. Em seguida vamos considerar que

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} Z(\phi) (\nabla\phi)^2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu \chi^\mu - \int d^4x \sqrt{-g} Z(\phi) \phi \square\phi \\ &- \int d^4x \sqrt{-g} Z'(\phi) (\nabla\phi)^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Note que para $\phi \rightarrow \phi_{0c}$, a quantidade $\square\phi$ pode ser escrita como

$$\square\phi_{0c} = \square(v_0 + v_1) = \frac{\xi v_0}{\square + 2m^2} \square R = \frac{\xi v_0}{2m^2} \square R + \mathcal{O}(\square^2 R). \quad (4.59)$$

Por outro lado,

$$\nabla_\mu \phi_{0c} = \nabla_\mu v_0 + \nabla_\mu v_1 = \nabla_\mu v_1 = \frac{\xi v_0}{2m^2} \nabla_\mu R + \mathcal{O}(\nabla^3 R). \quad (4.60)$$

Agora, uma vez que $\square \ll m^2$ para ϕ_{0c} , a quantidade $(\nabla\phi)^2$ está fora da ordem considerada $\mathcal{O}(R)$. Finalmente, podemos restringir nossa consideração neste ponto, somente ao potencial efetivo, considerando que

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}] = - \int d^4x \sqrt{-g} \bar{V}_{eff}(\phi_{0c}). \quad (4.61)$$

Lembre que nosso objetivo neste ponto é calcular o termo $\langle T_{\mu\nu} \rangle_v$. Mas através da equação (4.39), podemos ver que este termo depende da variação da primeira correção quântica para a ação efetiva $\bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]$ com respeito ao tensor métrico. Por outro lado, a equação (4.61) nos diz que a quantidade $\bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]$ deve ser a integral em todo o espaço do potencial efetivo. Mas o potencial efetivo, para a aproximação $\mathcal{O}(R)$, possui duas contribuições, a primeira delas é uma contribuição que corresponde ao espaço-tempo plano. Já a segunda contribuição é proporcional à curvatura e o cálculo do potencial efetivo no espaço-tempo curvo foi realizado no Capítulo anterior.

A expressão renormalizada para o potencial é

$$\begin{aligned} \bar{V}_{eff}^{ren}(g_{\mu\nu}, \varphi) &= V_0^{ren} + V_1^{ren} R \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2} (V'' - m^2)^2 - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R (V'' - m^2) \right] \ln \left(\frac{V'' - m^2}{\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Nesta expressão nós usamos a forma geral do termo de interação clássico $V = V(\varphi)$, mas daqui por diante este termo será considerado como sendo $V = \lambda\varphi^4/4$. Por generalidade vamos considerar a parte divergente do potencial não renormalizado, na regularização *cut-off* de momentos local. Na aproximação considerada nós temos

$$\bar{V}_{eff}^{div}(g_{\mu\nu}, \varphi) = V_0^{div} + V_1^{div} R, \quad (4.63)$$

onde também de acordo com Ref. [93]

$$\bar{V}_0^{div} = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \Omega^2 V'' - \frac{1}{2} (V'' - m^2)^2 \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right\}, \quad (4.64)$$

$$\bar{V}_1^{div} = \frac{1}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left\{ -\Omega^2 + (V'' - m^2) \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right\}. \quad (4.65)$$

Neste ponto é conveniente introduzirmos uma notação para as contribuições a um *loop* para as equações de movimento de um campo escalar

$$\bar{\varepsilon}^{(1)} = \bar{\varepsilon}_{div}^{(1)} + \bar{\varepsilon}_{fin}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta \phi} \Big|_{\phi_{0c}} = - \frac{\partial \bar{V}_{eff}^{(1)}}{\partial \phi} \Big|_{\phi_{0c}}. \quad (4.66)$$

Depois que adicionarmos os contratermos correspondentes, a quantidade $\bar{\varepsilon}_{ren}^{(1)}$ deve representar a versão renormalizada do termo descrito pela última equação. Agora, lembrando que $\bar{V}_{eff} = V_0(\phi) + V_1(\phi) R$ e $\phi_{0c} = v_0 + v_1$, vamos definir

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^{(1)} &= - \frac{\partial \bar{V}_0^{(1)}}{\partial \phi} \Big|_{\phi_{0c}} - R \frac{\partial \bar{V}_1^{(1)}}{\partial \phi} \Big|_{\phi_{0c}} \\ &= - \frac{\partial \bar{V}_0^{(1)}}{\partial \phi} \Big|_{v_0} - \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{(1)}}{\partial \phi^2} \Big|_{v_0} v_1 - R \frac{\partial \bar{V}_1^{(1)}}{\partial \phi} \Big|_{v_0} = \bar{\varepsilon}_0^{(1)} + \bar{\varepsilon}_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Naturalmente, as quantidades $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}$ e $\bar{\varepsilon}_1^{(1)}$ tem suas correspondentes contribuições finita e divergente e após adicionarmos os contratermos nós podemos também definir as suas versões renormalizadas. Neste trabalho vamos calcular somente as contribuições divergente e renormalizada, mas a parte finita pode ser calculada de maneira inteiramente análoga [93]. Uma última observação relevante e que nos auxilia na realização dos cálculos futuros é, dentro da aproximação adotada $\mathcal{O}(R)$, o aspecto constante das quantidades $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}$ e $\bar{\varepsilon}_1^{(1)}$, sejam elas nas suas versões divergente, finita não renormalizada, ou renormalizada.

Com base nos argumentos apresentados acima, podemos por meio da equação (4.39) e

da definição apresentada na equação (4.61) encontrar a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\langle \bar{T}_{\mu\nu} \rangle_v &= -\frac{2\hbar}{\sqrt{-g}} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}} \\
&= -2\hbar V_1(v_0) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \hbar V_0(v_0) g_{\mu\nu} + \hbar v_1 g_{\mu\nu} \left. \frac{\partial \bar{V}_0^{(1)}}{\partial \phi} \right|_{v_0} \\
&= -2\hbar V_1(v_0) G_{\mu\nu} + \hbar V_0(v_0) g_{\mu\nu} - \frac{\hbar \xi v_0}{2m^2} R \bar{\varepsilon}_0^{(1)} g_{\mu\nu}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Esta última equação nos apresenta um fato notável na medida em que ela confirma o que já havíamos antecipado na seção 4.3. Observe que os dois primeiros termos da equação (4.68) são contribuições quânticas para o tensor de Einstein e para a constante cosmológica nas equações de Einstein. Entretanto, o último termo possui uma certa estranheza, pois ele viola a covariância, viola a lei de conservação e além de tudo não pode ser obtido por meio do princípio da ação mínima. O que nós esperamos é que este termo “estranho” se cancele com a contribuição correspondente que vem do termo $\langle \bar{T}_{\mu\nu} \rangle_i$, definido em (4.40). Na próxima seção vamos ver se esta hipótese é de fato confirmada.

4.6 Cálculo de $\langle T_{\mu\nu} \rangle_i$

Como um primeiro passo, vamos reescrever a expressão (4.40) sob a forma

$$\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i &= 2\hbar g_{\mu\alpha}(x) g_{\nu\beta}(x) \int d^4y \sqrt{-g(y)} \int d^4z \sqrt{-g(z)} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta g_{\alpha\beta}(x) \delta \phi(y)} \right) \\
&\times \left(\frac{1}{\sqrt{-g(y)}} \frac{\delta^2 S[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi(y) \delta \phi(z)} \right)^{-1} \times \left(\frac{1}{\sqrt{-g(z)}} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[g, \phi_{0c}]}{\delta \phi(z)} \right). \tag{4.69}
\end{aligned}$$

É importante ressaltar que quantidades do tipo $g_{\mu\nu}(x)$ são consideradas dentro do contexto das coordenadas normais de Riemann². O próximo passo é, naturalmente, calcular explicitamente todos os três termos que se encontram dentro no parêntesis na equação (4.69). Lembre que os cálculos serão feitos em primeira ordem na curvatura.

No primeiro termo da última equação, temos uma variação da ação com respeito a métrica e ao campo. Basicamente, o que temos que fazer é variar a equação (4.47) com

²Para mais detalhes veja o Apêndice A.

respeito ao campo, isso nos permite escrever que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S}{\delta\phi(y)\delta g_{\mu\nu}(x)} &= \xi\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square) + (2\xi - 1)(\nabla_\mu\phi)\nabla_\nu \\ &+ \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right)g_{\mu\nu}(\nabla^\lambda\phi)\nabla_\lambda + \xi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\square\phi) \\ &- \xi\phi\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}m^2\phi g_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{6}\phi^3g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Como na equação (4.69) o argumento da quantidade S é o campo ϕ_{0c} , devemos considerar na equação (4.70) que $\phi \rightarrow \phi_{0c}$ e que derivadas do campo estão fora de nosso regime de consideração. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \frac{\delta^2 S}{\delta g_{\alpha\beta}\delta\phi} \Big|_{\phi_{0c}} &= \xi\phi_{0c}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square) - \xi\phi_{0c}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) \\ &+ \frac{1}{2}m^2\phi_{0c}g_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{6}\phi_{0c}^3g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

O próximo passo é considerar, nesta última equação que, $\phi_{0c} = v_0 + v_1$, onde v_0 e v_1 são dados, respectivamente, pelas equações (4.11) and (4.19). Mantendo a ordem de aproximação desejada, ou seja, negligenciando termos que não correspondem à primeira ordem na curvatura e expandindo quantidade $\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square$ em coordenadas normais de Riemann, (para mais detalhes sobre essa expansão veja o Apêndice A) podemos escrever que o primeiro termo dentro do parêntesis na equação (4.69) assume a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}\delta\phi} \Big|_{\phi_{0c}} &= \xi v_0(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2) + \frac{\xi^2 v_0}{2m^2} R(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2) - \xi v_0 R_{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{3}\xi v_0 \left[2R^\lambda{}_{(\mu\nu)\tau} y^\tau \partial_\lambda + 2\eta_{\mu\nu} R^\lambda{}_\tau y^\tau \partial_\lambda + R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta \partial^2 + \eta_{\mu\nu} R^\rho{}_{\alpha\beta}{}^\sigma y^\alpha y^\beta \partial_\rho \partial_\sigma \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

O primeiro termo do lado direito desta última equação corresponde à ordem zero na curvatura e os demais são de primeira ordem. Com relação à métrica, depois que todos os cálculos forem feitos, vamos deixar de trabalhar com a métrica $\eta_{\mu\nu}$ no ponto P , para passar a considerar a métrica geral $g_{\mu\nu}$.

Vamos considerar o segundo termo entre parêntesis na equação (4.69). Observe que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^2[g, \phi_{0c}]}{\delta\phi\delta\phi} \right)_{y,z}^{-1} = G(y, z; \phi_{0c}) \quad (4.73)$$

é o propagador das excitações escalares perto do ponto de mínimo. É importante lembrar que nós precisamos trabalhar no contexto em que há a presença da curvatura. Assim, de

acordo com [31, 72] (veja também [93]), é necessário modificar a equação (4.73), de modo que

$$\left(\frac{1}{[-g(y)]^{1/4} [-g(z)]^{1/4}} \times \frac{\delta S^2[g, \phi_{0c}]}{\delta\phi(y) \delta\phi(z)} \right)^{-1} = \bar{G}(y, z; \phi_{0c}). \quad (4.74)$$

Agora podemos usar o resultado bem conhecido para o propagador, o qual está em comum acordo com as referências [31, 72, 93]. Antes disso, é preciso analisar a massa das excitações escalares perto do ponto de mínimo. Começamos analisando o propagador para o caso em que $\phi_{0c} = v_0 + v_1$. Observe da equação (4.10) que

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S}{\delta\phi \delta\phi} = -\square + m^2 + \xi R - \frac{\lambda}{2} \phi^2. \quad (4.75)$$

Em seguida considere que

$$\phi \rightarrow \phi_{0c}^2 = (v_0 + v_1)^2 \approx v_0^2 + 2v_0v_1. \quad (4.76)$$

Agora se substituirmos (4.11) e (4.19) na equação (4.76) obtemos depois de uma simples álgebra que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S}{\delta\phi \delta\phi} &= -\square + 2m^2 + \xi \left(1 - \frac{6m^2}{\square + 2m^2} \right) R \\ &\approx -(\square + 2m^2) - 2\xi R, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde nesta última passagem usamos a aproximação $\mathcal{O}(R)$. Depois de compararmos esta última equação com a equação (4.9), fica claro que a equação (4.77) indica que nós temos um propagador de uma partícula escalar com massa *positiva* $2m^2$ e com parâmetro não-mínimo -2ξ . Através do uso da expressão geral (A.7), nós obtemos a versão euclidiana do segundo fator que está entre parênteses na equação (4.69), o qual é dada por

$$\bar{G}(z - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(z-y)} \left[\frac{1}{k^2 + 2m^2} - \left(2\xi - \frac{1}{6} \right) \frac{R}{(k^2 + 2m^2)^2} \right]. \quad (4.78)$$

O terceiro fator entre parênteses, dentro do integrando na equação (4.69) nada mais é que a equação de movimento efetiva (4.66). De acordo com a equação (4.67) podemos escrevê-la como a soma de duas contribuições, sendo uma delas clássica e a outra quântica $\varepsilon = \bar{\varepsilon}^{(0)} + \hbar\bar{\varepsilon}^{(1)}$, onde o termo $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ também pode ser expandido em série na curvatura escalar. Todas estas expressões foram devidamente calculadas, mas para manter a fluidez da leitura, deixamos esta parte inclusa no Apêndice B.

Depois destas considerações podemos calcular a quantidade $\langle \bar{T}_{\mu\nu} \rangle_i$. Como um primeiro passo, vamos obter a expressão que corresponde ao espaço-tempo plano e considerar em seguida termos um pouco mais complexos, os quais dependem da curvatura. Tomando o limite do espaço-tempo plano nas equações (4.72) e (4.78), os únicos termos que permanecem são os primeiros termos destas equações, ou seja, aqueles que não possuem a quantidade R . Com relação à equação de movimento podemos dizer que neste contexto de ausência de curvatura, somente o termo $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}$ apresenta relevância (claro que nas versões divergente e renormalizada). Dessa maneira temos que

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i^0 &= 2\hbar\xi v_0 \int d^4z d^4y \delta^4(x-y) \\ &\times (\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2)_y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(y-z)}}{k^2 + 2m^2} \bar{\varepsilon}_0^{(1)}(z), \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde nesta última equação, o índice 0 presente nos termos $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i^0$ e $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}(z)$, indica que estamos trabalhando no limite do espaço-tempo plano e o índice entre parênteses, está associado com as correções quânticas a um *loop*. Realizando a integração sobre y e usando $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}(z) = const$, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i^0 &= 2\hbar\xi v_0 \int d^4z (\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2)_x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-z)}}{k^2 + 2m^2} \bar{\varepsilon}_0^{(1)}(z) \\ &= 2\hbar\xi v_0 \bar{\varepsilon}_0^{(1)} (\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\partial^2)_x \int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + 2m^2} \int \frac{d^4z}{(2\pi)^4} e^{-ikz} \\ &= 2\hbar\xi v_0 \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \int d^4k \delta^4(k) \frac{k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu}}{k^2 + 2m^2} e^{ikx} = 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Assim, concluímos que a contribuição da quantidade $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i^0$ para a constante cosmológica induzida é nula. Consequentemente, vemos também que no espaço-tempo curvo, as contribuições que envolvem termos do tipo $\bar{\varepsilon}_{1,div}^{(1)}$ ou $\bar{\varepsilon}_{1,ren}^{(1)}$, também são nulas. Pois ambos os termos são constantes na ordem linear na curvatura e não usamos uma forma explícita da constante $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}$ nos cálculos apresentados acima.

Outro fato que devemos destacar é que contribuições que envolvem termos proporcionais a R na equação (4.78) também devem ser nulas. A razão disso, reside no fato de que se considerarmos a seguinte troca

$$\frac{1}{k^2 + 2m^2} \rightarrow -\left(2\xi - \frac{1}{6}\right) \frac{R}{(k^2 + 2m^2)^2}, \quad (4.81)$$

na equação (4.79), o resultado da integração continua sendo nulo. Então concluímos que o que precisamos levar em consideração são os termos que dependem da curvatura no primeiro fator na equação (4.72).

O último passo a ser considerado é calcular a quantidade $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i$ no espaço-tempo curvo na ordem $\mathcal{O}(R)$. Com base nos argumentos apresentados acima, podemos escrever que

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_i^1 = 2\hbar \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \int d^4y d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^5 O_{\mu\nu}^{(i)}(y) \delta^4(x-y) \frac{e^{ik(y-z)}}{k^2 + 2m^2}, \quad (4.82)$$

onde

$$\begin{aligned} O_{\mu\nu}^{(1)} &= -\xi v_0 R_{\mu\nu}, \\ O_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{\xi^2 v_0}{2m^2} R (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial^2), \\ O_{\mu\nu}^{(3)} &= \frac{2}{3} \xi v_0 [R^\lambda{}_{(\mu\nu)\tau} + \eta_{\mu\nu} R^\lambda{}_\tau] y^\tau \partial_\lambda, \\ O_{\mu\nu}^{(4)} &= \frac{1}{3} \xi v_0 R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta \partial^2, \\ O_{\mu\nu}^{(5)} &= \frac{1}{3} \xi v_0 \eta_{\mu\nu} R_\alpha{}^{\rho\sigma}{}_\beta y^\alpha y^\beta \partial_\rho \partial_\sigma. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Vamos elaborar todos os termos da equação (4.82), ressaltando que os termos correspondentes às equações (4.83) estão representados por índices superiores. A contribuição da quantidade $O_{\mu\nu}^{(1)}$ possui a mesma estrutura da equação (4.79) e assim o procedimento de cálculo é o mesmo apresentado acima, portanto

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 &= -2\hbar \xi v_0 R_{\mu\nu} \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \int d^4y d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(y-z)}}{k^2 + 2m^2} \delta^4(x-y) \\ &= -2\hbar \xi v_0 R_{\mu\nu} \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \int d^4k \delta^4(k) \frac{e^{ikx}}{k^2 + 2m^2} = -\frac{\hbar \xi v_0}{m^2} R_{\mu\nu} \bar{\varepsilon}_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Em seguida vemos que a contribuição do termo $O_{\mu\nu}^{(2)}$ é nula, pois ele possui a mesma estrutura do termo de espaço-tempo plano (4.79),

$${}^{(2)}\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 = 0. \quad (4.85)$$

A contribuição do termo $(O)_{\mu\nu}^{(3)}$ é apresentada sob a forma

$${}^{(3)}\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 = \frac{4\hbar \xi v_0}{3} [R^\lambda{}_{(\mu\nu)\tau} + \eta_{\mu\nu} R^\lambda{}_\tau] \bar{\varepsilon}_0^{(1)} I_\lambda^\tau, \quad (4.86)$$

onde

$$I_\lambda^\tau = \int d^4y d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^4(x-y) y^\tau \frac{\partial}{\partial y^\lambda} \frac{e^{ik(y-z)}}{k^2 + 2m^2}. \quad (4.87)$$

Esta última integral pode ser calculada se nos valermos da expressão

$$I_\lambda^\tau = \frac{1}{2m^2} \delta_\lambda^\tau. \quad (4.88)$$

Então resulta que

$${}^{(3)}\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 = -\frac{2\hbar\xi v_0}{3m^2} (R_{\mu\nu} - R\eta_{\mu\nu}) \bar{\varepsilon}_0^{(1)}. \quad (4.89)$$

A soma das contribuições $(O)_{\mu\nu}^{(4)}$ e $(O)_{\mu\nu}^{(5)}$ é escrita como

$${}^{(4,5)}\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 = \frac{2\hbar\xi v_0}{3} \bar{\varepsilon}_0^{(1)} [R_{\mu\alpha\nu\beta} \eta^{\rho\sigma} - R_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta}{}^{\sigma} \eta_{\mu\nu}] J_{\rho\sigma, \alpha\beta}, \quad (4.90)$$

onde

$$J_{\rho\sigma, \alpha\beta} = \int d^4y d^4z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^4(x-y) y^\alpha y^\beta \frac{\partial^2}{\partial y^\rho \partial y^\sigma} \frac{e^{ik(y-z)}}{k^2 + 2m^2}. \quad (4.91)$$

Resolvendo a integração ficamos com

$$J_{\rho\sigma, \alpha\beta} = \frac{1}{m^2} \delta_{\rho\sigma, \alpha\beta} \quad \text{onde} \quad \delta_{\rho\sigma, \alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha). \quad (4.92)$$

Usando este resultado, temos depois de uma álgebra simples que

$${}^{(4,5)}\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 = \frac{2\hbar\xi v_0}{3m^2} \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \left(R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R\eta_{\mu\nu} \right). \quad (4.93)$$

A expressão geral pode ser obtida substituindo os resultados para todas as contribuições expressas pelas equações (4.84), (4.84), (4.89) e (4.93), na equação (4.83). Após feito isso, resulta que

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 = \frac{\hbar\xi v_0}{m^2} \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \left(-R_{\mu\nu} + R\eta_{\mu\nu} \right). \quad (4.94)$$

Naturalmente, esta expressão possui uma forma diferente da estrutura $G_{\mu\nu}$ e assim ela viola a covariância e a lei de conservação. No entanto, se nós somarmos a ela o resultado previamente obtido $\langle T_{\mu\nu} \rangle_v^1$ da equação (4.68), nós chegamos finalmente à expressão que está de acordo com as nossas expectativas

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle^1 &= \langle T_{\mu\nu} \rangle_i^1 + \langle \bar{T}_{\mu\nu} \rangle_v^1 \\ &= -2\hbar V_1(v_0) G_{\mu\nu} + \hbar V_0(v_0) g_{\mu\nu} - \frac{\hbar\xi v_0}{m^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg_{\mu\nu} \right) \bar{\varepsilon}_0^{(1)}, \\ &= -\hbar \left[2V_1(v_0) + \frac{\xi v_0}{m^2} \bar{\varepsilon}_0^{(1)} \right] G_{\mu\nu} + \hbar V_0(v_0) g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

onde substituímos a métrica Minkoskiana $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica geral.

No sentido de reescrever as contribuições quânticas na forma final, precisamos das quantidades $V_0(v_0)$, $V_1(v_0)$ e $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}$. As versões divergentes e renormalizadas de $V_0(v_0)$ e

$V_1(v_0)$ podem ser obtidas de (4.62) e (4.64) sob a forma

$$V_0^{ren}(v_0) = \frac{1}{(4\pi)^2} m^4 \ln\left(\frac{2m^2}{\mu^2}\right), \quad (4.96)$$

$$V_0^{div}(v_0) = \frac{m^2}{32\pi^2} \left[3\Omega^2 - 2m^2 \ln\left(\frac{\Omega^2}{m^2}\right) \right], \quad (4.97)$$

$$V_1^{ren}(v_0) = -\frac{m^2}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{2m^2}{\mu^2}\right), \quad (4.98)$$

$$V_1^{div}(v_0) = \frac{1}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[-\Omega^2 + 2m^2 \ln\left(\frac{\Omega^2}{m^2}\right) \right]. \quad (4.99)$$

Levando em consideração na equação (4.95) as expressões $\bar{\varepsilon}_0^{(1)}$ obtidas no Apêndice B através de (B.8) e (B.9), obtemos o resultado final para as contribuições quânticas do TEM

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \frac{\hbar m^4}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{2m^2}{\mu^2}\right) g_{\mu\nu} - \frac{m^2}{(4\pi)^2} \left[2(1 + 3\xi) \ln\left(\frac{2m^2}{\mu^2}\right) + 3\xi \right] G_{\mu\nu} \quad (4.100)$$

para a expressão renormalizada e

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{div} &= \frac{\hbar m^2}{32\pi^2} \left[3\Omega^2 - 2m^2 \ln\frac{\Omega^2}{m^2} \right] g_{\mu\nu} \\ &+ \frac{\hbar}{16\pi^2} \left(4\xi - \frac{1}{6} \right) \left\{ \Omega^2 - 2m^2 \ln\frac{\Omega^2}{m^2} \right\} G_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.101)$$

para a expressão divergente.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta tese, foram obtidos os seguintes resultados originais:

1. Realizamos cálculos explicitamente covariantes do potencial efetivo usando dois tipos distintos de regularização *cut-off*. As divergências são idênticas dentro das duas abordagens, mas o *cut-off* de momento local covariante mostrou-se mais vantajoso na medida em que ele apresenta, de forma mais detalhada, a parte finita do potencial efetivo para o caso massivo, ou seja, ele indica a interpretação física para o parâmetro μ do grupo de renormalização.
2. Discutimos a possibilidade de aplicar o mesmo método para calcular o TEM de vácuo e desta maneira, resolver o problema relevante das divergências não covariantes, do tipo potências, conforme descrito em [2, 21, 65]. Outra conclusão importante sobre nosso trabalho é a compreensão apresentada sobre o grupo de renormalização, baseado em correções quânticas para a teoria quântica de campos massivos, especificamente quando se leva em consideração que diferentes massas estão presentes na teoria.
3. Consideramos diferentes aspectos sobre o TEM de vácuo no espaço-tempo curvo. A princípio, cálculos ingênuos que levam em consideração o momento *cut-off* produzem um resultado que viola a covariância geral. Acreditava-se que essa violação era efeito de um esquema de *cut-off* que a princípio é não covariante e assim não pode ser considerado como uma característica física da teoria. Com base no que foi dito, surgem neste ponto duas importantes questões. A primeira delas diz respeito a possibilidade de introduzir em tal contexto, um *cut-off* de maneira covariante. A

segunda por sua vez diz respeito sobre a possibilidade de encontrar uma contribuição quântica não trivial para o TEM de vácuo de modo que a lei de conservação seja contemplada.

4. Abordamos as questões mencionadas no item anterior, utilizando o método da AE. Em ambos os casos, os resultados de nossa investigação foram perfeitamente consistentes com as expectativas, baseadas na estrutura conhecida de renormalização no espaço-tempo curvo e na lei de conservação para o TEM.
5. Mostramos que os cálculos na teoria com QES, apontaram para a existência de um novo termo, que até então era desconhecido na literatura. Ao mesmo tempo, depois de desenvolvermos explicitamente este termo, encontramos que os resultados finais, descritos pelas equações (4.100) e (4.101), possuem a forma usual e que os efeitos quânticos sempre nos conduzem à renormalização do inverso da constante de Newton e da constante cosmológica na equação (4.50) e também nas equações (4.51) e (4.52).
6. Observamos que nossos cálculos não podem ser interpretados como um teorema de proibição de uma contribuição quântica não trivial para o setor de baixas energias da ação gravitacional. Conforme foi previamente explicado em [87], a possibilidade de encontrar tais correções existem, mas isto pode ser verificado somente no referencial de uma ferramenta matemática qualitativa nova, a qual não deve ser baseada numa expansão perturbativa da curvatura. A aproximação linear na curvatura que foi adotada aqui, não fornece qualquer informação sobre estes tipos de correções. No entanto, a tentativa de verificar que as considerações padrões contemplam a situação não trivial de ter gravidade associada a QES, no contexto da TQC, foi absolutamente válida.

Apêndice A

Coordenadas normais de Riemann (ferramental matemático)

Os cálculos realizados no capítulo 4 foram feitos com base nas coordenadas normais de Riemann (para uma introdução ao assunto veja Ref. [76]) e na representação de momentos locais [31, 72]. Neste apêndice nós apresentamos alguns elementos importantes para que se construa as ferramentas matemáticas que são de importância capital para o desenvolvimento dos cálculos apresentados durante a tese. Inicialmente vamos obter a forma explícita do operador $g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu$, cálculo este que é relativamente trivial.

A expansão em coordenadas normais de uma quantidade em torno de um ponto especial P (este método funciona bem somente quando trabalhando com quantidades locais), onde a métrica é considerada como sendo a métrica plana Minkowskiana. A expansão da métrica em coordenadas normais é dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^\alpha y^\beta + \dots \quad (\text{A.1})$$

Aqui e no que se segue todos as componentes do tensor de curvatura correspondem ao ponto P . Na equação (A.1) nós omitimos os termos de ordem superior nos tensores de curvaturas e suas derivadas. Além disso, y^α representa um desvio com relação ao ponto P , de tal maneira que todas as derivadas parcial que se encontram abaixo, são derivadas com respeito a y^α . Considerando agora a equação (A.1) podemos escrever as seguintes expansões

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= -\frac{2}{3}R^\lambda{}_{(\mu\nu)\tau}y^\tau. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Então para duas derivadas covariantes $\nabla_\mu \nabla_\nu$, atuando num escalar, obtemos que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu = \partial_\mu \partial_\nu + \frac{2}{3} R^\lambda_{(\mu\nu)\tau} y^\tau \partial_\lambda. \quad (\text{A.3})$$

Realizando uma contração com o tensor

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^\mu_{\lambda\nu} y^\lambda y^\nu, \quad (\text{A.4})$$

resulta que

$$\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = \partial^2 - \frac{2}{3} R^\lambda_{\tau} y^\tau \partial_\lambda + \frac{1}{3} R^\mu_{\alpha\nu} y^\alpha y^\nu \partial_\mu \partial_\nu, \quad (\text{A.5})$$

onde $\partial^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Em seguida levando em consideração as equações (A.1), (A.3) e (??), finalmente obtemos o operador de nosso interesse

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square &= \partial_\mu \partial_\nu + \frac{2}{3} \dot{R}^\lambda_{(\mu\nu)\tau} y^\tau \partial_\lambda - \eta_{\mu\nu} \partial^2 + \frac{2}{3} \eta_{\mu\nu} \dot{R}^\lambda_{\tau} y^\tau \partial_\lambda \\ &- \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \dot{R}^\rho_{\alpha\sigma} y^\alpha y^\beta \partial_\rho \partial_\sigma - \frac{1}{3} \dot{R}_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta \partial^2. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A próxima quantidade que estamos interessados é o propagador do campo escalar. Através da equação (A.5) encontramos, (mais detalhes sobre a obtenção do propagador se encontram em Refs. [31, 72]) a expressão relevante para o propagador do campo de massa m na aproximação linear da curvatura,

$$\bar{G}(y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{iky} \left[\frac{1}{k^2 + m^2} - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \frac{R}{(k^2 + m^2)^2} \right], \quad (\text{A.7})$$

onde nós assumimos a rotação de Wick no espaço euclidiano. A equação (A.7) foi recentemente utilizada em Ref. [93] no cálculo do potencial efetivo de um campo escalar na regularização de momento cut-off. Uma vez que nós usamos a representação de momentos local, podemos garantir que o resultado (A.7) possui uma forma covariante, apesar dessa simples aplicação do esquema de cut-off ser, a princípio, supostamente capaz de quebrar até mesmo a invariância de Lorentz.

Apêndice B

Equações de movimento efetivas

Apresentamos aqui as equações efetivas de movimento na aproximação $\mathcal{O}(R)$, para o caso em que a ação efetiva é reduzida a (4.61). Por meio das equações (4.61) e (4.67) obtemos que

$$\bar{\varepsilon}_0^{(1)} = - \left. \frac{\partial \bar{V}_0}{\partial \phi} \right|_{v_0} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\bar{\varepsilon}_1^{(1)} = - \left. \frac{\partial^2 \bar{V}_0}{\partial \phi^2} \right|_{v_0} \cdot v_1 - R \left. \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial \phi} \right|_{v_0}. \quad (\text{B.2})$$

Vamos denotar a parte do potencial clássico, que não depende da massa e do tensor de curvatura como

$$V = V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (\text{B.3})$$

Agora, se nos valermos das quantidades \bar{V}_0 e \bar{V}_1 dadas por (4.64) e (4.65), pode-se facilmente mostrar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_0^{div}}{\partial \phi} &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\Omega^2 V''' - (V'' - m^2) V''' \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right], \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{div}}{\partial \phi^2} &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\Omega^2 V'''' - (V''')^2 \ln \frac{\Omega^2}{m^2} - V'''' (V'' - m^2) \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right], \\ \frac{\partial \bar{V}_1^{div}}{\partial \phi} &= \frac{1}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) V''' \ln \frac{\Omega^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Além disso, das quantidades $\bar{V}_{ren}^{(0)}$ e $\bar{V}_{ren}^{(1)}$ dadas por (4.62), obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{V}_0^{ren}}{\partial \phi} &= \frac{1}{32\pi^2} (V'' - m^2) V''' \left[\ln \left(\frac{V'' - m^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \right], \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{ren}}{\partial \phi^2} &= \frac{1}{32\pi^2} \left\{ [(V''')^2 + (V'' - m^2) V''''] \left[\ln \left(\frac{V'' - m^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \right] + (V''')^2 \right\}, \\ \frac{\partial \bar{V}_1^{ren}}{\partial \phi} &= -\frac{1}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) V''' \left[\ln \left(\frac{V'' - m^2}{\mu^2} \right) + 1 \right].\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

Em seguida vamos calcular as expressões *on-shell*, considerando que considerar que $\phi \rightarrow \phi_{0c}$ e $\lambda v_0^2 = 6m^2$, na forma

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \bar{V}_0^{div}}{\partial \phi} \right|_{v_0} &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\lambda v_0 \Omega^2 - 2\lambda m^2 v_0 \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right], \\ \left. \frac{\partial \bar{V}_1^{div}}{\partial \phi} \right|_{v_0} &= \frac{1}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \lambda v_0 \ln \frac{\Omega^2}{m^2}, \\ \left. \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{div}}{\partial \phi^2} \right|_{v_0} &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\lambda \Omega^2 - 8\lambda m^2 \ln \frac{\Omega^2}{m^2} \right].\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

De maneira análoga, as expressões renormalizadas *on-shell*, são dadas por

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \bar{V}_0^{ren}}{\partial \phi} \right|_{v_0} &= \frac{1}{16\pi^2} \lambda m^2 v_0 \left[\ln \left(\frac{2m^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \right], \\ \left. \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{ren}}{\partial \phi^2} \right|_{v_0} &= \frac{\lambda m^2}{16\pi^2} \left[4 \ln \left(\frac{2m^2}{\mu^2} \right) + 5 \right], \\ \left. \frac{\partial \bar{V}_1^{ren}}{\partial \phi} \right|_{v_0} &= -\frac{\lambda v_0}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[\ln \left(\frac{2m^2}{\mu^2} \right) + 1 \right].\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Neste ponto, podemos obter os elementos das equações de movimento

$$\bar{\varepsilon}_{0,div}^{(1)} = \left. \frac{\partial \bar{V}_{div}^{(0)}}{\partial \phi} \right|_{v_0} = -\frac{\lambda v_0}{32\pi^2} \Omega^2 + \frac{\lambda m^2 v_0}{16\pi^2} \ln \frac{\Omega^2}{m^2}, \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{\varepsilon}_{0,ren}^{(1)} = \left. \frac{\partial \bar{V}_{ren}^{(0)}}{\partial \phi} \right|_{v_0} = -\frac{1}{16\pi^2} \lambda m^2 v_0 \left[\ln \left(\frac{2m^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \right], \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{1,div}^{(1)} &= -\left. \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{div}}{\partial \phi^2} \right|_{v_0} \cdot v_1 - R \left. \frac{\partial \bar{V}_1^{div}}{\partial \phi} \right|_{v_0} \\ &= -\frac{3\xi}{32\pi^2 v_0} \Omega^2 R + \frac{\lambda v_0}{32\pi^2} \left(3\xi + \frac{1}{6} \right) R \ln \frac{\Omega^2}{m^2},\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{1,ren}^{(1)} &= -\left. \frac{\partial^2 \bar{V}_0^{ren}}{\partial \phi^2} \right|_{v_0} \cdot v_1 - R \left. \frac{\partial \bar{V}_1^{ren}}{\partial \phi} \right|_{v_0} \\ &= -\frac{\lambda v_0}{32\pi^2} \left(3\xi + \frac{1}{6} \right) R \ln \left(\frac{2m^2}{\mu^2} \right) - \left(4\xi + \frac{1}{6} \right) \frac{\lambda v_0}{32\pi^2} R.\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Uma última observação é que, conforme já havíamos mencionado no corpo do texto, todas estas expressões devem ser consideradas como constantes na aproximação considerada.

Bibliografia

- [1] Abbott L. F., *The background field method beyond one loop*, Nucl. Phys. B **185**, 189-203 (1981).
- [2] Akhmedov E.K., *Vacuum energy and relativistic invariance*, e-Print: hep-th/0204048.
- [3] Asorey M. & Falceto F., *Geometric regularization of gauge theories*, Nucl. Phys. B **327**, 427-460 (1989).
- [4] Asorey, M.; Gorbar, E. V. & Shapiro, I. L., *Universality and ambiguities of the conformal anomaly*, Class. Quant. Grav. **21**, 163-178 (2004).
- [5] Asorey M., Lavrov P. M., Ribeiro B. J. & Shapiro I. L., *Vacuum stress tensor in spontaneous symmetry breaking theory*, Phys. Rev. D **85**, 104001 (2012).
- [6] Avramidi, I. G.; *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity* (tese de doutorado, Moscow State University, 1986), arXiv:hep-th/9510140.
- [7] Avramidi I. G., *Effective Action Approach to Quantum Field Theory*, Notas para o curso de Teoria Quântica de Campos, University of Naples Federico II (2001).
- [8] Babic A., Guberina B., Horvat R. & Štefančić H., *Renormalization-group running of the cosmological constant and its implication for the Higgs boson mass in the standard model*, Phys. Rev. **D65**, 085002 (2002).
Guberina B., Horvat R. & Štefančić H., *Renormalization-group running of the cosmological constant and the fate of the universe*, Phys. Rev. **D67**, 083001 (2003).
Babic A., Guberina B., Horvat R. & Štefančić H., *Renormalization-group running cosmologies: A scale-setting procedure*, Phys. Rev. **D71**, 124041 (2005).

- [9] Barvinsky A. O., Kamenshchik A. Y., Starobinsky A. A., *Inflation scenario via the Standard Model Higgs boson and LHC*, JCAP, **11** (2008); Barvinsky A. O., Kamenshchik A. Y., Kiefer C., Starobinsky A. A., Steinwachs C., *Asymptotic freedom in inflationary cosmology with a non-minimally coupled Higgs field*, JCAP **12**, 003 (2009).
- [10] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A., *Beyond the Schwinger-DeWitt technique: Converting loop into trees and in-in currents*, Nuc. Phys. **B 282**, 163-188 (1987).
- [11] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A.; *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rep. **119**, 1-74 (1985).
- [12] Barvinsky, A. O. & Vilkovisky, G. A.; *Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms*, Nuc. Phys. B **333**, 471-511 (1990); I.G. Avramidi, *Yad. Fiz. (Sov. J. Nucl. Phys.)* **49**, 1185 (1989).
- [13] Barvinsky A. O. & Vilkovisky G. A., *Covariant perturbation theory (III). Spectral representations of the third-order form factors*, Nucl. Phys. **B 333**, 512 (1990).
- [14] Barvinsky A. O., Gusev Yu. V., Vilkovisky G. A. & Zhytnikov V. V., *Report da Universidade de Manitoba* (1993).
- [15] Bastero-Gil M., Berera A. & Jackson B. M., *Power suppression from disparate mass scales in effective scalar field theories of inflation and quintessence*, JCAP **1107**, 010 (2011).
- [16] Berredo-Peixoto, G., *A note on the heat kernel method applied to fermions*, Mod. Phys. Lett. A **16**, 2463-2468 (2001).
- [17] Berredo-Peixoto, G.; Gorbar, E. V. & Shapiro, I. L., *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space*, Class. Quant. Grav. **21**, 2281-2290 (2004).
- [18] Berredo-Peixoto, G.; Pereira, D. D. & Shapiro, I. L.; *Universality and ambiguity in fermionic effective actions*, Phys. Rev. D **85**, 064025 (2012).
- [19] Bezrukov F. L. & Shaposhnikov M., *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*, Phys. Lett. **B 659** 703 (2008).

- [20] Bezrukov F. L. & Shaposhnikov M., *Standard model Higgs boson mass from inflation: two loop analysis*, JHEP **0907** 089 (2009); F.L. Bezrukov F. L., Magnin A. & Shaposhnikov M., *Standard Model Higgs boson mass from inflation*, Phys. Lett. **B 675** 88 (2009).
- [21] Bilic N., *Vacuum fluctuations in a supersymmetric model in FRW spacetime*, Phys. Rev. **D83**, 105003 (2011).
- [22] Bilic N., Domazet S. & Guberina B., *Vacuum fluctuations of the supersymmetric field in curved background*, Phys. Lett. **B 707**, 221 (2012),
- [23] Birell N. D. & Davies P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [24] Bjorken J. D. & Drell S. D., *Relativistic Quantum Fields*, (McGraw-Hill Book Company, New York 1965).
- [25] Bonanno A. & Reuter M., *Renormalization group improved black hole spacetimes*, Phys. Rev. **D 62**, 043008 (2000); Bonanno A. & Reuter M., *Cosmology of the Planck era from a renormalization group for quantum gravity*, Phys. Rev. **D 65**, 043508 (2002); Bentivegna E., Bonanno A. & Reuter M., *Confronting the IR fixed point cosmology with high-redshift observations*, JCAP **0401**, 001 (2004); Reuter M. & Weyer H., *Quantum gravity at astrophysical distances?*, JCAP **0412**, 001 (2004).
- [26] Buchbinder I. L., *Teor. Mat. Fiz.*, **61** 393 (1984). (em russo), tradução para o ingles: *Theor. Math. Phys.* **61** 1215 (1984).
- [27] Buchbinder, I. L.; Odintsov, S. D. & Shapiro, I. L., *Effective action in quantum gravity*, (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [28] Buchbinder I. L., Odintsov S. D. & Shapiro I. L., *Local momentum space representation of graviton propagators in an external gravitational field and One loop counterterms in quantum gravity*, Sov. Phys. **J 27**, 298 (1984).

- [29] Buchbinder I. L., Odintsov S. D., Sov. Phys. **J.** **27**, 554 (1984); Buchbinder I. L., Odintsov S. D., *Effective potential and phase transitions induced by curvature in gauge theories in curved spacetime*, Class. Quant. Grav. **2**, 721 (1985); Veja também o desenvolvimento do método do grupo de renormalização, aplicado para outros setores da ação efetiva em: Buchbinder I. L., Wolfengaut J. J., *Renormalisation group equations and effective action in curved spacetime*, Class. Quant. Grav. **5**, 1127 (1988).
- [30] Bunch T. S., Panangaden P. & Parker L., *On renormalization of $\lambda\varphi^4$ field theory in curved space-time*. I. J. Phys. **A** **13**, 901 (1980); Parker L. & Toms D. J., *Renormalization group analysis of grand unified theories in curved space-time*. Phys. Rev. **D29**, (1984), Veja também referências correlacionadas.
- [31] Bunch T. S. & Parker L., *Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation*, Phys. Rev. **D20**, (1979).
- [32] Christensen S. M., *Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method*, Phys. Rev. **D14**, 2490 (1976).
- [33] Christensen S. M., *Regularization, renormalization, and covariant geodesic point separation*, **D17**, 946 (1978).
- [34] Coleman S. R., Weinberg E. J., *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
- [35] Collins J. C., *Renormalization*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
- [36] DeWitt B. S., *Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory*, Phys. Rev. **162**, 1195 (1967).
- [37] DeWitt B. S., *Quantum field theory in curved spacetime*, Phys. Rep. **19**, 295 (1975).
- [38] DeWitt B. S., *Dynamical theory of groups and Fields in Relativity, Groups and Topology*, (Gordon and Breach, New York, 1964).
- [39] DeWitt B. S., *Dynamical theory of groups and Fields*, (Gordon and Breach, New York, 1965).

- [40] DeWitt B. S., *Quantum theory of gravity. i. the canonical theory*, Phys. Rev. **160**, 1113-1148 (1967).
- [41] DeWitt B. S., *Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory*, Phys. Rev. **162**, 1195-1239 (1967).
- [42] DeWitt B. S., *Quantum theory of gravity. iii. applications of the covariant theory*, Phys. Rev. **162**, 1239-1256 (1967).
- [43] DeWitt B. S., *The Global Approach to Quantum Field Theory*, (Oxford University Press, Oxford, 2003),
- [44] Domazet S. & Štefančić H., *Renormalization group scale-setting in astrophysical systems*, Phys. Lett. **B703**, 1 (2011).
- [45] Fabris J. C., Oliveira P. L. C. de, Rodrigues D. C., Velasquez-Toribio A. M. & Shapiro I. L., *Quantum corrections to gravity and their implications for cosmology and astrophysics.*, *Proceedings do QFEXT-2011*. International Journal of Modern Physics: Conference Series.
- [46] Fabris J. C., Shapiro I. L. & Solà J., *Density perturbations for a running cosmological constant*, JCAP **0702**, 016 (2007).
- [47] Fabris J. C., Shapiro I. L. & Velasquez-Toribio A. M., *Testing DM warmness and quantity via the RRG model*, Phys. Rev. **D85**, 023506 (2012).
- [48] Farina C., Kort-Kamp W. J. W., Mauro S. & Shapiro I. L., *Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity*, Phys. Rev. **D83**, 124037 (2011).
- [49] Feynman R. P., *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*, (tese de doutorado, Princeton University, 1942).
- [50] Feynman R. P & Hibbs A. R., *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [51] Fock V. A., *The proper time in classical and quantum mechanics* Izv. Akad. Nauk. USSR, (Phys.) **4-5**, 551-568 (1937).

- [52] Fradkin E. S. & Tseytlin A. A., *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Nucl. Phys. **B 201**, 469 (1982).
- [53] Gorbar E. V. & Shapiro I. L., *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP **0302**, 021 (2003).
- [54] Gorbar E. V. & Shapiro I. L., *Renormalization group and decoupling in curved space 3. The case of spontaneous symmetry breaking*, JHEP **0302**, 060 (2004).
- [55] Grande J., Solà J., Fabris J. C. & Shapiro I. L., *Cosmic perturbations with running G and Λ* , Class. Quant. Grav. **27**, 105004 (2010).
- [56] Grib A. A. & Mostepanenko V. M., *Spontaneous breaking of gauge symmetry in a homogeneous isotropic universe of the open type*, JETP Lett. **25**, 302 (1977).
- [57] Guth A. H., *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. **D 23**, 347 (1981).
- [58] Hawking, S. W., *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [59] Hooft G. 't, *An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure*, Nucl. Phys. *B* **62**, 444 (1973); Para uma introdução ao assunto veja, Abbott, L. F., *Introduction to the background field method*, Acta Phys. Pol. **B13**, 33-50 (1982).
- [60] Ishikawa K., *Gravitational effect on effective potential*, Phys. Rev. **D 28**, 2445 (1983).
- [61] Koksma J. F. & Prokopec T., *The Cosmological Constant and Lorentz Invariance of the Vacuum State*, arXiv:1105.6296 [gr-qc].
- [62] Lapchinsky V. G. & Rubakov V. A., Theor. Math. Phys. **42** (1980) 23; Lapchinsky V. G., Rubakov V. A., Teor. Mat. Fiz. **42** (1980) 37.
- [63] Lavrov P. M. & Shapiro I. L., *Renormalization of gauge theories in curved space-time*, Phys. Rev. **D 81**, 044026 (2010); Lavrov P. M., *$Sp(2)$ renormalization* Nucl. Phys. **B 849**, 503 (2011).

- [64] Liao S.B., *Connection between momentum cutoff and operator cutoff regularizations*, Phys. Rev. **D 53**, 2020 (1996).
- [65] Maggiore M., *Zero-point quantum fluctuations and dark energy*, Phys. Rev. **D 83**, 063514 (2011).
- [66] Maggiore M., Hollenstein L., Jaccard M. & E. Mitsou E., *Early dark energy from zero-point quantum fluctuations*. e-Print: arXiv:1104.3797 [astro-ph.CO].
- [67] Minakshisundaram, S. & Pleijel, A., *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operators on Riemannian manifolds*, Canad. J. Math. **1**, 242-256 (1949).
- [68] Morette, C., *On the definition and approximation of Feynman's path integrals*, Phys. Rev. **81**, 848-852 (1951).
- [69] Nelson B. L. & Panangaden P., *Scaling behavior of interacting quantum fields in curved spacetime*, Phys. Rev. **D 25**, 1019 (1982).
- [70] Nobbenhuis S., *The cosmological constant problem, an inspiration for new physics*, Ph.D. thesis, e-print: gr-qc/0609011.
- [71] Ossola G. & Sirlin A., *Considerations Concerning the Contributions of Fundamental Particles to the Vacuum Energy Density*, Eur. Phys. J. **C31**, 165 (2003).
- [72] Parker L. & Toms D. J., Phys. Rev. **D31** (1985) 2424.
- [73] Peebles P. J. E. & Ratra B., Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [74] Pelinson, A. M. *Modelo cosmológico inflacionário baseado nos efeitos quânticos de vácuo* (tese de doutorado, Universidade Federal de Juiz de fora, Juiz de Fora, 2003)
- [75] Peskin M. E. & Schroeder D. V., *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, New York, 1995).
- [76] Petrov A. Z., *Einstein Spaces* (Pergamon, Oxford, 1979).
- [77] Riemann B., *Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen, nachrichten von derk.*, (Gesellschaft von Wissenschaften, Göttingen, 13, 133-152).

- [78] Rodrigues D. C., Letelier P. S. & Shapiro I. L., *Galaxy rotation curves from General Relativity with quantum corrections*, JCAP **04**, 020 (2010).
- [79] Ryder L. H., *Quantum field theory*, (Cambridge University Press, Cambridge,1999).
- [80] Salam A., Phys. Rev. **84**, 426 (1951).
- [81] Schwinger J., *On gauge invariance and vacuum polarization* Phys. Rev. **82**, 664-679 (1951).
- [82] Schwinger J., *On the Green's functions of quantized fields I*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (**37**), 452-455 (1951).
- [83] Shapiro I. L., *Riemann normal coordinates and local momentum representation in curved space-time*, (Notas de aula, Universidade Federal de Juiz de fora, Juiz de Fora, 2003).
- [84] Shapiro I. L., *Effective action of vacuum: the semiclassical approach*, Class. Quant. Grav. **25**, 103001 (2008).
- [85] Shapiro I. L., Solà J., *Scaling behavior of the cosmological constant and the possible existence of new forces and new light degrees of freedom*, Phys. Lett. **B475**, 236 (2000).
- [86] Shapiro I. L. & Solà J., *The scaling evolution of the cosmological constant*, JHEP **02**, 006 (2002).
- [87] Shapiro I. L. & Solà J., *On the possible running of the cosmological "constan"* Phys. Lett. **B682**, 105 (2009).
- [88] Shapiro I. L. & Solà J., *Massive fields temper anomaly-induced inflation: the clue to graceful exit?*, Phys. Lett. **B530**, 10 (2002).
- [89] Shapiro I. L, Solà J., España-Bonet C. & Ruiz-Lapuente P., *Variable cosmological constant as a Planck scale effect*, Phys. Lett. **B574**, 149 (2003); *Testing the running of the cosmological constant with type Ia supernovae at high z*, JCAP **0402**, 006 (2004);
Shapiro I. L. & Solà J., *Cosmological constant, renormalization group and Planck scale physics*, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **127**, 71 (2004).

- [90] Shapiro I. L., Solà J. & Štefančić H., *Running G and Λ at low energies from physics at M_X : possible cosmological and astrophysical implications*, JCAP **0501**, 012 (2005).
- [91] Shore G. M., *Radiatively induced spontaneous symmetry breaking and phase transitions in curved spacetime*, Ann. Phys. **128**, 376-424 (1980).
- [92] Simone A. de, Hertzberg M. P. & Wilczek F., *Running inflation in the Standard Model*, Phys. Lett. **B678**, 1-8 (2009).
- [93] Sobreira F., Ribeiro B. J. & Shapiro I. L., *Effective potential in curved space and cut-off regularizations*, Phys. Lett. **B705**, 273-278 (2011).
- [94] Spokoiny B. L., *Inflation and generation of perturbations in broken-symmetric theory of gravity*, Phys. Lett. **B147**, 39-43 (1984); Futamase T., Maeda K., *Chaotic inflationary scenario of the Universe with a nonminimally coupled “inflaton” field*, Phys. Rev. **D39**, 399-404 (1989); Salopek D. S., Bond J. R., Bardeen J. M., *Designing density fluctuation spectra in inflation*, Phys. Rev. **D40**, 1753-1788 (1989); Fakir R., Unruh W. G., *Improvement on cosmological chaotic inflation through nonminimal coupling* Phys. Rev. **D41**, 1783-1791 (1990); Kaiser D. I., *Primordial spectral indices from generalized Einstein theories* Phys. Rev. **D52** 4295-4306 (1995); Komatsu E., Futamase T., *Complete constraints on a nonminimally coupled chaotic inflationary scenario from the cosmic microwave background*, Phys. Rev. **D59**, 064029 (1999); Tsujikawa S., Gumjudpai B., *Density perturbations in generalized Einstein scenarios and constraints on nonminimal couplings from the cosmic microwave background*, Phys. Rev. **D69**, 123523 (2004).
- [95] Toms D. J., *Renormalization of interacting scalar field theories in curved space-time*, Phys. Rev. **D26**, 2713-2729 (1982).
- [96] Utiyama, R. & DeWitt B. S., *Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields*, J. Math. Phys. **3**, 608-618 (1962).
- [97] Vilkovisky G. A., *Quantum theory of gravity*, (Hilger, Bristol, 1984).
- [98] Voloshin M. B. & Ter-Martirosyan K. A., *Gauge Theory of Particle Interaction*, Nauka, 1981 (in Russian).

- [99] Weinberg S., *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1-23 (1989).
- [100] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972).
- [101] Weinberg S., *The Quantum Theory of Fields: II Modern Applications*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [102] Wetterich C., *Average action and the renormalization group equations*, Nucl. Phys. **B352**, 529-584 (1991); Berges J., Tetradis N., Wetterich C., *Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics*, Phys. Rep., **363**, 223-386 (2002) (veja também referências correlacionadas).
- [103] Zee, A., *Quantum Field Theory in a Nutshell*, (Princeton University Press, Princeton, 2003).