

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Bruno Gonçalves

**Estudo de aspectos clássicos e quânticos do  
campo de Dirac em espaço-tempo curvo**

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Juiz de Fora – MG

2010

Bruno Gonçalves

**Estudo de aspectos clássicos e quânticos do campo de Dirac em  
espaço-tempo curvo**

Dissertação de Doutorado apresentada  
ao Programa de Pós-graduação em Física,  
da Universidade Federal de Juiz de Fora,  
como requisito parcial para obtenção do  
grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Juiz de Fora - MG

2010

Bruno Gonçalves

**Estudo de aspectos clássicos e quânticos do campo de Dirac em  
espaço-tempo curvo**

Dissertação de Doutorado apresentada  
ao Programa de Pós-graduação em Física,  
da Universidade Federal de Juiz de Fora,  
como requisito parcial para obtenção do  
grau de Doutor.

Aprovada em 15 de março de 2010.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro (Orientador)  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Wilson Oliveira  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Gastão Inácio Krein  
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Cougo Pinto  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Carlos Farina de Souza  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho à memória de meu pai.

## Agradecimentos

- À minha mãe e ao meu irmão por todo apoio e carinho;
- À Michelle, por estar a meu lado em todos os momentos;
- Ao professor Ilya L. Shapiro, pela sugestão da maioria dos problemas elaborados nesta tese, pelos ensinamentos e conselhos durante a iniciação científica, o mestrado e o doutorado;
- Ao professor Yuri N. Obukhov, pela colaboração no desenvolvimento da parte do trabalho que trata da transformação Foldy-Wouthuysen;
- Ao professor Guilherme de Berredo-Peitoxo, pela colaboração no desenvolvimento da parte do trabalho que trata da eletrodinâmica quântica em espaço-tempo curvo;
- Ao professor Joan Solà, pelo frutífero curso de física de partículas ministrado na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e pelas discussões sobre este tema após as aulas;
- Ao professor Iosef L. Buchbinder, pelo excelente curso de teoria de campos ministrado na UFJF e por sanar todas as dúvidas sobre este assunto;
- Aos professores do Departamento de Física da UFJF, por todo conhecimento transmitido e pela convivência sempre muito boa;
- Aos grandes amigos que fiz durante a graduação, o mestrado e o doutorado;
- À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

## Resumo

A tese está composta de duas partes principais. Na primeira parte, o férmion de Dirac foi considerado interagindo com diferentes campos externos. Uma abordagem extremamente eficiente para se extrair informações físicas da Hamiltoniana, é fazer uma transformação Foldy-Wouthuysen nela. Além da transformação Foldy-Wouthuysen perturbativa, existe a versão exata, que não é baseada em séries de potências no parâmetro  $1/m$ . Nesta tese foi desenvolvida uma maneira de se fazer a transformação Foldy-Wouthuysen exata com os campos de interesse. Foi tomado o campo espinorial de Dirac no fundo de ondas gravitacionais e um campo magnético constante. A Hamiltoniana transformada mostra que o efeito da onda gravitacional no campo espinorial e na correspondente partícula pode ser, em princípio, intensificado por um campo magnético suficientemente forte. Cálculos análogos foram realizados para a componente temporal do campo de torção gravitacional. Além disso, foi feita uma classificação geral dentre os possíveis termos que violam as simetrias CPT e Lorentz, selecionando aqueles que admitem esta transformação. Foi desenvolvida uma nova abordagem para estudar, qualitativamente, os casos para os quais a transformação exata não é permitida. Esta técnica foi chamada de transformação semi-exata. A vantagem desta técnica em relação à transformação padrão é de ser muito mais econômica na parte de cálculos. Como exemplo de aplicação foram considerados os casos de campo elétrico externo e a parte vetorial do campo de torção gravitacional. Na segunda parte da tese, foram calculadas as correções de um laço para o setor do fóton da eletrodinâmica quântica no fundo de um campo gravitacional. O cálculo foi realizado utilizando a técnica do “heat-kernel” de duas maneiras diferentes e uma nova ambiguidade nos resultados foi encontrada. Este resultado representa o primeiro exemplo conhecido da chamada anomalia multiplicativa. Realizando os cálculos para diferentes dimensões do espaço-tempo, encontramos uma explicação qualitativa desta anomalia. Além dos fatores de forma não-locais do campo eletromagnético, foi calculada a função beta de um laço física, que descreve a variação desta grandeza em relação à energia do processo e é válida para todas as escalas de energia. Usando esta função beta encontramos a forma mais completa do famoso teorema de Appelquist e Carazzone.

Palavras-chave: Transformação Foldy-Wouthuysen exata. Eletrodinâmica quântica em espaço-tempo curvo. Anomalia multiplicativa.

## Abstract

This thesis is composed by two main parts. On the first one, the Dirac fermion was considered interacting with different external fields. A very efficient approach to extract physical information from the Hamiltonian is to perform a Foldy-Wouthuysen transformation on it. There are, on the literature, two versions of this transformation. The standard and the exact ones. The main difference between them is that the last is not based on a power series low in the parameter  $1/m$ . On this thesis, we developed a method to perform the exact Foldy-Wouthuysen with the fields of interest. The Dirac field was described in a constant magnetic field plus gravitational wave background. The transformed Hamiltonian shows that the effect of the gravitational wave on the magnetic field could be, in principle, enforced by a sufficient strong magnetic field. Similar calculations was performed to the temporal component of the gravitational torsion field. Furthermore, it was done a general classification of the possible terms the violate the CPT and Lorentz symmetries, selecting those of them wich allow the exact transformation. A new approach to qualitatively study the cases for wich this kind of transformation is not allowed, was developed. This technique was called semi-exact transformation and has the advantage to the standard transformation of being much more economic in the calculations part. As examples of application it was considered the cases of external electric field and the vectorial component of the torsion gravitational field. On the second part of the thesis, it was calculated the one loop quantum corrections to the photon sector of the quantum electrodynamics in a gravitational background. The calculation was done using the “heat-kernel” technique in two different ways and an ambiguity on the results was found. This fact represents the first known example of the so called multiplicative anomaly. The calculations were performed to different space-time dimensions and a qualitative explanation of this anomaly was found. The non local formfactors to the electromagnetic field was obtained and also the one loop complete beta function, that describes the energy variation of it in relation to the energy of the process and it is valid to all energy scales. Using this beta function, the more complete form of the famous Appelquist e Carazzone theorem was obtained.

Keywords: exact Foldy-Wouthuysen transformation. Curved space-time quantum electrodynamics. Multiplicative anomaly.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
<b>2</b>	<b>Alguns elementos matemáticos de Relatividade Geral</b>	p. 18
2.1	Notação relativística . . . . .	p. 18
2.2	Grandezas básicas de Relatividade Geral . . . . .	p. 19
2.3	Derivada covariante e conexão afim . . . . .	p. 20
2.4	Tensor de curvatura e suas propriedades . . . . .	p. 21
2.5	Equações de Einstein . . . . .	p. 22
2.6	Ondas gravitacionais . . . . .	p. 22
<b>3</b>	<b>Campos de Klein-Gordon e de Dirac</b>	p. 25
3.1	Equação de Klein- Gordon . . . . .	p. 25
3.2	A Equação de Dirac . . . . .	p. 26
3.3	Antipartículas . . . . .	p. 28
3.4	Aproximação não-relativística da equação de Dirac . . . . .	p. 29
3.5	Generalização para o caso de campo gravitacional externo . . . . .	p. 31
3.5.1	Tetrada . . . . .	p. 31
3.5.2	Conexão Espinorial . . . . .	p. 31
<b>4</b>	<b>Transformação Foldy-Wouthuysen</b>	p. 33
4.1	Transformação Foldy-Wouthuysen . . . . .	p. 33
4.2	Transformação Foldy-Wouthuysen exata . . . . .	p. 37
4.3	Como fazer a transformação exata . . . . .	p. 39

<b>5</b>	<b>Interação com ondas gravitacionais e campo magnético</b>	p. 46
5.1	Descrição do método . . . . .	p. 46
5.2	A métrica $g_{\mu\nu}$ . . . . .	p. 47
5.3	Escrevendo a tetrada em função de $h_{\mu\nu}$ . . . . .	p. 47
5.4	Escrevendo a conexão espinorial em função de $h_{\mu\nu}$ . . . . .	p. 48
5.5	Introduzindo as ondas gravitacionais . . . . .	p. 49
5.6	Introduzindo as ondas gravitacionais na ação de Dirac . . . . .	p. 49
5.7	Introduzindo o campo magnético na ação de Dirac . . . . .	p. 50
5.8	Fazer a transformação exata . . . . .	p. 51
5.9	Análise de casos particulares . . . . .	p. 53
5.9.1	Partícula livre . . . . .	p. 53
5.9.2	Partícula na presença do campo magnético constante . . . . .	p. 53
5.9.3	Partícula com momento magnético anômalo num campo magnetostático . . . . .	p. 54
5.10	Equações de movimento . . . . .	p. 54
5.10.1	A Hamiltoniana da partícula . . . . .	p. 54
5.10.2	Equações de movimento para a partícula . . . . .	p. 57
<b>6</b>	<b>Transformação FW exata para termos que violam as simetrias CPT e Lorentz</b>	p. 59
6.1	Transformação exata para Campo de Dirac interagindo com parte escalar da torção . . . . .	p. 63
6.2	Transformação Foldy-Wouthuysen semi-exata . . . . .	p. 65
6.2.1	Transformação semi- exata com expansão linear na parte vetorial da torção . . . . .	p. 67
6.2.2	Transformação semi-exata para o potencial eletromagnético escalar	p. 69
<b>7</b>	<b>Uma breve introdução à ação efetiva de vácuo</b>	p. 71
7.1	Abordagem semi-clássica . . . . .	p. 71

7.2	Ação Efetiva e Renormalização . . . . .	p. 73
7.3	Métodos de cálculos em espaços curvos . . . . .	p. 73
7.4	Divergências de um laço e renormalização . . . . .	p. 75
7.5	Grupo de renormalização baseado no esquema-MS . . . . .	p. 77
7.6	Método de Heat-Kernel . . . . .	p. 77
<b>8</b>	<b>Correções Quânticas de um laço para eletrodinâmica quântica em espaço-tempo curvo</b>	<b>p. 79</b>
8.1	Ação induzida por anomalia para a métrica e campos eletromagnéticos de fundo . . . . .	p. 80
8.2	Obtenção dos fatores de forma exatos em um laço . . . . .	p. 85
8.3	Os coeficientes $\hat{a}_n$ . . . . .	p. 88
8.4	$A_3$ em $N$ dimensões . . . . .	p. 90
8.5	A anomalia multiplicativa . . . . .	p. 92
8.6	Grupo de Renormalização, baixas energias e desacoplamento . . . . .	p. 94
8.7	Dependência da carga com a energia . . . . .	p. 95
8.8	Fatores de forma exatos para eletrodinâmica escalar . . . . .	p. 99
8.9	Coefficiente $A_3$ para EDEQ . . . . .	p. 101
<b>9</b>	<b>Conclusões</b>	<b>p. 102</b>
	<b>Referências</b>	<b>p. 105</b>

# 1 *Introdução*

Em 1928, o grande cientista Paul Dirac escreveu a equação que descreve, através da mecânica quântica, uma partícula com spin meio e que satisfaz os princípios da relatividade especial. Dirac procurava resolver o problema das densidades de probabilidade negativas da equação de Klein-Gordon. Por muito tempo após o estabelecimento da equação que leva seu nome, acreditou-se que essa era a única equação de onda relativística válida para partículas massivas. Somente depois de Pauli e Weisskopf darem uma reinterpretação da equação de Klein-Gordon como uma teoria de campo em 1934, que este suposto engano começou a ser desfeito.

Até hoje, a equação de Dirac possui uma enorme importância já que descreve partículas de spin  $1/2$  e tanto o próton quanto o elétron, por exemplo, têm esse valor de spin. Muitas outras partículas possuem esse valor de spin, como o nêutron e os mésons  $\mu$ . De fato, como característica teórica, todas as partículas encontradas na natureza que satisfazem à estatística de Fermi possuem spin  $1/2$ . Os mésons  $\pi$ , descobertos em 1947 (com contribuição significativa de César Lattes), foram as primeiras partículas massivas com spin diferente (zero, no caso).

Se tomarmos o caso de um elétron em um dado potencial, a equação de Dirac possui quatro soluções, sendo que duas descrevem o comportamento das duas componentes da função de onda do elétron, de tal forma que cada uma possui um dos possíveis valores de spin para esta partícula ( $\pm 1/2$ ). Já as outras duas soluções levaram Dirac a formular uma teoria bastante inovadora para a época, que deveria descrever partículas com carga positiva e os mesmos valores de spin do elétron. Então, ele introduziu a teoria de antipartículas e o pósitron (antipartícula do elétron) foi descrito teoricamente. A partir daí uma série de aplicações começaram a tomar enorme importância nos estudos das partículas “elementares”. Cada vez mais aceleradores de partículas foram construídos a fim de compreender o comportamento dos componentes da matéria. A busca por maior precisão e limites de energias mais altos levaram físicos experimentais a uma grande jornada de aprimoramento dos aceleradores até chegarmos ao LHC, que é um acelerador

com potência máxima nos dias atuais e que está começado a funcionar no CERN.

Até hoje, há muitos testes e estudos teóricos a serem feitos com base em resultados de experiências realizadas em aceleradores de partículas que envolvem partículas de spin semi-inteiro (sobre este assunto, há um artigo introdutório [59] elaborado durante a escola de física de partículas do CERN em 2009). Um dos mais importantes aspectos talvez seja o estudo dos neutrinos, mas também há um número enorme de aplicações ao estudo de colisão de partículas com alta energia com prótons para se compreender de forma cada vez mais clara a estrutura interna desse tipo de partícula e buscar entender a característica, de certa forma intrigante, do confinamento dos quarks. A equação de Dirac descreve as amplitudes de probabilidade para uma única partícula, ou seja, é uma teoria de uma partícula apenas. Ela não leva em conta a criação e aniquilação de partículas, por exemplo. Para uma descrição quântica correta de todos os fenômenos físicos associados às partículas que a equação de Dirac visa a descrever, esta equação, que usa funções de onda como meio de interpretação dos resultados, deve ser substituída por uma equação fisicamente diferente que usa a descrição de campos quânticos para a matéria. Além disso, se adicionarmos um campo eletromagnético quantizado a esta teoria formularemos a teoria da eletrodinâmica quântica (EDQ). Se, por fim, desejarmos descrever a situação em que um campo gravitacional externo pode estar presente, faz-se necessária a introdução da Relatividade Geral.

A Relatividade Geral é uma teoria de gravitação que apresenta bastante sucesso em aplicações aos fenômenos gravitacionais e à área de cosmologia. Suas previsões se ajustam bem à maioria dos testes e ela é extremamente condizente com quase todos os dados existentes (veja, por exemplo, [135, 23]). Os limites de validade da Relatividade Geral são notáveis apenas quando nos aproximamos de singularidades, onde aparentemente é preciso levar em conta alguns efeitos quânticos. Com o surgimento da Relatividade Geral, previsões não contidas na Mecânica Clássica se mostraram presentes na teoria de Einstein, como, por exemplo, a precessão do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional para o vermelho e a deflexão da luz devido à presença de um campo gravitacional. Uma teoria completa das interações fundamentais deve conter tanto a Relatividade Geral como a Mecânica Quântica. Por volta da segunda metade do século XX surge a Teoria Quântica de Campos moderna, incluindo várias abordagens em busca da Teoria Quântica da Gravitação. Levando em conta a evolução dessa teoria desde o início, podemos afirmar que a descrição do comportamento do elétron continua sendo uma parte importante dentro da Teoria de Campos implementando várias investigações, baseadas nas novas características da teoria, aplicados a essa partícula.

Nesta tese serão abordados vários aspectos da equação de Dirac. Os dois focos principais de estudo serão divididos pela maneira clássica e a quântica de descrição dos férmions de Dirac. No primeiro caso, vamos buscar um formalismo que permita que a análise da equação seja a mais clara possível e, dessa forma, o objetivo da primeira parte do trabalho poderá ser considerado como alcançado quando possuímos uma descrição clássica bem explícita dos fenômenos englobados pela equação de Dirac. Uma maneira útil de tratar o campo de Dirac interagindo com alguns campos de fundo é a transformação Foldy-Wouthuysen [54] que nos permite uma separação de componentes “grandes” e “pequenas” do bi-spinor de Dirac. Podemos distinguir duas versões destas transformações: a transformação Foldy-Wouthuysen exata (TFWE) [50] e a transformação Foldy-Wouthuysen aproximada (TFW), na qual a solução é obtida em forma de séries de potências no parâmetro  $1/mc^2$ . A solução aproximada não é muito complicada de se obter, mas neste caso existe um certo risco de serem perdidos termos relevantes [107]. Aqui, nós concentramos nossa atenção sobre a solução exata que é mais complexa e mais interessante do ponto de vista matemático.

No segundo caso, passaremos a considerar as possíveis correções quânticas para essa equação. Tomaremos a eletrodinâmica quântica (EDQ) no espaço-tempo curvo e o estudo estará baseado não somente nos resultados para essas correções como também nos métodos de cálculos que serão utilizados. A interação do campo eletromagnético com a gravitação é uma área de estudo importante devido às várias aplicações astrofísicas e cosmológicas. Há vários trabalhos nessa área e, em particular, muitas publicações interessantes dedicadas às correções quânticas no setor eletromagnético da teoria, produzidas pelo campo de Dirac. Nos trabalhos mais antigos [100, 28], os cálculos diretos foram feitos através dos diagramas de Feynman e o método de Schwinger e pouco tempo depois, começando por [44], usando diferentes modificações do método de “heat-Kernel” [101, 127, 4, 17]. Os diagramas foram utilizados na forma tradicional de cálculos [92, 5] no espaço-tempo plano e com uma abordagem modificada para admitir o espaço-tempo curvo [113]<sup>1</sup>. Uma consideração geral, que inclui cálculos em um e dois laços e ainda levam em conta efeitos de temperatura, foi feita em [47].

Nossa intenção aqui não é discutir todas as aplicações em detalhes, mas utilizá-las como motivação para se buscar as correções quânticas exatas em um laço para EDQ. Uma das implicações mais importantes das correções quânticas para a ação do campo eletromagnético é a quebra da invariância conforme que a teoria possui em nível clássico.

---

<sup>1</sup>Ainda há uma outra abordagem que quebra a simetria conforme e é baseada na quebra espontânea da invariância de Lorentz [16].

Existem situações cosmológicas e astrofísicas em que a violação da simetria conforme pode ser relevante (em [57, 58] há uma breve revisão sobre a transformação conforme local aplicada a Relatividade Geral). A quebra dessa simetria muda a equação de estado da radiação, o que pode ser importante, por exemplo, na época dominada pela radiação do Universo. A equação de estado modificada permite a construção de modelos cosmológicos interessantes [104], em particular, aqueles [15] baseados nas correções quânticas obtidas em [44]. A equação de estado modificada pode produzir uma mudança na lei de expansão do Universo, aumento de entropia e outros fenômenos. Além disso, este efeito poderia afetar levemente como a densidade de radiação e a temperatura CMB dependem do desvio para o vermelho. Devido ao crescimento da precisão dos experimentos em astrofísica, em algum ponto esses resultados das correções quânticas podem se tornar relevantes.

Essa violação possui outra aplicação interessante, já que é necessária para a criação das sementes iniciais dos campos magnéticos de larga escala em galáxias, na época da formação de estruturas [131]. Há uma tentativa (muito conhecida) de se explicar essa violação por efeitos quânticos similares a anomalia conforme [40], durante a época inflacionária [46]. Seria muito interessante conhecer completamente os mecanismos teóricos que estão por trás dessa violação, incluindo os que podem ocorrer em épocas da evolução do Universo mais tardias quando as massas das partículas fermiônicas passam a ter maior relevância na contribuição para a energia do sistema. Este problema já foi bem discutido, e.g., em [10, 32], ou ainda em [70] e [71] em que podem ser encontradas revisões recentes das possíveis origens das sementes iniciais dos campos magnéticos e assuntos correlatos. A magnitude dos campos magnéticos típicos no Universo variam de poucos  $\mu G$  (no caso de galáxias e clusters), passando por alguns G (planetas, como a Terra ou Júpiter), chegando a  $10^{12} G$  nas estrelas de nêutrons. Os campos magnéticos com correlação maior que a unidade astronômica são chamados de campos magnéticos de larga escala.

As questões que envolvem esse assunto são relacionadas à origem desses campos. O grande físico Enrico Fermi há mais de cinquenta anos apontou para a possibilidade de esses campos serem primordiais. Existem teorias mais modernas que se fundamentam em ter existido, durante a evolução do Universo, uma fonte inicial para estes campos que, durante a passagem do tempo, se tornou muito forte a ponto de ser observada nos nossos dias [70]. Essas fontes são conhecidas como as sementes e o mecanismo de amplificação dos campos é o dínamo. Há diferentes tipos de dínamo, mas basicamente o mecanismo mostra como é possível haver transferência de energia cinética em energia magnética em plasmas magnetizados. A aplicação da nossa abordagem a este problema teria como base tomar a ação de eletrodinâmica quântica completa (com fatores de forma completos) e para a parte

de Maxwell e utilizar a equação de dínamo descrita em [71] para obter a magnitude de campos magnéticos que poderiam ser gerados por essas correções quânticas. Assim, basta fazer a comparação entre o valor teórico que será obtido desses cálculos com os valores experimentais fornecidos pela literatura. A partir disso, poderíamos, em princípio, ter uma posição conclusiva a respeito da contribuição das correções de um laço para a carga do elétron em campos magnéticos de larga escala.

Outra implicação interessante desse resultado é que as correções quânticas para o propagador do fóton podem modificar a posição do pólo e portanto gerar a situação na qual a onda eletromagnética se propaga com uma velocidade que é ligeiramente diferente daquela do caso puramente clássico. Um efeito similar pode acontecer no espaço-tempo curvo e é caracterizado como movimento superluminal [89, 29] (em [128] há uma revisão recente do assunto). Em particular, esse efeito pode ter um impacto significativo no comportamento da luz nas vizinhanças de um buraco negro [96, 37, 30], também pode aparecer devido à presença de limites (ou contornos) e, em geral, devido às condições macroscópicas [31]. Sabemos que além disso, a propagação da luz pode ser afetada por termos não lineares [105] os quais podem resultar das correções quânticas e das interações clássicas e/ou quânticas com a gravitação externa [108] ou com outros campos como “k-Essence” [11]. Claramente a simetria conforme proíbe a maior parte das possibilidades de mudança nas equações de onda e, portanto, o estudo detalhado da quebra dessa simetria é muito relevante para a caracterização deste problema. Neste sentido, pode ser visto como uma forma de análise bem geral das correções quânticas produzidas pelo campo de Dirac quântico.

Além de todas essas implicações citadas nos três últimos parágrafos, se pensarmos apenas sobre a simetria conforme, uma observação importante é que em teorias realistas como EDQ ou o modelo padrão, e também as generalizações delas como o modelo padrão supersimétrico ou teorias de grande unificação, o campo eletromagnético (não massivo), é conformalmente invariante já que o vetor  $A_\mu$  não muda sob transformação conforme local  $g'_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$ , por possuir peso conforme nulo, devido ao fato de a generalização para o caso gravitacional ser feita pela tetrada  $A_\mu = e_\mu^b A_b$  e  $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^b e_\nu^a$ . Entretanto, ele interage com outros campos, que são massivos, e por esse motivo a teoria torna-se conformalmente não-invariante. Nesta tese, os estudos estão concentrados no caso mais simples de EDQ em espaço-tempo curvo e buscaremos apresentar a visão mais geral da violação da simetria conforme nesta teoria.

Neste contexto, podemos formular as duas principais perguntas:

1) Qual o mecanismo de violação da simetria conforme local para energias intermediárias e como fazer a ligação dessa violação com os limites ultravioleta e infravermelho ? Essa não é uma questão puramente técnica visto que durante sua evolução, o Universo atravessa diferentes fases e é desejável conhecer como a simetria conforme é violada não apenas na época inflacionária ou na presente, mas também próximo à época de recombinação ou ainda no período quando as estruturas cósmicas começam a se formar.

2) Até que limite as correções quânticas e, em particular, a violação da simetria conforme, são universais ? Em outras palavras, existe alguma ambiguidade nos termos quânticos ? Responder à última pergunta é obviamente significativa já que a ação efetiva, em geral, não é um objeto definido univocamente. Em vários casos, ela depende da parametrização dos campos quânticos, da escolha para fixação do calibre, dos esquemas de cálculos, da regularização, da renormalização, etc.

Nossa proposta para responder a primeira pergunta é obter uma expressão mais geral para a correção quântica de um laço para o setor eletromagnético da EDQ no espaço-tempo curvo. As situações físicas para essas correções no universo novo e em um período posterior são bem diferentes. No primeiro caso, os férmions podem ser tratados como praticamente sem massa. Neste caso, o mecanismo para a violação da simetria conforme é a bem conhecida anomalia conforme. A vantagem da anomalia conforme como método de obtenção das correções quânticas são a simplicidade, a relação direta com as divergências ultravioletas (UV) e consequente universalidade. Já para o limite de baixas energias, as massas dos férmions virtuais são muito maiores que as energias dos fótons reais ou, de forma equivalente, que as energias das linhas externas nos laços de férmions massivos. Neste caso, observamos o desacoplamento das contribuições quânticas dos campos massivos, de acordo com o teorema de Appelquist e Carazzone [2]. A violação da simetria conforme ainda existe, mas ela é relacionada aos termos de ordens superiores na ação efetiva, que são suprimidos quadraticamente pela massa dos férmions<sup>2</sup>. Em espaço-tempo curvo, há termos dependentes da curvatura que podem violar a simetria conforme. Como nossa intenção é estudar a teoria no espaço-tempo curvo, sempre vamos nos concentrar na quebra da simetria conforme local.

Já para estudar a segunda pergunta, usaremos os resultados matemáticos obtidos para responder a primeira questão. Analisaremos tudo o que terá sido derivado fazendo a interpretação correta (e mais clara possível) das contribuições em um laço para a ação efetiva. Como vamos usar o método de campo de fundo para os cálculos (veja e.g. o

---

<sup>2</sup>Um exemplo desse tipo de termos é  $F^{\mu\nu} \frac{\square}{m^2} F_{\mu\nu}$  que nós vamos discutir em detalhes no capítulo 8.

livro [24] para uma introdução ao assunto), o trabalho prático ficará reduzido a obter explicitamente  $\text{Ln Det}$  do operador  $\hat{H}$ , que tipicamente é a forma bilinear da ação clássica com respeito aos campos quânticos. O operador  $\hat{H}$  em vários casos depende dos campos de fundo (os quais podem ser apenas campos externos). Como resultado, a operação de tomar o determinante funcional de um operador dessa forma não é trivial devido à dimensão infinita da representação matricial correspondente. Em particular, as relações

$$\text{Det}(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \text{Det} \hat{A} \cdot \text{Det} \hat{B} \quad \text{e} \quad \text{Ln Det} \hat{A} = \text{Tr Ln} \hat{A},$$

que são certamente válidas para matrizes de dimensões finitas deveriam, em princípio, ser provadas na teoria quântica de campos. Entretanto, há uma outra possibilidade na qual essas relações podem ser violadas e, de acordo com a lógica matemática, isso pode ser feito através da apresentação de um único contraexemplo não trivial. Por exemplo, isso pode significar um par de operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , para os quais a primeira das relações acima seria violada. Essa situação é conhecida e foi chamada de anomalia multiplicativa (AM) [90, 51].

Esforços consideráveis foram aplicados na tentativa de se encontrar um exemplo em que a primeira equação fosse violada, mas até agora em todos os casos as diferenças apareciam devido à ambiguidade na renormalização apenas [53, 45, 102]. Isso significa que quando as condições de renormalização são impostas aos operadores  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{A} \cdot \hat{B}$ , pode haver uma diferença devido à independência dessas condições para operadores distintos. Em particular, essa situação pode aparecer quando os determinantes funcionais são definidos por meio da regularização que utiliza a função- $\zeta$  generalizada [52, 33, 133], pois essa abordagem esconde as divergências e fornece o resultado renormalizado e regularizado automaticamente. Logo a dependência com o parâmetro arbitrário de renormalização ( $\mu$ ) deve ser implementada artificialmente e isso abre caminho para a AM. Essa situação foi analisada com detalhes em [119, 53]. Se considerarmos, por exemplo,  $\text{Ln Det}(\square + M_1^2) \cdot (\square + M_2^2)$  no espaço de de Sitter, o resultado será um funcional que depende de alguns parâmetros constantes, chamados de  $M_{1,2}^2$  e da curvatura escalar  $\Lambda$ . Além disso, essa expressão possui dimensão quatro. Como resultado, ela possui exatamente a mesma estrutura dos contratermos e, portanto, está sujeita a uma ambiguidade na renormalização. Então, vemos que é muito difícil fazer uma conclusão definitiva sobre a existência da AM baseada nesse tipo de cálculos. Para se estabelecer a existência da AM, é preciso encontrá-la em um setor finito da ação efetiva que pode claramente ser diferente dos contratermos, por exemplo, pode ser uma parte não local da ação efetiva, que não possui relação direta com os contratermos.

Nossa proposta aqui será apresentar um exemplo de outro tipo, que pode ser entendido como a AM não-local que não é reduzida a ambiguidade na renormalização. Para construir este exemplo vamos usar os resultados que serão obtidos para as correções quânticas para EDQ em espaço-tempo curvo com duas abordagens distintas (dois operadores diferentes).

A tese está dividida como segue. O próximo capítulo é dedicado a uma breve revisão dos elementos básicos de Relatividade Geral que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho. No capítulo 3, será feita a motivação matemática para o estudo da equação de Dirac. Não serão mostrados detalhes históricos ou uma descrição minuciosa de cada passo percorrido para se chegar a essa equação. De forma objetiva, será apresentada uma maneira de a descrever em um campo gravitacional de fundo. No capítulo 4 é mostrada uma coletânea de resultados importantes para o uso da técnica da transformação Foldy-Wouthuysen exata (TFWE). Além da motivação para o uso desta técnica será mostrada de forma didática como se fazer o uso da transformação para um caso qualquer de interação de campos externos com o campo de Dirac.

O capítulo 5 faz uso de todos os principais resultados mostrados nos capítulos anteriores. Faremos os cálculos explícitos da TFWE para o caso de um férmion que interage com um campo magnético externo em uma região do espaço onde existam ondas gravitacionais [56]. Todos os passos do desenvolvimento serão apresentados de forma clara para que a utilidade da técnica, bem como a validade dos resultados, sejam bem estabelecidas. No capítulo 6, faremos uma grande classificação do campo de aplicações desta transformação para outros casos. Tomaremos uma ação que englobe os termos que violam as simetrias CPT e Lorentz e construiremos uma tabela que mostra quais deles admitem a TFWE [62]. O estudo da TFWE para o caso da parte escalar do vetor que descreve a torção gravitacional será desenvolvida até o final. Além disso, vamos mostrar como fazer a análise qualitativa (transformação semi-exata) da Hamiltoniana transformada para dois casos [60, 61] em que a TFWE não é admitida.

No capítulo 7 passamos a abordar a análise das correções quânticas para uma teoria em espaço-tempo curvo. Nosso objetivo ainda continua sendo o estudo da equação de Dirac, mas neste capítulo faremos uma breve revisão sobre os métodos de cálculos úteis para se obter esses resultados para uma teoria qualquer. No capítulo 8, os resultados do capítulo 7 são aplicados à ação de Dirac com o termo de Maxwell, ou seja, passamos a estudar a EDQ. Utilizaremos o método de “heat-kernel” [6] para obter as correções quânticas de um laço para o termo que descreve o comportamento do fóton nessa ação [63]. Este cálculo será feito de duas maneiras diferentes. A princípio poderíamos pensar que o fato

de usarmos duas abordagens teria o objetivo de dar crédito ao resultado no caso de ambas concordarem ou de mostrar que uma delas é inválida, caso mostrem uma discrepância. Veremos que nenhuma das duas possibilidades é a correta e vamos mostrar argumentos fortes para poder afirmar que a não concordância dos resultados é uma propriedade da ação efetiva desta teoria. Será apresentado o exemplo explícito da anomalia multiplicativa já comentada acima [64]. Faremos a análise de todos os resultados para a dependência da carga elétrica com a energia  $e$ , por fim, a derivação análoga para as correções quânticas de um laço para eletrodinâmica quântica escalar também é feita.

## 2 Alguns elementos matemáticos de Relatividade Geral

O foco principal deste capítulo é uma revisão sobre as grandezas matemáticas básicas da teoria da Relatividade Geral. Serão feitos breves comentários sobre os elementos que serão necessários para o desenvolvimento do trabalho. É importante enfatizar que o objetivo deste capítulo não é discutir as bases conceituais dessa teoria, pois isso tomaria espaço desnecessário no texto além de fugir ao tema principal desta tese.

### 2.1 Notação relativística

Antes de começarmos a introduzir as grandezas importantes em RG, é necessário definir notações. Vamos então definir as grandezas básicas da teoria, entretanto sem explicações minuciosas sobre cada uma, pois este não é o objetivo deste trabalho.

Será generalizada a noção de distância entre dois pontos do espaço como o intervalo entre dois pontos no espaço-tempo, para que ele seja invariante perante as transformações de Lorentz. O intervalo é dado por

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.1)$$

onde

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (2.2)$$

e  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski. Para os operadores diferenciais, definimos

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \\ \partial^\mu &= g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

O quadrivetor energia-momento de uma partícula é escrito da seguinte maneira

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{P} \right), \quad p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{P} \right). \quad (2.4)$$

A relação entre o momento e energia da partícula tem a forma (relação de dispersão)

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - P^2 = m^2 c^2.$$

Nas unidades em que  $c = 1$ , temos

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - P^2 = m^2. \quad (2.5)$$

## 2.2 Grandezas básicas de Relatividade Geral

A Relatividade Geral é fundamentada no princípio da equivalência de Einstein, que diz: “em qualquer ponto do espaço-tempo, em qualquer campo gravitacional, pode-se escolher um sistema de coordenadas ‘localmente inerciais’ tal que numa vizinhança suficientemente pequena desse ponto as leis da natureza terão a mesma forma como num sistema de coordenadas cartesianas não aceleradas”.

Para se definir grandezas nessa teoria é necessário usar uma ferramenta matemática que seja condizente com o princípio da equivalência. Utilizam-se os tensores, pois se sabe que um tensor quando muda de sistema de coordenadas continua sendo um tensor, pela própria definição [98]. Um tensor de rank três, por exemplo, é definido como

$$T'^{\alpha}_{\beta\gamma}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} T^{\lambda}_{\mu\nu}(x). \quad (2.6)$$

Um conceito importante da Relatividade Geral é que o campo gravitacional não é como os outros campos, mas uma característica geométrica fundamental do espaço-tempo. Para se medir distâncias nesse espaço, utiliza-se o tensor métrica, pois o intervalo é escrito da seguinte maneira

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.7)$$

onde temos que as componentes da métrica  $g_{\mu\nu}$  descrevem o campo gravitacional.

Matematicamente, a descrição de campo gravitacional exige o uso da noção de variedade. No caso em que a única característica do campo gravitacional é a métrica, a construção se chama “espaço de Riemann”. Não será exibida aqui uma revisão sobre variedades, pois essa discussão foge ao objetivo desta tese. Como referência podemos indicar, por exemplo, o livro [41].

## 2.3 Derivada covariante e conexão afim

A derivada parcial  $\partial_\alpha \phi$  de um campo escalar  $\phi$  é um vetor covariante. Entretanto, a derivada parcial de algum outro tensor não forma um tensor. Porém, podemos adicionar à derivada parcial alguns termos extras tais que a soma torna-se um tensor. Esta soma é chamada derivada covariante  $\nabla_\alpha$ . No caso de um vetor  $A^\alpha$  sua derivada covariante tem a forma

$$\nabla_\beta A^\alpha = \partial_\beta A^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha A^\gamma. \quad (2.8)$$

A derivada covariante (2.8) é um tensor se, e somente se, a conexão afim transforma-se não tensorialmente

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\nu\alpha} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.9)$$

A regra para construir as derivadas covariantes de outros tensores vem do fato de o produto de vetores contra e covariantes  $A^\alpha$  e  $B_\alpha$  ter que ser um escalar,

$$\nabla_\beta (A^\alpha B_\alpha) = \partial_\beta (A^\alpha B_\alpha) \quad (2.10)$$

e conseqüentemente

$$\nabla_\beta B_\alpha = \partial_\beta B_\alpha - \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma B_\gamma. \quad (2.11)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha$ , em Relatividade Geral, satisfazem duas condições

(i) Simetria (torção nula) <sup>1</sup>

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha; \quad (2.12)$$

(ii) Metricidade da derivada covariante,

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0. \quad (2.13)$$

Se usarmos estas condições em uma equação como a (2.8), para um tensor com número de índices arbitrário, a única solução para  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  é

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}). \quad (2.14)$$

A expressão acima é chamada “símbolo de Cristoffel” que coincide, no caso de teoria com simetria (i) e não-metricidade, com a conexão afim.

---

<sup>1</sup>O caso em que os índices inferiores da conexão afim não comutam, gerando o campo de torção, será estudado a partir do capítulo 6.

## 2.4 Tensor de curvatura e suas propriedades

Se tentarmos entender o princípio de equivalência usando as notações que estamos fixando, poderemos entendê-lo com um enunciado que diria que sempre se pode escolher coordenadas locais tais que num dado ponto  $x_0$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda(x_0) = 0$ . Portanto necessitamos de um tensor do espaço-tempo que nos diga se o transporte paralelo muda os componentes de um vetor. Se a conexão afim admite coordenadas globalmente planas, nessas coordenadas tem-se que para tensor qualquer

$$(\partial_\mu \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu) T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} = 0, \quad (2.15)$$

então, nestas coordenadas é válido que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\alpha] T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m} = 0. \quad (2.16)$$

Contudo, num caso geral não se pode esperar que as derivadas covariantes sempre comutem, assim

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu T^\alpha &= \partial_\mu \partial_\nu T^\alpha + \partial_\mu (\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha) T^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \partial_\mu T^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda T^\alpha - \\ &- \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha T^\gamma + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \partial_\nu T^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\gamma}^\lambda T^\gamma, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\mu T^\alpha &= \partial_\nu \partial_\mu T^\alpha + \partial_\nu (\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha) T^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \partial_\nu T^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda T^\alpha - \\ &- \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha T^\gamma + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \partial_\mu T^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda T^\gamma, \end{aligned} \quad (2.18)$$

portanto

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^\alpha = T^\lambda (\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha) + T^\tau (\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \Gamma_{\tau\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\tau\mu}^\lambda) = -R_{\lambda\mu\nu}^\alpha T^\lambda, \quad (2.19)$$

onde  $R_{\lambda\nu\mu}^\alpha$  é apresentado da seguinte forma

$$R_{\lambda\nu\mu}^\alpha = \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha + \Gamma_{\lambda\mu}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\tau \Gamma_{\tau\mu}^\alpha. \quad (2.20)$$

O termo acima é chamado de “tensor de curvatura” ou “tensor de Riemann”. Da mesma forma temos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] Z_\beta = R_{\beta\nu\mu}^\lambda Z_\lambda. \quad (2.21)$$

Juntamente com o tensor de Riemann há algumas contrações importantes. A primeira delas é o tensor de Ricci,  $R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = R_{\mu\nu}$ , e seu traço  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$  é chamado escalar de curvatura.

## 2.5 Equações de Einstein

As equações dinâmicas da Relatividade Geral podem ser formuladas por meio da ação de Einstein-Hilbert

$$S_{gr} = -\frac{1}{\gamma} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (2.22)$$

onde  $\gamma$  e  $\Lambda$  são constantes e  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . O termo  $\Lambda$  é chamado de constante cosmológica. O próximo passo é considerar a ação total, incluindo a parte da matéria  $S_m$

$$S_t = S_{gr} + S_m \quad (2.23)$$

e achar as equações de movimento  $\delta S_t / \delta g_{\mu\nu} = 0$ . O tensor energia-momentum da matéria é definido como

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.24)$$

A variação da ação total, que corresponde a uma variação da métrica  $\delta g_{\mu\nu} = h g_{\mu\nu}$  tem a forma (desconsiderando o termo com derivada total)

$$\delta S_t = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - g^{\mu\nu} \Lambda \right) - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right\} h_{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Usando o princípio da ação mínima, as equações para a métrica tomam a forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\gamma}{2} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Estas são as equações de Einstein com a constante cosmológica, onde o tensor  $G_{\mu\nu}$  é convencionalmente chamado de tensor de Einstein [135].

## 2.6 Ondas gravitacionais

Nesta seção será feita uma breve revisão sobre ondas gravitacionais, em particular da métrica que as descreve. Outros aspectos sobre ondas gravitacionais não serão levados em conta. Eles podem ser encontrados, por exemplo, em [97]. Vamos estudar uma métrica que descreve ondas gravitacionais fracas. Consideraremos propagações de perturbações da métrica no fundo da métrica de Minkowski. Vamos tomar

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.27)$$

A conexão afim, levando em conta apenas a primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  será

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} h_{\rho\nu} + \partial_{\nu} h_{\rho\mu} - \partial_{\rho} h_{\mu\nu}) \quad (2.28)$$

e o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\nu h_\mu^\lambda + \partial_\lambda \partial_\mu h_\nu^\lambda - \partial^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) + O(h^2). \quad (2.29)$$

As equações de movimento têm a forma

$$R_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_\lambda{}^\lambda). \quad (2.30)$$

Levando em conta as condições de calibre  $\partial_\mu h_\nu^\mu - 1/2 \partial_\mu h = 0$  (veja por exemplo [135]), chegamos à seguinte relação

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

onde  $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}$ . Consideramos que a fonte das ondas também é fraca. Tomando o caso especial quando o espaço está vazio, uma solução em forma de ondas planas é

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}e^{ik_\lambda x^\lambda} + e_{\mu\nu}^*e^{-ik_\lambda x^\lambda}, \quad (2.32)$$

onde  $k_\lambda$  é o vetor de onda. Temos também o vínculo devido à invariância de calibre

$$k_\mu e_\nu^\mu = \frac{1}{2}k_\nu e_\mu^\mu. \quad (2.33)$$

Vamos considerar o caso de uma onda que se propaga na direção  $x$ , ou seja, o vetor de onda é tal que  $k^3 = k^2 = 0$ ,  $k^1 = k^0 \equiv k > 0$ . A partir de (2.33), podemos escrever

$$e_{03} = -e_{13} \quad , \quad e_{01} = -\frac{1}{2}(e_{11} + e_{00}), \quad , \quad e_{02} = -e_{12} \quad , \quad e_{22} = -e_{33}. \quad (2.34)$$

Agora, vamos fazer a transformação  $e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu \xi_\nu + k_\nu \xi_\mu$ . Para isso escrevemos  $h_{\mu\nu}$  como em (2.32) e supomos  $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$ . Usamos então (2.33) e chegamos a

$$\begin{aligned} e'_{33} &= e_{33} \quad , \quad e'_{32} = e_{32} \quad , \quad e'_{31} = e_{31} + k\xi_3, \\ e'_{21} &= e_{21} + k\xi_2 \quad , \quad e'_{11} = e_{11} + 2k\xi_1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Podemos escolher  $\xi_\mu$  tal que todas as componentes exceto  $e_{33}$ ,  $e_{22}$  e  $e_{32}$  sejam nulas. Já sabemos que  $e_{33} = -e_{22}$ . Tomando  $e_{33} = v'$  e  $e_{32} = u'$ , levando em conta que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , temos

$$h_{33} = v'e^{ikx+kt} + v'e^{-ikx+kt}, \quad h_{32} = u'e^{ikx+kt} + u'e^{-ikx+kt}$$

$$h_{22} = -h_{33}, \quad \text{pois} \quad e_{22} = -e_{33}. \quad (2.36)$$

Para simplificar as notações vamos chamar  $h_{33} = 2v$  e  $h_{32} = 2u$ . Essas são as componentes da métrica que serão utilizadas nesse trabalho para estudar o campo de Dirac no fundo de uma onda gravitacional fraca [94]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - 2v & -2u \\ 0 & 0 & -2u & -1 + 2v \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

## 3 Campos de Klein-Gordon e de Dirac

Os campos que aparecem quando se trata da mecânica quântica relativística serão apresentados agora. Mais à frente será apresentada uma maneira de introduzir a interação desses campos com um campo gravitacional, no ramo da Relatividade Geral.

### 3.1 Equação de Klein- Gordon

Podemos escrever uma equação de onda para uma partícula sem spin que corresponda a um campo escalar. Já que não possui spin, ela tem apenas uma componente, que vamos denotar por  $\Phi$ . A equação de onda é obtida a partir da relação de dispersão (2.5), substituindo os operadores diferenciais por  $E$  e  $\vec{P}$ , como se faz na teoria quântica

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{P} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (3.1)$$

Podemos escrever então

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar} \Phi = 0.$$

Usando unidades para as quais  $c = \hbar = 1$ , temos

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\Phi = 0. \quad (3.2)$$

Essa é conhecida como equação de Klein- Gordon. Nota-se que, substituindo (3.1) na aproximação não relativística de (2.5),  $E = P^2/2m$ , chegamos à equação de Schrödinger para uma partícula livre

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi = 0, \quad (3.3)$$

o que mostra que a equação de Schrödinger é uma aproximação não relativística da equação de Klein-Gordon. A densidade de probabilidade para a equação de Schrödinger

e a corrente de probabilidade são as seguintes [115]

$$\begin{aligned}\rho &= \Phi^* \Phi, \\ \vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m}(\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Elas obedecem à equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi^* \Phi) - \frac{i\hbar}{2m}(\Phi^* \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Phi^*) = 0. \quad (3.5)$$

Na equação de Klein-Gordon, para ser propriamente relativístico,  $\rho$  não deve, como em (3.4) transformar-se como escalar, mas como a componente temporal de um quadrivetor, cuja componente espacial é  $\vec{j}$ , dado por (3.5). Então  $\rho$  é dado por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}(\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^*) \quad (3.6)$$

e com

$$\begin{aligned}j^\mu &= (\rho, \vec{j}) = \frac{i\hbar}{2m} \left[ \Phi^* (\partial_0 \Phi) - (\partial_0 \Phi^*) \Phi, \Phi^* (\nabla \Phi) - (\nabla \Phi^*) \Phi \right] = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left[ \Phi^* (\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*) \Phi \right],\end{aligned}\quad (3.7)$$

usando a equação da continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\Phi^* \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \partial^\mu \Phi^*) = 0. \quad (3.8)$$

Neste momento, a equação de Klein-Gordon apresenta dois “problemas” [21]. Primeiro se nota que a densidade de probabilidade não é definida positivamente como na equação de Schrödinger. Outro problema é que ela fornece duas energias, uma positiva e outra negativa. Para uma partícula livre, cuja energia é constante, isso é difícil de se aceitar. Esses “problemas” do campo de Klein Gordon só podem ser solucionados no ramo da Teoria Quântica de Campos, onde  $\Phi$  não é tratado com uma função de onda mas como um operador no espaço de Fock.

## 3.2 A Equação de Dirac

Para tentar resolver os problemas de interpretação da equação onda de Klein-Gordon citados no final da seção anterior, vamos seguir o caminho tomado por Dirac em 1928, procurando por uma equação relativisticamente covariante com densidade de probabilidade positivamente definida. Para que isso aconteça, ela deve ser linear na derivada

temporal e, para manter a invariância sob as transformações de Lorentz, deve ser linear nas derivadas espaciais também. Vamos supor que essa equação deva ter a forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left( \alpha^1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \alpha^3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} \right) + \beta m c^2 \psi \equiv H \psi. \quad (3.9)$$

Entretanto os coeficientes  $\alpha^i$  não podem ser simplesmente números, pois essa equação não seria invariante perante rotações espaciais. E ainda, para termos as leis da física iguais em todos os referenciais,  $\psi$  não pode ser um escalar. De fato, a densidade de probabilidade deve ser a componente temporal de um quadrivetor que, se integrado sobre todo o espaço, em um tempo fixo, deve ser invariante. Para resolver esse problema, Dirac propôs que deveria ser considerada uma equação matricial. A função de onda como uma matriz coluna com  $N$  componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

e os coeficientes  $\alpha^i$  e  $\beta$  são matrizes  $N \times N$ . Então a equação (3.9) deve ser substituída por  $N$  equações

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{\tau=1}^N \left( \alpha^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right)_{\tau\sigma} \psi_\tau + \sum_{\tau=1}^N \beta_{\tau\sigma} m c^2 \psi_\tau = \sum_{\tau=1}^N H_{\tau\sigma} \psi_\tau. \quad (3.11)$$

Quando adotamos a convenção de soma dos índices repetidos e a notação matricial no espaço-tempo quadridimensional, ou seja  $N = 4$ , esta equação volta a ter a forma da (3.9).

Agora, apenas para simplificar a notação, vamos introduzir as matrizes  $\alpha^i = \beta \gamma^i$  e  $\gamma^0 = \beta$ . Com isso a equação (3.11), pode ser escrita como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m c^2) \psi = 0. \quad (3.12)$$

As matrizes que aparecem nessa equação podem ser representadas explicitamente como

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

onde  $\sigma_i$  são as conhecidas matrizes de Pauli  $2 \times 2$  e os blocos na matriz  $\beta$  são matrizes unidade  $2 \times 2$ . Escrevendo no espaço de momentos, temos

$$(\gamma^\mu P_\mu - m c^2) \psi(p) = 0, \quad (3.14)$$

que é a equação invariante perante transformações de Lorentz, que descreve partículas quânticas com spin  $\frac{1}{2}$  e é conhecida como equação de Dirac. As matrizes  $\gamma$  são

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

e  $\gamma^0 = \beta$ . Elas satisfazem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I, \quad (3.16)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski e  $I$  a matriz identidade  $4 \times 4$ .

### 3.3 Antipartículas

Vamos definir o espinor adjunto de  $\psi$ . Ele será denotado por  $\bar{\psi}$  e

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.17)$$

onde  $\gamma^0 = \beta$ , a partir dele podemos escrever a equação adjunta de Dirac

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\gamma}^\mu \partial_\mu - m) = 0, \quad (3.18)$$

nota-se que  $\overleftarrow{\partial}_\mu$  atua pela direita. Usando a equação adjunta e a equação de Dirac pode-se mostrar que a corrente  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  é conservada. A densidade é, portanto,

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2, \quad (3.19)$$

que é positiva. Isso resolve um dos problemas apresentados pela equação de Klein-Gordon. O outro problema está associado aos estados de energia negativa. Tomando uma partícula parada, temos

$$\gamma^0 P_0 \psi = m\psi, \quad \text{e} \quad P_0 \psi = m\gamma^0 \psi.$$

Os autovalores de  $\gamma^0$  são 1 e -1 (duas vezes cada, devido à degenerescência das correspondentes soluções da equação acima). Os autovalores de energia são

$$E = +(m^2 + P^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad E = -(m^2 + P^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Isso mostra que para cada valor de P, existem dois valores possíveis de energia para cada valor de spin. Dirac supôs que o vácuo está preenchido de partículas, cujos valores de

energia seriam de sinal contrário das que lá estão. Assim, pelo princípio de exclusão de Pauli, uma partícula não poderia ir para um possível valor negativo de energia e depois ir para  $E = -\infty$ . Entretanto, é possível supor um buraco no vácuo de onde poderia ter pulado um elétron. Esse buraco tem, então, carga  $+e$  e pode ser representado como a antipartícula do elétron. A construção é chamada “mar de Dirac”.

Entretanto, é importante comentar que a descrição mais correta e geral tanto para o elétron como para o pósitron, bem como para todas as partículas que compõem o universo de elementos do modelo padrão, é feita através da teoria quântica de campos. É necessário fazer a chamada segunda quantização dos campos estudados até agora neste trabalho e definir os operadores de criação e aniquilação. Introdz-se o espaço de excitações desses campos, que evidencia para cada interpretação física possível de seus vetores de base um número de partículas. A descrição é feita através da interação dos operadores de campos externos quando atuam nos autovetores desse espaço. Os campos de Dirac e Klein-Gordon passam a ser agentes que excitam este espaço que é conhecido como espaço de Fock.

### 3.4 Aproximação não-relativística da equação de Dirac

Para um elétron livre, temos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2]\psi, \quad (3.21)$$

onde as matrizes  $\beta$  e  $\vec{\alpha}$  foram introduzidas na equação (3.13).

Vamos tomar as componentes do espinor que estão relacionadas às energias positivas (as negativas estão ligadas à definição de antipartículas). Concentremo-nos nas primeiras para mostrar que há uma correspondência com a representação de Pauli de duas componentes de spin. Imaginemos então que este elétron está sujeito a um campo eletromagnético externo descrito pelo quadrivetor  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ . Isso é mais facilmente (veja e.g. [93] para mais detalhes) introduzido usando,  $p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$ . A equação de Dirac se torna

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + \beta mc^2 + eA_0]\psi. \quad (3.22)$$

Consideremos a representação em duas componentes de  $\psi$

$$\psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}, t) \\ \chi(\vec{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

A substituição direta de (3.23) na equação de Dirac fornece

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\chi \\ c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\varphi \end{pmatrix} + eA_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Se a energia de repouso  $mc^2$  é maior que a energia cinética e os termos de interação, a solução em duas componentes é aproximadamente

$$\begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}, t) \\ \chi(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(\vec{x}, t) \\ \chi_0(\vec{x}, t) \end{pmatrix} e^{\frac{-imc^2 t}{\hbar}}, \quad (3.25)$$

onde  $\varphi_0$  e  $\chi_0$  são funções que mudam lentamente com o tempo. Substituindo (3.25) em (3.24) e omitindo o índice 0, para simplificar a notação, obtemos

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0)\varphi = [c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]\chi \quad (3.26)$$

e

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2mc^2)\chi = [c\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]\varphi. \quad (3.27)$$

Em baixas energias, o termo  $2mc^2$  é dominante no lado esquerdo da equação (3.27). A componente de baixo,  $\chi$ , é algumas vezes chamada de componente “pequena” da função de onda, em relação à componente grande,  $\varphi$ . A componente pequena é aproximadamente  $v/c$  vezes menor que a componente grande no limite não relativístico. A equação (3.27) toma a forma

$$\chi = \frac{1}{2mc} [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]\varphi. \quad (3.28)$$

Substituindo (3.28) na equação (3.26), obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[ eA_0 + \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \varphi, \quad (3.29)$$

que é a equação de Pauli. A derivação da equação de Pauli como limite não-relativístico para a equação de Dirac é um fato muito importante. Historicamente, Pauli chegou a essa equação de uma maneira diferente e independente. Essa equação foi obtida antes da equação de Dirac como uma generalização da equação de Schrödinger para o caso de interação de uma partícula com spin meio com campo eletromagnético externo. Pauli estendeu os postulados da mecânica quântica para que englobassem a descrição de partícula com spin, e escreveu a equação acima introduzindo a interação entre o campo magnético externo e o momento magnético de spin através do último termo de (3.29).

## 3.5 Generalização para o caso de campo gravitacional externo

Será suposto agora que os campos de Klein-Gordon e de Dirac possam estar sujeitos a um campo gravitacional externo. Uma maneira de estudá-los será descrita de forma simples. A introdução mais detalhada pode ser encontrada, por exemplo, no livro [24]. Será introduzido para isso o conceito de tetrada e conexão espinorial.

### 3.5.1 Tetrada

Na Relatividade Geral, o campo gravitacional é descrito pelo tensor métrica  $g^{\mu\nu}$ . Pelo princípio da equivalência, é sempre possível fazer uma mudança de coordenadas tal que as coordenadas finais sejam sempre localmente descritas pela métrica de Minkowski. Queremos escrever as matrizes  $\gamma^\mu$  de forma que  $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$ , para podermos trabalhar com as matrizes  $\gamma^a$  usuais do espaço plano que já conhecemos. Para isso vamos introduzir a tetrada, definida pelas seguintes relações

$$e_a^\mu e_{b\mu} = \eta_{ab} \quad , \quad e_a^\mu e^{a\nu} = g^{\mu\nu} \quad , \quad e_\mu^a e_{a\nu} = g_{\mu\nu} \quad , \quad e_\mu^a e^{b\mu} = \eta^{ab} . \quad (3.30)$$

Assim, podemos introduzir o campo gravitacional nas nossas equações e trabalhar com as matrizes  $\gamma^a$  conhecidas. Devemos também trocar as grandezas (generalização mínima), para que a equação se mantenha covariante

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad , \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \quad , \quad \int d^n x \rightarrow \int d^n x \sqrt{-g} ,$$

onde  $g$  representa o determinante de  $g_{\mu\nu}$ . Temos que escrever agora todas as grandezas importantes em Relatividade Geral em termos da tetrada. Depois de alguns cálculos, chega-se à nova conexão afim

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha &= g^{\alpha\beta} (\partial_\lambda g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\lambda\mu}) = \\ &= \frac{1}{2} e_c^\alpha e^{\beta c} (e_{d\mu} \partial_\lambda e_\beta^d + e_{d\lambda} \partial_\mu e_\beta^d - e_{d\mu} \partial_\beta e_\lambda^d - e_\lambda^d \partial_\beta e_{\mu d}) + \frac{1}{2} e^{\alpha d} (\partial_\lambda e_{d\mu} + \partial_\mu e_{d\lambda}) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.5.2 Conexão Espinorial

A derivada covariante de um espinor de Dirac,  $\nabla_\alpha \psi$ , deve ser definida de maneira consistente com a derivada covariante de tensores. Supomos que

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \omega_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi , \quad (3.32)$$

onde  $w_\mu^{ab}$  é um novo objeto chamado de conexão espinorial e

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a). \quad (3.33)$$

Consideramos então a derivada covariante do vetor  $\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi$  para encontrar o termo  $w_\mu^{ab}$

$$\nabla_\mu (\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) = \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\lambda \psi) + \Gamma_{\tau\mu}^\lambda (\bar{\psi} \gamma^\tau \psi). \quad (3.34)$$

Obtemos uma equação na forma

$$\gamma^\lambda w_{\mu ab} \sigma^{ab} \bar{\psi} \psi - w_{\mu ab} \sigma^{ab} \gamma^\lambda \bar{\psi} \psi = \Gamma_{\tau\mu}^\lambda (\bar{\psi} \gamma^\tau \psi). \quad (3.35)$$

Depois tomamos o conjugado de (3.34) e derivamos uma equação análoga a (3.35). Após alguma álgebra, pode-se mostrar que a solução tem a forma

$$w_{\mu ab} = \frac{1}{4}(e_{b\alpha} \partial_\mu e_a^\alpha - e_{a\alpha} \partial_\mu e_b^\alpha) + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha (e_{b\alpha} e_a^\lambda - e_{a\alpha} e_b^\lambda). \quad (3.36)$$

Mas o importante é escrever todas as grandezas em termos da tetrada, logo

$$w_{\mu ab} = \frac{1}{4} \left[ (e_b^\alpha \partial_\mu e_{\alpha a} - e_a^\alpha \partial_\mu e_{\alpha b}) + (e_a^\beta \partial_\beta e_{\mu b} - e_b^\beta \partial_\beta e_{\mu a}) + (e_a^\alpha e_b^\beta - e_b^\alpha e_a^\beta) e_{\mu c} \partial_\alpha e_\beta^c \right]. \quad (3.37)$$

# 4 Transformação Foldy-Wouthuysen

Este capítulo é dividido em três partes. Na primeira é mostrada a transformação Foldy-Wouthuysen comum, discutindo suas motivações e aplicações. Na segunda parte é apresentada a transformação exata. Já na última, é feita a explicação detalhada de como e em que casos se pode fazer a transformação exata.

## 4.1 Transformação Foldy-Wouthuysen

Pode-se descrever um férmion de Dirac em vários tipos de campos externos, usando uma função de onda de quatro componentes  $\psi$ , satisfazendo à equação de Dirac,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + gH_1)\psi, \quad (4.1)$$

$H_0$  é o hamiltoniano da partícula livre

$$H_0 = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \vec{P}, \quad (4.2)$$

onde  $\beta$  e  $\vec{\alpha}$  são as bem conhecidas matrizes de Dirac. Neste capítulo as unidades são escolhidas de tal forma que  $\hbar = c = 1$ .

A interação com o campo externo é feita pelo termo  $gH_1$ . Identifica-se  $g$  como a constante de acoplamento, por exemplo a carga elétrica do férmion no caso de campos eletromagnéticos externos.

No caso geral quando se coloca a interação de interesse na equação acima e se obtém a solução, há a mistura de estados  $\varphi$  e  $\chi$ . De certa forma, esse fato dificulta a interpretação física do resultado. Vamos buscar uma maneira de resolver esse problema.

A solução aproximada é bem conhecida e faz parte de muitos livros textos. Entretanto, em alguns casos é possível escrever a solução exata. Primeiramente, obteremos a solução

aproximada comum e a usaremos como motivação para chegarmos à solução exata, nos casos em que esta é admitida.

Faz-se necessário, para o desenvolvimento da teoria, estabelecer a distinção entre operadores pares e ímpares. Um operador ímpar na teoria de Dirac é uma matriz que contém elementos que conectam as componentes grandes e pequenas da função de onda, enquanto o par é aquele que não possui esses elementos.

Pode-se mostrar que uma condição necessária e suficiente para uma matriz ser par (ímpar) é que ela comute (anticomute) com  $\beta$ . Isso permite que se escreva para um operador qualquer  $M$

$$M = M^P + M^I, \quad (4.3)$$

onde  $M^P$  é a parte par e  $M^I$ , a parte ímpar

$$M^P = \frac{1}{2}(M + \beta M \beta), \quad M^I = \frac{1}{2}(M - \beta M \beta). \quad (4.4)$$

As equações acima são simples de serem entendidas, basta substituir (4.4) em (4.3)

$$M = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}(\beta M \beta) + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(\beta M \beta).$$

Algo natural de se pensar é que se o Hamiltoniano fosse um operador par, poderíamos separar a equação de Dirac em duas, sem haver mistura de componentes. Há uma maneira de se fazer isso, utilizando-se de sucessivas transformações canônicas.

A Hamiltoniana é colocada na forma

$$H = \beta m + \varepsilon + \vartheta, \quad (4.5)$$

onde  $\varepsilon$  são os operadores pares e  $\vartheta$  são os ímpares (veja a equação(4.4)). Faz-se a seguinte transformação canônica  $\psi' = e^{iS}\psi$ . Daí teremos

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = [e^{iS}(H - i\frac{\partial}{\partial t})e^{-iS}]\psi' = H'\psi', \quad (4.6)$$

pois

$$i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\psi' = H\psi = He^{-iS}\psi' = e^{-iS}\left(i\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\right)\psi'. \quad (4.7)$$

Com o objetivo de obtermos uma solução aproximada para um sistema qualquer, vamos fazer a expansão do termo em que a Hamiltoniana está presente na equação (4.6). Essa expansão é feita através de um parâmetro  $\tau$ , introduzido da seguinte maneira

$$F(\tau) = e^{i\tau S}He^{-i\tau S}. \quad (4.8)$$

Depois de feita a expansão, tomamos  $\tau = 1$ . Calculando passo a passo

$$F(\tau) = e^{i\tau S} H e^{-i\tau S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left( \frac{\partial^n F}{\partial \tau^n} \right), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = iS e^{i\tau S} H e^{-i\tau S} + e^{i\tau S} H (-iS) e^{-i\tau S} = i e^{i\tau S} [S, H] e^{-i\tau S}.$$

Vemos então que

$$\frac{\partial^n F}{\partial \tau^n} = i^n e^{i\tau S} [S, [S, \dots, [S, H], \dots]] e^{-i\tau S}. \quad (4.10)$$

No nosso caso como foi dito  $\tau = 1$ . Aplicando este resultado à equação (4.6), obtemos

$$H' = e^{iS} \left( H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS} + i \frac{\partial}{\partial t} = H + i[S, H - i \frac{\partial}{\partial t}] - \frac{1}{2} [S, [S, H - i \frac{\partial}{\partial t}]] + \dots \quad (4.11)$$

A justificativa para essa expansão é que  $S$  é expandido em potências de  $1/m$  e é portanto “pequeno” no limite não relativístico. Para começar construindo  $S$ , vamos tomar a primeira ordem em  $1/m$

$$H' = \beta m + \varepsilon + \vartheta + i[S, \beta]m + \mathcal{O}(1/m). \quad (4.12)$$

Podemos ver que para a partícula livre, se escolhermos  $S = -i\beta\vartheta/2m$ , em primeira ordem o termo ímpar  $\vartheta$  desaparece e a Hamiltoniana torna-se par. Nesse caso a transformação será exata.

Aplicando este  $S$  na equação (4.12), tem-se, para o caso geral

$$\begin{aligned} H' &= \beta m + \varepsilon + \vartheta + i \left[ \left( \frac{-i\beta\vartheta}{2m} \right) \beta m - \beta m \left( \frac{-i\beta\vartheta}{2m} \right) \right] + \mathcal{O}(1/m) = \\ &= \beta m + \varepsilon + \vartheta - \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2} = \beta m + \varepsilon + \mathcal{O}(1/m), \end{aligned} \quad (4.13)$$

lembrando que  $\beta^2 = 1$  e  $\beta$  anticomuta com  $\vartheta$ . É importante enfatizar que este resultado é a solução apenas em primeira ordem na expansão definida pela equação (4.11). Caso sejam necessários termos de ordens superiores no parâmetro  $1/m$ , deve-se adicionar as parcelas correspondentes na equação (4.12). Então, fazendo uma seqüência de transformações, com o gerador de cada passo sendo  $S = (-i\beta/2m) \times \{ \text{termos ímpares na Hamiltoniana de ordem mais baixa em } 1/m \}$ , a Hamiltoniana será par em qualquer ordem desejada. Se escrevermos a Hamiltoniana transformada como  $H_{FW} = U_{FW} H U_{FW}^*$ , a transformação resultante será

$$U_{FW} = \dots \exp(iS_2) \exp(iS_1). \quad (4.14)$$

Como já conhecemos  $S_1$ , tomando a primeira ordem, devemos encontrar  $S_2$ . Para isso, como já foi dito, basta fazer a transformação com  $S_1$  e ver quais são os termos ímpares que terão ordem  $1/m$ . Esses serão os termos utilizados para formar  $S_2$ . Conseqüentemente, para acharmos  $S_3$ , fazemos a transformação com  $S_2$ , identificamos os termos ímpares de ordem  $1/m^2$  e assim sucessivamente. Vamos achar  $S_2$ , fazendo então a primeira transformação

$$\begin{aligned}
H'' &= \beta m + \varepsilon + \vartheta + i \left[ \frac{-i\beta\vartheta}{2m}, \beta m + \varepsilon + \vartheta - i \frac{\partial}{\partial t} \right] + \mathcal{O}(1/m^2) = \\
&= \beta m + \varepsilon + \vartheta - \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2m} \beta \vartheta^2 + \left[ \frac{\beta\vartheta}{2m}, \varepsilon - i \frac{\partial}{\partial t} \right] + \mathcal{O}(1/m^2) = \\
&= \beta m + \varepsilon + \frac{1}{2m} \beta \vartheta^2 + \left[ \frac{\beta\vartheta}{2m}, \varepsilon - i \frac{\partial}{\partial t} \right] + \mathcal{O}(1/m^2). \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Podemos ver que o termo que será usado para construir  $S_2$  será a última parcela do segundo termo da equação (4.15). Então,  $S_2$  será

$$S_2 = -\frac{i\beta}{2m} \frac{\beta}{2m} [\vartheta, \varepsilon - i \frac{\partial}{\partial t}] = -\frac{i}{4m^2} [\vartheta, \varepsilon - i \frac{\partial}{\partial t}]. \tag{4.16}$$

Se quisermos encontrar  $S_3$ , bastaria repetir esse processo. A transformação não é complicada de ser feita. Na verdade, precisamos apenas calcular alguns comutadores. Apenas como exemplo, em terceira ordem em  $1/m$  a Hamiltoniana par tem a forma

$$\begin{aligned}
H'''' &= \beta m + \varepsilon + \frac{1}{2m} \beta \vartheta^2 - \frac{1}{8m^2} \left[ \vartheta, \left[ \vartheta, \varepsilon - i \frac{\partial}{\partial t} \right] \right] - \\
&- \frac{1}{8m^3} \beta \left[ \vartheta, \varepsilon - i \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 - \frac{1}{8m^3} \beta \vartheta^4 + \mathcal{O}(1/m^4). \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Também é importante enfatizar que para a partícula livre, a transformação é feita de forma exata. Basta tomar  $H_0$ , e escolher  $U_0$  e  $S$  da seguinte maneira

$$U_0 = e^{iS},$$

de tal forma que

$$S = \frac{-i}{2p} \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \arctan \frac{p}{m}. \tag{4.18}$$

Tem-se que a Hamiltoniana transformada será

$$H_0^{tr} = \beta \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}. \tag{4.19}$$

Então, o algoritmo que se usa para se obter as informações físicas de uma Hamiltoniana de uma partícula de Dirac com uma interação qualquer, através da transformação Foldy-Wouthuysen é

- 1) identificam-se termos ímpares e pares na Hamiltoniana;
- 2) faz-se a primeira transformação. Tem-se um resultado par em primeira ordem em  $1/m$ ;
- 3) faz-se a segunda transformação para se obter um resultado par de ordem  $1/m^2$ ;
- 4) deve-se parar quando se obtiver a ordem de precisão desejada, que é definida analisando o problema em questão. Tipicamente, usa-se até a terceira ordem.

Ao mesmo tempo, existem algumas situações em que é possível fazer uma transformação canônica em que a Hamiltoniana resultante será par em todas as ordens como no caso da partícula livre (4.19). Este é o caso da transformação Foldy-Wouthuysen exata, que consideraremos na próxima seção.

## 4.2 Transformação Foldy-Wouthuysen exata

Vamos construir agora uma transformação canônica exata, fazendo a Hamiltoniana par com campos externos. Já foi afirmado que isso é possível para alguns casos e durante a obtenção desse resultado, poderá se entender quais são esses casos. Até o final deste capítulo, vamos seguir o artigo [50], abrindo várias contas. Alguns detalhes também podem ser encontrados em [34] e [103]. Vamos supor que o espinor se transforme da seguinte maneira

$$\psi^{tr} = U\psi \quad , \quad \psi = U^*\psi^{tr} \quad , \quad (4.20)$$

onde  $U$  representa um operador unitário e vamos buscar uma forma particular desse operador que torne a Hamiltoniana par. Não estamos interessados em discutir todas as possíveis formas que  $U$  pode apresentar. Se substituirmos (4.20) em  $i\partial\psi/\partial t = H\psi$ , supondo que  $i\partial\psi^{tr}/\partial t = H^{tr}\psi^{tr}$ , teremos

$$H^{tr} = UHU^* - iU\dot{U}^* \quad . \quad (4.21)$$

Por construção vemos que a expressão matemática para  $U$  pode depender apenas de  $H$ . Vamos estudar os casos em que os campos externos são independentes do tempo, o que claramente torna o último termo da equação acima nulo <sup>1</sup>. Consideremos a equação

$$[\beta, H^{tr}] = [\beta, UHU^*] = 0 \quad , \quad (4.22)$$

---

<sup>1</sup>Quando tratarmos o caso do campo de Dirac interagindo com onda gravitacional, no capítulo 5, vamos supor que a amplitude da onda é pequena e todo o resultado será escrito em primeira ordem na amplitude, o que garante que o termo em questão também será nulo.

que é uma condição necessária e suficiente para  $H$  ser par. Ela pode ser reescrita da seguinte maneira (multiplicando por  $U^*$  pela esquerda e  $U$  pela direita)

$$(U^*) \times (\beta U H U^* - U H U^* \beta) = 0,$$

$$(U^* \beta U H U^* - H U^* \beta) \times (U) = 0,$$

$$U^* \beta U H - H U^* \beta U = 0,$$

ou ainda,

$$[U^* \beta U, H] = 0. \quad (4.23)$$

Uma escolha possível para  $U^* \beta U$  é

$$U^* \beta U = \frac{H}{\sqrt{H^2}} \equiv \lambda. \quad (4.24)$$

Neste caso  $\sqrt{H^2}$  deve ser entendido da seguinte maneira: calcula-se  $H^2$  na representação de coordenadas. Em seguida, escreve-se  $H^2$  na representação de momentos e se extrai a raiz quadrada, expandindo o operador obtido em série de potências em algum parâmetro que passa ser considerado pequeno na teoria que está sendo estudada. Em todos os passos daqui para frente onde aparecerem raízes de operadores, essas grandezas serão entendidas dessa forma.

Da equação (4.24) pode-se escrever

$$\beta = U \lambda U^* = \frac{H^{tr}}{\sqrt{(H^{tr})^2}} \Rightarrow H^{tr} = \beta \sqrt{(H^{tr})^2}, \quad (4.25)$$

que é um hamiltoniano par. Mas, na prática, para se fazer os passos das equações (4.25) é necessário conhecer o operador  $U$  como solução da equação (4.24). Vamos tomar

$$U = \sqrt{\beta \lambda}. \quad (4.26)$$

O operador  $U$  deve ter a propriedade  $U \beta = U^* \beta$ . Então, tomando um operador  $S$  par e hermitiano podemos escrever ( $U$  é unitário)

$$U = \exp(iS), \quad (4.27)$$

que é diferente de  $U_{FW}$  da equação (4.14), que é o operador que faz as sucessivas transformações de Foldy-Wouthuysen. Essa discrepância acontece pelo fato de que

$$\exp(A) \times \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots\right), \quad (4.28)$$

pois se tomarmos, por exemplo  $U_{FW}$ , em terceira ordem em  $\frac{1}{m}$ , teremos

$$U_{FW} = \exp(iS_1 + iS_2 + iS_3 + \frac{1}{2}[S_1, S_2] + \dots), \quad (4.29)$$

e no caso geral  $[S_1, S_2]$  não é zero. Portanto, em princípio, não será possível escrever sucessivas transformações equivalendo a uma, como é o caso que estamos tomando agora quando escolhermos a solução da equação (4.26). Este ponto sutil é a primeira diferença entre a transformação Foldy-Wouthuysen e a Foldy-Wouthuysen exata.

Um caso particular para ilustrar o que foi dito até agora é quando o termo de interação é ímpar. Uma transformação com  $\sqrt{\beta\lambda}$  fornece o resultado

$$H^{tr2} = UHU^*UHU^* = UH^2U^* = H^2 = \beta^2m^2 + \vartheta^2 + \beta m\vartheta + \vartheta\beta m.$$

Os dois últimos termos se cancelam. No segundo passo,  $U$  comutou com  $H$  pois é função de  $H$ . Então

$$H^{tr} = \beta\sqrt{m^2 + \vartheta^2}. \quad (4.30)$$

Para um campo magnético estático  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  introduzido de maneira convencional na Hamiltoniana por  $\vec{P} \rightarrow \vec{P} - e/c\vec{A}$ , tem-se

$$H^{tr} = \beta\sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\vec{\Sigma} \cdot \vec{B}}, \quad (4.31)$$

onde  $\vec{\Sigma}$  é a matriz de spin  $\vec{\Sigma} = -\gamma_5\vec{\alpha}$ .

É importante enfatizar que a dificuldade toda deste método reside apenas na complexidade do entendimento de como ele atua em uma Hamiltoniana, ou em que casos ele pode ser utilizado. Entretanto depois que se entende seu funcionamento ele não é muito complicado de ser utilizado. São poucos os cálculos necessários para se obter as informações físicas da Hamiltoniana. No exemplo anterior, apenas foi preciso elevar um operador ao quadrado.

Na próxima seção será descrito com detalhes como e em que casos a transformação Foldy-Wouthuysen exata atua.

### 4.3 Como fazer a transformação exata

Vamos analisar o caso agora em que o termo de interação não é só ímpar. Uma condição necessária e suficiente para a Hamiltoniana ser par é

$$U\lambda U^* = \beta, \quad (4.32)$$

onde  $UU^* = U^*U = 1$ .

A solução para o operador  $U$  é  $\sqrt{\beta\lambda}$ . No caso geral, podemos fazer uma expansão de  $\lambda$  em potências da constante de acoplamento do campo de interação. Esta constante para o campo elétrico é a carga elétrica ( $e$ ); para o campo gravitacional, a massa ( $m$ ); etc. Mas essa expansão na maioria dos casos fornece termos extremamente complicados na potências de  $g$  (constante de acoplamento).

Na verdade, o problema aqui é achar uma transformação que leva  $\lambda$  a  $\beta$ . Vamos fazer isso em dois (ou mais) passos, usando o operador intermediário  $f$ , tal que  $f = f^* = f^{-1}$ , ou seja, faremos

$$\lambda \rightarrow f \rightarrow \beta. \quad (4.33)$$

A primeira transformação será feita pela função transformação  $\sqrt{f\lambda}$ ,

$$\sqrt{f\lambda} \lambda \sqrt{\lambda f} = f \quad (4.34)$$

e a segunda,

$$\sqrt{\beta f} f \sqrt{f\beta} = \beta. \quad (4.35)$$

A transformação resultante sendo, portanto, o produto das duas

$$U = \sqrt{\beta f} \sqrt{f\lambda}, \quad (4.36)$$

de onde se vê

$$U\lambda U^* = \sqrt{\beta f} \sqrt{f\lambda} \lambda \sqrt{\lambda f} \sqrt{f\beta} = \sqrt{\beta f} f \sqrt{f\beta} = \beta. \quad (4.37)$$

O método pode ser generalizado para qualquer número de transformações

$$U = \sqrt{\beta f_n} \sqrt{f_n f_{n-1}} \dots \sqrt{f_2 f_1} \sqrt{f_1 \lambda}. \quad (4.38)$$

Vamos usar a seguinte identidade para  $\sqrt{f\lambda}$  (note que  $f$  é completamente arbitrário até aqui)

$$\sqrt{f\lambda} = (1 + f\lambda)(2 + f\lambda + \lambda f)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.39)$$

Para ver que isso é possível utilizar a expressão matemática acima para descrever um operador unitário, vamos tomar a raiz de um operador unitário qualquer,

$$\sqrt{u} = (1 + u)(2 + u + u^*)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.40)$$

Sabemos que os autovalores de  $u$  estão na circunferência de raio unitário no plano complexo. Isso pode ser descrito pelas equações

$$u|\delta\rangle = \exp(i\delta)|\delta\rangle, \quad u^*|\delta\rangle = \exp(-i\delta)|\delta\rangle,$$

onde  $|\delta\rangle$  representa os autovetores do operador  $u$ . Somando as duas equações e depois adicionando  $2|\delta\rangle$  a ambos os lados

$$(u + u^*)|\delta\rangle = (e^{i\delta} + e^{-i\delta})|\delta\rangle, \quad (2 + u + u^*)|\delta\rangle = 2(1 + \cos\delta)|\delta\rangle,$$

podemos ver que  $(2 + u + u^*)^{-\frac{1}{2}}$  é definido a não ser que  $\cos\delta = -1$ . Sabendo disso vamos calcular  $\sqrt{u}\sqrt{u}$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{u}\sqrt{u} &= (1 + u)^2(2 + u + u^*)^{-1} = (1 + 2u + u^2)(2 + u + u^*)^{-1} = \\ &= u(u^* + 2 + u)(2 + u + u^*)^{-1} = u. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Daí, vemos que esta definição para  $\sqrt{u}$  faz sentido, pois  $\sqrt{u}\sqrt{u} = u$ . O conjugado é

$$(\sqrt{u})^* = (1 + u^*)(2 + u^* + u)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{u^*}. \quad (4.42)$$

Uma expansão da equação (4.36) em potências de  $g$  (expressa em termos de  $\lambda_i$ ) pode ser obtida requerendo, por exemplo, que na ordem zero a raiz seja um número  $c$ , pois até agora, temos total liberdade no operador intermediário  $f$ . Tomando  $f$  para ser de ordem zero, teremos

$$f\lambda_0 + \lambda_0 f = c, \quad (4.43)$$

onde  $\lambda_0$  é o  $\lambda$  que corresponde ao  $H_0$  (hamiltoniano da partícula livre).

Neste ponto podemos resolver o problema da primeira transformação (lembrando que a transformação é feita em dois passos). Existe uma matriz  $\eta$  tal que  $\eta = \eta^* = \eta^{-1}$ , definida como  $\eta = -i\beta\gamma_5 = -\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ , com a seguinte propriedade

$$\{\eta, \beta\} = -i\beta\gamma_5\beta + i\beta\beta\gamma_5 = -i\gamma_5 + i\gamma_5 = 0, \quad (4.44)$$

ou seja,  $\{\eta, \lambda_0\} = 0$ . A correspondente transformação em dois passos será

$$U = \sqrt{\beta\eta}\sqrt{\eta\lambda}. \quad (4.45)$$

Usando (4.39) e (4.44), temos  $\sqrt{\beta\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_5)$ . Então

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_5)\sqrt{\eta\lambda}. \quad (4.46)$$

Quanto ao segundo termo não podemos fazer nada. No caso geral, devemos expandir  $\lambda$  em termos de  $g$ ,

$$\lambda = \lambda_0 + g\lambda_1 + g^2\lambda_2 + \dots, \quad (4.47)$$

onde  $H = H_0 + gH_1$ . Temos que  $\lambda^2 = 1$ , pois  $\lambda = H/\sqrt{H^2}$  e

$$[\lambda, H_0 + gH_1] = 0. \quad (4.48)$$

Portanto

$$(\lambda_0 + g\lambda_1 + g^2\lambda_2 + \dots)^2 = 1, \quad (4.49)$$

e, por igualdade de polinômios nas ordens de  $g^n$ ,

$$\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_0 = 0, \quad , \quad \lambda_0\lambda_2 + \lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_0 = 0, \quad (4.50)$$

e assim sucessivamente. Usando essas relações, os  $\lambda_N$  podem ser escritos em função do  $\lambda_i$  de ordem mais baixa.

Vamos fazer  $\lambda = \lambda^c + \lambda^a$ , onde  $\lambda^c$  comuta com  $\lambda_0$  e  $\lambda^a$  anticomuta. Daí

$$\lambda_1^c = 0, \quad \lambda_2^c = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_1^2, \quad \text{etc.} \quad (4.51)$$

Em geral,

$$\lambda_n^c = -\frac{1}{2}\lambda_0 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{n-k}. \quad (4.52)$$

A parte que anticomuta é determinada por (4.48). A parte anticomutativa de (4.48) é

$$[\lambda_n^a, H_0] + [\lambda_{n-1}, H_1]^a = 0, \quad (4.53)$$

colocando  $H_0 = \lambda_0 E_p$  e multiplicando por  $\lambda_0$ ,

$$\{\lambda_n^a, E_p\} = b_n^a, \quad b_n = \lambda_0 [\lambda_{n-1}, H_1]. \quad (4.54)$$

A solução não é complicada; é possível escrever  $\lambda_n^a$  da seguinte maneira

$$\lambda_n^a = \int_{-\infty}^0 \exp(E_p \tau) b_n^a \exp(E_p \tau) d\tau. \quad (4.55)$$

Para ver isso, vamos supor que

$$\{\lambda_n^a, E_p\} = b_n^a = \int_{-\infty}^0 \exp(E_p \tau) \{E_p, b_n^a\} \exp(E_p \tau) d\tau. \quad (4.56)$$

Integrando (4.56) por partes, obtemos

$$\{\lambda_n^a, E_p\} = \int_{-\infty}^0 d(\exp(E_p\tau)b_n^a\exp(E_p\tau)) = b_n^a. \quad (4.57)$$

A integral em 0 dá  $b_n^a$  e em  $-\infty$  dá zero. Então,  $\lambda_n$  pode ser escrito como

$$\lambda_n = -\frac{1}{2}\lambda_0 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{n-k} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \exp(E_p\tau) [\lambda_0, [\lambda_{n-1}, H_1]] \exp(E_p\tau) d\tau. \quad (4.58)$$

Essa equação define todos os  $\lambda_n$  em função dos  $\lambda_i$  de ordem mais baixa. Esta é a solução geral para uma Hamiltoniana qualquer com a interação desejada. Vemos que este resultado não é exato.

Entretanto, vamos voltar à equação (4.46) e ver que em alguns casos é possível se obter o resultado exato. Antes, uma observação interessante a se fazer é quando tomamos a expansão em  $1/m$ , ou seja,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{m}\lambda_1 + \left(\frac{1}{m}\right)^2\lambda_2 + \dots \quad (4.59)$$

Usando a mesma técnica,

$$\lambda^2 = 1, \quad [\lambda, H] = 0,$$

agora, com  $H = m\beta + h = m\beta + \varepsilon + \vartheta$ . A parte ímpar de  $\lambda$  é

$$\lambda_n^{ímpar} = -\frac{1}{2}\beta \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{k-1}, \quad (4.60)$$

A parte par é determinada por  $[\lambda, H] = 0$

$$[\lambda_n, \beta] + [\lambda_{n-1}, h] = 0, \quad \lambda_n^{par} = \frac{1}{2}\beta[\lambda_{n-1}, h]. \quad (4.61)$$

Portanto, os  $\lambda_n$  serão

$$\lambda_n = \lambda^{par} + \lambda^{ímpar} = \frac{1}{2}\beta([\lambda_{n-1}, h] - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{k-1}). \quad (4.62)$$

O fato interessante comentado aparece nesse ponto, pois os primeiros termos são

$$\lambda_1 = \vartheta, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\beta[\vartheta, \varepsilon] - \frac{1}{2}\beta\vartheta^2, \quad (4.63)$$

que vão nos fornecer a transformação Foldy-Wouthuysen. É o que realmente deveria acontecer, pois esta transformação é uma expansão em  $1/m$ , que é exatamente a constante

de acoplamento escolhida neste exemplo. O que chama atenção é que o método empregado é totalmente diferente daquele da seção anterior.

Agora, vamos retornar à equação (4.46). Para resolver a primeira parte de  $U$ , procuramos por uma matriz que anticomutasse com  $\beta$ . Vamos agir da mesma maneira. Vamos tomar o caso em que  $H$  anticomuta com  $\eta$ . Neste caso  $U = U_2 \times U_1$ , onde

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta\lambda) \quad \text{e} \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \beta\eta). \quad (4.64)$$

Como  $\{\eta, H\} = 0$ , tem-se  $H^2\eta = \eta H^2$ . Vemos então

$$\eta\sqrt{H^2} = \sqrt{\eta^2}\sqrt{H^2} = \sqrt{\eta^2 H^2} = \sqrt{\eta H^2 \eta} = \sqrt{H^2 \eta^2} = \sqrt{H^2} \sqrt{\eta^2} = \sqrt{H^2} \eta, \quad (4.65)$$

de onde se obtém  $\eta\sqrt{H^2} = \sqrt{H^2}\eta$ . Basta agora fazer a transformação

$$\begin{aligned} U_1 H U_1^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta\lambda) H \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \eta\lambda) = \frac{1}{2}(H + \eta\lambda H)(1 - \eta\lambda) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(H - H\eta\lambda + \eta\lambda H - \eta\lambda H\eta\lambda) = \frac{1}{2}(2\eta\lambda H) = \eta\sqrt{H^2}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} U_2 \eta \sqrt{H^2} U_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \beta\eta) \eta \sqrt{H^2} \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \beta\eta) = \\ &= \frac{1}{2}(\eta\sqrt{H^2} + \beta\sqrt{H^2})(1 - \beta\eta) = \\ &= \frac{1}{2}(\eta\sqrt{H^2} - \eta\sqrt{H^2}\beta\eta + \beta\sqrt{H^2} - \beta\sqrt{H^2}\beta\eta) = \\ &= \eta\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} - \beta\sqrt{H^2}\beta) + \beta\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} + \beta\sqrt{H^2}\beta). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Portanto,

$$H^{tr} = U H U^* = \beta[\sqrt{H^2}]^{PAR} + \eta[\sqrt{H^2}]^{ÍMPAR}. \quad (4.68)$$

Essa transformação é exata. Como se pode ver, desde que  $H$  anticomute com  $\eta$  é possível fazer a transformação. Como já foi dito, a única dificuldade está em entender o método, pois aplicá-lo não é algo muito complexo do ponto de vista matemático.

Um pequeno algoritmo para se fazer essa transformação é

- 1) verificar se  $\{\eta, H\} = 0$ ;
- 2) calcular  $H^2$ ;

3) identificar os termos pares e ímpares e utilizar a equação (4.68).

Finalmente, a operação de calcular  $\sqrt{H}$  pode ser realizada de várias maneiras. Uma opção mais simples é escrever  $H = H_0 + H_{int}$  e fazer a expansão em séries em  $H_{int}$ .

# 5 *Interação com ondas gravitacionais e campo magnético*

Neste capítulo serão utilizados todos os resultados que foram obtidos até agora. Será considerada a situação de um férmion numa região do espaço onde há ondas gravitacionais na presença de um campo magnético externo. O objetivo é obter a Hamiltoniana que descreve a situação e depois fazer uma transformação Foldy-Wouthuysen exata. Serão seguidos todos os passos de [56] com todos os detalhes explicitados.

## 5.1 Descrição do método

Para se obter o resultado desejado, deve-se tomar a ação de Dirac e introduzir a métrica das ondas gravitacionais através da tetrada. Depois se introduz o campo magnético e é feita a transformação. Vamos tomar

$$S_{\frac{1}{2}} = \int \sqrt{-g} \bar{\psi} (\gamma^\mu \nabla_\mu + im) \psi. \quad (5.1)$$

Já foi visto que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi &= \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} w_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi \quad , \quad \sigma_{ab} = \frac{i}{2} (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a), \\ w_{\mu ab} &= \frac{1}{4} (e_{b\alpha} \partial_\mu e_a^\alpha - e_{a\alpha} \partial_\mu e_b^\alpha) + \frac{1}{4} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha (e_{b\alpha} e_a^\lambda - e_{a\alpha} e_b^\lambda). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para tornar este capítulo o mais claro quanto possível, os cálculos serão divididos em sete passos, descritos a seguir

- 1) tomar a métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ;

- 2) calcular  $e_\mu^a = e_\mu^a(h_{\mu\nu})$ ;
- 3) calcular  $w_{\mu ab} = w_{\mu ab}(h_{\mu\nu})$ ;
- 4) introduzir as ondas gravitacionais;
- 5) introduzir o resultado na ação de Dirac;
- 6) trocar  $i\hbar\partial_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$  (introduzir o campo  $A_\mu$ );
- 7) encontrar a Hamiltoniana e fazer a transformação exata.

## 5.2 A métrica $g_{\mu\nu}$ .

Será considerada a métrica  $g_{\mu\nu}$  da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} . \quad (5.3)$$

Nesta equação,  $\eta_{\mu\nu}$  representa a métrica de Minkowski e  $h_{\mu\nu}$  uma pequena perturbação nessa métrica. Esta perturbação, em princípio, é totalmente arbitrária. Apenas no quarto passo serão introduzidas as ondas gravitacionais. Também é importante dizer que esta perturbação é tomada apenas em primeira ordem. Os termos de ordem quadrática  $\mathcal{O}(h^2)$  serão considerados nulos.

## 5.3 Escrevendo a tetrada em função de $h_{\mu\nu}$

É importante escrever a tetrada em função da métrica do problema,  $e_\mu^a(h_{\mu\nu})$ , pois já temos a conexão espinorial em função da tetrada. Desejamos, então, obter  $e_\mu^a$ . Temos que

$$e_\mu^a e_{\nu a} = g_{\mu\nu} , \quad (5.4)$$

portanto, vamos tomar a expansão em função da tetrada da métrica de Minkowski, como foi feito em [13]

$$e_\mu^a = \bar{e}_\mu^a + x h_{\mu\alpha} \bar{e}_\mu^a + \dots , \quad (5.5)$$

$$e_{\nu a} = \overline{e_{\nu a}} + x h_{\beta\nu} \overline{e_{\beta a}} + \dots \quad (5.6)$$

Tomando apenas a parte linear em  $h_{\mu\nu}$ , pois como já foi dito, representa um campo fraco,

$$e_{\mu}^a e_{\nu a} = \overline{e_{\mu}^a e_{\nu a}} + x h_{\beta\nu} \delta_{\mu}^{\beta} + x h_{\alpha\nu} \delta_{\mu}^{\alpha} = \eta_{\mu\nu} + 2x h_{\mu\nu}, \quad (5.7)$$

mas como na equação (5.4) vamos tomar apenas a parte linear na métrica  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,

$$\eta_{\mu\nu} + 2x h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

Então, voltando em (5.5) e (5.6),

$$e_{\mu}^a = \overline{e_{\mu}^a} + \frac{1}{2} h_{\mu\alpha} \overline{e_{\mu}^a} + \dots, \quad (5.9)$$

$$e_{\nu a} = \overline{e_{\nu a}} - \frac{1}{2} h_{\beta\nu} \overline{e_{\beta a}} + \dots \quad (5.10)$$

## 5.4 Escrevendo a conexão espinorial em função de $h_{\mu\nu}$

Com o resultado da seção anterior podemos escrever a conexão espinorial em função de  $h_{\mu\nu}$ . Para isso, basta substituir as equações (5.5) e (5.6) em (5.2). Calculando termo a termo,

$$\begin{aligned} e_b^{\alpha} \partial_{\mu} e_{\alpha a} &= (\overline{e_b^{\alpha}} - \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \overline{e_{b\beta}}) \partial_{\mu} (\overline{e_{\alpha a}} \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \overline{e_a^{\beta}}) = \frac{1}{2} \overline{e_b^{\alpha}} \overline{e_a^{\beta}} \partial_{\mu} h_{\alpha\beta}, \\ e_a^{\beta} \partial_{\beta} e_{\mu b} &= (\overline{e_a^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\lambda\beta} \overline{e_{a\lambda}}) \partial_{\beta} (\overline{e_{\mu b}} \frac{1}{2} h^{\mu\lambda} \overline{e_b^{\lambda}}) = \frac{1}{2} \overline{e_a^{\beta}} \overline{e_b^{\lambda}} \partial_{\beta} h_{\mu\lambda}, \\ e_a^{\alpha} e_b^{\beta} &= (\overline{e_a^{\alpha}} - \frac{1}{2} h^{\alpha\gamma} \overline{e_{a\gamma}}) (\overline{e_b^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\lambda\beta} \overline{e_{b\lambda}}) = \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\alpha\gamma} \overline{e_{a\gamma}} - \frac{1}{2} h^{\lambda\beta} \overline{e_{b\lambda}}, \\ e_a^{\alpha} e_b^{\beta} e_{\mu c} &= \overline{e_{\mu c}} (\overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\alpha\gamma} \overline{e_{a\gamma}} \overline{e_b^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\beta\lambda} \overline{e_{b\lambda}} \overline{e_a^{\alpha}}) + \frac{1}{2} h_{\mu\gamma} \overline{e_c^{\gamma}} \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}}, \\ e_a^{\alpha} e_b^{\beta} e_{\mu c} \partial_{\alpha} e_{\beta}^c &= \overline{e_{\mu c}} (\overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\alpha\gamma} \overline{e_{a\gamma}} \overline{e_b^{\beta}} - \frac{1}{2} h^{\beta\lambda} \overline{e_{b\lambda}} \overline{e_a^{\alpha}}) + \frac{1}{2} h_{\mu\gamma} \overline{e_c^{\gamma}} \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} \partial_{\alpha} (\frac{1}{2} h_{\beta\chi} \overline{e^{\chi c}}) = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\chi} \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} \partial_{\alpha} h_{\beta\chi} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{1}{2} \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} \partial_{\alpha} h_{\beta\chi}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Com esses resultados, pode-se escrever a conexão espinorial em termos da tetrada,

$$w_{\mu ab} = \frac{3}{8} \left( \frac{1}{2} \overline{e_b^{\alpha}} \overline{e_a^{\beta}} \partial_{\mu} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} \partial_{\mu} h_{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \overline{e_a^{\beta}} \overline{e_b^{\lambda}} \partial_{\beta} h_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \overline{e_a^{\alpha}} \overline{e_b^{\beta}} \partial_{\beta} h_{\mu\lambda} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \overline{e_a^\alpha} \overline{e_b^\beta} \partial_\alpha h_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \overline{e_b^\alpha} \overline{e_a^\beta} \partial_\alpha h_{\mu\beta} = \right. \\
& = \frac{3}{16} \overline{e_b^\alpha} \overline{e_a^\beta} \partial_\mu h_{\alpha\beta} - \frac{3}{16} \overline{e_a^\alpha} \overline{e_b^\beta} \partial_\mu h_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \overline{e_a^\alpha} \overline{e_b^\beta} \partial_\alpha h_{\mu\beta} - \frac{1}{4} \overline{e_b^\alpha} \overline{e_a^\beta} \partial_\alpha h_{\mu\beta}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

## 5.5 Introduzindo as ondas gravitacionais

Como já foi dito, as ondas gravitacionais podem ser interpretadas como perturbações no espaço-tempo que se propagam satisfazendo uma equação de onda. É fato que elas possuem duas polarizações que aqui serão descritas por  $v = v(ct - x)$  e  $u = u(ct - x)$ . A métrica que descreve essas perturbações pode ser escrita como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - (1 - 2v) dy^2 - (1 - 2v) dz^2 - 4u dy dz. \quad (5.13)$$

Neste caso, as componentes da perturbação  $h_{\mu\nu}$  são tomadas como  $h_{00} = h_{11} = 0$ ,  $h_{33} = -h_{22} = 2v$  e  $h_{23} = -h_{32} = -2u$ . Essas componentes serão substituídas nos resultados da conexão espinorial obtidos na seção anterior.

## 5.6 Introduzindo as ondas gravitacionais na ação de Dirac

Agora é possível escrever a equação de Dirac numa região onde existam ondas gravitacionais fracas. Para isso, basta substituir os resultados obtidos até agora no operador

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} w_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi. \quad (5.14)$$

Mas ainda há na equação de Dirac a matriz  $\gamma^\mu$ , multiplicando essa expressão. Sabendo que

$$\gamma^\mu \sigma^{ab} = e_d^\mu \gamma^d \sigma^{ab} = (\overline{e_d^\mu} - \frac{1}{2} h^{\mu\lambda} \overline{e_{\lambda d}}) \gamma^d \sigma^{ab}, \quad (5.15)$$

podemos calcular  $\gamma^\mu W_{\mu ab} \sigma^{ab}$ . Eliminando os termos de segunda ordem

$$\gamma^\mu w_{\mu ab} \sigma^{ab} = \frac{3}{16} \gamma^d \sigma^{ab} (\partial_d h_{ba} - \partial_d h_{ab}) + \frac{1}{4} \gamma^d \sigma^{ab} (\partial_a h_{db} - \partial_b h_{da}). \quad (5.16)$$

A primeira parcela nessa expressão é nula, pois  $h_{\mu\nu}$  é simétrico e  $\sigma^{ab}$  é antissimétrico. Já na segunda parcela, se definirmos  $S^{dab} = \gamma^d \gamma^a \gamma^b - \gamma^d \gamma^b \gamma^a$  e o separarmos na parte simétrica e antissimétrica, termos

$$\gamma^c (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) = x \gamma_d (\eta^{ca} \eta^{bd} - \eta^{cb} \eta^{ad}) + y \gamma^5 \gamma_d \varepsilon^{abcd}. \quad (5.17)$$

Não precisamos buscar os coeficientes  $x$  e  $y$ . A parte antissimétrica se anulará visto que ela será multiplicada por  $h_{\mu\nu}$  que é simétrico. Não é muito complicado mostrar que a parte simétrica se anula levando em conta que  $\partial_j h_{ij} = 0$  que vem da equação (2.36). Portanto, não há contribuição da conexão espinorial neste caso. O outro termo na ação é

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^a e_a^\mu \partial_\mu = \gamma^a (\bar{e}_a^\mu - \bar{e}_a^\nu h_\nu^\mu) \partial_\mu. \quad (5.18)$$

Calculando os termos

$$\begin{aligned} \bar{e}_0^\nu h_\nu^\mu &= 0 \quad , \quad \bar{e}_1^\nu h_\nu^\mu = 0, \\ \bar{e}_a^\nu h_\nu^\mu &= \bar{e}_2^y h_y^x + \bar{e}_2^z h_3^a = v \quad , \quad \bar{e}_a^\nu h_\nu^\mu = \bar{e}_2^z h_z^x + \bar{e}_2^z h_3^a = u, \\ \bar{e}_3^\nu h_\nu^\mu &= \bar{e}_3^y h_y^y + \bar{e}_3^z h_z^y = u \quad , \quad \bar{e}_3^\nu h_\nu^\mu = \bar{e}_3^y h_y^\mu + \bar{e}_3^z h_z^\mu = -v. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Logo, os termos não nulos do operador da equação (5.14) serão

$$\gamma^a e_a^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c} \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x + (\gamma^2 - v\gamma^2 - u\gamma^3) \partial_y + (\gamma^3 - u\gamma^2 - v\gamma^3) \partial_z. \quad (5.20)$$

Agora, para achar a Hamiltoniana, basta escrever a equação de Dirac na forma da equação de Schrödinger [106]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad (5.21)$$

com o seguinte operador hamiltoniano

$$H = \beta mc^2 - i\hbar c [\alpha^1 \partial_x + (\alpha^1 - v\alpha^2 - u\alpha^3) \partial_y + (\alpha^3 - u\alpha^2 + u\alpha^3) \partial_z]. \quad (5.22)$$

## 5.7 Introduzindo o campo magnético na ação de Dirac

Para introduzir o campo magnético o acoplamento mínimo, com apenas o potencial vetor  $\vec{A}$  diferente de zero. Teremos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu. \quad (5.23)$$

A Hamiltoniana tem a forma

$$\begin{aligned} H &= \beta mc^2 - i\hbar c [\alpha^1 (\partial_x + \frac{e}{i\hbar c} A_x) + (\alpha^2 - v\alpha^2 - u\alpha^3) (\partial_y + \frac{e}{i\hbar c} A_y) + \\ &+ (\alpha^3 - u\alpha^2 + u\alpha^3) (\partial_z + \frac{e}{i\hbar c} A_z)]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

## 5.8 Fazer a transformação exata

Antes de fazer a transformação exata é importante escrever a Hamiltoniana obtida na seção anterior de forma mais conveniente,

$$\begin{aligned}
 H &= \beta mc^2 - i\hbar c[\alpha^1 \partial_x + (\alpha^1 - v\alpha^2 - u\alpha^3)\partial_y + (\alpha^3 - u\alpha^2 + u\alpha^3)\partial_z] - \\
 &- e[\alpha^1 A_1 + \alpha^2(A_2 - vA_2 - uA_3) + \alpha^3(A_3 - uA_2 + vA_3)]. \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Como será necessário calcular  $H^2$ , uma relação extremamente útil é

$$\alpha^i \alpha^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \Sigma_k, \quad (5.26)$$

onde  $\Sigma_k$  é a já conhecida matriz de spin

$$\Sigma_k = -\gamma_5 \alpha_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Por isso, é importante escrever os termos da Hamiltoniana em termos dessas matrizes. Introduzimos a seguinte notação

$$H = \beta mc^2 + \alpha^j K_j^i \partial_i + \alpha^i g_i, \quad (5.28)$$

onde,

$$K_j^i = -i\hbar c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v - u\alpha^2\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + v - u\alpha^2\alpha^3 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

e também o termo com o potencial vetor

$$g_i = -e(A_1, A_2 - vA_2 - uA_3, A_3 - uA_2 + vA_3). \quad (5.30)$$

O operador  $H^2$  tem a forma

$$\begin{aligned}
 H^2 &= \beta mc^2 \alpha^i g_i + \alpha^i g_i \beta mc^2 + \beta mc^2 \alpha^j K_j^i \partial_i + \alpha^j K_j^i \partial_i \beta mc^2 + \\
 &+ \alpha^j K_j^i \partial_i \alpha^l K_l^m \partial_m + \alpha^j K_j^i \partial_i \alpha^l g_l + \alpha^i g_i \alpha^j K_j^m \partial_m + \alpha^i g_i \alpha^j g_j + m^2 c^4. \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Os termos da primeira linha da equação acima se cancelam, pois  $[\alpha^i, \beta] = 0$ . Calculando os outros um a um, obtemos

$$\alpha^i \alpha^j g_j g_i = (\delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \Sigma_k) g_j g_i = g_i g_i = g^2,$$

$$\begin{aligned}
\alpha^i g_i \alpha^j K_j^m \partial_m &= (\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \Sigma_k) \left( \frac{1}{2} ([g_i K_j^m \partial_m + g_j K_i^m \partial_m] + \frac{1}{2} \{g_i K_j^m \partial_m - g_j K_i^m \partial_m\}) \right) = \\
&= g_i K_j^m \partial_m + i\epsilon^{ijk} \Sigma_k g_i K_j^m \partial_m.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Para calcular os outros termos, é necessário analisar o comutador  $[\alpha^l, K_j^i]$ . Para  $l = 1$  ou  $l \neq 1$  e  $i = j = 1$ , tem-se  $[\alpha^l, K_j^i] = 0$ ; nos outros casos isso não acontece. Com o objetivo de facilitar a derivação dos termos que faltam e a análise do resultado, é útil definir

$$\overline{K}_j^i = -i\hbar c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v + u\alpha^2\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + v + u\alpha^2\alpha^3 \end{pmatrix}, \tag{5.33}$$

$$\overline{g}_i = (\alpha^1 A_1, \alpha^2 A_2, \alpha^3 A_3), \quad e \quad \overline{\epsilon}^{ijk} = (\alpha_1 \epsilon^{i1k}, \alpha_2 \epsilon^{i2k}, \alpha_3 \epsilon^{i3k}). \tag{5.34}$$

Com essas notações, temos

$$\begin{aligned}
\alpha^j K_j^i \partial_i \alpha^l g_l &= \alpha^j K_j^i \alpha^l g_l \partial_i + \alpha^j K_j^i \partial_i (g_l) = \\
&= \overline{K}_j^i g^j \partial_i + \overline{K}_j^i \partial_i (g^j) + i\Sigma_k \overline{\epsilon}^{jlk} K_j^i \overline{g}_l \partial_i + i\Sigma_k \overline{\epsilon}^{jlk} K_j^i \partial_i (\overline{g}_l).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

O outro termo tem a forma

$$\begin{aligned}
\alpha^j K_j^i \partial_i \alpha^l K_l^m \partial_m &= \alpha^j K_j^i \alpha^l [\partial_i (K_l^m) \partial_m + K_l^m \partial_i \partial_m] = \\
&= \overline{K}^{il} \partial_i (K_l^m) \partial_m + \overline{K}^{il} K_l^m \partial_i \partial_m + i\epsilon^{jlk} \overline{K}_j^i \partial_i (K_l^m) \partial_m.
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Enfim, temos o operador  $H^2$

$$\begin{aligned}
H^2 &= m^2 c^4 + \overline{K}^{il} K_l^m \partial_i \partial_m + \overline{K}_j^i g^j \partial_i + g^j K_j^i \partial_i + g^2 + \overline{K}^{il} \partial_i (K_l^m) \partial_m + \overline{K}_j^i \partial_i (g^j) \\
&+ i\epsilon^{jlk} \overline{K}_j^i \partial_i (K_l^m) \partial_m + \Sigma_k i\overline{\epsilon}^{jlk} K_j^i \overline{g}_l \partial_i - i\epsilon^{jlk} \Sigma_k K_j^i g_l \partial_i + i\Sigma_k \overline{\epsilon}^{jlk} K_j^i \partial_i (\overline{g}_l).
\end{aligned} \tag{5.37}$$

É importante notar que  $K_j^i$  possui apenas termos da métrica e  $g_i$  possui termos da métrica e termos de interação como  $A_i$ . O operador  $H^2$  apresentado acima é exato. A única aproximação feita foi desconsiderar termos de ordem superior para as amplitudes

das ondas gravitacionais, mas eles também podem ser levados em conta, se for preciso. O próximo passo seria utilizar a equação (4.68) e se analisarmos termo a termo separadamente, veremos que (5.37) possui apenas termos pares. Antes, porém, vamos considerar alguns casos particulares interessantes desse resultado.

## 5.9 Análise de casos particulares

O resultado obtido na seção anterior precisa ser testado de alguma maneira. Um forte indício de que ele está correto pode ser dado quando se faz o estudo de casos particulares. Algo interessante nesse resultado é que ele engloba vários sistemas, inclusive alguns de interesse físico. Esses sistemas são aqueles em que a Hamiltoniana pode ser colocada na forma da equação (5.28).

### 5.9.1 Partícula livre

Este é o caso mais simples em que  $K_j^i$  se reduz a simplesmente a  $-i\hbar c\delta_j^i$  e não há termos de interação, ou seja,  $g_i = 0$ , pois  $u = v = 0$  e  $A_i = 0$ . Portanto,

$$H^2 = (-i\hbar c)^2 \delta^{il} \delta_l^m \partial_i \partial_m + m^2 c^4 = m^2 c^4 + c^2 P^2, \quad (5.38)$$

ou ainda, (veja a equação (4.19) para comparar)

$$H = \beta \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P^2}, \quad (5.39)$$

que é um resultado conhecido de livros textos, como [21].

### 5.9.2 Partícula na presença do campo magnético constante

Vamos tomar agora o caso de uma partícula de Dirac na presença de um campo magnético constante. Para termos um campo constante da forma

$$\vec{B} = B_1 \hat{i} + B_2 \hat{j} + B_3 \hat{k}, \quad (5.40)$$

sabendo que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , devemos ter

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(B_2 z - B_3 y) \hat{i} + \frac{1}{2}(B_3 x - B_1 z) \hat{j} + \frac{1}{2}(B_1 y - B_2 x) \hat{k}. \quad (5.41)$$

Neste caso temos também  $K_j^i = -i\hbar c\delta_j^i$ , mas há agora o termo de interação  $g_i = -eA_i$ , pois  $u = v = 0$ . Teremos

$$H^2 = m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \partial_i \partial_i + 2i\hbar c e A^i \partial_i - \hbar c e \varepsilon^{ijk} \Sigma_k \partial_i (A_j) + e^2 A^2 =$$

$$= m^2c^4 + (c\vec{P} - e\vec{A})^2 - \hbar ce \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}, \quad (5.42)$$

ou ainda, podemos escrever na seguinte forma

$$H = \beta \sqrt{m^2c^4 + (c\vec{P} - e\vec{A})^2 - \hbar ce \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}}. \quad (5.43)$$

Este resultado foi obtido por Eriksen e Kolsrud [50] diretamente e nós chegamos à mesma equação usando a fórmula geral (5.37).

### 5.9.3 Partícula com momento magnético anômalo num campo magnetostático

Neste caso, vamos partir da Hamiltoniana na qual  $K_j^i = -i\hbar c\delta_j^i$  e  $g_i = -eA_i + \alpha_i\mu_I\eta\vec{\Sigma} \cdot \vec{B}$ , pois  $u = v = 0$ . Deve-se levar em conta comutadores de  $g_i$  com  $\alpha^j$  e  $\beta$ . Chega-se a um Hamiltoniano um pouco diferente de (5.37), pois agora se deve tomar um pouco mais de cuidado, visto que  $g_i$  também é uma grandeza matricial. Devem-se calcular os comutadores de  $g_i$  com  $\alpha_j$ . Teremos no final

$$\begin{aligned} H^2 &= m^2c^4 + (c\vec{P} - e\vec{A})^2 - 2\mu_I mc^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} + \mu_I^2 B^2 \\ &+ \mu_I \beta \vec{\Sigma} \cdot (\vec{B} \times \vec{P} - \vec{P} \times \vec{B}), \end{aligned} \quad (5.44)$$

que também coincide com o resultado obtido por Eriksen e Kolsrud em [50].

## 5.10 Equações de movimento

Nosso objetivo agora é obter as equações de movimento para uma partícula sujeita à interação com onda gravitacional e um campo magnético constante. Vamos seguir a idéia usada na referência [25]. Todos os passos serão mostrados a seguir.

### 5.10.1 A Hamiltoniana da partícula

Primeiramente, vamos considerar uma onda com apenas uma polarização. Para isso colocamos  $u \equiv 0$ . Nosso objetivo aqui é obter uma Hamiltoniana com uma forma matemática mais simples, de tal forma que os cálculos não sejam extremamente complexos, mas continue descrevendo a mesma situação física.

Com essa condição, as equações (5.29) e (5.30) têm a forma

$$K_j^i = -i\hbar c(\delta_j^i + T_j^i v), \quad g_j = -e(\delta_j^i + T_j^i v)A_i, \quad (5.45)$$

onde

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (5.46)$$

Podemos ver também que  $K_j^i = \overline{K_j^i}$ . Além disso não há mais necessidade de escrever  $\overline{g_j}$  nem  $\overline{\epsilon^{ijk}}$ , pois ambos comutam com  $K_j^i$  e agora também com  $\overline{K_j^i}$ . Sabemos também que  $\partial_j h_{ij} = 0$ . Isso pode ser visto diretamente da equação (2.36). Usando as novas notações temos que  $\nabla_j T^{ij} v = 0$ . Substituindo tudo isso em  $H^2$ , obtido no capítulo anterior, equação (5.37), teremos um resultado mais simples

$$\begin{aligned} H^2 &= (\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - \hbar c^2 P_i T^{ij} [\vec{\Sigma} \times \nabla v]_j + \\ &+ \hbar c e (\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(\Sigma_i B_j) + m^2 c^4 . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Mas o interesse físico não está em  $H^2$  e sim na própria Hamiltoniana. Para obtê-la, vamos escrever  $H^2 = A^2 + B$ , onde  $A$  são os termos que dependem de  $m$  e  $B$  os que não dependem. Esse caso é simples, pois  $A = mc^2$ . Vamos então procurar por um operador  $K$  na forma

$$K = A + \frac{1}{A} K_1 + K_1 \frac{1}{A} + \vartheta \left(\frac{1}{A}\right)^2 , \quad (5.48)$$

de tal maneira que  $K^2 = H^2$ . Fazemos este procedimento pois estamos interessados em obter uma Hamiltoniana que seja linear no parâmetro  $1/m$ . Há a liberdade de se escolher, neste passo dos cálculos, qualquer grandeza considerada como "pequena" para se fazer a expansão de  $H^2$ . O parâmetro  $1/m$  é importante para nós pois nos permite fazer a comparação do resultado que vamos obter com o limite não relativístico sem ondas gravitacionais.

Nesse caso  $[K, A] = 0$ , logo

$$K^2 = A^2 + 4K_1 \Rightarrow B = 4K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{B}{4} . \quad (5.49)$$

Podemos escrever então,

$$K = A + \frac{B}{2A} . \quad (5.50)$$

Substituindo tudo em  $K$ , obtemos

$$\sqrt{H^2} \simeq \frac{1}{2mc^2} (\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) -$$

$$- \frac{\hbar}{2m} P_i T^{ij} [\vec{\Sigma} \times \nabla v]_j + \frac{\hbar e}{2mc} (\delta^{ij} + 2T^{ij} v) (\Sigma_i B_j) + mc^2 . \quad (5.51)$$

Resta agora apenas aplicar a equação (4.68) para obter  $H$ . Como todos os termos em (5.51) são pares (comutam com  $\beta$ ), basta multiplicá-la por  $\beta$  para obter  $H$ . Temos então uma Hamiltoniana em blocos. Finalmente encontramos

$$\begin{aligned} H^{tr} &\simeq \frac{1}{2mc^2} \beta (\delta^{ij} + 2T^{ij} v) [(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - e\hbar c \varepsilon_{lik} \Sigma^k \partial^l (A_j)] + \\ &+ \beta \frac{\hbar}{2mc} \varepsilon^{jlk} \partial_j (v) \Sigma_k T_l^m (cP_m - eA_m) + \beta mc^2 . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Agora vamos escrever o espinor em duas componentes, na forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2 t}{\hbar}} \quad (5.53)$$

e usar o fato que  $i\hbar \partial_t \psi = H\psi$  para acharmos a Hamiltoniana para  $\varphi$ . Teremos, portanto,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = -mc^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} . \quad (5.54)$$

Usando o fato de a Hamiltoniana ser par, a Hamiltoniana para  $\varphi$  será

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2mc^2} (\delta^{ij} + 2T^{ij} v) [(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - e\hbar c \varepsilon_{lik} \sigma^k \partial^l (A_j)] + \\ &+ \frac{\hbar}{2mc} \varepsilon^{jlk} \partial_j (v) \sigma_k T_l^m (cP_m - eA_m) . \end{aligned} \quad (5.55)$$

A Hamiltoniana anterior descreve uma partícula de Dirac na presença de um campo magnético constante, numa região onde há ondas gravitacionais. Todos os termos presentes nela possuem a massa na potência menos um. A equação de Pauli (3.29), a menos do termo  $A_0$ , que neste caso estamos supondo nulo, também possui essa propriedade. Como a Hamiltoniana anterior é exata, logo surge a idéia de tentarmos obtê-la como um limite não relativístico para a Hamiltoniana inicial, equação (5.28) (antes da transformação exata).

O cálculo é exatamente o mesmo feito na seção (4.4) para obter a equação de Pauli. Tomamos a Hamiltoniana (5.28) e supomos a solução na forma (5.53). Substituímos em  $i\hbar \partial_t \psi = H\psi$  e consideramos o limite de baixas energias, ou seja, que o termo  $mc^2$  é dominante ( $|mc^2 \chi| \gg |i\hbar \partial_t \chi|$ ). Com essas considerações, chegamos a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{1}{2mc^2} (\sigma^j K_j^i \partial_i + \sigma^i g_i) (\sigma^l K_l^m \partial_m + \sigma^l g_l) \varphi . \quad (5.56)$$

Depois de alguns cálculos com o lado direito desta equação, chegamos a

$$H = \frac{1}{2mc^2}(\delta^{ij} + 2T^{ij}v) [(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - e\hbar c \varepsilon_{jmk} \Sigma^k \partial^j A^l] + \\ + \frac{\hbar}{2mc^2} \varepsilon^{jlk} \partial_j(v) \sigma_k T_l^m (cP_m - eA_m) \quad , \quad (5.57)$$

que é a mesma Hamiltoniana (5.55). Este resultado já era esperado e é muito interessante, pois valida o método de transformações exatas.

Como caso particular dessa Hamiltoniana podemos facilmente eliminar as ondas gravitacionais fazendo  $v \equiv 0$ . Teremos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{1}{2mc^2} [\vec{\sigma} (c\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} (c\vec{p} - e\vec{A})] \varphi \quad , \quad (5.58)$$

que depois de alguns cálculos, nos fornece

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[ \frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \varphi \quad , \quad (5.59)$$

que é a equação de Pauli (3.29), com  $A_0 = 0$ .

### 5.10.2 Equações de movimento para a partícula

Para obter as equações de movimento não-relativísticas para a partícula com spin semi-inteiro, vamos fazer a quantização canônica da teoria não-relativística. Para isso, introduzimos os operadores de coordenada  $\hat{x}_i$ , momenta  $\hat{p}_i$  e spin  $\hat{\sigma}_i$  com as seguintes relações de comutação (satisfeitas para instantes de tempos iguais)

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{\sigma}_j] = [\hat{p}_i, \hat{\sigma}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k \quad . \quad (5.60)$$

O operador hamiltoniano  $\hat{H}$  que corresponde à energia (5.52) é construído em termo dos operadores  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{p}_i$ ,  $\hat{\sigma}_i$ , e esses operadores fornecem as equações de movimento

$$i\hbar \frac{d\hat{x}_i}{dt} = [\hat{x}_i, H] \quad , \quad i\hbar \frac{d\hat{p}_i}{dt} = [\hat{p}_i, H] \quad , \quad i\hbar \frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = [\hat{\sigma}_i, H] \quad . \quad (5.61)$$

Depois de calcular os comutadores em (5.61), chegamos à forma explícita das equações de movimento dos operadores. Agora podemos omitir todos os termos que se anulam quando  $\hbar \rightarrow 0$ <sup>1</sup>. Obtemos, portanto, equações clássicas de movimento que podem ser interpretadas como as equações de movimento (quasi)clássicas para a partícula na presença

<sup>1</sup>Neste momento, torna-se irrelevante o ordenamento de operadores na Hamiltoniana

de ondas gravitacionais fracas e campo magnético constante. Introduzindo  $A'_i = T_{ij}A^j$ , o cálculo direto dos comutadores, nos fornece as equações

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m}(\delta_{ij} + 2T_{ij}v)(P^j - \frac{e}{c}A^j) \quad , \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{1}{m}T^{jk}\partial_iv\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\left(p_k - \frac{e}{c}A_k\right) + (\delta_{jk} + 2T_{jk}v)\left(p^j - \frac{e}{c}A^k\right)\frac{e}{mc}\partial_iA^c, \\ \frac{d\sigma_i}{dt} &= \frac{e}{mc}\varepsilon_{ijk}\sigma^k[\vec{B} + 2v\text{rot}(\vec{A}')]^j + \frac{1}{mc}(cP^l - eA^l)\sigma^m[T_{ml}(\partial_iv) - T_{il}(\partial_mv)]. \quad (5.62)\end{aligned}$$

As soluções destas equações podem mostrar o efeito das ondas gravitacionais para o movimento de uma partícula carregada com spin. A diferença dessas equações para as equações clássicas de uma partícula um campo magnético aparecem nos termos onde  $v$  está presente. Combinando as duas primeiras equações encontramos

$$\begin{aligned}m\frac{d\dot{x}_i}{dt} &= \frac{e}{c}\left\{\dot{\vec{x}} \times [\vec{B} + 2v\text{rot}\vec{A}']\right\}_i - \frac{e}{c}(\delta_{ij} + 2T_{ij}v)\frac{\partial A^j}{\partial t} \\ &+ 2mT_{ij}\frac{dv}{dt}\dot{x}^j - mT_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k(\nabla_iv). \quad (5.63)\end{aligned}$$

Esta equação pode ser interpretada como a força de Lorentz mais termos de correção onde  $v$ , ou seja, a interação com as ondas gravitacionais, está presente. O termo  $2v\text{rot}\vec{A}'$  mostra a interação das ondas gravitacionais com o campo magnético.

## 6 *Transformação FW exata para termos que violam as simetrias CPT e Lorentz*

Existe outro caso de grande importância que pode ser estudado usando a TFWE [62, 61, 60]. Uma das extensões mais naturais da RG está relacionada com a inclusão do campo de torção que, como se supõe, assim como a métrica, descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo. O estudo dos aspectos físicos da torção gravitacional tem uma longa história (em [75, 77, 110, 120, 24, 124] pode se encontrar uma extensa revisão e referências).

O ponto que sempre chamou uma atenção especial é a interação da torção com o campo espinorial [42, 3, 74, 116]. Em particular, os artigos [121, 25, 117] trataram da aproximação não relativística da equação de Dirac e em [25, 117], correspondentemente, a equação de Pauli e a TFW foram obtidas para o campo fermiônico interagindo com os campos de torção e eletromagnético. Um ponto interessante é que os resultados desses artigos podem ser usados para investigar as possíveis manifestações da torção no domínio da física atômica [25, 95, 84, 83, 86].

Vamos tratar agora do caso da TFWE para o caso de torção e campo magnético interagindo com o espinor de Dirac. Podemos estudar a mesma abordagem para os outros termos que violam as simetrias CPT e Lorentz [85, 35]. Embora o foco principal desta parte do trabalho sejam os efeitos da torção, vamos construir também uma tabela que mostra quais dos termos que violam CPT e Lorentz que permitem o uso da TFWE.

Vamos começar com a ação que descreve um férmion de Dirac com os termos que violam essas simetrias

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{i}{2} D_\mu^* \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi - \bar{\psi} M \psi \right\}, \quad (6.1)$$

onde usamos a seguinte classificação para os termos que violam CPT e Lorentz [35]

$$D_\mu = \nabla_\mu - i e A_\mu; \quad D_\mu^* = \nabla_\mu + i e A_\mu; \quad \Gamma^\nu = \gamma^\nu + \Gamma_1^\nu; \quad M = m + M_1. \quad (6.2)$$

Definimos a ação inicial em espaço-tempo curvo apenas para que ela fosse representada de maneira geral, entretanto a análise da TFEW será feita em espaço-tempo plano. Não há muito interesse em considerar a TFEW para os termos que violam CPT e Lorentz em um espaço-tempo curvo, pois as magnitudes destes termos são definitivamente pequenas e conseqüentemente os termos correspondentes produzem efeitos muito fracos, que nunca se misturariam com os termos de espaço-tempo curvo. Nas fórmulas acima  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$  e os termos  $\Gamma_1^\nu$  e  $M_1$  são dados por

$$\Gamma_1^\nu = c^{\mu\nu} \gamma_\mu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\mu + e^\nu + i f^\nu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\lambda\mu}, \quad (6.3)$$

$$M_1 = a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + i m_5 \gamma_5 + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (6.4)$$

As grandezas  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $m_5$ ,  $c^{\mu\nu}$ ,  $d^{\mu\nu}$ ,  $e^\mu$ ,  $f^\mu$ ,  $g^{\lambda\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$  são os parâmetros que violam as simetrias CPT e Lorentz. Quando se estudam fenômenos físicos com energia da ordem da escala de Planck, as abordagens como teoria de cordas e outros prevêem a existência de vários campos da natureza geométrica, tais como torção e dilaton, por exemplo. Nas energias baixas, supões-se que esses campos têm um papel modesto, mas em princípio não é garantido que eles não possam ser observados. Em particular, a existência de campos fracos deste tipo gerou a possibilidade interessante de uma quebra muito fraca das simetrias fundamentais, inclusive de Lorentz e de CPT (veja, e.g., [88] para revisão). De acordo com as investigações teóricas existentes [78], poderia acontecer de o vácuo não ser invariante de Lorentz. Isso significa que, na nossa parte do Universo, há algum campo externo fixo (ou até mesmo mais de um) que define uma direção preferencial no espaço-tempo. Efeitos quânticos de vácuo similares podem ser responsáveis pelas violações das simetrias CPT. A abordagem convencional para se estudar a possibilidade de quebra das simetrias CPT e Lorentz é considerar a forma mais geral para essas violações e depois olhar para as conseqüências fenomenológicas delas. O tipo mais promissor de experimento pertence à área de física atômica [80], mas há opções interessantes na área de altas energias e física do estado sólido [81], experimentos com neutrinos [82], gravitação [87] e cosmologia [79].

Uma discussão extensa da possibilidade da origem destes parâmetros e também as numerosas implicações fenomenológicas deles podem ser encontradas em [88, 78]. Esses aspectos não serão considerados aqui.

É possível reescrever (6.1) da seguinte maneira

$$S = \int d^4x \bar{\psi} \left\{ i\Gamma^\mu D_\mu + \frac{i}{2}(\nabla_\mu \Gamma^\mu) - M \right\} \psi. \quad (6.5)$$

Como resultado, as equações de movimento para  $\psi$  podem ser escritas como

$$i\Gamma^\mu D_\mu \psi = \left[ M - \frac{i}{2}(\nabla_\mu \Gamma^\mu) \right] \psi. \quad (6.6)$$

Com o objetivo de fazer a TFWE, a equação acima é escrita na forma de Schrödinger,  $i\partial_t \psi = H\psi$ , para se obter a Hamiltoniana

$$i\Gamma^0 \nabla_0 \psi = (M + P_\mu^* \Gamma^\mu) \psi. \quad (6.7)$$

Neste ponto, as seguintes notações, que serão muito úteis, são introduzidas

$$P_\nu^0 = (0, P_i), \quad \bar{P}_\nu = P_\nu^0 - eA_\nu \quad \text{e} \quad P_\nu^* = \bar{P}_\nu - \frac{i}{2}\nabla_\nu. \quad (6.8)$$

É importante notar que essas notações permitem que os termos não-constantes que violam CPT e Lorentz sejam também levados em conta. Na última equação a representação padrão [21] para as matrizes de Dirac foi usada.

Vamos denotar  $\Gamma^0 = \gamma^0 + \Gamma_1^0$  e introduzir  $\bar{\Gamma}_1^0$  de tal forma que  $(\Gamma^0)^{-1} = \gamma^0 - \bar{\Gamma}_1^0$ . Se supusermos que a Hamiltoniana é linear nos termos que violam CPT e Lorentz presentes em  $\Gamma_1^0$  é possível mostrar que

$$\bar{\Gamma}_1^0 = \gamma^0 \Gamma_1^0 \gamma^0.$$

Portanto a equação (6.7) pode ser colocada na seguinte forma

$$i\nabla_0 \psi = \left\{ \gamma_0 - \gamma_0(c^{\mu 0} \gamma_\mu + d^{\mu 0} \gamma_5 \gamma_\mu + e^0 + i f^0 \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda \mu 0} \sigma_{\lambda \mu}) \gamma_0 \right\} \times [M + (P_\nu^* \Gamma^\nu)] \psi. \quad (6.9)$$

Já vimos no final da seção 4.3 que é possível fazer a TFWE se o seguinte critério é satisfeito

$$\eta H + H \eta = 0, \quad \text{onde} \quad \eta = i\gamma_5 \beta \quad (6.10)$$

é o operador de involução [50, 103, 34, 107]. É, portanto, natural formular a seguinte questão: Qual a forma mais geral da equação (6.9) que admite o operador de involução? Para responder esta pergunta é necessário verificar quando o critério (6.10) é satisfeito para os termos da Hamiltoniana geral apresentada anteriormente no lado direito de (6.9). O resultado deste procedimento é mostrado na tabela 1.

Tabela 1: Coeficientes de interação

	$m$ $P_\nu^* e^\nu$	$a_l$ $P_\nu^* c^{l\nu}$ $\overline{P}_l$	$b_0$ $P_\nu^* d^{0\nu}$	$H^{lj}$ $P_\nu^* g^{lj\nu}$	$m_5$ $P_\nu^* f^\nu$	$b_l$ $P_\nu^* d^{l\nu}$	$a_0$ $P_\nu^* c^{0\nu}$ $\overline{P}_0$	$H^{0\mu}$ $P_\nu^* g^{0\mu\nu}$
$\gamma^0$	1	$\gamma^l$	$-\gamma^0\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{lj}$				
$c^{00}$	$-\gamma^0$	$-\alpha^l$	$\gamma^5$	$-\frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{lj}$				
$f^0$	$i\gamma^5$	$i\gamma^5\gamma^l$	$i\gamma^0$	$\frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{lj}$				
$d^{i0}$	$-i\gamma^i\gamma^5$	$-i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	$\alpha^i$	$-\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^5\sigma^{lj}$				
$g^{i00}$	$2\alpha^i$	$2\alpha^i\gamma^l$	$2\gamma^i\gamma^5$	$\alpha^i\sigma^{lj}$				
$d^{00}$					$i\gamma^0$	$\alpha^l$	$-\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}\gamma^0\gamma^5$
$e^0$					$-i\gamma^5$	$-\gamma^5\gamma^l$	$-\gamma^0$	$-\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}$
$c^{i0}$					$-i\gamma^i\gamma^5$	$-i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	$-\alpha^i$	$\frac{1}{2}\gamma^i\sigma^{0\mu}$
$g^{ij0}$					$\frac{i}{2}\sigma^{ij}\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5\gamma^l$	$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^0$	$\frac{1}{4}\sigma^{ij}\sigma^{0\mu}$

A tabela especifica os oitenta casos dos termos que violam CPT e Lorentz na equação de Dirac modificada que admitem a TFWÉ <sup>1</sup>. A forma do termo correspondente que admite a TFWÉ na Hamiltoniana é obtida pela multiplicação dos termos de uma linha por uma coluna. Por exemplo, o coeficiente 1 na primeira linha e coluna significa que para  $\gamma^0$  e  $m$  a Hamiltoniana contém o termo  $\gamma^0 \times m \times 1 = \beta m$ . Este termo é o mais trivial possível e corresponde à equação de Dirac livre.

Outro exemplo é a oitava linha com  $c^{i0}$  e oitava coluna com  $P_\nu^* g^{0\mu\nu}$ . Levando o coeficiente da tabela em conta chegamos ao seguinte termo que admite a TFWÉ

$$c_{i0} \times (P_\nu^* g^{0\mu\nu}) \times \frac{1}{2}\gamma^i\sigma_{0\mu} = \frac{i}{2}\gamma_i c^{i0} \alpha_j (P_\nu^* g^{0j\nu}).$$

Cada termo na primeira linha deve ser tomado separadamente, por exemplo na primeira coluna há dois termos diferentes  $m$  e  $P_\nu^* e^\nu$ . Os blocos com coeficientes não nulos mostram os termos que admitem a TFWÉ. Como já foi mencionado, há oitenta desses termos correspondendo ao número de teorias e Dirac modificadas admitindo a TFWÉ. Além disso se algum espaço na tabela está vazio, isso significa que a TFWÉ não é permitida para aquele par de termos nas correspondentes linha e coluna. A mesma afirmativa é válida se uma componente de um dos termos não está presente na tabela.

É importante mencionar que mesmo nesses casos, quando a Hamiltoniana não satisfaz a equação (6.10), a técnica da TFWÉ não é inútil. De fato, há a possibilidade de se aplicar a prescrição da TFWÉ para derivar uma transformação Foldy-Wouthuysen perturbativa e obter uma análise qualitativa da Hamiltoniana transformada que será par. Para o produto

<sup>1</sup>O número oitenta pode ser obtido multiplicando o número de termos na primeira linha pelo número de termos correspondentes na primeira coluna. Esse procedimento fornece  $(2+3+2+2) \times 5 + (2+2+3+2) \times 4 = 81$ , mas um dos termos é apenas  $\beta m$ , que não precisa de ser levado em conta

de termos  $\gamma^0$  e  $\bar{P}_0$  (que possui um espaço vazio na tabela), o cálculo correspondente foi feito em [60] e será discutido na seção 6.2.2. Outro caso já estudado para essa aplicação está no apêndice de [62] e será discutido na seção 6.2.1.

## 6.1 Transformação exata para Campo de Dirac interagindo com parte escalar da torção

Nesta seção vamos considerar em detalhes a TFWE para um dos casos da tabela que admitem a transformação. Será construída a transformação exata para a componente do tipo temporal do campo vetorial axial que é o dual da torção completamente antisimétrica do espaço-tempo. Vamos começar com alguns detalhes necessários sobre a teoria gravitacional com torção. São usadas as notações de [124].

Se voltarmos às definições dadas no capítulo 2, veremos que a equação (2.12) impõe que a conexão deve satisfazer  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ . Entretanto não há motivação teórica para se fazer isso, além das restrições experimentais sobre a magnitude dos efeitos causados por uma possível falta de simetria nos índices inferiores da conexão. E se levarmos em conta que a equação (2.8) continua definindo um tensor mesmo se adicionarmos a  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  um tensor qualquer  $C_{\beta\gamma}^\alpha$  de tal forma que quando

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha,$$

a equação (2.11) permaneça covariante, vemos que a conexão possui uma ambiguidade na sua representação. Podemos escrever de forma geral

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (6.11)$$

onde agora  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  representa o símbolo de Cristoffel que é claramente um caso particular da conexão afim. O símbolo de Cristoffel depende apenas da métrica, (2.14) e o tensor  $C_{\beta\gamma}^\alpha$  é uma nova propriedade da teoria. Essa ambiguidade na conexão é muito importante, pois permite introduzir campos de calibre diferentes da gravitação e, conseqüentemente, descrever várias interações.

No espaço-tempo com torção  $T_{\beta\gamma}^\alpha$ , a conexão  $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$  não é simétrica  $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha - \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha = T_{\beta\gamma}^\alpha$ . Esse novo campo gera modificações em relação a teoria sem torção. Por exemplo, se calcularmos o seguinte comutador atuando no campo escalar

$$\left[ \tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_\beta \right] \varphi = T_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \varphi, \quad (6.12)$$

já vemos uma diferença em relação à teoria com conexão simétrica. A curvatura pode ser reescrita em termos do tensor de Riemann (curvatura dependendo apenas da métrica), a derivada covariante (sem torção) e a contorção  $K^\alpha_{\beta\gamma}$  como

$$\tilde{R}^\lambda_{\cdot\tau\alpha\beta} = R^\lambda_{\cdot\tau\alpha\beta} + \nabla_\alpha K^\lambda_{\cdot\tau\beta} - \nabla_\beta K^\lambda_{\cdot\tau\alpha} + K^\lambda_{\cdot\gamma\alpha} K^\gamma_{\cdot\tau\beta} - K^\lambda_{\cdot\gamma\beta} K^\gamma_{\cdot\tau\alpha} \quad (6.13)$$

Mostra-se útil dividir a torção  $T^\alpha_{\beta\gamma}$  nas três componentes irreduzíveis: o traço  $T_\beta = T^\alpha_{\beta\alpha}$ , o pseudotraço  $S^\nu = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\alpha\beta\mu}$  e a parte puramente tensorial  $q^\alpha_{\beta\gamma}$ , satisfazendo as condições  $q^\alpha_{\beta\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha\beta\mu} = 0$ . Logo, a torção pode ser escrita na forma

$$T_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3} (T_\beta g_{\alpha\mu} - T_\mu g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{6} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^\nu + q_{\alpha\beta\mu}. \quad (6.14)$$

No que segue, consideraremos apenas a componente  $S_\mu$ , que é equivalente a a tomar a torção completamente antissimétrica.

Já que o férmion de Dirac está num campo gravitacional externo com torção, podemos fazer a generalização covariante mínima trocando a métrica de Minkowski por uma métrica geral e a derivada parcial pela derivada covariante. Entretanto, de certa forma, é mais interessante considerar uma ação geral não-mínima [26, 24, 124], que inclui todos os termos compatíveis com a covariância sem parâmetros proporcionais ao inverso da massa,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ i\bar{\psi}\gamma^\mu (\nabla_\mu + i\eta_1\gamma_5 S_\mu)\psi + m\bar{\psi}\psi \right\}. \quad (6.15)$$

Aqui,  $\eta_1 = 1/8$  corresponde ao caso da ação mínima [26]. De acordo com [26, 124], a teoria de campos com torção de fundo quanticamente consistente pode ser construída apenas para a interação não-mínima do campo de Dirac com o campo externo de torção. Portanto, vamos manter daqui para frente o parâmetro  $\eta_1$  arbitrário. Vemos ainda que, se substituirmos (6.4) em (6.1) e comparar o resultado com (6.15) no espaço-tempo plano, temos  $b_\mu = -\eta_1 S_\mu$ . Portanto, a torção é equivalente a um dos termos que violam as simetrias Lorentz e CPT.

Neste ponto, temos todos os dados para desenvolver os cálculos da TFWÉ para um dos termos que violam as simetrias CPT e Lorentz. Vamos considerar uma partícula de spin 1/2 interagindo com os campos externos de torção e eletromagnético. Tomaremos os campos externos como constantes. As equações de movimento que vêm da ação (6.15) têm a forma

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left( c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5 + e\Phi + \eta_1\gamma_5 S_0 + mc^2\beta \right) \psi, \quad (6.16)$$

Para o caso de um campo magnético constante podemos admitir que  $\Phi = 0$ . Entretanto, uma análise direta mostra que o termo  $\eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5$  em (6.16) não satisfaz a condição

(6.10). Portanto, primeiramente, trataremos o caso em que  $\vec{S} = 0$  e a TFWE pode ser feita. A Hamiltoniana completa é estudada na seção 6.2.1. Por enquanto, trabalharemos com a seguinte Hamiltoniana

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + \eta_1\gamma_5 S_0 + mc^2\beta. \quad (6.17)$$

Um ponto interessante que deve ser enfatizado aqui é que a Hamiltoniana acima poderia ter sido construída a partir da tabela da seção 6 sem usar os argumentos dos dois últimos parágrafos. Se olharmos para a linha  $\gamma^0$  da tabela e quisermos considerar apenas o campo  $b_\mu$ , concluímos que apenas a componente  $b_0$  é permitida. Portanto, a Hamiltoniana mais geral para o campo de torção usando o esquema da tabela seria  $\gamma_0 \times (m + \gamma^l \bar{P}_l - \gamma_0 \gamma^5 b_0)$ , que tem a mesma forma de (6.17).

De acordo com a prescrição padrão [50], o próximo passo é obter  $H^2$ . O cálculo direto fornece

$$H^2 = (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0)^2 + m^2 c^4 - 2\eta_1^2 S_0^2. \quad (6.18)$$

Usando os mesmos passos compreendidos entre as equações (5.48) e (5.55) encontramos a Hamiltoniana para o setor  $\varphi$ . O resultado que se obtém é a mesma Hamiltoniana não relativística encontrada em [25] de maneira independente (usando a TFW usual). Este resultado não é trivial, pois antes de começarmos os cálculos havia a possibilidade de novos termos serem gerados depois de obter a Hamiltoniana transformada, fazer a expansão e comparar o resultado com o obtido pela transformação puramente perturbativa, como aconteceu em [107]. Entretanto, a Hamiltoniana transformada foi obtida de maneira mais econômica e confirma o resultado de [25]. Na próxima seção, vamos considerar as equações para partícula espinorial no fundo de  $S_0$ .

## 6.2 Transformação Foldy-Wouthuysen semi-exata

A Hamiltoniana completa no lado direito da equação (6.16) não permite a TFWE. Entretanto, pelo fato de a torção ser um campo fraco, estamos realmente interessados apenas na expansão linear na torção enquanto o campo magnético pode ser tratado de forma exata.

Vamos fazer uma modificação *ad hoc* no termo  $\eta_1 \vec{\alpha} \vec{S} \gamma_5$ , que é multiplicá-lo pela matriz  $\beta$ . O termo modificado satisfaz a condição (6.10) e agora a transformação exata é perfeitamente possível. O ponto principal é que uma matriz  $\beta$  não gera efeito algum. A

razão é que depois de desenvolver o operador Hamiltoniano final, ele terá uma estrutura de blocos diagonal. Estamos interessados somente no bloco superior da Hamiltoniana que é par (após a transformação) para fazer a análise física. Pelo menos em primeira ordem em  $1/m$ , não importa se esse termo está multiplicado por  $\beta$  ou não, pois beta possui a forma (3.13) e o bloco superior dela é a matriz unitária. Com o resultado chegamos ao que pode ser chamado de transformação Foldy-Wouthuysen semi-exata, pois ela é exata em apenas parte dos campos externos e linear nos outros campos. Essa nova técnica de fazer a TFW perturbativa já foi sugerida e aplicada à Hamiltoniana de Dirac que inclui a parte escalar do campo eletromagnético em [60]. Vamos também incluir aqui a componente temporal do vetor axial  $S_\mu$ . Chegamos, então, à Hamiltoniana com a qual trabalharemos

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} - \eta_1 \vec{\alpha} \cdot \vec{S} \gamma_5 \beta + \eta_1 \gamma_5 S_0 + mc^2 \beta. \quad (6.19)$$

Neste caso  $H^2$  tem a forma

$$\begin{aligned} H^2 = & (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 \vec{\Sigma} S_0)^2 + m^2 c^4 + 2\eta_1 mc^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} + \\ & + \eta_1^2 (\vec{S})^2 + \hbar ce \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - 2\eta_1^2 S_0^2 + 2i\eta_1 \gamma_5 \beta \vec{\Sigma} \cdot [\vec{S} \times (c\vec{p} - e\vec{A})]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

O último termo em (6.20) é ímpar, e a presença dele parece, de certa forma natural, já que usamos o procedimento artificial em (6.19). Ao mesmo tempo, se não considerarmos este termo, o restante é exatamente a Hamiltoniana que vem da TFW perturbativa usual com torção [117]. Uma vantagem óbvia do método presente é a grande simplicidade técnica comparada com a do método perturbativo.

Se aplicarmos o procedimento descrito entre as equações (5.47) e (5.54) à equação anterior, encontramos o limite não-relativístico que é praticamente (mas não completamente) igual ao convencional [25],

$$H_\varphi^{tr} = \frac{1}{2m} (\vec{\Pi})^2 + B_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{Q}, \quad (6.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{\eta_1}{c} S_0 \vec{\sigma}, \quad B_0 = -\frac{\eta_1^2}{mc^2} S_0^2, \\ \vec{Q} &= \eta_1 \vec{S} + \frac{\hbar e}{2mc} \vec{B} + \frac{\eta_1}{mc} \vec{S} \times \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

O último termo em  $\vec{Q}$  tem origem do termo ímpar em (6.18) que já foi discutido anterior. Esse termo é novo em comparação com as expressões obtidas em [25] e em [117] pelo método perturbativo usual. O fato que a transformação exata fornece um termo novo em comparação com a transformação usual é análogo ao caso gravitacional em [107], descrito pelo aparecimento do “gravitational Darwin term”.

A quantização canônica de (6.22) fornece as (quasi)clássicas equações de movimento

$$\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m} \left( p_i - \frac{e}{c} A_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i S_0 \right) + \frac{\eta_1}{mc} \left[ \vec{\sigma} \times \vec{S} \right]_i = v_i, \\
\frac{dp_i}{dt} &= \frac{1}{m} \left( p^j - \frac{e}{c} A^j - \frac{\eta_1}{c} \sigma^j S_0 \right) \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \frac{\eta_1}{mc} \left[ \vec{\sigma} \times \vec{S} \right]^j \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i}, \\
\frac{d\sigma_i}{dt} &= \left[ \vec{R} \times \vec{\sigma} \right]_i, \\
\vec{R} &= \frac{2\eta_1}{\hbar} \left[ \vec{S} - \frac{1}{c} \vec{v} S_0 + \vec{S} \times \frac{\vec{v}}{c} + \frac{2\eta_1}{\hbar} S_0 \vec{S} \times \vec{\sigma} \right] + \frac{e}{mc} \vec{B}. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

As últimas equações são bem parecidas com as obtidas antes em [25] e [117] baseadas na equação de Pauli e a TFW perturbativa. Mas há também termos novos devido à aproximação não linear que usamos aqui.

As duas primeiras equações de (6.23) fornecem

$$m \frac{dv_i}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right]_i - \frac{\eta_1}{c} \sigma_i \frac{\partial S_0 \sigma_i}{\partial t} - \frac{\eta_1}{c} \frac{\partial (\vec{S} \times \vec{\sigma})_i}{\partial t}. \quad (6.24)$$

A análise dessas equações será feita juntamente com os resultados que serão obtidos na próxima seção.

### 6.2.1 Transformação semi- exata com expansão linear na parte vetorial da torção

Podemos reescrever a equação (6.20) usando a aproximação linear em  $S_\mu$ . De agora em diante, todos os termos de segunda ordem em  $S_\mu$  serão negligenciados. Encontramos

$$H^2 = H_0^2 + 2\eta_1 mc^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} + 2\eta_1 \gamma_5 S_0 \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}), \quad (6.25)$$

onde

$$H_0^2 = (c\vec{p} - e\vec{A})^2 + \hbar ce \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} + m^2 c^4. \quad (6.26)$$

A ideia agora é considerar a expansão de  $\sqrt{H^2}$  não apenas no parâmetro  $m$ , mas também em termos de  $S_\mu$ . Para fazer isso, apresentamos a equação (6.25) na forma simétrica

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{H_0^2}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{H_0^2} \left[ 2\eta_1 mc^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} + 2\eta_1 \gamma_5 S_0 \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) \right] \right\} + \\
&+ \left\{ 1 + \left[ 2\eta_1 mc^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} + 2\eta_1 \gamma_5 S_0 \vec{\alpha} \cdot (c\vec{p} - e\vec{A}) \right] \frac{1}{H_0^2} \right\} \frac{H_0^2}{2}. \quad (6.27)
\end{aligned}$$

Essa simetrização é um passo importante do procedimento que inclui a multiplicação por  $\beta$  na equação (6.16), inclusive evita os termos extras. A simetrização pode ser vista como parte da operação de extrair  $H$ , através de  $H^2$ . O próximo passo é calcular a raiz

quadrada de (6.27). Expandimos o termo  $H_0^2$  em série de potências em  $1/m$  (indo até a segunda ordem em  $1/m$ ) e obtemos o mesmo resultado de [50] que vamos chamar de  $H_0^{EK}$

$$H_o^{EK} = \sqrt{H_0^2} = mc^2 + \frac{(c\vec{p} - e\vec{A})^2}{2mc^2} + \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}. \quad (6.28)$$

Também expandimos o termo  $1/H_0^2$  em série de potências em  $1/m$  assim como o termo entre parênteses em (6.27) em série de potências de  $S_\mu$ , de tal forma que o resultado será apresentado em primeira ordem em  $S_\mu$  e segunda ordem em  $1/m$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{H^2} &= H_0^{EK} + \eta_1 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} - \frac{\eta_1}{2m^2c^4} \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} (c\vec{p} - e\vec{A})^2 - \\ &- \frac{\hbar ce\eta_1}{2m^2c^4} \vec{S} \cdot \vec{B} - \frac{\eta_1}{mc^2} (c\vec{p} - e\vec{A}) \cdot (S_0 \vec{\Sigma} + i\gamma_5 \beta \vec{S} \times \vec{\Sigma}). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Analisando termo a termo da equação acima, vemos que apenas o último é ímpar.

Usando (4.68) obtemos a Hamiltoniana final para este caso

$$\begin{aligned} H'^{tr} &= \beta mc^2 + \beta \frac{(c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1 S_0 \vec{\Sigma} - \beta \eta_1 \vec{S} \times \vec{\Sigma})^2}{2mc^2} - \frac{\beta \eta_1}{2m^2c^4} (c\vec{p} - e\vec{A})^2 \vec{\Sigma} \cdot \vec{S} + \\ &+ \beta \frac{\hbar ce}{2mc^2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} + \beta \eta_1 \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \beta \frac{\hbar ce\eta_1}{2m^2c^4} \vec{S} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Aqui usamos linha em  $H$  para fazer a distinção entre as Hamiltonianas (6.9) e (6.30). Para a Hamiltoniana (6.30) aplicamos o mesmo algoritmo usado entre as equações (5.53) e (5.54) e finalmente obtemos a Hamiltoniana para o bi-espinor  $\varphi$ . O resultado pode ser expresso na forma

$$H_\varphi'^{tr} = \left(1 - \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{S}}{2mc^2}\right) H_\varphi^{tr} \left(1 - \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{S}}{2mc^2}\right), \quad (6.31)$$

onde  $H_\varphi^{tr}$  é dado pela equação (6.9). Vamos então obter as equações de movimento usando o mesmo método aplicado em [25]. Fazemos a quantização canônica introduzindo os operadores  $\hat{x}_i$ ,  $\hat{p}_i$  e  $\hat{\sigma}_i$  e implementamos as relações de comutação de maneira usual. Neste caso as equações de movimento (quasi)clássicas são

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{dx_i}{dt} = \left(1 - \frac{\eta_1}{mc^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{S}\right) \frac{1}{m} \left(P_i - \frac{e}{c} A_i - \frac{\eta_1}{c} S_0 \sigma_i\right) + \frac{\eta_1}{mc} (\vec{\sigma} \times \vec{S})_i, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \left(1 - \frac{\eta_1}{mc^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{S}\right) \frac{1}{m} \left(p^j - \frac{e}{c} A^j - \frac{\eta_1}{c} \sigma^j S_0\right) \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \frac{\eta_1 e}{mc^2} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} (\vec{\sigma} \times \vec{S})_j, \\ \frac{d\sigma_i}{dt} &= [\vec{r} \times \vec{\sigma}]_i, \quad \vec{r} = \frac{2\eta_1}{\hbar} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{S} + \vec{S} \times \frac{\vec{v}}{c} - \frac{1}{c} \vec{v} S_0 \right] + \frac{e}{mc} \vec{B}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Usando as duas primeiras equações de (6.32), encontramos

$$\begin{aligned}
m \frac{dv_i}{dt} &= \left( -\frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right]_i \right) \left( 1 - \frac{\eta_1}{2mc^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{S} \right) - \\
&- \frac{\eta_1}{c} \frac{d}{dt} (S_0 \sigma_i) + \frac{\eta_1}{c} \frac{d}{dt} (\vec{\sigma} \times \vec{S})_i - \frac{\eta_1 v_i}{c^2} \frac{d}{dt} (\vec{\sigma} \cdot \vec{S}). \quad (6.33)
\end{aligned}$$

Comparando com (6.23), vemos que os novos termos em (6.32) são de ordem  $1/m^2$ . A equação (6.33) possui dois pontos importantes. O primeiro é que o último termo é de ordem  $1/m$  e não estava presente em (6.24). Este resultado explicita o fato de que se usarmos apenas o parâmetro  $1/m$  na expansão de  $H^2$  não iremos obter todos os termos possíveis de primeira ordem em  $S_\mu$  na Hamiltoniana final. Essa é uma grande vantagem da TFWE sobre a TFW: além de ela poder fornecer um resultado mais completo trabalhando com o parâmetro  $1/m$ , como em [107], é permitida a escolha de um parâmetro arbitrário da teoria em questão, que é considerado pequeno para se fazer a expansão, como fizemos aqui com  $S_\mu$ . O segundo ponto a ser notado é que o segundo termo na equação (6.33) mostra um efeito interessante. Essa equação é análoga à força de Lorentz atuando em uma partícula que interage com um campo eletromagnético externo. O caso é análogo ao das ondas gravitacionais do capítulo 3. O termo em que  $S_\mu$  aparece pode ser interpretado como uma correção para este caso. Pensando dessa forma, esse termo mostra uma mistura explícita entre os campos magnético e de torção. É possível então imaginar uma situação na qual o campo magnético poderia ser forte o suficiente para compensar o fato de o campo de torção ter magnitude pequena de tal forma que esse termo poderia afetar o movimento da partícula de alguma forma mensurável.

## 6.2.2 Transformação semi-exata para o potencial eletromagnético escalar

Vamos considerar agora outro caso de aplicação da transformação FW semi-exata, seguindo os cálculos descritos em [60]. Tomamos a Hamiltoniana na forma

$$H = \beta mc^2 + \beta q + \alpha^j K_j^i \partial_i + \alpha^i g_i, \quad \text{onde} \quad K_j^i = -i\hbar c (\delta_j^i + T_j^i v). \quad (6.34)$$

Nestas notações  $T_j^i$  tem parâmetros numéricos e  $q$  é uma constante. Os campos externos são introduzidos pela função escalar  $v$  e o vetor  $g_i$ . Seguindo os passos descritos anteriormente para se fazer a TFWE, obtemos primeiramente  $H^2$ . Encontramos

$$H^2 = m^2 c^4 + K^{il} K_l^m \partial_i \partial_m + 2 K_j^i g^j \partial_i + g^2 + K^{il} \partial_i (K_l^m) \partial_m + K_j^i \partial_i (g^j) +$$

$$+ i\Sigma_k \epsilon^{jlk} K_j^i \partial_i (K_l^m) \partial_m + i\Sigma_k \epsilon^{jlk} K_j^i \partial_i (g_l) + 2mc^2 q + \alpha^j K_j^i \partial_i (q) \beta. \quad (6.35)$$

Essa equação engloba vários casos particulares levando em conta o termo de interação constante. Entretanto se quisermos tratar o caso do potencial eletromagnético escalar não será possível usar (6.35), pois Hamiltoniana inicial terá a forma

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + e\Phi + \beta mc^2. \quad (6.36)$$

O termo  $e\Phi$  não anticomuta com o operador de involução. Portanto, a Hamiltoniana (6.36) não admite a TFWÉ. Vamos usar a mesma abordagem da seção anterior. Multipliquemos o termo  $e\Phi$  pela matriz  $\beta$  e usamos a técnica da transformação exata. Trabalhamos então com a Hamiltoniana na forma

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + e\beta\Phi + \beta mc^2. \quad (6.37)$$

Seguindo todos os passos da transformação exata, e usando (6.35) para a equação (6.37), a Hamiltoniana não-relativística transformada é

$$H^{tr} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi + \frac{\hbar e}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (6.38)$$

O resultado condiz com as equações apresentadas em [25] quando os campos de torção são nulos usando a transformação perturbativa. A vantagem aqui é que o resultado pode ser obtido em uma maneira extremamente econômica.

## 7 *Uma breve introdução à ação efetiva de vácuo*

Este capítulo tem caráter introdutório e será dedicado a uma revisão da teoria e dos métodos de cálculo para as correções quânticas para os campos vetorial, escalar e fermiônico. O objetivo principal não será a busca por uma teoria de gravitação quântica, mas a descrição de uma teoria quântica de campos que possa ser formulada em espaço-tempo curvo de tal forma que os cálculos de grandezas importantes sejam possíveis de serem realizados e os resultados condizentes com as expectativas geradas por outras abordagens. Uma revisão mais completa pode ser encontrada em [24] e [126], então o nosso objetivo aqui é, principalmente, fixar as notações e introduzir as fórmulas necessárias para o próximo capítulo.

### 7.1 *Abordagem semi-clássica*

Até agora, neste trabalho, foi adotada a abordagem semi-clássica. Utilizamos, por exemplo, a generalização mínima, explicada na seção 3.5 para descrever o campo de Dirac interagindo com ondas gravitacionais na seção 5.6. Vamos agora olhar com um pouco mais de cuidado para esse método.

Quando o objetivo é construir uma teoria com campos de matéria em um fundo gravitacional clássico, devemos pensar em qual seria a forma matemática possível para a ação que descreve essa situação. O resultado deve ser consistente com os princípios da mecânica quântica e, além disso, devemos buscar uma ação que possa ser representada de maneira clara e (dentro dos limites impostos pelos princípios físicos) coesa.

Devemos estabelecer então alguns princípios aos quais a ação procurada deve satisfazer. Estes princípios surgem de maneira natural se levarmos em conta os resultados já bem estabelecidos da teoria quântica de campos em espaço-tempo plano e a Relatividade Geral. Vamos impor primeiramente que a ação seja local e covariante nos setores de

matéria e gravitação. Além disso, ela deve preservar as simetrias (de calibre) presentes em nível clássico. Por fim, ela deve ser obviamente adimensional (vamos supor que não haja termos proporcionais a  $1/m$ ) e que seja possível fazer a correspondência com a teoria em espaço-tempo plano (o que proíbe termos do tipo  $m^2/R$ ). A ação que procuramos terá a seguinte forma

$$S = S_{\text{mín}} + S_{\text{não-mín}} + S_{vac}, \quad (7.1)$$

onde  $S_{\text{mín}}$  em uma teoria qualquer será dada pela forma que já conhecemos da teoria clássica juntamente com o processo de generalização-mínima, explicado na seção 3.5. O termo  $S_{\text{não-mín}}$  será um termo de campos de matéria que será construído de forma que os princípios relacionados no parágrafo anterior não sejam violados. O último termo  $S_{vac}$  representará uma ação que não muda a quantização nem a generalização dos campos presentes nos outros termos.

Vamos tomar o campo escalar como exemplo. Neste caso,  $S_{\text{mín}}$  será a ação de Klein-Gordon com o fator de integração generalizado. Já o termo  $S_{\text{não-mín}}$  terá a forma

$$S_{\text{não-mín}} = \frac{1}{2} \xi \int d^4x \sqrt{-g} R \varphi^2, \quad (7.2)$$

que é o único que satisfaz os critérios estabelecidos. Restam os termos em  $S_{vac}$ , que correspondem à ação de vácuo. Por construção, estes só podem ser termos de vácuo nesta teoria. A forma mais geral para  $S_{vac}$  é

$$S_{vac} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{16\pi G} (R + 2\Lambda) + a_1 R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + a_2 R_{\mu\nu}^2 + a_3 R^2 + a_4 \square R \right\}. \quad (7.3)$$

É importante notar que os termos de derivadas superiores em (7.3) não são correções quânticas, eles devem ser introduzidos mesmo em nível clássico. A razão pela qual eles não se manifestam em experimentos de gravitação é que o termo de Einstein-Hilbert possui o coeficiente  $1/G = M_p^2$ . Se levamos em conta as correções produzidas pelos “novos” termos, vemos que elas serão proporcionais a uma ordem de grandeza superior para o coeficiente  $1/m^2$  no propagador do graviton que faz a interação gravitacional [129]. Portanto esses termos seriam interessantes apenas para estudos de sistemas de alta energia como universo primordial, buracos negros e, possivelmente, rajadas de raios gama.

Para vetores e férmions a ação local, covariante e invariante perante transformações de calibre não possuem termos não mínimos por serem algebricamente impossíveis. A generalização para férmions é dada então de forma completa pelo procedimento descrito na seção 3.5 e para campos de calibre, temos simplesmente

$$S_{A_\mu^a} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \quad \text{onde} \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (7.4)$$

## 7.2 Ação Efetiva e Renormalização

Vamos agora rever a abordagem que trata o problema do ponto de vista quântico. Para estudar a teoria dessa forma, começamos por substituir a ação clássica pela ação efetiva (AE), que pode ser definida pela integral de caminho

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = \int D\phi e^{iS[\phi; g_{\mu\nu}]} . \quad (7.5)$$

Na expressão acima  $\phi$  representa o conjunto de campos de matéria e fantasmas de Faddeev-Popov para todos os grupos de calibre internos da teoria e  $D\phi$  é o elemento invariante de integração funcional. A ação clássica  $S[\phi; g_{\mu\nu}]$  inclui os campos de matéria, interações entre eles, a métrica (que funciona como parâmetro externo) e a ação clássica de vácuo (7.3). A covariância da ação efetiva foi demonstrada recentemente em [91] (veja também [24, 126]). A ação efetiva admite a expansão em laços

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] = S_{vac}[g_{\mu\nu}] + \bar{\Gamma}^{(1)} + \bar{\Gamma}^{(2)} + \bar{\Gamma}^{(3)} + \dots \quad (7.6)$$

A contribuição de um laço é mais simples e várias situações mais importante. Ela tem a forma

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} s \text{Tr} \ln \hat{H} , \quad \text{onde} \quad \hat{H} = \hat{H}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S[\phi, g_{\mu\nu}]}{\delta\phi(x) \delta\phi(y)} \Big|_{\phi=0} \quad (7.7)$$

é a parte bilinear em campos quânticos da ação clássica. O símbolo  $s \text{Tr}$  representa a operação de tomar o traço do operador em que ele atua, e multiplicar por  $-1$ , no caso de campos fermiônicos.

A ação de um laço Euclideana que corresponde à teoria (7.5) é dada por (para mais detalhes ver [24])

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[ \hat{1} \square + \hat{\Pi} + 2 \hat{h}^\mu \nabla_\mu \right] , \quad (7.8)$$

onde os chapéus indicam operadores que atuam no espaço dos campos quânticos.

## 7.3 Métodos de cálculos em espaços curvos

Nesta seção serão discutidos os métodos práticos de cálculo de correções quânticas em espaço-tempo curvo. Vamos nos concentrar em fazer uma breve descrição de cada um dos métodos que serão apresentados, deixando de lado as considerações históricas, que podem ser encontradas em [22, 24].

Uma das abordagens consiste na generalização dos diagramas de Feynman do espaço-tempo plano introduzindo perturbações na métrica de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}$ . Trabalhos muito importantes foram feitos usando este método [132, 138]. Em particular, esses cálculos mostraram por exemplo a necessidade dos termos de derivadas superiores (7.3) para a renormalização e a forma geral da estrutura das correções quânticas finitas tanto para teoria com massa quanto para o caso sem massa.

Os diagramas terão a mesma estrutura daqueles em espaço-tempo plano mas com linhas externas de gravitação. Pela generalização do fator de integração, mesmo que não haja interação explícita entre termos de curvatura e de campos de matéria é garantido que depois de fazer a expansão em ordens de  $h_{\mu\nu}$ , cada diagrama divergente de um laço, por exemplo, no espaço-tempo plano, dá lugar a um número infinito de diagramas divergentes no espaço-tempo curvo. Isso acontece porque cada diagrama de um certo número fixo de laços representará uma nova expansão, mas agora no parâmetro  $h_{\mu\nu}$ , que deverá ser representado como linhas externas (pois a métrica não é quantizada) nos vértices de cada um dos infinitos diagramas para o número de laços que se estuda.

O problema se tornou a princípio extremamente mais complicado, mas se impusermos a covariância aos termos de correções quânticas [24, 91, 126] e começarmos a buscar quais as estruturas possíveis para estes termos por análise dimensional, então o número de diagramas relevantes se torna finito e o cálculo passa a ser possível. A vantagem desse método é que ele mostra que os contratermos em espaço-tempo curvo que removem as divergências são termos locais, o que está de acordo com os teoremas gerais da teoria de renormalização [36, 137]. Entretanto, a covariância não aparece de forma natural e, em alguns casos, os cálculos se tornam bastante complexos gerando grandes dificuldades na interpretação dos resultados.

Um método covariante de cálculo é a abordagem baseada na representação de momentos locais [20]. Em RG, a representação de momentos não é possível, de modo geral. A razão dessa restrição é que os diferentes pontos do espaço-tempo possuem os seus próprios espaços tangentes, e, portanto, exigem representações de momentos independentes. Ao mesmo tempo, usando as coordenadas normais de Riemann [112], é possível reescrever as grandezas importantes da teoria em torno de um ponto fixo  $P$  com coordenadas  $x_0^\mu$  e utilizar a representação de momentos neste ponto. A ideia da abordagem é baseada no uso de coordenadas geodésicas e na expansão das grandezas de interesse num ponto com coordenadas  $x_0^\mu$  em séries de potência em desvios  $x^\mu - x_0^\mu = x'^\mu$ . No caso de coordenadas normais de Riemann, os coeficientes desta expansão são componentes da tensor

de curvatura e de suas derivadas covariantes em um ponto  $P$ . Desta maneira, todas as quantidades correspondem ao mesmo ponto  $P$ , onde a representação de momentos é perfeitamente possível. O método é muito útil para calcular quantidades locais, como (por exemplo) contratermos necessários para renormalização de teoria de campos em espaço-tempo curvo. A localidade dos contratermos é garantida pelo teorema de Weinberg (veja discussão recente em [91]).

Entretanto, a expansão de Schwinger-Dewitt [43, 76] é o método mais prático para se realizar os cálculos de um laço e se obter as divergências em espaço-tempo curvo. Escreve-se  $\text{Tr} \ln \hat{H} = \ln \text{Det} \hat{H}$  em termos da representação de integral de tempo próprio

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}, \quad (7.9)$$

onde

$$\langle x | e^{-is\hat{H}} | x' \rangle = \hat{U}(x, x'; s) = \hat{U}_0(x, x'; s) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \quad (7.10)$$

$\hat{a}_k(x, x')$  são os coeficientes de Schwinger-Dewitt enquanto a expressão para  $\hat{U}_0(x, x'; s)$  tem a forma

$$\hat{U}_0(x, x'; s) = \frac{1}{(4\pi is)^{\frac{n}{2}}} D^{\frac{1}{2}}(x, x') \exp \left\{ -\frac{\sigma(x, x')}{2is} - im^2 s \right\}. \quad (7.11)$$

Nesta expressão  $\sigma(x, x')$  é a distância geodésica entre  $x$  e  $x'$  e

$$D(x, x') = \det [-\partial_\mu \partial_\nu \sigma(x, x')] \quad (7.12)$$

é o determinante de Van Vleck-Morette. Mais detalhes técnicos são encontrados em [43]. Há uma generalização para teorias quânticas mais complexas e também vários modelos com operadores mais complicados que (7.8) feitas em [19]. Uma revisão do método da ação efetiva e particular generalização da técnica de Schwinger-Dewitt foi feita recentemente em [134]. Não vamos discutir com detalhes aqui os procedimentos matemáticos envolvidos neste método, pois usaremos esta abordagem para os cálculos realizados nesta tese. Durante a obtenção dos resultados as particularidades desta técnica serão bem evidenciadas.

## 7.4 Divergências de um laço e renormalização

Com base no método de Schwinger-Dewitt, o limite ultravioleta corresponde ao limite mais baixo  $s = 0$  na integral de tempo próprio (7.9). A regularização desta integral pode

ser feita de várias maneiras, sendo que a mais comum é a regularização dimensional [19, 18]. O termo de maior interesse, relacionado às divergências logarítmicas, é o coeficiente  $a_2$ ,

$$\hat{a}_2 = \text{Tr} \lim_{x'x} a_2(x, x'). \quad (7.13)$$

As divergências logarítmicas definem quantidades importantes como as funções beta dos grupos de renormalização. A forma do coeficiente  $a_2$  para o setor de vácuo é [67]

$$\hat{a}_2 = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \beta_\Lambda + \beta_E R + \beta_1 C^2 + \beta_2 E + \beta_3 \square R + \beta_4 R^2 \right\}. \quad (7.14)$$

onde, usando a notação  $\beta_{1,2,3} = (\omega, b, c)/(4\pi)^2$ , temos

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \beta_\Lambda &= \frac{1}{2} N_2 m_s^4 - 2 N_f m_f^4, \\ (4\pi)^2 \beta_E &= N_s m_s^2 \left( \xi - \frac{1}{6} \right) + \frac{N_f m_f^2}{3}, \\ (4\pi)^2 \beta_4 &= \frac{N_s}{2} \left( \xi - \frac{1}{6} \right)^2, \\ (4\pi)^2 \beta_1 &= \frac{1}{120} N_s + \frac{1}{20} N_f + \frac{1}{10} N_v = \omega, \\ (4\pi)^2 \beta_2 &= -\frac{1}{360} N_s - \frac{11}{360} N_f - \frac{31}{180} N_v = b, \\ (4\pi)^2 \beta_3 &= \frac{1}{180} N_s + \frac{1}{30} N_f - \frac{1}{10} N_v = c. \end{aligned} \quad (7.15)$$

A partir dessas fórmulas é possível escrever a expressão para a parte divergente da ação efetiva de um laço do setor de vácuo para uma teoria que possui  $N_s$  escalares reais,  $N_f$  espinores de Dirac e  $N_v$  vetores sem massa,

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{n-4} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \beta_1 C^2 + \beta_2 E + \beta_4 R^2 + \beta_3 \square R + \beta_E R + \beta_\Lambda \right\}. \quad (7.16)$$

Na expressão anterior vemos que as divergências possuem a forma que condiz exatamente com os argumentos apresentados no início da seção anterior. Todos os termos de derivada superior com dimensão 4, o termo de Einstein-Hilbert e a constante cosmológica são necessários para se ter uma teoria em espaço-tempo curvo, com matéria, renormalizável. Além disso, pela lógica utilizada nesses mesmos argumentos, vemos que, em qualquer ordem na expansão em laços, as divergências de uma teoria de calibre em espaço-tempo curvo possuem a mesma forma da ação clássica não mínima com o termo de vácuo, ou seja, a mesma forma das expressões obtidas em um laço (compare as equações (7.3) e (7.16)). A única diferença são os coeficientes dos termos divergentes, que começam a depender dos acoplamentos em ordens superiores da expansão em laços (veja e.g. [72] para um exemplo de contas explícitas). Portanto a teoria formulada acima é multiplicativamente renormalizável em espaço-tempo curvo. Para cada ordem da expansão em laços,

os contratermos podem ser removidos renormalizando o conjunto completo de parâmetros da teoria (campos, constantes de acoplamento massas, parâmetro  $\xi$  e termos de vácuo). O ponto principal é que não há necessidade de se renormalizar a métrica externa.

## 7.5 Grupo de renormalização baseado no esquema-MS

Como usualmente é feito, a maneira mais simples de se introduzir as equações de grupo de renormalização é aquela baseada no esquema de renormalização de subtrações mínimas  $\overline{\text{MS}}$ . Há uma exposição completa de como este método pode ser aplicado a espaços curvos em [12]. Neste esquema, a função beta da carga efetiva  $C$  é definida como

$$\beta_C(\overline{\text{MS}}) = \lim_{n \rightarrow 4} \mu \frac{dC}{d\mu}. \quad (7.17)$$

A obtenção das funções beta num esquema dependente da massa em espaço-tempo plano, foi descrita por exemplo em [99]. Este esquema faz parte da abordagem efetiva à teoria quântica de campos. Tomando o operador de polarização, subtrai-se o contratermo no momentum  $p^2 = M^2$ , onde  $M$  é o ponto de renormalização. Depois, ao invés de usar a definição (7.17) para a função beta, usa-se

$$\beta_C = \lim_{n \rightarrow 4} M \frac{dC}{dM}. \quad (7.18)$$

Matematicamente, isso é equivalente a obter as correções quânticas da teoria que se está estudando e escrever separadamente os termos que corrigem a constante de acoplamento que será regularizada. Esses termos possuem a dependência explícita com os momentos externos do sistema e ao invés de usarmos a definição (7.17) para obter a função beta, calcula-se apenas a derivada

$$C p \frac{d}{dp} \quad (7.19)$$

dos fatores de forma dessa constante na ação efetiva de um laço obtida a partir da ação inicial.

## 7.6 Método de Heat-Kernel

A ação efetiva (7.8) pode ser expressa em termos de uma integração no tempo próprio do “heat-kernel”,

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} K(s). \quad (7.20)$$

Como é usualmente feito, a última expressão pode ser expandida em série de potências nas “curvaturas”,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$ ,  $\hat{P}$  e  $\hat{S}^{\mu\nu}$ . Em segunda ordem em curvaturas, a expressão tem a forma [1, 27]

$$\begin{aligned} \text{Tr } K(s) = & \frac{\mu^{4-2\omega}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \left\{ \hat{1} + s\hat{P} + s^2 [R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. + R f_2(-s\Box) R + \hat{P} f_3(-s\Box) R + \hat{P} f_4(-s\Box) \hat{P} + \hat{S}_{\mu\nu} f_5(-s\Box) \hat{S}^{\mu\nu}] \right\} \end{aligned} \quad (7.21)$$

onde,

$$\hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R + (\nabla_\mu \hat{h}^\mu) - \hat{h}^\mu \hat{h}_\mu,$$

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{1}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu. \quad (7.22)$$

Aqui,  $\omega$  é o parâmetro dimensional,  $\mu$  é um parâmetro arbitrário de renormalização com dimensão de massa e as funções  $f_i$  são dadas por

$$\begin{aligned} f_1(\tau) = \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{\tau^2}, \quad f_2(\tau) = \frac{f(\tau)}{288} + \frac{f(\tau) - 1}{24\tau} - \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{8\tau^2}, \\ f_3 = \frac{f(\tau)}{12} + \frac{f(\tau) - 1}{2\tau}, \quad f_4 = \frac{f(\tau)}{2}, \quad f_5 = \frac{1 - f(\tau)}{2\tau}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

onde  $f(\tau) = \int_0^1 d\alpha e^{\alpha(1-\alpha)\tau}$ ,  $\tau = -s\Box$ .

A obtenção deste resultado importante está fora dos objetivos desta tese, porque é tecnicamente muito complicado.

## 8 *Correções Quânticas de um laço para eletrodinâmica quântica em espaço-tempo curvo*

Trabalhando no ramo da teoria de EDQ, nosso objetivo é obter uma expressão para a função beta completa de um laço da carga do elétron. A palavra completa significa que a expressão final deve conter não só os casos já conhecidos dos limites infravermelho (IR) e ultravioleta (UV), mas também todas as faixas intermediárias de energia. Para fazer os cálculos, usamos o esquema de renormalização de subtração de momentos. Vamos seguir aqui a referência [64].

Embora o método de subtração mínimo de renormalização é muito eficiente no limite ultravioleta da teoria, ele não é totalmente confiável quando pretendemos estudar o regime infravermelho. Neste caso as massas das partículas passam a ser importantes, porque elas modificam as equações de grupo de renormalização. Um método alternativo, baseado em um esquema de renormalização mais físico (veja, e.g. [99], para uma introdução e mais referências), foi aplicado a problemas gravitacionais recentemente [67, 68]. O foco de atenção desses trabalhos foram o grupo de renormalização e o desacoplamento no setor de vácuo da teoria quântica de campos com um campo gravitacional externo clássico de fundo.

O grupo de renormalização físico pode ser formulado somente em uma teoria de gravitação linearizada. O desacoplamento em baixas energias do campo escalar [67], férmion e campos vetoriais (incluindo constituintes de QCD) [68] acontecem de maneira suave, de forma similar ao teorema de Appelquist e Carazzone em EDQ [2]. Uma vantagem do método desenvolvido em [67, 68] é que ele permite obter as fórmulas completas para fatores de forma e funções beta, além dos limites IR e UV.

Aqui, nós aplicamos o mesmo método para analisar o grupo de renormalização da carga elétrica. Em [136] há a descrição do método de equações de grupo de renormalização. Esse método é discutido em [36] e EDQ é considerada como exemplo e o cálculo da função beta é feito até o final em altas energias.

Para calcular a função beta, consideramos a teoria de EDQ e obtivemos as partes divergente e finita da ação efetiva de um laço no setor proporcional a  $F_{\mu\nu}^2$ . Em princípio, este cálculo pode ser feito utilizando diagramas de Feynman, mas já que a técnica de “heat-kernel” [1, 27] possibilita fazer os cálculos de maneira mais econômica, usamos este método da forma adaptada em [67, 68]. Os cálculos usando diagramas de Feynman podem ser encontrados em [130]. Os autores mostram o resultado para a função beta para a carga elétrica em termos do parâmetro  $p^2/m^2$ .

A análise qualitativa da correção quântica de um laço da parte gravitacional usando a aproximação de campo fraco na ação do eletromagnetismo foi feita em [46]. Já em [55] é feita uma discussão sobre as equações de grupo de renormalização para EDQ e uma comparação dessas equações obtidas por regularização dimensional e por cutoff. Em [111], a validade das identidades efetivas de Ward para EDQ sem massa em nível quântico é provada.

## 8.1 Ação induzida por anomalia para a métrica e campos eletromagnéticos de fundo

Vamos começar com uma pequena revisão sobre EDQ conforme sem massa. A teoria deve ser formulada em espaço-tempo curvo e portanto a ação depende do potencial eletromagnético  $A_\mu$ , do espinor de espinor de Dirac  $\psi$  e da métrica externa  $g_{\mu\nu}$ . Como estamos interessados na simetria conforme local, uma parametrização útil da métrica é

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma}, \quad \sigma = \sigma(x), \quad (8.1)$$

onde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  é a métrica com determinante fixo. Por exemplo, no caso da métrica cosmológica, usando coordenadas esféricas, temos

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag} \left( 1, -\frac{1}{1 - kr^2}, -r^2 \sin^2 \theta, -r^2 \right), \quad k = 0, \pm 1.$$

Separar  $\sigma(x)$  em (8.1) mostra-se ser uma passagem útil, especialmente devido à relação

$$\frac{2}{\sqrt{g}} g^{\mu\nu} \frac{\delta A[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{e^{-4\sigma}}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta A[\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0}, \quad (8.2)$$

que é válida para qualquer funcional  $A[g_{\mu\nu}]$  da métrica até para outros campos. Se substituirmos  $A[g_{\mu\nu}]$  pela ação de alguma teoria em espaço-tempo curvo o lado esquerdo da equação acima será o traço do tensor tensor momento-energia dessa teoria,  $T_{\mu}^{\mu}$ . Para remover o efeito de outras variáveis de campos presentes na ação, basta usar as equações de movimento correspondentes.

Se o traço do tensor momento-energia é nulo, podemos ver que o fator conforme se desacopla da matéria. Entretanto, a situação muda quando os efeitos quânticos são levados em conta. Neste caso, o efeito teórico correspondente é chamado de anomalia do traço [48] (em [49, 125] encontra-se uma revisão sobre este assunto e muitas outras referências relevantes).

A ação clássica do campo eletromagnético é <sup>1</sup>

$$S_{em} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (8.3)$$

e possui invariância conforme. Isso significa que a ação não muda se fizermos simultaneamente as seguintes transformações para métrica e o vetor  $A_{\mu}$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{2\sigma}, \quad A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} = A_{\mu}. \quad (8.4)$$

é importante notar que a diferença entre o peso conforme e a dimensão do vetor aparece devido à definição de  $A_{\mu}$  em espaço-tempo curvo

$$A_{\mu} = A_b e_{\mu}^b, \quad e_{\mu}^b e_{\nu}^a \eta_{ab} = g_{\mu\nu}, \quad e_{\mu}^b e_{\nu}^a g^{\mu\nu} = \eta^{ab}. \quad (8.5)$$

Estamos interessados nas correções para a ação (8.3) devido às correções quânticas do férmion

$$S_f = i \int d^4x \sqrt{g} \{ \bar{\psi} \gamma^{\mu} (\nabla_{\mu} - ieA_{\mu}) \psi - im \bar{\psi} \psi \}. \quad (8.6)$$

A regra para a transformação conforme para espinores é

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-3\sigma/2}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-3\sigma/2}.$$

A métrica sempre se transforma como em (8.4). Mas, vemos que a ação (8.6) é invariante conforme apenas quando a massa do espinor é nula,  $m = 0$ . Todos os férmions que interagem com o campo eletromagnético em (8.6) são massivos, entretanto, a relevância da massa na teoria depende da escala de energia. Por exemplo, se estivermos interessados nos efeitos quânticos dos férmions próximos a época do regime inflacionário, a energia

---

<sup>1</sup>neste capítulo adotamos a assinatura Euclidiana da métrica

cinética dos férmions reais e (mais importante ainda) dos fótons é muito maior que a massa dos férmions. Nesta situação, fazer um campo espinorial sem massa é uma aproximação legítima. Vamos, portanto, começar por este caso e tomar  $m = 0$ .

A obtenção da anomalia conforme na presença de uma métrica de fundo e campo eletromagnético já foi discutida antes [48, 49] e podemos usar esse resultado conhecido. A anomalia conforme pode ser usada para construir a parte finita da correção de um laço da ação efetiva do campo eletromagnético e da métrica de fundo

$$T_\mu^\mu = \frac{2}{\sqrt{g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \bar{\Gamma}_{ind}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \omega C^2 + bE + c\Box R + \tilde{\beta} F_{\mu\nu}^2 \right), \quad (8.7)$$

onde

$$C^2 = C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + (1/3)R^2$$

é o quadrado do tensor de Weyl e

$$E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R^2$$

é o integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet. Os coeficientes  $\omega$ ,  $b$ ,  $c$  dependem do número de escalares  $N_s$ , férmions  $N_f$  e vetores sem massa  $N_v$  da seguinte forma (veja a equação (7.15))

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{120} N_s + \frac{1}{20} N_f + \frac{1}{10} N_v, \\ b &= -\frac{1}{360} N_s - \frac{11}{360} N_f - \frac{31}{180} N_v, \\ c &= \frac{1}{180} N_s + \frac{1}{30} N_f - \frac{1}{10} N_v. \end{aligned} \quad (8.8)$$

E também,  $\tilde{\beta}$  depende do número de escalares com carga (no caso da eletrodinâmica escalar) e espinores. Como a aproximação de campos sem massa pode ser aplicada ao Universo muito novo, o número de campos que contribuem para esses coeficientes não é necessariamente restrito ao estudo da teoria EDQ unicamente.

A solução para a equação (8.7) é conhecida [118] (há também as generalizações para o campo de torção [14] e com campo escalar [122]). A possibilidade mais simples é parametrizar a métrica como em (8.1), separando o fator conforme  $\sigma(x)$  e reescrever a equação (8.7) usando (8.2). A solução para a ação efetiva é

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= S_c[\bar{g}_{\mu\nu}, A_\mu] + \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{\bar{g}} \left\{ \omega \sigma \bar{C}^2 + \tilde{\beta} \sigma \bar{F}_{\mu\nu}^2 + b\sigma(\bar{E} - \frac{2}{3}\Box\bar{R}) + \right. \\ &\quad \left. + 2b\sigma\bar{\Delta}_4\sigma - \frac{1}{12} \left( c + \frac{2}{3}b \right) [\bar{R} - 6(\bar{\nabla}\sigma)^2 - (\Box\sigma)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

onde  $S_c[\bar{g}_{\mu\nu}, A_\mu] = S_c[g_{\mu\nu}]$  é um funcional invariante conforme da métrica desconhecido e  $A_\mu$ , que atua como constante de integração para a equação (8.7). Todos os termos com barra são construídos com a métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , em particular

$$\bar{F}_{\mu\nu}^2 = \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}_{\alpha\beta} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\beta\nu}.$$

Além disso,  $\Delta_4$  é o operador de quartas derivadas conformalmente invariante atuando no escalar de dimensão nula

$$\Delta_4 = \square^2 + 2R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \square + \frac{1}{3} R_{;\mu} \nabla^\mu. \quad (8.10)$$

A solução (8.9) possui a vantagem de ser simples, mas uma desvantagem importante é que ela não é covariante ou, em outras palavras, ela não é expressa em termos da métrica original  $g_{\mu\nu}$ . Para obter a solução não local covariante e depois representá-la na forma local por meio de campos auxiliares vamos seguir o procedimento de [118, 123]. A presença dos termos  $\bar{F}_{\mu\nu}^2$  não requer nenhuma mudança essencial se comparado a consideração feita em [125], pois estes termos podem sempre ser tratados juntamente com os  $\bar{C}^2$ . Então apresentamos apenas o resultado final na forma não local, expresso por meio da função de Green  $G(x, y)$  do operador (8.10),  $\Delta_{4,x} G(x, y) = \delta(x, y)$ .

Usando as últimas fórmulas e (8.2) encontramos, para qualquer  $A(g_{\mu\nu}) = A(\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \int d^4x \sqrt{g(x)} A \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) \Big|_{g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}} &= \\ &= 4\sqrt{\bar{g}} \bar{\Delta}_4 A = 4\sqrt{g} \Delta_4 A. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Em particular, obtemos

$$\Gamma_{induzida} = \Gamma_\omega + \Gamma_b + \Gamma_c, \quad (8.12)$$

onde

$$\Gamma_\omega = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g(x)} \int d^4y \sqrt{-g(y)} \left( \omega C^2 + \tilde{\beta} F_{\mu\nu}^2 \right)_x G(x, y) \left( E - \frac{2}{3} \square R \right)_y, \quad (8.13)$$

$$\Gamma_b = \frac{b}{8} \int d^4x \sqrt{g(x)} \int d^4y \sqrt{g(y)} \left( E - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x, y) \left( E - \frac{2}{3} \square R \right)_y \quad (8.14)$$

$$\Gamma_c = -\frac{c + \frac{2}{3}b}{12(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g(x)} R^2(x). \quad (8.15)$$

As expressões não locais para a ação efetiva induzida pela anomalia podem ser apresentadas em uma forma local com o uso dos campos escalares auxiliares  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  [123]. O

resultado final, que possui termos eletromagnéticos extras em comparação com a expressão considerada anteriormente em [125], é

$$\begin{aligned}
\Gamma &= S_c[g_{\mu\nu}, A_\lambda] - \frac{3c+2b}{36(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g(x)} R^2(x) + \\
&+ \int d^4x \sqrt{g(x)} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_1 \Delta_4 \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_2 \Delta_4 \varphi_2 + \right. \\
&+ \varphi_1 \left[ \frac{\sqrt{-b}}{8\pi} \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{1}{8\pi\sqrt{-b}} \left( aC^2 + \tilde{\beta} F_{\mu\nu}^2 \right) \right] + \\
&+ \left. \frac{1}{8\pi\sqrt{-b}} \varphi_2 \left( aC^2 + \tilde{\beta} F_{\mu\nu}^2 \right) \right\}. \tag{8.16}
\end{aligned}$$

A forma covariante (8.16) é equivalente dinamicamente à forma não local (8.12). A definição completa do problema de Cauchy na teoria com ação não local requer a definição das condições de contorno para as funções de Green  $G(x, y)$ , que são independentes dos termos (8.13) e (8.14). A mesma situação é encontrada na expressão local em que devem ser impostas condições de contorno para os dois campos auxiliares  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Vamos separar a parte da ação efetiva (8.16) que possui relação direta com os termos eletromagnéticos e portanto representam uma correção de um laço para a ação clássica (8.3),

$$\begin{aligned}
\Gamma &= S_c[g_{\mu\nu}, A_\lambda] + \int d^4x \sqrt{g(x)} \left\{ \frac{\sqrt{-b}}{8\pi} \varphi_1 \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g(x)} \left[ \varphi_1 \Delta_4 \varphi_1 - \varphi_2 \Delta_4 \varphi_2 + \frac{1}{4\pi\sqrt{-b}} (\varphi_2 - \varphi_1) \tilde{\beta} F_{\mu\nu}^2 \right] \right\}. \tag{8.17}
\end{aligned}$$

É importante notar que a presença do termo independente de  $A_\mu$ ,  $\varphi_1 [E - (2/3)\square R]$ , é relevante pois apenas ele fornece a violação da simetria conforme local em toda a expressão. De fato, a conexão com a representação não covariante (8.9) é feita através das relações

$$\begin{aligned}
\sqrt{\bar{g}} \bar{\Delta}_4 &= \sqrt{g} \Delta_4 \quad \text{e} \\
\sqrt{g} \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) &= \sqrt{\bar{g}} \left( \bar{E} - \frac{2}{3} \square \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right). \tag{8.18}
\end{aligned}$$

Outra observação importante é que a dependência da métrica de  $F_{\mu\nu}^2$  na equação (8.17) aparece devido ao acoplamento de  $F_{\mu\nu}^2$  com com os campos auxiliares  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Essa dependência é não trivial pois esses dois campos possuem comportamentos diferentes devido às suas equações de movimento serem distintas e, além disso, a possuírem condições inicial e de contorno independentes.

Um exemplo de uso dos campos auxiliares  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  é que as diferentes escolhas para as condições de contorno deles permitem classificar os estados de vácuo do buraco negro semiclássico [9]. Um problema interessante seria explorar as possíveis condições iniciais e

de contorno para os campos auxiliares de tal forma que que elas pudessem influenciar no cálculo das sementes de campo magnético durante a inflação. Entretanto, este problema requer uma investigação detalhada do assunto, o que está além dos propósitos desta tese. No trabalho recente [65], o mesmo problema foi considerado através de uma abordagem diferente. Os resultados diferem apenas devido à escolha de parametrização dos campos auxiliares, todavia qualitativamente são similares.

## 8.2 Obtenção dos fatores de forma exatos em um laço

Nesta seção consideramos o caso de férmions massivos. Começamos com a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ i \bar{\psi} \left( \gamma^\mu \nabla_\mu - ie \gamma^\mu A_\mu - iM \right) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}. \quad (8.19)$$

Se aplicarmos a equação (7.7) a equação (8.19), teremos

$$\hat{H} = i\gamma^\mu \nabla_\mu + \hat{1}M + e\gamma^\nu A_\nu. \quad (8.20)$$

Mas para usar a equação (7.7) na ação (8.19), fazemos a seguinte transformação

$$\text{Trln}(\hat{H}) = \text{Trln}(\hat{H}\hat{H}^*) - \text{Trln}(\hat{H}^*) \quad (8.21)$$

e calculamos  $\bar{\Gamma}^{(1)}$  para o operador  $\hat{H}\hat{H}^*$ . Temos que fazer isso para ter uma estrutura com o operador  $\square$  descrito pela equação (7.8).

Nós usamos dois operadores  $\hat{H}^*$  diferentes para calcular as correções de um laço para a ação (8.19)

$$\hat{H}_1^* = -i\gamma^\mu \nabla_\mu + \hat{1}M - e\gamma^\nu A_\nu \quad \text{e} \quad \hat{H}_2^* = -i\gamma^\mu \nabla_\mu + \hat{1}M. \quad (8.22)$$

Estamos interessados em termos que podem contribuir para as correções de um laço para o termo proporcional a  $F_{\mu\nu}^2$ , então não temos que levar em conta o termo  $\text{Trln}(\hat{H}^*)$  na equação (8.21). Para ver isso, vamos notar que a única diferença entre os operadores  $\hat{H}$  e  $\hat{H}_1^*$  é que todos o temos com exceção do termo com massa possuem sinais opostos e, de acordo com [114], as contribuições desses dois operadores são iguais. Por outro lado,  $\hat{H}_2^*$  não possui termos que podem contribuir para  $F_{\mu\nu}^2$ .

Vamos primeiramente realizar todos os cálculos com o operador  $\hat{H}_1^*$ . Se multiplicarmos  $\hat{H}_1^*$  da equação (8.22) com (8.20) e compararmos o resultado com o operador da equação (7.8), teremos

$$\hat{P}_1 = -\frac{\hat{1}}{12}R - \frac{ie}{2}\gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} + \hat{1}M^2 \quad , \quad \hat{S}_{\mu\nu 1} = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha \gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu} + ie\hat{1}F_{\mu\nu}. \quad (8.23)$$

Como nosso interesse está apenas nos termos que podem ser proporcionais a  $F_{\mu\nu}^2$ , substituímos a equação (8.23) em (7.21) e o resultado em (7.20) e calculamos somente os termos com  $f_4$  e  $f_5$ . Usando as notações  $t = sm^2$ ,  $u = \tau/t = -\square/m^2$ ,

$$A = 1 - \frac{1}{a} \ln \left( \frac{2+a}{2-a} \right), \quad a^2 = \frac{4\square}{\square - 4m^2}. \quad (8.24)$$

e os resultados conhecidos [67]

$$\begin{aligned} C \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi^2} e^{-t} \frac{f(tu)}{t^\omega u} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 \right) - \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{18} \right] + \mathcal{O}(2-\omega), \\ C \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi^2} e^{-t} \frac{1}{t^\omega u} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{a^2 - 4}{4a^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + 1 \right) \right] + \mathcal{O}(2-\omega), \\ C \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi^2} e^{-t} t^{1-\omega} f(ut) &= \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + 2A \right) + \mathcal{O}(2-\omega), \end{aligned}$$

denotamos

$$C = \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{2-\omega} + \ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right).$$

Depois de alguma álgebra, obtemos uma expressão explícita para o termo  $\sim F_{\mu\nu}^2$  na ação efetiva

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} e^2 F_{\mu\nu} \left[ \frac{2}{3\epsilon} + k_1^{FF}(a) \right] F^{\mu\nu} \quad (8.25)$$

onde,

$$k_1^{FF}(a) = A \left( 2 - \frac{8}{3a^2} \right) - \frac{2}{9}. \quad (8.26)$$

Se expandirmos  $k_1^{FF}(a)$  em séries de potências no parâmetro  $a$  no limite infravermelho, quando  $a^2 \sim p^2/m^2 = -\square/m^2$ , e usarmos a seguinte relação para  $F_{\mu\nu}$

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad (8.27)$$

obtemos o termo já conhecido [44] na ação efetiva

$$-\frac{1}{120\pi^2} \nabla_\mu F^{\mu\nu} \nabla_\rho F^{\rho\nu}. \quad (8.28)$$

Se realizarmos os mesmos cálculos com o operador definido pela equação (8.22), obtemos

$$\hat{P}_2 = -\frac{\hat{1}}{12} R - \frac{ie}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} + \hat{1} M^2 + eM \gamma^\mu A_\mu + \hat{1} \frac{ie}{2} (\nabla^\mu A_\mu) - \hat{1} \frac{e^2}{4} A^\nu A_\nu (N-2),$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}_{\mu\nu 2} &= -\frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{ie}{2}\gamma^\alpha\gamma_\mu(\nabla_\nu A_\alpha) + \frac{ie}{2}\gamma^\alpha\gamma_\nu(\nabla_\mu A_\alpha) - \\
&- \frac{e^2}{4}\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\mu A^\alpha A^\beta + \frac{e^2}{4}\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu A^\alpha A^\beta, \tag{8.29}
\end{aligned}$$

onde  $N$  é o número de dimensões. Os cálculos dessa vez são mais complicados, mas análogos ao caso anterior. O resultado para a ação efetiva tem uma estrutura diferente da equação (8.25). Para o operador  $\hat{H}_2^*$ , os termos com  $f_3$ ,  $f_4$  e  $f_5$  da equação (7.21), em segunda ordem em  $A^\mu$ , em quatro dimensões, fornecem

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\sim A^2}^{(1)} &= -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} e^2 F_{\mu\nu} \left[ \frac{2}{3\epsilon} + k_2^{FF}(a) \right] F^{\mu\nu} + \nabla_\mu A^\nu \left( \frac{16A}{3a^2} \right) \nabla_\nu A^\mu + \\
&+ \nabla_\mu A^\mu \left[ A \left( \frac{8}{3a^2} - 2 \right) + \frac{2}{3} \right] \nabla_\nu A^\nu + R_{\mu\nu} \left( \frac{8A}{3a^2} \right) A^\nu A^\mu + A^\nu A^\mu \left( \frac{8A}{3a^2} \right) R_{\mu\nu} + \\
&+ A_\alpha A^\alpha \left[ A \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{3a^2} \right) \right] R + R \left[ A \left( \frac{4}{3a^2} - \frac{1}{3} \right) \right] A_\alpha A^\alpha \}, \tag{8.30}
\end{aligned}$$

onde

$$k_2^{FF}(a) = A \left( 1 + \frac{4}{3a^2} \right) + \frac{1}{9}. \tag{8.31}$$

Os dois fatores de forma (8.26) e (8.31) contém toda a informação sobre a dependência de escala do parâmetro  $e$ . É importante notar que as equações (8.25) e (8.30) possuem o termo de divergências igual. Os termos diferentes são os termos finitos não locais apesar de esse termo ser encontrado através do coeficiente  $\hat{a}_2$  da série de Schwinger - DeWitt em quatro dimensões ( $N = 4$ ).

Em duas dimensões, o termo de divergências é fornecido pelo coeficiente  $\hat{a}_1$ . Como  $\hat{a}_1$  é proporcional apenas a  $\int \hat{P}$  vemos que a contribuição para a renormalização em 2 dimensões é a mesma tanto para (8.23) quanto para (8.29). Vemos ainda que o coeficiente  $\hat{a}_1$  é igual apenas em  $d = 2$ . Vejamos o que acontece com coeficiente  $\hat{a}_2$ . Através de (8.23), encontramos

$$\begin{aligned}
\int d^N x \sqrt{g} a_2^1 &= \int d^N x \sqrt{g} \left\{ \frac{N}{6} e^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{N}{288} R^2 - \frac{N}{12} R M^2 \right. \\
&- \left. \frac{N}{96} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{N}{2} M^4 \right\}. \tag{8.32}
\end{aligned}$$

Já a partir de (8.29), o resultado é o seguinte

$$\begin{aligned}
\int d^N x \sqrt{g} a_2^2 &= \int d^N x \sqrt{g} \left\{ \frac{N^2}{12} e^2 (\nabla^\mu A^\nu)(\nabla_\mu A_\nu) - \frac{N}{3} e^2 (\nabla^\mu A^\nu)(\nabla_\nu A_\mu) + \right. \\
&+ \frac{N}{288} R^2 - \frac{N}{12} R M^2 - \frac{N}{96} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{N}{2} M^4 + \frac{N(N-4)}{24} A^\mu A_\mu R e^2 - \\
&- \left. \frac{N(N-4)}{2} A^\mu A_\mu M^2 e^2 + \frac{8N-6N^2+N^3}{48} A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu e^4 \right\}. \tag{8.33}
\end{aligned}$$

Podemos ver pelos três últimos termos de (8.33) que esta equação só é igual a (8.32) e possui invariância de calibre quando  $N = 4$ . Em 6 dimensões quem fornecerá o termo de divergência será o coeficiente  $\hat{a}_3$ . Nas próximas seções poderemos observar que, para ambos os casos, o resultado também está de acordo. Os cálculos para este coeficiente serão discutidos mais a frente neste trabalho.

### 8.3 Os coeficientes $\hat{a}_n$

Para entender melhor a origem dessa diferença entre os resultados dos dois fatores de forma calculados na seção anterior, vamos obter todos os termos de terceira ordem nas ‘‘curvaturas’’.

A palavra curvaturas aqui representa os termos  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$ ,  $\hat{P}$  e  $\hat{S}_{\mu\nu}$ . Estes termos possuem a mesma dimensão dos termos com dois  $F^{\mu\nu}$  e um operador  $\square$ . Podemos calcular esses termos através do termo que contribui para  $\bar{\Gamma}^{(1)}$  devido ao coeficiente  $A_3$  da série de Schwinger - DeWitt [66, 1]

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{ren}}^{(1)} &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \frac{1}{6m^2} \int d^N x \sqrt{g} \text{str} \left\{ \hat{P}^3 + \frac{1}{30} \hat{P} (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \square R) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \hat{P} \hat{S}_{\mu\nu} \hat{S}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \hat{P} \square \hat{P} - \frac{1}{10} \hat{J}_\mu \hat{J}^\mu + \\ &\left. + \frac{1}{30} (2 \hat{S}^\mu{}_\nu \hat{S}^\nu{}_\alpha \hat{S}^\alpha{}_\mu - 2 R^\mu{}_\nu \hat{S}_{\mu\alpha} \hat{S}^{\alpha\nu} + R^{\mu\nu\alpha\beta} \hat{S}_{\mu\nu} \hat{S}_{\alpha\beta}) + \bar{R} \right\}, \end{aligned} \quad (8.34)$$

onde  $\hat{J}_\mu = \nabla_\alpha \hat{S}^\alpha{}_\mu$  e  $\bar{R}$  são os termos que dependem explicitamente apenas de tensores de curvatura, que não nos interessam neste trabalho.

Se substituirmos  $\hat{P}_1$  e  $\hat{S}_{\mu\nu 1}$  da equação (8.23) em (8.34), encontramos em quatro dimensões, em segunda ordem em  $A_\mu$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \int d^4 x \sqrt{g} \frac{e^2}{90} (2 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - 26 R_{\alpha\nu} F^{\mu\nu} F_\mu{}^\alpha + \\ &+ 24 \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha + 5 R F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (8.35)$$

que é o mesmo resultado encontrado em [44]. Com este resultado podemos fazer uma verificação interessante do fator de forma  $k_1^{FF}(a)$ . Vamos expandi-lo até a primeira ordem no operador  $\square$ . Teremos

$$k_1^{FF}(a) = A \left( 2 - \frac{8}{3a^2} \right) - \frac{2}{9} \simeq -\frac{2}{15} \frac{\square}{m^2}, \quad (8.36)$$

que nos fornece um termo em  $\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)}$  da seguinte forma

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4 x \sqrt{g} \frac{e^2}{15} F^{\mu\nu} \frac{\square}{m^2} F_{\mu\nu}. \quad (8.37)$$

Se usarmos a seguinte relação em (8.37),

$$\int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -2 \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha + \right. \\ \left. + 2 R_{\alpha\nu} F^{\mu\nu} F_\mu{}^\alpha - R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \right\}, \quad (8.38)$$

podemos ver que

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} \sim -\frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{2e^2}{15} \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha = \\ = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{e^2}{90} (24 \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha), \quad (8.39)$$

que é o terceiro termo da equação (8.35), como deveria ser. Agora, se substituirmos  $\hat{P}_2$  e  $\hat{S}_{\mu\nu 2}$  da equação (8.29) em (8.34), em quatro dimensões encontramos, em segunda ordem em  $A_\mu$ , desprezando os termos com derivadas dos tensores de curvatura,

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 2}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \int d^4x \sqrt{g} e^2 \left\{ \frac{1}{60} [\nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha - (\nabla^\nu \nabla_\nu A^\alpha)(\nabla_\mu \nabla^\mu A_\alpha) - \right. \\ - 2(\nabla^\mu \nabla_\nu A^\nu)(\nabla_\alpha \nabla^\alpha A_\mu) + (\nabla_\alpha \nabla_\mu A^\beta)(\nabla_\beta \nabla^\mu A^\alpha) - (\nabla^\beta \nabla_\mu A_\alpha)(\nabla_\beta \nabla^\mu A^\alpha)] + \\ + \frac{1}{24} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{1}{12} (\nabla_\mu A^\mu) \square (\nabla_\nu A^\nu) + \frac{1}{36} R (\nabla_\mu A^\mu) (\nabla_\nu A^\nu) - \\ - \frac{1}{9} (\nabla_\mu A^\mu) R_{\alpha\beta} (\nabla^\beta A^\alpha) + \frac{2}{45} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{45} R_{\mu\nu\alpha\beta} (\nabla^\alpha A^\nu) (\nabla^\mu A^\beta) - \\ - \frac{1}{90} R_{\mu\nu} F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu - \frac{2}{45} R_{\mu\nu} (\nabla^\alpha A^\mu) (\nabla_\alpha A^\nu) - \frac{1}{36} R R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \\ + \frac{1}{45} R_{\alpha\mu} R^\alpha{}_\nu A^\mu A^\nu - \frac{1}{18} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\beta} A^\alpha A^\nu + \frac{1}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\lambda\nu\alpha\beta} A^\mu A_\lambda + \\ \left. + \frac{1}{144} E A^\mu A_\mu - \frac{1}{72} R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}, \quad (8.40)$$

onde

$$E = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2, \quad (8.41)$$

que é o integrando do termo de Gauss-Bonnet.

Como fizemos no caso anterior, vamos expandir o fator de forma  $k_2^{FF}(a)$  até a primeira ordem no operador  $\square$ , que nos fornecerá um termo em  $\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)}$  da seguinte forma

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 2}^{(1)} \sim -\frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{e^2}{10} A^\mu \frac{\square^2}{m^2} A_\mu. \quad (8.42)$$

Agora se tomarmos a equação (8.40) no espaço-tempo plano o coeficiente do termo proporcional a  $A^\mu \square^2 A_\mu$  é o mesmo que aparece na equação (8.42). É importante notar que os coeficientes dos termos  $A^\mu \square^2 A_\mu$  nas equações (8.39) e (8.42) são diferentes em 4 dimensões. Eles são iguais em 6 dimensões como veremos na próxima subseção.

## 8.4 $A_3$ em $N$ dimensões

Vamos realizar o mesmo procedimento anterior em  $N$  dimensões. Para  $\hat{H}_1^*$ , encontramos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} = & -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \int d^N x \sqrt{g} \frac{N e^2}{360} (2 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - 26 R_{\alpha\nu} F^{\mu\nu} F_\mu^\alpha + \\ & + 24 \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu^\alpha + 5 R F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (8.43)$$

e para  $\hat{H}_2^*$ , desprezando os termos com derivadas de tensores de curvatura, o resultado tem a forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{ren } 2}^{(1)} = & \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \int d^4 x \sqrt{g} e^2 \left\{ \frac{1}{60} \left[ \frac{N}{4} \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu^\alpha - \frac{N}{4} (\nabla_\nu \nabla^\nu A^\alpha) (\nabla_\mu \nabla^\mu A_\alpha) - \right. \right. \\ & - \frac{N}{2} (\nabla^\mu \nabla_\nu A^\nu) (\nabla_\alpha \nabla^\alpha A_\mu) + N \left(1 - \frac{N}{4}\right) A^\mu \square^2 A_\mu + \frac{N}{4} (\nabla_\alpha \nabla_\mu A^\beta) (\nabla_\beta \nabla^\mu A^\alpha) - \\ & - \frac{N}{4} (\nabla^\beta \nabla_\mu A^\alpha) (\nabla_\beta \nabla^\mu A_\alpha) \left. \right] - \frac{N}{48} (\nabla_\mu A^\mu) \square (\nabla_\nu A^\nu) + \frac{N}{144} R (\nabla_\mu A^\mu) (\nabla_\nu A^\nu) - \\ & - \frac{N}{36} R_{\alpha\beta} (\nabla_\mu A^\mu) (\nabla^\beta A^\alpha) + \frac{N}{90} R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - \frac{N}{180} R_{\mu\nu\alpha\beta} (\nabla^\alpha A^\nu) (\nabla^\mu A^\beta) - \\ & - N \left(1 - \frac{N}{4}\right) \frac{1}{60} R_{\mu\nu\alpha\beta} (\nabla^\mu A^\alpha) (\nabla^\nu A^\beta) - \frac{N}{72} R_{\mu\nu} (\nabla^\alpha A^\mu) (\nabla_\alpha A^\nu) + \\ & + \frac{N}{360} R_{\mu\nu} (\nabla^\alpha A^\nu) (\nabla^\mu A_\alpha) + N(N-5) \frac{1}{360} R_{\mu\nu} (\nabla^\mu A^\alpha) (\nabla^\nu A_\alpha) + \\ & + \frac{N}{360} R_{\mu\nu} (\nabla^\nu A^\alpha) (\nabla_\alpha A^\mu) + \frac{N}{96} F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} - N(N-5) \frac{1}{288} R (\nabla^\mu A^\nu) (\nabla_\mu A_\nu) - \\ & - \frac{N}{288} R (\nabla^\mu A^\nu) (\nabla_\nu A_\mu) - \frac{N}{192} R F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{N}{144} R R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \\ & + \frac{N}{180} R_{\lambda\mu} R^\lambda{}_\nu A^\mu A^\nu - \frac{N}{72} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\beta} A^\alpha A^\nu + \frac{N}{720} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\lambda\nu\alpha\beta} A^\mu A_\lambda + \\ & + \frac{6N - N^2}{1152} R^2 A^\lambda A_\lambda + \frac{9N - N^2}{720} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} A^\lambda A_\lambda - \\ & - \frac{18N - 7N^2}{5760} R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} A^\lambda A_\lambda \left. \right\}. \end{aligned} \quad (8.44)$$

É bastante difícil de realizar a análise necessária para esta expressão. Aparentemente, ela não é invariante de calibre e é diferente de (8.44). Para fazer a análise completa, precisamos de responder às duas perguntas: (i) Como podemos mostrar que as duas expressões para  $a_3$  são distintas ou iguais em alguma dimensão particular? (ii) Essas duas expressões são iguais em qualquer dimensão?

Vamos começar fazendo o teste mais simples. Consideremos a propagação da parte puramente transversa de  $A_\mu$ , o que significa tomar os termos que são proporcionais a  $A_\mu \square^2 A^\mu$  em ambas as expressões. É importante notar que esses termos não podem ser afetados pela possível violação da invariância de calibre na expressão (8.44), logo este teste particular é independente do restante.

Para comparar os dois resultados, primeiramente vamos tomar a equação (8.44) no espaço-tempo plano e usar a seguinte relação

$$\int dx F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu} = -2 \int dx A^\mu \square^2 A_\mu - 2 \int dx (\nabla_\mu A^\mu) \square (\nabla^\nu A_\mu). \quad (8.45)$$

Para que a equação (8.44) possa ser escrita apenas em termos de  $F^{\mu\nu} \square F_{\mu\nu}$ , ou seja, ser invariante de calibre, os coeficientes dos termos  $A^\mu \square^2 A_\mu$  e  $(\nabla_\mu A^\mu) \square (\nabla^\nu A_\mu)$  devem ser iguais. Isso só acontece quando  $N = 6$ . Além disso, o teste que nos propusemos a fazer também apresenta o mesmo resultado, ou seja, os coeficientes do termo  $A^\mu \square^2 A_\mu$  em (8.43) e (8.44) somente são iguais, também, em  $N = 6$ . Essa informação responde ao item (ii), já que inferimos dela que fora de 6 dimensões as duas expressões para  $a_3$  são diferentes.

É difícil responder prontamente à questão (i), inclusive não conseguimos mostrar completamente que as duas expressões são iguais em  $d = 6$  para uma métrica de fundo arbitrária. Entretanto, existem fortes indícios de que este é o caso. Os argumentos a favor desta conclusão advêm da análise feita para os termos proporcionais a  $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$  e o estudo de métricas particulares. Consideremos o espaço-tempo de de Sitter para testarmos a igualdade das equações (8.43) e (8.44). Mesmo neste caso não é fácil trabalhar com (8.44), mas podemos fazer uma análise qualitativa da expressão para  $a_{3,2}$ . Primeiramente, já sabemos que os termos sem curvatura escalar são os mesmos em ambas as expressões. Agora, se usarmos as seguintes relações, satisfeitas no espaço-tempo De Sitter em 6 dimensões,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R}{30} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}), \quad R_{\mu\nu} = \frac{R}{6} g_{\mu\nu}, \quad (8.46)$$

a equação (8.43) tem a forma

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2 m^2} \int d^6 x \sqrt{g} e^2 \left\{ -\frac{1}{5} \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu^\alpha - \frac{1}{150} R F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}. \quad (8.47)$$

Como próximo passo vamos considerar os termos proporcionais a curvatura escalar, que podem ser representados simbolicamente como  $RF^2$ . Para fazer a análise destes termos devemos levar em conta também os termos proporcionais a derivadas das componentes do tensor de curvatura em (8.44), que identificamos como  $A^2 DR$ . Se integrarmos por partes estes termos, eles podem passar a contribuir para estruturas do tipo  $R^2 A^2$ . Já que esses termos podem ser escritos como termos de derivadas totais no espaço-tempo de de Sitter, podemos introduzi-los em  $a_3^{(2)}$  com um coeficiente arbitrário. Para fazer a escolha correta do coeficiente, devemos calcular os termos  $R^2 A^2$  que vêm diretamente da expressão (8.44) e escolher os coeficientes dos termos  $A^2 DR$  que (integrados por partes)

cancelam estes termos  $R^2 A^2$ . Depois disso, os termos proporcionais a  $RF\bar{F}$ , gerados pela mesma integração por partes, somam-se àqueles que vem diretamente de (8.44) e finalmente tornam-se o mesmo de (8.47). Os detalhes desta consideração incluem fórmulas extremamente grandes e nós não as mostramos aqui.

## 8.5 A anomalia multiplicativa

Vamos analisar cuidadosamente os resultados que foram obtidos nas últimas três seções, seguindo a abordagem usada em [63]. A ação efetiva completa de um laço foi obtida de duas maneiras e os resultados são expressos pelas equações (8.25) e (8.30).

Como podemos entender essa diferença nos resultados que vem dos dois esquemas de cálculo, baseados nos dois operadores auxiliares  $\hat{H}_1^*$  e  $\hat{H}_2^*$ ? Para responder esta pergunta, vamos notar que a introdução desses operadores pode ser vista de duas forma distintas.

Primeiramente, podemos interpretá-la como uma mudança de variáveis na integral de caminho (7.5), ou seja, tomando  $\psi = \hat{H}^* \chi$ , onde  $\chi$  é uma nova variável quântica. Neste caso, o jacobiano dessa transformação deve ser levado em conta e será relacionado a uma outra integral de caminho, similar a (7.5), que para o segundo caso, por exemplo, terá a forma

$$\int D\chi D\bar{\chi} \exp \left\{ i \int d^d x \sqrt{g} \bar{\chi} \hat{H}_2^* \chi \right\}. \quad (8.48)$$

Essa integral não depende do potencial eletromagnético, apenas da métrica e é, portanto, invariante sobre transformações de calibre. Entretanto, o resultado que obtemos depois de fazer a mudança de variáveis é completamente diferente

$$\int D\chi D\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^d x \sqrt{g} \bar{\psi} (\hat{H} \cdot \hat{H}_2^*) \chi \right\}, \quad (8.49)$$

já que essa integral não possui invariância de calibre e portanto o fato de o resultado da mudança de variáveis também não a possuir já era esperado.

Outra possibilidade se compreender a operação de multiplicar por um operador auxiliar é através da conhecida relação

$$\text{Ln Det} (\hat{H}^* \cdot \hat{H}_2^*) = \text{Ln Det} \hat{H}^* + \text{Ln Det} \hat{H}_2^*. \quad (8.50)$$

Os dois termos do lado direito são invariantes de calibre, já que o primeiro é um resultado de uma integração funcional invariante de calibre e o segundo simplesmente não se transforma, pois não depende nem de  $A_\mu$  nem do campo espinorial. Logo, como o

lado esquerdo desta equação não satisfaz a essa transformação, a consequência é que a “identidade” (8.50) é violada. A relação similar a (8.50)

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B,$$

como já foi dito na introdução, pode ser demonstrada para matrizes quadradas de tamanho finito. Entretanto, a prova não pode ser generalizada para operadores diferenciais, os quais possuem representações matriciais de tamanho infinito. De fato, vários matemáticos e físicos, por um bom tempo, buscaram um exemplo em que essa relação não seria satisfeita [90, 51], usando a técnica da regularização- $\zeta$  [52]. Essa possível violação foi chamada de anomalia multiplicativa. Contudo, os resultados desses trabalhos foram vistos com um ceticismo justificável [53, 45, 102] já que, de fato, é difícil de se fazer a distinção desse efeito da ambiguidade usual na renormalização.

Vimos, através das equações (8.32) e (8.33) que os termos divergentes, que podem ser obtidos diretamente do coeficiente  $a_2$  da série de Schwinger-Dewitt são iguais apenas quando o número de dimensões é quatro. Já a parte não local das ações efetivas são sempre diferentes (8.26) e (8.31). Entretanto se expandimos (8.26) em primeira ordem em  $\square$  o coeficiente é o mesmo encontrado para o termo correspondente obtido através do termo  $a_3$  da série de Schwinger-Dewitt. Como os dois métodos de cálculos são independentes, essa é uma forte verificação deste resultado. A situação é análoga para o fator de forma (8.31) expandido e seu correspondente termo  $a_3$ .

Mas o ponto mais interessante é que estes dois coeficientes que são diferentes em quatro dimensões ( $A_\mu \square^2 A^\mu$  para  $H_1^*$  e  $H_2^*$  em primeira ordem em  $\square$ ) são iguais apenas em seis dimensões. Também já foi mencionado que a contribuição do termo  $\hat{a}_1 = \int \sqrt{g} \hat{P}$  para os dois casos estudados só serão iguais em duas dimensões. Para ver isso basta comparar as expressões de  $\hat{P}$  em (8.23) e (8.29).

Além disso, temos argumentos fortes para acreditar que a situação qualitativa de  $a_3$  é mesma dos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$ . Todos esses coeficientes são universais (independentes de esquema) nas dimensões 2, 4 e 6, correspondentemente. E, ao mesmo tempo, eles são essencialmente dependentes do esquema de cálculo em outras dimensões. Pode-se ver então que este fato implica que, em qualquer dimensão, as divergências logarítmicas são universais e invariantes de calibre. Por outro lado, as divergências quadradas e quartas, assim como as partes finitas, são dependentes do esquema de cálculo e, no caso do método baseado em  $\hat{H}_2^*$ , elas não são invariantes de calibre. Claramente, esta característica não contradiz a invariância de calibre para a renormalização da teoria, mas mostra que os resultados finitos são dependentes do esquema de cálculo.

Devemos lembrar que a ação efetiva, em qualquer dimensão particular, é uma soma (veja a equação (7.21)) da série de termos proporcionais a  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$ ,  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{a}_3$ , etc. Portanto, podemos concluir que a ação efetiva é dependente do esquema em uma dimensão particular. A dependência de esquema de cálculo que estudamos aqui fundamentam o exemplo explícito da anomalia multiplicativa.

Já que as correções quânticas no setor eletromagnético possuem uma ambiguidade, é possível formular questão sobre qual dos dois esquemas fornece um resultado correto. Deve ser dada vantagem para o método baseado no operador  $\hat{H}_1^*$ , por ser mais natural e preservar a invariância de calibre. Entretanto é importante estar ciente da ambiguidade que representa uma nova manifestação de uma propriedade geral da ação efetiva.

## 8.6 Grupo de Renormalização, baixas energias e de-sacoplamento

Vamos agora utilizar o procedimento descrito na seção 7.5 para obter a função beta dependente da massa para a carga elétrica. Se aplicarmos esse procedimento ao fator de forma  $k_1^{FF}(a)$  do termo  $F_{\mu\nu}^2$ , a função beta no esquema dependente da massa tem a forma

$$\beta_e^1 = -\frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{48a - 20a^3 + 3(a^2 - 4)^2 \ln\left(\frac{2-a}{2+a}\right)}{6a^3}, \quad (8.51)$$

que é o resultado geral para a função beta válida em qualquer escala. Como casos especiais, podemos tomar o limite UV,  $p^2 \gg m^2$  ou  $a \rightarrow 2$

$$\beta_e^{1UV} = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{p^2}\right), \quad (8.52)$$

que é um resultado bem conhecido [36] e também o limite IR,  $p^2 \ll m^2$

$$\beta_e^{1IR} = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \cdot \frac{4}{15} \frac{M^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{m^4}\right). \quad (8.53)$$

Esta equação é o famoso teorema de Appelquist e Carazzone [2]. Ela foi obtida como caso particular da função beta (8.51) que é válida em qualquer regime de energia. Cálculos similares para o fator de forma  $k_2^{FF}(a)$  fornecem

$$\beta_e^2 = -\frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{-4a(12 + a^2) + 3(-16 + a^4) \ln\left(\frac{2-a}{2+a}\right)}{12a^3}, \quad (8.54)$$

No limite UV  $p^2 \gg m^2$ , a função beta está de acordo com o primeiro resultado (8.52), enquanto que no limite IR  $p^2 \ll m^2$ , obtemos

$$\beta_e^{2IR} = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{5} \frac{M^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{m^4}\right). \quad (8.55)$$

Como podemos ver pelas expressões (8.53) e (8.55), há uma diferença na forma que a função beta vai para zero no limite IR. Para discutir esse fato, vamos tomar a diferença entre os dois fatores de forma  $k_1^{FF}$  e  $k_2^{FF}$

$$\Delta F^{FF} = k_1^{FF}(a) - k_2^{FF}(a) = A\left(1 - \frac{4}{a^2}\right) - \frac{1}{3} \quad (8.56)$$

e expandir  $\Delta F^{FF}$  em séries de potências em  $a$ . No limite IR, temos  $a^2 \sim p^2/m^2 = -\square/m^2$ , então

$$\Delta F^{FF} = \frac{1}{30} \cdot \frac{\square}{m^2} + \mathcal{O}(p^3/m^3). \quad (8.57)$$

Para saber qual poderia ser a influência dessa diferença na ação efetiva, podemos considerar quais seriam os novos termos nas equações de movimento, gerados pelo termo

$$F^{\mu\nu} \left( \frac{1}{30} \cdot \frac{\square}{m^2} \right) F_{\mu\nu}. \quad (8.58)$$

Como esse termo é proporcional ao operador  $\square$ , se considerarmos apenas o espaço-tempo plano, usamos a equação (8.27) para obter um termo proporcional a  $(\nabla_\mu F^{\mu\nu})^2$ . Este não influenciará as equações de movimento em  $\mathcal{O}(e^2)$  como foi mostrado em [44]. Entretanto, a situação se modifica quando levamos em conta o espaço-tempo curvo. Neste caso, encontramos uma diferença no resultado do teorema de Appelquist e Carazzone [2] para as duas funções beta calculadas que é proporcional a curvaturas, através da relação

$$\begin{aligned} \int d^4x F^{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} &= -2 \int d^4x \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\lambda F_\mu{}^\lambda + 2 \int d^4x R_{\lambda\nu} F^{\mu\nu} F_\mu{}^\lambda - \\ &- \int d^4x R_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Essa discrepância é confirmada também pelo cálculo do coeficiente  $\hat{a}_3$  descrito na seção anterior. Outro ponto importante que deve ser enfatizado é que, embora nossos dois resultados para função beta (8.51) e (8.54) tenham formas explícitas diferentes do resultado que havia sido obtido anteriormente em [130], todos concordam no limite UV.

## 8.7 Dependência da carga com a energia

Vamos agora estudar a variação da carga elétrica com a escala de energia. A diferença nas expressões para os fatores de forma  $k_1^{FF}(a)$  e  $k_2^{FF}(a)$  e, conseqüentemente, para as funções beta (8.51) e (8.54) significa que a carga efetiva pode ter comportamento diferente para os métodos de cálculos distintos (aquele baseado no operador  $\hat{H}_1^*$  e o que se fundamenta em  $\hat{H}_2^*$ ). Além disso, esperamos que possa haver uma discrepância para essa

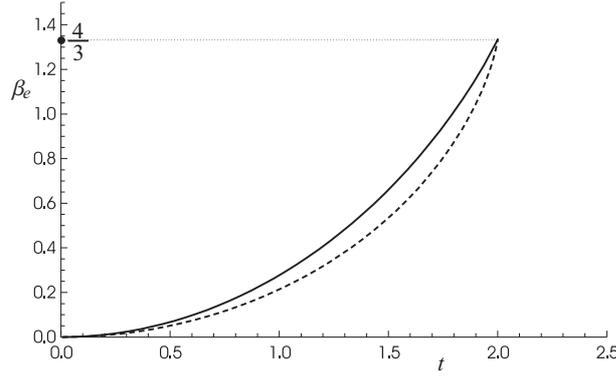


Figura 1: Funções beta que correspondem aos fatores de forma  $k_1$  (linha contínua) e  $k_2$  (linha tracejada). O eixo vertical é construído em unidades de  $e^3/(4\pi)^2$ .

dependência com a energia entre a o resultado obtido pelo esquema de subtrações mínimo e o método de subtrações de momentos, especialmente na região de baixas energias.

Para investigar a renormalização das quantidades correspondentes, no esquema físico, vamos aplicar o operador  $-epd/dp$  a  $k_{1,2}^{FF}(a)$  com  $\square$  substituído por  $-p^2$ . Fazendo isso, encontramos novamente as expressões para as funções beta que agora serão apresentadas de maneira mais conveniente

$$\begin{aligned} -\frac{(4\pi)^2}{e^3}\beta_1 &= p\frac{d}{dp}k_1^{FF}(a) = \frac{d}{dt}k_1^{FF}(a) \quad e \\ -\frac{(4\pi)^2}{e^3}\beta_2 &= p\frac{d}{dp}k_2^{FF}(a) = \frac{d}{dt}k_2^{FF}(a). \end{aligned} \quad (8.60)$$

Aqui  $t$  é um parâmetro adimensional definido por  $t = \ln(p/m)$ .

O limite UV é alcançado quando  $p \gg m$ , ou de forma equivalente  $t \gg 1$ , enquanto para o limite teremos as relações inversas  $p \ll m$  e  $t \ll 1$ . Com a ajuda do programa de computador *Mathematica*, pode-se calcular explicitamente as funções beta acima e integrá-las. Para ilustrar este resultado, plotamos as funções beta para ambos os casos como função do parâmetro  $a$  (veja a figura 8.1).

A integração da equação de renormalização correspondendo a  $\beta_1$ , que fornece a curva que mostra a dependência da carga com a energia no esquema físico, também pode ser feita usando o programa *Mathematica*. Para fazermos a comparação, plotamos na figura 8.2 esta curva junto com a curva obtida pelo esquema de subtrações mínimo, para grandes valores de  $t$ , onde um pólo de Landau aparece. Não é complicado agora visualizar uma diferença entre os dois casos que se mostram praticamente iguais.

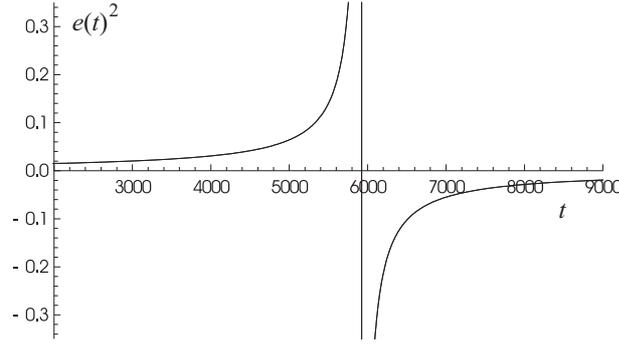


Figura 2: As curvas para o parâmetro  $e(t)^2$  parecem coincidir para os esquemas subtrações mínimo e físico (para este usamos o procedimento correspondente ao fator de forma  $k_1$ ). Entretanto, ambas as curvas são ligeiramente diferentes, assim como o pólo de Landau (veja a próxima figura). Usamos aqui  $e(0) = 0.1$ .

Entretanto a curva obtida pelo esquema físico é deslocada um pouco para a direita. Essa diferença fica mais clara se olharmos com mais detalhes para a região do gráfico onde  $t \sim 5900$ , que é mostrada na figura 8.3. Nesta figura, Pode-se notar duas linhas verticais (a tracejada para o esquema de subtrações mínimo), indicando os pólos de Landau. Elas são, entretanto, muito próximas, já que os valores para  $t$  diferem menos de 0.02%. A situação é similar a que foi descrita antes para a o caso do campo escalar [109]. A dependência da carga elétrica efetiva com a energia é mostrada na figura 8.4, onde plotamos  $e^{-2}$  versus  $t = \ln(p/m)$ . O gráfico para o esquema de subtrações mínimo é a linha reta, como deveria ser. Já o método de subtrações de momentos mostra duas linhas retas nos limites assintóticos (IR e UV) com uma transição suave na região intermediária. Pode-se notar claramente que as duas curvas são similares na região UV, ou seja, para valores de  $t$  para os quais  $t \gg 1$  (de fato, isso já é válido desde  $t \geq 2$ ).

Todavia, mesmo para o limite UV os dois gráficos não coincidem e são representados por duas retas paralelas com pontos iniciais diferentes (em  $t = 0$ , em que temos  $p = \mu_0$  e  $\mu = \mu_0$ ). O efeito do deslocamento ultravioleta efetivo não aparece somente em EDQ, mas também em QCD e setores eletrofracos do modelo padrão. Este efeito, apesar de ser bem pequeno, pode ter aplicações interessantes. Por exemplo, pode-se tomar o deslocamento dos valores iniciais das constantes de acoplamento quando se calcula os limites UV nas teorias de calibre via grupo de renormalização (veja, por exemplo, [38]). Os cálculos desse tipo são de certa forma relevantes, ainda mais se levarmos em conta a perspectiva da física do LHC. O efeito das massas dos campos quânticos podem, em princípio, mudar a

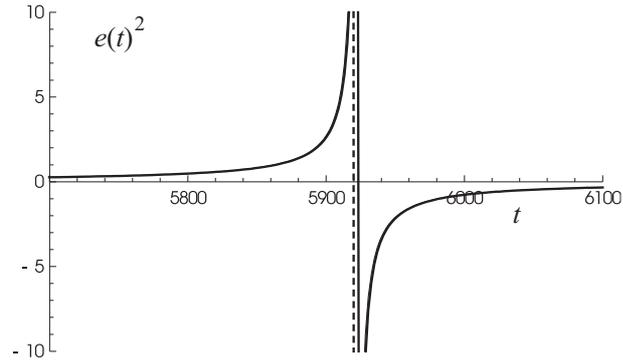


Figura 3: O mesmo gráfico da figura 8.2 visto com mais detalhes perto de  $t \sim 5900$ . Aqui as duas linhas verticais indicam polos de Landau diferentes. A linha tracejada representa o esquema de subtrações mínimo. Os valores para  $t$  correspondendo aos polos diferem entre si menos de 0.02%.

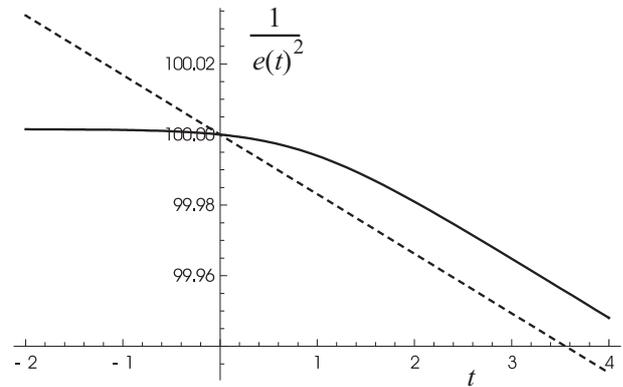


Figura 4: Curvas para  $e(t)^{-2}$ . A linha tracejada representa o esquema de subtrações mínimo e a linha contínua o método de subtrações de momentos. Para valores de  $t$  grandes, as duas curvas são retas paralelas. A diferença substancial entre os dois gráficos aparece para  $t < 1$ .

precisão dos resultados. Como caso particular, o efeito do deslocamento dos dados iniciais, pode também ser observado em modelos supersimétricos como MSSM e suas extensões. Como resultado, pode haver uma ligeira violação da convergência exata das constante de acoplamento  $g$ ,  $g'$  e  $g_s$  que poderão formar um triângulo ao invés de se encontrarem em um único ponto. Essa questão envolvendo teorias massivas já foi discutida em [7], mas pode ser feita de forma mais explícita usando as expressões analíticas para as funções beta.

## 8.8 Fatores de forma exatos para eletrodinâmica escalar

Podemos utilizar a mesma técnica para obter resultados similares para a eletrodinâmica escalar quântica(EDEQ). Começamos com a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} (D^\mu \phi) (D_\mu \phi)^* - \frac{1}{2} m \phi \phi^* - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}, \quad (8.61)$$

onde

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi, \quad (D_\mu \phi)^* = \partial_\mu \phi^* + ie A_\mu \phi. \quad (8.62)$$

Agora, se substituirmos (8.62) em (8.61) e integramos por partes os termos com derivada de  $\phi^*$ , podemos reescrever a ação inicial da seguinte forma

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{2} \phi^* \square \phi + \phi^* ie A_\mu (\partial^\mu \phi) + \frac{ie}{2} \phi^* \phi (\nabla_\mu A^\mu) + \frac{e^2}{2} \phi^* \phi (A_\mu A^\mu) - \frac{1}{2} m \phi \phi^* - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\}, \quad (8.63)$$

Aplicando a equação (7.7) em (8.63), teremos

$$\hat{H} = \hat{1}[\square - 2ie A^\mu \partial_\mu - e^2 A_\mu A^\mu + m - ie(\nabla^\mu A_\mu)]. \quad (8.64)$$

Comparando (8.64) com a forma de  $\hat{H}$  da equação (7.8) encontramos

$$\hat{\Pi} = -\hat{1}e^2 A_\mu A^\mu + \hat{1}m - \hat{1}ie(\nabla^\mu A_\mu) \quad , \quad \hat{h}^\beta = -\hat{1}ieA^\beta. \quad (8.65)$$

Substituindo (8.65) em (7.22), obtemos

$$\hat{P} = \hat{1}m - \frac{\hat{1}}{6}R \quad , \quad \hat{S}_{\mu\nu} = \hat{1}ieF_{\mu\nu}. \quad (8.66)$$

Se calcularmos apenas o coeficiente  $a_2$  da série de Swinguer - DeWitt encontramos o resultado para a parte divergente de  $\bar{\Gamma}^{(1)}$ . Usando (8.66) e

$$a_2 = s\text{Tr} \hat{a}_2(x, x) = s\text{Tr} \left\{ \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\square \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right\}. \quad (8.67)$$

teremos que o termo proporcional a  $F_{\mu\nu}^2$  em  $\bar{\Gamma}^{(1)}$  tem a forma, usando regularização dimensional

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{6} e^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}. \quad (8.68)$$

de onde podemos escrever a equação para renormalização da carga elétrica

$$e^0 = \frac{1}{\epsilon} \mu^{(4-n)/2} \left( 1 - \frac{e^2}{3\epsilon} \right) e, \quad (8.69)$$

onde  $\epsilon = (4\pi)^2(n - 4)$ .

Vamos agora obter o fator de forma exato. Como nosso interesse está apenas nos termos que podem ser proporcionais a  $F_{\mu\nu}^2$ , substituímos a equação (8.66) em (7.21) e o resultado em (7.20) e calculamos somente os termos com  $f_5$ .

Usando as notações  $t = sm^2$ ,  $u = \tau/t = -\square/m^2$ ,

$$A = 1 - \frac{1}{a} \ln \left( \frac{2+a}{2-a} \right), \quad a^2 = \frac{4\square}{\square - 4m^2}. \quad (8.70)$$

e os resultados conhecidos [67, 68]

$$\begin{aligned} \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi^2} e^{-t} \frac{f(tu)}{t^\omega u} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) - \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{18} \right] + \mathcal{O}(2-\omega), \\ \left( \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \int_0^\infty \frac{dt}{4\pi^2} e^{-t} \frac{1}{t^\omega u} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{a^2-4}{4a^2} \left( \frac{1}{\alpha} + 1 \right) \right] + \mathcal{O}(2-\omega), \end{aligned}$$

depois de alguma álgebra, obtemos uma expressão explícita para o termo  $\sim F_{\mu\nu}^2$  na ação efetiva

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} e^2 F_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{6\alpha} + k^{FF}(a) \right] F^{\mu\nu} \quad (8.71)$$

onde,

$$k^{FF}(a) = \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{9}. \quad (8.72)$$

Pode-se notar que a parte divergente é a mesma encontrada na equação (8.68). A função beta no esquema dependente da massa é a seguinte

$$\beta_e = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{2a(6-a^2) + 3(4-a^2) \ln\left(\frac{2-a}{2+a}\right)}{3a^3}, \quad (8.73)$$

que é o resultado geral para a função beta válida em qualquer escala. Como casos especiais, podemos tomar o limite UV,  $p^2 \gg m^2$  ou  $a \rightarrow 2$

$$\beta_e^{UV} = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{p^2}\right), \quad (8.74)$$

que é um resultado que a equação (8.69) nos fornece num esquema de cálculo totalmente independente e, além disso, também podemos obter o limite IR,  $p^2 \ll m^2$

$$\beta_e^{IR} = \frac{e^3}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{30} \frac{M^2}{m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{m^4}\right). \quad (8.75)$$

## 8.9 Coeficiente $A_3$ para EDEQ

Podemos ainda fazer uma verificação interessante para o resultado da equação (8.72). Se fizermos a expansão até a primeira ordem no operador  $\square$ , teremos

$$k^{FF}(a) = -\frac{4A}{3a^2} - \frac{1}{9} \simeq \frac{1}{60} \frac{\square}{m^2}, \quad (8.76)$$

que nos fornece um termo em  $\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)}$  da seguinte forma

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{e^2}{120} F^{\mu\nu} \frac{\square}{m^2} F_{\mu\nu}. \quad (8.77)$$

Se usarmos a relação 8.59 na equação acima, podemos ver que

$$\bar{\Gamma}_{\text{ren } 1}^{(1)} \sim -\frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{e^2}{60} \nabla_\nu F^{\mu\nu} \nabla_\alpha F_\mu{}^\alpha. \quad (8.78)$$

O fato interessante é que podemos obter esse termo de forma independente. Para isso, basta calcular termo que contribui para  $(\nabla_\nu F^{\mu\nu})^2$  em  $\bar{\Gamma}^{(1)}$  devido ao coeficiente  $A_3$  da série de Schwinger - DeWitt [1] como fizemos para EDQ, usando (8.34).

Se substituirmos  $\hat{P}_1$  e  $\hat{S}_{\mu\nu 1}$  da equação (8.66) em (8.34), encontramos o mesmo resultado expresso na equação (8.78), que também está de acordo com o resultado obtido em [73].

## 9 Conclusões

Nesta tese, foram obtidos os seguintes resultados originais:

1) Consideramos a transformação Foldy-Wouthuysen exata para o campo espinorial de Dirac no fundo de ondas gravitacionais e um campo magnético constante. Tomando o limite clássico da Hamiltoniana do campo espinorial, chegamos às equações de movimento não-relativísticas para a partícula de spin meio. Mostramos que o efeito da onda gravitacional no campo espinorial e na correspondente partícula pode ser, em princípio, intensificado por um campo magnético suficientemente forte. Estes resultados foram publicados em [56]. O efeito pode ser relevante para aplicações astrofísicas e, em princípio, pode ser útil para se criar detectores de ondas gravitacionais baseados em física atômica e interferometria com grande precisão.

2) Discutimos a possibilidade de se utilizar a transformação Foldy-Wouthuysen exata para o espinor de Dirac com diferentes termos extras, que violam as simetrias CPT e Lorentz. A classificação desses termos foi realizada, selecionando aqueles para os quais a TFWE é admitida. Como exemplo, consideramos um campo vetorial axial, que pode ser associado com o campo de torção gravitacional completamente antisimétrico e construímos a EFWT para o caso quando apenas a componente temporal deste campo axial está presente. Estes resultados foram publicados em [62].

3) Consideramos o papel da EFWT para situações quando a teoria não admite um operador de involução. Neste caso, a técnica da transformação exata pode ser utilizada para se obter uma análise qualitativa do resultado perturbativo. Como exemplos dessa abordagem desenvolvemos os cálculos explícitos para dois casos diferentes seguintes: *i)* um campo elétrico externo; *ii)* a parte espacial do campo de torção gravitacional. Ambos os resultados foram comparados com aqueles já conhecidos na literatura que foram obtidos pela TFW perturbativa e todos são condizentes. A grande vantagem de se utilizar a técnica que chamamos de transformação semi-exata para os campos que não admitem a

transformação exata é que esta técnica é muito mais econômica na parte de cálculos do que a transformação usual. Estes resultados foram publicados em [60, 61] e no apêndice de [62].

4) Calculamos e discutimos as correções de um laço para o setor do fóton da EDQ no fundo de um campo gravitacional. Primeiro, consideramos a ação induzida pela anomalia conforme. Este resultado pode ser visto como uma aproximação realista no universo primordial, quando as massas de todos campos quânticos são desprezíveis comparando com as energias dos fótons.

5) No caso de campos quânticos com massa, obtivemos uma expressão covariante e não-local para a ação efetiva correspondente, similar a que havia sido obtida antes para o setor gravitacional. Para derivação dos termos quânticos foi utilizado o método de “heat-kernel”, desenvolvido anteriormente nos trabalhos de Avramidi, Barvinsky e Vilkovisky, e a técnica de tratar as correções quânticas dos campos massivos sugerida nos trabalhos de Gorbar e Shapiro.

6) A partir da expressão para um formfator completo de um laço, obtivemos a função beta em um laço para a carga elétrica no esquema de renormalização baseado na subtração de momentos. A partir desta expressão geral, estudamos os limites sem massa e com grande massa. No último caso observamos o fenômeno de desacoplamento quântico (teorema de Appelquist e Carazzone). Podemos dizer que nós obtivemos, pela primeira vez, uma forma completa deste famoso teorema, inclusive a dependência de escala para energias intermediárias, de forma simples e analítica. Em princípio, este resultado pode encontrar várias aplicações em física de partículas, especialmente levando em conta que ele pode ser facilmente generalizado para modelos como MSM, MSSM, várias versões de NMSSM e GUTs.

7) Uma abordagem semelhante foi aplicada para a eletrodinâmica escalar, onde também encontramos tanto fator de forma completo, quanto a função beta física no esquema de renormalização baseado na subtração de momentos. Os resultados das partes 4, 5, 6 e 7 foram publicados em [63]. Esperamos que os cálculos das correções quânticas possam ter aplicações em cosmologia e astrofísica. Em particular, os efeitos quânticos de férmion massivo violam a simetria conforme local no setor dos fótons e isso pode ajudar na explicação de geração de sementes do campo magnético nas galáxias.

8) Mostramos que a fórmula muito bem conhecida  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ , que pode ser facilmente demonstrada para matrizes de dimensões finitas pode ser incorreta para determinantes funcionais de operadores diferenciais, incluindo aqueles que são relevantes para as aplicações da teoria quântica de campos. Apresentamos o primeiro exemplo onde a diferença entre os dois determinantes funcionais é uma expressão não local e portanto não pode ser explicada pela ambiguidade na renormalização. Além disso, pelo uso de outras dimensões com número par, explicamos a origem dessa diferença de forma qualitativa. Esses resultados foram publicados em [63] e também uma versão mais detalhada será publicada em [64].

9) Durante o desenvolvimento da tese ainda foi elaborado o trabalho na área de física de partículas [59]. O artigo trata do estudo do decaimento de duas partículas em uma. É um trabalho multidisciplinar desenvolvido durante a escola do CERN em que são abordados os casos da partícula Higgs decaindo em dois bósons  $Z$  e posteriormente em 4 léptons (no artigo há a descrição de como se obter o corte de energia para o qual não se espera esse evento) e também o caso de um quark  $b$  decaindo em dois muons. Esta parte não entrou na tese, ela só está mencionada aqui para completar a lista de resultados obtidos durante o período de doutorado.

## *Referências*

- [1] AVRAMIDI I. G. **Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity**. 1986. Tese (Doutorado em Física) - Moscow State University, Moscow, 1986. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-th/9510140> >. Acesso em: 30 mar. 2010.
- [2] APPELQUIST, T. e CARAZZONE, J., **Phys. Rev. D**, v. 11, p. 2856, 1975.
- [3] Audretsch, J. **Phys. Rev. D**, v. 24, p. 1470, 1981.
- [4] AVRAMIDI I. G.; FUCCI, G. **Low-Energy Effective Action in Non-Perturbative Electrodynamics in Curved Spacetime**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-th/09021541> >. Acesso em: 30 mar. 2010.  
 FUCCI, G. **Non-Perturbative One-Loop Effective Action for Electrodynamics in Curved Spacetime**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-th/0906.2430> >. Acesso em: 30 mar. 2010.
- [5] ASHOORIOON, A.; MANN, R.B. **Phys. Rev. D**, v. 71, n. 103509, 2005.
- [6] AVRAMIDI, I. G. **Sov. Journ. Nucl. Physics**, v. 49, p. 1185, 1989.
- [7] BINGER, M.; BRODSKY, S.J. **Phys. Rev. D**, v. 69, n. 095007, 2004.
- [8] BUCHBINDER, I.L.; WOLFENGAUT, J.J. **Class. Quant. Gravity**, v. 5, n. 1127, 1988.
- [9] BALBINOT, R.; FABBRI, A.; SHAPIRO, I.L. **Phys. Rev. Letters**, v. 83, p. 1494, 1999.
- [10] BASSETT, B. A.; POLLIFRONE, G.; TSUJIKAWA, S.; VINIEGRA, F. **Phys. Rev. D**, v. 63, n. 103515, 2001.  
 LAMBIASE, G.; PRASANNA, A.R. **Phys. Rev. D**, v. 70, n. 063502, 2004.  
 BAMBA, K.; SASAKI, M. **JCAP**, v. 0702, p. 30, 2007.

- [11] BABICHEV, E.; MUKHANOV, V.; VIKMAN, A. **JHEP**, v. 0802, p. 101, 2008.
- [12] BUCHBINDER, I. L. **Theor. Math. Physics**, v. 61, p. 393, 1984.
- [13] BUCHBINDER, I.L.; SHAPIRO, I.L. **Sov. J. Nucl. Physics**, v. 44, p. 1033, 1986.
- [14] BUCHBINDER, I.L.; ODINTSOV, S.D.; SHAPIRO, I.L. **Phys. Lett. B**, v. 162, p. 92, 1985.
- [15] BALAKIN, A. B.; ZIMDAHL, W. **Phys. Rev. D**, v. 71, n. 124014, 2005.
- [16] BERTOLAMI, O.; MOTA, D. F. **Phys. Lett. B**, v. 455, p. 96, 1999.
- [17] BASTIANELLI, F.; DAVILA, J.M.; SCHUBERT, C. **JHEP**, v. 903, p. 86, 2009.  
 BASTIANELLI, F.; SCHUBERT, C. **JHEP**, v. 0502, p. 69, 2005.  
 BASTIANELLI, F.; NUCAMENDI, U.; Schubert, C.; Villanueva, V.M. **JHEP**, v.711, p. 99, 2007.
- [18] BROWN, L. S.; CASSIDY J. P. **Phys. Rev. D**, v. 15, p. 2810, 1977
- [19] BARVINSKY, A.O.; VILKOVISKY, G.A. **Phys. Reports**, v. 119, p. 1, 1985.
- [20] BUNCH, T. S.; PARKER, L. **Phys. Rev. D**, v. 20, n. 2499, 1979.
- [21] BJORKEN, J. M.; DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [22] BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. **Quantum Fields in Curved Space** Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [23] BERTOLAMI, O.; PARAMOS, J.; TURYSHEV, S.G. **General theory of relativity: Will it survive the next decade?** Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0602016> >. Acesso em: 30 mar. 2010
- [24] BUCHBINDER, I.L.; ODINTSOV, S.D.; SHAPIRO, I.L. **Effective Action in Quantum Gravity**. Bristol: IOP Publishing, 1992.
- [25] BAGROV, V. G. ; BUCHBINDER, I. L.; SHAPIRO I. L. **Sov. J. Physics**, v. 35, n. 3, p. 5, 1992.
- [26] BUCHBINDER, I. L.; SHAPIRO I. L. **Phys. Lett. B**, v. 151, p. 263, 1985.
- [27] BARVINSKY, A.O. e VILKOVISKY, G.A., **Nucl. Phys. B**, v. 333, p. 471, 1990.

- [28] BERENDS, F. A.; GASTMAN, R. **Ann. of Physics**, v. 98, p. 225, 1976.
- [29] BRUNETON, J. P. **Phys. Rev. D**, v. 75, n. 085013, 2007.
- FERRER, E.J.; INCERA V. de la, ; ROMEO, A. **Phys. Lett. B** v. 515, p. 341, 2001. FERRER, E.J.; INCERA V. de la, **TSPU Vestnik**, v. 44. n.7, p. 88, 2004.
- MOHANTY, S.; PRASANNA, A. R. **Nucl. Phys. B**, v. 526, p. 501, 1998.
- PRASANNA, A.R.; MOHANTY, S. **Class. Quant. Gravity**, v. 20, p. 3023, 2003.
- TEYSSANDIER, P. **Annales Fond. Broglie**, v. 29, p. 173, 2004.
- [30] BALAKIN, A. B.; BOCHKAREV, V. V.; LEMOS, J.P.S. **Phys. Rev. D**, v. 77, n. 084013, 2008.
- [31] BARTON, G.; SCHARNHORST, K. **J. Phys. A**, v. 26, p. 2037, 1993.
- SCHARNHORST, K. **Annalen Physics**, v. 7, p. 700, 1998.
- COUGO-PINTO, M.V.; FARINA, C.; SANTOS, F.C.; TORT, A. **J. Phys. A**, v. 32, n. 4463 1999. **Phys. Lett. B** 446 (1999) 170.
- [32] CALZETTA, E.A.; KANDUS, A.; MAZZITELLI, F.D. **Phys. Rev. D**, v. 57, n. 7139, 1998. CALZETTA, E.A.; KANDUS, A. **Phys. Rev. D**, v. 65, n. 063004, 2002.
- [33] CAMPORESI, R. **Phys. Reptorts**, v. 196, p. 1, 1990.
- [34] CASE, K. M. **Physical Review**, v. 95, n. 5, p. 1323, 1954.
- [35] COLLADAY, D.; KOSTELECKY A. **Phys. Rev. D**, v. 55. n. 6760, 1997.
- [36] COLLINS, J. C.; MASFARLANE, A.J. **Phys. Rev. D**, v. 10, n. 1201, 1974.
- [37] CAI, R.G., **Nucl. Phys. B**, v. 524, p. 639, 1998.
- [38] DEGRASSI, G.; FANCHIOTTI, S.; SIRLIN, A. **Nucl. Phys. B**, v. 351, p. 49, 1991.
- ALVAREX-GAUME, L.; POKORSKI, S.; WISE, B. **Nucl. Phys. B**, v. 221, p. 495, 1983.
- CARENA, M. S.; POKORSKI, S.; WAGNER, C. E. M. **Nucl. Phys. B**, v. 406, p. 59, 1993.
- CARENA, M. S.; OLECHOWSKI, M.; POKORSKI, S.; WAGNER, C. E. M. **Nucl. Phys. B**, v. 426, p. 269, 1994.

- [39] DOBADO, A.; MAROTO, A.L. **Phys. Rev. D**, v. 60, n. 104045, 1999 .
- [40] DOLGOV, A. **Phys. Rev. D** v. 48, p. 2499, 1993.
- [41] DUBROVIN, B.A.; FOMENKO, A.T.; NOVIKOV, S.P. **Modern Geometry- Methods e Applications** Berlim: Springer-Verlag, 1984.
- [42] DATTA, B. K. **Nuovo Cim. B**, v.1, 1971.
- [43] DEWITT, B.S. **Dynamical Theory of Groups and Fields**. New York: Gordon and Breach, 1965.
- [44] DRUMMOND, I.T.; HATHRELL, S.J. **Phys. Rev. D**, v. 22, p. 343, 1980.
- [45] DOWKER, J.S. **On the relevance of the multiplicative anomaly**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-ph/980320> >. Acesso em: 30 mar. 2010
- [46] DALVIT, D. A. R.; MAZZITELLI, F. D.; MOLINA-PARIS, C. **Phys. Rev. D**, v. 63, n. 084023 ,2001.
- [47] DITTRICH, W.; GIES, H. **Phys. Rev. D**, v. 58, n. 025004, 1998.
- [48] DUFF, M. J. **Nucl. Phys. B**, v. 125, p.334, 1977.  
DESER, S.; DUFF, M. J.; ESHAM, C. **Nucl. Phys. B**, v. 111, p. 45, 1976.
- [49] DUFF, M. J. **Class. Quant. Gravity**, v. 11, p. 1387, 1994.
- [50] ERIKSEN, E.; KOLSROULD, M. **Nuovo Cimento**, v. 18, n. 10, p. 1, 1960.
- [51] ELIZALDE, E.; VANZO, L.; ZERBINI, S. **Commun. Math. Phys.**, v. 194, p. 613, 1998.  
ELIZALDE, E.; COGNOLA, G.; ZERBINI, S. **Commun. Math. Physics**, v. 237, p. 507, 2003.  
ELIZALDE, E.; COGNOLA, G.; ZERBINI, S. **Nucl. Phys. B**, v. 532, p. 407, 1998.  
ELIZALDE, E.; TIERZ, M. **J. Math. Physics**, v. 45, p. 1168, 2004.
- [52] ELIZALDE, E. **Zeta regularization techniques with applications** Nes York: World Scientific, 1994.
- [53] EVANS, T.S. **Phys. Lett. B**, v. 457, p. 127, 1999.
- [54] FOLDY, L. L., WOUTHUYSEN, S. **Phys. Rev.** 58, p. 29, 1950.

- [55] FUJITA, T. **Physics of renormalization group equation in QED**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0606101> >. Acesso em: 30 mar. 2010.
- [56] GONÇALVES, B., OBUKOV, Y., SHAPIRO, I. L. **Phys. Rev. D**, v. 75, n. 124023, 2007.
- [57] GONÇALVES, B., CARNEIRO, D. F., SHAPIRO, I. L., FREITAS, E. A., LIMA, A. G. de. **Gravitation e Cosmology**, v 10, n. 4, p. 305, 2004.
- [58] GONÇALVES, B., CARNEIRO, D. F., SHAPIRO, I. L. Transformação conforme local aplicada à relatividade geral. **Principia**, v. 9, p.2, 2004.
- [59] GONÇALVES, B.; DIAZ, E. A.; BENITEZ, F.; BUCHLER, A.; CIERI, L.; FLOREZ, A.; GARCES-GRACIA A, E.; KOETSVELD, F., LENEY, K.; FALCON, H. M.; MONCADA, M.; QUINTERO, P.; ROMERO, D.; SHAW, K.; SWAIN, J.; ZURITA, M. **Searching for new physics in two body decays: Ideas and pitfalls**. Genebra: Cern Yellow Reports, (2010). Submetido para publicação.
- [60] GONÇALVES, B. **International Journal of Modern Physics A**, v. 24, p. 1717, 2009.
- [61] GONÇALVES, B., OBUKOV, Y., SHAPIRO, I. L. **Problems of modern theoretical physics** Tomsk: tomsk State Pedagogical University, 2008.
- [62] GONÇALVES, B., OBUKOV, Y., SHAPIRO, I. L. **Physical Review D**, v. 80, n. 125034, 2009.
- [63] GONÇALVES, B.; PEIXOTO, G. B; SHAPIRO, I. L. **Physical Review D**, v. 80, n. 104013, (2009) arXiv:0904.4171 [hep-th].
- [64] GONÇALVES, B.; PEIXOTO, G. B; SHAPIRO, I. L. **Exact formfactors in the one-loop curved-space QED and the nonlocal multiplicative anomaly**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-ph/09063837> >. Acesso em: 30 mar. 2010.  
Aceito para publicação em **Int. Journ. Mod. Phys. A** .
- [65] GIANNNOTI, M.; MOTTOLA, E. **Phys. Rev. D**, v. 79, n. 045014, 2009.
- [66] GILKEY, P.B.J. **Diff. Geomety**, v. 10, p. 601, 1975.
- [67] GORBAR, E.V.; SHAPIRO, I.L. **JHEP**, v. 02, p. 21, 2003.

- [68] GORBAR, E.V.; SHAPIRO, I.L., **JHEP**, v. 06, p. 004, 2003.
- [69] GRIB, A. A.; MAMAEV, S. G.; MOSTEPANENKO, V. M. **Quantum Effects in Strong Fields**. St. Petersburg: Friedmann Laboratory Publishing, 1994.
- [70] GRASSO, D.; RUBIBSTEIN, H.R. **Physics Reports**, v. 348, p. 163, 2001.
- [71] GIOVANNINI, M. **Lect. Notes Physics**, v. 737, p. 863, 2008.
- [72] HATHRELL, S. J. **Annals Phys.**, v. 139, p. 136, 1982.
- [73] HOLLOWOOD, T. J.; SHORE, G. M. **JHEP**, v. 0812, p. 091, 2008.
- [74] HAYASHI, K. **Progr. Theor. Physics**, v. 64, p. 866, 1980.
- [75] HEHL, F. W. **Gen. Relat. Gravity**, v. 4, p. 333, 1973.  
HEHL, F. W.; KEIDE, P.; KERLICK, G. D.; NESTER, J.M. **Rev. Mod. Phys.**, v. 48, p. 3641, 1976.
- [76] HOOFT, G.; VELTMAN, M. **Ann. Inst. H. Poincare A**, v. 20, p. 69, 1974.
- [77] IVANENKO, D.I.; SARDANASHVILY, G. **Phys. Reptorts**, v. 94, p. 1, 1983.
- [78] KOSTELECKY, A.; JACKIW, R. **Phys. Rev. Letters**, v. 82, p. 3572, 1999.
- [79] KOSTELECKY, A.; BERTOLAMI, O., COLLADAY, D.; POTTING, R. **Phys. Lett. B**, v. 395, p. 178, 1997.  
KOSTELECKY, A.; MEWES, M. **Phys. Rev. Letters**, v. 87, p. 251304, 2001.  
Phys. Rev. D66 (2002) 056005.  
LEHNERT, R. **Cosmology and spacetime symmetries**. Disponível em: <  
<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0508316> >. Acesso em: 30 mar. 2010.  
BLUHM, R.; KOSTELECKY, A. **Phys. Rev. D**, v. 71, p. 065008, 2005.
- [80] KOSTELECKY, A. **Sci. Am.**, v. 291, p. 75, 2004.  
KOSTELECKY, A. **Lorentz Violation and Gravity**. Disponível em: <  
<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0412406> >. Acesso em: 30 mar. 2010.  
MATTINGLY, D. **Living Rev. Rel.**, v. 8, p. 5, 2005.
- [81] BLUHM, R.; KOSTELECKY, **Phys. Rev. Letters**, v. 84, p. 1381, 2000.  
BLUHM, R.; KOSTELECKY, A.; LANE, C. **Phys. Rev. Letters**, v. 84, p. 1098, 2000.

- BLUHM, R.; KOSTELECKY, A.; RUSSEL, N. **Phys. Rev. Letters**, v. 82, p. 2254, 1999.
- [82] MURAYAMA, H.; TAMAIIDA T. **Phys. Lett. B**, v. 520, p. 263, 2001.
- BARENBOIM, G.; BORISSOV, L.; LYKKEN, J. D.; SMIRNOV, A. Y. **JHEP** v. 210, p. 001, 2002.
- KOSTELECKY, A.; MEWES, M. **Phys. Rev. D**, v. 70, p. 031902, 2004.
- [83] KHARLANOV, O.G.; ZHUKOVSKY, V. C. **J. Math. Physics** v. 48, p. 092302, 2007.
- [84] KOSTELECKY, A.; LANE, C. D. **Journ. Math. Physics**, v. 40, p. 6245, 1999.
- KOSTELECKY, A.; LANE, C. D. **Phys. Rev. D**, v. 60, p. 116010, 1999.
- [85] KOSTELECKY, A.; POTTING, Potting, **Nucl. Phys. B**, v. 359, p. 545, 1991.
- [86] KOSTELECKY, A.; RUSSEL, N. **Phys. Rev. Letters**, v. 100, p. 111102, 2008.
- KOSTELECKY, A.; LEHNERT, R. **Phys. Rev. D**, v. 63, p. 065008, 2001.
- [87] KOSTELECKY, A. **Phys. Rev. D**, v. 69, p. 105009, 2004.
- BLUHM, R.; KOSTELECKY, A. **Phys. Rev. D** v. 71, p. 065008, 2005.
- [88] KOSTELECKY, A.; SAMUEL, S. **Phys. Rev. D**, v. 39, p. 683, 1989.
- KOSTELECKY, A.; POTTING, R. **Phys. Rev. D** v. 63, p. 046007, 2001.
- [89] KHRIPLOVICH, I.B. **Phys. Lett. B**, v. 346, p. 251, 1995.
- SHORE, G.M. **Nucl. Phys. B**, v. 460, p. 379, 1996.
- DOLGOV, A. D.; NOVIKOV, I. D. **Phys. Lett. B**, v. 442, p. 82, 1998.
- SHORE, G.M. **Nucl. Phys. B**, v. 605, p. 455, 2001.
- [90] KONSEVICH, M.; VISHIK, S. **Geometry of determinants of elliptic operators**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9406140> >. Acesso em: 30 mar. 2010.
- [91] LAVROV, P. M.; SHAPIRO, I. L. **On the renormalization of gauge theories in curved space-time** Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-ph/09114579> >. Acesso em: 30 mar. 2010.
- [92] LATORRE, J. I.; PASCUAL, P.; TARRACH, R. **Nucl. Phys. B**, v. 437, p. 60, 1995.

- [93] LANDAU, L.D.; LIFSHITS, E.M. **Field Theory**. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [94] LIGHTMAN, A.; PRESS, W.; PRICE, R.; TERUKOLSKI, S. **Problem Book in Relativity and Gravitation**. Princeton: Princeton University Press, 1975.
- [95] LAMMERZAHAL, C. **Phys. Letters A**, v. 228, p. 223, 1997.
- [96] LAFRANCE, R.; MYERS, R.C. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 2584, 1995
- [97] MINER, C. W.; THORN, K.S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. San Francisco: Freeman, 1973.
- [98] MCCONNEL, A.J. **Applications of Tensor Analysis**. New York: Dover Publications, 1957.
- [99] MANOHAR, A. V. **Perturbative and nonperturbative aspects of quantum field theory**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9606222> >. Acesso em: 30 mar. 2010.
- [100] MILTON, K. A. **Phys. Rev. D**, v. 15, p. 2149, 1977.
- [101] MAZZITELLI, F.D.; SPEDALIERI, F.M. **Phys. Rev. D**, v. 52, p. 6694, 1995.
- [102] MCKENZIE-SIMITH, J.J.; TOMS, D.J. Toms, **Phys. Rev. D**, v. 58, p. 105001, 1998.
- [103] NIKITIN, A.G. **J. Physics A**, v. 31, p. 3297, 1998.
- [104] NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. E. P. **Phys. Reports**, v. 463, p. 127, 2008.
- [105] LORENCI, V. A. de; LIPPERT, R.; NOVELLO, M.; SALIM, J. M. **Phys. Rev. D**, v. 61 p. 045001, 2000.
- LORENCI, V. A. de; FIGUEIREDO, N.; FLICHE, H. H.; Fliche, NOVELLO, M. **Astron. Astrophysics**, v. 369, p. 690, 2001.
- LORENCI, V. A. de; LIPPERT, R.; NOVELLO, M.; SALIM, J. M. **Phys. Lett. B**, v. 482, p. 134, 2000.
- [106] OLIVEIRA, C.G.; TIMNO, J. **Nuovo Cimento**, v 25, n.4, p. 1876, 1962.
- [107] OBUKHOV, Y.N. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 2, p. 192, 2001.
- [108] OBUKHOV, Y.N.; FUKUI, T.; RUBILAR, G.F. **Phys. Rev. D**, v. 62, p. 044050, 2000.
- HEHL, F.W.; OBUKHOV, Y.N. **Lecture Notes Physics**, v. 562, p. 479, 2001.

- [109] PEIXOTO, G. de Berredo, GORBAR, E.V.; SHAPIRO, I.L. **Class. Quantum Grav.**, v. 21, p. 2281, 2004.
- [110] PONOMAREV, V. N.; BARVINSKY, A. O.; OBUKHOV, Yu. N. **Geometrodynamical Methods and Gauge Approach to Gravity Interaction Theory**. Moscow: Energoatomizdat, 1985.
- [111] PERNICI, M.; RACITI, M.; RIVA, F. **Nucl. Phys.B**, v. 520, p. 469, 1998.
- [112] PETROV, A. Z. **Einstein Spaces**. Oxford: Pergamon, 1969.
- [113] PROKOPEC, T. **Cosmological magnetic fields from photon coupling to fermions and bosons in inflation**. Disponível em: < <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0106247> >. Acesso em: 30 mar. 2010 .
- PROKOPEC, T.; TORNKVIST, O.; WOODARD, R.P. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89 p. 101301, 2002. arXiv:0205331 [astro-ph];
- PROKOPEC, T.; PUCHWIEN, E. **JCAP** v. 404, p.7, 2004.
- [114] PEIXOTO, G. De Berredo, **Mod. Phys. Lett. A**, v. 16, p. 2463, 2001.
- [115] RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [116] RUMPF, H. **Gen. Relat. Grav.** v. 10, P. 509, 1979.
- [117] RYDER L.H.; SHAPIRO, I.L. **Phys. Lett. A**, v. 245, p. 21, 1998.
- [118] RIGERT, R.J. **Phys. Lett. B** v. 134, p. 56, 1984.
- FRADKIN, E.S.; TSEYLIN, A.A. **Phys. Lett. B** v. 134, p. 187, 1984.
- HELAYEL-NETO, J.A.; PENNA-FIRME, A., SHAPIRO, I.L. **Phys.Lett. B**, v. 479, p. 411, 2000.
- [119] SHAPIRO, I.L.; COGNOLA, G. **Class. Quant. Grav.** v. 15, p. 787, 1998.
- [120] SABBATA, V. de; GASPERINI, M. **Introduction To Gravity** Singapore: World Scientific, 1985.
- [121] SABBATA, V. de; PRONIN, P.I.; SIVARAM, C.
- Int. J. Theor. Phys.** v. 30, p. 1671, 1991.

- [122] SHAPIRO, I.L.; SOLÀ, J. **Phys. Lett. B** v. 530, p. 10, 2002.  
 PELINSON, A.M.; SHAPIRO, I.L.; TAKAKURA, F.I. **Nucl. Phys. B** v. 648, p. 417, 2003.
- [123] SHAPIRO, I. L.; JACKSENAEV, A. G. **Phys. Lett. B** v. 324, p.284, 1994.
- [124] SHAPIRO, I. L., **Phys. Repts.** **357** (2002) 113.
- [125] SHAPIRO, I. L. Local conformal symmetry and its fate at quantum level. iN.: 5th INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATH. METHODS IN PHYSICS, Rio de Janeiro, **Anais... PoS-JHEP**, v. 03, p. 1, 2006
- [126] SHAPIRO, I.L. **Class. Quantum Grav.**, v. 25, p. 103001, 2008.
- [127] SHORE, G. M. **Nucl. Phys. B**, v. 646, p. 281, 2002. arXiv:0205042 [gr-qc].
- [128] SHORE, G. M. **Contemp. Phys.**, v. 44, p. 503, 2003.
- [129] STELLE, K.S. **Gen. Rel. Grav.**, v. 9, p. 353, 1978.
- [130] SU, J. C. ;YI, X. X.; CAO, Y. H. **J. Phys. G**, v. 25, p. 2325, 1999.
- [131] TURNER, M.S. ; WIDROW, L.M. **Phys. Rev. D**, v.37, p. 2743, 1988.
- [132] UTIYAMA, R.; DEWITT, B.S. **J. Math. Phys.**, v. 3, p. 608, 1962.
- [133] VASSILECH, D. V. **Phys. Rept.**, v. 388, p. 279, 2003.
- [134] VILKOVISKY, G. A. **Lect. Notes Phys**, v. 737, p.729, 2008.
- [135] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. New York: Wiley, 1972.
- [136] WEINBERG, S. **Phys. Rev. D**, v.8, p. 3497, 1973.
- [137] WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields. I: Foundations; II: Modern Applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [138] ZELDOVICH, Ya. B. ; STAROBINSKY, A. A. **Zh. Eksp. Teor. Fiz.**, v. 61, p. 2161, 1971 . Eng. translation: **Sov. Phys. JETP**, v. 34, p. 1159, 1972..