

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

**O grupo de renormalização em modelos
de Gravitação**

Poliane de Moraes Teixeira

6 DE MARÇO DE 2016
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**O grupo de renormalização em modelos
de Gravitação**

Autora: Poliane de Moraes Teixeira

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

6 DE MARÇO DE 2016
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Dedicatória

*À todas as mulheres cientistas desse País.
Infelizmente, ainda somos poucas.*

Agradecimentos

É sempre tempo de agradecer...

- Agradeço primeiramente a Deus que dia após dia me alimenta com sua palavra, me ampara na sua justiça e me consola com o seu infinito amor.
- Agradeço ao meu orientador, o professor Ilya Lvovich Shapiro, por toda confiança em mim depositada, pela sugestão dos problemas desenvolvidos nessa tese, por todo o ensinamento e conhecimento compartilhado ao longo de todos esses anos, pelo suporte de trabalho oferecido e principalmente agradeço por seu apoio, paciência e real orientação. Ao seu lado aprendi coisas valiosas que levarei comigo por toda a vida.
- Agradeço aos meus pais, Maria Aparecida e José Benedito, que de uma forma ou de outra me fizeram chegar até aqui.
- Agradeço ao apoio do meu irmão Thales, pessoa essencial em minha caminhada. Eu sou a irmã mais velha mas é você quem me inspira.
- Agradeço imensa e infinitamente à minha Vó Terezinha por seu amor e exemplo, melhor ser humano que conheço.
- Agradeço ao meu marido, Alison Arantes, meu companheiro de vida, por tudo.
- Agradeço ao professor Andreas Wipf pelas aulas sobre grupo funcional de renormalização e principalmente pela colaboração iniciada com o nosso grupo de pesquisa, colaboração que já rendeu um artigo, estando outros dois em desenvolvimento.

- Agradeço ao professor Peter Lavrov, Iosef Buchbinder e Neven Bilic por visitarem nosso grupo de pesquisa aqui em Juiz de Fora e disponibilizarem parte do seu tempo para compartilhar conosco o seu conhecimento.

- Agradeço ainda ao professor Guilherme de Berredo Peixoto por ser sempre tão solícito, pelas discussões úteis e por todas as dúvidas sanadas quando por motivos profissionais o professor Ilya Shapiro esteve ausente.

- Agradeço ao grupo teórico de Física de Partículas da *Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati* (SISSA), pela hospitalidade e ao professor Roberto Percacci pela orientação durante o período de seis meses de doutorado sanduíche que passei em Trieste. Ainda nesse período, agradeço aos amigos *gringos* que fiz e que tornaram minha estadia em Trieste mais produtiva e alegre. Danka Lucic, Maja Berovic e Enrico Pasqualetto, vocês foram minha família nesses seis meses, obrigada por tudo, saudade de vocês. Sra. Simona Busca e Sr. Guido Guiotto, muito obrigada pela recepção e ajuda, vocês foram fundamentais na minha estadia em Trieste.

- Agradeço de coração a todos os meus amigos do mestrado e doutorado, agradeço pela companhia, pelas discussões, pelos ensinamentos, pelas risadas, pelas esperanças e frustrações compartilhadas, por tantos anos de convivência. Todos são importantes mas alguns são especiais. Dante, Filipe Salles, Sebastião, Cléber, Tibério, Baltazar e Fabrício, gratidão é o que sinto. Lucélia e Monica Abreu, vocês fazem falta aqui em Juiz de Fora.

- Agradeço à UFJF, em particular ao Programa de Pós-Graduação em Física, por toda estrutura, pela oportunidade e pelo suporte físico e financeiro. Agradeço a todos os professores do Departamento de Física por tornarem meu aprendizado significativo. Agradeço também a todos os funcionários, citando em especial o secretário de nossa Pós-Graduação, o Sr. Domingos Lopes, por realizar o seu trabalho sempre com uma eficiência e excelência ímpares, é de profissionais como ele que esse País precisa.

- Agradeço à CAPES/PDSE (processo nº 99999.003915/2014-00) pelo financiamento do meu doutorado sanduíche no exterior. Agradeço à CAPES por financiar meus quatro anos de doutorado e ao CNPq e FAPEMIG por financiar direta e/ou indiretamente o meu projeto de doutorado.

Every theoretical physicist who is any good things knows six or seven different theoretical representations for exactly the same physics.

Richard Feynman

Resumo

Nessa tese, exploramos diferentes aspectos do grupo de renormalização (GR) em Gravitação Quântica. Especificamente, estudamos o GR aplicado a três diferentes modelos. Começamos por estudar o GR *on-shell* usando para isso o modelo de gravidade com torção proposto por Cartan, fizemos o tratamento quântico dessa teoria. Em seguida, mostramos em detalhes os cálculos do estudo da teoria semiclássica usando para isso o método da renormalização física, baseada na subtração de momentos. Nesta parte nós damos os detalhes da derivação dos fatores de forma gravitacionais, usando o método do *heat kernel* para três teorias massivas: campo escalar, campo vetorial e campo fermiônico. O que nos leva ao análogo gravitacional do teorema de desacoplamento de Appelquist e Carazzone. Nessa parte apenas refizemos os cálculos já desenvolvidos em um artigo de Gorbar e Shapiro, mas agora em detalhes minuciosos para cada etapa calculada. E na última parte, uma análise do grupo funcional de renormalização (GFR) foi feita, aplicando essa técnica também ao modelo de gravidade semiclássica, onde a teoria abordada foi a de um campo escalar com acoplamento não-mínimo no espaço-tempo curvo.

Palavras chaves : Grupo de renormalização, gravitação quântica, gravidade semiclássica, espaço-tempo curvo.

Abstract

On this thesis, we explored different aspects of the renormalization group (RG) in Quantum Gravity. Specifically, we studied the RG applied to three different models. We began studying the RG *on-shell* and we used for that the model of gravity with torsion proposed by Cartan, we made the quantum treatment of this theory. Then, we showed in details the calculations of the study of semi-classical theory, using for that, the method of physical renormalization, based on the momentum subtraction. On this part, we gave the details of the derivation of gravitational *form factors*, using the method of the *heat kernel* for three massive theories: scalar field, vector field and fermionic field which leads us to the gravitational analogue of the decoupling theorem from Appelquist and Carazzone. In this part, we just remade the calculations already undertaken in a paper by Gorbar and Shapiro, but now in minute details for each step calculated. On the last part, an analysis of the functional renormalization group (FRG) was made, applying this technique also to the model of semiclassical gravity, where the theory addressed was a theory with a scalar field with non-minimal coupling in curved spacetime.

Keywords : Renormalization group, quantum gravity, semiclassical gravity, curved spacetime.

Lista de Figuras

3.1	<i>Gráfico paramétrico de $\gamma(t) \times \lambda_4(t)$, sem levar em conta o running da constante cosmológica. No gráfico à esquerda: $0 < t < 0,13$. No gráfico à direita: $0 < t < 1,55$.</i>	40
3.2	<i>Gráfico paramétrico de $\gamma(t) \times \lambda_4(t)$, levando em conta o running da constante cosmológica. No gráfico à esquerda: $0 < t < 0,23$. No gráfico à direita: $0 < t < 1,69$.</i>	41
6.1	<i>Fluxo do parâmetro não-mínimo ξ_t e acoplamentos m_k^2, λ_{4k}, λ_{6k} (em unidades de μ) com $t = \log(k/\mu)$ na fase não quebrada. Os dados iniciais no cutoff $\Lambda = \mu e^5$ são $m^2 = \mu^2$, $\lambda_4 = 0.5$, $\lambda_6 = 0$ e $\xi = 1/6$.</i>	84
6.2	<i>Running do parâmetro não-mínimo ξ_t com $t = \log(k/\mu)$ para os mesmos acoplamentos iniciais como na figura 6.1, mas com diferentes valores iniciais ξ na vizinhança do acoplamento conforme $\xi_c = 1/6$. No sentido horário da parte superior: $\xi_c - 2\delta$, $\xi_c - \delta$, $\xi_c + \delta$ e $\xi_c + 2\delta$ com $\delta = 1/24$.</i>	85
6.3	<i>Fluxo do mínimo do potencial efetivo como função de $t = \log(t/\mu)$. Para $\phi_{0\Lambda} \approx 3.5\mu$ (e os mesmos parâmetros como na figura 6.4) o sistema permanece na fase quebrada para todas as escalas k.</i>	89

- 6.4 *Running do parâmetro não-mínimo ξ_t e acoplamentos $m_k^2, \lambda_{3k}, \dots, \lambda_{6k}$ (em unidades de μ) como funções de $t = \log(k/\mu)$. Os dados iniciais na escala cutoff $k = \Lambda = \mu e^5$ são $m^2 = \mu^2$, $\lambda_4 = 0.5$, $\lambda_3 = \mu$, $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ e $\xi = 1/6$.* 90

Lista de publicações

- I. L. Shapiro & P. M. Teixeira; *Quantum Einstein-Cartan theory with the Holst term*, Class. Quant. Grav. **31** (2014) 185002.

- I. L. Shapiro, P. M. Teixeira & A. Wipf; *On the functional renormalization group for the scalar field on curved background with non-minimal interaction*, Eur. Phys. J. C **75** (2015) 262.

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Lista de publicações	ix
1 Introdução	1
2 Noções de Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo curvo	12
2.1 A abordagem semiclássica	13
2.2 A ação efetiva	14
2.3 O método de Schwinger-DeWitt	16
2.4 O grupo de renormalização	17
3 A Teoria de Einstein-Cartan Quântica com o termo de Holst	21
3.1 Considerações iniciais	22
3.2 Representação simples para o termo de Holst	24
3.3 Divergências <i>off-</i> e <i>on-shell</i> a <i>1-loop</i>	29
3.4 O grupo de renormalização <i>on-shell</i>	32
3.5 Considerações finais	41

4	Os fatores de forma gravitacionais para campos massivos no espaço-tempo curvo	43
4.1	Considerações iniciais	44
4.2	Fatores de forma para a teoria escalar	45
4.2.1	Termo de ordem zero	46
4.2.2	Termo de primeira ordem	47
4.2.3	Termos de segunda ordem	47
4.3	Fatores de forma para a teoria vetorial	54
4.4	Fatores de forma para a teoria fermiônica	59
4.5	As equações do grupo de renormalização	64
4.6	Considerações finais	66
5	O Grupo Funcional de Renormalização (GFR)	67
5.1	Considerações iniciais	68
5.2	Funcionais dependentes da escala	68
5.3	Derivação da equação de Wetterich	70
5.4	Considerações finais	71
6	O Grupo Funcional de Renormalização (GFR) para o campo escalar no espaço-tempo curvo	73
6.1	Considerações iniciais	74
6.2	GFR para campo escalar com acoplamento não-mínimo	75
6.2.1	Elaborando a equação de Wetterich	77
6.2.2	Fluxo do GR para os acoplamentos e para o parâmetro não-mínimo	81
6.3	O fluxo do GFR para os acoplamentos, massa e ξ	83
6.4	Quebra de simetria e fluxo do GFR para a dimensão anômala	85
6.5	Considerações finais	91

7 Conclusões e perspectivas**93****Bibliografia****97**

CAPÍTULO 1

Introdução

A física teórica tem testemunhado realizações excepcionais, como por exemplo o desenvolvimento da Mecânica Quântica (MQ) e da Relatividade Geral (RG). Nos últimos noventa anos, a Teoria Quântica de Campos (TQC) foi desenvolvida e agora possuímos uma estrutura teórica ampla e bem definida que usamos para compreender o Cosmos e as interações fundamentais.

A RG [1], juntamente com suas extensões diretas formam a base para qualquer investigação em TQC no espaço-tempo curvo. A principal afirmação da RG é que o campo gravitacional não é um campo como os outros, mas a característica geométrica fundamental do espaço-tempo. E ainda hoje, quando se pensa em teorias de gravitação, a RG é a melhor teoria que temos, mesmo após cem anos de sua criação. Toda a teoria de gravitação atual está baseada principalmente na RG e esta tem se mantido como um modelo de gravitação e cosmologia de grande sucesso pois tem passado com êxito por muitos testes observacionais e experimentais [2,3]. Um dos primeiros testes da RG foi a observação do desvio da luz devido à ação da força gravitacional exercida pelo Sol, cuja comprovação observacional [4] veio a partir de um eclipse solar total ocorrido em 29 de maio de 1919, sendo as fotografias feitas na cidade de Sobral no Ceará, decisivas na comprovação de tal

fenômeno. Vale ainda citar que recentemente a RG passou com êxito por mais um teste, as ondas gravitacionais foram detectadas [5], sendo o anúncio feito pelos pesquisadores do projeto LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) em 11 de fevereiro de 2016.

Relação da RG com a TQC

Se a RG é considerada como um dos pilares da física moderna, então a TQC, considerada a base para a compreensão da matéria a partir da física das partículas elementares, seria o outro. No entanto, a forma de conciliar a TQC com RG, de uma maneira completamente consistente, ainda é uma questão em aberto. Vamos considerar alguns aspectos nesta tentativa de conciliação.

TQC no espaço-tempo curvo clássico (teoria semiclássica)

A TQC, que forma a base da moderna física das partículas elementares, é um modelo de teoria que unifica a relatividade especial (RE) com a MQ. Ela é definida no espaço plano de Minkowski [6–8], que é uma excelente aproximação quando se trata de descrever o comportamento das partículas microscópicas em campos gravitacionais fracos, como os encontrados aqui na Terra.

Uma vez que na RG, a matéria exerce influência gravitacional e curva o espaço-tempo, se fez necessário estudar a propagação de partículas e ondas sobre esse fundo curvo. Portanto nada é mais natural que o estudo do comportamento de campos quânticos sobre espaços curvos. Esse campo de pesquisa que trata os campos de matéria do ponto de vista quântico, mantendo o campo gravitacional clássico, ficou conhecido como TQC em espaço-tempo curvo [9–15]. A TQC no espaço-tempo curvo tem a finalidade de descrever situações em que a gravidade é forte o suficiente para influenciar (quanticamente) a matéria, mas ainda não forte o suficiente para exigir a sua própria quantização. Usando esse formalismo, pode-se demonstrar por exemplo, que buracos negros emitem um espectro de corpo negro de partículas conhecido como radiação de Hawking [16], levando à possibilidade de que eles evaporem ao longo do tempo. Esta radiação desempenha um papel importante para a termodinâmica dos buracos negros.

Gravitação Quântica - GQ

A procura de uma coerência entre a descrição quântica da matéria e a descrição geométrica do espaço-tempo, bem como o aparecimento de singularidades (onde escalas de comprimento da curvatura se tornam microscópicas), indicam a necessidade de uma teoria completa de GQ. Para uma adequada descrição do interior dos buracos negros e do universo primordial, por exemplo, é necessária uma teoria em que a gravidade e a geometria associada ao espaço-tempo sejam descritas na linguagem da física quântica. Apesar dos grandes esforços dos últimos setenta anos, nenhuma teoria completa e consistente de GQ é conhecida atualmente, apesar de existir um grande número de candidatos, alguns deles promissores. Mas todas as teorias candidatas continuam a ter grandes problemas formais e conceituais para vencer. Elas também enfrentam o problema comum de que, por enquanto, não há nenhuma maneira de se comprovar experimentalmente as previsões teóricas da GQ (portanto, nenhuma maneira de se decidir entre as teorias candidatas). Essa dificuldade de comprovação experimental vem do fato de que os efeitos quânticos gravitacionais são muito fracos (na escala de laboratório) e portanto de difícil detecção. Há esperança de que isso mude à medida em que a obtenção de novos dados vindos de observações cosmológicas e experimentos de física de partículas (como as realizadas no LHC) em escalas de energia cada vez mais altas se tornam possíveis.

Uma outra importante característica e/ou limitação da RG, fundamental para o desenvolvimento do assunto dessa tese, é o aparecimento de fronteiras espaço-temporais conhecidas como singularidades. Intuitivamente, uma singularidade espaço-temporal é um "lugar" onde a curvatura explode ou outro comportamento patológico da métrica ocorre. As singularidades não podem de forma alguma serem negligenciadas, uma vez que elas surgem nas mais simples e importantes soluções que correspondem às principais áreas de aplicações da RG, como por exemplo, nas soluções de Schwarzschild ou de Kerr. O ponto principal do problema das singularidades é que uma vez que elas de fato existem, isso faz com que a RG não seja válida em todas as escalas de energia. Por isso, somos forçados a supor que em escalas de distâncias muito pequenas e/ou quando a curvatura do espaço-tempo se torna muito grande, o fenômeno gravitacional precisa ser descrito por alguma outra teoria que seja mais geral do que a RG. Mas devido ao sucesso da RG clássica, espe-

ramos que essa nova teoria mais geral coincida com a RG no limite de grandes distâncias (baixas energias).

De acordo com argumentos dimensionais, nas regiões próximas às singularidades, os efeitos quânticos se tornam relevantes. Nessa vizinhança, suficientemente próxima das singularidades, encontra-se densidade de energia e componentes dos tensores de curvatura de uma ordem de magnitude do que chamamos de escala de Planck, ou seja, dizemos que os efeitos quânticos da gravidade estão associados às unidades de Planck de tempo, comprimento e massa. A idéia da escala de Planck parte da suposição de que só existem três constantes fundamentais na natureza, sendo elas a velocidade da luz c , a constante de Planck \hbar e a constante de Newton G , onde

$$\begin{aligned} c &= 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}, \\ \hbar &= 1,054 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}, \\ G &= 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

É em termos destas constantes que se constrói, de uma maneira única, as quantidades com dimensão de tempo t_P , comprimento l_P e massa M_P que são respectivamente, o tempo de Planck, o comprimento de Planck e a massa de Planck, onde

$$\begin{aligned} t_P &= G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-5/2} \approx 0,7 \times 10^{-43} \text{ s}, \\ l_P &= G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-3/2} \approx 1,4 \times 10^{-33} \text{ cm}, \\ M_P &= G^{-1/2} \hbar^{1/2} c^{1/2} \approx 0,2 \times 10^{-5} \text{ g} \approx 10^{19} \text{ GeV}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Essas unidades são essenciais em várias áreas da física teórica e podem ser usadas de diferentes maneiras. Em física de partículas é comum considerar $c = \hbar = 1$ e usar GeV como unidade de medida de todas as grandezas. Uma vez que as principais quantidades a serem medidas são energia e momento das partículas, todas essas quantidades são mais ou menos comparáveis entre si e logo medi-las em GeV se prova uma escolha útil.

Uma outra possibilidade seria supor que a M_P seja a medida universal. Se fixamos $M_P = 1$, isso implica $G = 1$ e então tudo passa a ser medido em potências da massa de Planck M_P : tempo, temperatura, massa, energia, volume, pressão e etc. Em GQ, esse é sem dúvidas, o melhor sistema de unidades possível, pois está todo baseado nas unidades

fundamentais e não requer qualquer informação adicional, nem mesmo é necessário indicar a dimensão das grandezas. Ao mesmo tempo, esse sistema de unidades tem limitações óbvias em outras áreas.

A existência de unidades fundamentais indica que deve haver uma física fundamental. Uma vez que as quantidades (1.2) são as unidades fundamentais e envolvem c , \hbar e G ao mesmo tempo, somos levados à interpretação de que essa escala fundamental corresponda a algum efeito quântico gravitacional relativístico. A RG deve ser modificada. Entretanto, na escala de Planck, essa interpretação é ambígua. Por exemplo podemos imaginar duas diferentes situações: a quantização da própria métrica (ver capítulo 3) e a quantização dos campos de matéria no fundo clássico (ver capítulo 6).

Mesmo com todas as dificuldades em se quantizar a gravidade, isso não significa que não temos qualquer tipo de previsões gravitacionais quânticas. Uma alternativa para se evitar esses problemas é tratar a gravidade diferente da maneira como se tratam as outras forças e supor, a priori, que esta não deva ser quantizada. Uma das formas de se fazer isso é usar a chamada abordagem semiclássica (para uma revisão ver [17]), um dos mais importantes e bem compreendidos aspectos de GQ. Essa abordagem é uma aproximação da teoria de GQ onde os campos de matéria são quantizados enquanto a métrica é tratada como um fundo clássico, ou seja, o espaço-tempo onde os campos se propagam é clássico, mas dinâmico. Através da aplicação de considerações semiclássicas, se espera obter alguma idéia sobre a estrutura da teoria. Aqui a principal dificuldade é derivar as correções quânticas para a ação clássica da gravidade. Essas correções, apesar de desconhecidas por completo, possuem inúmeras aplicações em Cosmologia e física de Buracos Negros. Além disso, dependendo do papel destas contribuições quânticas, pode-se ou não justificar a importância de outros modelos de GQ, incluindo por exemplo, a teoria de cordas.

Como já mencionado, os efeitos gravitacionais quânticos são extremamente fracos o que dificulta a comprovação experimental e, por esta razão, a possibilidade de testar experimentalmente a gravidade quântica não tinha recebido muita atenção antes do final da década de 90. No entanto, na última década, os físicos perceberam que a evidência para efeitos gravitacionais quânticos pode orientar o desenvolvimento da teoria. Dado que o desenvolvimento teórico tem sido lento, o campo de gravidade quântica fenomenológica,

que estuda a possibilidade de testes experimentais, obteve maior atenção. As possibilidades mais largamente adotadas para a gravidade quântica fenomenológica incluem violações de invariância de Lorentz, impressões de efeitos gravitacionais quânticos na radiação cósmica de fundo (em particular, a sua polarização) e decoerência induzidos por flutuações na espuma do espaço-tempo. Em todos os casos, tratam-se de pequenos resíduos da época em que a escala de energia no Universo era muito grande.

A principal desvantagem em se quantizar a gravidade é a dificuldade em se formular uma versão quântica perturbativa da RG. Devido à natureza dimensional da constante gravitacional G , essa versão quântica perturbativa da RG não é renormalizável. Há muitas tentativas em se formular uma versão completa e renormalizável da RG quântica, mas até agora não há um sucesso real nesse sentido. A aplicação mais importante tem sido no estudo da física de altas energias. O problema central da gravitação quântica é que as técnicas computacionais usadas com sucesso em outras teorias (como por exemplo na eletrodinâmica quântica), não dão resultados consistentes quando aplicadas à RG quântica.

Apesar da RG quântica perturbativa ser uma teoria não renormalizável (o que na prática significa dizer que a teoria precisa de um número infinito de parâmetros para ser descrita, o que experimentalmente é inviável), é possível extrair desta, importantes informações sobre esses parâmetros que descrevam a teoria, as chamadas constantes de acoplamento. Normalmente o que se faz é usar a abordagem do grupo de renormalização (GR) para construir as equações relativas a esse grupo e verificar o *running* dos acoplamentos da teoria em questão variando a escala de energia do limite infravermelho (IV) ao ultravioleta (UV). Pode-se com isso verificar se no Universo primordial, por exemplo, houve um forte acoplamento entre os campos ou ainda comprovar a inflação de Higgs, entre outras coisas. Baseando-nos nessa premissa, o ponto principal dessa tese é o estudo de diferentes GR aplicado aos diferentes modelos de GQ. Aqui o nosso principal objetivo é coletar, a partir do tratamento quântico dos modelos abordados nos capítulos que seguem, o maior número possível de informações.

Modelos teóricos existentes de GQ

Como já mencionado antes, existem vários modelos teóricos de quantização da gravidade. Algumas abordagens veem a RG como a teoria que precisa ser modificada enquanto a TQC estaria correta e seria aplicável, já outras, veem a RG como a teoria correta e aplicável, sugerindo que a TQC seja modificada e há ainda aquelas que acreditam que ambas, RG e TQC sejam apenas limites de aplicação de uma outra teoria mais profunda. Entre os modelos conhecidos, citamos a seguir apenas alguns (lembrando que a maior parte desses modelos não é o de interesse e aplicação nessa tese, de modo que não entraremos em detalhes e descreveremos aqui os modelos apenas para mostrar ao leitor o quão amplo e ativo é esse campo de pesquisa e como ainda precisamos evoluir no nosso estudo).

Abordagens perturbativas e suas extensões

- Teoria de cordas

Esse programa de quantização da gravidade tem suas raízes, indiretamente, na observação, que remonta à década de 30. A idéia original e ainda proeminente por trás da teoria de cordas, é substituir as partículas pontuais da TQC (fótons, elétrons, etc) por objetos extensos unidimensionais chamados cordas [18]. No desenvolvimento inicial da teoria, foi reconhecido que a construção de uma teoria quântica de cordas consistente requer que as cordas estejam definidas em um espaço com o número de dimensões maior do que os três que são observados, por exemplo, teoria de cordas que contém férmions, bem como bósons, deve ser formulada em nove dimensões espaciais e uma dimensão temporal. As cordas podem ser abertas ou fechadas e possuem um espectro vibracional que descreve todos os campos observados. Os vários modos de vibração correspondem às várias partículas, uma das quais é o gráviton (uma partícula sem massa, com spin-2 e que é responsável por mediar as interações gravitacionais). As teorias resultantes não precisam ser perturbativamente renormalizáveis. Os cálculos perturbativos no ramo da teoria de campos efetiva são matematicamente tratáveis. Uma vez que a teoria de perturbação é uma ferramenta quase indispensável para os físicos, esse ponto é considerado de extrema importância. Para um estudo mais recente dessa teoria, podemos citar [19].

- GQ com termos de derivadas superiores (HDQG - em inglês)

A essa altura já é bem sabido que a forma tradicional de se quantizar a RG leva a uma teoria não renormalizável [20–22]. Uma forma alternativa de se quantizar a gravidade é introduzir na ação clássica gravitacional alguns termos de derivadas superiores tratando-os ao mesmo pé de igualdade com que se tratam os termos de derivadas inferiores (termos de Einstein-Hilbert e constante cosmológica) de tal modo que a nova teoria quântica seja renormalizável [23] (ver também [24]). A renormalizabilidade dessa teoria nos permite estabelecer a liberdade assintótica no limite UV [25–27] e explorar o possível papel da GQ no comportamento assintótico para modelos GUT [28] (Grand Unified Theory ou em português, Teoria da Grande Unificação).

O preço que se paga para a renormalizabilidade de uma GQ com derivadas superiores é o pólo não físico no setor de spin 2 do propagador no nível da árvore da GQ renormalizável. O pólo corresponde a um estado de energia cinética negativa. Esses estados não físicos são chamados *ghosts* (fantasmas) [23] massivos e possuem massa da magnitude da escala de Planck, esses fantasmas comprometem a unitariedade da matriz-S tornando toda essa abordagem bastante duvidosa.

- Teoria de Einstein-Cartan

O sucesso da RG tem estimulado inúmeras generalizações desta teoria. As teorias de gravitação modificada têm recebido atenção considerável devido a muitas razões, tais como a adaptabilidade com a física quântica, a ligação da gravitação com outras interações, a incorporação do spin da matéria, etc. A teoria de Einstein-Cartan (EC) da gravidade é a extensão mais simples possível da teoria da RG. Essa teoria permite que o espaço-tempo tenha torção em adição à curvatura e relaciona a torção à densidade de momento angular intrínseco da matéria, o spin. Assim como a RG, essa também é uma teoria clássica de gravitação. Esta modificação da RG foi apresentada em 1922 por Élie Cartan [29], antes da descoberta do spin. Do ponto de vista moderno, ela é motivada pelo desejo de fornecer uma descrição simples da influência do spin da matéria gravitacional.

Trabalhos importantes nessa teoria têm sido desenvolvidos por Friedrich Hehl e colaboradores [30, 31] desde a década de 70 (veja também [32] para uma revisão dos aspectos

do espaço-tempo com torção). Recentemente, o interesse na teoria de EC tem sido impulsionado em direção às implicações cosmológicas, porque se singularidades são inevitáveis na teoria da RG de Einstein, a teoria de EC levanta esperanças de evitar a singularidade gravitacional no início do Universo através do spin da matéria. A teoria é ainda considerada viável e continua a ser um tópico ativo na comunidade física. Veremos em detalhes uma aplicação original desenvolvida por nós no capítulo 3 dessa tese.

Abordagens não perturbativas

- *Loop quantum gravity* (GQ em laços)

Esta é uma teoria quântica do espaço-tempo que incorpora as noções de espaço e tempo da RG à TQC [33]. Um ponto relevante aqui é citar que na RG o espaço é contínuo. Em cada parte dele pode-se definir regiões de volumes arbitrariamente pequenos e cada pequena região pode ser dividida em regiões ainda menores e assim sucessiva e continuamente. Na LQG o espaço passa a ser discreto. O aspecto mais importante desse modelo de GQ é que ele prevê que o espaço não é mais infinitamente divisível, mas que ele tem uma estrutura granular na escala de comprimento de Planck, o que elimina as divergências UV que aparecem na TQC padrão. O estado quântico do espaço-tempo é descrito aqui por meio de uma estrutura matemática denominada redes de spin. Essas redes não representam estados quânticos de um campo no espaço-tempo, elas representam estados quânticos diretamente do espaço-tempo. Essa rede evolui ao longo do tempo em etapas discretas.

- *Asymptotic safety* (segurança assintótica) em GQ

Os problemas da TQC perturbativa em relação ao comportamento UV da gravidade têm levado ao pessimismo generalizado sobre a possibilidade de se construir uma TQC fundamental para a gravidade. Em vez disso, nós nos acostumamos a pensar em RG como uma teoria de campo efetiva, o que só dá uma descrição precisa da física gravitacional em baixas energias. O formalismo de teorias de campo efetivas proporciona um quadro coerente em que cálculos quânticos podem ser realizados mesmo quando a teoria não é renormalizável. Weinberg [34] deu uma descrição generalizada e não perturbativa de

renormalizabilidade chamado de *asymptotic safety* e sugeriu que a RG pode satisfazer essa condição, tornando-se uma TQC consistente em todas as escalas de energia.

Asymptotic safety é um conjunto de condições, com base na existência de um ponto fixo não trivial (diferente de zero) para o fluxo do grupo de renormalização que faz uma TQC consistente até valores arbitrários de altas energias. A chave da teoria é a existência desse ponto fixo não trivial que controla o comportamento das constantes de acoplamento no ultravioleta (UV) e torna as quantidades físicas seguras de divergências nesse regime. A essência dessa abordagem é a observação de que pontos fixos não triviais do GR podem ser utilizados para generalizar o processo de renormalização perturbativa. Em uma teoria assintoticamente segura os acoplamentos não precisam ser pequenos ou tenderem a zero no limite de altas energias, mas sim tenderem a valores finitos, ou seja, se aproximarem de um ponto fixo UV não trivial. O *running* das constantes de acoplamento, isto é, sua dependência com a escala descrita pelo GR é então especial no limite UV no sentido de que todas as suas combinações adimensionais permanecem finitas. Isso é suficiente para evitar divergências não físicas, por exemplo, na amplitude de espalhamento.

Mostramos a seguir a forma como o conteúdo dessa tese se organiza nos capítulos que se seguem.

Estrutura da tese

O capítulo 2 apresenta uma breve revisão sobre os elementos e conceitos de Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo curvo. Apresentaremos ao leitor o modelo de gravitação semiclássica, veremos como é feita a escolha da ação clássica de vácuo, mostraremos o método de Schwinger-DeWitt, a forma mais elegante de se calcular as correções quânticas a *1-loop* para os campos de matéria no espaço-tempo curvo.

O capítulo 3 tem como objetivo o cálculo das divergências a *1-loop* da teoria de Einstein-Cartan quântica considerando a adição do termo de Holst. Em particular, estudamos a versão do GR *on-shell* para essa teoria e construímos as equações do GR que permitirão analisar o *running* das constantes de acoplamento associadas às correntes vetorial e vetorial axial e ao parâmetro de Barbero-Immirzi.

O capítulo 4 trará um outro aspecto da teoria quântica de gravitação. Aqui será mostrado em detalhes o cálculo a *1-loop* na abordagem da renormalização física, aquela baseada na subtração de momentos. Com o objetivo de corrigir pequenos erros nos trabalhos publicados por Gorbar e Shapiro [35, 36] para o desenvolvimento em breve de um trabalho nesse sentido, daremos os detalhes da derivação dos fatores de forma gravitacionais usando o método do *heat kernel*. As contas desse artigo nunca foram antes apresentadas em detalhes. Isso será feito para os campos escalar, vetorial e fermiônico.

O capítulo 5 traz à discussão um método não perturbativo de grupo de renormalização, o chamado grupo funcional de renormalização (GFR). Esse capítulo tem como objetivo introduzir o leitor a essa abordagem de GR que difere das demais por ter como sua base principal uma equação funcional diferencial conhecida como equação de Wetterich. Essa revisão se faz necessária pois no capítulo seguinte aplicaremos essa abordagem pela primeira vez a uma teoria escalar no espaço-tempo curvo.

Já no capítulo 6, nos interessa explorar o *running* do parâmetro não-mínimo ξ e demais constantes de interação de um campo escalar real no espaço-tempo curvo. Isso é feito dentro da contexto do GFR o que nos permite obter as equações do GFR para os respectivos acoplamentos. A trajetória do GR foi numericamente explorada para diferentes conjuntos de dados iniciais. Nesse capítulo trabalhamos no fundo curvo e a métrica não é quantizada, ou seja, usamos a abordagem semiclássica.

No capítulo de conclusões e perspectivas, descrevemos os resultados obtidos ao longo dessa tese e ainda apresentamos os principais projetos e perspectivas futuras associados ao presente trabalho.

Noções de Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo curvo

A Teoria Quântica de Campos (TQC) no espaço-tempo curvo tem sido uma área notavelmente frutífera. Ela pode ser usada para explicar como a estrutura em grande escala do universo e as anisotropias da radiação cósmica de fundo que observamos hoje surgiram. Similarmente, ela providencia uma profunda conexão entre a RG, a termodinâmica e a TQC padrão. Nesse capítulo, fazemos uma breve revisão dos elementos de TQC no espaço-tempo curvo a fim de apresentar as notações e convenções usadas ao longo da presente tese. Uma introdução geral da TQC no espaço curvo pode ser encontrada nas notas de aula [37] e nos livros [9, 12, 13, 38]. Desenvolvemos essa revisão nos baseando principalmente no livro de Buchbinder, Odintsov e Shapiro [12] e no artigo de revisão de Shapiro [17].

2.1 A abordagem semiclássica

Um dos modelos de QG mais importantes e bem compreendidos é a abordagem semiclássica. Nesse modelo, considera-se que os campos de matéria sejam quantizados, mas a métrica de fundo, que descreve o espaço-tempo é tratada como clássica, entretanto, a métrica possui uma dinâmica clássica, definida pela sua ação. Essa última inclui a parte clássica e correções quânticas.

A escolha da ação clássica

A primeira tarefa é definir a ação clássica da matéria e da gravidade. Isso pode ser feito de inúmeras maneiras, por conveniência, escolhemos a forma mais simples e natural e que providenciará a consistência da teoria no nível quântico. Para isso ser feito, é necessário que algumas condições sejam impostas. São elas

- * localidade e covariância geral para ambos os setores, matéria e gravidade,
- * preservação de todas as simetrias da ação clássica, no espaço-tempo de Minkowski,
- * não introdução de novos parâmetros que possuam dimensão de $(massa)^{-1}$,
- * correspondência com a teoria no espaço-tempo plano.

A partir dessas condições, a ação que procuramos será

$$S = S_{min} + S_{nao-min} + S_{vac}, \quad (2.1)$$

onde o termo S_{min} é a versão covariante da ação que já conhecemos da teoria (em espaço plano), o termo $S_{nao-min}$ é o termo dos campos de matéria que deve satisfazer a todas as condições descritas acima. Para um campo escalar, por exemplo, a generalização não mínima da ação é

$$S_{nao-min} \equiv S_{escalar} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \{g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 + \xi \phi^2 R\} \quad (2.2)$$

e o termo $S_{vac} = S_{EH} + S_{HD}$, é a ação de vácuo e terá a forma mais simples possível a fim de se manter a teoria renormalizável. Nela, S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert e S_{HD} é a ação com termos de derivadas superiores. A escrevemos então como

$$S_{vac} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{16\pi G} (R + 2\Lambda) + a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2 \right\}, \quad (2.3)$$

onde $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\mu\nu}^2 + (1/3)R^2$ é o quadrado do tensor de Weyl (em 4 dimensões) e $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$ é a densidade Lagrangeana do termo de Gauss-Bonnet ou densidade de Euler (em 4 dimensões). Note que os termos de derivadas superiores na equação (2.3) não são correções quânticas, eles precisam ser introduzidos já a nível clássico a fim de se manter a teoria renormalizável a nível quântico. É importante citar que esses termos não se manifestam em experimentos de gravitação usuais ou a baixas energias devido ao fato do termo de Einstein-Hilbert ter coeficiente da ordem de massa de Planck ao quadrado ($M_p^2 = G^{-1}$), o que faz o seu efeito muito mais forte. Esses termos se tornam interessantes apenas no estudo de sistemas de alta energia, como o Universo primordial, por exemplo.

2.2 A ação efetiva

Na abordagem de todo o trabalho desenvolvido nessa tese, o objeto de maior interesse e importância é a ação efetiva $\Gamma[\varphi]$, pois é a partir dela que obtemos toda a informação física relevante que nos permitirá construir a TQC. Vamos então rever a parte que aborda a ação efetiva do ponto de vista quântico. A ação efetiva é fundamentada numa grandeza chamada gerador funcional das funções de Green no espaço-tempo curvo, denominado $Z[j]$. Pelo método da integral de trajetória, esse gerador funcional é definido como

$$Z[j] = \int d\phi e^{i(S[\phi] + (j, \phi))} = \int d\phi e^{i(S_0 + S_{int} + (j, \phi))} \quad \text{com} \quad (j, \phi) = \int d^d x j(x) \phi(x), \quad (2.4)$$

onde S_0 é a ação clássica, S_{int} é a ação de interação entre os campos de matéria. No espaço-tempo curvo, tanto S quanto Z dependem também da métrica, mas não mostramos esta dependência explicitamente. Usando notações condensadas, ϕ denota um conjunto de campos de matéria, j denota um conjunto de fontes externas correspondentes, enquanto (j, ϕ) representa a soma sobre todos os índices e integração sobre todas as variáveis contínuas do espaço-tempo.

O campo médio ϕ é definido como

$$\phi(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \quad (2.5)$$

e representa a equação para se encontrar a fonte $j(x)$. Aqui $W[j]$ é o funcional de Schwinger (funcional gerador das funções de Green conectadas) e se relaciona com o funcional gerador

$Z[j]$ por

$$W[j] = -i \log Z[j] \quad \text{ou se preferir} \quad Z[j] = e^{iW[j]}. \quad (2.6)$$

A transformação de Legendre modificada de $W[j]$ é a ação efetiva

$$\Gamma[\phi] = (j, \phi) - W[j], \quad (2.7)$$

onde j é solução da equação (2.5). A ação efetiva admite expansão em *loops*

$$\Gamma[\phi] = S_{vacuo}[\phi] + \bar{\Gamma}^{(1)} + \bar{\Gamma}^{(2)} + \bar{\Gamma}^{(3)} + \dots \quad (2.8)$$

e sua covariância foi mostrada por exemplo em [12, 17, 39]. A contribuição de *1-loop* é a mais simples, mas já suficientemente boa para a maioria das aplicações. Ela é escrita como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} \quad \text{onde} \quad \hat{H} = \hat{H}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x) \delta\phi(y)} \Bigg|_{\phi=0} \quad (2.9)$$

é a parte bilinear dos campos quânticos referentes à ação clássica e onde Tr significa a operação de tirar o traço do operador onde ele atua. A ação efetiva Euclidiana a *1-loop* correspondente é escrita como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[\hat{1} \square + 2 \hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi} \right], \quad (2.10)$$

onde

$$\begin{aligned} \square &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu, \\ \hat{h}^\mu &= g^{\mu\nu} \hat{h}_\nu, \\ \hat{\Pi} &= \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6} R + \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu + \nabla_\mu \hat{h}^\mu. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A equação dada em (2.9) nos permite calcular a correção de *1-loop* da ação efetiva, no entanto aparecem termos que possuem divergências. Para tratar esse problema é necessário a adição de contratermos ΔS , termos que cancelam as divergências. A ação que contém esses contratermos é chamada ação clássica renormalizada. Vale citar que, para que seja possível a expansão em *loops* da ação efetiva, o campo ϕ precisa ser reparametrizado usando-se um método conhecido como método do campo de fundo [40] (veja também [12]).

2.3 O método de Schwinger-DeWitt

A expansão de Schwinger-DeWitt [9, 20, 41] é a forma mais elegante e prática de se calcular de maneira covariante as correções quânticas a *1-loop* para a ação efetiva, especialmente divergências em espaço-tempo curvo. Aqui apresentamos somente uma breve revisão desse método.

Começemos por escrever $\text{Tr} \ln \hat{H} = \ln \text{Det} \hat{H}$ na representação da integral de tempo próprio (s) como se segue

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}, \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-is\hat{H}} | x' \rangle &= \hat{U}(x, x'; s) = \hat{U}_0(x, x'; s) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'), \\ \hat{U}_0(x, x'; s) &= \frac{1}{(4\pi is)^{n/2}} D^{1/2}(x, x') \exp\left(-\frac{\sigma(x, x')}{2is} - ims^2\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$D(x, x') = \det[-\partial_\mu \partial_\nu \sigma(x, x')], \quad (\text{determinante de Van Vleck-Morette}),$$

onde $\hat{a}_k(x, x')$ são os coeficientes de Schwinger-DeWitt e $\sigma(x, x')$ é a distância geodésica entre x e x' . Os coeficientes de Schwinger-DeWitt podem ser calculados e chega-se à [9]

$$\begin{aligned} [\hat{a}_0]_{x \rightarrow x'} &= \hat{a}_0(x, x) = \hat{1}, \\ [\hat{a}_1]_{x \rightarrow x'} &= \hat{a}_1(x, x) = \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{1}{6}R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu, \\ [\hat{a}_2]_{x \rightarrow x'} &= \hat{a}_2(x, x) = \frac{\hat{1}}{180}(R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \nabla^2 R) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}(\nabla^2 \hat{P}) + \frac{1}{12}\hat{S}_{\mu\nu}^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

com

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{1}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu \quad (2.15)$$

e onde

$$\hat{a}_k(x, x) = \lim_{x \rightarrow x'} \hat{a}_k(x, x') = \hat{a}_k|_{x \rightarrow x'}.$$

Esses coeficientes estão diretamente relacionados respectivamente às divergências quárticas, quadráticas e logarítmicas, sendo essa última universal (independe do esquema utilizado).

Cálculo dos demais coeficientes \hat{a}_k são possíveis [42], apesar de serem mais complicados, mas isso não se faz necessário aqui.

Voltemos novamente à expressão

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}} \\ &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{D^{1/2}(x, x')}{(4\pi is)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\sigma(x, x')}{2is} - ims^2\right) \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \end{aligned} \quad (2.16)$$

As divergências UV correspondem ao limite inferior da integral e que em $n = 4$ só os três primeiros termos serão divergentes. O termo mais importante para nós será o terceiro, pois ele nos fornece as divergências logarítmicas, que como mencionado antes, são universais.

Assim, a parte logaritmicamente divergente da ação efetiva é escrita como

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} &= -\frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \hat{a}_2(x, x) \\ &= -\frac{\mu^{(n-4)}}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \left[\frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \nabla^2 R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\nabla^2 \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\varepsilon = (4\pi)^2(n-4)$ na regularização dimensional [43]. Essa é a fórmula de Schwinger-DeWitt para o cálculo das divergências logarítmicas a *1-loop* da ação efetiva.

2.4 O grupo de renormalização

Muito se falou até agora das divergências que aparecem na teoria quando o tratamento é quântico e feito perturbativamente. Precisamos então tratar e/ou eliminar essas divergências para que os nossos resultados sejam físicos. Um esquema consistente que nos permite eliminar tais divergências e obter resultados finitos é a teoria geral da renormalização. O método de renormalização de uma teoria, foi desenvolvido pela primeira vez na eletrodinâmica quântica [44], para dar sentido às integrais infinitas que apareciam ao se tratar a teoria de perturbação. Mas uma consequência desse processo de renormalização é que os resultados obtidos no final podem depender da escolha da escala de renormalização μ . Existe um grupo de transformações associadas com a variação desse parâmetro μ e que possui uma simetria que surge também devido a esse parâmetro. Esse grupo é chamado de grupo de renormalização (GR).

Em física teórica, GR é uma ferramenta matemática que permite a investigação sistemática das mudanças de um sistema físico visto de diferentes escalas de distância (energia). Em outras palavras, é o procedimento em que se usa os parâmetros das equações de campo da teoria para absorver as divergências que surgem nas integrais da teoria de perturbação.

Vamos considerar o GR seguindo [12]. Começemos por escrever os funcionais geradores das funções de Green conectadas *nuas* (*bare*) e renormalizadas, respectivamente

$$\begin{aligned} e^{iW_0[j_0]} &= \int D\phi_0 e^{i(S_0[\phi_0, p_0] + \phi_0 j_0)}, \\ e^{iW[j]} &= \int D\phi e^{i(S[\phi, p] + \phi j)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde p aqui está representando um conjunto de parâmetros da teoria, e p_0 são os parâmetros nus correspondentes. Vamos agora considerar que de acordo com a renormalização multiplicativa $S_0[\phi_0, p_0] = S[\phi, p]$ e vamos supor a mudança de variável tal que $\phi_0 = Z_1^{1/2} \phi$ onde ϕ e ϕ_0 são campos escalares médios. Note que aqui estamos apresentando o método fazendo uso dos campos escalares, o mesmo poderia ser generalizado para qualquer outro campo. Todas essas considerações nos permitem concluir das equações dadas em (2.18) que $W_0[j_0] = W[j]$ e, conseqüentemente, para a ação efetiva

$$\Gamma_0[\phi_0] = W_0[j_0] - \phi_0 j_0 = \Gamma[\phi], \quad (2.19)$$

o que nos permite escrever

$$\Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi_0, p_0, n] = \Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n], \quad (2.20)$$

onde n é o parâmetro da regularização dimensional e μ é a escala de energia típica. Como o lado esquerdo da equação anterior não depende de μ temos

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0, \quad (2.21)$$

o que nos leva a

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial}{\partial p} + \int d^d x \sqrt{-g} \mu \frac{d\phi(x)}{d\mu} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0. \quad (2.22)$$

Definindo

$$\mu \frac{dp}{d\mu} = \beta_p(n) \quad \text{e} \quad \mu \frac{d\phi(x)}{d\mu} = \gamma(n) \phi(x), \quad (2.23)$$

que são respectivamente chamadas de função beta e função gama. Com (2.23) podemos reescrever (2.22) como

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_p(n) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma(n) \int d^d x \sqrt{-g} \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0. \quad (2.24)$$

Essa é a chamada equação do GR para a ação efetiva e pode ser usada no espaço curvo aplicada a diferentes modelos e teorias (como exemplo de aplicação dessa abordagem de GR ver capítulo 3). O parâmetro μ dessa equação pode ser interpretado em termos de valores físicos, por exemplo, em eletrodinâmica quântica μ é interpretado como escala de energia.

Outros métodos de cálculo em TQC no espaço curvo

Muitos são os métodos práticos de cálculos empregados para o estudo das correções quânticas em espaço curvo. Farei uma breve descrição de dois métodos bem populares, para uma descrição histórica, consulte [12, 38].

O esquema de subtração de momentos

Um método de cálculo não covariante é o chamado esquema de subtração de momentos [45]. Sabe-se que em RG não é possível a representação de momentos de modo geral. Isso acontece porque diferentes pontos do espaço-tempo possuem os seus próprios espaços tangentes, o que exige representação de momentos diferentes. Isso pode ser corrigido usando-se coordenadas normais de Riemann [46], uma vez que isso torna possível reescrever as grandezas importantes da teoria em torno de um ponto fixo P e com coordenadas x_0^μ possibilitando a representação de momentos nesse ponto. Essa abordagem se baseia no uso de coordenadas geodésicas e na expansão das grandezas de interesse num ponto com coordenadas x_0^μ em série de potências dos desvios $x^\mu - x_0^\mu = x'^\mu$. Desta maneira todas as quantidades passam a corresponder ao mesmo ponto P e a representação de momentos se torna aplicável. O método é muito útil para se calcular quantidades locais.

O esquema de subtração mínima - SM

Ao longo dos anos, os físicos teóricos inventaram todos os tipos de regimes de renormalização. Mas desde os anos 70, um dos regimes mais populares é o esquema de subtração mínima. Para uma análise completa de como esse método pode ser aplicado em espaço-curvo pode ser encontrada em [47]. A função beta da carga efetiva, quando usando-se esse esquema, escreve-se

$$\beta_C(\overline{MS}) = \lim_{n \rightarrow 4} \mu \frac{dC}{d\mu}. \quad (2.25)$$

Para uma aplicação no espaço plano consulte [48]. Subtraindo o contratermo do momento $p^2 = M^2$, onde M é o ponto de renormalização e tomando o operador polarização, em vez de usar a definição acima, podemos usar

$$\beta_C(\overline{MS}) = \lim_{n \rightarrow 4} M \frac{dC}{dM}. \quad (2.26)$$

Com isso se obtém as correções quânticas da teoria em estudo e se escreve separadamente os termos que corrigem a constante de acoplamento que será regularizada. Esses termos dependem explicitamente dos momentos externos do sistema e para se obter as funções beta, não usamos mais a definição (2.25), calculamos diretamente a derivada

$$Cp \frac{d}{dp} \quad (2.27)$$

dos fatores de forma dessa constante da ação efetiva a *1-loop* que foi obtida a partir da ação inicial.

Os esquemas de renormalização aqui apresentados se referem aos desenvolvidos na presente tese nos capítulos 3 e 4. Uma revisão referente ao método aplicado no capítulo 6, se encontra no capítulo 5. Nos capítulos que se seguem, o leitor poderá acompanhar em detalhes o desenvolvimento e aplicação prática do esquema de renormalização de três diferentes modelos de GQ. Reforçamos que essa é uma poderosa ferramenta matemática que temos para o tratamento das divergências e obtenção do comportamento físico do nosso sistema.

A Teoria de Einstein-Cartan Quântica com o termo de Holst

O termo de Holst apresenta uma adição interessante à Teoria de Einstein-Cartan da gravidade com torção. Quando esse termo está presente, as interações de contato entre as correntes vetoriais e as correntes vetoriais axiais ganham uma componente extra que viola a paridade da teoria. Rederivamos essa interação usando uma representação simples para o termo de Holst [49]. A mesma representação serve como uma base útil para o cálculo das divergências a *1-loop* numa teoria com correntes fermiônicas externas e constante cosmológica. Além disso, exploramos as possibilidades da versão do grupo de renormalização (GR) *on-shell* e construímos as equações para o *running* dos parâmetros adimensionais relacionados às correntes e para o parâmetro de Barbero-Immirzi efetivo.

3.1 Considerações iniciais

A teoria de Einstein-Cartan atrai um crescente interesse (ver [50–52] e referências lá indicadas) porque representa a extensão mais simples possível da Relatividade Geral (RG) relacionada à introdução de um campo de torção. A presença da torção permite enriquecer a teoria ainda mais através da aplicação do termo de Holst [53], que emerge naturalmente no âmbito da *Loop Quantum Gravity* [50, 54–56]. Esse termo que viola a paridade deve atrair um interesse especial uma vez que pode, em princípio, produzir alguns observáveis mensuráveis para detectar a gravidade quântica. A fim de entender melhor esse ponto, lembremo-nos de que na teoria de Einstein-Cartan a torção se torna relevante somente na presença de correntes fermiônicas. Após ser integrada, a torção providencia a interação de contato entre tais correntes. Obviamente, a principal possibilidade para o termo de Holst, nesse respeito, está relacionada à geração da interação de contato que viola a paridade da teoria, entre as correntes fermiônicas vetoriais e as correntes fermiônicas vetoriais axiais. O primeiro objetivo desse capítulo é apresentar uma derivação muito simples do termo de Holst em termos das componentes irreduzíveis do tensor torção. Nós mostramos que o novo termo é a violação de paridade escalar mais simples possível e portanto o parâmetro de Barbero-Immirzi [57, 58] pode ser visto como uma extensão de um parâmetro extra não-mínimo que viola a paridade da ação de Einstein-Cartan. Usando essa nova forma, nós recalculamos a interação de contato entre correntes fermiônicas dependendo do parâmetro de Barbero-Immirzi e encontramos boa correspondência com os resultados prévios de outros autores [50, 55, 59, 60].

A principal motivação para o parâmetro de Barbero-Immirzi está relacionada à Gravitação Quântica (GQ), então é natural ver como pode ser o papel de tal termo nas correções de *loop*. Desde que RG quântica e também a teoria de Einstein-Cartan quântica são não renormalizáveis, essa questão não pode ser abordada no âmbito convencional de teoria Quântica de Campos para a métrica e torção. As publicações existentes nessa direção usam muitas abordagens diferentes. A primeira delas está baseada no Grupo Funcional de Renormalização (GFR) [61]. Esse método é essencialmente não perturbativo e no caso da GQ não há limite perturbativo, pelo menos no caso da RG quântica. Ao mesmo tempo,

há uma dificuldade conhecida relacionada à dependência dos resultados do grupo de renormalização funcional aplicada a teorias de calibre com a fixação do calibre [62, 63] (ver também muitas outras referências lá indicadas). De fato, a dependência com a fixação do calibre nessa teoria persiste *on-shell* [63] e leva a matriz S a depender do calibre e, possivelmente, o mesmo ocorre para outros observáveis relevantes. Pode-se esperar que a mesma forte dependência do calibre também ocorra no caso da GQ e isso cria certa dificuldade para interpretação física dos resultados nessa abordagem.

Outra possibilidade é confiar nas equações do grupo de renormalização extraídas das divergências *1-loop* quadráticas. Isso é tecnicamente possível, entretanto as ambiguidades que geralmente se reúnem em tal formulação são muito fortes e vão além das ambiguidades de fixação de calibre. Esse aspecto da GQ tem atraído significativo interesse recentemente e o resultado geral é que essas ambiguidades são geralmente incontroláveis (ver [64] e mais referências lá indicadas). Para a teoria de Einstein-Cartan com o parâmetro de Barbero-Immirzi, esse esquema foi aplicado recentemente em [65], onde resultados prévios para as divergências de *1-loop* em RG com interação de correntes fermiônicas [66] foram usadas.

No presente trabalho, utilizamos a terceira possibilidade para a teoria de Einstein-Cartan. É bem conhecido que a RG quântica pura é renormalizável *on-shell* no nível *1-loop* [20]. Isso permite se considerar por exemplo a versão reduzida *on-shell* do grupo de renormalização para a constante de Newton G e o termo cosmológico [25]. Note que essa abordagem pode ser estendida para se tornar mais informativa quando os cálculos são executados num fundo especial tal como o espaço de Sitter [67], mas nossa intenção aqui é seguir um método mais simples de [25]. Uma característica muito interessante desta abordagem é que a equação do grupo de renormalização para a combinação adimensional da constante cosmológica e da constante de Newton é independente da fixação de calibre e nesse sentido é bem definida. Claro que o grupo de renormalização *on-shell* não pode ser visto como um método completamente consistente, mas é um ponto de partida útil para lidar com a teoria de GQ. O grupo de renormalização *on-shell* a *1-loop* foi generalizado para o caso da teoria de Einstein-Cartan em [68], numa teoria com corrente vetorial axial externa. Foi mostrado que a teoria permanece renormalizável *on-shell* no *1^o-loop* na presença de tal corrente e torção quântica. Aqui nós pretendemos generalizar essas

considerações de duas formas, a saber, por inclusão de uma corrente vetorial adicional e também por introdução do termo de Holst [49]. Analisaremos em que medida a renormalizabilidade *on-shell* pode ser preservada em tal teoria e também consideraremos o grupo de renormalização *on-shell* na medida em que isto é possível.

A consideração clássica da teoria de Einstein-Cartan com o termo de Holst e duas correntes (vetorial e vetorial axial) será apresentada, assim como a derivação das divergências a *1-loop* e a análise da renormalizabilidade da teoria *on-shell* será descrita.

3.2 Representação simples para o termo de Holst

No que se segue, usaremos as notações de [32]¹, mas reproduziremos as fórmulas principais, para a conveniência do leitor. A ação total da gravidade, incluindo os termos de Einstein-Cartan e Holst, tem a forma

$$S_{EC} + S_H = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \tilde{R} - \frac{1}{2\gamma \kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $G = \kappa^2/16\pi$ é a constante de Newton, também $16\pi/\kappa^2 = M_P^2$. γ é o parâmetro de Barbero-Immirzi. O escalar de curvatura é $\tilde{R} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $\tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor de curvatura dependente da métrica $g_{\alpha\beta}$ e torção $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Essa curvatura é definida na base da conexão assimétrica

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = T^{\alpha}_{\beta\gamma} \neq 0. \quad (3.2)$$

Supondo que a derivada covariante com torção satisfaça a condição de metricidade

$$\tilde{\nabla}_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0,$$

pode-se facilmente derivar a relação entre a conexão afim e o símbolo de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$,

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + K^{\alpha}_{\beta\gamma}. \quad (3.3)$$

Aqui o tensor contorção é

$$K^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (T^{\alpha}_{\beta\gamma} - T^{\alpha}_{\gamma\beta} - T^{\alpha}_{\gamma\beta}). \quad (3.4)$$

¹Usa-se essa referência e também muitas outras fontes, e.g., [31, 69, 70] para a introdução de diferentes aspectos da gravidade com torção.

As relações correspondentes para o tensor de curvatura e escalar com torção têm a forma

$$\tilde{R}^{\lambda}_{\cdot\tau\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\cdot\tau\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} K^{\lambda}_{\cdot\tau\beta} - \nabla_{\beta} K^{\lambda}_{\cdot\tau\alpha} + K^{\lambda}_{\cdot\gamma\alpha} K^{\gamma}_{\cdot\tau\beta} - K^{\lambda}_{\cdot\gamma\beta} K^{\gamma}_{\cdot\tau\alpha}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{R} = R + 2 \nabla^{\lambda} K^{\tau}_{\cdot\lambda\tau} - K^{\tau\lambda}_{\cdot\lambda} K^{\tau\gamma}_{\cdot\gamma} + K^{\tau\gamma\lambda} K^{\tau\lambda\gamma}, \quad (3.6)$$

onde as quantidades sem til são Riemannianas sem torção. Pode-se introduzir três componentes irreduzíveis da torção da seguinte forma

$$\text{traço vetorial} \quad T_{\beta} = T^{\alpha}_{\cdot\beta\alpha}, \quad (3.7)$$

$$\text{traço vetorial axial} \quad S^{\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\alpha\beta\mu}, \quad (3.8)$$

$$\text{parte tensorial} \quad q^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma}, \quad (3.9)$$

onde a última satisfaz as condições $q^{\alpha}_{\cdot\beta\alpha} = 0$ e $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha\beta\mu} = 0$. A torção genérica pode ser facilmente expressa como

$$T_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3} (T_{\beta} g_{\alpha\mu} - T_{\mu} g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\nu} + q_{\alpha\beta\mu}. \quad (3.10)$$

Agora, substituindo (3.10) em (3.4) e (3.6), chegamos à ²

$$\tilde{R} = R - 2 \nabla_{\alpha} T^{\alpha} - \frac{2}{3} T_{\alpha} T^{\alpha} + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta\gamma} q^{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{24} S_{\alpha} S^{\alpha}. \quad (3.11)$$

Finalmente, repetindo a mesma operação com (3.5) e então com o integrando do termo de Holst, chegamos à relação, que já foi relatada em [59] (veja também [71, 72] para uma análise mais detalhada e uma lista de referências mais completa sobre a história dos termos violadores de paridade na teoria de Einstein-Cartan),

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{R}_{\alpha\beta\mu\nu} &= -\nabla_{\mu} S^{\mu} - \frac{2}{3} S^{\mu} T_{\mu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} q_{\lambda\mu\nu} \\ &= -\nabla_{\mu} S^{\mu} - \frac{2}{3} S \cdot T + \frac{1}{2} \epsilon \cdot q \cdot q. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Na última relação, introduzimos notações condensadas com pontos para as contrações de dois vetores e dois tensores. A primeira dessas notações será muito usada no que se segue.

Pode-se ver que a primeira parte do termo de Holst é bem simples na representação (3.12). Esse termo é nada mais que o termo de violação da paridade mais simples possível.

²Nós corrigimos um erro de impressão no coeficiente do termo T^2 em [32].

De fato, esse termo não foi introduzido como uma estrutura não-mínima em trabalhos prévios sobre os efeitos quânticos na gravidade com torção [68, 73] somente porque não havia interesse de violar a paridade. Por exemplo, a estrutura não mínima $\varphi^2 S^\alpha T_\alpha$ torna-se relevante no setor escalar se os termos de quebra de paridade não-mínimos $\bar{\psi}\gamma^\alpha S_\alpha\psi$ ou $\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^5 T_\alpha\psi$ são introduzidos. Nesse caso, o termo de Holst pode ser facilmente obtido como parte da ação induzida (Einstein-Cartan estendida) da gravidade com torção, e.g., ele pode resultar de algum esquema de transição de fase, incluindo quebra espontânea de simetria.

Vale citar aqui, que a forma da interação não-mínima do férmion com a torção é dada pela ação de Dirac abaixo [73]

$$S_{1/2} = i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} \left[\gamma^\alpha (\nabla_\alpha - i e \mathcal{A}_\alpha + i \eta \gamma^5 S_\alpha) - im \right] \psi, \quad (3.13)$$

com \mathcal{A}_α sendo um campo Abelian e η o acoplamento não-mínimo.

A fim de compreender melhor o efeito do termo de Holst, vamos incluir as correntes fermiônicas vetorial V^μ e vetorial axial A^μ ,

$$V^\mu = \eta_2 \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle \quad \text{e} \quad A^\mu = \eta_1 \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \rangle, \quad (3.14)$$

Note que a presença dos parâmetros não-mínimos, $\eta_{1,2}$ é a condição de consistência da teoria a nível quântico, especialmente se campos escalares e interações tipo Yukawa desses campos com férmions estiverem presentes [73] (veja também [32] e [12] para discussões aprofundadas sobre o assunto). Por razões de compacticidade de notações na parte quântica do trabalho, é melhor introduzir as correntes $J^\mu = -\kappa^2 A^\mu$ e $W^\mu = -\kappa^2 V^\mu$, tal que a ação total se torna

$$\begin{aligned} S_{total} &= S_{EC} + S_H + \int d^4x \sqrt{-g} (V \cdot T + A \cdot S) \\ &= -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R + 2\Lambda - \frac{2}{3} T^2 + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{24} S^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3\gamma} S \cdot T - \frac{1}{2\gamma} \nabla_\mu S^\mu + \frac{1}{4\gamma} \varepsilon \cdot q \cdot q + S \cdot J + T \cdot W \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde também usamos notações compactas $S^2 = S_\mu S^\mu$, $T^2 = T_\mu T^\mu$ e $q^2 = q_{\mu\nu\tau} q^{\mu\nu\tau}$.

As equações dinâmicas para as diferentes componentes da torção são

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{total}}{\delta T_\alpha} &= -\frac{4}{3} T^\alpha - \frac{1}{3\gamma} S^\alpha + W^\alpha = 0, \\
-\frac{\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{total}}{\delta S_\alpha} &= \frac{1}{12} S^\alpha - \frac{1}{3\gamma} T^\alpha + J^\alpha = 0, \\
-\frac{\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{total}}{\delta q_{\alpha\beta\gamma}} &= q^{\alpha\beta\gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

De acordo com a última equação das três dadas por (3.16), não consideraremos mais a componente $q^{\alpha\beta\gamma}$. As primeiras duas equações podem ser facilmente resolvidas na forma

$$\begin{aligned}
T^\alpha &= \frac{3\gamma}{1+\gamma^2} \left(J^\alpha + \frac{\gamma}{4} W^\alpha \right), \\
S^\alpha &= \frac{3\gamma}{1+\gamma^2} \left(W^\alpha - 4\gamma J^\alpha \right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Pode-se observar que a presença do parâmetro violador de paridade γ , leva à mistura entre as correntes vetorial e vetorial axial. Em princípio, essa mistura pode ter fortes consequências fenomenológicas e seria interessante explorá-las em física de partículas. Tal investigação poderia levar aos limites superiores de certas combinações do parâmetro de Barbero-Immirzi γ e dos parâmetros não-mínimos $\eta_{1,2}$ introduzidos em (3.14). No entanto, no presente trabalho nossa proposta não é a fenomenologia, em vez disso, focaremos nossa atenção nos aspectos mais formais da teoria, relacionados à GQ.

A equação dinâmica para a métrica na teoria (3.15) é dada por

$$\begin{aligned}
-\frac{\kappa^2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{total}}{\delta g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) - R^{\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(-\frac{2}{3} T^2 + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{24} S^2 - \frac{1}{3\gamma} S \cdot T + S \cdot J + T \cdot W \right) \\
&+ \frac{2}{3} T_\mu T_\nu - \frac{1}{24} S_\mu S_\nu + \frac{1}{6\beta} (T_\mu S_\nu + T_\nu S_\mu) = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De (3.18), escrevemos o tensor de curvatura

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad \Rightarrow \quad \text{equação de Einstein} \\
&= \Lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{3} T^2 + \frac{1}{48} S^2 - \frac{1}{6\gamma} S \cdot T + \frac{1}{2} S \cdot J + \frac{1}{2} T \cdot W \right) \\
&+ \frac{2}{3} T_\mu T_\nu - \frac{1}{24} S_\mu S_\nu + \frac{1}{6\beta} (T_\mu S_\nu + T_\nu S_\mu).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Tirando o traço de (3.19), nós temos

$$\begin{aligned} R - 2R &= 4\Lambda - \frac{4}{3}T^2 + \frac{1}{12}S^2 - \frac{2}{3\gamma}S \cdot T + 2S \cdot J + 2T \cdot W \\ &+ \frac{2}{3}T^2 - \frac{1}{24}S^2 + \frac{1}{3\gamma}S \cdot T, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$R = -4\Lambda + \frac{2}{3}T^2 - \frac{1}{24}S^2 + \frac{1}{3\gamma}S \cdot T - 2S \cdot J - 2T \cdot W. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) no lado esquerdo de (3.19), chegamos à relação

$$R_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \left(\Lambda + \frac{1}{2}S \cdot J + \frac{1}{2}T \cdot W \right), \quad (3.22)$$

onde nós introduzimos a notação útil

$$D_{\mu\nu} = \frac{2}{3}T_\mu T_\nu - \frac{1}{24}S_\mu S_\nu + \frac{1}{6\gamma}(S_\mu T_\nu + S_\nu T_\mu) \quad \text{e} \quad D = D^\mu{}_\mu. \quad (3.23)$$

Finalmente, substituindo (3.17) em (3.22), chegamos às relações *on-shell*

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \Big|_{on-shell} &= -\Lambda g_{\mu\nu} + \frac{3\gamma}{1+\gamma^2} \left(2\gamma J^2 - \frac{\gamma}{8}W^2 - J \cdot W \right) g_{\mu\nu} \\ &+ \frac{3\gamma}{1+\gamma^2} \left[\frac{\gamma}{8}W_\mu W_\nu - 2\gamma J_\mu J_\nu + \frac{1}{2}(W_\mu J_\nu + W_\nu J_\mu) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

e

$$R \Big|_{on-shell} = -4\Lambda + \frac{3\gamma}{1+\gamma^2} \left[6\gamma J^2 - \frac{3\gamma}{8}W^2 - 3W \cdot J \right], \quad (3.25)$$

onde usamos as relações

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{9\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \left(J^2 + \frac{\gamma^2}{16}W^2 + \frac{\gamma}{2}J \cdot W \right), \\ S^2 &= \frac{9\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} (W^2 + 16\gamma^2 J^2 - 8\gamma W \cdot J), \\ T^\alpha T^\beta &= \frac{9\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \left[J^\alpha J^\beta + \frac{\gamma^2}{16}W^\alpha W^\beta + \frac{\gamma}{4}(J^\alpha W^\beta + J^\beta W^\alpha) \right], \\ S^\alpha S^\beta &= \frac{9\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} [W^\alpha W^\beta + 16\gamma^2 J^\alpha J^\beta - 4\gamma(W^\alpha J^\beta + W^\beta J^\alpha)], \\ S^\alpha T^\beta + S^\beta T^\alpha &= \frac{9\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \left[\frac{\gamma}{2}W^\alpha W^\beta - 8\gamma J^\alpha J^\beta + (W^\alpha J^\beta + W^\beta J^\alpha)(1-\gamma^2) \right], \\ S \cdot T &= \frac{9\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \left[\frac{\gamma}{4}W^2 - 4\gamma J^2 + W \cdot J(1-\gamma^2) \right], \\ S \cdot J &= \frac{3\gamma^2}{(1+\gamma^2)} (W \cdot J - 4\gamma J^2), \\ T \cdot W &= \frac{3\gamma^2}{(1+\gamma^2)} \left(J \cdot W + \frac{\gamma}{4}W^2 \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Finalmente, para a ação total (3.15) *on-shell* obtemos

$$S_{total}\Big|_{on-shell} = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{3\gamma}{1+\gamma^2} \left(4\gamma J^2 - 2J \cdot W - \frac{\gamma}{4} W^2 \right) - 2\Lambda \right\}. \quad (3.27)$$

Uma simples observação a respeito dessa ação é a seguinte: no limite $\gamma \rightarrow \infty$ o termo misto com $(J \cdot W)$ vai a zero. Essa é uma consequência natural, uma vez que a presença deste termo, que viola a paridade da teoria, é somente devido à presença do termo de Holst. Esse detalhe é uma ilustração de possíveis efeitos do termo de Holst na interação entre duas correntes vetoriais.

3.3 Divergências *off-* e *on-shell* a 1-loop.

As divergências devem ser calculadas na base da ação *off-shell* (3.15). Trataremos $g_{\mu\nu}$, S_α e T_α como campos quânticos enquanto W^α e J^α serão consideradas fontes externas. A integral de caminho Gaussiana sobre S_α e T_α não gera divergências, porque sua correspondente forma bilinear é um operador *c-número*. Isto significa que as integrações sobre estas variáveis são extremamente simplificadas. Vejamos isso com mais detalhes. Considere o método de campo de fundo para a ação (3.15) e mude a variável de campo em partes de fundo e quânticas de acordo com

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad S_\mu \rightarrow S'_\mu = S_\mu + \kappa \sigma_\mu, \quad T_\mu \rightarrow T'_\mu = T_\mu + \kappa t_\mu. \quad (3.28)$$

A ação efetiva a 1-loop depende da parte bilinear da ação no que diz respeito aos campos quânticos $h_{\mu\nu}$, σ_μ , t_μ . Uma vez que estamos trabalhando com quantidades *on-shell*, a escolha da fixação de calibre é irrelevante. Por simplicidade consideramos

$$S_{gf} = -\frac{1}{2\theta} \int d^4x \sqrt{-g} \chi_\mu \chi^\mu, \quad \text{onde} \quad \chi_\mu = \nabla_\lambda h_\mu^\lambda - \frac{\omega}{2} \nabla_\mu h \quad \text{com} \quad h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

e escolhemos os parâmetros de fixação de calibre de uma forma que leve à forma bilinear mínima da ação, ou seja, $\theta = \omega = 1$. A expansão é feita como de costume (veja, e.g., [12])

para detalhes) e após uma certa álgebra chegamos à

$$\begin{aligned}
S_{total}^{(2)} + S_{gf} &= - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ h^{\mu\nu} \left[\frac{1}{4} (\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \square + \frac{1}{2} R_{\mu\alpha\nu\beta} \right. \right. \\
&+ \frac{1}{2} g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} - \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}) \\
&- \frac{1}{4} (\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \left(R + 2\Lambda - \frac{2}{3} T^2 + \frac{1}{24} S^2 - \frac{1}{3\gamma} S \cdot T + S \cdot J + T \cdot W \right) \\
&- \frac{1}{96} (g_{\mu\nu} S_\alpha S_\beta + g_{\alpha\beta} S_\mu S_\nu) - \frac{2}{3} g_{\mu\alpha} T_\nu T_\beta + \frac{1}{6} (g_{\mu\nu} T_\alpha T_\beta + g_{\alpha\beta} T_\mu T_\nu) \\
&- \frac{1}{6\gamma} g_{\mu\alpha} (S_\nu T_\beta + S_\beta T_\nu) + \frac{1}{12\gamma} (g_{\mu\nu} S_\alpha T_\beta + g_{\alpha\beta} S_\mu T_\nu) + \frac{1}{24} g_{\mu\alpha} S_\nu S_\beta \left. \right] h^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{24} g^{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu - \frac{2}{3} g^{\mu\nu} t_\mu t_\nu - \frac{1}{6\gamma} (\sigma_\mu g^{\mu\nu} t_\nu + \sigma_\nu g^{\mu\nu} t_\mu) \\
&+ h^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{12} S_\mu \sigma_\nu + \frac{4}{3} T_\mu t_\nu + \frac{1}{3\gamma} (S_\mu t_\nu + T_\mu \sigma_\nu) \right] + \left[\frac{1}{24} g_{\alpha\beta} S_\mu \sigma^\mu \right. \\
&- \left. \frac{2}{3} g_{\alpha\beta} T_\mu t^\mu - \frac{1}{6\gamma} g_{\alpha\beta} (T^\mu \sigma_\mu + S^\mu t_\mu) + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sigma_\mu J^\mu + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} t_\mu W^\mu \right] h^{\alpha\beta} \left. \right\}, \tag{3.30}
\end{aligned}$$

onde $\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} = (1/2) (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha})$. Uma observação relevante é que a integral de caminho sobre σ_ν e t_μ tem a forma

$$I = \int dt_\mu d\sigma_\nu \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} (\sigma_\mu t_\mu) (K^{\mu\nu}) \begin{pmatrix} \sigma_\nu \\ t_\nu \end{pmatrix} + (\sigma_\mu t_\mu) \begin{pmatrix} a^\mu \\ b^\mu \end{pmatrix} \right] \right\}, \tag{3.31}$$

onde $K^{\mu\nu}$ é uma matriz c e a^μ, b^μ formam uma coluna dependente dos campos de fundo.

Essa integração Gaussiana não derivativa dá

$$I = \exp \left\{ -\frac{i}{2} (a^\mu b^\mu) (K_{\mu\nu})^{-1} \begin{pmatrix} a^\nu \\ b^\nu \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.32}$$

Este é o mesmo resultado que pode-se obter apenas usando as equações clássicas de movimento para as duas componentes da torção σ_ν e t_μ . Como nossa intenção é calcular a ação efetiva *on-shell*, isso significa que podemos simplesmente ignorar as integrais de caminho sobre σ_ν e t_μ . Logo, não há necessidade de executar a mudança de S_ν e T_μ em (3.28). Em vez disso, pode-se usar diretamente as equações clássicas de movimento correspondentes no resultado da integração sobre a métrica quântica $h_{\mu\nu}$.

Finalmente, a parte relevante da expansão bilinear é

$$\begin{aligned}
S_{total}^{(2)} + S_{gf} &= - \int d^4x \sqrt{-g} h^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{4} (\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \square + \frac{1}{2} R_{\mu\alpha\nu\beta} + \frac{1}{2} g_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} \right. \\
&- \left. \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\delta_{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) X + \frac{1}{4} Y_{\mu\nu, \alpha\beta} \right\} h^{\alpha\beta}, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

onde

$$X = R + 2\Lambda - \frac{2}{3}T^2 + \frac{1}{24}S^2 - \frac{1}{3\gamma}S \cdot T + S \cdot J + T \cdot W \quad (3.34)$$

e

$$\begin{aligned} Y_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{6}g_{\mu\alpha}S_\nu S_\beta - \frac{1}{24}(g_{\mu\nu}S_\alpha S_\beta + g_{\alpha\beta}S_\mu S_\nu) - \frac{8}{3}g_{\mu\alpha}T_\nu T_\beta + \frac{2}{3}(g_{\mu\nu}T_\alpha T_\beta + g_{\alpha\beta}T_\mu T_\nu) \\ &- \frac{2}{3\gamma}g_{\mu\alpha}(S_\nu T_\beta + S_\beta T_\nu) + \frac{1}{3\gamma}(g_{\mu\nu}S_\alpha T_\beta + g_{\alpha\beta}S_\mu T_\nu). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Além disso a equação (3.33) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_{total}^{(2)} + S_{gf} &= - \int d^4x \sqrt{-g} h^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} K_{\mu\nu,\alpha\beta} \square + \frac{1}{4} M_{\mu\nu,\alpha\beta} \right) h^{\alpha\beta} \\ &= - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} h^{\mu\nu} K_{\mu\nu,\alpha\beta} [\delta^{\alpha\beta, \rho\sigma} \square + \hat{\Pi}^{\alpha\beta, \rho\sigma}] h^{\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\alpha\beta,\rho\sigma} &= 2R_{\rho\alpha\sigma\beta} + 2g_{\sigma\beta}R_{\rho\alpha} - (g_{\rho\sigma}R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}R_{\rho\sigma}) \\ &+ \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}g_{\alpha\beta}R - \delta_{\rho\sigma,\alpha\beta}X + Y_{\rho\sigma,\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}Y_{\rho\sigma,\alpha\beta}g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.37)$$

e

$$K_{\mu\nu,\alpha\beta}^{-1} = K_{\mu\nu,\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}. \quad (3.38)$$

A contribuição a *1-loop* é dada pela expressão padrão

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \{ \hat{K} \cdot (\hat{\square} + \hat{\Pi}) \} - i \text{Tr} \ln \hat{H}_{ghost}. \quad (3.39)$$

A parte dos *ghosts* não depende da torção ou das correntes externas, daí a contribuição correspondente será idêntica àquela dada à gravidade de Einstein [20]. Vamos portanto nos concentrar no primeiro termo em (3.39). Na medida em que $\text{Tr} \ln \hat{K} = \text{Tr} \ln \hat{K}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ não contribui para as divergências, eles dependem somente da matriz $\hat{\Pi}^{\alpha\beta, \rho\sigma}$ e também da contribuição dos *ghosts* de Faddeev-Popov.

O cálculo prático das divergências segue o esquema padrão [20]. O resultado para a parte divergente da ação efetiva a *1-loop* pode ser convenientemente expresso através da

quantidade tensorial (3.23) e tem a seguinte forma final

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = & -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{53}{45} E + \frac{7}{10} R_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{60} R^2 + 8D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} - 2D^2 \right. \\ & \left. + \frac{26}{3} R \left(\Lambda + \frac{1}{2} S \cdot J + \frac{1}{2} T \cdot W \right) + 20 \left(\Lambda + \frac{1}{2} S \cdot J + \frac{1}{2} T \cdot W \right)^2 \right\}, \quad (3.40) \end{aligned}$$

onde $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\mu\nu}^2 + R^2$ é a densidade Lagrangeana do termo de Gauss-Bonnet. Finalmente, $\varepsilon = (4\pi)^2(n-4)$ é o parâmetro da regularização dimensional [43]. Vamos observar que (3.40) é relativamente simples devido a alguns cancelamentos inesperados, por exemplo de DR , $D_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e outras estruturas.

A fim de formular o grupo de renormalização *on-shell*, precisamos usar as equações clássicas de movimento (3.17), (3.23), (3.24) e (3.25) na equação (3.40). Após alguma álgebra, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{div}^{(1)} \Big|_{on-shell} = & -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{53}{45} E - \frac{58}{5} \Lambda^2 + \frac{81\gamma^4 J^4}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{81}{256} \frac{\gamma^4 W^4}{(1+\gamma^2)^2} \right. \\ & + \frac{27}{40} \frac{\gamma^2 (43\gamma^2 + 58)}{(1+\gamma^2)^2} W^2 \cdot J^2 + \frac{241\gamma}{40(1+\gamma^2)} (16\gamma J^2 - \gamma W^2 - 8W \cdot J) \Lambda \\ & \left. - \frac{27\gamma^2 (W \cdot J)}{80(1+\gamma^2)^2} \left[(56 + 116\gamma^2)(W \cdot J) + 240\gamma J^2 - 15\gamma W^2 \right] \right\}. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Uma importante diferença entre as expressões (3.40) e (3.41) está relacionada à dependência da fixação de calibre. A ação efetiva (3.40) tem uma grande quantidade de ambiguidades relacionadas com a escolha dos parâmetros θ e ω na ação (3.29). De fato, parte significativa dos termos podem ser modificados ou mesmo eliminados por uma escolha apropriada desses parâmetros [74]. Por outro lado, não existe tal dependência de calibre nas divergências a *1-loop* para a ação efetiva *on-shell* [25] (veja considerações mais detalhadas em [75]), de modo que os coeficientes na ação (3.41) não sofrem desta ambiguidade.

3.4 O grupo de renormalização *on-shell*

Nossa proposta é construir a versão *on-shell* reduzida do grupo de renormalização pelo método de subtração mínima. Usaremos a regularização dimensional e portanto é

necessário formular tanto a ação clássica *on-shell* (3.27) quanto os contratermos *on-shell* em n dimensões espaço-temporais. As expressões correspondentes podem ser escritas em termos de novas notações

$$\tilde{\lambda} = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 + \alpha_4 \lambda_4, \quad (3.42)$$

onde

$$\lambda_1 = \kappa^2 \Lambda, \quad \lambda_2 = \kappa^2 J^2, \quad \lambda_3 = \kappa^2 W^2, \quad \lambda_4 = \gamma \kappa^2 (W \cdot J) \quad (3.43)$$

de um lado e

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = & \Omega_{11} \lambda_1^2 + \Omega_{22} \lambda_2^2 + \Omega_{33} \lambda_3^2 + \Omega_{44} \lambda_4^2 \\ & + \Omega_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \Omega_{13} \lambda_1 \lambda_3 + \Omega_{14} \lambda_1 \lambda_4 + \Omega_{23} \lambda_2 \lambda_3 + \Omega_{24} \lambda_2 \lambda_4 + \Omega_{34} \lambda_3 \lambda_4 \end{aligned} \quad (3.44)$$

de outro lado.

A ação clássica e os contratermos a *1-loop*, ambos *on-shell* (clássicos) têm a forma

$$S_{total} \Big|_{on-shell} = -\frac{1}{\kappa^4} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \tilde{\lambda}, \quad (3.45)$$

$$\Delta S^{(1)} \Big|_{on-shell} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\kappa^4} \int d^n x \sqrt{-g} \mu^{n-4} \tilde{\sigma}. \quad (3.46)$$

Os coeficientes nas expressões (3.42) e (3.44) podem ser obtidos diretamente das equações (3.27) e (3.41)

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = \frac{12\gamma^2}{(1+\gamma^2)}, \quad \alpha_3 = -\frac{3\gamma^2}{4(1+\gamma^2)}, \quad \alpha_4 = -\frac{6}{(1+\gamma^2)} \quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= -\frac{58}{5}, \quad \Omega_{12} = \frac{482}{5} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)}, \quad \Omega_{13} = -\frac{241}{40} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)}, \quad \Omega_{14} = -\frac{241}{5(1+\gamma^2)}, \\ \Omega_{22} &= \frac{81\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2}, \quad \Omega_{23} = \frac{27\gamma^2(43\gamma^2+58)}{40(1+\gamma^2)^2}, \quad \Omega_{24} = -\frac{81\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2}, \\ \Omega_{33} &= \frac{81}{256} \frac{\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2}, \quad \Omega_{34} = \frac{81}{16} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2}, \quad \Omega_{44} = -\frac{(378+783\gamma^2)}{20} \frac{1}{(1+\gamma^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Note que uma formulação consistente do grupo de renormalização, tanto para a constante de Newton, quanto para a constante cosmológica (relacionada ao inverso de κ da

massa de Planck redimensionada) é definitivamente impossível uma vez que estamos trabalhando no âmbito do grupo de renormalização *on-shell*. A forma da ação clássica (3.45) e os contratermos (3.46) indicam que não há possibilidade de estudar a renormalização de κ nessa abordagem de modo que no que se segue, vamos buscar apenas a construção das equações do grupo de renormalização para as cargas efetivas λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 , definidas em (3.43). Pode-se ver também nesse método, como trabalhar com unidades de Planck, onde todas as quantidades se tornam adimensionais.

A ação *on-shell* renormalizada tem a forma que segue das equações (3.45) e (3.46). Então, as divergências *on-shell* a *1-loop* podem ser removidas por meio da transformação de renormalização

$$\tilde{\lambda}_0 = \mu^{(n-4)} \left(\tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon} \right). \quad (3.49)$$

Uma vez que $\tilde{\lambda}_0$ não depende de μ , a última relação implica

$$(n-4) \left(\tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon} \right) + \left(\mu \frac{d\tilde{\lambda}}{d\mu} - \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\mu} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Supondo que os termos divergentes se cancelem e usando a propriedade da homogeneidade de $\tilde{\sigma}$, chegamos à função β geral para $\tilde{\lambda}$ em um espaço-tempo n dimensional

$$\beta_{\tilde{\lambda}}^n = -(n-4) \tilde{\lambda} - \frac{\tilde{\sigma}}{(4\pi)^2}. \quad (3.51)$$

Como nossa intenção é explorar o grupo de renormalização em $n = 4$, devemos tomar o limite $n \rightarrow 4$, para chegar à equação geral do grupo de renormalização

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dt} = \mu \frac{d\tilde{\lambda}}{d\mu} = \beta_{\tilde{\lambda}} = -\frac{\tilde{\sigma}}{(4\pi)^2}, \quad (3.52)$$

onde introduzimos um parâmetro útil $t = \ln(\mu/\mu_0)$.

A próxima parte do trabalho será extrair as equações para as cargas efetivas individuais λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 de uma única equação, a (3.52). Essa situação é definitivamente mais complicada do que aquelas das teorias renormalizáveis habituais, e representa um elemento necessário no regime mais complicado do grupo de renormalização *on-shell*.

O caso do parâmetro λ_1 foi considerado antes no trabalho [25], onde o grupo de renormalização *on-shell* foi criado. Vamos supor que a equação do grupo de renormalização

para a constante cosmológica λ_1 não dependa da presença das correntes externas J^μ e W^μ . Fixando $J^\mu = W^\mu = 0$, obtemos $\lambda_{2,3,4} = 0$ e então a equação (3.52) se transforma em

$$\alpha_1 \frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \Omega_{11} \lambda_1^2. \quad (3.53)$$

Tomando α_1 e Ω_{11} a partir de (3.47) e (3.48), pode-se imediatamente obter a equação correspondente de [25],

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{29}{5(4\pi)^2} \lambda_1^2, \quad (3.54)$$

indicando uma liberdade assintótica para a constante cosmológica adimensional no limite ultravioleta (UV) para uma constante cosmológica positiva e no limite infravermelho (IV) para uma constante cosmológica negativa.

Segue-se uma abordagem semelhante para a outra carga efetiva λ_2 . Nesse caso deve-se supor que quando $\Lambda = 0$ e $W^\mu = 0$, a equação para o grupo de renormalização *on-shell* para a carga efetiva relacionada apenas a J^μ não muda. Então, considerações semelhantes as que nos levaram à (3.53) e (3.54) nos fornece a equação

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \beta_2 = -\frac{\Omega_{22}}{\alpha_2 (4\pi)^2} \lambda_2^2 = -b_2^2 \lambda_2^2 = -\frac{27}{4(4\pi)^2} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)} \lambda_2^2, \quad (3.55)$$

indicando uma liberdade assintótica para a quantidade adimensional λ_2 no limite ultravioleta (UV). Nesse caso o vetor J^μ é tipo-tempo e no limite infravermelho (IV), o mesmo vetor é tipo-espaço. De maneira similar, obtemos a equação para o terceiro parâmetro

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \beta_3 = -\frac{\Omega_{33}}{\alpha_3 (4\pi)^2} \lambda_3^2 = b_3^2 \lambda_3^2 = \frac{27}{64(4\pi)^2} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)} \lambda_3^2. \quad (3.56)$$

Nesse caso, observamos uma liberdade assintótica para a quantidade adimensional λ_3 no limite ultravioleta (UV) se o vetor W^μ é tipo-espaço e no limite infravermelho (IV) no caso desse vetor ser tipo-tempo. Por simplicidade, vamos supor que o valor inicial de $\lambda_2(\mu_0) = \lambda_{20}$ seja positivo e que o valor inicial de $\lambda_3(\mu_0) = \lambda_{30}$ seja negativo. Nesse caso nós temos liberdade assintótica para ambas as cargas no limite ultravioleta e tentaremos explorar esse limite no que se segue. É importante notar que os sinais de λ_2 ou λ_3 não são limitados pelos argumentos de estabilidade ou algo semelhante, em particular porque correspondem às propriedades das correntes externas (não-dinâmicas).

Agora, podemos começar a resolver um problema mais complicado, o de formular a equação do grupo de renormalização *on-shell* para a carga efetiva $\lambda_4(t)$ e eventualmente para o parâmetro de Barbero-Immirzi efetivo $\gamma(t)$. Subtraindo as equações (3.55) e (3.56) com os fatores α_2 e α_3 da equação (3.52), obtemos

$$\alpha_4 \frac{d\lambda_4}{dt} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\tilde{\sigma} + \Omega_{22}\lambda_2^2 + \Omega_{33}\lambda_3^2 \right),$$

que nos leva diretamente para

$$(4\pi)^2 \frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{1}{\alpha_4} \left(\Omega_{44}\lambda_4^2 + \Omega_{23}\lambda_2\lambda_3 + \Omega_{24}\lambda_2\lambda_4 + \Omega_{34}\lambda_3\lambda_4 \right). \quad (3.57)$$

Essa é a equação do grupo de renormalização para o *running* do parâmetro $\lambda_4(t)$. A função β aqui depende de $\lambda_2(t)$ e $\lambda_3(t)$, então a primeira impressão é que se pode resolver a equação (3.57) somente depois de resolver as equações (3.55) e (3.56). Entretanto a situação real é muito mais complicada. O parâmetro λ_4 está fortemente relacionado a λ_2 e λ_3 , porque todas as três constantes são construídas a partir das duas correntes fermiônicas J^α e W^α , via equação (3.43).

De fato, encontramos a equação independente (3.57), mas somente porque λ_4 depende não só das magnitudes das correntes J^α e W^α , mas também do ângulo entre elas e do parâmetro de Barbero-Immirzi γ . Na sequência suporemos que o ângulo mencionado não mude com a mudança do parâmetro de escala μ . Esse recurso permite construir a equação do grupo de renormalização para γ .

Vamos derivar a equação do grupo de renormalização para o parâmetro de Barbero-Immirzi. Para esse fim, retornamos às equações (3.55) e (3.56). Como κ é uma constante universal (inverso da massa de Planck), supomos que as próprias correntes externas sejam quantidades variáveis, o que significa $J^\alpha = J^\alpha(\mu)$ e $W^\alpha = W^\alpha(\mu)$. Usando (3.43), pode-se reescrever (3.55) e (3.56) como

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \kappa^2 \frac{dJ^2}{dt} = 2\kappa^2 J^\alpha \frac{dJ_\alpha}{dt} = -\frac{\Omega_{22}\lambda_2^2}{\alpha_2(4\pi)^2} = \beta_2, \quad (3.58)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \kappa^2 \frac{dW^2}{dt} = 2\kappa^2 W^\alpha \frac{dW_\alpha}{dt} = -\frac{\Omega_{33}\lambda_3^2}{\alpha_3(4\pi)^2} = \beta_3. \quad (3.59)$$

Vamos fazer uma suposição natural que

$$\frac{dJ_\alpha}{dt} = \Theta_2 J_\alpha. \quad (3.60)$$

Do que é fácil mostrar usando (3.58)

$$\Theta_2 = -\frac{\Omega_{22} \kappa^2 J^2}{2\alpha_2(4\pi)^2}.$$

Da mesma forma, encontramos

$$\frac{dW_\alpha}{dt} = \Theta_3 W_\alpha, \quad \text{onde} \quad \Theta_3 = -\frac{\Omega_{33} \kappa^2 W^2}{2\alpha_3(4\pi)^2}. \quad (3.61)$$

Então, temos duas relações

$$\frac{dJ_\alpha}{dt} = -\frac{\Omega_{22} \kappa^2 J^2}{2\alpha_2(4\pi)^2} J_\alpha \quad \text{e} \quad \frac{dW_\alpha}{dt} = -\frac{\Omega_{33} \kappa^2 W^2}{2\alpha_3(4\pi)^2} W_\alpha. \quad (3.62)$$

Uma vez que $\lambda_4 = \gamma \kappa^2 (W \cdot J)$, a equação do grupo de renormalização para λ_4 é uma consequência das equações (3.62) e do *running* de γ , que também queremos encontrar.

Nesse caminho obtemos

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = \kappa^2 \left(\frac{d\gamma}{dt} W \cdot J + \gamma J^\alpha \frac{dW_\alpha}{dt} + \gamma W^\alpha \frac{dJ_\alpha}{dt} \right). \quad (3.63)$$

Substituindo (3.57) em (3.63) e usando as equações (3.62), chegamos à

$$(4\pi)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\Omega_{44}\lambda_4}{\alpha_4} + \lambda_2 \left(\frac{\Omega_{22}}{2\alpha_2} - \frac{\Omega_{24}}{\alpha_4} \right) + \lambda_3 \left(\frac{\Omega_{33}}{2\alpha_3} - \frac{\Omega_{34}}{\alpha_4} \right) - \frac{\lambda_2\lambda_3}{\alpha_4\lambda_4} \Omega_{23}. \quad (3.64)$$

A última equação descreve o *running* do grupo de renormalização para o parâmetro de Barbero-Immirzi dentro do esquema do grupo de renormalização *on-shell*. Nessa consideração, supusemos que o ângulo entre as correntes quadridimensionais J^μ e W^μ não muda com a mudança do parâmetro de escala μ do grupo de renormalização. Esse é um pequeno preço a se pagar pela possibilidade de considerar o grupo de renormalização numa teoria não-renormalizável como a Gravidade de Einstein-Cartan com o termo de Holst. O problema de explorar o comportamento assintótico das cargas efetivas $\lambda_{2,3,4}(t)$ e $\gamma(t)$ baseado nas equações (3.55), (3.56), (3.57) e (3.64) torna-se muito complicado e infelizmente não fomos capazes de resolvê-lo numa maneira completamente satisfatória. Permita-nos apresentar parte de nossa consideração, que pode ser útil para mostrar qual é a origem das dificuldades. A suposição mais simples é que os quatro parâmetros $\lambda_{2,3,4}(t)$ e $\gamma(t)$ têm um *running* moderado e, portanto, pode-se trabalhar na aproximação *leading-log*

(até a primeira ordem em $\ln \mu$). Então, as equações (3.55) e (3.56) podem ser facilmente resolvidas para um γ constante e temos

$$\lambda_2(t) = \frac{\lambda_{20}}{1 + b_2^2 \lambda_{20} t}, \quad \lambda_3(t) = \frac{\lambda_{30}}{1 - b_3^2 \lambda_{30} t}. \quad (3.65)$$

Nesse caso a equação (3.57) pode ser facilmente colocada na forma

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = A(t)\lambda_4^2 + B(t)\lambda_4 + C(t). \quad (3.66)$$

Matematicamente, (3.66) é a equação de Riccati [76] (veja também [77] para leitura do trabalho original), que é uma equação diferencial ordinária não linear, de primeira ordem, cuja solução geral só pode ser obtida se esta possuir uma solução particular que seja conhecida.

A fim de atingir esse objetivo, podemos fazer algumas simplificações. Considere um regime assintótico, supondo $(\beta_2/\lambda_{20})t \gg 1$ e $(\beta_3/\lambda_{30})t \gg 1$, tal que, aproximadamente,

$$\lambda_{2,3}(t) = \frac{l_{2,3}}{t}, \quad \text{onde } l_2 = \frac{4(4\pi)^2(1 + \gamma^2)}{27\gamma^2} \text{ e } l_3 = 16l_2. \quad (3.67)$$

Dessa maneira, a equação (3.66) se torna mais simples,

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = A_0\lambda_4^2 + \frac{B_0}{t}\lambda_4 + \frac{C_0}{t^2}, \quad (3.68)$$

onde

$$A_0 = -\frac{\Omega_{44}}{\alpha_4(4\pi)^2}, \quad B_0 = -\frac{\Omega_{24}l_2 + \Omega_{34}l_3}{\alpha_4(4\pi)^2}, \quad C_0 = -\frac{\Omega_{23}l_2l_3}{\alpha_4(4\pi)^2}. \quad (3.69)$$

É bem natural procurar uma solução particular da equação (3.68) na forma

$$\lambda_4(t) = \frac{l_4}{t}, \quad \text{onde } l_4 = -\frac{B_0 + 1}{2A_0} \pm \frac{1}{2A_0} \sqrt{(B_0 + 1)^2 - 4C_0A_0}. \quad (3.70)$$

No caso de o lado direito da última equação ser real, pode-se facilmente mostrar que uma solução particular arbitrária se aproxima assintoticamente de (3.70). Infelizmente um cálculo direto mostra que a raiz na equação (3.70) tem soluções não-nulas somente na parte imaginária.

Essa característica deixa muito pequena a chance de encontrar um ponto fixo para o sistema de equações (3.55), (3.56), (3.57) e (3.64). De acordo com (3.43), o parâmetro λ_4

pode ser complexo apenas devido ao parâmetro complexo γ . Isso significa que a razão entre as partes real e imaginária de λ_4 e γ deve ser identicamente igual. No entanto, cálculos diretos mostram que essa situação contradiz as equações (3.57) e (3.64). Isso significa que o sistema de equações do grupo de renormalização para os parâmetros efetivos $\lambda_{2,3,4}(t)$ e $\gamma(t)$ não tem ponto fixo.

A ausência do termo de Holst implica no limite $\gamma \rightarrow \infty$ para o parâmetro de Barbero-Immirzi. Uma inspeção das equações (3.55), (3.56) e (3.57) com Ω_{22} e Ω_{33} definidos em (3.48) mostra que nesse limite existem pontos fixos ultravioleta (UV), que podem corresponder à liberdade assintótica dos parâmetros $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ sob a escolha de certas condições iniciais. Como consequência, o papel do termo de Holst no grupo de renormalização é muito forte. Nossos resultados mostram que a presença de um γ finito quebra a forma simples do fluxo do grupo de renormalização e leva a um comportamento muito mais complicado da escala, que parece irregular, pelo menos no presente estágio de investigação do problema.

Nessa situação uma pergunta natural é se o limite $\gamma \rightarrow \infty$ para o parâmetro de Barbero-Immirzi é suave. É fácil ver que nesse limite também temos $\lambda_4 \rightarrow \infty$. Portanto, o limite suave refere-se à razão entre os dois parâmetros eficazes, $p = \lambda_4/\gamma$. A equação para essa razão pode ser obtida das equações (3.43), (3.60) e (3.61). Após um pequeno cálculo, chegamos à

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{2(4\pi)^2} \left[\frac{\Omega_{22}}{\alpha_2} \lambda_2(t) + \frac{\Omega_{33}}{\alpha_3} \lambda_3(t) \right], \quad p(0) = p_0. \quad (3.71)$$

Usando as estimativas assintóticas para $\gamma \rightarrow \infty$,

$$\Omega_{22} \propto 81, \quad \Omega_{33} \propto \frac{81}{256}, \quad \alpha_2 \propto 12, \quad \alpha_3 \propto -\frac{3}{4},$$

chegamos à solução de (3.71),

$$\frac{p(t)}{p_0} \propto \left(1 + b_2^2 \lambda_{20} t\right)^{-1/2} \left(1 - b_3^2 \lambda_{30} t\right)^{-1/2}. \quad (3.72)$$

A última fórmula mostra que podemos "desligar" o parâmetro de Barbero-Immirzi suavemente e a razão $p(t) \rightarrow 0$ assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$ da mesma forma que as cargas efetivas $\lambda_2(t)$ e $\lambda_3(t)$. Isso mostra que nossa hipótese de não variar o ângulo entre as duas

correntes está correta pelo menos no regime onde o termo de Holst é muito pequeno. No entanto, esta confirmação só diz respeito a este limite especial.

Claro, a parte mais interessante é o *running* para o parâmetro de Barbero-Immirzi finito, mas nesse caso não podemos alcançar uma estimativa analítica confiável dos resultados. Nessa situação, pode-se confiar somente na solução numérica para o sistema de equações (3.55), (3.56), (3.57) e (3.64). A análise numérica correspondente foi feita, no entanto, o resultado mostra uma dependência muito forte na escolha das condições iniciais, como pode ser visto na Figura 3.1, e não há uma interpretação qualitativa convincente dos resultados. Por essa razão, decidimos não colocar os detalhes técnicos dessa passagem. Poderia-se então imaginar que a situação seria diferente num caso mais completo quando também se leva em conta o *running* de λ_1 . A análise (tecnicamente mais complicada) desse caso foi feita, veja Figura 3.2, e vimos que não ocorrem mudanças significativas. Qualitativamente a situação permanece a mesma, ou seja, não há pontos-fixos não triviais na presença do parâmetro de Barbero-Immirzi.

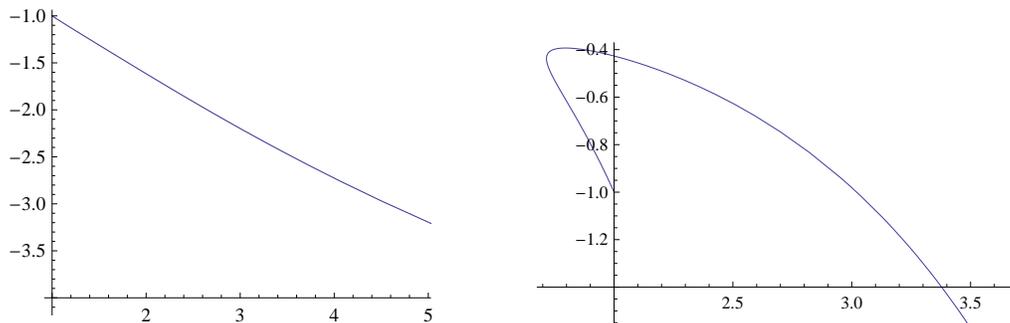


Figura 3.1: Gráfico paramétrico de $\gamma(t) \times \lambda_4(t)$, sem levar em conta o *running* da constante cosmológica. No gráfico à esquerda: $0 < t < 0,13$. No gráfico à direita: $0 < t < 1,55$.

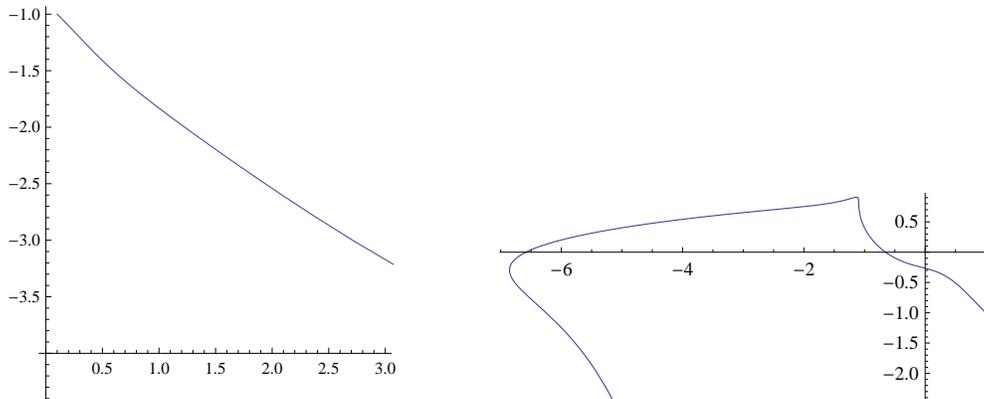


Figura 3.2: Gráfico paramétrico de $\gamma(t) \times \lambda_4(t)$, levando em conta o running da constante cosmológica. No gráfico à esquerda: $0 < t < 0,23$. No gráfico à direita: $0 < t < 1,69$.

3.5 Considerações finais

Consideramos a teoria de Einstein-Cartan com um termo adicional, o termo de Holst, que desempenha um papel importante na *Loop Quantum Gravity* [50, 55]. Na teoria clássica, esse termo desaparece para um campo de torção nulo e se manifesta somente na presença de correntes fermiônicas. Seguindo [59], usamos as componentes irreduzíveis da torção para escrever o termo de Holst numa forma simples, onde sua natureza de violação da paridade torna-se clara.

Na parte principal desse capítulo, nós realizamos os cálculos a *1-loop*, da teoria de Einstein-Cartan com o termo de Holst com constante cosmológica e duas correntes fermiônicas externas, nomeadas como vetorial e vetorial axial. Como é de se esperar, as divergências não repetem a forma da ação clássica. De outro lado, as divergências têm forte dependência da fixação de calibre. Em RG quântica pura, pode-se escolher a fixação de calibre de tal maneira que a matriz S a *1-loop* se torna finita [74], entretanto esse não é o caso se a matéria está presente, incluindo férmions.

Na verdade, não é preciso calcular explicitamente a dependência da fixação de calibre, é suficiente lembrar que, a nível *1-loop*, essa dependência desaparece *mass-shell*, ou seja, nas equações clássicas de movimento [78] (ver também [63] para uma recente revisão sobre o assunto).

O problema real é como extrair uma informação física potencialmente relevante da ação efetiva dependente do calibre. Uma das possibilidades mais simples foi sugerida por Fradkin e Tseytlin em [25], onde a versão *on-shell*, truncada, das equações do grupo de renormalização foi introduzido. Dentro desse esquema, pode-se chegar à forma invariante de calibre para o *running* da combinação da constante cosmológica e da constante de Newton, ambas adimensionais. O grupo de renormalização *on-shell* também foi usado na teoria de Einstein-Cartan com corrente vetorial axial [68], mas a situação torna-se muito mais complicada e interessante na presença do termo de Holst. Assim fica claro que as equações do grupo de renormalização *on-shell* têm muito mais restrições em suas bases teóricas do que o grupo de renormalização convencional em teorias renormalizáveis. No entanto, mesmo numa teoria não renormalizável, como Einstein-Cartan com termo de Holst, fomos capazes de estabelecer as equações do grupo de renormalização para todas as cargas efetivas adimensionais, incluindo a constante cosmológica, quadrados de ambas as correntes fermiônicas, a mistura dessas correntes e finalmente, para o parâmetro de Barbero-Immirzi γ . Infelizmente, as equações que obtivemos são muito complicadas e não nos permitem estudo analítico. Em particular, nós não fomos capazes de encontrar pontos fixos não triviais ultravioletas na teoria ou estabelecer, por meio de métodos numéricos, alguma forma confiável das trajetórias do grupo de renormalização para as cargas efetivas adimensionais.

O conjunto de equações que obtivemos aqui podem ser vistas como uma aproximação de baixa energia para o grupo de renormalização na teoria com o limite ultravioleta completo que supostamente é renormalizável. No presente caso, tal teoria completa deve incluir derivadas de ordem superior no setor da métrica [23] e termos cinéticos para a torção (ver a discussão em [12, 32]). Somente cálculos quânticos de uma teoria completa acoplada a férmions [12, 79, 80] podem providenciar uma forma totalmente confiável das equações do grupo de renormalização na teoria com o parâmetro de Barbero-Immirzi. Na prática, a derivação de tais equações é possível e poderá ser feita num próximo trabalho. Ao mesmo tempo, certas ferramentas técnicas que desenvolvemos aqui serão certamente necessárias para tal cálculo.

CAPÍTULO 4

Os fatores de forma gravitacionais para campos massivos no espaço-tempo curvo

Uma importante abordagem da teoria semiclássica é a chamada renormalização física, baseada na subtração de momentos. Neste capítulo, apresentamos detalhes completos do cálculo do trabalho feito nessa direção por Gorbar e Shapiro [36]. Nesse trabalho, usando o método do *heat kernel*, eles calcularam os fatores de forma gravitacionais para três diferentes modelos de campos massivos: campo escalar, campo vetorial e campo fermiônico. Para o estudo dos fatores de forma usando diagramas de Feynman, podemos citar o trabalho [35] também de Gorbar e Shapiro e ainda o trabalho [81] de Codello e Zanusso.

4.1 Considerações iniciais

A técnica de Schwinger-De Witt [9, 82], pode ser considerada como um caso limite da teoria de Perturbação Covariante (TPC) de Barvinsky e Vilkovisky [83]. Como revimos no capítulo 2, essa técnica é a maneira mais eficiente de se obter as divergências a *1-loop* especialmente no espaço-tempo curvo. A técnica padrão de Schwinger-De Witt lida com as altas energias (isto significa que a técnica está relacionada ao limite $s \rightarrow 0$ na representação do tempo próprio). A TPC nos permite explorar também o limite infravermelho (IV) e observar fenômenos, como por exemplo, o desacoplamento a baixas energias.

Nos trabalhos [36, 81, 84] os fatores de forma foram calculados para diferentes modelos, mas esses cálculos nunca antes foram feitos em detalhes. No que se segue, daremos os detalhes da derivação dos fatores de forma gravitacionais que leva ao análogo gravitacional do teorema de desacoplamento de Appelquist e Carazzone [84]. Abrindo esses cálculos em detalhes, corrigimos os pequenos, mas importantes erros que aparecem em [35, 36], o que nos possibilitará desenvolver um artigo de revisão e cria uma base para o desenvolvimento de um novo trabalho nessa direção para um diferente modelo, no caso, um campo tensorial massivo antissimétrico no espaço-tempo curvo [85].

Consideraremos somente a derivação [36], que é baseada no método do *heat-kernel* e usaremos a solução correspondente de [83]. A derivação paralela usando diagramas [35, 81] está além do escopo da presente revisão.

Definimos a ação efetiva Euclidiana a *1-loop* para um campo massivo, como o traço da integral do *heat-kernel* sobre o tempo próprio s

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(-\nabla^2 \hat{1} + m^2 - \hat{P} + \frac{\hat{1}}{6} R \right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{tr} K(s). \quad (4.1)$$

Essa fórmula é válida para campos bosônicos no espaço-tempo Euclidiano, enquanto para férmions o sinal geral da equação (4.1) deve ser modificado. Aqui, $K(s)$ é o *heat-kernel* da forma bilinear da ação clássica da teoria e

$$\begin{aligned} \text{tr} K(s) &= \frac{(\mu^2)^{(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \{ \hat{1} + s\hat{P} + s^2 [\hat{1} R_{\mu\nu} f_1(\tau) R^{\mu\nu} \\ &+ \hat{1} R f_2(\tau) R + \hat{P} f_3(\tau) R + \hat{P} f_4(\tau) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(\tau) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu}] \}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\tau = -s\Box$ e usamos a notação $\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ de [82]. Permita-nos notar que nós

usamos a notação $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ mesmo no espaço Euclidiano. As funções $f_{1\dots 5}$ têm a forma [83]

$$f_1(\tau) = \frac{f(\tau) - 1 + \tau/6}{\tau^2}, \quad f_2(\tau) = \frac{f(\tau)}{288} + \frac{f(\tau) - 1}{24\tau}, \quad (4.3)$$

$$f_3(\tau) = \frac{f(\tau)}{12} + \frac{f(\tau) - 1}{2\tau}, \quad f_4(\tau) = \frac{f(\tau)}{2}, \quad f_5(\tau) = \frac{1 - f(\tau)}{2\tau}, \quad (4.4)$$

com

$$f(\tau) = \int_0^1 d\alpha e^{-\alpha(1-\alpha)\tau}. \quad (4.5)$$

Na equação (4.2), os termos entre chaves são matrizes no espaço dos campos (escalar, vetor e férmion). O termo de ordem zero ($\text{tr}\hat{1}$) corresponde às divergências quárticas (coeficiente a_0 na expansão de Schwinger-DeWitt), o termo ($\text{str}\hat{P}$) corresponde às divergências quadráticas (coeficiente a_1) e tudo o que permanece, corresponde às divergências logarítmicas (coeficiente a_2) e termos finitos. Como os termos a_0 e a_1 podem ser eliminados pela escolha do esquema de regularização, então, manteremos nosso foco no coeficiente a_2 e termos a ele relacionados. No que se segue descreveremos a derivação da integral em (4.1).

4.2 Fatores de forma para a teoria escalar

Nós consideramos o acoplamento não-mínimo geral, incluindo o caso $\xi \neq \frac{1}{6}$. A ação para a teoria é

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{1}{2} (m^2 + \xi R) \varphi^2 \right\} \quad (4.6)$$

e portanto

$$\hat{P} = - \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.7)$$

Também para um único escalar, $\hat{1} = 1$. De acordo com [83], a parte bilinear da ação efetiva das curvaturas generalizadas pode ser dada pela integral de tempo próprio do *heat-kernel*,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \left\{ 1 + s\hat{P} + s^2 [R_{\mu\nu} f_1(-s\square) R^{\mu\nu} \right. \\ &+ R f_2(-s\square) R + \hat{P} f_3(-s\square) R + \hat{P} f_4(-s\square) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} f_5(-s\square) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \left. \right\}. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Permita-nos derivar as integrais sobre o tempo próprio na equação (4.8), começando da mais simples delas.

4.2.1 Termo de ordem zero

Considere o termo que corresponde ao coeficiente a_0 nas divergências.

$$\bar{\Gamma}_0^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2}. \quad (4.9)$$

Prova-se útil fazer a mudança de variáveis que se segue

$$s = \frac{t}{m^2}, \quad ds = \frac{dt}{m^2}, \quad \frac{ds}{s^{1+\omega}} = \frac{dt m^{2\omega}}{t^{1+\omega}}. \quad (4.10)$$

Então a integral se torna

$$\bar{\Gamma}_0^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2\omega} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\omega}} e^{-t}. \quad (4.11)$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_0^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{\mu^{2(2-\omega)} m^{2\omega}}{(4\pi)^\omega} \Gamma(-\omega) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} \left[\frac{1}{(2-\omega)} + \frac{3}{2} + O(2-\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \frac{m^4}{2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

No cálculo apresentado acima, usamos as relações

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\omega}} e^{-t} = \Gamma(-\omega) = \frac{1}{2(2-\omega)} + \frac{3}{4} + O(2-\omega), \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\omega-2} = \exp \left\{ (\omega-2) \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} = 1 + (2-\omega) \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}[(2-\omega)^2]. \quad (4.14)$$

Podemos observar que a expressão (4.14) consiste nas divergências UV e que não há fatores de forma não locais nela. Esse é um resultado natural [35] uma vez que tal fator de forma deve ser construído de \square (operador de Laplace quadridimensional no espaço Euclidiano) e \square atuando em m^4 daria zero.

4.2.2 Termo de primeira ordem

Na próxima ordem em s encontramos

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr}(s\hat{P}) \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^\omega} e^{-sm^2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(\omega-1)} \int d^4x \sqrt{g} \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R \Gamma(1-\omega) \\
&= \frac{m^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{2-\omega} + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) + 1 \right] \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \int d^4x \sqrt{g} R, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

onde usamos a expansão (4.14) e as relações

$$\text{tr} \hat{P} = -\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R, \tag{4.16}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^\omega} dt = \Gamma(1-\omega) = -\frac{1}{2-\omega} - 1 + \mathcal{O}(2-\omega). \tag{4.17}$$

Na equação (4.17), a constante de Euler que deve aparecer na função Γ pode ser absorvida no parâmetro de renormalização μ e portanto não será indicada.

Podemos tirar algumas conclusões dos dois exemplos apresentados anteriormente. Em ambos os casos, a ação efetiva é local e a dependência logarítmica no parâmetro de renormalização μ é completamente controlada pelo pólo de $1/(2-\omega)$. O fato de que o resultado é local é facilmente explicado pela impossibilidade de se construir termos não-locais relevantes pela ação de \square na constante cosmológica e no escalar de curvatura R . Então, os resultados obtidos nos permite construir o método da subtração mínima baseada nas equações do grupo de renormalização (GR) para a densidade da constante cosmológica e constante de Newton, mas eles não mostram os termos não-locais que devem estar *escondidos* por trás do GR. Isso é possível, entretanto, para termos de segunda ordem na curvatura que consideraremos abaixo.

4.2.3 Termos de segunda ordem

Os termos seguintes serão muito mais elaborados. Vamos calculá-los um a um para encontrarmos os coeficientes $l_{1\dots 5}^*$ e $l_{1\dots 5}$ que definem os fatores de forma finais dos termos

$R_{\mu\nu} \cdot R^{\mu\nu}$ e $R \cdot R$. A expressão geral na segunda ordem da curvatura é

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \bar{\Gamma}_{R_{\mu\nu}^2} + \bar{\Gamma}_{R^2} = \sum_{k=1}^5 \bar{\Gamma}_k \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \frac{1}{s^{\omega-1}} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} [\hat{1} R_{\mu\nu} f_1(\tau) R^{\mu\nu} \\ &+ \hat{1} R f_2(\tau) R + \hat{P} f_3(\tau) R + \hat{P} f_4(\tau) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} f_5(\tau) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tomando termo a termo da equação (4.18) obtemos as relações

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty ds \frac{1}{s^{\omega-1}} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} R_{\mu\nu} f_1(\tau) R^{\mu\nu}, \quad (4.19)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty ds s^{1-\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} R f_2(\tau) R, \quad (4.20)$$

$$\bar{\Gamma}_3 = -\frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \int_0^\infty ds s^{1-\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \hat{P} f_3(\tau) R, \quad (4.21)$$

$$\bar{\Gamma}_4 = -\frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \left(\xi - \frac{1}{6}\right) \int_0^\infty ds s^{1-\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \hat{P} f_4(\tau) \hat{P}, \quad (4.22)$$

$$\bar{\Gamma}_5 = \frac{1}{2} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int_0^\infty ds \frac{s^2}{s^{1+\omega}} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} f_5(\tau) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.23)$$

O resultado de (4.23) é devido ao fato que $\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = 0$ para o campo escalar.

Finalmente devemos avaliar

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} \right. \\ &+ \left. R \left[f_2(-s\Box) - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) f_3(-s\Box) + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 f_4(-s\Box) \right] R \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ao substituir as relações (4.3), (4.4) e (4.5) em (4.18) e mais uma vez trocando $-s\Box$ por τ , chegamos a

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} \left[\frac{f(\tau)}{\tau^2} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{6\tau} \right] R^{\mu\nu} \right. \\ &+ \left. R \left[\left(\frac{1}{288} - \frac{\tilde{\xi}}{12} + \frac{\tilde{\xi}^2}{2} \right) f(\tau) + \left(\frac{1}{24} - \frac{\tilde{\xi}}{2} \right) \frac{f(\tau)}{\tau} - \frac{f(\tau)}{8\tau^2} + \left(\frac{\tilde{\xi}}{2} - \frac{1}{16} \right) \frac{1}{\tau} + \frac{1}{8\tau^2} \right] R \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde usamos a notação $\tilde{\xi} = \xi - 1/6$. Prova-se útil introduzir um novo conjunto de notações como se segue. Introduzimos os coeficientes de acordo com (4.25)

$$l_1^* = 0, \quad l_2^* = 0, \quad l_3^* = 1, \quad l_5^* = -1, \quad l_4^* = \frac{1}{6}, \quad (4.26)$$

$$l_1 = \frac{1}{288} - \frac{1}{12} \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^2, \quad l_2 = \frac{1}{24} - \frac{1}{2} \tilde{\xi}, \quad l_3 = -\frac{1}{8} = -l_5, \quad l_4 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}. \quad (4.27)$$

As integrais básicas serão denotadas por (lembre-se de que $\tau = -s\Box$)

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2 s} s^{1-\omega} f(\tau) = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{1-w} f(tu), \\ M_2 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2 s} s^{-\omega} f(\tau) = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u t^w}, \\ M_3 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2 s} s^{-1-\omega} f(\tau) = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u^2 t^{1+w}}, \\ M_4 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2 s} s^{-\omega} = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u t^w}, \\ M_5 &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^\omega} e^{-m^2 s} s^{-1-\omega} = \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u^2 t^{1+w}}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde já fizemos a mudança de variáveis (4.10) e também denotamos

$$u = -\frac{m^2}{\Box}. \quad (4.29)$$

Uma observação relevante é que todas as características individuais da teoria dada (como escalar no presente caso) estão embutidos nos coeficientes (4.27), enquanto as integrais (4.28) são universais no sentido que elas serão as mesmas para qualquer teoria que nos forneça um operador da forma $(-\hat{\Box} + \hat{1}m^2 - \hat{P} + \frac{1}{6}R)$. Como podemos ver, a derivação dessas integrais é muito importante desse ponto de vista.

Com as novas notações (4.26), (4.27) e (4.28) a parte de segunda ordem da ação efetiva a *1-loop* pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \bar{\Gamma}_{R_{\mu\nu}^2}^{(1)} + \bar{\Gamma}_{R^2}^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ l_3^* R_{\mu\nu} M_3 R^{\mu\nu} + l_4^* R_{\mu\nu} M_4 R^{\mu\nu} + l_5^* R_{\mu\nu} M_5 R^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + l_1 R M_1 R + l_2 R M_2 R + l_3 R M_3 R + l_4 R M_4 R + l_5 R M_5 R \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Permita-nos calcular as integrais (4.28). Precisaremos da expansão (4.14) e também das fórmulas previamente dadas (4.13) e (4.17) para as funções gama, e ainda

$$\int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{t^{1-w}} = \Gamma(2-w) = \frac{1}{2-w} + \mathcal{O}(2-w). \quad (4.31)$$

Levando essas fórmulas em conta, a derivação de M_4 e M_5 é um exercício elementar e simplesmente apresentamos os resultados correspondentes

$$M_4 = -\frac{1}{(4\pi)^2 u} \left\{ 1 + \frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}, \quad (4.32)$$

$$M_5 = \frac{1}{(4\pi)^2 \cdot 2u^2} \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (4.33)$$

A fim de se calcular as três integrais restantes, introduzimos mais uma vez novas notações

$$a^2 = \frac{4u}{u+4} = \frac{4\Box}{\Box - 4m^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4}. \quad (4.34)$$

Nota-se que no espaço Euclidiano e na representação de momentos o coeficiente a^2 se resume a''

$$a^2 = \frac{4p^2}{p^2 + 4m^2} > 0 \quad \text{e também} \quad a^2 \leq 4. \quad (4.35)$$

Podemos supor, por definição, que a muda de $a = 0$ no IV para $a = 2$ no UV. Além disso, nós precisaremos da seguinte integral

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^1 d\alpha \ln [1 + \alpha(1-\alpha)u] = 1 - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{2+a}{2-a} \right|, \quad (4.36)$$

que pode facilmente ser resolvida com a mudança de variável $\alpha = -z + 1/2$ e subsequente integração parcial.

O cálculo restante das três primeiras integrais não é tão complicado e daremos apenas os resultados finais em termos de a e A .

$$M_1 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 2A \right\}, \quad (4.37)$$

$$M_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{4A}{3a^2} + \frac{1}{18} \right\}, \quad (4.38)$$

$$M_3 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{1}{2a^4} - \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{160} \right] + \frac{8A}{15a^4} - \frac{7}{180a^2} + \frac{1}{400} \right\}. \quad (4.39)$$

Agora pode-se construir combinações úteis para o caso escalar, tal que

$$\begin{aligned} M_{R_{\mu\nu}^2} &= l_3^* M_3 + l_4^* M_4 + l_5^* M_5 = M_3 + \frac{1}{6} M_4 - M_5 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{60} \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] + \frac{8A}{15a^4} + \frac{2}{45a^2} + \frac{1}{150} \right\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

e

$$\begin{aligned}
M_{R^2} &= l_1 M_1 + l_2 M_2 + l_3 M_3 + l_4 M_4 + l_5 M_5 \\
&= \left(\frac{1}{288} - \frac{1}{12} \tilde{\xi} + \frac{1}{2} \tilde{\xi}^2 \right) M_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} - \tilde{\xi} \right) M_2 - \frac{1}{8} M_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \tilde{\xi} \right) M_4 + \frac{1}{8} M_5 \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left(\frac{1}{2} \tilde{\xi}^2 - \frac{1}{180} \right) + A \tilde{\xi}^2 + \frac{2A}{3a^2} \tilde{\xi} - \frac{A}{6} \tilde{\xi} - \frac{A}{18a^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{A}{144} - \frac{A}{15a^4} - \frac{59}{10800} - \frac{1}{180a^2} + \frac{1}{18} \tilde{\xi} \right\}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Finalmente, encontramos

$$\bar{\Gamma}_2^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} M_{R^2_{\mu\nu}} R^{\mu\nu} + R M_{R^2} R \right\}. \tag{4.42}$$

Note que de fato há um terceiro termo relacionado ao quadrado do tensor de Riemann. No entanto, para qualquer inteiro N pode-se provar por meio das identidades de Bianchi e integração parcial que

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^N R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu} \square^N R^{\mu\nu} + R \square^N R \right\} = \mathcal{O}(R^3). \tag{4.43}$$

Isso significa que nas expressões bilineares tal como as obtidas anteriormente, pode-se usar com segurança a fórmula de redução relacionada ao termo de Gauss-Bonnet

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} f(\square) R^{\mu\nu\alpha\beta} = 4R_{\mu\nu} f(\square) R^{\mu\nu} - R f(\square) R. \tag{4.44}$$

Como resultado, na aproximação do quadrado da curvatura, não há maneira de se ver as não-localidades associadas à combinação de Gauss-Bonnet. Consequentemente, podemos usar por exemplo termos $R^2_{\mu\nu}$ e R^2 ou alguma outra base equivalente. Para várias aplicações é mais útil usar a base que consiste do quadrado do tensor de Weyl em vez do quadrado do tensor de Ricci. A transição pode ser feita por meio das fórmulas

$$\begin{aligned}
C^2 = C^2_{\mu\nu\alpha\beta} &= R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 = E + 2W, \\
W &= R^2_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2, \\
\tilde{M}_{R^2} &= M_{R^2} + \frac{1}{3}M_{R^2_{\mu\nu}},
\end{aligned} \tag{4.45}$$

onde o termo E pode ser negligenciado.

Agora, introduzimos os fatores de forma k_W e k_R

$$k_W = k_{R_{\mu\nu}^2} = \frac{8A}{15a^4} + \frac{2}{45a^2} + \frac{1}{150}, \quad (4.46)$$

$$k_R = A\tilde{\xi}^2 + \left(\frac{2A}{3a^2} + \frac{1}{18} - \frac{A}{6}\right)\tilde{\xi} - \frac{A}{18a^2} + \frac{A}{144} + \frac{A}{9a^4} - \frac{7}{2160} - \frac{1}{108a^2} \quad (4.47)$$

e escrevemos a expressão final para a ação efetiva

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_2^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} (M_{R_{\mu\nu}^2}) C^{\mu\nu\alpha\beta} + R \left(M_{R^2} + \frac{1}{3} M_{R_{\mu\nu}^2} \right) R \right\} \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{60(2-w)} + \frac{1}{60} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + k_R \right] R \right\}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

Com os termos de ordem zero, primeira ordem e segunda ordem juntos, pode-se escrever a ação efetiva até segunda ordem na curvatura

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{escalar}^{(1)} &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{m^4}{2} \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) m^2 R \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{60(2-w)} + \frac{1}{60} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + R \left[\frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + k_R \right] R \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ou em notações compactas

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{escalar}^{(1)} &= \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{m^4}{2} + \tilde{\xi} m^2 R \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left(k_W - \frac{1}{60\varepsilon} \right) C^{\mu\nu\alpha\beta} + R \left(k_R - \frac{1}{2\varepsilon} \tilde{\xi}^2 \right) R \right\}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \left[\frac{1}{(w-2)} - \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right]. \quad (4.51)$$

Permita-nos fazer algumas observações a respeito do resultado final para ação efetiva de vácuo para o Campo Escalar (4.49) com os fatores de forma (4.46) e (4.47). Antes de tudo é preciso salientar que a ação é essencialmente não-local no setor de altas derivadas. O resultado é exato nas derivadas do tensor de curvatura mas somente na segunda ordem

das próprias curvaturas. Por outro lado, os termos de derivadas de ordem inferiores, nomeadamente correções quânticas para a constante cosmológica e para o termo linear na curvatura, não têm parte não locais. Já foi discutido em [86] que essas partes não locais seriam extremamente úteis para aplicações, mas suas derivações estão além das nossas capacidades de fazer cálculo no espaço-tempo curvo. A razão é que as não localidades da constante cosmológica e setor de Einstein-Hilbert não podem ser obtidas no âmbito da expansão em série do tensor de curvatura porque estão, em última análise, relacionadas à expansão em perturbações da métrica no fundo plano [35]. Isso não significa que não haja correções não locais relevantes para esses setores de baixas energias, mas essas correções não podem ser obtidas pelo método descrito aqui.

Para o limite sem massa, quando $-\square/m^2 \gg 1$ (no sentido $p^2/m^2 \gg 1$ no espaço Euclidiano) os fatores de forma k_W e k_R tornam-se muito mais simples. Nesse limite, de acordo com (4.34), temos $a \rightarrow 2$. A expansão em série mostra que o comportamento assintótico da quantidade A no UV é

$$A = 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m^2}{p^2}\right) + \frac{m^2}{p^2} \left[\ln\left(\frac{m^2}{p^2}\right) - 1 \right] + \left(\frac{m^2}{p^2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{m^2}{p^2}\right) \right] + \dots \quad (4.52)$$

É fácil ver que no limite UV, quando $m^2/p^2 \rightarrow 0$, o segundo termo vai para o infinito logaritmicamente, o primeiro termo é constante e os outros termos tendem a zero. Isso define o comportamento assintótico UV dos fatores de forma. Por exemplo, no caso k_W temos

$$k_W = -\frac{1}{60} \ln\left(-\frac{\square}{m^2}\right) + \text{termos muito pequenos e constantes.} \quad (4.53)$$

É importante notar que o coeficiente $1/60$ aqui é exatamente o mesmo que o do pólo $(2-w)^{-1}$ no termo de Weyl quadrado em (4.49) e claro, exatamente o mesmo que aquele de $\ln \mu^2$. Isso significa que basta saber o coeficiente do pólo (parte divergente da ação efetiva) para se chegar à dependência logarítmica em μ e se obter também o coeficiente do *leading log* do comportamento assintótico do fator de forma. Em outras palavras, podemos dizer que a divergência logarítmica UV controla o esquema de subtração mínima, esquema baseado no GR, coberto pela dependência de μ , e também concorda com o comportamento físico da teoria no UV, o que significa a dependência logarítmica dos momentos p no regime

quando $(p/m) \rightarrow \infty$. A observação final sobre o fator de forma (4.46) é que a expressão (4.53) permite encontrar a parte quadrática do tensor de Weyl da anomalia conforme no limite sem massa. Para esse fim, devemos usar a parametrização conforme da métrica $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} \exp\{2\sigma(x)\}$ e notar que

$$\square = e^{-2\sigma(x)} [\square' + \mathcal{O}(\sigma)]. \quad (4.54)$$

Agora, derivando a anomalia pela prescrição

$$\langle T^\mu_\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-4\sigma} \frac{\delta \Gamma[\bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0}, \quad (4.55)$$

podemos imediatamente recuperar de (4.54) a parte C^2 da anomalia com o coeficiente correto, idêntico ao da divergência correspondente.

No limite IV, quando $p^2 \ll m^2$, podemos observar uma situação muito diferente. O comportamento assintótico de A e k_W é, nesse caso, da forma tipo potência, a saber

$$A = -\frac{1}{12} \frac{p^2}{m^2} \left(1 - \frac{1}{10} \frac{p^2}{m^2}\right) + \dots, \quad (4.56)$$

$$k_W = -\frac{1}{840} \frac{p^2}{m^2} \left(1 + \frac{1}{18} \frac{p^2}{m^2}\right) + \dots \quad (4.57)$$

Podemos ver que aqui não há *running* logarítmico no IV e portanto, não há relação direta entre a dependência nos momentos e em μ nessa região. Esse fenômeno é chamado desacoplamento e pode também ser visto nas funções beta.

4.3 Fatores de forma para a teoria vetorial

Como um próximo exemplo consideramos o modelo de Proca. Para o caso vetorial, escrevemos a ação como

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \right]. \quad (4.58)$$

A fim de lidar com esta teoria, pode-se usar o procedimento de Stückelberg [82,87]. Aqui seguiremos a última referência. A forma bilinear da última ação e seus demais operadores

são dados por

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \delta_\mu^\alpha \square - m^2 \delta_\mu^\alpha - R_\mu^\alpha, \\
\hat{P} &= \hat{P}_\mu^\alpha = \frac{1}{6} R \delta_\mu^\alpha - R_\mu^\alpha, \\
\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} &= [R_{\mu\nu}]_\beta^\alpha = -R_{\mu\nu\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Agora usaremos novamente o método do *heat kernel* (4.1) e os cálculos apresentados nessa seção serão muito semelhantes àqueles mostrados na seção anterior onde discutimos o campo escalar. Como antes, para o termo referente à constante cosmológica temos

$$\begin{aligned}
W_{01} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \hat{1} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} 4 \\
&= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{4m^4}{2} \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \right\}, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

onde usamos novamente as relações (4.10), (4.13) e (4.14). A ação efetiva a *1-loop* é

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\square \delta_\nu^\mu - R_\nu^\mu - m^2 \delta_\nu^\mu) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\square - m^2), \tag{4.61}$$

onde já foi considerado também o termo de fixação de calibre e fantasmas (veja [87] para detalhes). Após subtrair a contribuição do campo escalar do nosso resultado (4.60), chegamos à contribuição do termo de constante cosmológica

$$W_{01}^{(vector)} - W_{01}^{(escalar)} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{3}{2} m^4 \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \right\}. \tag{4.62}$$

De uma maneira similar, para o termo linear na curvatura temos:

$$\begin{aligned}
W_{02} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} (s\hat{P}) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \frac{s}{s^{1+w}} \frac{\mu^{2(2-\omega)}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \left(-\frac{1}{3} R \right). \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Usando novamente (4.10), (4.14) e (4.17) temos

$$W_{02} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{3} m^2 R \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right] \right\} \tag{4.64}$$

e, como antes,

$$W_{02}^{(vector)} - W_{02}^{(escalar)} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} m^2 R \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right] \right\}, \tag{4.65}$$

com $\xi = 0$ significando o acoplamento mínimo. Os demais termos podem ser obtidos da mesma maneira que foi feita para o caso do campo escalar. Então, calculamos os demais termos e encontramos os coeficientes $l_{1\dots 5}^*$ e $l_{1\dots 5}$. Para isso voltamos à equação (4.18)

$$\begin{aligned} W_{total} &= W_{R_{\mu\nu}^2} + W_{R^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \frac{s^2}{s^{1+\omega}} \left\{ \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \left[\hat{1} R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} + \hat{1} R f_2(-s\Box) R \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{P} f_3(-s\Box) R + \hat{P} f_4(-s\Box) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(-s\Box) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Abrindo termo a termo

1º termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \text{tr} \left[\hat{1} f_1 R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} \right] &= \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[4f_1 R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} \right]. & \quad (4.66) \end{aligned}$$

2º termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \text{tr} \left[\hat{1} f_2 R(-s\Box) R \right] &= \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[4f_2 R(-s\Box) R \right]. & \quad (4.67) \end{aligned}$$

3º termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \text{tr} \left[f_3 \hat{P}(-s\Box) R \right] &= \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{3} f_3 R(-s\Box) R \right]. & \quad (4.68) \end{aligned}$$

4º termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \text{tr} \left[f_4 \hat{P}(-s\Box) \hat{P} \right] &= \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ f_4 \left[R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} - \frac{2}{9} R(-s\Box) R \right] \right\}. & \quad (4.69) \end{aligned}$$

5º termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \text{tr} \left[f_5 \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(-s\Box) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \right] &= \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ f_5 \left[-4R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} + R(-s\Box) R \right] \right\}. & \quad (4.70) \end{aligned}$$

Agora agrupamos os termos

$$\begin{aligned}
W_{total} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} (4f_1 + f_4 - 4f_5) \right. \\
&\quad \left. + R(-s\Box) R \left(4f_2 - \frac{1}{3}f_3 - \frac{2}{9}f_4 + f_5 \right) \right]. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Usando as relações (4.3), (4.4) e (4.5), temos

$$\begin{aligned}
W_{total} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \\
&\quad \times \left\{ R_{\mu\nu} \left[\frac{f(\tau)}{2} + \frac{2f(\tau)}{\tau} + \frac{4f(\tau)}{\tau^2} - \frac{4}{3\tau} - \frac{4}{\tau^2} \right] R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + R \left[-\frac{f(\tau)}{8} - \frac{f(\tau)}{2\tau} - \frac{f(\tau)}{2\tau^2} + \frac{5}{12\tau} + \frac{1}{2\tau^2} \right] R \right\}. \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Da equação (4.72) vemos que

$$l_1^* = \frac{1}{2}, \quad l_2^* = 2, \quad l_3^* = 4, \quad l_4^* = -\frac{4}{3}, \quad l_5^* = -4, \tag{4.73}$$

$$l_1 = -\frac{1}{8}, \quad l_2 = -\frac{1}{2}, \quad l_3 = -\frac{1}{2}, \quad l_4 = \frac{5}{12}, \quad l_5 = \frac{1}{2}. \tag{4.74}$$

Substituindo (4.73) e (4.74) em (4.72), obtemos

$$\begin{aligned}
W_{total} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \\
&\quad \times \left\{ R_{\mu\nu} \left[l_1^* f(\tau) + l_2^* \frac{f(\tau)}{\tau} + l_3^* \frac{f(\tau)}{\tau^2} + l_4^* \frac{1}{\tau} + l_5^* \frac{1}{\tau^2} \right] R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + R \left[l_1 f(\tau) + l_2 \frac{f(\tau)}{\tau} + l_3 \frac{f(\tau)}{\tau^2} + l_4 \frac{1}{\tau} + l_5 \frac{1}{\tau^2} \right] R \right\}. \tag{4.75}
\end{aligned}$$

Usando as equações (4.5) e (4.10) e ainda fazendo $\tau = tu$, temos

$$\begin{aligned}
W_{total} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} m^{2(w-2)} \\
&\quad \times \left\{ R_{\mu\nu} \left[\left(l_1^* \int_0^\infty dt e^{-t} t^{1-w} f(tu) \right) + \left(l_2^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u t^w} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(l_3^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u^2 t^{1+w}} \right) + \left(l_4^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u t^w} \right) + \left(l_5^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u^2 t^{1+w}} \right) \right] R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + R \left[\left(l_1 \int_0^\infty dt e^{-t} t^{1-w} f(tu) \right) + \left(l_2 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u t^w} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(l_3 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u^2 t^{1+w}} \right) + \left(l_4 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u t^w} \right) + \left(l_5 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u^2 t^{1+w}} \right) \right] R \right\} \tag{4.76}
\end{aligned}$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned}
W_{total} &= W_{R_{\mu\nu}^2} + W_{R^2} \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ l_1^* R_{\mu\nu} M_1 R^{\mu\nu} + l_2^* R_{\mu\nu} M_2 R^{\mu\nu} + l_3^* R_{\mu\nu} M_3 R^{\mu\nu} + l_4^* R_{\mu\nu} M_4 R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + l_5^* R_{\mu\nu} M_5 R^{\mu\nu} + l_1 R M_1 R + l_2 R M_2 R + l_3 R M_3 R + l_4 R M_4 R + l_5 R M_5 R \right\},
\end{aligned} \tag{4.77}$$

onde M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 são dadas por (4.28), cujos resultados são (4.32), (4.33), (4.37), (4.38) e (4.39). Então usamos diretamente esses resultados e escrevemos

$$\begin{aligned}
M_{R_{\mu\nu}^2} &= l_1^* M_1 + l_2^* M_2 + l_3^* M_3 + l_4^* M_4 + l_5^* M_5 \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{7}{10} \right] + A - \frac{8A}{3a^2} + \frac{32A}{15a^4} + \frac{8}{45a^2} - \frac{44}{225} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Como antes

$$\begin{aligned}
M_{R_{\mu\nu}^2}^{(vector)} - M_{R_{\mu\nu}^2}^{(escalar)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{13}{60} \right] + A + \frac{8A}{5a^4} - \frac{8A}{3a^2} + \frac{2}{15a^2} - \frac{91}{450} \right\} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{13}{60} \right] + k_W \right\},
\end{aligned} \tag{4.79}$$

onde

$$k_W \equiv k_{R_{\mu\nu}^2} = A + \frac{8A}{5a^4} - \frac{8A}{3a^2} + \frac{2}{15a^2} - \frac{91}{450}. \tag{4.80}$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned}
M_{R^2} &= l_1 M_1 + l_2 M_2 + l_3 M_3 + l_4 M_4 + l_5 M_5 \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[-\frac{1}{20} \right] - \frac{A}{4} + \frac{2A}{3a^2} - \frac{4A}{15a^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{45a^2} + \frac{47}{900} \right\},
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
M_{R^2}^{(vector)} - M_{R^2}^{(escalar)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[-\frac{7}{120} \right] - \frac{45A}{144} + \frac{15A}{18a^2} - \frac{A}{5a^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{60a^2} + \frac{241}{3600} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Agora podemos escrever

$$W_{HD} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left[R_{\mu\nu} (M_{R_{\mu\nu}^2}) R^{\mu\nu} + R (\tilde{M}_{R^2}) R \right] \tag{4.83}$$

e usando a mesma idéia da seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
W_{HD} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} (M_{R^2_{\mu\nu}}) C^{\mu\nu\alpha\beta} + R \left(M_{R^2} + \frac{1}{3} M_{R^2_{\mu\nu}} \right) R \right] \\
&= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{13}{60(2-w)} + \frac{13}{60} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \\
&\quad \left. + R \left[\left(\frac{1}{72(2-w)} + \frac{1}{72} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + k_R \right] R \right\}, \tag{4.84}
\end{aligned}$$

onde

$$k_R = -\frac{A}{18a^2} + \frac{A}{3a^4} + \frac{A}{48} + \frac{1}{36a^2} - \frac{1}{2160} \tag{4.85}$$

e a ação efetiva será

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{vetor}^{(1)} &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{3m^4}{2} \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \right. \\
&\quad + \frac{m^2}{2} R \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{13}{60(2-w)} + \frac{13}{60} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \\
&\quad \left. + R \left[\left(\frac{1}{72(2-w)} + \frac{1}{72} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right) + k_R \right] R \right\}. \tag{4.86}
\end{aligned}$$

Como foi discutido em [87], esta fórmula não permite limite $m \rightarrow 0$ contínuo (descontinuidade) comparado com teoria de Maxwell.

4.4 Fatores de forma para a teoria fermiônica

Nesse caso, a ação correspondente é

$$S = \int d^4x \sqrt{g} i \bar{\psi} (\gamma^\mu \nabla_\mu + im_f) \psi, \tag{4.87}$$

com os respectivos operadores (ver [12] e [88])

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= i (\gamma^\mu \nabla_\mu + im_f), \\
\hat{P} &= -\frac{\hat{1}}{12} R, \\
\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} R_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Usamos novamente o método do *heat kernel*, mas fazemos uma mudança no sinal geral da equação (4.1) porque agora estamos trabalhando com férmions e sua estatística deve ser considerada. Então

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{(1)} = & -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds \mu^{2(2-\omega)}}{s (4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \{ \hat{1} + s\hat{P} + s^2 [\hat{1} R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} \\ & + \hat{1} R f_2(-s\Box) R + \hat{P} f_3(-s\Box) R + \hat{P} f_4(-s\Box) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(-s\Box) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu}] \}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Desenvolvendo os dois primeiros termos da equação (4.89), teremos o termo referente à constante cosmológica

$$\begin{aligned} W_{01} &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds \mu^{2(2-\omega)}}{s (4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} \hat{1} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds \mu^{2(2-\omega)}}{s (4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} 4. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Usando as relações (4.10), (4.13) e (4.14) a equação (4.90) nos fornecerá

$$W_{01} = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ 2m^4 \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \right\} \quad (4.91)$$

e o termo linear na curvatura

$$\begin{aligned} W_{02} &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds \mu^{2(2-\omega)}}{s (4\pi s)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} (s\hat{P}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{s ds \mu^{2(2-\omega)}}{s^{1+w} (4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \left(-\frac{1}{3} R \right), \end{aligned} \quad (4.92)$$

onde usando as relações (4.10), (4.14) e (4.17) a equação (4.92) nos fornecerá

$$W_{02} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{3} m^2 R \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right] \right\}. \quad (4.93)$$

Agora, permita-nos calcular os demais termos, exatamente como nas seções anteriores e encontrar os coeficientes $l_{1\dots 5}^*$ e $l_{1\dots 5}$. Para isso, voltemos à equação (4.18). Lembrando que para férmions o sinal geral da equação deve ser mudado, temos então

$$\begin{aligned} W &= W_{R^2_{\mu\nu}} + W_{R^2} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds \frac{s^2}{s^{1+w}} \left\{ \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} e^{-sm^2} \text{tr} [\hat{1} R_{\mu\nu} f_1(-s\Box) R^{\mu\nu} + \hat{1} R f_2(-s\Box) R \right. \\ &\quad \left. + \hat{P} f_3(-s\Box) R + \hat{P} f_4(-s\Box) \hat{P} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(-s\Box) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Abrindo termo a termo da equação (4.94)

1º termo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \operatorname{tr} \left[\hat{1} f_1 R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[4f_1 R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

2º termo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \operatorname{tr} \left[\hat{1} f_2 R(-s\Box) R \right] = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[4f_2 R(-s\Box) R \right]. \end{aligned} \quad (4.96)$$

3º termo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \operatorname{tr} \left[f_3 \hat{P}(-s\Box) R \right] = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{4}{12} f_3 R(-s\Box) R \right]. \end{aligned} \quad (4.97)$$

4º termo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \operatorname{tr} \left[f_4 \hat{P}(-s\Box) \hat{P} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{4}{144} f_4 R(-s\Box) R \right]. \end{aligned} \quad (4.98)$$

5º termo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \operatorname{tr} \left[f_5 \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(-s\Box) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[-2f_5 R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} f_5 R(-s\Box) R \right]. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Agora agrupamos os termos (dividindo tudo por 4 por conveniência)

$$\begin{aligned} W = -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left[R_{\mu\nu}(-s\Box) R^{\mu\nu} \left(f_1 - \frac{1}{2} f_5 \right) \right. \\ \left. + R(-s\Box) R \left(f_2 - \frac{1}{12} f_3 + \frac{1}{144} f_4 + \frac{1}{8} f_5 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Usando as relações (4.3), (4.4) e (4.5), teremos

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ R_{\mu\nu} \left[\frac{f(\tau)}{\tau^2} - \frac{1}{12\tau} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{f(\tau)}{4\tau} \right] R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + R \left[-\frac{f(\tau)}{16\tau} - \frac{f(\tau)}{8\tau^2} + \frac{1}{24\tau} + \frac{1}{8\tau^2} \right] R \right\}, \tag{4.101}
\end{aligned}$$

o que nos leva à

$$l_1^* = 0, \quad l_2^* = \frac{1}{4}, \quad l_3^* = 1, \quad l_4^* = -\frac{1}{12}, \quad l_5^* = -1, \tag{4.102}$$

$$l_1 = 0, \quad l_2 = -\frac{1}{16}, \quad l_3 = -\frac{1}{8}, \quad l_4 = \frac{1}{24}, \quad l_5 = \frac{1}{8}. \tag{4.103}$$

Substituindo (4.102) e (4.103) em (4.101), encontramos

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds e^{-sm^2} s^{1-\omega} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} \int d^4x \sqrt{g} \\
&\quad \times \left\{ R_{\mu\nu} \left[l_2^* \frac{f(\tau)}{\tau} + l_3^* \frac{f(\tau)}{\tau^2} + l_4^* \frac{1}{\tau} + l_5^* \frac{1}{\tau^2} \right] R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + R \left[l_2 \frac{f(\tau)}{\tau} + l_3 \frac{f(\tau)}{\tau^2} + l_4 \frac{1}{\tau} + l_5 \frac{1}{\tau^2} \right] R \right\}. \tag{4.104}
\end{aligned}$$

Usando as equações (4.5) e (4.10) e ainda fazendo $\tau = tu$ temos

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \frac{(\mu^2)^{2-\omega}}{(4\pi)^\omega} m^{2(\omega-2)} \\
&\quad \times \left\{ R_{\mu\nu} \left[\left(l_2^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u t^\omega} \right) + \left(l_3^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u^2 t^{1+\omega}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(l_4^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u t^\omega} \right) + \left(l_5^* \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u^2 t^{1+\omega}} \right) \right] R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + R \left[\left(l_2 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u t^\omega} \right) + \left(l_3 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{f(tu)}{u^2 t^{1+\omega}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(l_4 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u t^\omega} \right) + \left(l_5 \int_0^\infty dt e^{-t} \frac{1}{u^2 t^{1+\omega}} \right) \right] R \right\} \tag{4.105}
\end{aligned}$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned}
W &= W_{R_{\mu\nu}^2} + W_{R^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ l_2^* R_{\mu\nu} M_2 R^{\mu\nu} + l_3^* R_{\mu\nu} M_3 R^{\mu\nu} + l_4^* R_{\mu\nu} M_4 R^{\mu\nu} + l_5^* R_{\mu\nu} M_5 R^{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + l_2 R M_2 R + l_3 R M_3 R + l_4 R M_4 R + l_5 R M_5 R \right\}, \tag{4.106}
\end{aligned}$$

onde M_2 , M_3 , M_4 e M_5 são dados por (4.28), cujos resultados são (4.32), (4.33), (4.38) e (4.39). Então, usando diretamente esses resultados, escrevemos

$$\begin{aligned} M_{R^2_{\mu\nu}} &= l_2^* M_2 + l_3^* M_3 + l_4^* M_4 + l_5^* M_5 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[-\frac{1}{40} \right] + \frac{8A}{15a^4} - \frac{A}{3a^2} + \frac{2}{45a^2} - \frac{19}{900} \right\}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Agora multiplicando tudo por 4

$$\begin{aligned} M_{R^2_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{1}{10} \right] + \frac{300Aa^2 - 480A - 40a^2 + 19a^4}{225a^4} \right\} \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{1}{10} \right] + k_W, \right\} \end{aligned} \quad (4.108)$$

onde

$$k_W \equiv k_{R_{\mu\nu}^2} = \frac{300Aa^2 - 480A - 40a^2 + 19a^4}{225a^4}. \quad (4.109)$$

Da mesma forma temos

$$\begin{aligned} M_R^2 &= l_2 M_2 + l_3 M_3 + l_4 M_4 + l_5 M_5 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{1}{120} \right] - \frac{A}{15a^4} + \frac{A}{12a^2} - \frac{1}{180a^2} + \frac{11}{1800} \right\}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Como antes, multiplicamos tudo por 4

$$M_R^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) \right] \left[\frac{1}{30} \right] + \frac{150Aa^2 - 120A - 10a^2 + 11a^4}{450a^4} \right\}. \quad (4.111)$$

Agora podemos escrever

$$W_{HD} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left[R_{\mu\nu}(M_{R^2_{\mu\nu}}) R^{\mu\nu} + R(\tilde{M}_{R^2}) R \right]$$

e usando a mesma idéia das seções anteriores

$$\begin{aligned} W_{HD} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta}(M_{R^2_{\mu\nu}}) C^{\mu\nu\alpha\beta} + R \left(M_{R^2} + \frac{1}{3} M_{R^2_{\mu\nu}} \right) R \right] \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{10(2-w)} + \frac{1}{10} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} + R [k_R] R, \right\} \end{aligned} \quad (4.112)$$

onde

$$k_R = \frac{-120A + 30Aa^2 - 10a^2 + a^4}{270a^4} \quad (4.113)$$

e a ação efetiva será

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{fermion}^{(1)} &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -2m^4 \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \frac{3}{2} \right] \right. \\
&+ \frac{1}{3} m^2 R \left[\frac{1}{2-w} + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + 1 \right] \\
&+ \frac{1}{2} C^{\mu\nu\alpha\beta} \left[\frac{1}{10(2-w)} + \frac{1}{10} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + k_W \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} \\
&\left. + R [k_R] R \right\}. \tag{4.114}
\end{aligned}$$

4.5 As equações do grupo de renormalização

Uma vez que se tem a ação efetiva de cada modelo, facilmente se obtém as equações do GR ou funções beta. Nessa parte não entro em detalhes dos cálculos, pois o uso desse método já foi exaustivamente estudado e calculado na literatura, assim me limito a colocar diretamente os resultados (para detalhes dos cálculos e gráficos consulte [36]).

Por definição, no esquema de subtração mínima as funções beta são escritas como

$$\beta_\lambda^{\overline{MS}} = \lim_{n \rightarrow 4} \mu \frac{d\lambda}{d\mu}, \tag{4.115}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\beta_1^{\overline{MS}} &= -\frac{1}{(4\pi^2)} \left(\frac{1}{120} N_O + \frac{1}{20} N_{1/2} + \frac{1}{10} N_1 \right), \\
\beta_2^{\overline{MS}} &= -\frac{1}{(4\pi^2)} \left(\frac{1}{360} N_O + \frac{11}{360} N_{1/2} + \frac{31}{180} N_1 \right), \\
\beta_3^{\overline{MS}} &= -\frac{1}{(4\pi^2)} \left(\frac{1}{180} N_O + \frac{1}{30} N_{1/2} - \frac{1}{10} N_1 \right),
\end{aligned} \tag{4.116}$$

onde N_O , $N_{1/2}$ e N_1 são os números de campos sem massa, escalares, fermiônicos e vetoriais respectivamente.

Já no esquema da subtração de momentos, a definição das funções beta é diferente e escrevemos

$$\beta_\lambda = \lim_{n \rightarrow 4} M \frac{d\lambda}{dM} \quad \text{com} \quad M^2 = p_E^2. \tag{4.117}$$

As funções beta de cada campo que estamos tratando são dadas abaixo.

- Campo escalar

A função beta nesse caso tem a forma [89]

$$\beta_1^{escalar} = -\frac{1}{(4\pi^2)} \left(\frac{1}{18a^2} - \frac{1}{180} - \frac{a^2 - 4}{6a^4} A \right), \quad (4.118)$$

que é o resultado geral a *1-loop* válido em qualquer escala. Como um caso especial podemos tomar o limite UV quando $p^2 \gg m^2$

$$\beta_1^{escalar,UV} = -\frac{1}{(4\pi^2)} \frac{1}{120} + O\left(\frac{m^2}{p^2}\right). \quad (4.119)$$

No limite IV ($p^2 \ll m^2$) encontra-se

$$\beta_1^{escalar,IV} = -\frac{1}{1680(4\pi^2)} \frac{p^2}{m^2} + O\left(\frac{p^4}{m^4}\right). \quad (4.120)$$

Essa última fórmula demonstra o desacoplamento IV dos efeitos quânticos do campo escalar massivo.

- Campo vetorial

Apesar do limite sem massa para as correções quânticas do vácuo do vetor massivo serem singulares (devido à invariância de calibre e conseqüentemente ao diferente número de graus de liberdade físicos), podemos derivar as expressões gerais para as funções beta usando a forma de costume, como antes. A função beta nesse caso tem a forma

$$\beta_1^{vetor} = \frac{1}{(4\pi^2)} \left[\frac{11}{60} - \frac{1}{6a^2} - \frac{a^2}{16} + \frac{(a^2 - 4)(a^4 - 8a^2 + 8)}{16a^4} A \right]. \quad (4.121)$$

No limite UV quando $p^2 \gg m^2$

$$\beta_1^{vetor,UV} = -\frac{1}{(4\pi^2)} \frac{13}{120} + O\left(\frac{m^2}{p^2}\right). \quad (4.122)$$

No limite IV ($p^2 \ll m^2$) temos

$$\beta_1^{vetor,IV} = -\frac{3}{112(4\pi^2)} \frac{p^2}{m^2} + O\left(\frac{p^4}{m^4}\right). \quad (4.123)$$

Comparado ao limite UV, exatamente como ocorreu no caso do campo escalar, essa equação demonstra o desacoplamento no IV da contribuição de *1-loop*.

- Campo fermiônico

Aqui, a função beta tem a forma

$$\beta_1^{fermion} = \frac{1}{(4\pi^2)} \left[\frac{2}{9a^2} - \frac{19}{180} + \left(\frac{8}{3a^4} - \frac{5}{3a^2} + \frac{1}{4} \right) A \right]. \quad (4.124)$$

No limite UV quando $p^2 \gg m^2$

$$\beta_1^{fermion,UV} = -\frac{1}{20(4\pi^2)} + O\left(\frac{m^2}{p^2}\right). \quad (4.125)$$

O limite IV ($p^2 \ll m^2$) é similar ao caso do campo escalar no sentido de que mostra o desacoplamento

$$\beta_1^{fermion,IV} = -\frac{1}{168(4\pi^2)} \frac{p^2}{m^2} + O\left(\frac{p^4}{m^4}\right). \quad (4.126)$$

Para maiores detalhes e análise de outros limites e desacoplamento no caso de supersimetria, consulte novamente [89].

4.6 Considerações finais

Cálculos da ação efetiva de vácuo para os campos escalar, vetorial e fermiônico, todos massivos, foram efetuados em segunda ordem na curvatura, usando um esquema de renormalização dependente da massa. Isso nos permitiu encontrar a forma explícita do desacoplamento dos campos massivos no setor de altas derivadas da ação efetiva de vácuo. Aplicações cosmológicas não foram tratadas aqui, pois não era o objetivo nesse trabalho.

Essa análise detalhada do trabalho desenvolvido por Gorbar e Shapiro, nos permitiu identificar e corrigir erros de impressão que aparecem em algumas fórmulas do artigo original. Os erros de impressão se encontram nas páginas 9 e 10 de [36], sendo na página 9, um erro de sinal na exponencial da função $f(\tau)$ e na página 10, um erro de impressão na fórmula (4.5). Ainda na página 9, a equação que define a ação efetiva Euclidiana, possui um erro importante de sinal que se não fosse corrigido mudaria todos os resultados subsequentes. A forma correta (que foi a utilizada para o desenvolvimento desse capítulo) é dada pela equação (4.1), que confere com o resultado de Barvinsky e Vilkovisky [90] e difere do resultado de Gorbar e Shapiro.

Com todas as informações obtidas a partir do estudo feito nesse capítulo, começamos a desenvolver um novo trabalho onde a ideia é aplicar o mesmo método aqui utilizado, a um novo modelo. O modelo escolhido é um campo tensorial massivo antissimétrico no espaço-tempo curvo [85].

CAPÍTULO 5

O Grupo Funcional de Renormalização (GFR)

Antes de começarmos o estudo do modelo de GFR aplicado à GQ, vamos primeiramente introduzir os fundamentos dessa abordagem. Este capítulo de revisão está baseado no capítulo 12 do livro de Andreas Wipf [91]. Existem inúmeras outras bibliografias [62, 92–95] por onde se pode estudar essa abordagem. Escolhi me basear no livro de Andreas Wipf por este ser bastante didático na explicitação do método. A idéia aqui é apresentar o método e mostrar como se obtém a equação geral do fluxo do GFR (equação de Wetterich [93]) que permite estudar o *running* das constantes de acoplamento do nosso modelo (ver capítulo 6). Vale citar que não entrarei em muitos detalhes, visto que isso pode ser conseguido em uma rápida consulta à bibliografia fornecida.

5.1 Considerações iniciais

Em física teórica, o grupo funcional de renormalização é uma implementação particular do conceito de grupo de renormalização que combina métodos funcionais de TQC com a idéia do grupo de renormalização de Kenneth Wilson [96], especialmente quando se trata de sistemas fortemente interagentes. Esses métodos funcionais de TQC nos permitem obter os geradores funcionais do qual extraímos a ação efetiva que é a grandeza que traz toda a informação física relevante do sistema.

A técnica do GFR nos permite interpolar suavemente entre leis microscópicas conhecidas e fenômenos macroscópicos complexos em sistemas físicos. Figurativamente falando, o GFR funciona como um microscópio com uma resolução variável (que aqui corresponde à escala k) e trata todas as flutuações do campo escala por escala. O método é não perturbativo, o que nesse contexto significa que não depende de uma expansão em uma pequena constante de acoplamento.

Matematicamente, o GFR baseia-se numa equação diferencial funcional exata para uma ação efetiva dependente da escala (k) o que leva a cálculos tecnicamente mais simples, uma vez que não trabalhamos com as integrais funcionais de TQC. Essa equação diferencial funcional é a equação de fluxo ou equação de Wetterich, ferramenta central dessa abordagem.

5.2 Funcionais dependentes da escala

Para encontrar a ação efetiva média usamos o gerador funcional das funções de correlações de n -pontos Euclidianas (como já definido e revisado no Capítulo 2)

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\phi] + (j, \phi)}, \quad (j, \phi) = \int d^d x j(x)\phi(x), \quad (5.1)$$

onde S é a ação clássica da teoria, j é uma fonte externa e ϕ é o campo da teoria em questão. O logaritmo de (5.1) define o funcional de Schwinger $W[j] = \log Z[j]$ que gera todas as funções de correlação conectadas. A transformação de Legendre de $W[j]$ é o que nos interessa, a ação efetiva

$$\Gamma[\phi] = (j, \phi) - W[j] \quad \text{com} \quad \phi(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}. \quad (5.2)$$

A última equação em (5.2) determina $j[\phi]$ que deve ser inserido no lado direito da primeira equação. Detalhes dessa parte, referentes à TQC no espaço curvo podem ser encontrados em [12].

A fim de introduzir funcionais dependentes da escala, nós adicionamos um termo "regulador" dependente da escala ΔS_k que é o *cutoff* infravermelho (IV) para a ação clássica na integral funcional (5.1) e obtemos

$$Z_k[j] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + (j, \phi) - \Delta S_k[\phi]} . \quad (5.3)$$

O correspondente funcional de Schwinger dependente da escala, $W_k[j]$, é dado por

$$W_k[j] = \log Z_k[j] . \quad (5.4)$$

Como regulador escolhemos um funcional quadrático com uma massa dependente do momento,

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi^*(p) R_k(p) \phi(p) \equiv \frac{1}{2} \int_p \phi^*(p) R_k(p) \phi(p) , \quad (5.5)$$

tal que a equação de fluxo terá uma estrutura de *1-loop*. Essa função *cutoff* $R_k(p)$ possui certas condições, sendo elas:

- * deve-se recuperar a ação efetiva para $k \rightarrow 0$: $R_k(p) \rightarrow 0$ para p fixo $\Rightarrow \boxed{\Gamma_0 \rightarrow \Gamma}$,
- * deve-se recuperar a ação clássica na escala UV, $k \rightarrow \Lambda$: $R_k(p) \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{\Gamma_\Lambda \rightarrow S}$,
- * regularização no IV: $R_k(p) > 0$ para $p \rightarrow 0$.

Alguns possíveis *cutoffs* são

- * o regulador exponencial: $R_k(p) = \frac{p^2}{e^{p^2/k^2} - 1}$,
- * o regulador otimizado: $R_k(p) = (k^2 - p^2) \Theta(k^2 - p^2)$,
- * o regulador quártico: $R_k(p) = k^4/p^2$,
- * o regulador *sharp*: $R_k(p) = \frac{p^2}{\Theta(k^2 - p^2)} - p^2$,
- * o regulador Callan-Symanzik: $R_k(p) = k^2$,

onde Θ é a função de Heaviside.

Agora vamos construir a ação efetiva dependente da escala. Introduzimos o campo médio da teoria regularizada com fonte externa, dado por

$$\phi(x) = \frac{\delta W_k[j]}{\delta j(x)} . \quad (5.6)$$

Realizando uma transformação de Legendre modificada, definimos a ação efetiva dependente da escala como

$$\Gamma_k[\phi] = (j, \phi) - W_k[j] - \Delta S_k[\phi]. \quad (5.7)$$

A variação da ação efetiva com respeito a ϕ nos fornece a equação de movimento para o campo médio

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi(x)} = \int \frac{\delta j(y)}{\delta \phi(x)} \phi(y) dy + j(x) - \int \frac{\delta W_k[j]}{\delta j(y)} \frac{\delta j(y)}{\delta \phi(x)} dy - \frac{\delta \Delta S_k[\phi]}{\delta \phi(x)}. \quad (5.8)$$

Com (5.6), o primeiro termo do lado direito cancela com o terceiro termo e

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi(x)} = j(x) - \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta S_k[\phi] = j(x) - (R_k \phi)(x). \quad (5.9)$$

5.3 Derivação da equação de Wetterich

Diferenciando Γ_k em (5.7) resulta em

$$\partial_k \Gamma_k = \int d^d x \partial_k j(x) \phi(x) - \partial_k W_k[j] - \int \frac{\partial W_k[j]}{\partial j(x)} \partial_k j(x) - \partial_k \Delta S_k[\phi]. \quad (5.10)$$

Usando (5.6) em (5.10), o primeiro e o terceiro termos se cancelam e

$$\begin{aligned} \partial_k \Gamma_k &= -\partial_k W_k[j] - \partial_k \Delta S_k[\phi] \\ &= -\partial_k W_k[j] - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \phi(x) \partial_k R_k(x, y) \phi(y). \end{aligned} \quad (5.11)$$

A derivada de W_k em (5.4) é dada por

$$\partial_k W_k[j] = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \langle \phi(x) \partial_k R_k(x, y) \phi(y) \rangle_k \quad (5.12)$$

onde $\langle \phi(x) \partial_k R_k(x, y) \phi(y) \rangle_k$ é uma média funcional dependente da escala k e relaciona-se com a função conexa de dois pontos por

$$G_k^{(2)}(x, y) \equiv \frac{\delta^2 W_k[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_k - \phi(x) \phi(y) \quad (5.13)$$

e temos

$$\begin{aligned} \partial_k W_k[j] &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \phi(x) \partial_k R_k(x, y) G_k^{(2)}(y, x) - \partial_k \Delta S_k[\phi] \\ &= -\frac{1}{2} \text{tr}(\partial_k R_k G_k^{(2)}) - \partial_k \Delta S_k[\phi]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Inserindo esse resultado na equação de fluxo (5.11), obtemos

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \partial_k R_k(x, y) G_k^{(2)}(y, x) . \quad (5.15)$$

Uma vez que Γ_k é somente a transformação de Legendre modificada de W_k , devemos em primeiro lugar calcular as correções para o resultado citado, com

$$\phi(x) = \frac{\delta W_k[j]}{\delta j(x)} \quad \text{e} \quad j(x) = \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi(x)} + \int d^d y R_k(x, y) \phi(y) . \quad (5.16)$$

Encontramos a seguinte relação entre as derivadas segundas

$$\delta(x - y) = \int d^d z \frac{\delta \phi(x)}{\delta j(z)} \frac{\delta j(z)}{\delta \phi(y)} = \int d^d z G_k^{(2)}(x, z) \{ \Gamma_k^{(2)} + R_k \}(z, y) . \quad (5.17)$$

Entre as chaves aparece a segunda derivada funcional de Γ_k

$$\Gamma_k^{(2)}(x, y) = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \quad (5.18)$$

e concluímos que a expressão entre chaves em (5.17) é o inverso da função conexa de dois pontos G_k e lemos

$$G_k^{(2)} = \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} . \quad (5.19)$$

Inserir esse resultado na equação (5.15) nos fornece a equação de fluxo para a ação efetiva dependente da escala

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right) . \quad (5.20)$$

Esta é a equação diferencial funcional exata que estávamos procurando, a equação que fornecerá todas as informações físicas do sistema, ela é conhecida como equação de Wetterich e contém o propagador completo.

5.4 Considerações finais

A equação de Wetterich é uma equação íntegro-diferencial funcional não linear. É uma equação exata do GFR, possui no denominador uma derivada funcional segunda da ação efetiva e isso faz com que o fluxo nas soluções (numéricas) principalmente utilizando cálculos explícitos, estabilize.

Quando se aplica esse tratamento a alguma teoria, a equação deve ser truncada, o que significa ser projetada para uma função de poucas variáveis. Infelizmente não é trivial estimar o erro de forma segura para as equações de fluxo do GFR. Normalmente o que se faz para tentar corrigir esse problema é melhorar o truncamento em etapas sucessivas, o que na prática significa incluir mais e mais *running* dos acoplamentos e observar quão mais rápido o fluxo se estabiliza. Isto dá uma primeira impressão sobre a estabilidade e a qualidade do fluxo. Além disso, pode-se comparar os fluxos para diferentes funções reguladoras R_k em um determinado esquema de truncamento. Diz-se que o truncamento é bom quando os acoplamentos no limite IV variam pouco com a mudança da função R_k . A parte mais difícil em qualquer truncamento é conseguir incluir todos os graus de liberdade relevantes no IV.

A partir dessa breve revisão, seguimos para o capítulo seguinte onde estudamos e analisamos o GFR no espaço-tempo curvo aplicado a uma teoria de um único campo escalar real acoplado não minimamente.

O Grupo Funcional de Renormalização (GFR) para o campo escalar no espaço-tempo curvo

O *running* do parâmetro não-mínimo ξ de interação do campo escalar real e escalar de curvatura é explorado dentro do contexto do Grupo Funcional de Renormalização (GFR). Estabelecemos o fluxo do grupo de renormalização (GR) no espaço-tempo curvo no setor do campo escalar (em particular derivamos uma equação para o parâmetro não-mínimo) [97]. A trajetória do grupo de renormalização é numericamente explorada para diferentes conjuntos de dados iniciais.

6.1 Considerações iniciais

A estrutura da renormalização no espaço-tempo curvo é bem conhecida em ambos os níveis, geral e perturbativo. Em particular, sabe-se que qualquer teoria que seja renormalizável no espaço plano pode ser formulada para ser renormalizável no espaço curvo [12] (ver também [17] para uma revisão recente). Os elementos necessários de uma teoria quântica consistente no espaço-tempo curvo são a ação de vácuo puramente gravitacional, que consiste do termo de Einstein-Hilbert com constante cosmológica e também de quatro termos covariantes de derivadas quárticas. Se a teoria em discussão tem campos escalares φ_i , novos termos não-mínimos da forma $\xi_{ij}R\varphi_i\varphi_j$ devem ser incluídos na ação. O grupo de renormalização (GR) no espaço-curvo foi introduzido em [47, 98, 99] (ver também [12]) como uma ferramenta útil para explorar as propriedades de escala da teoria.

A renormalização e o GR no espaço curvo seguem uma importante hierarquia:

(i) As equações do GR para acoplamentos dos campos de matéria e massas não dependem de ξ_{ij} e dos parâmetros da ação de vácuo. Mais geral, essas equações não são afetadas pela presença de um campo gravitacional externo ¹.

(ii) As equações para ξ_{ij} dependem dos acoplamentos da matéria (mas não das massas dos campos, no caso da renormalização pelo esquema de subtração mínima), mas não dependem dos parâmetros da ação de vácuo.

(iii) As equações para os parâmetros da ação de vácuo podem depender dos acoplamentos (além da aproximação de *1-loop*) e de ξ_{ij} .

Deve-se notar que o *running* de ξ_{ij} pode ter algumas importantes implicações, especialmente para modelos inflacionários tal como a inflação de Higgs [101], isso porque esse *running* está estreitamente relacionado ao potencial efetivo do campo de Higgs no espaço curvo [12] (ver também [102]). O mesmo diz respeito também a outros modelos inflacionários, incluindo aqueles baseados na inflação, inflação de Starobinsky [103] e especialmente sua versão modificada [104, 105]. Portanto, seria bastante útil saber se o parâmetro não-mínimo pode experimentar um forte *running* em algum momento da história do universo. Uma das possibilidades para observar um *running* intenso de ξ está

¹ Isso não é verdade se a gravidade é quantizada [100], mas não consideramos essa parte aqui.

relacionado aos efeitos não-perturbativos no âmbito da abordagem do grupo funcional de renormalização (GFR). No presente capítulo apresentamos as equações do GFR no espaço curvo de uma maneira covariante e num fundo independente similar ao que foi feito antes para o GR perturbativo no espaço curvo. Vale citar que a abordagem do GFR no fundo fixo de Sitter foi previamente considerada em [106–108]. O trabalho desenvolvido nesse capítulo está essencialmente restrito ao caso de um único campo escalar e conseqüentemente para a equação de um único parâmetro ξ . Consideramos inicialmente a aproximação potencial local (APL), lidando com a teoria mais simples com a simetria quebrada e então exploramos o caso mais complicado com a quebra da simetria e a renormalização da função de onda. De fato, a extensão do fluxo do GR para a fase quebrada é especialmente interessante porque o *running* do parâmetro não-mínimo nesse caso não foi suficientemente bem explorado mesmo numa abordagem perturbativa. Algumas conseqüências potencialmente interessantes do fluxo do GR para o parâmetro não-mínimo estão relacionadas à dependência de escala das partes não locais da ação gravitacional induzida que surge devido à dependência em relação à curvatura do valor esperado do vácuo do campo escalar [109].

6.2 GFR para campo escalar com acoplamento não-mínimo

A teoria renormalizável de um único escalar ϕ no espaço curvo começa de uma ação clássica da forma

$$S = \int_x \left[-\frac{1}{2}\phi\Delta_g\phi + \frac{\xi}{2}R\phi^2 + V(\phi) \right] + S^{\text{grav}}[g], \quad (6.1)$$

onde supusemos a assinatura Euclidiana e usamos a notação $\int_x \equiv \int d^4x\sqrt{g(x)}$. Além disso $S^{\text{grav}}[g]$ corresponde à ação de vácuo como descrito na introdução desse capítulo. Aqui também usamos a notação $\Delta_g \equiv -\square$, para ter correspondência com nosso artigo [97] e enfatizar que o espaço é Euclidiano. Discutiremos o fluxo do GFR da parte de vácuo num trabalho futuro [110]. $V(\phi)$ é o potencial clássico que pode ter a forma $(1/4!)\lambda\phi^4$ no caso de querermos nos manter dentro do escopo de teorias perturbativamente renormalizáveis.

Como é usual na abordagem do GR, a nível quântico todas as quantidades começam a depender da escala, que identificamos como k . O uso prático da abordagem do GFR implica a escolha do esquema de truncagem que escolhemos de numa maneira simples supondo que a ação efetiva média seja

$$\Gamma_k = \int_x \left[-\frac{Z_k}{2} \phi \Delta_g \phi + \frac{\xi_k}{2} R \phi^2 + u_k(\phi) \right] + \Gamma_k^{\text{grav}}[g]. \quad (6.2)$$

Essa truncagem inclui um potencial efetivo dependente da escala $u_k(\phi)$, uma renormalização da função de onda Z_k e o *running* do parâmetro não-mínimo ξ_k que não depende do momento ou do campo ϕ . A ação *cutoff* invariante tem a forma

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int_x \phi R_k(-\Delta_g) \phi, \quad \text{onde } R_k(-\Delta_g) = Z_k r_k(-\Delta_g). \quad (6.3)$$

Supõe-se que R_k tenha propriedades bem conhecidas de uma função *cutoff* [62, 92]. A dimensão anômala é definida como

$$\eta_k = -\frac{k \partial_k Z_k}{Z_k} = -\frac{\partial_t Z_k}{Z_k}, \quad \text{onde } t = \log \frac{k}{\mu}. \quad (6.4)$$

Quando a escala k corre do *cutoff* ultravioleta (UV) Λ para o *cutoff* infravermelho (IV), o parâmetro de escala adimensional t corre de $\log(\Lambda/\mu)$ a $-\infty$.

A equação de Wetterich para a ação efetiva média dependente da escala é [93, 95]

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right), \quad (6.5)$$

onde $\Gamma_k^{(2)}$ indica uma segunda derivada variacional com respeito ao campo escalar e Tr inclui o limite de coincidência e a integração covariante sobre as variáveis do espaço-tempo. Para a truncagem (6.2) o lado esquerdo de (6.5) torna-se

$$\partial_t \Gamma_k = \int_x \left[-\frac{\eta_k Z_k}{2} \phi \Delta_g \phi + \frac{\partial_t \xi_k}{2} R \phi^2 + \partial_t u_k(\phi) \right] + \partial_t \Gamma_k^{\text{grav}}[g]. \quad (6.6)$$

A fim de se obter o lado direito de (6.5), precisamos de

$$\Gamma_k^{(2)} = -Z_k \Delta_g + \xi_k R + u_k''(\phi), \quad (6.7)$$

onde a plica ($'$) significa derivada com respeito ao campo escalar. A variação da função *cutoff* pode ser colocada na forma

$$\partial_t R_k = Z_k (\partial_t r_k - \eta_k r_k) . \quad (6.8)$$

Então o lado direito da equação de fluxo (6.5) toma a forma

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{(\partial_t - \eta_k) r_k (-\Delta_g)}{(-\Delta_g + r_k (-\Delta_g)) + \xi_k Z_k^{-1} R + Z_k^{-1} w_k''(\phi)} \right] . \quad (6.9)$$

A equação (6.5) com (6.6) e (6.9) representam a equação de fluxo covariante correspondendo à truncagem (6.2). Ela pode ser melhorada por inclusão de termos que contenham derivadas superiores em (6.6), mas então os cálculos de (6.9) também devem ser avaliados até a correspondente ordem superior de aproximação.

6.2.1 Elaborando a equação de Wetterich

Prova-se útil definir

$$u_k(\phi) = \frac{m_k^2}{2} \phi^2 + w_k(\phi) , \quad \text{tal que} \quad u_k''(\phi) = m_k^2 + w_k''(\phi) . \quad (6.10)$$

Assim chegamos à seguinte forma da equação (6.9),

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{B_k(-\Delta_g)}{P_k(-\Delta_g) + \Sigma_k} \right) , \quad (6.11)$$

onde nós introduzimos as abreviações

$$B_k(-\Delta_g) = (\partial_t - \eta_k) r_k(-\Delta_g) , \quad (6.12)$$

$$P_k(-\Delta_g) = -\Delta_g + r_k(-\Delta_g) + \frac{m_k^2}{Z_k} , \quad (6.13)$$

$$\Sigma_k(\phi, R) = \frac{\xi_k}{Z_k} R + \frac{1}{Z_k} w_k''(\phi) . \quad (6.14)$$

A fim de analisar a equação de fluxo para a truncagem (6.2), precisamos avaliar a expressão (6.11) até a primeira ordem no tensor de curvatura, enquanto os termos com derivadas da curvatura e potências superiores do tensor de curvatura podem ser negligenciados. Isso significa que podemos efetivamente considerar uma aproximação com R constante.

É fácil notar que os operadores B_k e P_k comutam. Mas para um campo não homogêneo e dependente da curvatura do espaço-tempo, Σ_k não comuta com B_k e P_k . Mas eles comutam numa aproximação onde a curvatura e o campo ϕ são constantes, esta última corresponde à aproximação potencial local (APL).

Para simplificar as notações no que se segue, nós ignoramos o argumento de B_k, P_k e Σ_k . Então a expansão do lado direito da (6.11) em uma série em potências de Σ_k dá

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\frac{B_k}{P_k + \Sigma_k} \right) &= \text{Tr} \left(\frac{B_k}{P_k(1 + P_k^{-1}\Sigma_k)} \right) = \text{Tr} \left(B_k P_k^{-1} \frac{1}{1 + P_k^{-1}\Sigma_k} \right) \\ &= \text{Tr} Q_{k,1} - \text{Tr} (Q_{k,2}\Sigma_k) + \text{Tr} \left(Q_{k,2}\Sigma_k \frac{1}{P_k} \Sigma_k \right) + O(\Sigma_k^3), \quad Q_{k,m} = \frac{B_k}{P_k^m}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

O primeiro termo no lado direito é independente de ϕ e contribui somente para o *running* no setor de vácuo Γ_k^{grav} . A ação *cutoff* já está especificada. B_k e P_k são alguma função desconhecida de $-\Delta_g$ que deveria ser expandida até primeira ordem no tensor de curvatura. Para esse fim, aplicamos o método do *heat kernel off-diagonal* baseado nas transformações de Laplace e de Mellin, tal que os operadores em (6.15) podem ser derivados do *heat kernel* do Laplaciano covariante. Esse método está descrito em detalhes em [111], então aqui só esboçamos os principais pontos da derivação.

As funções $Q_{k,m}$ do Laplaciano covariante na série de Neumann (6.15) admite representação em termos da transformada inversa de Laplace

$$Q_{k,m}(-\Delta_g) = \int_0^\infty dt \mathcal{L}^{-1}[Q_{k,m}](t) e^{t\Delta_g}, \quad (6.16)$$

onde

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty dt e^{-st} f(t). \quad (6.17)$$

No que se segue aplica-se uma fórmula útil [111]

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty dt t^{-p} \mathcal{L}^{-1}[f](t) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(p)} \int_0^\infty ds s^{p-1} f(s). \quad (6.18)$$

Para calcular a ação efetiva na truncagem dada (discutido abaixo), precisamos do limite de coincidência dos elementos da matriz $\langle x|Q_{k,m}|x' \rangle$. De acordo com (6.16), podemos usar a expansão do *heat kernel* para um pequeno t ,

$$\langle x|e^{t\Delta_g}|x \rangle = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} [a_0(x) + ta_1(x) + t^2 a_2(x) + \dots], \quad (6.19)$$

para encontrar uma expansão em série de $\langle x|Q_{k,m}|x\rangle$ em potências dos tensores invariantes de curvatura e suas derivadas covariantes. Os coeficientes de Schwinger-DeWitt a_0, a_1, a_2, \dots têm a forma

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{6}R, \quad a_2 = \frac{1}{180} \left(R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 6\Delta_g R + \frac{5}{2}R^2 \right), \dots \quad (6.20)$$

Devido ao esquema de truncagem dado, precisamos somente de a_0 e a_1 , mas não é difícil manter também os próximos termos, por enquanto. Usando a função reguladora [112]

$$r_k(s) = (k^2 - s)\theta(k^2 - s), \quad (6.21)$$

onde θ é a função de Heaviside definida de uma maneira geral como

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

pode-se chegar à expressão explícita

$$Q_{k,m}(s) = \frac{2k^2 - (k^2 - s)\eta_k}{M_k^m} \theta(k^2 - s), \quad M_k = k^2 + \frac{m_k^2}{Z_k}. \quad (6.22)$$

Permita-nos citar aqui que uma revisão geral das funções $Q_{k,m}$, similares àquelas definidas acima, pode ser encontrada no Apêndice A do artigo de revisão em Gravitação Quântica [113].

Inserindo a expansão (6.19) em (6.16), e usando (6.18) obtemos

$$\begin{aligned} \langle x|Q_{k,m}(-\Delta_g)|x\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \mathcal{L}^{-1}[Q_{k,m}](t) \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} a_n(x) t^n \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{\Gamma(d/2 - n)} \int_0^{\infty} ds Q_{k,m}(s) s^{d/2-n-1}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde a identificação $p = d/2 - n$ já foi usada na equação (6.18).

Com o intuito de se calcular as integrais sobre s na equação (6.23), pode-se notar que os $Q_{k,m}$ em (6.22) são diferentes de zero somente no intervalo $[0, k^2]$, o que nos dá

$$\int_0^{\infty} ds Q_{k,m}(s) s^{d/2-n-1} = \left(1 - \frac{\eta_k}{d - 2n + 2}\right) \frac{1}{M_k^m} \frac{2k^{d-2n+2}}{d/2 - n}. \quad (6.24)$$

Após a integração chegamos ao seguinte resultado

$$\langle x|Q_{k,m}(-\Delta_g)|x\rangle = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{M_k^m} \sum_n \left(1 - \frac{\eta_k}{d - 2n + 2}\right) \frac{a_n(x) k^{d-2n+2}}{\Gamma(d/2 - n + 1)}. \quad (6.25)$$

Como já mencionamos, para nossa proposta é suficiente considerar os termos com $n = 0, 1$ na última série. Expandindo o lado direito da equação de fluxo (6.15) em potências de ϕ e curvatura até a primeira ordem, em quatro dimensões encontramos

$$\frac{1}{2} \text{Tr} Q_{k,1}(-\Delta_g) = \frac{1}{32\pi^2 M_k} \int_x \left[k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) + \frac{k^4}{3} \left(1 - \frac{\eta_k}{4}\right) R + \dots \right]. \quad (6.26)$$

É fácil ver que esses termos contribuem somente para os termos puramente gravitacionais e, portanto, são irrelevantes para o *running* de ξ .

A contribuição em segunda ordem é

$$\frac{1}{2} \text{Tr} [Q_{k,2}(-\Delta_g)\Sigma_k] = \frac{1}{32\pi^2 M_k^2} \int_x \left[k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) \Sigma_k + \frac{k^4}{3} \left(1 - \frac{\eta_k}{4}\right) R\Sigma_k + \dots \right], \quad (6.27)$$

onde novamente ignoramos potências mais altas da curvatura.

A derivação do terceiro termo na expansão (6.15) requer algumas comutações de Σ_k com P_k^{-1} , por exemplo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(Q_{k,2}\Sigma_k \frac{1}{P_k} \Sigma_k \right) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(Q_{k,2}\Sigma_k \left(\Sigma_k - \frac{1}{P_k} [P_k, \Sigma_k] \right) \frac{1}{P_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} (Q_{k,3}\Sigma_k^2) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left(Q_{k,3}\Sigma_k \frac{1}{P_k} [P_k, \Sigma_k] \right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

O último termo contendo o comutador de P_k e Σ_k dá origem ao *running* da renormalização da função de onda e será tratado na seção 6.4. Ele não contribui com o *running* de u_k e ξ_k e assim pode ser negligenciado por enquanto. Portanto chegamos à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} (Q_{k,3}(-\Delta_g)\Sigma_k^2) &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{M_k^3} \sum_n \frac{k^{6-2n}}{\Gamma(3-n)} \left(1 - \frac{\eta_k}{6-2n}\right) \text{Tr} (a_n \Sigma_k^2) \\ &= \frac{1}{32\pi^2 M_k^3} \int_x \left[k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) \Sigma_k^2 + \frac{k^4}{3} \left(1 - \frac{\eta_k}{4}\right) R \Sigma_k^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Na última expressão omitimos a maioria das contribuições puramente gravitacionais (não todas, uma vez que por exemplo $R\Sigma_k$ ainda contém um termo $\propto R^2$) e termos além do esquema de truncagem escolhido (6.2). Similarmente, obtém-se para um campo e curvatura constantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(Q_{k,2}\Sigma_k (P_k^{-1}\Sigma_k)^{m-1} \right) &= \frac{1}{2} \text{Tr} (Q_{k,m+1}\Sigma_k^m) \\ &= \frac{1}{32\pi^2 M_k^{1+m}} \int_x \left[k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) \Sigma_k^m + \frac{k^4}{3} \left(1 - \frac{\eta_k}{4}\right) R \Sigma_k^m + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

No que se segue, ignoramos a contribuição puramente gravitacional $\Gamma_k^{\text{grav}}[g]$ na equação (6.6) e o fluxo do GR relacionado, a parte de vácuo será tratada num próximo trabalho.

6.2.2 Fluxo do GR para os acoplamentos e para o parâmetro não-mínimo

Inserindo (6.26)-(6.30) em (6.15) e usando a definição (6.14), resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\phi] + R_k} \right) = \frac{1}{32\pi^2 M_k} \int_x \left[k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6} \right) + \frac{k^4}{3} \left(1 - \frac{\eta_k}{4} \right) R \right] \\ & \times \left[1 - \frac{\xi_k R + w_k''}{Z_k M_k} + \left(\frac{\xi_k R + w_k''}{Z_k M_k} \right)^2 - \left(\frac{\xi_k R + w_k''}{Z_k M_k} \right)^3 + \dots \right] \\ & - \frac{1}{2Z_k^2} \text{Tr} \left(Q_{k,3} w_k''(\phi) \frac{1}{P_k} [P_k, w_k''(\phi)] \right) + \dots, \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde os termos contendo R^2 e R^3 vão além do esquema de truncagem e serão omitidos.

Pode-se supor que o potencial clássico para o campo escalar no *cutoff* é uma função par. Segue-se a partir da equação de fluxo (6.31) que o potencial efetivo dependente da escala permanece par em todas as escalas. Vamos ainda supor que a simetria \mathbb{Z}_2 não seja espontaneamente quebrada. Então o mínimo do potencial efetivo é em $\phi = 0$ e nós podemos expandir w_k em (6.10) como

$$w_k(\phi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \lambda_{(2n)k} \phi^{2n} = \frac{1}{24} \lambda_{4k} \phi^4 + \frac{1}{720} \lambda_{6k} \phi^6 + \dots, \quad (6.32)$$

onde os $\lambda_{(2n)k}$ são coeficientes dependentes da escala. Seus *runnings* são determinados pelas equações do GFR que serão agora derivadas juntamente com aquela para ξ_k .

Para w_k em (6.32) o último termo em (6.31) tem a forma $\phi^2(\partial^2 \phi^2 + \dots)$ e está além da truncagem (6.2) escolhida. Como resultado a função de onda é não renormalizável. Note que para um potencial com *cutoff* não par com um termo ϕ^3 ou para o fluxo na fase quebrada, na qual o potencial par u_k é expandido sobre um campo médio diferente de zero, há uma renormalização da função de onda, como nós veremos na seção 6.4. Pode-se notar que essa situação não depende da presença de um fundo curvo e pode ser observada em teorias de campo escalar no espaço plano [62, 91, 92].

Com as equações (6.6) e (6.32) podemos comparar os termos dependentes de ϕ na expressão (6.31) e nesse caminho chegamos à equação de fluxo para a teoria de campo escalar não-minimamente acoplada à gravidade,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\eta_k Z_k}{2} \phi \Delta_g \phi + \frac{\partial_t \xi_k}{2} R \phi^2 + \frac{\phi^2}{2} \partial_t m_k^2 + \frac{\phi^4}{24} \partial_t \lambda_{4k} + \frac{\phi^6}{720} \partial_t \lambda_{6k} \\
& = -\frac{1}{M_k^2} \frac{1}{32\pi^2 Z_k} \left[k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) \left(\frac{1}{2} \lambda_{4k} \phi^2 + \frac{1}{24} \lambda_{6k} \phi^4\right) + \frac{k^4}{3} \left(1 - \frac{\eta_k}{4}\right) R \lambda_{4k} \frac{\phi^2}{2} \right] \\
& + \frac{1}{M_k^3} \frac{1}{32\pi^2 Z_k^2} \left\{ k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) \left[\xi_k R \lambda_{4k} \phi^2 + \frac{1}{4} (\lambda_{4k})^2 \phi^4 + \frac{1}{24} \lambda_{4k} \lambda_{6k} \phi^6 \right] \right\} \\
& - \frac{1}{M_k^4} \frac{1}{32\pi^2 Z_k^3} \left\{ k^6 \left(1 - \frac{\eta_k}{6}\right) \frac{\lambda_{4k}^3}{8} \phi^6 \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Agora comparando os termos de ambos os lados dessa equação

- Para o termo cinético $\phi \Delta_g \phi$, observamos que $Z_k = \text{constante}$ ou $\eta_k = 0$, portanto não há renormalização da função de onda para um potencial par numa fase simétrica. Podemos então fixar $Z_k = Z_\Lambda = 1$ em todas as escalas k . Então, em particular $M_k = k^2 + m_k^2$, e denotamos $D_k = (k^2 + m_k^2)^{-1}$ por conveniência.

- Para o termo de massa a equação do GFR pode ser facilmente obtida de (6.33)

$$\partial_t m_k^2 = -\frac{1}{32\pi^2} k^6 D_k^2 \lambda_{4k}. \tag{6.34}$$

- Para os primeiros dois termos de interação temos, com $Z_k \equiv 1$,

$$\partial_t \lambda_{4k} = -\frac{k^6}{32\pi^2} D_k^2 \left(\lambda_{6k} - 6D_k \lambda_{4k}^2 \right), \tag{6.35}$$

$$\partial_t \lambda_{6k} = -\frac{k^6 D_k^2}{32\pi^2} \left(\lambda_{8k} - 30D_k \lambda_{4k} \lambda_{6k} + 90D_k^2 \lambda_{4k}^3 \right). \tag{6.36}$$

A fim de manter nossa consideração simples, vamos truncar a expansão de Taylor para o potencial desconsiderando todos os coeficientes a partir de $\lambda_{8,k}$, incluindo a definição de $\lambda_{8,k} = 0$ na equação (6.36).

- Finalmente, o termo não-mínimo $\phi^2 R$ produz, para $Z_k \equiv 1$

$$\partial_t \xi_k = \frac{k^6 D_k^2}{16\pi^2} \left(D_k \xi_k - \frac{1}{6k^2} \right) \lambda_{4k}. \tag{6.37}$$

Em um perfeito acordo com as características gerais do GR perturbativo no espaço-tempo curvo (como descrito na Introdução), as equações para os acoplamentos λ_{4k} e λ_{6k} não dependem de ξ_k , enquanto a equação do GFR para ξ_k depende dos acoplamentos. Ao mesmo tempo, diferente do GR baseado no método de subtração mínima, aqui as funções β para os acoplamentos e parâmetro não-mínimo, dependem do *running* da massa m_k do campo. A este respeito, as equações do GFR se assemelham ao GR baseado na subtração de momentos, desenvolvido para o campo escalar interagindo no espaço-tempo curvo [89], mas a dependência da massa nas presentes equações do GFR é muito mais forte.

6.3 O fluxo do GFR para os acoplamentos, massa e ξ

As equações (6.34)-(6.37) devem ser exploradas numericamente. Para isso introduzimos as quantidades adimensionais

$$m_t = \frac{m_k}{k}, \quad D_t = \frac{1}{1 + m_t^2}, \quad \lambda_{4t} = \lambda_{4k}, \quad \lambda_{6t} = k^2 \lambda_{6k}, \quad \lambda_{8t} = k^4 \lambda_{8k}, \dots \quad (6.38)$$

que vamos supor serem dependentes do parâmetro adimensional $t = \log(k/\mu)$, definido em (6.4). Então as equações tornam-se

$$\partial_t m_t^2 = -2m_t^2 - \frac{1}{32\pi^2} D_t^2 \lambda_{4t}, \quad (6.39)$$

$$\partial_t \lambda_{4t} = -\frac{1}{32\pi^2} D_t^2 (\lambda_{6t} - 6D_t \lambda_{4t}^2), \quad (6.40)$$

$$\partial_t \lambda_{6t} = 2\lambda_{6t} - \frac{1}{32\pi^2} D_t^2 (\lambda_{8t} - 30D_t \lambda_{4t} \lambda_{6t} + 90D_t^2 \lambda_{4t}^3). \quad (6.41)$$

Além disso, a equação do GFR para $\xi(t)$ em termos da nova variável tem a forma

$$\partial_t \xi_t = \frac{1}{16\pi^2} D_t^3 \left(\xi_t - \frac{1}{6 D_t} \right) \lambda_{4t}. \quad (6.42)$$

É fácil ver que no limite sem massa, $D_t \rightarrow 1$, essa equação reproduz as principais características da equação do GR a *1-loop* no esquema de subtração mínima como é conhecido a partir de [12, 98].

A análise numérica dessas equações mostra que o fluxo do GFR pode ser bem diferente daquele para o *running* do GR perturbativo a *1-loop*, principalmente devido à presença da massa. Como se pode ver a partir dos gráficos apresentados nas figuras 6.1, a massa cresce

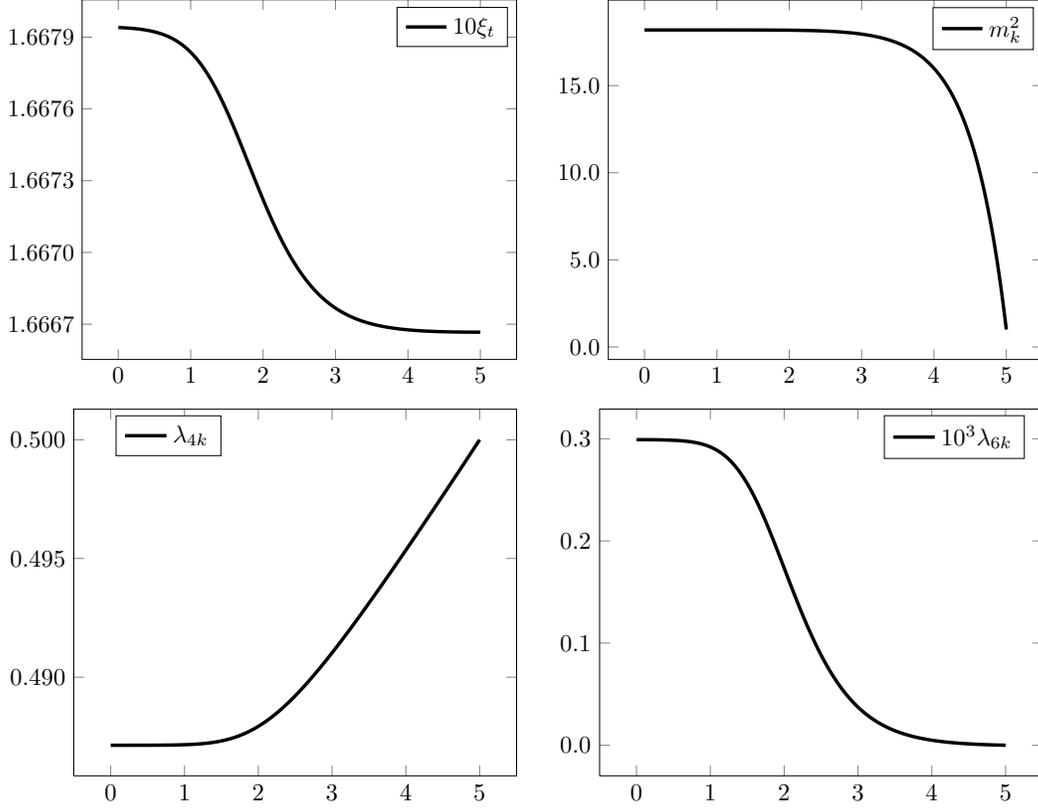


Figura 6.1: Fluxo do parâmetro não-mínimo ξ_t e acoplamentos m_k^2 , λ_{4k} , λ_{6k} (em unidades de μ) com $t = \log(k/\mu)$ na fase não quebrada. Os dados iniciais no cutoff $\Lambda = \mu e^5$ são $m^2 = \mu^2$, $\lambda_4 = 0.5$, $\lambda_6 = 0$ e $\xi = 1/6$.

rapidamente quando flui da escala *cutoff* ultravioleta (UV) em $t = 5$ (correspondendo a um valor de *cutoff* $\Lambda = e^5\mu$) para o infravermelho (IV) em $t = 0$ que corresponde a $k = \mu$. Como mencionado anteriormente, na abordagem não perturbativa do GFR há um desacoplamento IV de sexta potência que é muito forte quando comparado ao desacoplamento quadrático usual do Teorema de Appelquist e Carazzone [84]. Como resultado, no caso em discussão pode-se observar que o *running* para todos os acoplamentos e em particular ξ_t , na verdade congela em valores $t \lesssim 1$ ou equivalentemente em escalas $k \lesssim \mu \cdot e$.

A figura 6.2 mostra o *running* do parâmetro não-mínimo ξ_t para o mesmo potencial inicial como na figura 6.1, mas para diferentes valores iniciais de ξ no *cutoff* UV. Dependendo do valor inicial o parâmetro pode aumentar ou diminuir durante o fluxo para o

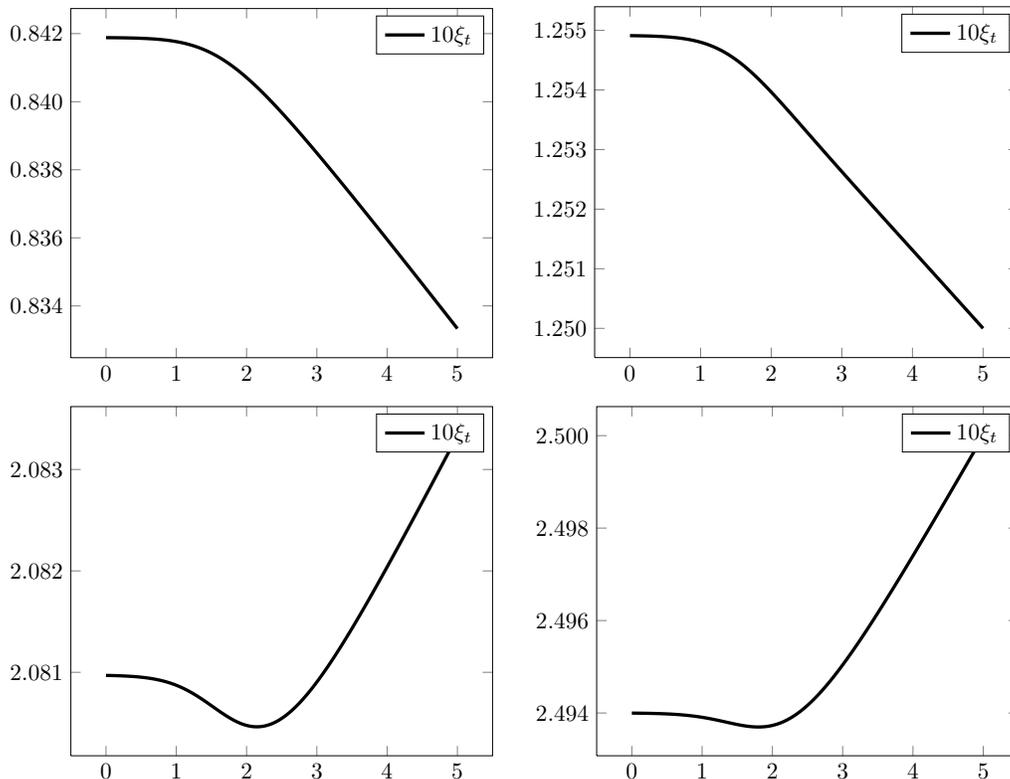


Figura 6.2: *Running* do parâmetro não-mínimo ξ_t com $t = \log(k/\mu)$ para os mesmos acoplamentos iniciais como na figura 6.1, mas com diferentes valores iniciais ξ na vizinhança do acoplamento conforme $\xi_c = 1/6$. No sentido horário da parte superior: $\xi_c - 2\delta$, $\xi_c - \delta$, $\xi_c + \delta$ e $\xi_c + 2\delta$ com $\delta = 1/24$.

IV. Mas em todos os casos considerados, os valores no UV e IV não são muito diferentes. Nos fluxos investigados (apenas alguns são mostrados na figura) a mudança relativa foi somente em torno de um por cento.

6.4 Quebra de simetria e fluxo do GFR para a dimensão anômala

Como já sabemos, na truncagem APL (6.2) não há *running* do GR da dimensão anômala η_k para potenciais pares. Ao mesmo tempo, tal *running* está presente em teoria escalar além de *1-loop* e seria interessante observá-lo dentro da abordagem do GFR.

Uma das possibilidades está relacionada a teorias com simetria quebrada. Isso significa que devemos introduzir uma massa quadrática negativa na ação clássica (6.1) e implementar essa informação na ação efetiva média (6.2) por imposição da condição de contorno na escala *cutoff* $k = \Lambda$. Então o potencial efetivo do campo escalar não é convexo em escalas intermediárias e isso precisa ser levado em conta, no presente caso há de se considerar oscilações próximas ao mínimo não simétrico desse potencial.

No espaço curvo a quebra espontânea de simetria encontra sérias complicações, porque a posição de tal mínimo não é constante para uma curvatura não constante. A situação foi explorada em detalhes em [109] e foi mostrado que as não localidades surgem em tal teoria mesmo em ordens baixas da curvatura. Contudo, uma vez que nossa intenção aqui é considerar casos relativamente simples, permita-nos considerar a aproximação de ordem zero e correspondentemente supor que a posição do mínimo do potencial é homogêneo e independente da curvatura, denotado por $\phi_{0,k}$, tal que $u_k''(\phi_{0,k}) = m_k^2 \geq 0$ é a massa (física) na fase quebrada. Então pode-se expandir o potencial efetivo como

$$u_k = \lambda_{0k} + \sum_{n \geq 2} \frac{\lambda_{nk}}{n!} (\phi - \phi_{0k})^n, \quad (6.43)$$

com pequeno $\phi - \phi_{0k}$ e mínimo dependente da escala ϕ_{0k} . Então

$$u_k'' = \lambda_{2,k} + \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_{n,k}}{(n-2)!} (\phi - \phi_{0k})^{n-2} \equiv m_k^2 + w_k''. \quad (6.44)$$

Nota-se facilmente que essas definições de m_k^2 e w_t são diferentes das definições prévias, porque a expansão é realizada na fase espontaneamente quebrada. No entanto, nas novas notações as equações (6.12) e (6.14) têm quase a mesma forma de antes, nas notações antigas. Mas na fase quebrada, potências ímpares de $\phi - \phi_{0k}$ aparecem tal que muitos mais termos surgem na expansão em série de potências do lado direito da equação de fluxo. Quando se calcula o lado esquerdo da equação de fluxo, deve-se levar em conta que o mínimo ϕ_{0k} do potencial dependente da escala flui.

Assim, continuamos por inserir as expansões (6.43) e (6.44) na equação do GFR com a renormalização da função de onda dependente da escala, praticamente da mesma forma que fizemos antes. Finalmente, a mudança para as quantidades adimensionais (6.38) e

para os campos adimensionais de acordo com

$$\chi = k^{-1} Z_k^{1/2} \phi \quad \text{e} \quad \chi_{0k} = k^{-1} Z_k^{1/2} \phi_{0k} \quad (6.45)$$

permite-nos chegar às equações do GFR na fase quebrada. Para simplificar a notação usamos as seguintes abreviações

$$A_t = \frac{1}{32\pi^2} \left(1 - \frac{\eta_t}{6}\right) \quad \text{e} \quad G_n = \frac{\lambda_n}{1 + m_t^2}. \quad (6.46)$$

O *running* da constante cosmológica λ_{0t} é dado por

$$\partial_t \lambda_{0t} + 4\lambda_{0t} = A_t D_t, \quad (6.47)$$

e uma vez que não realimentam o *running* dos acoplamentos restantes ele será descartado. Comparar os termos lineares em $\chi - \chi_{0t}$ nos leva ao *running* do campo médio

$$\partial_t \chi_{0t} + \left(1 + \frac{\eta_t}{2}\right) \chi_{0t} = A_t D_t \frac{G_3}{m_t^2}. \quad (6.48)$$

Essa equação de fluxo garante que χ_{0t} permaneça um mínimo de potencial dependente da escala em todas as escalas. Ao escrever as equações de fluxo para os acoplamentos adimensionais $m_t^2, \lambda_{3t}, \dots, \lambda_{6t}$, numa expansão até ordem 6, usamos a equação de fluxo (6.48) para simplificar as expressões resultantes. Desta forma chegamos a

$$(\partial_t + 2 - \eta_t) m_t^2 = A_t D_t \left(\frac{\lambda_{3t}}{m_t^2} G_3 - G_4 + 2G_3^2 \right), \quad (6.49)$$

$$(\partial_t + 1 - \frac{3}{2}\eta_t) \lambda_{3t} = A_t D_t \left(\frac{\lambda_{3t}}{m_t^2} G_4 - G_5 + 6G_3 G_4 - 6G_3^3 \right), \quad (6.50)$$

$$(\partial_t - 2\eta_t) \lambda_{4t} = A_t D_t \left(\frac{\lambda_{3t}}{m_t^2} G_5 - G_6 + 6G_4^2 + 8G_3 G_5 - 36G_3^2 G_4 + 24G_3^4 \right), \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - 1 - \frac{5}{2}\eta_t) \lambda_{5t} = A_t D_t \left(\frac{\lambda_{3t}}{m_t^2} G_6 + 20G_4 G_5 + 10G_3 G_6 - 90G_3 G_4^2 \right. \\ \left. - 60G_3^2 G_5 + 240G_3^3 G_4 - 120G_3^5 \right), \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - 2 - 3\eta_t) \lambda_{6t} = A_t D_t \left(20G_5^2 + 30G_4 G_6 - 90G_4^3 - 360G_3 G_4 G_5 - 90G_3^2 G_6 \right. \\ \left. + 1080G_3^2 G_4^2 + 480G_3^3 G_5 - 1800G_3^4 G_4 + 720G_3^6 \right). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Nas duas últimas equações de fluxo os termos contendo λ_{7t} e λ_{8t} são omitidos na aproximação polinomial de sexta ordem. Além disso, no espaço curvo encontra-se a nova

equação para o parâmetro não mínimo

$$(\partial_t - \eta_t)\xi_t = \frac{D_t}{16\pi^2} \left[\left(1 - \frac{\eta_t}{6}\right) (G_4 - 3G_3^2) D_t \xi_t - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\eta_t}{4}\right) (G_4 - 2G_3^2) \right]. \quad (6.54)$$

A fim de explorar o sistema de equações (6.49)-(6.54) precisamos de uma equação adicional que define como η_t depende da escala. Para obter essa dependência (na nossa truncagem ela é induzida pelo último termo em (6.28)), deve-se lembrar que o *running* de todos os acoplamentos e de Z_k (que define η_t) não depende da presença de um espaço curvo de fundo. Como resultado, nós podemos usar o conhecido resultado do espaço plano para η_t derivado em [91, 114] e recentemente explorado em [115]. Em termos de quantidades adimensionais, o resultado para a dimensão anômala é

$$\eta_t = \frac{1}{32\pi^2} \frac{[u_t'''(\chi_{0t})]^2}{[1 + u_t''(\chi_{0t})]^4} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\lambda_{3t}^2}{(1 + m_t^2)^4}, \quad (6.55)$$

onde χ_{0t} é a posição de mínimo do potencial dependente da escala. Claramente, no esquema de truncagem considerado a renormalização da função de onda somente ocorre na fase quebrada com coeficiente λ_{3t} diferente de zero. Decorre de (6.48) que a simetria só pode ser quebrada se λ_{3t} no UV é diferente de zero e isso deve ser levado em conta para a análise numérica do sistema de equações (6.49)-(6.55).

Os resultados numéricos de tal análise são apresentados nas figuras 6.3 e 6.4. O primeiro gráfico da figura 6.3 mostra como o valor do campo ϕ_{0k} depende da escala ao ser minimizado na fase quebrada. Como esperado, o mínimo do potencial é conduzido para mais perto da origem pelas flutuações quânticas. Para a escolha dos parâmetros iniciais no *cutoff* $\Lambda = \mu e^5$

$$\phi_0 \approx 3.5\mu, \quad m^2 = \mu^2, \quad \lambda_3 = \mu, \quad \lambda_4 = 0.5, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \quad (6.56)$$

o sistema permanece na fase quebrada para todas as escalas. Isso também pode ser visto do *running* dos acoplamentos mostrados na figura 6.4. O acoplamento λ_{3k} diminui rapidamente quando se move do UV para o IV. Ao mesmo tempo os acoplamentos superiores λ_{5k} e λ_{6k} adquirem valores diferentes de zero, embora permaneçam pequenos no IV.

Resolvemos as equações de fluxo com $\eta_t \rightarrow 0$. Claro, deve-se escolher a dimensão anômala auto consistentemente. Mas desde que na escala $k = \mu$ temos $\lambda_3 \approx 0.0189$ e

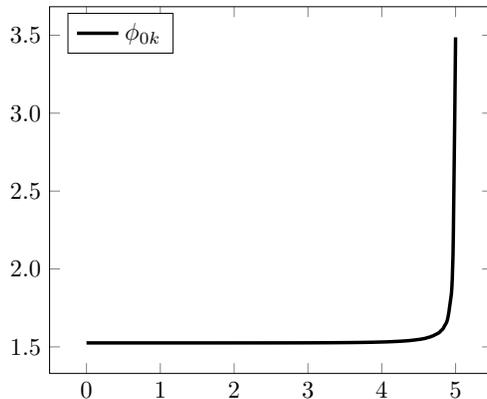


Figura 6.3: Fluxo do mínimo do potencial efetivo como função de $t = \log(t/\mu)$. Para $\phi_{0\Lambda} \approx 3.5\mu$ (e os mesmos parâmetros como na figura 6.4) o sistema permanece na fase quebrada para todas as escalas k .

$m^2 \approx 15.2$, a primeira estimativa para a dimensão anômala é

$$\eta_{k=\mu} \approx \frac{1}{32\pi^2} \frac{\lambda_{3\mu}^2}{(1+m_\mu^2)^4} \approx 1.6 \cdot 10^{-11} \quad (6.57)$$

e produz um pequeno valor no IV. Assim, supor $\eta_t \rightarrow 0$ é uma aproximação muito boa.

De modo a induzir mudanças qualitativas mais dramáticas no fluxo do parâmetro não-mínimo, consideramos outros conjuntos de parâmetros iniciais no UV. Para parâmetros iniciais que podem ser integrados ao IV, não observamos um forte *running* de ξ . Assim concluímos que a forma qualitativa do fluxo de ξ_t não é muito sensível aos parâmetros iniciais.

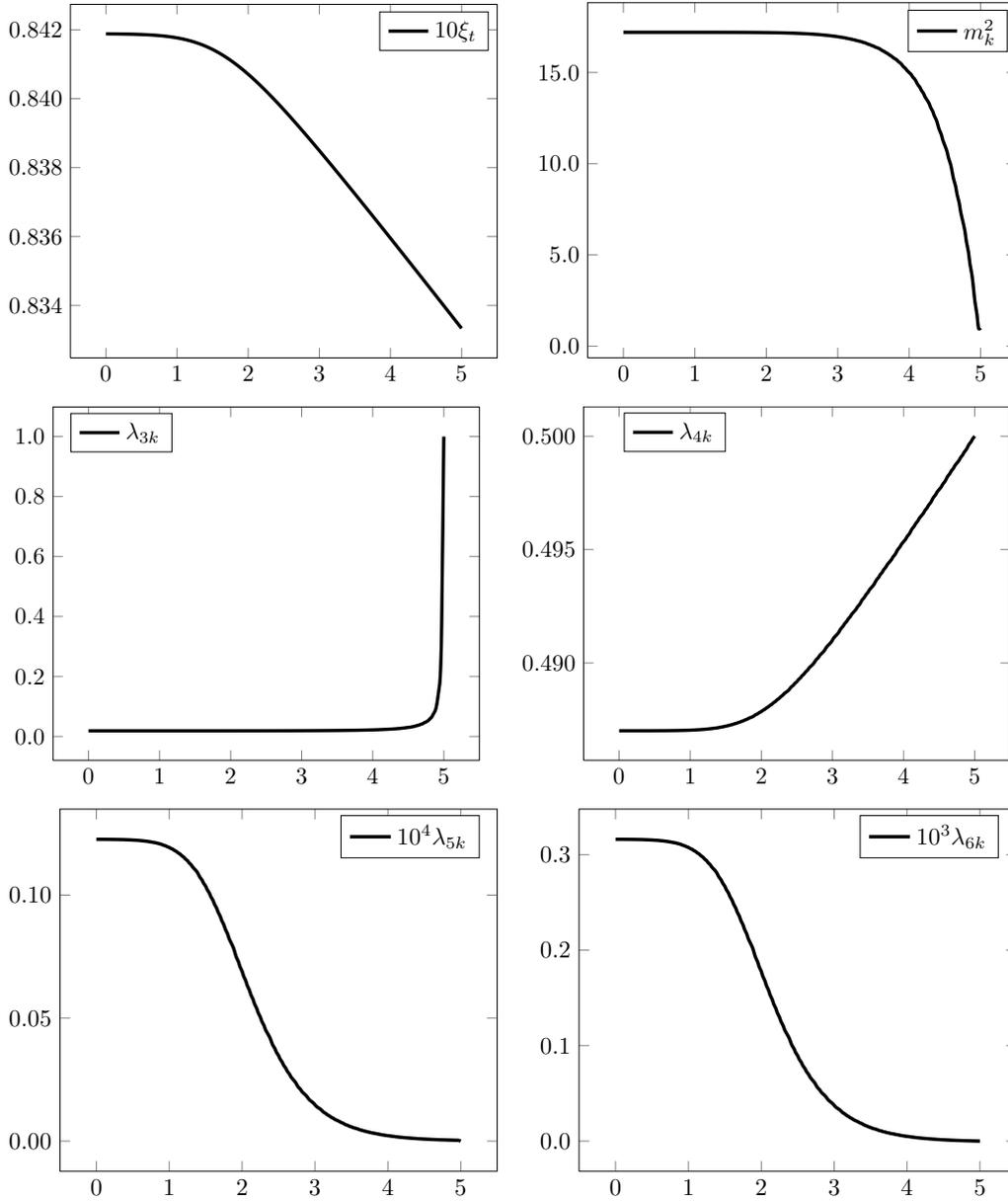


Figura 6.4: Running do parâmetro não-mínimo ξ_t e acoplamentos $m_k^2, \lambda_{3k}, \dots, \lambda_{6k}$ (em unidades de μ) como funções de $t = \log(k/\mu)$. Os dados iniciais na escala cutoff $k = \Lambda = \mu e^5$ são $m^2 = \mu^2$, $\lambda_4 = 0.5$, $\lambda_3 = \mu$, $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ e $\xi = 1/6$.

6.5 Considerações finais

Construímos e exploramos as equações do GFR para um campo escalar real no espaço-tempo curvo incluindo o parâmetro não-mínimo ξ da interação não-mínima entre campo escalar e curvatura. As funções β obtidas dentro do esquema simples de truncagem escolhido (6.2) reproduz várias características do GR perturbativo padrão, incluindo as que se pode provar como sendo as propriedades universais não perturbativas do fluxo do GR. Em primeiro lugar, as equações do GFR seguem a conhecida hierarquia da renormalização no espaço curvo, como descrito pelos pontos *i)* - *iii)* da Introdução. Por outro lado, a trajetória do GFR para ξ corresponde à equação que é linear em ξ , exatamente como deveria ser, tanto no nível perturbativo quanto no nível não perturbativo. No caso sem massa, a função β para o parâmetro ξ tem o ponto fixo conforme $\xi = 1/6$, que é típico para o caso de *1-loop* [12]. Em nossa opinião, isso pode ser resultado da forma restrita da nossa truncagem (6.2), porque correções em *loops* mais elevados envolvem potências de $\log(\phi)$ em ambos os setores, potencial e cinético, que estão além da aproximação dada.

O aspecto mais notável do fluxo do GR para uma teoria massiva é o forte desacoplamento de sexta potência no IV. Como resultado, o *running* de todos os acoplamentos e ξ , na verdade se estabilizam rapidamente quando varremos toda a escala compreendida entre os *cutoffs* UV e IV. Concluimos que o *running* desejavelmente forte de ξ não pode ser alcançado no âmbito da teoria escalar. Ao mesmo tempo, existem possibilidades de se obter tal efeito numa teoria mista com diferentes escalas de massa, especialmente através de efeitos quânticos de partículas relativamente leves ou sem massa.

Uma extensão interessante do fluxo do GR na teoria com o parâmetro não-mínimo está relacionada à fase quebrada, quando pode-se também observar a renormalização da função de onda e seus efeitos nas trajetórias do GR para os acoplamentos e ξ . Verificamos que, independentemente da forma do fluxo do GR, a forma qualitativa do fluxo para ξ permanece a mesma, no sentido que o efeito numérico da dependência da escala é bem pequeno na teoria escalar. Uma das consequências é que a dependência da escala na parte não local da ação induzida da gravidade na teoria com quebra espontânea de simetria será também pequena. No entanto, como foi discutido em [17], qualquer forma de dependência

da escala pode ter um impacto significativo no termo de constante cosmológica induzido e especialmente em suas extensões não locais. Portanto, o problema do *running* de ξ do UV ao IV merece estudos mais detalhados, especialmente em teorias mais gerais que envolvem várias escalas em massa.

Conclusões e perspectivas

Ao longo do desenvolvimento desta tese, foram obtidos diferentes resultados acerca do uso do grupo de renormalização aplicado a diferentes modelos de gravitação quântica. Seguem abaixo, os resultados originais obtidos, bem como as possíveis perspectivas de trabalho.

Referentes ao capítulo 3

1. Adicionamos o termo de Holst à teoria de Einstein-Cartan da gravidade com torção. Apresentamos uma derivação simples do termo de Holst [49] em termos das componentes irredutíveis do tensor torção. Com a presença deste termo as interações de contato entre a corrente vetorial e a corrente vetorial axial ganharam uma componente extra que viola a paridade da teoria. Essa é a violação de paridade mais simples possível e portanto o parâmetro de Barbero-Immirzi pode ser visto como uma extensão de um parâmetro extra não-mínimo que viola a paridade da ação de Einstein-Cartan.
2. Escrevemos a ação clássica da teoria nos limites *off*- e *on-shell* e posteriormente calculamos as divergências a *1-loop* com base na ação clássica *off-shell* seguindo o

esquema padrão [20]. Obtivemos a ação efetiva nos limites *off*- e *on-shell*. Escolhemos usar a ação efetiva *on-shell* uma vez que este resultado não depende do calibre escolhido e logo não possui ambiguidades nos valores dos parâmetros que descrevem o comportamento da teoria.

3. Construímos a versão *on-shell* reduzida do grupo de renormalização pelo método da subtração mínima. Usamos para tal a regularização dimensional e portanto foi necessário formular também os contratermos na versão *on-shell* em n dimensões espaço-temporais. Escrevemos a ação *on-shell* renormalizada e obtivemos as equações do grupo de renormalização *on-shell* para a constante cosmológica Λ , para as correntes externas J^μ e W^μ e para o parâmetro de Barbero-Immirzi γ .
4. A exploração do comportamento assintótico das cargas efetivas da presente teoria tornou-se analiticamente muito complicado e infelizmente não fomos capazes de resolvê-lo numa maneira satisfatória. A partir disso continuamos nossas considerações com suposições mais simples a fim de se mostrar ao leitor a origem do problema. A suposição mais simples foi a de que todos os parâmetros da teoria têm um *running* moderado. Com isso chegamos a uma equação para o grupo de renormalização que é conhecida como equação de Ricatti. Um cálculo direto dessa equação nos mostrou que não há raízes reais não nulas e portanto a chance de se encontrar um ponto fixo não trivial (não Gaussiano) para essa teoria é muito pequena.
5. A parte mais interessante do nosso trabalho foi explorar o *running* do parâmetro de Barbero-Immirzi finito, mas não obtivemos resultados analíticos confiáveis, partimos então para a análise numérica dos resultados o que nos mostrou que há uma dependência muito forte na escolha das condições iniciais. Não houve uma mudança significativa dos resultados nem mesmo quando o *running* da constante cosmológica Λ foi considerado. De onde concluímos que na presença do parâmetro de Barbero-Immirzi não há pontos fixos não triviais.
6. O conjunto de equações que obtivemos aqui pode ser visto como uma aproximação nas baixas energias para o grupo de renormalização da teoria com o limite UV tomado

como completo, onde supostamente a teoria é renormalizável. Um trabalho que pode ser desenvolvido a fim de se tentar eliminar tais limitações e se obter resultados mais gerais é realizar cálculos quânticos de uma teoria mais completa acoplada a férmions, por exemplo uma teoria com derivadas superiores no setor da métrica e/ou com termos cinéticos para a torção, podem providenciar uma forma confiável das equações do grupo de renormalização na teoria com o parâmetro de Barbero-Immirzi. As ferramentas técnicas desenvolvidas aqui serão certamente necessárias e importantes para tal cálculo.

Referentes ao capítulo 4

Uma vez que neste capítulo o que se fez foi um estudo de revisão explícito e detalhado sobre o trabalho de Gorbar e Shapiro [36], não cabe aqui nenhuma conclusão. O que fica deste capítulo é o trabalho que começaremos a desenvolver em breve usando o método do *heat kernel* lá empregado. A ideia é aplicar esse método a um novo modelo. O modelo escolhido é um campo tensorial massivo antissimétrico no espaço curvo [85]. O trabalho se encontra em desenvolvimento.

Referentes ao capítulo 6

1. Construimos todas as equações e o formalismo do GFR para o espaço-tempo curvo. Estabelecemos o fluxo do GR no espaço-tempo curvo no setor do campo escalar (em particular derivamos uma equação para o parâmetro não-mínimo) [97].
2. Fizemos a análise numérica das equações de fluxo para o acoplamento não-mínimo ξ , para a massa m e demais acoplamentos da teoria para verificar o *running* do GR não-perturbativo a *1-loop*. Vimos que o resultado é bem diferente do obtido quando se usa o GR perturbativo, principalmente devido à presença da massa. Aqui as equações do GR (funções beta) dependem fortemente do *running* da massa do campo envolvido. Essa investigação foi feita variando-se a escala do UV até o IV.
3. Obtivemos um *running* suave para o acoplamento ξ , o que não é o resultado desejável. Verificamos esse comportamento para diferentes escalas e valores iniciais e a

mudança não foi significativa. Esperamos obter tal efeito num estudo mais completo usando uma teoria mista com diferentes escalas de massa, especialmente através de efeitos quânticos de partículas relativamente leves. Como o *running* de todos os acoplamentos e ξ , na verdade se estabilizaram rapidamente quando varremos toda a escala compreendida entre o *cutoff* UV e o *cutoff* IV, o aspecto mais notável do fluxo do GR para essa teoria foi o forte desacoplamento de sexta potência no IV. Lembrando que o nosso interesse no *running* do parâmetro ξ é devido ao fato de este poder ter importantes implicações, como por exemplo para estudar a inflação de Higgs.

4. Estudamos o GFR na teoria de campo escalar com a fase quebrada. Isso nos permitiu estudar a renormalização da função de onda e seus efeitos nas trajetórias do GR para todos os acoplamentos, inclusive ξ . Novamente fizemos a análise numérica das equações do GR e observamos que o sistema permanece na fase quebrada para todas as escalas, o que pode ser visto diretamente do *running* dos acoplamentos. Mais uma vez obtivemos um *running* suave para o parâmetro não-mínimo ξ , independente da escala e dos valores iniciais fornecidos. Isso nos mostra que o problema do *running* de ξ do UV ao IV merece estudos mais detalhados, especialmente em teorias mais gerais que envolvam várias escalas em massa.
5. Uma sequência desse trabalho se encontra na fase final de desenvolvimento [110]. A idéia nesse próximo trabalho, é seguindo a mesma abordagem, definições e metodologia, estudar o fluxo do GFR e o *running* das constantes de acoplamento da parte de vácuo da ação efetiva.

Bibliografia

- [1] A. Einstein; *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49** (1916) 769. Traduzido para a língua inglesa como *The foundation of the general theory of relativity* em "The principle of relativity: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity", (Dover, New York - 1952).
- [2] S. Weinberg; *Gravitation and Cosmology*, (Wiley, New York - 1972).
- [3] O. Bertolami, J. Paramos & S.G. Turyshev, *General theory of relativity: Will it survive the next decade?*, Proceedings of International Conference on Lasers, Clocks, and Drag-Free Key Technologies for Future Exploration in Space, Bremen, Germany, 30 May - 1 Jun 2005, arXiv:gr-qc/0602016.
- [4] F. Dyson, A. Eddington & C. Davidson, *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919*, Philos. T. R. Soc. Lond. **220** (1920) 291.
- [5] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.

- [6] J. D. Bjorken & S. D. Drell; *Relativistic quantum mechanics*, (McGraw-Hill Book Company, New York - 1964).
J. D. Bjorken & S. D. Drell; *Relativistic quantum fields*, (McGraw-Hill Book Company, New York - 1965).
- [7] S. Weinberg; *The quantum theory of fields I. Foundations*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1995).
S. Weinberg; *The quantum theory of fields II. Modern applications*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1995).
S. Weinberg; *The quantum theory of fields III. Supersymmetry*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1995).
- [8] P. A. M. Dirac; *The quantum theory of the emission and absorption of radiation*, Proc. Royal Soc. London Series A **114** (1927) 243.
- [9] B. S. DeWitt; *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach - 1965).
- [10] B. S. DeWitt; *The global approach to quantum field theory, Vol. I*, (Clarendon Press, Oxford - 2003).
- [11] B. S. DeWitt; *The global approach to quantum field theory, Vol. II*, (Clarendon Press, Oxford - 2003).
- [12] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov & I. L. Shapiro; *Effective action in quantum gravity*, (IOP Publishing, Bristol - 1992).
- [13] S. A. Fulling; *Aspects of Quantum Field Theory in curved spacetime*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1989).
- [14] L. Parker & D. J. Toms; *Quantum field theory in curved spacetime: Quantized fields and gravity*, (Cambridge University Press, Cambridge - 2009)
- [15] R. P. Feynman; *The principle of least action in quantum mechanics*, (Tese de doutorado, Princeton University - 1942).

- [16] S. W. Hawking; *Black Holes and Thermodynamics*, Phys. Rev. D **13** (1976) 191.
 S. W. Hawking; *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199 [Erratum-ibid. **46** (1976) 206].
 S. W. Hawking; *Black hole explosions*, Nature **248** (1974) 30.
- [17] I. L. Shapiro; *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 10.
- [18] D. Rickles; *A brief history of string theory, from dual models to M-theory*, (Springer - 2014).
 A. Capelli et al. ; *The birth of string theory*, (Cambridge University Press - 2012).
- [19] J. Polchinski; *Dualities of Fields and Strings*, arXiv:hep-th/1412.5704.
- [20] G. t'Hooft & M. J. G. Veltman; *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Poincare Phys. Theor. A **20** (1974) 69.
- [21] S. Deser & P. van Nieuwenhuisen; *One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields*, Phys. Rev. D **10** (1974) 401.
 S. Deser & P. van Nieuwenhuisen; *Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system*, Phys. Rev. D **10** (1974) 411.
- [22] M. H. Goroff & A. Sagnotti; *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. B **266** (1986) 709.
- [23] K. S. Stelle; *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.
- [24] B. L. Voronov & I. V. Tyutin; *On renormalization of R^2 gravitation*, Sov. J. Nucl. Phys. **39** (1984) 998.
- [25] E. S. Fradkin & A. A. Tseytlin; *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Nucl. Phys. B **201** (1982) 469.
- [26] I. G. Avramidi & A. O. Barvinsky; *Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity*, Phys. Lett. B **159** (1985) 269.

- [27] I. G. Avramidi; *Asymptotic behavior of the quantum theory of gravity with higher derivatives*, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986) 255.
- [28] I. L. Buchbinder et al. *The stability of asymptotic freedom in grand unified models coupled to R^2 gravity*, Phys. Lett. B **216** (1989) 127.
 I. L. Shapiro; *Asymptotic behaviour of effective Yukawa coupling constants in quantum R^2 gravity with matter*, Class. Quant. Grav. **6** (1989) 1197.
- [29] E. Cartan; *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)*, Ann. Ec. Norm. Super **40** (1923) 325.
- [30] F. Hehl, P. von der Heyde & G. D. Kerlick; *General relativity with spin and torsion and its deviations from Einstein's theory**, Phys. Rev. D **10** (1974) 4.
- [31] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. D. Kerlick & J. M. Nester; *General Relativity with spin and torsion: Foundations and Prospects*, Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 393.
- [32] I. L. Shapiro; *Physical aspects of the space-time torsion*, Phys. Repts. **357** (2002) 113.
- [33] C. Rovelli & L. Smolin; *Loop space representation of quantum general relativity*, Nucl. Phys. **B** 331 (1990) 80.
 A. Ashtekar; *Quantum geometry and gravity: recent advances*, General Relativity and Gravitation - Proceedings of 16th International Conference, Duban, South Africa (2001), arxiv:gr-qc/0112038.
 M. Bojowald; *Absence of singularities in loop quantum cosmology*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5227.
 C. Rovelli; *Quantum Gravity* (Cambridge University Press - 2004).
- [34] S. Weinberg; *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation*, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking & W. Israel (Eds.), (Cambridge University Press - 1979).
- [35] E. V. Gorbar & I. L. Shapiro; *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP **02** (2003) 021.

- [36] E. V. Gorbar & I. L. Shapiro; *Renormalization group and decoupling in curved space II: The Standard Model and Beyond*, JHEP **06** (2003) 004.
- [37] I. L. Shapiro; *Notas de aula de Teoria Quântica de Campos*, unpublished.
- [38] N. D. Birrel & P. C. W. Davies; *Quantum fields in curved space*, (Cambridge University Press, Cambridge - 1982).
- [39] P. M. Lavrov & I. L. Shapiro; *Renormalization of gauge theories in curved space-time*, Phys. Rev. D **81** (2010) 044026.
- [40] L. F. Abbott; *The background field method beyond one loop*, Nucl. Phys. B **185** (1981) 189.
- [41] J. Schwinger; *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664.
- [42] I. G. Avramidi; *PhD thesis*, Moscow State University (1986); UDK 530.12:531.51; arXiv:hep-th/9510140.
- [43] C. G. Bollini & J. J. Giambiagi; *Dimensional regularization in configuration space*, Phys. Rev. D **53**, (1966) 5761.
G. Leibbrandt; *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. of Modern Phys. **47** (1975) 4.
- [44] M. Gell-Mann & F. E. Low; *Quantum Electrodynamics at Small Distances*, Phys. Rev. **95** (1954) 1300.
- [45] T. S. Bunch & L. Parker; *Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation*, Phys. Rev. D **20** (1979) 2499.
- [46] A. Z. Petrov; *Einstein Spaces*, (Pergamon Press, Oxford - 1969).
- [47] I. L. Buchbinder; *On renormalization group equations in curved space-time*, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 393.

- [48] A. V. Manohar; *Effective Field Theories*, (Perturbative and nonperturbative aspects of quantum field theory, Schladming - 1996), arXiv:hep-th/9606222.
 - [49] I. L. Shapiro & P. M. Teixeira; *Quantum Einstein-Cartan theory with the Holst term*, Class. Quant. Grav. **31** (2014) 185002.
 - [50] L. Freidel, D. Minic & T. Takeuchi; *Quantum gravity, torsion, parity violation and all that*, Phys. Rev. D **72** (2005) 104002.
 - [51] G. de Berredo-Peixoto, L. Freidel, I. L. Shapiro & C. A. de Souza; *Dirac fields, torsion and Barbero-Immirzi parameter in Cosmology*, JCAP **06** (2012) 017.
 - [52] O. Castillo-Felisola, C. Corral, C. Villavicencio & A. R. Zerwekh; *Fermion masses through condensation in spacetimes with torsion*, Phys. Rev. D **88** (2013) 124022.
 - [53] S. Holst; *Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action*, Phys. Rev. D **53** (1996) 5966.
 - [54] A. Ashtekar; *New Hamiltonian formulation of General Relativity*, Phys. Rev. D **36** (1987) 1587.
 - [55] A. Perez & C. Rovelli; *Physical effects of the Immirzi parameter in loop quantum gravity*, Phys. Rev. D **73** (2006) 044013.
 - [56] S. Alexandrov; *Immirzi parameter and fermions with non-minimal coupling*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 145012.
 - [57] J. F. Barbero; *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times*, Phys. Rev. D **51** (1995) 5507.
 - [58] G. Immirzi; *Real and complex connections for canonical gravity*, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 177.
 - [59] S. Mercuri; *Fermions in the Ashtekar-Barbero connection formalism for arbitrary values of the Immirzi parameter*, Phys. Rev. D **73** (2006) 084016.
- M. Kazmierczak; *Einstein-Cartan gravity with Holst term and fermions*, Phys. Rev. D **79** (2009) 064029.

- [60] I. B. Khriplovich & A. S. Rudenko; *Cosmology constrains gravitational four-fermion interaction*, JCAP **1211** (2012) 040.
- [61] J. E. Daum & M. Reuter; *Einstein-Cartan gravity, asymptotic safety and the running Immirzi parameter*, Annals Phys. **334** (2013) 351.
- [62] H. Gies; *Introduction to the functional RG and applications to gauge theories*, Springer Lect. Notes Phys. **852** (2012) 287.
- [63] P. M. Lavrov & I. L. Shapiro; *On the functional renormalization group approach for Yang-Mills fields*, JHEP **06** (2013) 086.
- [64] D. J. Toms; *Quantum gravitational contributions to Quantum Electrodynamics*, Nature **468** (2010) 56.
 J. C. C. Felipe, L. C. T. Brito, M. Sampaio & M. C. Nemes; *Quantum gravitational contributions to the beta function of Quantum Electrodynamics*, Phys. Lett. B **700** (2011) 86.
- [65] D. Benedetti & S. Speziale; *Perturbative Quantum Gravity with the Immirzi parameter*, JHEP **06** (2011) 107.
 D. Benedetti & S. Speziale; *Perturbative running of the Immirzi parameter*; J. Phys. Conf. Ser. **360** (2012) 012011.
- [66] A. O. Barvinsky & G. A. Vilkovisky; *Divergences and anomalies for coupled gravitational and Majorana spin-1/2 fields*, Nucl. Phys. B **191** (1981) 237.
- [67] E. S. Fradkin & A. A. Tseytlin; *One-loop effective potential in gauged $O(4)$ supergravity and the problem of the Λ term*, Nucl. Phys. B **234** (1984) 472.
- [68] I. L. Buchbinder & I. L. Shapiro; *On the asymptotical freedom in the Einstein-Cartan theory*, Sov. J. Phys. **31** (1988) 40.
- [69] V. De Sabbata & M. Gasperini; *Introduction to Gravity*, (World Scientific, Singapore - 1985).
- [70] R. T. Hammond; *Torsion Gravity*, Rept. Prog. Phys. **65** (2002) 599.

- [71] P. Baekler, F. W. Hehl & J. M. Nester; *Poincare gauge theory of gravity: Friedmann cosmology with even and odd parity modes. Analytic part.*, Phys. Rev. D **83** (2011) 024001.
- [72] M. Blagojević & F. W. Hehl (Eds.); *Gauge theories of gravitation, a reader with commentaries*, (World Scientific, Singapore - 2013).
- [73] I. L. Buchbinder & I. L. Shapiro; *On the renormalization of the models of quantum field theory in an external gravitational field with torsion*, Phys. Lett. B **151** (1985) 263.
- [74] R. E. Kallosh, O. V. Tarasov & I. V. Tyutin; *One loop finiteness of quantum gravity off mass shell*, Nucl. Phys. B **137** (1978) 145.
- [75] I. L. Shapiro & A. G. Jacksenaev; *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. B **324** (1994) 284.
- [76] E. L. Ince; *Ordinary Differential Equations*, (New York: Dover Publications, (1956) [1926]).
- [77] J. Ricatti; *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus - (Observations regarding differential equations of the second order)*, *Actorum Eruditorum, quae Lipsiae publicantur, Supplementa*, **8** (1724) 66. (tradução do original em latim para inglês por Ian Bruce).
- [78] B. L. Voronov, P. M. Lavrov & I. V. Tyutin; *Canonical transformations and the gauge dependence in general gauge theories*, Yad. Fiz. **36** 498 (1982); Sov. J. Nucl. Phys. **36** 292 (1982).
- [79] I. L. Buchbinder, O. K. Kalashnikov, I. L. Shapiro, V. B. Vologodsky & Yu.Yu. Wolfengaut; *The stability of asymptotic freedom in grand unified models coupled to R^2 gravity*, Phys. Lett. B **216** (1989) 127.
- [80] I. L. Shapiro; *Asymptotical behavior of effective Yukawa coupling constants in quantum R^2 gravity with matter*, Class. Quant. Grav. **6** (1989) 1197.

- [81] A. Codello & O. Zanusso; *On the non-local heat kernel expansion*, J. Math. Phys. **54** (2013) 013513.
- [82] A. O. Barvinsky & G. A. Vilkovisky; *The generalized Schwinger-Dewitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Rept. **119** (1985) 1.
- [83] A. O. Barvinsky & G. A. Vilkovisky; *Covariant perturbation theory (III). Spectral representations of the third-order form factors*, Nucl. Phys. B **333** (1990) 512.
I. G. Avramidi; *Covariant studies of nonlocal structure of effective action. (In Russian)*, Yad. Fiz. (Sov. Journ. Nucl. Phys.) **49** (1989) 1185.
A. O. Barvinsky, Y. V. Gusev, G. A. Vilkovisky & V. V. Zhitnikov; *The one loop effective action and trace anomaly in four-dimensions*, Nucl. Phys. B **439** (1995) 561.
- [84] T. Appelquist & J. Carazzone; *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. D **11** (1975) 2856.
- [85] I. L. Buchbinder, E. N. Kirillova & N. G. Pletnev; *Quantum equivalence of massive antisymmetric tensor field models in curved space*, Phys. Rev. D **78** (2008) 084024.
- [86] I. L. Shapiro & J. Solà; *On the possible running of the cosmological constant*, Phys. Lett. B **682** (2009) 105.
- [87] I. L. Buchbinder, G. de Berredo-Peixoto & I.L. Shapiro; *Quantum Effects in Softly Broken Gauge Theories in Curved Space-Times*, Phys. Lett. B **649** (2007) 454.
- [88] G. B. Peixoto; *A note on the heat kernel method applied to fermions*, Mod. Phys. Lett. A **16**, (2001) 2463.
- [89] G. de Berredo-Peixoto, E. V. Gorbar & I. L. Shapiro; *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281.
- [90] A. O. Barvinsky & G. A. Vilkovisky; *Beyond the Schwinger-Dewitt technique. Converting loops into trees and in-in currents*, Nucl. Phys. B **282** (1987) 163.

- [91] A. Wipf; *Statistical approach to Quantum Field Theory: an introduction*, (Springer Lecture Notes in Physics, **864** - 2013).
- [92] J. Berges, N. Tetradis & C. Wetterich; *Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics*, Phys. Rept. **363** (2002) 223.
C. Bagnuls & C. Bervillier; *Exact renormalization group equations: an introductory review*, Phys. Rept. **348** (2001) 91.
J. M. Pawłowski; *Aspects of the functional renormalisation group*, Annals Phys. **322** (2007) 2831.
- [93] C. Wetterich; *Average action and the renormalization group equations*, Nucl. Phys. B **352** (1991) 529.
C. Wetterich; *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys. Lett. B **301** (1993) 90.
- [94] J. Polchinski; *Renormalization and effective lagrangians*, Nucl. Phys. B **231** (1984) 269.
- [95] T. R. Morris; *The exact renormalization group and approximate solutions*, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 2411.
- [96] K. G. Wilson; *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 773.
- [97] I. L. Shapiro, P. M. Teixeira & A. Wipf; *On the functional renormalization group for the scalar field on curved background with non-minimal interaction*, Eur. Phys. J. C **75** (2015) 262.
- [98] B. L. Nelson & P. Panangaden; *Scaling behavior of interacting quantum fields in curved space-time*, Phys. Rev. D **25** (1982) 1019.
- [99] D. J. Toms; *The effective action and the renormalization group equation in curved space-time*, Phys. Lett. B **126** (1983) 37.
L. Parker & D. J. Toms; *Renormalization group analysis of grand unified theories in curved space-time*, Phys. Rev. D **32** (1985) 1409.

- [100] I. L. Buchbinder & I. L. Shapiro; *On the influence of the gravitational interaction on the behavior of the effective constants of Yukawa and scalar coupling*, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986) 1033;
I. L. Buchbinder, O. K. Kalashnikov, I. L. Shapiro, V. B. Vologodsky & Yu.Yu. Wolfengaut; *The stability of asymptotic freedom in grand unified models coupled to R^2 gravity*, Phys. Lett. B **216** (1989) 127.
- [101] F. L. Bezrukov & M. Shaposhnikov; *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*, Phys. Lett. B **659** (2008) 703.
- [102] M. Herranen, T. Markkanen, S. Nurmi & A. Rajantie; *Spacetime curvature and the Higgs stability during inflation*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 211102.
- [103] A. A. Starobinski; *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. B **91** (1980) 99.
- [104] A. M. Pelinson, I. L. Shapiro & F. I. Takakura; *On the stability of the anomaly-induced inflation*, Nucl. Phys. B **648** (2003) 417.
- [105] T. de P. Netto, A. M. Pelinson, I. L. Shapiro & A. A. Starobinsky; *From stable to unstable anomaly-induced inflation*, arXiv:hep-th/1509.08882.
- [106] D. Benedetti; *Critical behavior in spherical and hyperbolic spaces*, J. Stat. Mech. **1501** (2015) 1,
- [107] R. Percacci & G. P. Vacca; *Search of scaling solutions in scalar-tensor gravity*, arXiv:hep-th/1501.00888.
- [108] F. Gautier & J. Serreau; *Infrared dynamics in De Sitter space from Schwinger-Dyson equations*, Phys. Lett. B **727** (2013) 541.
J. Serreau; *Renormalization group flow and symmetry restoration in De Sitter space*, Phys. Lett. B **730** (2014) 271.
J. Serreau; *Nonperturbative infrared enhancement of non-Gaussian correlators in De Sitter space*, Phys. Lett. B **728** (2014) 380.

- [109] E. V. Gorbar & I. L. Shapiro; *Renormalization group and decoupling in curved space III: The case of spontaneous symmetry breaking*, JHEP **02** (2004) 060.
- [110] I. L. Shapiro, P. M. Teixeira & A. Wipf; Trabalho em desenvolvimento.
- [111] Y. Decanini & A. Folacci; *Off-diagonal coefficients of the DeWitt-Schwinger and Hadamard representations of the Feynman propagator*, Phys. Rev. D **73** (2006) 044027.
D. Anselmi & A. Benini; *Improved Schwinger-DeWitt techniques for higher-derivative corrections to operator determinants*, JHEP **0710** (2007) 099.
K. Groh, F. Saueressig & O. Zanusso; *Off-diagonal heat-kernel expansion and its application to fields with differential constraints*, arXiv:math-ph/1112.4856;
R. Flore, A. Wipf & O. Zanusso; *Functional renormalization group of the non-linear sigma model and the $O(N)$ universality class*, Phys. Rev. D **87** (2013) 065019.
- [112] D. F. Litim; *Optimisation of the exact renormalisation group*, Phys. Lett. B **486** (2000) 92.
- [113] A. Codello, R. Percacci & C. Rahmede; *Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*, Annals Phys. **324** (2009) 414.
- [114] H. Ballhausen, J. Berges & C. Wetterich; *Critical phenomena in continuous dimension*, Phys. Lett. B **582** (2004) 144.
- [115] A. Codello; *Scaling solutions in a continuous dimension*, J. Phys. A **45** (2012) 465006.