

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Bruno Ferreira Rizzuti

**Análise Clássica e Quântica de Sistemas com Simetrias Locais
e suas Aplicações**

Juiz de Fora
Fevereiro de 2012

Bruno Ferreira Rizzuti

Análise Clássica e Quântica de Sistemas com Simetrias Locais e suas Aplicações

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Alexei Deriglazov

Juiz de Fora

Fevereiro de 2012

Bruno Ferreira Rizzuti

Análise Clássica e Quântica de Sistemas com Simetrias Locais e suas Aplicações

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor.

Aprovada em 29 de fevereiro de 2012.

Prof. Dr. Alexei Deriglazov
Orientador (UFJF)

Prof. Dr. Francesco Toppan (CBPF)

Prof. Dr. Wilson Oliveira (UFJF)

Profa. Dra. Zhanna Kuznetsova (UFABC)

Prof. Dr. Daniel Franco (UFV)

É uma honra para mim poder dedicar mais um trabalho aos meus pais Vicente e Odaléa. Dedico também à minha esposa Geina, com todo amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

É difícil fazer uma lista com os nomes das pessoas a quem eu deveria agradecer pela ajuda inestimável no desenvolvimento e conclusão deste trabalho. Mesmo assim eu vou tentar:

✓ Primeiramente aos meus pais. Eu não tenho palavras para descrever tudo que fizeram por mim ao longo desses anos todos. Espero que estas linhas sejam suficientes para mostrar toda a minha gratidão.

✓ À minha esposa Geina pelo carinho, amor e compreensão durante esse período que ficamos afastados. Não foi nem um pouco fácil mas vencemos. Valeu cada noite de viagem pela Fernão Dias. Dizem que basta acreditar que um novo dia vai raiar e que a sua hora vai chegar!

✓ Ao Professor Alexei pela orientação, paciência e esforço para que eu concluísse este doutorado dentro do prazo estipulado. Eu vou sempre me lembrar da ajuda para que eu conseguisse minha matrícula de volta.

✓ Ao Prof. Sérgio Makler pela leitura, sugestões e correção da primeira versão desta tese. Foi de grande ajuda.

✓ À FAPEAM, pela ajuda financeira concedida através do programa RH-Interiorização.

✓ Aos Professores do Departamento de Física que me deram um voto de confiança para a conclusão deste doutorado sem atrasos. Em especial aos Professores Ilya Shapiro e Wilson Oliveira, por ficarem do meu lado.

✓ À Universidade Federal de Juiz de Fora, pela estrutura.

✓ Aos colegas da pós-graduação pelas longas discussões no café. Algumas ideias para a tese surgiram assim. Entre eles estão: Erichardson, Vahid, Dante, Cristhiano, Marcelino, Ricardo, Denilson, Piada, Rochedo e Baltazar. Em especial, aos amigos Zuntim, Amâncio, Zé Bonitinho e Geraldo que sempre paravam de trabalhar para me ajudar com o computador.

✓ Aos amigos do Albergue Espanhol, a ex-República: Marreco, Popoto e Cléber. Essa será a última citação do Albergue.

✓ Aos amigos Alberto, Márcio, Kogima e Larissa, que acompanharam cada etapa deste trabalho.

- ✓ Aos colegas da UFAM-Coari, que me apoiaram na conclusão desta tese.
- ✓ Aos meus sogros Gibson e Elciclei pelo companheirismo e todo o suporte possível durante esse período do doutorado.
- ✓ Ao meu irmão Gustavo. Eu sei que ele ainda vai estudar Álgebra Linear e Análise.
- ✓ A todos os meus familiares. A torcida foi grande!
- ✓ Ao Savinho, que teve que comprar mais de 20 canetas Compactors 07 para que eu fizesse meus cálculos.
- ✓ Ao Mestre Paulo Santos e a todos os guerreiros e guerreiras do Hap Ki Do.
- ✓ Gostaria finalmente de agradecer a Deus. Não foram poucas as vezes que eu pedi iluminação. Agora é o momento de retribuir.

RESUMO

Passados mais de 60 anos da sua formulação inicial, o método de Dirac-Bergmann para hamiltonização de sistemas lagrangianos singulares continua sendo uma ferramenta poderosa para análise e investigação de modelos atuais de física teórica. Como motivação, apresentaremos vários exemplos onde o método é utilizado e o descreveremos em detalhes em uma sequência de passos. O objetivo central deste trabalho será então apresentar uma série de aplicações distintas do método de Dirac, incluindo a busca de simetrias locais para teorias singulares, a construção da proposta de relatividade especial dupla de Magueijo-Smolín, a formulação da mecânica clássica com invariância de reparametrizações e sua quantização e por fim, discutiremos um modelo semiclássico mecânico que, quando quantizado, reproduz a equação de Dirac.

Palavras-chave: Teorias singulares; Simetrias de calibre; Quantização canônica; Relatividade especial dupla; Equação de Dirac.

ABSTRACT

After more than 60 years of its initial development, the Dirac-Bergmann method for hamiltonization of constrained systems is still a powerful tool for analysis and investigation of modern theoretical models. As a motivation, we shall present several models where the method is applied, then we will describe it in details, with a sequence of steps. The main objective of this work is to provide distinct applications of the Dirac method, including the search for local symmetries of singular theories, the construction of the Magueijo-Smolín doubly special relativity proposal, the formulation of classical mechanics with reparametrization invariance and its quantization and finally, we discuss a semiclassical mechanical model that produces the Dirac equation through quantization.

Keywords: Singular theories; Gauge symmetries; Canonical quantization; Doubly Special Relativity; Dirac equation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	MÉTODO DE DIRAC PARA SISTEMAS VINCULADOS	18
2.1	HAMILTONIZAÇÃO DE SISTEMAS COM NÚMERO FINITO DE GRAUS DE LIBERDADE	18
2.2	INTERPRETAÇÃO PARA TEORIAS SINGULARES	26
2.3	PASSAGEM AO CONTÍNUO	30
2.4	HAMILTONIZAÇÃO DE SISTEMAS COM NÚMERO INFINITO DE GRAUS DE LIBERDADE	32
3	APLICAÇÕES DO MÉTODO DE DIRAC EM DIFERENTES CONTEXTOS	38
3.1	MÉTODO DA LAGRANGIANA ESTENDIDA PARA TEORIAS DE CAMPO	38
3.1.1	Introdução	38
3.1.2	Busca de simetrias locais - Método da Lagrangiana Estendida	39
3.1.3	Construção da Lagrangiana e Hamiltoniana estendidas	39
3.1.4	Restaurando as simetrias locais	41
3.1.5	Simetrias Locais para Teorias de Campo	43
3.1.6	Aplicações	44
3.1.7	Simetria local do Eletromagnetismo	44
3.1.8	Simetria local do campo de Yang-Mills	46
3.1.9	Simetrias locais do modelo Sigma não linear	48
3.1.10	Resumo dos resultados	50
3.2	RELATIVIDADE ESPECIAL DUPLA DE MAGUEIJO-SMOLIN A PARTIR DE UM MODELO SINGULAR EM 5D	50

3.2.1	Introdução	51
3.2.2	Realização dinâmica do modelo com invariância pelo grupo $SO(1,4)$	53
3.2.3	Calibre para Relatividade Especial Dupla	56
3.2.4	Resumo dos resultados	58
3.3	INVARIÂNCIA POR REPARAMETRIZAÇÕES NA MEC. CLÁSSICA E A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER	59
3.3.1	Introdução	59
3.3.2	Formulação com invariância de reparametrizações da Mec. Quântica	61
3.3.3	O caso geral	63
3.3.4	Mecânica Quântica de uma partícula relativística	64
3.3.5	Resumo dos resultados	67
3.4	DESCRIÇÃO DE UMA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA COM SPIN USANDO VARIÁVEIS COMUTATIVAS E A EQUAÇÃO DE DIRAC	68
3.4.1	Momento magnético do elétron e a equação de Pauli	68
3.4.2	Derivação e triunfo da equação de Dirac	72
3.4.3	Alguns pontos negativos da equação de Dirac	79
3.4.4	Modelo mecânico para descrição do spin relativístico	81
3.4.5	Realização Dinâmica	87
3.4.6	Quantização canônica	102
3.4.7	Solução para as equações clássicas de movimento	102
3.4.8	Variáveis livres do <i>Zitterbewegung</i>	109
3.4.9	Comparação com a teoria de Barut-Zanghi	110
3.4.10	Generalização: modelo com $p^2 + m^2c^2 = 0$	110
3.4.11	Resumo dos resultados	113
4	CONCLUSÃO	115
5	PERSPECTIVAS	117

CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS 118

REFERÊNCIAS 120

1 INTRODUÇÃO

Passados mais de 60 anos dos trabalhos de Dirac [1] e Bergmann [2, 3], onde eles colocam as bases da hamiltonização de sistemas vinculados e a sua relação com a invariância local dos modelos [4], temos ainda motivos de sobra para escrever uma tese baseada nesta poderosa ferramenta: muitos modelos bem sucedidos de física teórica são descritos por uma Lagrangiana singular $L(q^A, \dot{q}^B)$ (ou densidade Lagrangiana no caso de teorias de campo), *i.e.*, $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = 0$, que apresenta vínculos, ou seja, equações da forma $\Phi(q, p) = 0$ ao construirmos o formalismo Hamiltoniano correspondente. De fato, vamos considerar abaixo vários exemplos que vão servir de motivação para a estrutura em que este trabalho dispõe-se, a saber, descreveremos o método de Dirac, seguido de várias aplicações nas mais diferentes áreas [5, 6, 7, 8].

a) Mecânica Clássica

Considere a ação

$$S = \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) \right], \quad (1.1)$$

que descreve uma partícula massiva no potencial V . Podemos escrevê-la de forma equivalente usando a representação paramétrica $x^i(\tau)$, $t(\tau)$ da trajetória $x^i(t)$. Neste caso, obtemos a seguinte ação invariante por reparametrizações $\tau \rightarrow \tau' = f(\tau)$,

$$\tilde{S} = \int d\tau \left[\frac{m(\dot{\vec{x}})^2}{2\dot{t}} - \dot{t}V(\vec{x}) \right], \quad (1.2)$$

onde $\dot{a} \equiv \frac{da}{d\tau}$. Passando ao formalismo Hamiltoniano [9], imediatamente vemos que estamos tratando de um sistema singular, que apresenta o seguinte vínculo,

$$p_t + \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V = 0. \quad (1.3)$$

p_t e \vec{p} são os momentos conjugados às variáveis independentes t e \vec{x} . Mais à frente daremos os detalhes destes cálculos e veremos que este modelo simples pode ser usado para obtermos a equação de Schrödinger [6].

b) Mecânica Quântica

É possível mostrar que a equação de Schrödinger pode ser originada da Lagrangiana singular [10],

$$S = \int dt d^3x \left[\frac{\hbar}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2\hbar} \varphi^2 + \frac{1}{\hbar} \varphi(\Delta - V)\phi \right]. \quad (1.4)$$

A metodologia de trabalho é a seguinte: dada a equação de Schrödinger,

$$i\hbar\psi = -(\Delta - V)\psi, \quad (1.5)$$

onde $\Delta = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$ e $V(x^i)$ é o potencial independente do tempo, escrevemos $\psi = \varphi + ip$, com φ e p duas funções reais de x^i e t . (1.5) é então equivalente ao sistema,

$$\hbar\dot{\varphi} = -(\Delta - V)p, \quad (1.6)$$

$$\hbar\dot{p} = (\Delta - V)\varphi. \quad (1.7)$$

Com efeito, basta substituir $\psi = \varphi + ip$ de volta na equação de Schrödinger e comparar as partes real e imaginária de ambos os lados da equação. Buscamos então uma solução para (1.5) na forma,

$$\psi = -(\Delta - V)\phi + i\hbar\dot{\phi}, \quad (1.8)$$

onde ϕ é alguma função de x^i e t . ψ será solução da equação de Schrödinger se ϕ satisfizer,

$$\hbar^2\ddot{\phi} + (\Delta - V)^2\phi = 0. \quad (1.9)$$

Voltamos agora às equações de movimento para a ação (1.4),

$$\hbar^2\ddot{\phi} - (\Delta - V)\varphi = 0, \quad (1.10)$$

$$\varphi = -(\Delta - V)\phi. \quad (1.11)$$

Logo, ϕ satisfaz (1.9), como desejado. Basta agora escrever ψ a partir de (1.8) usando ϕ . Por construção, ψ satisfaz à equação de Schrödinger e foi obtida a partir de um sistema vinculado (a equação (1.11) é um vínculo da teoria).

c) Eletromagnetismo

Mais um exemplo clássico do uso de um sistema singular para sua descrição é o Eletromag-

netismo. O princípio de ação mínima aplicado à densidade Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

fornece parte das equações de Maxwell sem fontes. As equações restantes são obtidas diretamente pelas definições,

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \quad (1.13)$$

$$E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i. \quad (1.14)$$

Aqui $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $A_\mu = A_\mu(x)$ é o quadrivetor potencial e E_i, B_i são as componentes dos campos elétrico e magnético. Se tentarmos escrever o formalismo Hamiltoniano, encontramos inicialmente,

$$p_0 = 0, \quad (1.15)$$

Como veremos adiante, o método de Dirac revela também o vínculo

$$\partial_i p_i = 0, \quad (1.16)$$

onde p_μ são os momentos conjugados a A^μ . Como veremos adiante, estes vínculos estão diretamente relacionados com a simetria local presente no modelo,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad (1.17)$$

onde $\alpha = \alpha(x)$ é uma função arbitrária.

d) Yang-Mills

A teoria de Yang-Mills [11] pode ser descrita pela densidade Lagrangiana singular,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (1.18)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. \mathcal{L} tem invariância global sob ação do grupo $SU(N)$ e o campo A_μ assume valores na álgebra de Lie correspondente, com geradores T^a ,

$$A_\mu = A_\mu^a T^a. \quad (1.19)$$

f^{abc} são as constantes de estrutura. Assim como no caso do Eletromagnetismo, o modelo de

Yang-Mills apresenta dois vínculos no formalismo Hamiltoniano,

$$p_0^a = 0, \quad (1.20)$$

$$\partial_i p_i^a - ig f^{abc} p_i^b A_i^c = 0. \quad (1.21)$$

Neste caso também mostraremos mais à frente que os vínculos estão diretamente relacionados com a simetria local presente no formalismo Lagrangiano,

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu^a + D_\mu^{ac} \xi^c, \quad (1.22)$$

onde $D_\mu^{ac} = \delta^{ac} \partial_\mu - ig f^{acb} A_\mu^b$ é a derivada covariante.

e) Relatividade Geral

Historicamente, a teoria da gravitação foi um dos pontos iniciais para o desenvolvimento e construção do formalismo dos sistemas vinculados já que após a construção da Eletrodinâmica Quântica, a próxima teoria a ser quantizada seria a gravitação [12]. O ponto inicial para a quantização canônica seria então construir a formulação Hamiltoniana a partir de uma determinada Lagrangiana. A ação para o campo gravitacional na ausência de matéria, proposta por Einstein e Hilbert foi,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.23)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica, $g = \det g_{\mu\nu}$ e R é o escalar de curvatura. O princípio da ação mínima fornece as equações de Einstein na ausência de matéria,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (1.24)$$

Podemos reescrever S em função da métrica e das conexões,

$$S = \int d^4x \left\{ h^{\mu\nu} \left[\Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \right] + \partial_\nu h^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right\} + T_s, \quad (1.25)$$

onde $h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ e T_s é o termo de superfície,

$$T_s = \int d^4x \partial_\lambda (h^{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - h^{\nu\lambda} \Gamma^\mu_{\nu\mu}). \quad (1.26)$$

Para passar para o formalismo Hamiltoniano encontramos por exemplo os vínculos,

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 g^{\mu\nu})} = 0, \quad (1.27)$$

$$\pi^{\mu\nu}{}_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Gamma^\lambda_{\mu\nu})} = \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta^0_\lambda - \frac{1}{2} g^{\mu 0} \delta^\nu_\lambda - \frac{1}{2} g^{0\nu} \delta^\mu_\lambda), \quad (1.28)$$

onde $g^{\mu\nu}$ e $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ são tratados como variáveis independentes. Naturalmente esperamos mais vínculos na teoria já que deve valer a relação entre a métrica e a conexão,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (1.29)$$

Não desenvolveremos todo o formalismo aqui. A ideia é ressaltar mais uma teoria fundamental que pode ser descrita por meio de um sistema vinculado. Para deixar claro qual o motivo de se tratar a gravitação usando o formalismo de Dirac para sistemas vinculados, observamos que é invariante sob transformações de coordenadas arbitrárias $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$. Assim como nos exemplos anteriores esta invariância está relacionada com a presença de vínculos no formalismo Hamiltoniano [13].

f) Teoria de Cordas e Membrana

A estrutura formal da teoria de cordas e membranas é muito similar. A primeira varre uma superfície bidimensional com o passar do tempo enquanto a segunda varre um volume. As ações naturais para cada um dos exemplos são, para a corda,

$$S_C = - \int d\sigma d\tau [(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2 X'^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.30)$$

onde $\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$, $X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$, $XX \equiv \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$ e σ, τ parametrizam a área descrita pela evolução da corda. Para a membrana,

$$S_M = - \int d^3\xi (-h)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.31)$$

onde $\xi = (\tau, \sigma_1, \sigma_2)$ parametriza o volume descrito pela evolução da membrana e $h_{ij} = \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu$. Em ambos os casos consideramos os objetos imersos no espaço de Minkowski X^μ . Tanto para a corda como para a membrana estão presentes vínculos no formalismo Hamiltoniano ligados com a invariância de reparametrização dos modelos [14].

g) Teorias de Calibre

Suponhamos que um modelo de teoria de campo seja descrito por uma densidade Lagrangiana \mathcal{L} e que ela seja invariante sob a ação de um grupo de simetrias globais (isto é, os parâmetros da simetria são constantes). É possível reformular a teoria para que ela seja invariante pelo mesmo grupo mas com parâmetros locais. Para isso, uma interação com um campo vetorial, que chamaremos campo de calibre, é introduzida. Essa prescrição de impor invariância local para determinada teoria é chamada Princípio de Gauge [15, 16]. Teorias que são construídas com invariância local são chamadas Teorias de Calibre ou de Gauge. Para ver como o princípio

funciona, considere modelo descrito por,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi} i \Gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (1.32)$$

que descreve um campo espinorial massivo livre. Notemos que a equação de movimento para a variável $\bar{\psi}$ (considerada independente de ψ) é a equação de Dirac,

$$(i \Gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (1.33)$$

A teoria é invariante sob a ação do grupo $U(1)$,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad (1.34)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = e^{-i\alpha} \bar{\psi}, \quad (1.35)$$

onde α é uma constante real. Seguindo a proposta do princípio de gauge, impomos que o modelo seja invariante sob a transformação local,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)} \psi. \quad (1.36)$$

Neste caso, $\alpha = \alpha(x)$ é uma função arbitrária de x^μ . Temos,

$$\partial_\mu \psi' = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + i \partial_\mu \alpha) \psi. \quad (1.37)$$

A invariância é quebrada pela presença do termo $\partial_\mu \alpha$. Para que tenhamos de fato invariância, vamos introduzir o objeto $D_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$ no lugar da derivada ∂_μ , onde A_μ é um campo vetorial. Para que tenhamos $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, deve ocorrer $D'_\mu \psi' = D_\mu \psi$, com $D'_\mu = \partial_\mu - i A'_\mu$. Vamos então determinar qual deve ser a regra de transformação para A_μ :

$$D'_\mu \psi' = (\partial_\mu - i A'_\mu) (e^{i\alpha(x)} \psi) = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \psi + i \partial_\mu \alpha \psi - i A'_\mu \psi). \quad (1.38)$$

Logo, $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ e teremos $D'_\mu \psi' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi$, como queríamos. Chamaremos $D_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$ de derivada covariante, em analogia com a derivada covariante que aparece na Relatividade Geral. A_μ faz o papel da conexão. A analogia acaba quando tentamos escrever A_μ como combinação de objetos mais básicos da teoria: na Relatividade Geral a conexão é escrita em função da métrica e suas derivadas, veja a fórmula (1.29) [16]. Escrevemos agora a densidade Lagrangiana com a substituição $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \Gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \Gamma^\mu A_\mu \psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (1.39)$$

onde $\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \Gamma^\mu A_\mu \psi$ é a Lagrangiana de interação de ψ com o campo vetorial A_μ , como descrito anteriormente. Acrescentando a \mathcal{L} um termo que contenha a dinâmica para A_μ , que

seja também invariante sob a transformação local imposta, a saber $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, obtemos a Eletrodinâmica Quântica (QED) [17]. Um outro exemplo de teoria de calibre descrita por uma Lagrangiana singular é o Modelo Padrão de física de partículas. Seu grupo de simetrias (locais) é o $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, que estão relacionados com as interações forte, fraca e eletromagnética. Para ver como o Modelo Padrão é construído com base no princípio de gauge, veja [17] (em particular, o primeiro Capítulo explica de forma clara e simples a quebra espontânea de simetria local e o mecanismo de Higgs para geração de massa). Referências mais recentes e pedagógicas podem ser encontradas em [18] e [19]. A razão de termos citado aqui teorias de calibre vem pelo seguinte resultado [20], se uma teoria Lagrangiana apresenta invariância local, então ela é, em primeiro lugar, singular e segundo, apresenta vínculos (de primeira classe) no formalismo Hamiltoniano. O inverso também é válido: se uma teoria apresenta vínculos (de primeira classe) no formalismo Hamiltoniano, então a Lagrangiana correspondente possui invariância local.

h) Partícula Relativística Livre

Vamos agora considerar o último exemplo de um modelo descrito por um modelo singular, a partícula relativística livre. Consideremos a seguinte ação,

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (1.40)$$

onde $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. S possui invariância de reparametrizações $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ e quando definimos o momento conjugado a x^μ para passar ao formalismo Hamiltoniano, encontramos um vínculo,

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \Rightarrow T = \frac{1}{2}(p_\mu p^\mu + m^2 c^2) = 0, \quad (1.41)$$

que nada mais é que a relação de dispersão de energia-momento que toda partícula massiva obedece. Nos exemplos anteriores, apesar de ter sido mencionado, não fica claro como relacionar os vínculos da teoria com a simetria local. No caso da partícula relativística podemos ver explicitamente que o vínculo gera a transformação de simetria,

$$\delta x^\mu = \varepsilon \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} = \varepsilon \{x^\mu, T\} \Big|_{p_\mu \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}}, \quad (1.42)$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(x)$ é uma função arbitrária de x^μ . Adiante voltaremos neste ponto: vamos descrever um método de obtenção de simetrias locais para teorias singulares tanto para o caso discreto [21, 22] quanto para o caso contínuo [5].

Com todos estes exemplos apresentados fica claro como o método de Dirac ainda é atual e

serve como um importante aparato para análise de sistemas singulares em diversas áreas. Esta tese é baseada exatamente nisto: no Capítulo 2 faremos uma revisão do método de Dirac para fixar a notação e nomenclatura que será utilizada no texto. Discutiremos também a interpretação para teorias singulares. Na sequência, descreveremos o método tanto para sistemas mecânicos discretos quanto para teorias de campo. No segundo caso, levantaremos algumas novidades que não estão presentes para sistemas com um número finito de graus de liberdade. Como objetivo principal desta tese, apresentaremos diversas aplicações do método de Dirac, a saber,

1. Sugerimos durante a discussão conduzida até aqui que as simetrias locais de uma Lagrangiana singular estão relacionadas com os vínculos (de primeira classe) presentes no formalismo Hamiltoniano. À luz disso, foi desenvolvido um método construtivo de obtenção de simetrias locais para uma teoria singular [21, 22]. Partindo de uma Lagrangiana singular, constroi-se uma Lagrangiana estendida, equivalente à inicial através de métodos algébricos e em termos das quantidades da formulação inicial. Os geradores das simetrias da teoria estendida são os próprios vínculos (de primeira classe) da formulação inicial. Após uma revisão do método de obtenção de simetrias descrito, discutiremos em detalhes sua aplicação para teorias de campo, com aplicações para o Eletromagnetismo, Yang-Mills e modelo de Sigma não linear [5].
2. Discutiremos uma maneira de obter as regras cinemáticas da Relatividade Especial Dupla [23, 24, 25, 26] (para uma revisão recente, veja [27]), incluindo a relação de dispersão deformada de energia-momento e a transformação de Lorentz não linear dos momentos. Partimos de uma Lagrangiana singular invariante sob a ação do grupo $SO(1,4)$. A relação de dispersão deformada aparece quando fixamos um calibre específico. A regra de transformação dos momentos surge quando impomos a covariância do calibre escolhido [8].
3. Mostraremos que é possível obter a equação de Schrödinger a partir de uma reformulação do paradigma da quantização canônica, onde espaço e tempo são quantizados. Usamos uma Lagrangiana singular com invariância de reparametrizações, construída usando a forma paramétrica da trajetória da partícula (veja (1.1) e (1.2)). O vínculo do modelo, imposto sobre o vetor de estado, fornece a equação de Schrödinger [6].
4. Construiremos um modelo semiclássico que descreve uma partícula relativística com spin. Usamos variáveis de momento angular para parametrizar o espaço do spin, que é construído a partir de vínculos presentes no formalismo Hamiltoniano correspondente. A quantização do modelo leva à equação de Dirac e às matrizes gama [7].

2 MÉTODO DE DIRAC PARA SISTEMAS VINCULADOS

Faremos agora uma revisão do método de Dirac para sistemas vinculados [1, 20, 28, 29]. O método consiste em uma receita de como partir de uma Lagrangiana singular L e obter o formalismo Hamiltoniano H correspondente. À transição $L \rightarrow H$ damos o nome de hamiltonização. O método revela a estrutura da teoria, que além de conter equações diferenciais, apresenta também equações algébricas envolvendo as variáveis de configuração q e os momentos p . Lembramos ainda que os formalismos L e H são equivalentes [20].

Dividiremos o Capítulo em quatro partes. Na primeira, descreveremos o método detalhadamente para sistemas mecânicos com um número finito de graus de liberdade. A interpretação para teorias singulares será dada na segunda. Na terceira parte usaremos um sistema de massas e molas para caracterizar a transição de um sistema mecânico discreto para um contínuo. Por fim, na quarta parte discutiremos o método de Dirac para um sistema com infinitos graus de liberdade.

2.1 HAMILTONIZAÇÃO DE SISTEMAS COM NÚMERO FINITO DE GRAUS DE LIBERDADE

Seja $L(q^A, \dot{q}^B)$ a Lagrangiana de uma teoria singular, isto é,

$$\text{posto } \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i] < [A], \quad (2.1)$$

definida no espaço de configurações parametrizado por $q^A; A = 1, \dots, [A]$.¹

Do início podemos supor [30], sem perda de generalidade, que a submatriz da matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}$ que determina o posto da última é formada pelas $[i]$ primeiras linhas e colunas de $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}$. Neste caso, o conjunto de índices A fica dividido da seguinte maneira: $A = (i, \alpha)$, onde $i = 1, \dots, [i]$ e $\alpha = i + 1, \dots, [A]$.

¹A notação $[A]$ significa que o índice A corre os valores inteiros de 1 até $[A]$.

Primeiro passo: momentos canônicos e vínculos primários.

Introduzimos os momentos,

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}, \quad (2.2)$$

ou então,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (2.3)$$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}. \quad (2.4)$$

Estas equações são consideradas equações algébricas para determinarmos o número máximo possível de velocidades \dot{q} em função dos q 's e p 's. De acordo com o teorema da aplicação implícita [31] (e a condição $\text{rank} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i]$) podemos obter $[i]$ velocidades em função dos q 's, p 's e \dot{q} 's restantes, ou seja,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Leftrightarrow \dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha). \quad (2.5)$$

É imediata a seguinte identidade,

$$p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{v^i} \equiv 0. \quad (2.6)$$

Substituindo as soluções (2.5) em (2.4), obtemos,

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \Rightarrow \phi_\alpha(q, p) \equiv p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha)} = 0. \quad (2.7)$$

Notemos que as funções $\phi_\alpha(q, p)$ não dependem de \dot{q}^α . De fato, se isto ocorresse poderíamos usar a equação (2.6) para obter mais uma velocidade \dot{q} em função dos q 's, p 's e \dot{q} restantes, contrariando o teorema da aplicação implícita, já que $\text{rank} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i]$.

Assim, até agora temos:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \Leftrightarrow \dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha); \quad \phi_\alpha(q, p) = p_\alpha - f_\alpha(q^A, p_j) \quad (2.8)$$

onde

$$f_\alpha(q^A, p_j) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha)}. \quad (2.9)$$

Obtivemos funções das variáveis q e p que não envolvem derivadas temporais. Chamaremos $\phi_\alpha(q, p)$ vínculos primários.

Segundo passo: Hamiltoniana H_0 do sistema singular.

Definimos a Hamiltoniana H_0 do sistema singular da seguinte maneira,

$$H_0 \stackrel{def}{=} (p_A \dot{q}^A - L) \Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha), p_\alpha = f_\alpha(q^A, p_j)}. \quad (2.10)$$

Por construção H_0 não depende das velocidades \dot{q}^A . De fato, a dependência com \dot{q}^i desaparece pois usamos as soluções (2.5) na definição de H_0 . Para ver que H_0 também não depende de \dot{q}^α , fazemos:

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_i \frac{\partial v^i}{\partial \dot{q}^\alpha} + p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Big|_{v^i} \frac{\partial v^i}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \Big|_{v^i}. \quad (2.11)$$

Usando a identidade (2.6) e a definição (2.9),

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_\alpha - f_\alpha = 0. \quad (2.12)$$

Notemos também que, por construção, $H_0 = H_0(q^A, p_j)$.

Terceiro passo: Hamiltoniana completa H no espaço de fase estendido.

Consideremos o espaço de fase estendido parametrizado por,

$$(q^A(\tau), p_A(\tau), v^\alpha(\tau)). \quad (2.13)$$

Definimos a Hamiltoniana completa do sistema singular no espaço de fase estendido da seguinte maneira,

$$H(q^A, p_A, v^\alpha) = H_0(q^A, p_j) + v^\alpha \phi_\alpha(q^A, p_A), \quad (2.14)$$

onde os v^α são chamados multiplicadores de Lagrange e aparecem em número igual ao número de vínculos primários.

Quarto passo: Parêntesis de Poisson no espaço (q^A, p_A, v^α) .

Dadas duas funções $A = A(q, p, v)$ e $B = B(q, p, v)$ definidas no espaço (q^A, p_A, v^α) , o parêntesis de Poisson de A e B é definido por,

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^A} \frac{\partial B}{\partial p_A} - \frac{\partial A}{\partial p_A} \frac{\partial B}{\partial q^A}. \quad (2.15)$$

Quinto passo: Equações de movimento hamiltonianas.

No espaço (q^A, p_A, v^α) de $2[A] + [\alpha]$ dimensões construímos as seguintes equações,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\} = \{q^A, H_0 + v^\alpha \phi_\alpha\} = \{q^A, H_0\} + v^\alpha \{q^A, \phi_\alpha\} = \frac{\partial H}{\partial p_A}, \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\} = \{p_A, H_0 + v^\alpha \phi_\alpha\} = \{p_A, H_0\} + v^\alpha \{p_A, \phi_\alpha\} = -\frac{\partial H}{\partial q^A}, \quad (2.17)$$

$$\phi_\alpha(q^A, p_A) = 0. \quad (2.18)$$

Como já citamos anteriormente, as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana são equivalentes [20]. Observemos contudo que no formalismo Hamiltoniano, as equações diferenciais estão na sua forma normal, isto é, a derivada de maior ordem está isolada (lhs de (2.16) e (2.17)). Isto não ocorre no formalismo Lagrangiano. Com efeito, se escrevermos as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) = 0 \Leftrightarrow M_{AB} \ddot{q}^B = K_A, \quad (2.19)$$

onde,

$$M_{AB} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}, \quad (2.20)$$

$$K_A = \frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial \dot{q}^A} \dot{q}^B, \quad (2.21)$$

então concluímos imediatamente que \ddot{q} não fica isolada em (2.19) pois $\det M_{AB} = 0$ já que do começo consideramos o sistema com sendo singular. Notemos também que além de equações diferenciais, o método revelou que parte das equações de movimento são dadas por $[\alpha]$ equações algébricas: $\phi_\alpha = 0$, que também não é evidente no formalismo Lagrangiano.

Pode acontecer que existam mais equações algébricas na teoria, além das $[\alpha]$ já encontradas. Para ver como elas podem aparecer, vamos substituir o sistema de equações (2.16), (2.17) e (2.18) pelo sistema abaixo,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\}, \quad (2.22)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\}, \quad (2.23)$$

$$\phi_\alpha(q, p) = 0, \quad (2.24)$$

$$\{\phi_\alpha, H\} = 0. \quad (2.25)$$

Eles são equivalentes. De fato, é imediato que qualquer solução do sistema acima é também solução do sistema (2.16), (2.17) e (2.18). Por outro lado, se $q^A = x^A(\tau)$ e $p_A = \pi_A(\tau)$ é solução de (2.16), (2.17) e (2.18), então $\phi_\alpha(x^A(\tau), \pi_A(\tau)) \equiv 0$. Assim,

$$0 = \frac{d}{d\tau} \phi_\alpha(x^A(\tau), \pi_A(\tau)) = \{\phi_\alpha, H\} \Rightarrow 0 = \{\phi_\alpha, H\}. \quad (2.26)$$

Este resultado nos leva ao,

Sexto passo: Trocar o sistema (2.16), (2.17), (2.18) pelo sistema (2.22), (2.23), (2.24), (2.25).

Como mostramos a equivalência entre os dois sistemas acima, é questão de conveniência usar um ou outro. Usaremos o segundo e vamos mostrar no próximo passo que a equação,

$$\{\phi_\alpha, H\} = 0 \quad (2.27)$$

pode trazer novas equações algébricas, ou seja, novas equações de vínculo ao sistema. A equação (2.27) apresenta uma interpretação simples: é natural pensar que um vínculo é preservado para todo instante de tempo, ou seja, sua evolução temporal é dada por,

$$\frac{d}{d\tau} \phi_\alpha = \{\phi_\alpha, H\} = 0. \quad (2.28)$$

Sétimo passo: Análise das equações $\{\phi_\alpha, H\} = 0$.

Temos,

$$0 = \{\phi_\alpha, H\} = \{\phi_\alpha, H_0\} + v^\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}. \quad (2.29)$$

Definindo,

$$\{\phi_\alpha, H_0\} = H_\alpha, \quad (2.30)$$

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = \Delta_{\alpha\beta}, \quad (2.31)$$

as equações (2.29) tomam a forma,

$$\Delta_{\alpha\beta} v^\beta = -H_\alpha. \quad (2.32)$$

7.1) $\det \Delta_{\alpha\beta} \neq 0$.

Se $\det \Delta_{\alpha\beta} \neq 0$, então obtemos todos os multiplicadores v^β ,

$$v^\beta = -(\Delta^{-1})^{\beta\alpha} H_\alpha; \quad v^\beta = v^\beta(q, p). \quad (2.33)$$

Não aparecem mais equações algébricas e as equações de movimento tomam a forma,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\} \Big|_{v^\beta(q, p)}, \quad (2.34)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\} \Big|_{v^\beta(q, p)}, \quad (2.35)$$

$$\phi_\alpha(q, p) = 0. \quad (2.36)$$

Como o sistema acima está em sua forma normal, ou seja, a derivada temporal de maior ordem está isolada, fixadas $2[A]$ condições iniciais, existe única solução para (2.34), (2.35). Notemos que neste caso, os multiplicadores foram todos encontrados e retornamos ao espaço q^A, p_A .

7.2) $\det \Delta_{\alpha\beta} = 0$.

Seja *posto* $\Delta_{\alpha\beta} = [\bar{\alpha}] < [\alpha]$. Vamos supor, sem perda de generalidade [21], que a submatriz que determina o posto de $\Delta_{\alpha\beta}$ seja formada pelas primeiras $[\bar{\alpha}]$ linhas e colunas de $\Delta_{\alpha\beta}$:

$$\Delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \Delta_{\bar{a}\bar{b}} & \Delta_{\bar{a}b'} \\ \Delta_{a'\bar{b}} & \Delta_{a'b'} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

onde $\det \Delta_{\bar{a}\bar{b}} \neq 0$. Reescrevendo o sistema linear (2.32), encontramos,

$$\Delta_{\bar{a}\bar{b}} v^{\bar{b}} + \Delta_{\bar{a}b'} v^{b'} = -H_{\bar{a}}, \quad (2.38)$$

$$\Delta_{a'\bar{b}} v^{\bar{b}} + \Delta_{a'b'} v^{b'} = -H_{a'}. \quad (2.39)$$

Da equação (2.38), temos,

$$v^{\bar{b}} = -(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} (H_{\bar{a}} + \Delta_{\bar{a}b'} v^{b'}). \quad (2.40)$$

Encontramos $[\bar{\alpha}]$ multiplicadores em função dos multiplicadores restantes. Substituindo (2.40) em (2.39),

$$-\Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} (H_{\bar{a}} + \Delta_{\bar{a}b'} v^{b'}) + \Delta_{a'b'} v^{b'} = -H_{a'}, \quad (2.41)$$

que implica,

$$\Delta'_{a'b'} v^{b'} = \Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} H_{\bar{a}} - H_{a'}, \quad (2.42)$$

onde

$$\Delta'_{a'b'} \equiv \Delta_{a'b'} - \Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} \Delta_{\bar{a}b'}. \quad (2.43)$$

Se pudéssemos encontrar mais um multiplicador v a partir de (2.42) estaríamos contrariando o teorema da aplicação implícita já que $post p \Delta_{\alpha\beta} = [\bar{a}]$ e já obtemos $[\bar{a}]$ multiplicadores em função dos demais. Portanto, obrigatoriamente, devemos ter,

$$post o \Delta'_{a'b'} = post o (\Delta_{a'b'} - \Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} \Delta_{\bar{a}b'}) = 0. \quad (2.44)$$

Isto implica,

$$\Delta'_{a'b'} = \Delta_{a'b'} - \Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} \Delta_{\bar{a}b'} = 0. \quad (2.45)$$

De fato, se algum elemento de Δ' fosse diferente de zero, digamos $\Delta'_{c'd'}$, então o determinante da submatriz de ordem 1, formada pelo elemento $\Delta'_{c'd'} \neq 0$ teria determinante diferente de zero e assim $post o \Delta' = 1$, contrariando (2.44). Retornando com (2.45) em (2.42),

$$H_{a'} - \Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} H_{\bar{a}} = 0. \quad (2.46)$$

Até agora encontramos, a partir de $\{\phi_\alpha, H\} = 0$,

$$v^{\bar{a}} = -(\Delta^{-1})^{\bar{a}\bar{b}} (\Delta_{\bar{b}c'} v^{c'} + H_{\bar{b}}), \quad (2.47)$$

$$\phi_{a'}(q, p) \equiv H_{a'} - \Delta_{a'\bar{b}} (\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} H_{\bar{a}} = 0. \quad (2.48)$$

Dentre as equações (2.48), podemos ter consequências dos vínculos primários $\phi_\alpha(q, p) = 0$ ou ainda podem ocorrer identidades $0 \equiv 0$. Como não queremos informações irrelevantes, considere a seguinte definição,

Sejam $f_D = f_D(\xi^i)$ funções das variáveis ξ^i , com $[D] < [i]$. As funções f_D são ditas funcionalmente independentes quando,

$$post o \left(\frac{\partial f_D}{\partial \xi^i} \right) \Big|_{f_D(\xi^i)=0} = [d]. \quad (2.49)$$

Ou seja, quando, a partir das equações $f_D(\xi^i) = 0$, pudermos encontrar $[d]$ variáveis ξ em função das demais.

Assim, entre as funções $\phi_{a'}(q, p)$ escolhemos $[a] \leq [a']$ funções funcionalmente independentes e independentes dos $\phi_\alpha(q, p)$:

$$\phi_a(q, p) = H_a - \Delta_{a\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{c}} H_{\bar{c}}; [a] \leq [a']. \quad (2.50)$$

As funções (2.50) são os vínculos secundários.

Oitavo passo: Substituição dos multiplicadores encontrados.

Conseguimos mostrar a equivalência entre $\{\phi_\alpha, H\} = 0$ e (2.47), (2.50) (em (2.50) retiramos as informações irrelevantes de (2.48)), nosso sistema de equações será,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\}, \quad (2.51)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\}, \quad (2.52)$$

$$\phi_\alpha = 0, \quad (2.53)$$

$$\phi_a = 0, \quad (2.54)$$

$$v^{\bar{a}} = v^{\bar{a}}(q, p, v^{a'}), \quad (2.55)$$

ou seja, substituímos os $v^{\bar{a}}$ encontrados nas demais equações,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\} \Big|_{v^{\bar{a}}}, \quad (2.56)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\} \Big|_{v^{\bar{a}}}, \quad (2.57)$$

$$\phi_\alpha = 0, \quad (2.58)$$

$$\phi_a = 0. \quad (2.59)$$

Nono passo em diante: Repetição dos passos 6, 7 e 8.

Submeteremos agora ϕ_a à mesma análise feita para os vínculos primários. Assim, encontraremos, quando existirem, vínculos de terceira etapa e alguns multiplicadores. Os passos repetem-se para os vínculos de terceira etapa e assim sucessivamente. Este procedimento é finito pois temos um número finito de graus de liberdade. Assim completamos o método de Dirac

de hamiltonização de sistemas singulares. Por fim, destacamos algumas vantagens do uso do método de Dirac,

a) No formalismo Hamiltoniano, as equações diferenciais estão na sua forma normal. Assim, fixadas condições iniciais, conseguimos garantir existência e unicidade das soluções (pelo menos no caso de modelos com vínculos de segunda classe, como discutiremos abaixo).

b) É possível mostrar que todos os vínculos do modelo são revelados [20].

c) Quando os multiplicadores de Lagrange não são encontrados, o modelo apresenta arbítrio no seguinte sentido: a solução das equações de movimento apresenta funções arbitrárias. Com o método de Dirac, fica claro quais as variáveis possuem dinâmica arbitrária ou não. O mesmo não acontece no formalismo Lagrangiano.

2.2 INTERPRETAÇÃO PARA TEORIAS SINGULARES

Faremos agora uma discussão breve sobre a interpretação de teorias singulares. Quando fomos para o sétimo passo, vimos que a obtenção de vínculos de etapas superiores e dos multiplicadores de Lagrange dependia fortemente de,

$$a) \det\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \Big|_{\phi_\alpha=0},$$

$$b) \text{posto}\{\phi_{a_i}, \phi_\alpha\} \Big|_{\phi_\alpha=0}.$$

O determinante acima motiva a separação dos vínculos em primeira e segunda classes. Vamos discutir cada um dos casos separadamente. Antes, consideremos as seguintes definições,

Definição 1. *Seja uma teoria singular com sistema de todos os vínculos dados por $G_I, I = 1, \dots, [I]$. Dizemos que um vínculo T é de primeira classe quando,*

$$\{T, G_I\} = C_I^J G_J, \forall I = 1, \dots, [I], \quad (2.60)$$

onde C_I^J são funções de q e p .

Definição 2. *Seja $G_a, a = 1, \dots, [a]$ um sistema de vínculos. Dizemos que o sistema G_a é de segunda classe quando,*

$$\det\{G_a, G_b\} \neq 0. \quad (2.61)$$

Suponhamos inicialmente que temos uma teoria onde a matriz $\Delta_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} \Big|_{\phi_\alpha=0}$ seja invertível, isto é, só estão presentes vínculos de segunda classe. De acordo com o método de

Dirac descrito, temos

$$\dot{q}^A = \{q^A, H_0\} + v^\alpha \{q^A, \phi_\alpha\}, \quad (2.62)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H_0\} + v^\alpha \{p_A, \phi_\alpha\}, \quad (2.63)$$

$$\phi_\alpha(q^A, p_A) = 0. \quad (2.64)$$

Da condição $0 = \{\phi_\alpha, H\}$, podemos obter todos os multiplicadores

$$0 = \{\phi_\alpha, H_0\} + \Delta_{\alpha\beta} v^\beta \Rightarrow v^\beta = -(\Delta^{-1})^{\beta\alpha} \{\phi_\alpha, H_0\}. \quad (2.65)$$

Retornando com os multiplicadores encontrados nas equações (2.62) e (2.63), obtemos

$$\dot{q}^A = \{q^A, H_0\} - \{q^A, \phi_\alpha\} (\Delta^{-1})^{\alpha\beta} \{\phi_\beta, H_0\}, \quad (2.66)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H_0\} - \{p_A, \phi_\alpha\} (\Delta^{-1})^{\alpha\beta} \{\phi_\beta, H_0\}. \quad (2.67)$$

Definimos então o parêntesis de Dirac de duas funções definidas no espaço de fase

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \phi_\alpha\} (\Delta^{-1})^{\alpha\beta} \{\phi_\beta, B\}. \quad (2.68)$$

Com esta definição, podemos reescrever as equações de movimento para q^A e p_A de forma compacta

$$\dot{q}^A = \{q^A, H_0\}^*, \quad (2.69)$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H_0\}^*. \quad (2.70)$$

Assim, em teorias singulares onde estão presentes somente vínculos de segunda classe, todos os multiplicadores podem ser encontrados: não existe arbitrariedade na teoria. Fixando condições iniciais $(q^A(\tau_0), p_A(\tau_0))$, existe única solução para as equações de movimento acima, escritas em termos do parêntesis de Dirac. Logo, identificamos unicamente pontos (q^A, p_B) da superfície definida pelos vínculos no espaço de fase com estados físicos do modelo.

Suponhamos agora que só estejam presentes vínculos de primeira classe. Neste caso, nenhum dos multiplicadores pode ser obtido através da condição $0 = \{\phi_\alpha, H\}$. Isto significa que as equações de movimento possuem funções arbitrárias v^α . Assim, mesmo fixando condições iniciais $(q^A(\tau_0), p_A(\tau_0))$, podemos obter várias soluções $(q^A(\tau), p_A(\tau))$ tal que

$$(q^A(\tau), p_A(\tau))|_{\tau=\tau_0} = (q^A(\tau_0), p_A(\tau_0)) \quad (2.71)$$

bastando para isso escolher outros $v^\alpha(\tau)$. Logo, a dinâmica dos q 's e p 's é ambígua e então não podemos associar univocamente pontos (q^A, p_A) da superfície definida pelos vínculos com

estados físicos do modelo. Por outro lado, dado (q^A, p_A) , o estado físico é definido univocamente. Intuitivamente, as variáveis q e p carregam informação irrelevante para a descrição do modelo. Vejamos então como obter o setor físico do modelo. Consideremos uma variável dinâmica $f(\tau) = f(q^A(\tau), p_A(\tau))$, com valor inicial $f(0) = f_0$. Passado um intervalo de tempo infinitesimal $\Delta\tau$, temos:

$$\begin{aligned} f(\Delta\tau) &\approx f_0 + \Delta\tau \dot{f} = f_0 + \Delta\tau \{f, H\} \\ &= f_0 + \Delta\tau (\{f, H_0\} + v^\alpha(\tau) \{f, \phi_\alpha\}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Por outro lado, podemos escolher outros multiplicadores $v'^\alpha(\tau)$ e então a evolução de f é dada por

$$f(\Delta\tau) \approx f_0 + \Delta\tau (\{f, H_0\} + v'^\alpha(\tau) \{f, \phi_\alpha\}). \quad (2.73)$$

Quando trocamos de um conjunto de multiplicadores $v^\alpha(\tau)$ para outro $v'^\alpha(\tau)$, a variação de $f(\Delta\tau)$ é dada por

$$\delta f(\Delta\tau) = \Delta\tau (v'^\alpha(\tau) - v^\alpha(\tau)) \{f, \phi_\alpha\}. \quad (2.74)$$

Como $\Delta\tau$ é infinitesimal e $v'^\alpha(\tau) - v^\alpha(\tau)$ é arbitrário, escrevemos

$$\delta f(\Delta\tau) = \varepsilon^\alpha(\tau) \{f, \phi_\alpha\}, \quad (2.75)$$

onde $\varepsilon^\alpha(\tau)$ são funções arbitrárias de τ . Em particular podemos escrever,

$$\delta q^A = \varepsilon^\alpha(\tau) \{q^A, \phi_\alpha\}, \quad (2.76)$$

$$\delta p_A = \varepsilon^\alpha(\tau) \{p_A, \phi_\alpha\}. \quad (2.77)$$

É natural esperar que um estado físico representado por (q^A, p_A) não se altere sob as transformações (2.76) e (2.77). Portanto, em teorias com vínculos de primeira classe, a dinâmica das variáveis q^A e p_A é ambígua: a solução geral das equações de movimento apresentam funções arbitrárias (refletido pelo fato que os multiplicadores não foram obtidos), não sendo possível definir um problema de Cauchy. De acordo com (2.76) e (2.77), os vínculos de primeira classe geram transformações locais e o setor físico da teoria é dado por variáveis dinâmicas que não se alteram sob as transformações geradas por ϕ_α e parametrizadas por funções arbitrárias de τ , $\varepsilon^\alpha(\tau)$. As transformações locais (2.76) e (2.77) permitem construir classes de equivalência de

trajetórias: $(q^A(\tau), p_A(\tau))$ é equivalente a $(q'^A(\tau), p'_A(\tau))$ quando

$$q'^A(\tau) = q^A(\tau) + \varepsilon^\alpha(\tau)\{q^A, \phi_\alpha\}, \quad (2.78)$$

$$p'_A(\tau) = p_A(\tau) + \varepsilon^\alpha(\tau)\{p_A, \phi_\alpha\}. \quad (2.79)$$

Qualquer representante da classe pode ser usado para descrever o estado físico. Finalmente, para obter variáveis dinâmicas físicas, que chamaremos de invariantes de calibre ou de gauge, buscamos combinações dos q 's e p 's que não se alteram sob as transformações locais (2.76) e (2.77).

Para exemplificar, podemos considerar o Eletromagnetismo. Seu setor físico é descrito pelas equações de Maxwell sem fontes

$$\partial_i B_i = 0, \quad \partial_i E_i = 0, \quad (2.80)$$

$$\partial_0 B_i = -\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k, \quad \partial_0 E_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k. \quad (2.81)$$

Chamaremos os campos elétrico E_i e magnético B_i de variáveis físicas. As equações acima nos permitem introduzir o potencial vetor A_μ ,

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k, \quad (2.82)$$

$$E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i. \quad (2.83)$$

Parte das equações de Maxwell aparecem a partir da definição do potencial A_μ acima: $\partial_i B_i = 0$ e $\partial_0 B_i = -\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k$. As outras equações podem ser obtidas a partir de um princípio variacional aplicado à densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.84)$$

As equações de Euler-Lagrange $\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0$ fornecem as equações restantes $\partial_i E_i = 0$ e $\partial_0 E_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k$.

É bem conhecido que o modelo apresenta a seguinte simetria local

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha; \quad \forall \alpha(x). \quad (2.85)$$

Dado $A_\mu = A_\mu(x)$, podemos obter univocamente as variáveis físicas E_i e B_i : de acordo com

(2.82) e a definição de $F_{\mu\nu}$, temos

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

e chamamos E_i, B_i de variáveis físicas pois $F_{\mu\nu}$ não se altera sob as transformações (2.85). Por outro lado, dados E_i, B_i , se conseguirmos obter um A_μ que os represente, então podemos obter infinitos A_μ bastando para isso usar (2.85), variando α . Qualquer dos A_μ 's assim obtidos levam ao mesmo estado físico E^i, B_i .

2.3 PASSAGEM AO CONTÍNUO

Como vamos tratar na Seção 3.1 da busca de simetrias de modelos de teorias de campo, discutiremos o método de Dirac para sistemas com infinitos graus de liberdade e veremos quais as novidades aparecem neste caso. Antes contudo, vale a pena considerar o exemplo clássico de transição para o contínuo [33]. Consideramos um conjunto de N massas m separadas por molas idênticas com constante elástica k . Em equilíbrio, as molas possuem o comprimento a . Por conveniência, vamos supor que as molas oscilem em uma direção somente. Neste caso, a coordenada de cada massa é dada por $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Seja x_i^0 a posição de equilíbrio de cada massa. Definimos,

$$\eta_i = x_i - x_i^0; i = 1, \dots, N, \quad (2.87)$$

onde η_i corresponde ao deslocamento da posição de equilíbrio de cada massa. Podemos escrever a Lagrangiana do sistema como,

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2. \quad (2.88)$$

As equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} = \frac{\partial L}{\partial \eta_j} \quad (2.89)$$

fornecem,

$$m \ddot{\eta}_j = -k(\eta_j - \eta_{j+1}) + k(\eta_{j-1} - \eta_j), \quad (2.90)$$

que correspondem exatamente à segunda lei de Newton. A j -ésima partícula está sujeita às forças que as molas de cada um de seus lados lhe impõe. Vamos tomar agora dois limites para este modelo: $a \rightarrow 0$ e $N \rightarrow +\infty$. Neste caso, não tem mais sentido falar no deslocamento de cada massa e sim numa função que descreve o deslocamento do contínuo de massa criado com os limites acima em cada ponto do eixo x ,

$$\eta_i(t) \longrightarrow \eta(x,t). \quad (2.91)$$

À função η damos o nome de campo de deslocamentos. É possível ainda usar os limites,

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \longrightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (2.92)$$

$$\sum_i a \longrightarrow \int dx, \quad (2.93)$$

já que $a \rightarrow 0$. Reescrevemos então L ,

$$L = \sum_i a \left[\frac{\mu}{2} \dot{\eta}_i^2 - \frac{\Upsilon}{2} \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right], \quad (2.94)$$

onde $\mu = \frac{m}{a}$ é a densidade linear de massa e $\Upsilon = ka$ é identificado com o módulo de Young, que caracteriza a elasticidade de um material sob a ação de uma força aplicada em determinada direção. Usando as aproximações acima, chegamos a,

$$L = \int dx \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Upsilon}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.95)$$

À função $\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Upsilon}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$ damos o nome de densidade Lagrangiana.

Apesar de ingênuo, o exemplo traz intuição e deixa claro a terminologia utilizada na passagem para o contínuo, por exemplo,

a) Dizemos que tratamos um sistema com infinitos graus de liberdade pois precisamos de um objeto (o campo) que descreva o deslocamento em cada ponto do eixo x . Observe que no fundo, após o limite, usamos efetivamente somente um grau de liberdade, η . De fato, esta é a nomenclatura em teorias de campo: o número de campos em cada ponto do espaço sob o qual estão definidos corresponde ao número de graus de liberdade do sistema [5].

b) A Lagrangiana foi escrita na forma $L = \int dx \mathcal{L} \left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$. Daí fica claro usarmos uma densidade Lagrangiana \mathcal{L} em teoria de campos.

Na próxima Seção, descreveremos o método de Dirac para sistemas com infinitos graus de liberdade.

2.4 HAMILTONIZAÇÃO DE SISTEMAS COM NÚMERO INFINITO DE GRAUS DE LIBERDADE

Vamos agora desenvolver o formalismo Hamiltoniano para um modelo descrito por uma densidade Lagrangiana (na verdade, vamos discutir somente o caso em que o modelo seja singular). Primeiro, notamos que agora a própria Lagrangiana é um funcional. Lembrando que o primeiro passo na passagem para o formalismo Hamiltoniano é definir os momentos, precisamos então da definição de uma derivada que possa ser aplicada a um funcional. A derivada que buscamos é chamada variacional (ou funcional). Seja B um funcional que atua sobre um campo $\varphi = \varphi(x)$ e suas derivadas. x pertence ao domínio onde φ está definido. A derivada funcional é definida por [29],

$$\frac{\delta B[\varphi(x), \partial\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)} = \left. \frac{\partial B}{\partial\varphi} \right|_{\varphi \rightarrow \varphi(x)} \delta(x-y) + \left. \frac{\partial B}{\partial(\partial\varphi)} \right|_{\varphi \rightarrow \varphi(x)} \partial\delta(x-y). \quad (2.96)$$

Usamos a notação $\partial\varphi$ para representar a derivada espacial de φ em relação a x . Suponhamos então que temos um modelo com Lagrangiana dada por,

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^A, \partial_\mu \varphi^A). \quad (2.97)$$

O índice A pode corresponder a vários tipos de campos: escalar, vetorial, espinorial, etc e estamos usando a notação padrão $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $i, j, k = 1, 2, 3$ correspondem aos índices das coordenadas espaciais e x^0 corresponde ao tempo. Vamos considerar o funcional acima em três dimensões. Assim, a derivada espacial que mencionamos em (2.96) corresponde derivada em relação a x^i e a delta de Dirac está definida em três dimensões. A generalização para mais dimensões é imediata. Vale mencionar que, por simplicidade, vamos usar o que Dirac [34] chamou de *instant form*, onde declaramos x^0 como o tempo. Naturalmente outras opções podem ser tomadas, como por exemplo, a *front form*, onde uma combinação de x^0 e x^i faz o papel de parâmetro de evolução. Assim como no caso mecânico discreto, dizemos que o modelo é singular quando a matriz,

$$M_{AB} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A(x) \partial \dot{\varphi}^B(x)} \quad (2.98)$$

é singular, isto é, $\det M_{AB} = 0$. A matriz M aparece na verdade a partir de,

$$M_{A,B}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{\varphi}^A(t, \vec{x}) \delta \dot{\varphi}^B(t, \vec{y})} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A(t, \vec{x}) \partial \dot{\varphi}^B(t, \vec{y})} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.99)$$

Suponhamos então que a teoria seja singular. As próximas considerações seguem análogas ao descrito anteriormente. Começamos separando os índices dos campos de acordo com a

condição $p_{AB} = [i] < [A]$, $\varphi^A = (\varphi^i, \varphi^\alpha)$. Agora definimos os momentos conjugados aos campos,

$$p_A = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} \Leftrightarrow p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^i}; p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha}. \quad (2.100)$$

Obtemos parte das velocidades e vínculos primários,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^i} \Leftrightarrow \dot{\varphi}^i = v^i(\varphi^A, \partial_j \varphi^A, p_i, \dot{\varphi}^\alpha), \quad (2.101)$$

$$\phi_\alpha(\varphi^A, \partial_j \varphi^A, p_i) = p_\alpha - f_\alpha(\varphi^A, \partial_j \varphi^A, p_i), \quad (2.102)$$

onde

$$f_\alpha = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha} \right|_{\dot{\varphi}^i = v^i(\varphi^A, \partial_j \varphi^A, p_i, \dot{\varphi}^\alpha)}. \quad (2.103)$$

Escrevemos $H_0 = \int d^3x \mathcal{H}_0$ e $H = \int d^3x \mathcal{H}$ para a Hamiltoniana e Hamiltoniana completa, onde as densidades \mathcal{H}_0 e \mathcal{H} são dadas por,

$$\mathcal{H}_0 = (p_A \dot{\varphi}^A - \mathcal{L}) \Big|_{\dot{\varphi}^i = v^i(\varphi^A, \partial_j \varphi^A, p_i, \dot{\varphi}^\alpha), p_\alpha = f_\alpha(\varphi^A, \partial_j \varphi^A, p_i)} \quad (2.104)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + v^\alpha \phi_\alpha. \quad (2.105)$$

Os parêntesis de Poisson são definidos por,

$$\{A, B\} = \int d^3x \left[\frac{\delta A(x_1)}{\delta \varphi^A(x)} \frac{\delta B(x_2)}{\delta p_A(x)} - \frac{\delta A(x_1)}{\delta p_A(x)} \frac{\delta B(x_2)}{\delta \varphi^A(x)} \right]. \quad (2.106)$$

A e B são funções definidas no espaço de fase estendido dos campos φ^A , p_A e v^α e são tomados no mesmo instante de tempo. Vínculos de etapas superiores podem aparecer na formulação impondo a condição de consistência,

$$0 = \{\phi^\alpha(x_1), H\} = \int d^3x \left[\frac{\delta \phi_\alpha(x_1)}{\delta \varphi^A(x)} \frac{\delta H}{\delta p_A(x)} - \frac{\delta \phi_\alpha(x_1)}{\delta p_A(x)} \frac{\delta H}{\delta \varphi^A(x)} \right]. \quad (2.107)$$

Temos então o sistema de equações de movimento e vínculos,

$$\dot{\varphi}^A = \{\varphi^A, H\}, \quad \dot{p}_A = \{p_A, H\}; \quad (2.108)$$

$$\{G_I\} = \{\phi_\alpha, T_a\}. \quad (2.109)$$

Vínculos primários foram denotados ϕ_α e vínculos de estágios superiores T_a . $\{G_I\}$ denota o sistema completo de vínculos.

Fizemos questão de deixar clara a dependência tanto da Hamiltoniana quanto dos vínculos

das derivadas espaciais dos campos. Para finalizar esta Seção, vejamos com alguns exemplos quais as sutilezas aparecem com a presença das derivadas espaciais, que não estavam presentes no formalismo apresentado para um sistema mecânico discreto.

1. Eletromagnetismo

Como já mencionamos anteriormente, o Eletromagnetismo, descrito por,

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\dot{A}_i - \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right], \quad (2.110)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, apresenta os seguintes vínculos no formalismo Hamiltoniano,

$$p_0 = 0, \quad (2.111)$$

$$\partial_i p_i = 0. \quad (2.112)$$

Quando tratamos sistemas com graus de liberdade finitos, um vínculo tinha a forma $\Phi(q, p) = 0$. Sendo Φ uma função boa o suficiente, podemos usar o teorema da aplicação implícita para obter uma das variáveis em função das demais, digamos, \tilde{q} ,

$$\Phi(q, p) = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = f(q^a, p_b), \quad (2.113)$$

para alguns índices a e b . Desta maneira, podemos esquecer sobre a equação de movimento,

$$\dot{\tilde{q}} = \{\tilde{q}, H\}, \quad (2.114)$$

pois a dinâmica de \tilde{q} já foi determinada por (2.113). A situação para uma teoria de campos singular não permite fazer essas mesmas considerações justamente pela presença de derivadas espaciais dos campos. Consideremos o exemplo do Eletromagnetismo. Observe que $\partial_i p_i = 0$ não é uma equação algébrica e sim uma equação diferencial parcial. Não podemos, em princípio, isolar uma das variáveis em função das demais. Logo, a eliminação de graus de liberdade espúrios não pode ser feita diretamente como em (2.113).

2. Modelo Sigma não linear

Mostraremos com um exemplo simples que se seguirmos a prescrição dada até agora para o método de Dirac, então obteremos uma cadeia infinita de vínculos. Para evitar este problema, que também está relacionado com a presença de derivadas espaciais, precisaremos ainda adicionar uma hipótese na prescrição. Vale lembrar que o número de vínculos para sistemas mecânicos é, obrigatoriamente, finito já que temos um número finito de graus de

liberdade [20]. Seja o modelo de Sigma não linear descrito por,

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a)^2 - 2\partial_\mu e \partial^\mu \phi^a \phi^a + \lambda ((\phi^a)^2 - 1) \right]. \quad (2.115)$$

Como veremos em detalhes na Seção 3.1, a Hamiltoniana correspondente é,

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} p^2 - \frac{(2\phi p + p_e)^2}{8\phi^2} + \frac{1}{2} (\partial_i \phi^a)^2 - 2\partial_i e \partial^i \phi^a \phi^a + \right. \\ \left. -\lambda(\phi^2 - 1) + \nu p_\lambda \right], \quad (2.116)$$

onde usamos a notação $\phi^a \phi^a \equiv \phi^2$, p_a são os momentos conjugados a ϕ^a , p_e a e e p_λ a λ . O modelo apresenta os seguintes vínculos, até terceira etapa,

$$G_1 = p_\lambda, \quad (2.117)$$

$$G_2 = \phi^2 - 1, \quad (2.118)$$

$$G_3 = p_e. \quad (2.119)$$

De acordo com o método de Dirac que descrevemos, o próximo passo seria submeter G_3 à condição de consistência $\dot{G}_3 = 0$. Obteríamos, se existisse, um vínculo de quarta etapa ou multiplicador de Lagrange e assim sucessivamente. Temos então,

$$\dot{G}_3 = \{G_3, H\} = -\partial^i \partial_i G_2 \equiv G_4, \quad (2.120)$$

$$\dot{G}_4 = -\partial^i \partial_i \dot{G}_2 = -\partial^i \partial_i \{G_2, H\} = \partial^i \partial_i G_3 \equiv G_5, \quad (2.121)$$

$$\dot{G}_5 = \partial^i \partial_i \dot{G}_3 = -(\partial^i \partial_i)^2 G_2 \equiv G_6, \quad (2.122)$$

$$\dot{G}_6 = -(\partial^i \partial_i)^2 \dot{G}_2 = (\partial^i \partial_i)^2 G_3 \equiv G_7, \quad (2.123)$$

$$\dot{G}_7 = (\partial^i \partial_i)^2 \dot{G}_3 = -(\partial^i \partial_i)^3 G_2 \equiv G_8, \quad (2.124)$$

$$\dot{G}_8 = -(\partial^i \partial_i)^3 \dot{G}_2 = (\partial^i \partial_i)^3 G_3 \equiv G_9, \quad (2.125)$$

e assim por diante. Podemos então escrever as fórmulas de recorrência,

$$G_n = -(\partial^i \partial_i)^{\frac{n}{2}-1} G_2; \quad n \in \{4, 6, 8, 10, \dots\}, \quad (2.126)$$

$$G_n = (\partial^i \partial_i)^{\frac{n-1}{2}-1} G_3; \quad n \in \{5, 7, 9, 11, \dots\}. \quad (2.127)$$

A primeira impressão é que temos uma cadeia infinita de vínculos. E este problema novamente está relacionado com a presença de derivadas espaciais dos campos. Com as fórmulas acima fica claro que o que estamos chamando de vínculo para $n \geq 4$ nada mais é do que derivadas espaciais (produto de Laplacianos) atuando nos vínculos G_2 e G_3 . Parece então sugestivo e natural postular que a derivada espacial de um vínculo não é um vínculo já que são consequências de expressões já obtidas. Observe contudo que esta

hipótese adicional não estava presente no método de Dirac.

3. Toy model

Vamos mostrar agora um exemplo aparentemente simples que a separação de vínculos em classes para teorias de campo não é imediata como no caso de sistemas mecânicos discretos [36]. Seja o modelo descrito por,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\varphi'^2 + \xi\varphi^2, \quad (2.128)$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$, $\xi = \xi(x, t)$, $\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ e $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Passando para o formalismo Hamiltoniano, temos os momentos e vínculo primário,

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}; \quad p_\xi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = 0. \quad (2.129)$$

A Hamiltoniana é dada por,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p_\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2 - \xi\varphi^2 + \nu p_\xi, \quad (2.130)$$

onde ν é o multiplicador para o vínculo primário p_ξ . As equações de movimento são,

$$\dot{\varphi} = p_\varphi, \quad \dot{p}_\varphi = \varphi'' + 2\xi\varphi, \quad (2.131)$$

$$\dot{\xi} = \nu, \quad p_\xi = 0. \quad (2.132)$$

Agora preservamos no tempo os vínculos primários e de estágios superiores,

$$\dot{p}_\xi = 0 \Rightarrow G_2 = \varphi^2 = 0, \quad (2.133)$$

$$(\varphi^2)\dot{=} = 0 \Rightarrow G_3 = \varphi p_\varphi = 0, \quad (2.134)$$

$$(\varphi p_\varphi)\dot{=} = 0 \Rightarrow G_4 = p_\varphi^2 + \varphi\varphi'' + 2\xi\varphi^2 = 0, \quad (2.135)$$

$$(p_\varphi^2 + \varphi\varphi'')\dot{=} = 0 \Rightarrow G_5 = 3p_\varphi\varphi'' + \varphi p_\varphi'' = 0, \quad (2.136)$$

$$(3p_\varphi\varphi'' + \varphi p_\varphi'')\dot{=} = 0 \Rightarrow G_6 = 3(\varphi'')^2 + 6\xi\varphi\varphi'' + 4p_\varphi p_\varphi'' + \varphi\varphi'''' + 2\varphi(\xi\varphi)'' = 0. \quad (2.137)$$

Finalmente, a preservação no tempo de G_6 fornece,

$$10\varphi'' p_\varphi'' + 6\nu\varphi\varphi'' + 6\xi p_\varphi\varphi'' + 14\xi\varphi p_\varphi'' + 5p_\varphi\varphi'''' + \varphi p_\varphi'''' + 10p_\varphi(\xi\varphi)'' + 2\varphi(\nu\varphi + \xi p_\varphi)'' = 0. \quad (2.138)$$

Notemos primeiramente que esta última equação não é um vínculo pois contém o multiplicador ν . Por outro lado, não podemos dizer que obtivemos ν pois (2.138) é na verdade

uma equação diferencial de segunda ordem em v (o último termo é proporcional a v''). Vimos anteriormente que os vínculos são separados em primeira e segunda classes, de acordo com a obtenção dos multiplicadores de Lagrange em função dos q 's e p 's. Logo, em teoria de campos, esta separação não é tão direta quanto no caso discreto. Em particular, em sistemas com infinitos graus de liberdade os vínculos podem ainda ser separados em próprios e impróprios [35, 36, 12] mas não discutiremos este ponto aqui. Na Seção 3.1, vamos tratar teorias de campo em que não há ambiguidade na separação dos vínculos em classe, incluindo por exemplo, o Eletromagnetismo e Yang-Mills (em ambos os casos os vínculos são de primeira classe e estão relacionados com a simetria local dos modelos). Uma discussão do modelo descrito por (2.128) mas com $\xi = -m^2$ pode ser vista em [12]. O autor usa a *front form* para mostrar que \mathcal{L} é singular nestas coordenadas e descreve certas peculiaridades também relacionadas com a presença de derivadas espaciais nos vínculos, sua separação em classes e a obtenção dos multiplicadores de Lagrange.

Com estes três últimos exemplos finalizamos esta Seção. No próximo Capítulo aplicaremos o método de Dirac e todo o formalismo desenvolvido até aqui em vários exemplos distintos.

3 APLICAÇÕES DO MÉTODO DE DIRAC EM DIFERENTES CONTEXTOS

Como já mencionamos, o método de Dirac é uma poderosa ferramenta para análise de sistemas singulares. O objetivo deste Capítulo é aplicar o método e o formalismo apresentado até agora em diferentes áreas, reunindo os trabalhos centrais que compõem esta tese.

3.1 MÉTODO DA LAGRANGIANA ESTENDIDA PARA TEORIAS DE CAMPO

Esta Seção será baseada no trabalho [5]. Apresentaremos o formalismo da Lagrangiana estendida [21, 22] para busca de simetrias locais de sistemas mecânicos discretos e então o método será generalizado para teorias de campo. Como aplicação buscaremos as simetrias locais do Eletromagnetismo, Yang-Mills e modelo Sigma não linear.

3.1.1 Introdução

Em teorias de campo com invariância local, o número de variáveis utilizadas na descrição é maior que o número de graus de liberdade físicos. É importante manter todas as variáveis usadas para garantir, por exemplo, covariância de Lorentz. Por outro lado, é necessário caracterizar, de uma forma ou de outra, o setor físico de uma dada teoria. Isto pode ser feito através das simetrias locais: entre todas as variáveis, as físicas são aquelas invariantes sob a ação das simetrias locais. Assim, o conhecimento das simetrias de calibre em muitos casos é crucial na análise do conteúdo físico de uma teoria, como discutido em vários pontos deste trabalho.

Como já discutimos anteriormente, uma Lagrangiana com invariância local apresenta vínculos (de primeira classe) no formalismo Hamiltoniano. Assim, um problema interessante sob investigação por vários grupos [35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52] é a formulação de um procedimento relativamente simples e prático para a restauração das simetrias a partir dos vínculos conhecidos. No formalismo Hamiltoniano, o problema foi resolvido para o caso de um sistema mecânico com vínculos de primeira classe ao longo da seguinte linha [37]. A ação Hamiltoniana inicial (que, por construção contém apenas os vínculos primá-

rios) pode ser substituída pela ação Hamiltoniana estendida, com todos os vínculos de ordem superior adicionados à ação com seus multiplicadores de Lagrange. As formulações são equivalentes [20]. As simetrias locais da ação Hamiltoniana estendida foram encontrados de forma fechada [28, 37]. Além disso, na ausência de vínculos de segunda classe, as simetrias locais da ação Hamiltoniana inicial podem ser restauradas de forma algébrica [28, 37]. Buscar as simetrias locais da ação Lagrangiana inicial representa uma outra questão. Para sistemas mecânicos com vínculos de primeira e de segunda classes, uma maneira possível para resolver o problema foi desenvolvido nos trabalhos [21, 22]. Dada uma Lagrangiana singular L , a teoria pode ser reformulada em termos de uma Lagrangiana estendida, \tilde{L} , equivalente à L . Devido à estrutura especial de \tilde{L} , suas simetrias de gauge podem ser completamente obtidas. Todos os vínculos de primeira classe de L vêm a ser os geradores das simetrias de \tilde{L} . A Hamiltoniana estendida da teoria inicial vem a ser a Hamiltoniana para a Lagrangiana estendida [22]. Para uma teoria com vínculos de primeira classe, também é possível encontrar as simetrias da Lagrangiana inicial L [21, 22, 28, 37]. O objetivo deste Capítulo é discutir o método descrito acima para o caso de uma teoria do campo, mostrando explicitamente as diferenças que surgem quando passamos de um sistema mecânico discreto para uma teoria de campo, e aplicá-lo para modelos particulares.

Esta Seção será dividida da seguinte forma. Começamos revisando o método de obtenção de simetrias locais para modelos mecânicos singulares. Generalizaremos então o método para modelos de campo. O método é ilustrado com os exemplos do Eletromagnetismo, campo de Yang-Mills e modelo Sigma não linear. Encerramos o Capítulo com as conclusões.

3.1.2 Busca de simetrias locais - Método da Lagrangiana Estendida

Revisaremos agora o método de obtenção das simetrias locais de um sistema mecânico singular [21, 22]. Isto é feito deformando a Lagrangiana inicial de tal forma que todas as suas simetrias possam ser facilmente encontradas. Como será mostrado, todos os vínculos de primeira classe da Lagrangiana inicial acabam por ser os geradores das simetrias locais da Lagrangiana deformada. As simetrias da Lagrangiana inicial são também encontradas. A discussão aqui será breve pois os detalhes dos cálculos podem ser vistos em [32].

3.1.3 Construção da Lagrangiana e Hamiltoniana estendidas

Partindo de uma Lagrangiana singular $L(q^A, \dot{q}^A)$, aplicamos o método de Dirac já descrito, obtendo uma Hamiltoniana H_0 e uma Hamiltoniana completa H . O sistema de vínculos é dado por $\{G_I\} = \{\phi_\alpha, T_a\}$, onde ϕ_α são os vínculos primários e denotamos T_a todos os vínculos de estágios superiores. Vamos supor que todos os vínculos são de primeira classe. Neste caso, eles

obedecem à algebra

$$\{G_I, G_J\} = c_{IJ}^K G_K, \quad (3.1)$$

$$\{G_I, H_0\} = b_I^J G_J, \quad (3.2)$$

onde c_{IJ}^K e b_I^J são funções de q^A e p_B . Suponhamos também que o procedimento pare no estágio N . Isto é equivalente à existência de simetrias locais para L da forma [20, 28, 37, 43],

$$\delta q^A = \varepsilon R_0^A + \dot{\varepsilon} R_1^A + \dots + \frac{d^{N-1} \varepsilon}{d\tau^{N-1}} R_N^A. \quad (3.3)$$

Observamos que esta transformação tem uma forma bastante complicada. Vamos tentar construir um modelo, equivalente ao inicial de forma que a estrutura da simetria seja mais simples.

Construímos a seguinte função definida no espaço de fase parametrizado por q^A , \tilde{p}_A , s^a , π_a , v^α , v^a ,

$$\tilde{H}(q^A, \tilde{p}_A, s^a, \pi_a, v^\alpha, v^a) = \tilde{H}_0(q^A, \tilde{p}_j, s^a) + v^\alpha \phi_\alpha(q^A, \tilde{p}_B) + v^a \pi_a, \quad (3.4)$$

onde,

$$\tilde{H}_0 = H_0(q^A, \tilde{p}_j) + s^a T_a(q^A, \tilde{p}_j). \quad (3.5)$$

As funções ϕ_α , H_0 e T_a foram tomadas da função inicial.

Afirmamos que,

- a) \tilde{H} é a Hamiltoniana completa para uma Lagrangiana $\tilde{L}(q^A, \dot{q}^A, s^a)$, que ainda vamos determinar;
- b) \tilde{H}_0 é a Hamiltoniana para \tilde{L} ;
- c) $\phi_\alpha = 0$, $\pi_a = 0$ são os vínculos primários (π_a são os momentos conjugados às variáveis s^a);
- d) Finalmente, L e \tilde{L} são equivalentes.

Para mostrar estes fatos, começamos escrevendo a seguinte equação de movimento,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{p}_i} - v^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tilde{p}_i} + s^a \frac{\partial T_a}{\partial \tilde{p}_i}. \quad (3.6)$$

Esta equação pode ser invertida em relação a \tilde{p}_i numa vizinhança do ponto $s^a = 0$, para detalhes,

veja [21]. Vamos denotar a solução por,

$$\tilde{p}_i = \omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a). \quad (3.7)$$

Agora, no espaço q^A, s^a definimos,

$$\tilde{L}(q^A, \dot{q}^A, s^a) = \left[\omega_i \dot{q}^i + f_\alpha(q^A, \omega_j) \dot{q}^\alpha - H_0(q^A, \omega_j) - s^a T_a(q^A, \omega_j) \right] \Big|_{\omega_i(q, \dot{q}, s)}. \quad (3.8)$$

Na definição acima, usamos a notação,

$$\omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a) \Big|_{v^\alpha \rightarrow \dot{q}^\alpha} \equiv \omega_i(q, \dot{q}, s). \quad (3.9)$$

Se supormos que \tilde{L} é alguma Lagrangiana singular, então um cálculo direto nos mostra que \tilde{H}_0 e \tilde{H} são as Hamiltoniana e Hamiltoniana completa correspondentes, respectivamente. O método de Dirac aplicado a \tilde{H} mostra que todos os vínculos de estágio superiores da teoria inicial são agora, no máximo, secundários. Isto implica, em particular, que a simetria local de \tilde{L} é de primeira ordem, apresentando uma estrutura bem mais simples quando comparada à simetria de ordem $N - 1$ da formulação inicial (veja a equação (3.3)). Se fixarmos os calibres $s^a = 0$ para os vínculos $\pi_a = 0$, então o setor (s^a, π_a) desaparece da formulação estendida. Assim retornamos à formulação inicial, mostrando equivalência entre as formulações L e \tilde{L} .

3.1.4 Restaurando as simetrias locais

Antes de obtermos as simetrias dos modelos inicial e estendido, vale ressaltar que definimos uma simetria módulo um termo de derivada total, isto é, uma transformação da Lagrangiana é uma simetria quando $\delta L = \frac{dF}{d\tau}$, para alguma função F . Partimos da formulação Hamiltoniana estendida, passamos pela Lagrangiana estendida e finalmente chegamos à formulação inicial.

Começamos então com a ação Hamiltoniana,

$$S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau (\tilde{p}_A \dot{q}^A + \pi_a \dot{s}^a - \tilde{H}). \quad (3.10)$$

De acordo com a conjectura de Dirac [1], os vínculos de primeira classe deveriam gerar as transformações de calibre (foi exatamente isto que mostramos quando discutimos a interpretação para teorias singulares com vínculos de primeira classe no Capítulo 2). Assim, consideramos as transformações

$$\delta_I q^A = \varepsilon^I \{q^A, G_I\}, \quad (3.11)$$

$$\delta_I \tilde{p}_A = \varepsilon^I \{ \tilde{p}_A, G_I \}, \quad (3.12)$$

onde $\varepsilon^I = \varepsilon^I(\tau)$ são funções arbitrárias e I pode assumir qualquer valor α ou a . Omitindo termos de derivada total, é possível mostrar que estas transformações implicam que $\delta S_{\tilde{H}\tilde{L}}$ é proporcional a ϕ_α, T_a . Portanto, é possível encontrar transformações apropriadas para v^α, s^a que deixam $S_{\tilde{H}\tilde{L}}$ invariante. De fato um cálculo direto mostra que as transformações abaixo,

$$\begin{aligned} \delta_I q^A &= \varepsilon^I \{ q^A, G_I \}, & \delta_I \tilde{p}_A &= \varepsilon^I \{ \tilde{p}_A, G_I \}, \\ \delta_I s^a &= \dot{\varepsilon}^a \delta_{aI} + \varepsilon^I b_I^a - s^b \varepsilon^I c_{bI}^a - v^\beta \varepsilon^I c_{\beta I}^a, & \delta_I \pi_a &= 0, \\ \delta_I v^\alpha &= \dot{\varepsilon}^\alpha \delta_{\alpha I}, & \delta_I v^a &= (\delta_I s^a). \end{aligned} \quad (3.13)$$

mantem a ação Hamiltoniana invariante [21]. Isto nos motiva a encontrar as simetrias da ação Lagrangiana estendida,

$$S_{\tilde{L}} = \int d\tau \tilde{L}. \quad (3.14)$$

Com efeito, as seguintes variações,

$$\begin{aligned} \delta_I q^A &= \varepsilon^I \{ q^A, G_I \} \Big|_{p \rightarrow \omega(q, \dot{q}, s)}, \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_I q^\alpha &= \varepsilon^\alpha \delta_{\alpha I}, \\ \delta_I q^i &= \varepsilon^I \frac{\partial G_I}{\partial \tilde{p}_i} \Big|_{p \rightarrow \omega(q, \dot{q}, s)}; \end{cases} \\ \delta_I s^a &= \left(\dot{\varepsilon}^a \delta_{aI} + \varepsilon^I b_I^a - s^b \varepsilon^I c_{bI}^a - \dot{q}^\beta \varepsilon^I c_{\beta I}^a \right) \Big|_{p \rightarrow \omega(q, \dot{q}, s)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

representam as simetrias locais da ação. Veja a demonstração detalhada em [21, 32].

Vamos obter agora as simetrias da ação inicial. Para isso, devemos eliminar o setor s^a da formulação estendida de maneira apropriada. Assim, consideramos as combinações das simetrias de \tilde{L} ,

$$\delta \equiv \sum_I \delta_I, \quad (3.16)$$

que obedecem $\delta s^a = 0$ para todos s^a . Usando a propriedade $\tilde{L}(q^A, \dot{q}^A, s^a = 0) = L(q^A, \dot{q}^A)$, então L é invariante sob qualquer transformação,

$$\delta q^A = \sum_I \delta_I q^A \Big|_{s^a=0}, \quad (3.17)$$

que obedeça $\delta s^a \Big|_{s^a=0} = 0$, ou seja,

$$\dot{\varepsilon}^a + \varepsilon^I b_I^a - \dot{q}^\beta c_{\beta I}^a = 0. \quad (3.18)$$

Temos $[a]$ equações para $[\alpha] + [a]$ variáveis ε^I . Quando só estão presentes vínculos de primeira

classe, este sistema pode ser resolvido iterativamente [28, 37], levando a $[\alpha]$ simetrias de L . Este cálculo longo pode ser visto com detalhes em [21, 32]. Na presença de vínculos também de segunda classe, as simetrias de L não podem ser restauradas de acordo com o procedimento discutido. A razão é que o número de equações do sistema (3.18) pode ser maior ou igual ao número de parâmetros ε^a . Veja um exemplo deste tipo em [22].

3.1.5 Simetrias Locais para Teorias de Campo

Vamos discutir o método da Lagrangiana estendida para obtenção de simetrias locais para teorias de campo. O método será conduzido da mesma maneira como descrito anteriormente. As novidades presentes para sistemas com infinitos graus de liberdade serão apontadas.

Começamos com uma Lagrangiana singular $L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^A, \partial_\mu \varphi^A)$. Conduzimos então a hamiltonização do sistema de acordo com o Capítulo 2. Escrevemos a formulação Hamiltoniana estendida e começamos o método de obtenção de simetrias pela equação de movimento,

$$\dot{\varphi}^i = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \tilde{p}_i} - v^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tilde{p}_i} + s^a \frac{\delta T_a}{\delta \tilde{p}_i}. \quad (3.19)$$

Esta equação deveria ser invertida em termos de \tilde{p}_i para construirmos a Lagrangiana estendida. Entretanto, em geral temos uma equação diferencial parcial para \tilde{p}_i . Isto acontece pela presença de derivadas espaciais nos vínculos, como já mencionamos no Capítulo 2. Para evitar este problema, vamos supor que os vínculos sejam, no máximo, lineares nas derivadas espaciais dos momentos. Neste caso, a equação (3.19) pode ser invertida. Vale mencionar que vínculos de forma polinomial nos campos e nos momentos correspondentes não apresentam nenhuma restrição para a inversão de (3.19), veja [21]. Embora restritiva, até onde sabemos, todos os modelos importantes da física que possuem invariância local apresentam esta estrutura particular na formulação Hamiltoniana, isto é, com vínculos lineares nas derivadas espaciais dos momentos. De fato, Eletrodinâmica, campo de Yang-Mills, Modelo Padrão, Cordas e Membranas são deste tipo. Observe que os coeficientes da álgebra de gauge podem agora assumir a forma de operadores diferenciais *e.g.*, $\{G_I, G_J\} \sim \partial_j \partial^j G_K$. Finalmente, os geradores de calibre são,

$$G = \int d^3x \varepsilon^I(x) G_I(x), \quad (3.20)$$

onde a integração é tomada por o todo espaço. Agora conduzimos o método de maneira completamente análoga.

3.1.6 Aplicações

Vamos considerar alguns exemplos específicos do método apresentado para modelos singulares de teorias de campo, incluindo Eletromagnetismo, Yang-Mills e modelo de Sigma não linear.

3.1.7 Simetria local do Eletromagnetismo

Vamos considerar a Lagrangiana do campo eletromagnético,

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\dot{A}_i - \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right], \quad (3.21)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. O vínculo primário e os momentos conjugados são,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = p_0 = 0 \Rightarrow \phi_1 \equiv p_0 = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = p_i = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \Rightarrow \dot{A}_i = p_i + \partial_i A_0. \quad (3.23)$$

A Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana completa H são,

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} p_i^2 + p_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right], \quad (3.24)$$

$$H = H_0 + \int d^3x v^0 p_0, \quad (3.25)$$

onde v^0 é o multiplicador de Lagrange correspondente. O vínculo secundário segue a partir da condição de consistência $0 = \{p_0(x_1), H\}$. Isto leva ao vínculo $T_2 \equiv \partial_i p_i = 0$. Não há vínculos de terceira etapa. A álgebra de gauge é dada por,

$$\{p_0, \partial_i p_i\} = 0, \{p_0, H_0\} = \partial_i p_i, \{\partial_i p_i, H_0\} = 0. \quad (3.26)$$

Se tentássemos usar a conjectura de Dirac ao pé da letra, imediatamente veríamos que os vínculos da teoria não geram diretamente a simetria,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha \quad (3.27)$$

bem conhecida do Eletromagnetismo. De fato, considere as transformações abaixo, geradas por ϕ_1 e T_2 ,

$$\delta_1 A_\mu(x) = \int d^3z \varepsilon_1(z) \{A_\mu(x), p^0(z)\} = \delta_\mu^0 \varepsilon_1(x); \quad (3.28)$$

$$\delta_2 A_\mu(x) = \int d^3z \varepsilon_2(z) \{A_\mu(x), \partial_i p_i(z)\} = -\delta_\mu^i \partial_i \varepsilon_2(x). \quad (3.29)$$

Ou seja, somente $\delta_2 A_j = -\partial_j \varepsilon_2$ tem a forma esperada de (3.27). Desta maneira, de um jeito ou de outro precisamos ajustar os geradores das simetrias para que tenhamos as transformações desejadas. Isto será feito com o formalismo da Lagrangiana estendida.

Escrevemos a Hamiltoniana estendida,

$$\tilde{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \tilde{p}_i^2 + \tilde{p}_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + s^2 \partial_i \tilde{p}_i + v^2 \pi_2 + v^0 \tilde{p}_0 \right]. \quad (3.30)$$

Partindo de,

$$\dot{A}_i = \{A_i, \tilde{H}\} = \tilde{p}_i + \partial_i A_0 - \partial_i s^2 \Rightarrow \tilde{p}_i = \dot{A}_i - \partial_i A_0 + \partial_i s^2, \quad (3.31)$$

encontramos \tilde{L} ,

$$\tilde{L} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\dot{A}_i - \partial_i A_0 + \partial_i s^2)^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right]. \quad (3.32)$$

As simetrias de \tilde{L} são dadas por,

$$\delta_1 : \delta_1 A_i = 0; \delta_1 A_0 = \delta_1 s^2 = \varepsilon^1, \quad (3.33)$$

$$\delta_2 : \delta_2 A_i = \int d^3x \varepsilon^2 \{A_i, \partial_l p_l\} = -\partial_i \varepsilon^2, \quad (3.34)$$

$$\delta_2 A_0 = 0; \delta_2 s^2 = \dot{\varepsilon}^2. \quad (3.35)$$

Podemos obter as simetrias de L , veja (3.17) e (3.18),

$$\delta_1 A_i + \delta_2 A_i = -\partial_i \varepsilon^2, \quad (3.36)$$

$$\delta_1 A_0 + \delta_2 A_0 = \varepsilon^1, \quad (3.37)$$

onde os ε 's obedecem à equação,

$$\dot{\varepsilon}^2 + \varepsilon^1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^1 = -\dot{\varepsilon}^2. \quad (3.38)$$

Definindo $\varepsilon^2 \equiv -\alpha$, obtemos a simetria conhecida do Eletromagnetismo,

$$A_\mu(x^\nu) \rightarrow A'_\mu(x^\nu) = A_\mu(x^\nu) + \partial_\mu \alpha(x^\nu), \quad (3.39)$$

onde $\alpha = \alpha(x^\nu)$ é uma função arbitrária de x^ν .

3.1.8 Simetria local do campo de Yang-Mills

No seu trabalho pioneiro [11], Yang e Mills consideraram a ideia de interagir um conjunto de campos invariante pela ação de um grupo com parâmetros constantes com um novo campo (o campo de gauge). Isto foi feito postulando a invariância do sistema sob a ação do mesmo grupo mas agora os parâmetros passam a ser funções arbitrárias. Isto é na verdade o princípio de gauge, que já discutimos na Introdução. Vamos descrever o campo de Yang-Mills via método de Dirac e obter suas simetrias locais. O modelo é descrito pela seguinte Lagrangiana singular,

$$L = \int d^3x \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad (3.40)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$. L possui simetria global $SU(N)$, o campo A_μ assume valores na álgebra de Lie correspondente com geradores T^a ,

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (3.41)$$

e f^{abc} são as constantes de estrutura,

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c. \quad (3.42)$$

Os vínculos primários e momentos conjugados são,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0^a} = p_0^a = 0 \Rightarrow \phi_1^a = p_0^a = 0, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i^a} = p_i^a = \dot{A}_i^a - \partial_i A_0^a + ig f^{abc} A_0^b A_i^c \Rightarrow \\ \dot{A}_i^a = p_i^a + \partial_i A_0^a - ig f^{abc} A_0^b A_i^c. \end{aligned} \quad (3.44)$$

A Hamiltoniana H_0 e Hamiltoniana completa H são dadas por,

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (p_i^a)^2 + p_i^a \partial_i A_0^a - ig f^{abc} A_0^b A_i^c p_i^a + \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 \right] \quad (3.45)$$

$$H = H_0 + \int d^3x \lambda^a p_0^a, \quad (3.46)$$

onde λ^a são os multiplicadores de Lagrange correspondentes. O vínculos secundários vêm a partir da condição de consistência $0 = \{p_0^a(x_1), H\}$. Obtemos, $T_2^a = \partial_i p_i^a - ig f^{abc} p_i^b A_i^c = 0$. Não

há mais vínculos. A álgebra de gauge é,

$$\{\phi_1^a, \phi_1^b\} = \{\phi_1^a, T_2^b\} = 0, \quad (3.47)$$

$$\{T_2^a(x_1), T_2^b(x_2)\} = -igf^{abc}T_2^c(x_1)\delta(x_1 - x_2), \quad (3.48)$$

$$\{\phi_1^a, H_0\} = T_2^a, \quad (3.49)$$

$$\{T_2^a, H_0\} = igA_0^b f^{bac}T_2^c. \quad (3.50)$$

Já estamos aptos a escrever a Hamiltoniana estendida, que toma a forma,

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int d^3x & \left[\frac{1}{2}(\tilde{p}_i^a)^2 + \tilde{p}_i^a \partial_i A_0^a - igf^{abc}A_0^b A_i^c \tilde{p}_i^a + \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 + \right. \\ & \left. (s^2)^a (\partial_i p_i^a - igf^{abc} p_i^b A_i^c) + (v^2)^a \pi_2^a + v^a \tilde{p}_0^a \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Partindo de,

$$\begin{aligned} \dot{A}_i^a = \{A_i^a, H\} = & \tilde{p}_i^a + \partial_i A_0^a - igf^{abc}A_0^b A_i^c + \\ & -\partial_i (s^2)^a - igf^{bac}A_i^c (s^2)^b \end{aligned} \quad (3.52)$$

encontramos,

$$\tilde{p}_i^a = \dot{A}_i^a - \partial_i (A_0^a - (s^2)^a) + igf^{abc}(A_0^b - (s^2)^b)A_i^c. \quad (3.53)$$

Assim, escrevemos \tilde{L} ,

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \int d^3x & \left\{ \frac{1}{2}(\dot{A}_i^a - \partial_i (A_0^a - (s^2)^a) + igf^{abc}(A_0^b - (s^2)^b)A_i^c)^2 + \right. \\ & \left. - \frac{1}{4}(F_{ij}^a)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

As simetrias de \tilde{L} são dadas por,

$$\delta_1 : \delta_1 A_i^a = 0; \delta_1 A_0^a = (\varepsilon^1)^a; \delta_1 (s^2)^a = (\varepsilon^1)^a; \quad (3.55)$$

$$\delta_2 : \delta_2 A_i^a = -\partial_i (\varepsilon^2)^a - igf^{abc}(\varepsilon^2)^b A_i^c; \delta_2 A_0^a = 0; \delta_2 (s^2)^a = (\dot{\varepsilon}^2)^a. \quad (3.56)$$

Podemos reconstruir as simetrias de L ,

$$\delta_1 A_i^a + \delta_2 A_i^a = -\partial_i (\varepsilon^2)^a - igf^{abc}(\varepsilon^2)^b A_i^c, \quad (3.57)$$

$$\delta_1 A_0^a + \delta_2 A_0^a = (\varepsilon^1)^a, \quad (3.58)$$

onde os ε 's obedecem,

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}^2)^b + (\varepsilon^1)^b + igA_0^a f^{abc}(\varepsilon^2)^c = 0 \Rightarrow \\ (\varepsilon^1)^b = -\partial_0 (\varepsilon^2)^b - igf^{bca}(\varepsilon^2)^c A_0^a. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Definindo $(\varepsilon^2)^a \equiv -\xi^a$, obtemos o resultado esperado,

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu^a + D_\mu^{ac} \xi^c, \quad (3.60)$$

onde $D_\mu^{ac} = \delta^{ac} \partial_\mu - ig f^{acb} A_\mu^b$ é a derivada covariante.

3.1.9 Simetrias locais do modelo Sigma não linear

No trabalho [45], é discutido um método de conversão de vínculos de segunda classe em primeira classe baseado em transformações que envolvem derivadas das variáveis no espaço de configurações. Vamos aqui considerar uma versão de um modelo Sigma não linear apresentado em [45]. O modelo é útil para os nossos propósitos já que, após a conversão, só estão presentes vínculos de primeira classe. Assim, vamos buscar as simetrias locais da ação,

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a)^2 - 2\partial_\mu e \partial^\mu \phi^a \phi^a + \lambda ((\phi^a)^2 - 1) \right]. \quad (3.61)$$

Os vínculos primários e momentos conjugados são,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^a} = p_a = \dot{\phi}^a - 2\dot{e} \phi^a; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}} = p_e = -2\dot{\phi}^a \phi^a; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = p_\lambda = 0. \quad (3.62)$$

Podemos encontrar as seguintes velocidades,

$$\dot{e} = -\frac{1}{4\phi^2} (2\phi p + p_e); \quad \dot{\phi}^a = p_a - \frac{\phi^a}{2\phi^2} (2\phi p + p_e). \quad (3.63)$$

Estamos usando a notação $\phi^a \phi^a = \phi^2$. A Hamiltoniana H_0 e Hamiltoniana completa H são dadas por,

$$H_0 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} p^2 - \frac{(2\phi p + p_e)^2}{8\phi^2} + \frac{1}{2} (\partial_i \phi^a)^2 + \right. \\ \left. - 2\partial_i e \partial^i \phi^a \phi^a - \lambda (\phi^2 - 1) \right]; \quad (3.64)$$

$$H = H_0 + \int d^3x \nu p_\lambda, \quad (3.65)$$

onde ν é o multiplicador de Lagrange correspondente. Os vínculos secundários seguem a partir da condição de consistência $0 = \{p_\lambda(x_1), H\}$. Encontramos $G_2 = \phi^2 - 1 = 0$. Ainda encontramos um vínculo de terceira etapa: $0 = \{G_2(x_1), H\} = -p_e$. $G_3 = p_e = 0$.

Se definirmos $\{G_I\} = \{G_1 = p_\lambda, G_2 = \phi^2 - 1, G_3 = p_e\}$, então a álgebra de gauge é,

$$\{G_I, G_J\} = 0 \Rightarrow c_{IJ}^K = 0 \forall I, J, K; \quad (3.66)$$

$$\{G_1, H_0\} = G_2 \Rightarrow b_1^2 = 1, b_1^1 = b_1^3 = 0; \quad (3.67)$$

$$\{G_2, H_0\} = -G_3 \Rightarrow b_2^3 = -1, b_2^1 = b_2^2 = 0; \quad (3.68)$$

$$\{G_3, H_0\} = -\partial^i \partial_i G_2 \Rightarrow b_3^2 = -\partial^i \partial_i, b_3^1 = b_3^3 = 0. \quad (3.69)$$

Como já mencionamos antes, expressões da forma $\partial_i G_2, \partial^i \partial_i G_2$, etc são consequências de vínculos já obtidos. Eles não implicam em simplificação das equações dinâmicas. Isto nos levou a adotar o seguinte ponto: derivadas espaciais dos vínculos não são novos vínculos. Assim, o procedimento para no terceiro estágio. Observe que neste caso temos um operador diferencial como coeficiente da álgebra.

A Hamiltoniana estendida tem a forma,

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \tilde{p}^2 - \frac{(2\phi \tilde{p} + \tilde{p}_e)^2}{8\phi^2} + \frac{1}{2} (\partial_i \phi^a)^2 - 2\partial_i e \partial^i \phi^a \phi^a + \right. \\ \left. -\lambda(\phi^2 - 1) + s^2(\phi^2 - 1) + s^3 \tilde{p}_e + v \tilde{p}_\lambda + v^2 \pi_2 + v^3 \pi_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Partindo de,

$$\dot{\phi}^a = \{\phi^a, \tilde{H}\} = \tilde{p}^a - \frac{2\phi \tilde{p} + \tilde{p}_e}{2\phi^2} \phi^a \quad (3.71)$$

$$\dot{e} = \{e, \tilde{H}\} = -\frac{2\phi \tilde{p} + \tilde{p}_e}{4\phi^2} + s^3, \quad (3.72)$$

encontramos,

$$\tilde{p}_a = \dot{\phi}^a - 2\phi^a (\dot{e} - s^3), \quad (3.73)$$

$$\tilde{p}_e = -2\phi \dot{\phi}. \quad (3.74)$$

Logo, obtemos \tilde{L} ,

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a)^2 - 2\phi \dot{\phi} (\dot{e} - s^3) + 2\partial_i e \partial^i \phi^a \phi^a + \right. \\ \left. + (\lambda - s^2)(\phi^2 - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

As simetrias de \tilde{L} são dadas por,

$$\delta_1 : \delta_1 \phi^a = 0; \delta_1 \lambda = \varepsilon^1; \delta_1 e = 0; \delta_1 s^2 = \varepsilon^1; \delta_1 s^3 = 0. \quad (3.76)$$

$$\delta_2 : \delta_2 \phi^a = 0; \delta_2 \lambda = 0; \delta_2 e = 0; \delta_2 s^2 = \dot{\varepsilon}^2; \delta_2 s^3 = -\varepsilon^2. \quad (3.77)$$

$$\delta_3 : \delta_3 \phi^a = 0; \delta_3 \lambda = 0; \delta_3 e = \varepsilon^3; \delta_3 s^2 = b_3^2 \varepsilon^3 = -\partial_i \partial_i \varepsilon^3; \delta_3 s^3 = \dot{\varepsilon}^3. \quad (3.78)$$

Podemos então obter as simetrias de L ,

$$\delta_1 \phi^a + \delta_2 \phi^a + \delta_3 \phi^a = 0, \quad (3.79)$$

$$\delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda + \delta_3 \lambda = \varepsilon^1, \quad (3.80)$$

$$\delta_1 e + \delta_2 e + \delta_3 e = \varepsilon^3, \quad (3.81)$$

onde os ε 's obedecem,

$$\dot{\varepsilon}^2 - \partial_i \partial_i \varepsilon^3 + \varepsilon^1 = 0, \quad (3.82)$$

$$\dot{\varepsilon}^3 - \varepsilon^2 = 0. \quad (3.83)$$

Definindo $\varepsilon^3 \equiv -\varepsilon$, obtemos a seguinte simetria local,

$$\delta \phi^a = 0; \delta \lambda = \partial_\mu \partial^\mu \varepsilon; \delta e = -\varepsilon. \quad (3.84)$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(x)$ é uma função arbitrária de x^μ .

3.1.10 Resumo dos resultados

Nesta Seção, apresentamos uma generalização do método da Lagrangiana estendida para obtenção de simetrias locais para teorias de campo. Como ilustrado nos exemplos, conseguimos um procedimento sistemático de obtenção de simetrias de calibre para uma Lagrangiana singular L com vínculos de primeira classe. A teoria inicial é deformada de maneira especial, de forma que todas as simetrias da Lagrangiana deformada \tilde{L} podem ser encontradas facilmente. As simetrias de L são também obtidas. De acordo com o esquema descrito, todos os vínculos de primeira classe da teoria inicial são os geradores das simetrias da teoria deformada.

3.2 RELATIVIDADE ESPECIAL DUPLA DE MAGUEIJO-SMOLIN A PARTIR DE UM MODELO SINGULAR EM 5D

Vamos mostrar como é possível construir o modelo de Magueijo-Smolín de Relatividade Especial Dupla [25] partindo de uma Lagrangiana singular definida num espaço 5-dimensional. A relação de dispersão deformada de energia-momento é obtida a partir da fixação de um calibre para um dos vínculos do formalismo, já a regra de transformação não linear dos momentos é obtida impondo covariância do calibre escolhido. Neste caso, quebramos a invariância local do modelo, fixando o parâmetro da simetria. Nos basearemos aqui no trabalho [8].

3.2.1 Introdução

Várias propostas de Relatividade Especial Dupla tem recebido atenção nos últimos anos [23, 24, 25, 26, 27, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80]. Eles foram formulados com base na realização não linear do grupo de Lorentz no espaço 4-dimensional de energia-momento $\{p^\mu\}$ de uma partícula [25]. Isto é feito introduzindo, em adição à velocidade da luz, mais uma escala independente do observador, ζ , associada com a escala de Planck. Por sua vez, a realização não linear implica numa relação de dispersão de energia-momento deformada,

$$\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2c^2 + f(\zeta, p^0). \quad (3.85)$$

É suposto que no limite $\zeta \rightarrow 0$, recuperamos a relação padrão $p_\mu p^\mu = -m^2c^2$. Aqui $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

A ideia de incluir outra escala invariante no espaço-tempo, além de c , é bastante antiga. Snyder construiu um espaço-tempo com invariância de Lorentz e que admitia um comprimento invariante, em um dos primeiros esforços para evitar problemas de divergência [81].¹

Vamos listar algumas motivações para tal modificação da Relatividade Especial.

a) Motivação Física. Há evidências de uma estrutura discreta de espaço-tempo a partir de cálculos não perturbativos ligados com gravitação quântica [83]. Há também indicações de possíveis correções da forma (3.85), assim acredita-se que a Relatividade Dupla seja uma teoria que descreva possíveis efeitos de gravitação quântica, mesmo com campo gravitacional desprezível [84, 85].

b) Motivação Observacional. A relação de dispersão deformada implica correções para o limite GZK [86], assim a Relatividade Dupla poderia ser relevante para estudar possíveis anomalias com raios cósmicos de altas energias [67, 87]. Além disso, dados observacionais de explosões de raios gama podem ser usados para possíveis correções para $p_\mu p^\mu = -m^2c^2$, veja [77].

c) Motivação Experimental. Em um trabalho recente [78] foi sugerido que experimentos poderiam detectar correções para a relação de dispersão de energia-momento e $f \neq 0$ em (3.85) poderia ser interpretado como um efeito de gravitação quântica.

¹Uma outra maneira de introduzir uma escala (de comprimento) independente de observador foi sugerida em [82], numa tentativa de construir a gravitação quântica. A ideia é a seguinte: o movimento de uma partícula num campo gravitacional externo é independente da sua massa. Se tentarmos quantizar a teoria, a massa é incluída no formalismo pois escrevemos, $[x^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j$. Definindo um operador $v_i = p_i/m$, chegamos a $[x^i, v_j] = i\hbar/m$. Para eliminar m , introduz-se uma escala de comprimento λ_0 , além de c , como $\hbar/m = c\lambda_0$.

d) Motivação Matemática. Para relacionar a realização do grupo de Lorentz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (3.86)$$

com transformação entre observadores inerciais, em particular com boosts, introduzimos o parâmetro c : $x^0 = ct$, que possui propriedades especiais na teoria resultante: (i) as transformações são degeneradas para $V \rightarrow c$; (ii) o limite $c \rightarrow \infty$ reproduz a relatividade de Galileo; (iii) a velocidade $v = c$ é a escala independente de observador da teoria. Assim, podemos nos perguntar se não é possível generalizar a Teoria da Relatividade Especial para que admita mais uma escala dimensional com propriedades similares a c .

Nesta Seção, vamos discutir a proposta inicial de Magueijo-Smolín (MS) [25], que afirma que todos os observadores inerciais devem concordar em usar a seguinte relação de dispersão de energia-momento deformada para uma partícula

$$p^2 = -m^2 c^2 (1 + \zeta p^0)^2. \quad (3.87)$$

A relação acima é invariante sob a ação da seguinte transformação não linear:

$$p'^{\mu} = \frac{\Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}}{1 + \zeta (p^0 - \Lambda^0_{\nu} p^{\nu})}. \quad (3.88)$$

Contudo, a lista de regras cinemáticas do modelo não é completa, levantando um debate na literatura sobre o *status* da Relatividade Especial Dupla como teoria [27]. Um dos problemas está ligado com uma definição de momento total de um sistema de partículas. Devido à transformação não linear, a soma ordinária de momentos não se transforma como a soma dos momentos após a transformação, ou seja, se escrevermos (3.88) simbolicamente como $p' = T p$ e se temos um sistema com de partículas com momentos enumerados pelo índice a , então $\sum_a p'_a = \sum_a T p_a \neq T \sum_a p_a$. No trabalho [26] este problema foi resolvido: observamos que a cinemática de MS pode ser relacionada com uma realização linear do grupo de Lorentz num espaço de posições 5-dimensional. Desta maneira, foi construído um exemplo de Relatividade Dupla livre do problema do momento total (veja também [88] para uma sugestão de como construir a lei de composição dos momentos). Diferentes leis de composição covariantes na literatura levaram a alguns efeitos intrigantes, como por exemplo,

a) *Soccer ball problem* [79]. A energia de Planck E_P é assumida como um limite superior de energias e a Relatividade Dupla degenera quando $p^0 \rightarrow E_P$, similarmente ao que acontece quando $V \rightarrow c$ na Relatividade Especial. O problema é que E_P realmente limita partículas elementares mas esse valor de energia pode facilmente ser atingido por corpos macroscópicos;

b) *Rainbow geometry* [72]. A métrica agora passa a ser dependente da energia da partícula,

difícultando a interpretação da teoria no espaço de configurações.

Para entender estas propriedades controversas, é desejável ter em mãos um modelo de partícula relativística formulado no espaço de configuração, que leve às relações (3.87) e (3.88) no espaço dos momentos. Apesar de grande esforço [70, 73, 74, 75, 76], ainda não temos um modelo satisfatório. Assim, o objetivo desta Seção é construir um modelo que possa ser usado como um laboratório para simulações da cinemática da Relatividade Especial Dupla.

Realizações não lineares do grupo de Lorentz no espaço das variáveis (físicas) dinâmicas frequentemente aparecem após a fixação de um calibre numa teoria com realização linear do grupo de Lorentz no espaço de configurações inicial. Adotando este ponto de vista, vamos estudar uma Lagrangiana singular num espaço de posições 5-dimensional x^A , $A = (\mu, 4)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, com realização linear do grupo $SO(1, 4)$ (em [85], o autor sugere que de fato este é grupo de simetrias para construirmos a Relatividade Dupla). Para garantir o número certo de graus de liberdade, precisamos de dois vínculos de primeira classe. As únicas combinações quadráticas de variáveis que são $SO(1, 4)$ -invariantes são p^2 , xp , x^2 . Vamos rejeitar x^2 já que ele leva a um espaço-tempo curvo. (Existem algumas propostas considerando o espaço de de Sitter como a arena para teorias de Relatividade Especial Dupla [68, 69, 70, 80]). Assim, olhamos para um modelo com vínculos $p^2 = 0$, $xp = 0$. Eles correspondem a uma partícula onde o quadri-momento não está fixo e sem invariância de translação no espaço 5-dimensional. Vamos mostrar que a relação de dispersão de Magueijo-Smolin aparece pela fixação de um calibre para um dos vínculos e a lei de transformação não linear dos momentos é ditada pela covariância do calibre escolhido.

3.2.2 Realização dinâmica do modelo com invariância pelo grupo $SO(1, 4)$

Agora motivaremos a construção do modelo de Magueijo-Smolin partindo de uma Lagrangiana em 5 dimensões. Discutiremos o setor físico da teoria e sua formulação Hamiltoniana, de acordo com o método de Dirac para sistemas vinculados.

O movimento de uma partícula com o ponto de vista da Relatividade Especial pode ser descrito partindo de uma ação em 3 dimensões

$$S = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)^2}, \quad (3.89)$$

que implica as seguintes equações Hamiltonianas de movimento

$$\frac{dx^i}{dx^0} = \frac{p^i}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}}, \quad \frac{dp^i}{dx^0} = 0. \quad (3.90)$$

O problema aqui é que as transformações de Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ agem de maneira não linear nas variáveis físicas $x^i(x^0)$. Para melhorar este quadro, passamos de uma formulação tridimensional para uma quadridimensional introduzindo a representação paramétrica $x^i(\tau)$, $x^0(\tau)$ da trajetória da partícula $x^i(x^0)$. Usando a relação

$$\frac{dx^i}{dx^0} = \frac{\dot{x}^i(\tau)}{\dot{x}^0(\tau)}, \quad (3.91)$$

a ação (3.89) toma a forma

$$-mc \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}. \quad (3.92)$$

Como já vimos anteriormente, ela é invariante por reparametrizações da trajetória, $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$. Por sua vez, a invariância de reparametrizações implica no vínculo $(p^{\mu})^2 = -m^2 c^2$, que é precisamente a relação de dispersão de energia-momento. A presença do vínculo é evidente se introduzirmos uma variável auxiliar $e(\tau)$ e reescrever a ação de forma equivalente

$$S' = \int d\tau \left(\frac{1}{2e} (\dot{x}^{\mu})^2 - \frac{e}{2} m^2 c^2 \right). \quad (3.93)$$

A equação de movimento para e implica na relação de dispersão de energia-momento correspondente no formalismo Lagrangiano $\frac{\delta S}{\delta e} \sim \dot{x}^2 + e^2 m^2 c^2 = 0$. Além do vínculo, a ação S' implica nas equações de movimento

$$\dot{x}^{\mu} = e p^{\mu}, \quad \dot{p}^{\mu} = 0. \quad (3.94)$$

A variável auxiliar e não pode ser determinada por essas equações e entra na solução $x^{\mu}(\tau)$ como uma função arbitrária. A ambiguidade reflete a liberdade que temos na escolha da parametrização da trajetória da partícula. Por construção, a ambiguidade é removida excluindo o parâmetro arbitrário τ das respostas finais. Equivalentemente, podemos impor um calibre para excluir a arbitrariedade da formulação singular. O calibre mais conveniente é $e = \frac{1}{m}$, $x^0 = \frac{1}{m} p^0 \tau$, já que ele nos leva diretamente às equações (3.90) para as variáveis físicas.

Em resumo, para evitar a realização não linear do grupo de Lorentz na Relatividade Especial, elevamos a dimensão do espaço de 3 para 4. No caso da Relatividade Especial Dupla, as transformações de Lorentz são não lineares num espaço-tempo com dimensão 4. Portanto, em analogia com o que acabamos de descrever, partimos de uma teoria com realização linear do grupo de Lorentz num espaço com dimensão 5. Consideremos a ação

$$S = \int d\tau \frac{m}{2} \eta_{AB} D x^A D x^B, \quad (3.95)$$

onde $\eta_{AB} = (-1, +1, +1, +1, +1)$, $D x^A$ é a "derivada covariante" $D x^A \equiv \dot{x}^A - g x^A$, e $g(\tau)$ é uma

variável auxiliar. A ação é invariante globalmente sob ação do grupo $SO(1,4)$

$$x^A \rightarrow x'^A = \Lambda^A_B x^B. \quad (3.96)$$

Temos também invariância local com o parâmetro $\gamma(\tau)$,

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau'(\tau); \quad \frac{d\tau'}{d\tau} = \gamma^2(\tau), \\ x^A(\tau) &\rightarrow x'^A(\tau') = \gamma(\tau)x^A(\tau), \\ g(\tau) &\rightarrow g'(\tau') = \frac{\dot{\gamma}(\tau)}{\gamma^3(\tau)} + \frac{g(\tau)}{\gamma^2(\tau)}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

A lei de transformação para g implica na regra de transformação simples para a derivada covariante $Dx^A \rightarrow \frac{1}{\gamma}Dx^A$. Logo g tem o papel de campo de calibre na simetria. Como já sabemos, a presença de simetria local significa que o modelo apresenta vínculos no formalismo Hamiltoniano correspondente. Vamos então aplicar o método de Dirac para analisar a ação (3.95). Começamos com os momentos

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A} = m(\dot{x}_A - g x_A), \quad p_g = \frac{\partial L}{\partial \dot{g}} = 0. \quad (3.98)$$

$p_g = 0$ representa o vínculo primário. A Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana completa H são dadas pelas expressões

$$H_0 = \frac{1}{2m} p_A^2 + g p_A x^A, \quad H = H_0 + \lambda p_g, \quad (3.99)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange para o vínculo primário. Os parêntesis de Poisson são definidos de maneira usual e as equações de movimento são dadas por

$$\dot{x}^A = \frac{p^A}{m} + g x^A, \quad \dot{p}^A = -g p^A, \quad \dot{g} = \lambda. \quad (3.100)$$

Preservando no tempo o vínculo primário, $\dot{p}_g = 0$, encontramos um vínculo secundário

$$p_A x^A = 0. \quad (3.101)$$

Por sua vez, ele implica no vínculo de terceira etapa

$$p_A^2 = 0. \quad (3.102)$$

O método de Dirac para neste estágio. Todos os vínculos são de primeira classe, já que obedecem à álgebra

$$\{p_g, x^A p_A\} = \{p_g, p_A^2\} = 0, \quad (3.103)$$

$$\{x^A p_A, p_A^2\} = 2p_A^2. \quad (3.104)$$

Como tratamos de uma teoria vinculada, nossa primeira tarefa é especificar o setor das variáveis físicas [37]. O espaço de fase inicial é parametrizado por 12 variáveis x^A , p^B , g , p_g . Levando em conta que para cada vínculo de primeira classe podemos eliminar duas variáveis, o número de variáveis físicas no espaço de fase é $12 - 2 \times 3 = 6$, como deveria ser para uma partícula descrita pela Relatividade Especial Dupla. Observe que o multiplicador de Lagrange λ não foi determinado durante o método de Dirac, e entra como uma função arbitrária nas soluções das equações de movimento. De acordo com a teoria geral [1, 20, 29], variáveis com dinâmica ambígua não representam observáveis. Para o nosso caso, todas as variáveis iniciais são ambíguas (observe que elas se transformam sob ação da simetria local do modelo, ou seja, não são invariantes de calibre).

Para construir as variáveis físicas, notamos que as quantidades $\pi^\mu = \frac{p^\mu}{p^4}$ obedecem a $\dot{\pi}^\mu = 0$, $\dot{y}^\mu = \frac{e}{m}(\pi^\mu - y^\mu)$, onde $e \equiv \frac{p^4}{x^4}$. Como estas equações assemelham-se com as de uma partícula relativística sem spin, a ambiguidade devido a e tem interpretação bem conhecida, sendo relacionada com a invariância de reparametrizações da teoria. Desta maneira, assumimos que $y^\mu(\tau)$ representam as equações paramétricas para a trajetória $y^i(t)$. As variáveis $y^i(t)$ com invariância de reparametrizações possuem evolução determinística dada por $\frac{dy^i}{dt} = c \frac{\pi^i - y^i}{\pi^0 - y^0}$.

Podemos ainda olhar para as combinações no espaço de fase que sejam invariantes de calibre. A propriedade notável e bem conhecida no formalismo Hamiltoniano é que existem coordenadas no espaço de fase cuja Hamiltoniana anula-se [29]. Nestas coordenadas as trajetórias são linhas retas. Para o caso, as variáveis com dinâmica determinística e com essa propriedade são π^μ , $\tilde{x}^\mu \equiv y^\mu - \pi^\mu$.

3.2.3 Calibre para Relatividade Especial Dupla

Vamos reproduzir a cinemática da proposta de Magueijo-Smolín de Relatividade Especial Dupla. Primeiro, obteremos a relação de dispersão (3.87) impondo um calibre particular para o modelo. Geralmente, as simetrias local e global sobrevivem separadamente após a fixação do calibre. Mas podemos olhar pela sua combinação que não estraga o calibre escolhido. Seguindo esta linha, chegaremos à transformação dos momentos (3.88).

De acordo com Dirac, cada vínculo de primeira classe deve ser acompanhado por alguma condição de calibre da forma $h(x, p) = 0$, onde a função h deve ser escolhida de forma que o conjunto formado pelos vínculos e calibres seja de segunda classe. Os vínculos e calibres podem então ser usados para representar parte das variáveis do espaço de fase através de outras. As equações de movimento para as variáveis restantes são obtidas substituindo vínculos e calibres nas equações já obtidas.

Escolhemos o gauge $g = 0$ para o vínculo $p_g = 0$. Este calibre fixa a simetria local, como deveria ser,

$$g' = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^3} + \frac{g}{\gamma^2} \Big|_{g=0} \Rightarrow \dot{\gamma} = 0. \quad (3.105)$$

Ficamos então com dois vínculos. Para obter a relação de dispersão deformada, impomos o calibre $p^4 = mch(\zeta, p^0)$ para o calibre $p_{Ax^A} = 0$. Usando esta expressão no vínculo (3.102), obtemos

$$p_\mu p^\mu = -m^2 c^2 h^2(\zeta, p^0). \quad (3.106)$$

Escrevemos a função h dependente dos argumentos ζ e p^0 mas a escolha do calibre é livre.

Agora nos voltamos para a transformação de Lorentz induzida para os momentos. Sob as simetrias (3.96) e (3.97), o momento conjugado $p^A = mDx^A$ transforma-se como

$$p^A \rightarrow p'^A = \frac{1}{\gamma} \Lambda^A_B p^B. \quad (3.107)$$

Para o subgrupo $SO(1, 3)$ ²

$$\Lambda^A_B = \begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

temos

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = \frac{1}{\gamma} \Lambda^\mu_\nu p^\nu, \quad p^4 \rightarrow p'^4 = \frac{1}{\gamma} \Lambda^4_A p^A = \frac{1}{\gamma} p^4. \quad (3.109)$$

Agora, como acontece frequentemente em teorias de calibre, a simetria global da formulação com o calibre já fixado é uma combinação da simetria global inicial e da simetria com o parâmetro γ especialmente escolhido. Como o calibre $p^4 = mch(\zeta, p^0)$ não é preservado pelas transformações (3.96) e (3.97) separadamente, somos forçados a buscar uma combinação das duas, (3.109), que preserve o calibre. Impondo covariância do gauge

$$p^4 = mch(\zeta, p^0) \Leftrightarrow p'^4 = mch(\zeta, p'^0), \quad (3.110)$$

obtemos a equação que determina γ

$$h(\zeta, p^0) = \gamma h(\zeta, \frac{1}{\gamma} \Lambda^0_\mu p^\mu). \quad (3.111)$$

²Discutiremos somente as transformações de Lorentz induzidas. As transformações restantes são boosts na quinta dimensão. Na versão com o calibre já fixado, eles produzem transformações não lineares que tem o papel de translações quadri-dimensionais.

No calibre $g = 0$, temos $p_A = \text{const.}$ nas equações de movimento, assim a equação (3.111) é consistente com (3.105). A equação (3.109) com este γ fornece a realização não linear do grupo de Lorentz que deixa invariante a relação de dispersão deformada (3.106).

Vamos especificar tudo isto para o modelo de Magueijo-Smolín. Se fixarmos o calibre $p^4 = mc(1 + \zeta p^0)$, então o vínculo $p_A^2 = 0$ toma a forma da relação de dispersão de Magueijo-Smolín (3.87). Impondo a covariância do calibre, a equação (3.111) para determinar γ fica

$$1 + \zeta p^0 = \gamma \left(1 + \zeta \frac{1}{\gamma} \Lambda^0_{\mu} p^{\mu} \right). \quad (3.112)$$

Logo, γ é dado por

$$\gamma = 1 + \zeta (p^0 - \Lambda^0_{\mu} p^{\mu}). \quad (3.113)$$

Usando este γ na equação (3.109), vemos que os momentos p^{μ} transformam-se de acordo com a equação (3.88).

3.2.4 Resumo dos resultados

Construímos um exemplo de modelo de partícula relativística (3.95) num espaço-tempo 5-dimensional plano com realização linear do grupo de simetrias globais $SO(1,4)$ e sem invariância de translação 5-dimensional. Devido à simetria local que a ação apresenta, o número de graus de liberdade físicos do modelo é o mesmo que os de uma partícula na Teoria da Relatividade Especial. Aplicamos o modelo para simular a proposta cinemática de Magueijo-Smolín de Relatividade Especial Dupla. Isto foi feito fixando um calibre apropriado para o vínculo (3.101), que levou à relação de dispersão deformada de Magueijo-Smolín dada em (3.87). A transformação não linear dos momentos (3.88) foi encontrada quando forçamos a covariância do calibre escolhido.

Terminaremos esta parte com um comentário sobre a lei de transformação para as coordenadas espaciais. Usando o parâmetro γ obtido na equação (3.113), a transformação das coordenadas do espaço de configuração podem ser encontradas a partir de (3.96) e (3.97)

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = [1 + \zeta (p^0 - \Lambda^0_{\mu} p^{\mu})] \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (3.114)$$

$$x^4 \rightarrow x'^4 = [1 + \zeta (p^0 - \Lambda^0_{\mu} p^{\mu})] x^4. \quad (3.115)$$

A componente x^4 é afetada somente por um fator de escala. As coordenadas x^{μ} transformam-se como normalmente acontece nas teorias de Relatividade Especial Dupla: temos uma lei de

transformação que é dependente da energia e momento da partícula [85]. Estas transformações foram obtidas no trabalho [71] pelo argumento que campos livres definidos no espaço da Relatividade Dupla (3.87) deveriam ter soluções de onda plana na forma $\phi \sim Ae^{-ip_\mu x^\mu}$, assim a contração $p_\mu x^\mu$ deveria permanecer linear em qualquer sistema de referência. Observamos que isto acontece no nosso modelo

$$\eta_{\mu\nu} p'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\gamma} \Lambda^\mu_\alpha p^\alpha \right) (\gamma \Lambda^\nu_\beta x^\beta) = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta. \quad (3.116)$$

A equação (3.114) leva também a uma métrica no espaço de configuração dependente da energia [72]. Veja as tentativas de interpretação de p^0 neste caso em [71, 72].

3.3 INVARIÂNCIA POR REPARAMETRIZAÇÕES NA MEC. CLÁSSICA E A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Vamos basear esta Seção no trabalho [6]. Apresentaremos a formulação da Mecânica Clássica invariante por reparametrizações. Discutiremos então a quantização canônica nesta formulação, onde tempo e espaço são quantizados. Isto nos levará precisamente à equação de Schrödinger. Como exemplo, abordaremos a Mecânica Quântica de uma partícula relativística.

3.3.1 Introdução

A descrição de uma partícula sob o ponto de vista da Mecânica Quântica pode ser feita de várias maneiras. Por exemplo, Feynman derivou a equação de Schrödinger a partir da representação integral de Dirac da função de onda Ψ [53]. Outra possível construção é baseada em argumentos físicos: a difração de elétrons produz um padrão de interferência similar ao padrão produzido pela luz e sugere a existência de uma função de onda, governada por uma equação de onda, que é exatamente a equação de Schrödinger [54, 55]. Podemos ainda aplicar o procedimento da quantização canônica [55, 56] a um sistema mecânico clássico com ação

$$S = \int dt \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - V(\mathbf{x}, t) \right], \quad (3.117)$$

onde $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$. Para quantizar o sistema, nós o reescrevemos no formalismo Hamiltoniano em termos das variáveis do espaço de fase x^i, p^i e parêntesis de Poisson $\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}$. A quantidade básica é a Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}^2/2m + V$. De acordo com o paradigma da quantização canônica, associamos com as variáveis do espaço de fase operadores com comutadores que se assemelham ao parêntesis de Poisson $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}$ (aqui \hat{x}^i é o operador

associado a x^i)

$$x^i \rightarrow \hat{x}^i = x^i, \quad p^i \rightarrow \hat{p}^i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.118)$$

e postulamos a equação de Schrödinger para a função de onda $\Psi(t, \mathbf{x})$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad (3.119)$$

com $\hat{H} = H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, t)$.

Todos os sistemas mecânicos podem ser escritos de forma que apresentem invariância de reparametrizações. Para isso, introduzimos a representação paramétrica da trajetória $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, digamos $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, $t = t(\tau)$, onde τ é um parâmetro arbitrário ao longo da trajetória. Denotamos $da/d\tau \equiv \dot{a}$ e escrevemos as igualdades $dt = i d\tau$ e $d\mathbf{x}/dt = \dot{\mathbf{x}}/i$. Se usarmos estas relações em (3.117), obtemos a ação invariante por reparametrizações $\tau \rightarrow \tau' = f(\tau)$

$$\tilde{S} = \int d\tau \tilde{L}, \quad \tilde{L} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2i} - iV(\mathbf{x}, t). \quad (3.120)$$

A equação (3.120) é equivalente à (3.117) pois as equações Lagrangianas para as funções $\mathbf{x}(\tau)$, $t(\tau)$, que seguem de (3.120), implicam as equações corretas para $\mathbf{x}(t)$. De fato, as equações de movimento para (3.120) fornecem,

$$\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2i^2} + V = \text{const.} \quad (3.121)$$

$$\frac{m}{i} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{i} \right) \cdot = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.122)$$

Usando a igualdade $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{i}$ e excluindo τ , chegamos aos resultados: a) a primeira equação acima é a conservação da energia e b) a segunda equação é a própria equação de movimento oriunda de (3.117),

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.123)$$

Observe que chegamos à equação (3.121) e ao resultado a) acima a partir do cálculo de $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}$, que é o próprio momento conjugado à variável $t = t(\tau)$. Por esta razão, energia e tempo são ditas variáveis conjugadas [57].

Enfatizamos que, por construção, o parâmetro τ e as funções $\mathbf{x}(\tau)$, $t(\tau)$ não possuem interpretação física direta. Como exemplo, considere a partícula livre, $V = 0$. Então (3.120) implica as equações, $(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{i}) \cdot = 0$, $(\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{i^2}) \cdot = 0$. Devido à invariância de reparametrizações, a solução geral à

essas equações apresenta, além das constantes de integração \mathbf{v} e \mathbf{x}_0 , uma função arbitrária $g(\tau)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}g(\tau) + \mathbf{x}_0, \quad t = g(\tau). \quad (3.124)$$

A equação (3.124), embora determine uma linha reta nos espaços \mathbf{x} e (t, \mathbf{x}) , não especifica a evolução particular ao longo da linha. Somente $\mathbf{x}(t)$ possui interpretação física. A partir de (3.124) obtemos $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0$. Como veremos logo abaixo, a formulação Hamiltoniana de (3.120) apresenta um vínculo de primeira classe, que está associado à invariância de reparametrizações. Esse exemplo simples da partícula livre fornece ainda uma interpretação para teorias com invariância local (ou com vínculos de primeira classe): a teoria fornece as trajetórias acessíveis mas não a evolução sobre as trajetórias.

Chegamos então ao objetivo principal deste trabalho. Vamos reformular as regras de quantização na formulação com invariância de reparametrizações. As razões para essa formulação da mecânica quântica estão abaixo.

1. A forma de (3.118) sugere que somente a coordenada espacial está submetida à quantização (veja, por exemplo, [58] e [59]). Além do mais, em [59], o autor afirma que é *surprisingly complicated* promover tempo a um operador. Vamos mostrar que a quantização da coordenada temporal não representa nenhum problema especial na formulação com invariância de reparametrizações. Ou seja, o fato que tempo não é quantizado pode ser visto como um artefato da formulação utilizada e não representa nenhuma propriedade intrínseca do paradigma da quantização.
2. Na formulação com invariância de reparametrizações, a quantidade que se anula para qualquer trajetória acessível para a partícula aparece naturalmente. O correspondente quântico desta quantidade é a equação de Schrödinger. Assim a formulação com invariância de reparametrizações implica num argumento simples e construtivo para postular a equação de Schrödinger.
3. Sistemas relativísticos são usualmente formulados com invariância de reparametrizações [20, 28, 29, 60, 61], assim a familiaridade com a formulação da mecânica clássica com invariância de reparametrizações é útil para entendimento, por exemplo, da relatividade especial.

3.3.2 Formulação com invariância de reparametrizações da Mec. Quântica

A ação (3.120) é definida no espaço de configurações parametrizado pelas coordenadas x^i, t . Para obter a formulação Hamiltoniana, introduzimos o espaço de fase parametrizado por x^i, p^i ,

t, p_t , com parêntesis de Poisson definido por

$$\{x^i, p^j\} = \delta^{ij} \quad (3.125)$$

$$\{t, p_t\} = 1. \quad (3.126)$$

De acordo com a prescrição padrão [9], as variáveis $x^i(\tau), t(\tau)$ satisfazem às equações de Euler-Lagrange e a dinâmica dos momentos conjugados é especificado por

$$p^i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}^i}{i} \quad (3.127)$$

$$p_t = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = -\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2i^2} - V. \quad (3.128)$$

Estas equações implicam no seguinte vínculo

$$\tilde{H} \equiv p_t + \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V = 0, \quad (3.129)$$

que é satisfeito para qualquer solução das equações de movimento no espaço de fase. Este vínculo reaparece quando tentamos construir a Hamiltoniana da ação (3.120)

$$p^i \dot{x}^i + p_t \dot{t} - L = i \left[p_t + \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V \right], \quad (3.130)$$

que se anula para qualquer trajetória acessível da partícula.

A invariância de reparametrizações de (3.120) é equivalente a dizer que a teoria possui invariância local [62]. Logo, o formalismo Hamiltoniano correspondente apresentou um vínculo, como esperávamos.

Para quantizar a formulação com invariância de reparametrizações, substituímos as variáveis do espaço de fase por operadores que assemelham-se com os parêntesis (3.125) e (3.126)

$$t \rightarrow \hat{t} = t, \quad p_t \rightarrow \hat{p}_t = -i\hbar\partial_t, \quad (3.131)$$

$$x^i \rightarrow \hat{x}^i = x^i, \quad p^i \rightarrow \hat{p}^i = -i\hbar\partial_i. \quad (3.132)$$

Como a função \tilde{H} anula-se no espaço de fase na teoria clássica, esperamos que o operador correspondente na Mecânica Quântica tenha a propriedade $\hat{H}\Psi = 0$. Se levarmos em conta (3.130) e (3.131), esta propriedade torna-se

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi. \quad (3.133)$$

Chegamos então à equação de Schrödinger.

Observe que na formulação padrão (3.117) os comutadores $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}$, combinados

com a relação

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2i}[\hat{A}, \hat{B}]\right)^2, \quad (3.134)$$

para o desvio padrão de dois operadores \hat{A} e \hat{B} (veja uma demonstração em [56]) implicam em $(\Delta x^i)(\Delta p^j) \geq \hbar \delta^{ij}/2$. Ou seja, a relação de incerteza para posição-momento surge como um resultado algébrico. Em contraste, a relação de incerteza para energia-tempo tem diferentes origens e interpretações [63, 64, 65].

Na formulação com invariância de reparametrizações, além de $[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i\hbar \delta^{ij}$, temos também o comutador $[\hat{t}, \hat{p}_t] = i\hbar$. Assim, nos perguntamos se a relação de incerteza de energia-tempo pode ser derivada da mesma maneira, como consequência algébrica de (3.126). Infelizmente, o parêntesis (3.126) no mesmo pé de igualdade com (3.125) não significa uma completa simetrização das variáveis de posição e tempo na formulação da Mecânica Quântica. Esta assimetria possui várias origens, incluindo,

- a) O produto escalar implica integração das variáveis de posição, mantendo o tempo fixo;
- b) O operador \hat{p}_t é hermitiano somente no subespaço de soluções da equação de Schrödinger, veja a equação (3.133);
- c) A variável conjugada para t é p_t e não H .

3.3.3 O caso geral

O procedimento também funciona no caso geral. Considere a seguinte ação

$$S = \int dt L\left(q^A, \frac{dq^B}{dt}, t\right), \quad (3.135)$$

onde $q^A = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, $A, B, C = 1, 2, \dots, 3n$ representam as coordenadas generalizadas do espaço de configuração $3n$ -dimensional de n partículas. Se a ação não é singular, então as equações para os momentos $p_B = \partial L(q, v, t)/\partial v^B$ podem ser resolvidas para $v^A = v^A(q^B, p^C, t)$ e a Hamiltoniana tem a forma

$$H(q^A, p_B, t) = p_A v^A - L(q, v, t). \quad (3.136)$$

A ação com invariância de reparametrizações é

$$\tilde{S} = \int dt \tilde{L} = \int d\tau i L\left(q^A, \frac{\dot{q}^B}{i}, t\right). \quad (3.137)$$

(3.137) leva às seguintes equações para os momentos conjugados

$$p_A = \left. \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v^A} \right|_{v^A \rightarrow \frac{\dot{q}^A}{t}}, \quad (3.138)$$

$$p_t = \left[L(q, v, t) - \frac{\dot{q}^A}{t} \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v^A} \right] \Big|_{v^A \rightarrow \frac{\dot{q}^A}{t}}. \quad (3.139)$$

A solução da equação (3.138) é $\frac{\dot{q}^A}{t} = v^A(q, p, t)$. Usamos essa expressão em (3.139), e obtemos o vínculo $p_t + p_A v^A - L(q, v, t) = 0$, ou, equivalentemente

$$p_t + H = 0. \quad (3.140)$$

Ele é satisfeito para todas as soluções das equações de movimento no espaço de fase. Aqui H é a Hamiltoniana da formulação inicial L . Similarmente ao exemplo prévio, na formulação com invariância de reparametrizações, a Hamiltoniana canônica é proporcional ao vínculo

$$p_A \dot{q}^A + p_t \dot{t} - \tilde{L} = i \left[p_t + p_A v^A - L \right]. \quad (3.141)$$

Para quantizar a formulação com invariância de reparametrizações, substituímos as variáveis do espaço de fase por operadores, $p_t \rightarrow \hat{p}_t = -i\hbar\partial_t$, $p_A \rightarrow \hat{p}_A = -i\hbar\partial_A$, e impomos a equação (3.140) na função de onda, que imediatamente leva à equação de Schrödinger $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$.

3.3.4 Mecânica Quântica de uma partícula relativística

Em termos das coordenadas físicas $\mathbf{x}(t)$, a ação da partícula relativística pode ser expressa por

$$S = -mc \int dt \sqrt{c^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2}, \quad (3.142)$$

onde m é a massa da partícula e c é a velocidade da luz. Introduzimos uma parametrização arbitrária $\mathbf{x}(\tau)$, $t(\tau)$ da trajetória, de maneira que a ação com invariância de reparametrizações assume a forma

$$\tilde{S} = -mc \int d\tau i \sqrt{c^2 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{\dot{t}^2}}. \quad (3.143)$$

Se concordamos em considerar somente parametrizações ajustadas com o "fluxo do tempo"

$$dt/d\tau > 0,$$

então a ação pode ser escrita com invariância relativística manifesta

$$\tilde{S} = -mc \int d\tau \frac{\dot{t}}{|\dot{t}|} \sqrt{(ct)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2} \quad (3.144)$$

$$= -mc \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (3.145)$$

onde usamos a métrica no espaço de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.

Passamos agora ao formalismo Hamiltoniano para (3.143), introduzindo os momentos

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{mc \dot{\mathbf{x}}}{i \sqrt{c^2 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{i^2}}}, \quad (3.146)$$

$$p_t = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = -mc \sqrt{c^2 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{i^2}}. \quad (3.147)$$

A equação (3.146) pode ser usada para expressar $\dot{\mathbf{x}}$ em termos de \mathbf{p} e t como

$$\dot{\mathbf{x}} = i c \mathbf{p} / \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (3.148)$$

Usamos este resultado na equação (3.147) e obtemos o vínculo básico

$$p_t = -c \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (3.149)$$

Como esperado, a Hamiltoniana é proporcional a

$$\tilde{H} = i(p_t + c \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}). \quad (3.150)$$

Quantizando o modelo via o método desenvolvido aqui, chegamos à equação de Schrödinger, que é na verdade a raiz da equação de Klein-Gordon [58]

$$i\hbar \partial_t \Psi = c \sqrt{m^2 c^2 - \hbar^2 \nabla^2} \Psi, \quad (3.151)$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Vamos reescrever a equação (3.151) de forma equivalente

$$\left[i \frac{\partial}{c \partial t} - \sqrt{\mu^2 - \nabla^2} \right] \Psi = 0, \quad (3.152)$$

onde $\mu \equiv mc/\hbar$. Vemos que se expandirmos a raiz quadrada em série de potências com respeito a $1/c^2$ e mantendo somente os dois primeiros termos, a função $\chi \equiv \exp(-imc^2 t/\hbar) \Psi$ satisfaz à equação de Schrödinger não relativística $i\hbar \partial_t \chi = -(\hbar^2/2m) \nabla^2 \chi$.

Encontramos então dois problemas bem conhecidos relacionados à equação (3.152). Ela contém uma raiz quadrada de um operador e não está escrita com invariância relativística ma-

nifesta. Vamos mostrar que ambos os problemas podem ser evitados reformulando a teoria de forma equivalente em termos de um campo escalar real $\phi(x^\mu)$, no lugar da função de onda complexa Ψ .

Consideremos a equação de Klein-Gordon para o campo *real* ϕ com invariância relativística manifesta

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0. \quad (3.153)$$

As equações (3.152) e (3.153) são equivalentes no seguinte sentido. Se ϕ é solução da equação de Klein-Gordon (3.153), então

$$\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2 = -\sqrt{\mu^2 - \nabla^2} \phi - i \frac{\partial}{c \partial t} \phi, \quad (3.154)$$

satisfaz à equação de Schrödinger (3.152). Assim como o potencial vetor \mathbf{A} produz os campos elétricos e magnéticos $\mathbf{E} = -(1/c)\partial_t \mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (no gauge de Coulomb), o campo real ϕ produz as partes real e imaginária da função de onda de acordo com (3.154). Assim, chamamos ϕ de potencial escalar da função de onda [66].

Se Ψ é solução da equação de Schrödinger (3.152), então a função

$$\phi = k(\mathbf{x}) - c \int_0^t d\tau \Psi_2(\tau, \mathbf{x}). \quad (3.155)$$

satisfaz a equação de Klein-Gordon (3.153). Denotamos como

$$k(\mathbf{x}) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \Psi_1(\mathbf{p})}{\sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2}}, \quad (3.156)$$

onde $\Psi_1(\mathbf{p})$ é a transformada de Fourier de $\Psi_1(0, \mathbf{x})$:

$$\Psi_1(0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \Psi_1(\mathbf{p}). \quad (3.157)$$

A função $k(\mathbf{x})$ representa a solução formal para a equação $\sqrt{\mu^2 - \nabla^2} k(\mathbf{x}) = -\Psi_1(0, \mathbf{x})$, onde a última é a parte real da equação (3.152) tomada no instante $t = 0$.

De acordo com a equação (3.154), a densidade de probabilidade pode ser escrita em termos da função de onda

$$\Psi^* \Psi = \left(\frac{\partial}{c \partial t} \phi \right)^2 + \left(\sqrt{\mu^2 - \nabla^2} \phi \right)^2. \quad (3.158)$$

Podemos identificar a densidade de probabilidade com a densidade de energia do campo ϕ . A

equação de movimento (3.153) pode ser obtida da ação

$$S = \int d^4x \left[(\partial_0 \phi)^2 - \left(\sqrt{\mu^2 - \nabla^2} \phi \right)^2 \right], \quad (3.159)$$

assim o lado direito da equação (3.158) é a densidade de energia do campo ϕ .

Em resumo, a mecânica quântica de uma partícula relativística pode ser escrita numa forma com invariância relativística manifesta em termos do potencial para função de onda (3.153).

A interação com o campo eletromagnético pode ser conseguida adicionando o termo

$$S_{int} = \int dt \left[eA_0 + \frac{e}{c} A_i \frac{dx^i}{dt} \right] \quad (3.160)$$

$$= \int d\tau \frac{e}{c} A_\mu \dot{x}^\mu. \quad (3.161)$$

Repetindo a análise prévia, chegamos à equação (3.151), com as substituições

$$\partial_i \rightarrow \partial_i - i(e/\hbar c)A_i, \quad c\partial_t \rightarrow \partial_0 - i(e/\hbar c)A_0.$$

Neste caso não conseguimos formular a teoria com invariância relativística.

3.3.5 Resumo dos resultados

Mostramos nesta Seção que a quantização canônica pode ser reformulada de maneira que tanto a coordenada espacial quanto a temporal são quantizadas. Para isso, trabalhamos com uma ação com invariância de reparametrizações, onde as variáveis x e t são funções de um parâmetro arbitrário ao longo da trajetória. A invariância por reparametrizações implica o vínculo (3.140), que é válido para qualquer trajetória verdadeira da partícula. O operador correspondente na Mecânica Quântica leva à equação de Schrödinger. Desta maneira, conseguimos construir a Mecânica Quântica para uma partícula sem impor a equação de Schrödinger como postulado. Ela aparece naturalmente como um vínculo de primeira classe da teoria, que de acordo com Dirac [1], deve ser imposto sobre o vetor de estado.

Como aplicação para a formulação com invariância de reparametrizações, demonstramos que a equação de Klein-Gordon para o campo escalar real possui interpretação probabilística.

Por fim, este trabalho ainda sugere uma maneira de tratarmos uma partícula com spin. Como vimos, o vínculo (3.140) nos leva à equação de Schrödinger. Se conseguirmos construir uma teoria singular que nos leve ao vínculo

$$p_\mu \Sigma^\mu + mc\hbar = 0, \quad (3.162)$$

então quantizando a teoria de acordo com,

$$p_\mu \rightarrow -i\hbar\partial_\mu; \quad \Sigma^\mu \rightarrow \hbar\Gamma^\mu, \quad (3.163)$$

chegamos à equação de Dirac. Usaremos esta ideia na próxima Seção.

3.4 DESCRIÇÃO DE UMA PARTÍCULA RELATIVÍSTICA COM SPIN USANDO VARIÁVEIS COMUTATIVAS E A EQUAÇÃO DE DIRAC

Trataremos agora uma partícula com spin. Começaremos descrevendo as razões para deformarmos o Hamiltoniano de uma partícula na presença de campo eletromagnético, para que seja levado em conta efeitos de spin, chegando na equação de Pauli. Discutiremos então o caso relativístico, deduzindo a equação de Dirac. Mostraremos que em um certo limite, ela se reduz à equação de Pauli. Levantaremos alguns pontos negativos da equação de Dirac, entre eles,

- a) Um desequilíbrio entre pares de variáveis conjugadas de posição e momento;
- b) A velocidade da partícula no quadro de Heisenberg só pode ser $\pm c$;
- c) E por fim, a solução da equação de movimento para a posição da partícula, que além do movimento retilinear, prevê também um movimento oscilatório nomeado por Schrödinger *Zitterbewegung*.

Estes problemas nos motivarão a construir um modelo semiclássico, que produz a equação de Dirac através da quantização canônica. Conseguiremos contornar os problemas acima a partir da redefinição do operador posição. Infelizmente o modelo não apresenta o vínculo

$$p^2 + m^2c^2 = 0, \quad (3.164)$$

antes da quantização e esperamos que todas as partículas massivas o obedeam. Na sequência apresentaremos então uma generalização deste modelo que também produz a equação de Dirac, além de conter (3.164).

3.4.1 Momento magnético do elétron e a equação de Pauli

Vários experimentos comprovam o spin do elétron, por exemplo, Stern-Gerlach [89], experimentos com linhas atômicas espectrais mostram desdobramentos em outras linhas com frequências próximas, revelando a estrutura fina [90], ou ainda, as propriedades magnéticas de certos materiais [91]. Vamos considerar um efeito particular de desdobramentos de linhas espectrais na presença de campo magnético externo, o efeito Zeeman. Vamos mostrar que uma

dedução teórica clássica do termo de perturbação no Hamiltoniano do átomo leva a resultados incoerentes com a experiência. Consideremos o caso mais simples em que um elétron de massa m e carga $e = -|e|$ numa órbita circular de raio R é colocado na presença de um campo magnético constante \vec{B} . Se o elétron tem uma velocidade angular ω , então seu momento angular orbital é dado por (vamos supor que seu movimento se dê no plano xy , logo o momento angular está na direção z)

$$\vec{L} = m\omega R^2 \hat{k}. \quad (3.165)$$

Esta situação é equivalente a uma espira circular com corrente $I = \frac{e\omega}{2\pi}$ e área $A = \pi R^2$. O momento magnético da espira é definido por

$$\vec{\mu}_o = IA\hat{k} = \frac{e\omega R^2}{2} \hat{k}. \quad (3.166)$$

Juntando as expressões acima podemos escrever

$$\vec{\mu}_o = \frac{e}{2m} \vec{L}, \quad (3.167)$$

onde usamos o índice "o" em $\vec{\mu}_o$ para indicar que associamos o momento magnético ao momento angular orbital do elétron. Do Eletromagnetismo clássico, sabemos que a energia potencial de uma espira num campo \vec{B} é $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. O Hamiltoniano que descreve o átomo na presença do campo é

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (3.168)$$

onde H_0 é o Hamiltoniano sem perturbação e H_{int} corresponde à interação do elétron com o campo magnético

$$H_{int} = -\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}. \quad (3.169)$$

O termo de interação acima podia explicar a separação de certas linhas espectrais mas não correspondia à descrição do desdobramento das linhas de átomos principalmente com um número atômico Z ímpar, que ficou conhecido como efeito Zeeman anômalo [90]. Para explicar este impasse, Uhlenbeck e Goudsmit [92] sugeriram que o elétron girasse, possuindo uma espécie de momento angular intrínseco \vec{S} , que ficou conhecido como spin. Para que o split nas linhas de energia que citamos fosse explicado, foi ainda necessário impor que o fator de proporcionalidade entre momento magnético $\vec{\mu}$ e spin \vec{S} fosse o dobro do que foi dado em (3.167)

$$\vec{\mu}_s = 2 \frac{e}{2m} \vec{S}. \quad (3.170)$$

O fator "2" em (3.170) é conhecido como fator g de Landé. Agora, como vamos escolher \vec{S} ? O experimento de Stern-Gerlach, por exemplo, nos leva naturalmente a descrever o spin com duas componentes, já que o feixe de átomos incidente é desdobrado em outros dois. Foi sugerido ainda que o spin aparece como um momento angular. Sua magnitude pode ser obtida experimentalmente [93] e é dada por $\frac{\hbar}{2}$. Escrevemos então $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, onde

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.171)$$

já que $\vec{\sigma}$ deve obedecer as relações de comutação de um momento angular e juntamente com o fato que os autovalores de S_z devem ser $\pm\frac{\hbar}{2}$ (ou seja, os autovalores de σ_z são ± 1), chegamos a $\sigma_z^2 = 1$. Analogamente para σ_x e σ_y , $\sigma_{x,y}^2 = 1$. Podemos escrever ainda,

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 \sigma_z = \sigma_z \sigma_x^2 \Rightarrow 0 &= \sigma_x^2 \sigma_z - \sigma_z \sigma_x^2 \\ &= \sigma_x(\sigma_x \sigma_z - \sigma_z \sigma_x) + (-\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z)\sigma_x \\ &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Logo, o anticomutador dos σ 's é nulo. Uma possível representação para σ_i são as matrizes de Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, que satisfazem tudo o que pedimos acima. Assim, com $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, o momento magnético fica $\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}$ e o termo de interação em H toma a forma

$$H_{int} = -\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (3.173)$$

Esta interação é exatamente a que aparece na equação de Pauli, que vamos obter em um momento. O Hamiltoniano que descreve a interação de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagnético externo é obtido pelo acoplamento mínimo: fazemos a substituição $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ em H_0 . Para entender este procedimento, precisamos retornar ao formalismo Lagrangiano. A partícula livre relativística pode ser descrita pela ação

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2\tilde{e}} \dot{x}^2 - \tilde{e} \frac{m^2 c^2}{2} \right) = \int d\tau L_0, \quad (3.174)$$

com invariância de reparametrizações $\delta_R x^\mu = \varepsilon \dot{x}^\mu$. A variação da variável \tilde{e} é dada por $\delta \tilde{e} = (\varepsilon \dot{\tilde{e}})$, mas não é importante no momento. Já o Eletromagnetismo é descrito pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2, \quad (3.175)$$

que apresenta a simetria local $\delta_C A_\mu = \partial_\mu \alpha$. O único termo que pode ser adicionado a S que descreva a interação sem quebrar ambas as simetrias é $L_{int} = -e\dot{x}^\mu A_\mu$. Sob reparametrizações,

temos,

$$\delta_R A_\mu = A_\mu(x + \varepsilon \dot{x}) - A_\mu(x) = \varepsilon \partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu = \varepsilon \dot{A}_\mu. \quad (3.176)$$

Assim,

$$\delta_R L_{int} = -e[(\varepsilon \dot{x}^\mu) \cdot \dot{x}^\mu \delta_R A_\mu] = -e(-\varepsilon \dot{x}^\mu \dot{A}_\mu + \varepsilon \dot{x}^\mu \dot{A}_\mu) = 0. \quad (3.177)$$

Por outro lado,

$$\delta_C L_{int} = -e \dot{x}^\mu \partial_\mu \alpha = -(e\alpha). \quad (3.178)$$

Portanto, $(\delta_R + \delta_C)L_{int} = -(e\alpha)$. A Lagrangiana será então dada por $L = L_0 + L_{int}$. Passando ao formalismo Hamiltoniano, se $p_{(0)\mu} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^\mu}$ foi o momento inicial sem interação, teremos agora com a interação $p_\mu = p_{(0)\mu} - eA_\mu$, justificando o acoplamento mínimo. Voltamos à dedução da equação de Pauli [33]. No lugar de fazer a substituição do momento em

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2, \quad (3.179)$$

faremos o acoplamento em

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}), \quad (3.180)$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli. Como elas obedecem

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}). \quad (3.181)$$

segue que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$, logo não há diferença entre as expressões (3.179) e (3.180) na ausência de campo. Fazendo então o acoplamento em (3.180) e usando a identidade (3.181), chegamos a

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + \frac{i}{2m} \vec{\sigma} \cdot [(\vec{p} - e\vec{A}) \times (\vec{p} - e\vec{A})]. \quad (3.182)$$

Lembrando que $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, temos, para uma função arbitrária $\psi(x)$,

$$\begin{aligned} (\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p})\psi &= -i\hbar\nabla \times (\vec{A}\psi) - i\hbar\vec{A} \times \nabla\psi \\ &= -i\hbar\nabla \times \vec{A}\psi. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Como $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$,

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (3.184)$$

Se o campo elétrico for não nulo, basta adicionar o termo $-eA_0$ a H ,

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - eA_0 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (3.185)$$

Finalmente obtemos a equação de Pauli,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - eA_0 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \psi. \quad (3.186)$$

Neste caso, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ é uma função de onda com duas componentes, que chamaremos espinor. (A razão para termos dois graus de liberdade foi discutida anteriormente, quando mencionamos pela primeira vez as matrizes de Pauli). Esta dedução evita, por exemplo, assumir que o fator de Landé é 2. O termo de interação $-\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ aparece naturalmente. No próximo tópico, vamos deduzir a equação de Dirac e mostrar que no limite de baixas energias e campo fraco, ela leva à equação de Pauli e ao fator de Landé 2, que antes foi imposto para descrever corretamente resultados experimentais. Esta foi uma das grandes conquistas da equação de Dirac, ou seja, poderemos interpretá-la como a generalização relativística para a equação de Pauli.

3.4.2 Derivação e triunfo da equação de Dirac

Vamos agora derivar a equação de Dirac seguindo seus próprios passos [93, 94]. A equação foi construída para incluir o spin para partículas relativísticas, que satisfazem a relação de dispersão $p^2 + m^2c^2 = 0$. Ela admite interação com o campo eletromagnético e no limite de campo fraco e baixas energias fornece a equação de Pauli e o fator de Landé correto. Este foi um dos grandes triunfos da equação de Dirac já que ela foi deduzida de maneira independente da equação de Pauli e ainda assim leva à última no limite mencionado.

A suposição inicial de Dirac foi que a equação deveria ser linear em p_0 e como na quantização faremos $p_0 \sim \partial_t$, a equação deveria ser linear em ∂_t . Esta suposição foi baseada no princípio da superposição de estados, que é assumido ainda ser válido. Para entender como a evolução temporal está ligada com um operador linear, consideremos um estado que seja dado pela superposição de outros dois em determinado instante t_0 ,

$$|\varphi(t_0)\rangle = a^1|\psi_1(t_0)\rangle + a^2|\psi_2(t_0)\rangle, \quad (3.187)$$

onde os a 's são alguns coeficientes complexos. É natural esperar que se o sistema não é perturbado, quando $t_0 \rightarrow t$, devemos ter ainda

$$|\varphi(t)\rangle = a^1|\psi_1(t)\rangle + a^2|\psi_2(t)\rangle. \quad (3.188)$$

Se assumirmos que a evolução temporal seja dada por um operador T , então

$$T|\varphi(t_0)\rangle = |\varphi(t)\rangle. \quad (3.189)$$

Com mais detalhes,

$$\begin{aligned} T(a^1|\psi_1(t_0)\rangle + a^2|\psi_2(t_0)\rangle) &= a^1|\psi_1(t)\rangle + a^2|\psi_2(t)\rangle \\ &= a^1T|\psi_1(t_0)\rangle + a^2T|\psi_2(t_0)\rangle. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Logo, T deve ser linear. Voltemos agora à construção da equação de onda relativística. Como queremos que de um jeito ou de outro a equação leve à condição $p^2 + m^2c^2 = 0$, uma sugestão é

$$(p_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2})\psi = 0. \quad (3.191)$$

Interpretamos os p 's como operadores sobre a função de onda $\psi = \psi(x)$. Neste caso, p_0 e \vec{p} aparecem de forma não simétrica na equação (3.191), além de conter a raiz de operadores. Seria desejável que numa teoria relativística eles fossem tratados no mesmo pé de igualdade. Vamos então buscar uma equação linear em p_μ , que facilita por exemplo a construção do acoplamento com o campo eletromagnético e ainda implique na relação de dispersão de energia momento prevista pela Relatividade Especial. Escrevemos então

$$(p_0 + \alpha^i p_i + \beta)\psi = 0 \quad (3.192)$$

e vamos buscar α^i e β independentes dos momentos de forma que esta equação implique na equação de Klein-Gordon

$$(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2c^2)\psi = 0. \quad (3.193)$$

Como não estamos considerando ainda a interação com algum campo externo, os operadores α^i e β não devem depender de x^μ , já que nenhum ponto do espaço-tempo deve ser privilegiado em relação a outro. Estes novos operadores devem descrever um grau de liberdade extra do elétron. Como veremos mais à frente, eles estão ligados com o spin. Aplicando o operador $p_0 - \alpha^j p_j - \beta$ à equação (3.192) encontramos

$$[p_0^2 - \alpha^i \alpha^j p_i p_j - (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) p_i - \beta^2]\psi = 0. \quad (3.194)$$

O segundo termo tem a forma,

$$\begin{aligned} \alpha^i \alpha^j p_i p_j &= (\alpha^1)^2 p_1^2 + (\alpha^2)^2 p_2^2 + (\alpha^3)^2 p_3^2 + (\alpha^1 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^1) p_1 p_2 + \\ &+ (\alpha^1 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^1) p_1 p_3 + (\alpha^2 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^2) p_2 p_3. \end{aligned} \quad (3.195)$$

Assim, para que (3.194) satisfaça $p^2 + m^2c^2 = 0$, vamos pedir que

$$(\alpha^i)^2 = 1, \quad (3.196)$$

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 0, \quad (3.197)$$

$$\alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0, \quad (3.198)$$

$$\beta = mc\alpha^0; (\alpha^0)^2 = 1. \quad (3.199)$$

A álgebra das matrizes $\alpha^\mu = (\alpha^0, \alpha^i)$ fica reduzida a

$$\alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu = 2\delta^{\mu\nu}, \quad (3.200)$$

que é similar à das matrizes de Pauli. Assim, uma realização possível para esta álgebra é,

$$\alpha^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.201)$$

onde 1 é a identidade 2×2 e σ^i são as matrizes de Pauli. Uma razão para usarmos matrizes 4×4 é a seguinte: na equação de Pauli, para uma dada energia p_0 , vimos que a função de onda possuía duas componentes. Como estamos construindo uma teoria que satisfaça a relação $p^2 + m^2c^2 = 0$, p_0 pode ser positivo ou negativo. Assim, os operadores α^μ atuam numa função de onda com 4 componentes, sendo que 2 graus de liberdade de ψ correspondem a $p_0 > 0$ e os outros 2 a $p_0 < 0$. A equação que assumimos ser correta tem a forma

$$(p_0 + \alpha^i p_i + mc\alpha^0)\psi = 0. \quad (3.202)$$

Aplicando α^0 à esquerda e redefinindo,

$$\Gamma^0 = \alpha^0, \quad \Gamma^i = \alpha^0 \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.203)$$

chegamos à forma conhecida da equação de Dirac

$$(\Gamma^\mu p_\mu + mc)\psi = 0, \quad (3.204)$$

ou levando em conta que $p_\mu \rightarrow -i\hbar\partial_\mu$,

$$(i\Gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0. \quad (3.205)$$

As matrizes Γ^μ satisfazem à álgebra

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.206)$$

Vamos listar algumas consequências da equação Dirac (sem demonstração):

a) Invariância sob transformações de Lorentz: fixada a regra de transformação para ψ sob a ação do grupo de Lorentz (representação espinorial de $SO(1, 3)$), a equação (3.204) é covariante [93].

b) Se a equação de Dirac é válida para todo sistema de referência, como mencionamos em a), podemos olhar o sistema que $p_\mu = (mc, 0, 0, 0)$. Usando a representação dos momentos, a equação tem a forma,

$$(\Gamma^\mu p_\mu + mc)\psi(p) = 0 \Rightarrow (\Gamma^0 + 1)\psi(p) = 0 \quad (3.207)$$

Escrevendo,

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.208)$$

onde cada χ possui duas componentes, chegamos à equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \chi_1 = 0. \quad (3.209)$$

Ou seja, no sistema de repouso, só são necessários dois graus de liberdade para descrever o elétron, e não quatro [95].

c) Definindo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \Gamma^0$, ψ em (3.204) pode ser usado para construir o vetor ³ $\bar{\psi} \Gamma^\mu \psi$ [96], que se preserva para soluções da equação de Dirac $\partial_\mu (\bar{\psi} \Gamma^\mu \psi) = 0$. Assim a sua componente zero,

$$\bar{\psi} \Gamma^0 \psi = \psi^\dagger \Gamma^0 \Gamma^0 \psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \sum_{a=1}^4 |\psi_a|^2 \geq 0 \quad (3.210)$$

se preserva no tempo e admite interpretação probabilística.

d) Aplicando $\Gamma^\nu p_\nu$ a (3.204) e usando a própria equação (3.204), chegamos a

$$(\Gamma^\nu \Gamma^\mu p_\nu p_\mu - m^2 c^2) \psi = 0. \quad (3.211)$$

Como $p_\mu p_\nu \sim \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$, os p 's comutam. Assim, somando à equação acima ela mesma

³Chamaremos vetor o objeto V^μ que se transforma como $V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$ sob ação do grupo de Lorentz.

mas fazendo a troca $\mu \leftrightarrow \nu$ encontramos

$$(p^2 + m^2 c^2)\psi = 0, \quad (3.212)$$

devido à álgebra (3.206) das matrizes Γ , ou seja, cada uma das 4 componentes de ψ satisfaz à equação de Klein-Gordon, como desejado.

e) A interação com o campo eletromagnético pode ser feita pelo acoplamento mínimo $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$. Assim, quando ligamos o campo A_μ , a equação de Dirac assume a forma

$$[\Gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) + mc]\psi = 0. \quad (3.213)$$

Para ver qual a o significado das matrizes Γ e mostrarmos que de fato elas estão ligadas com o spin, vamos analisar o limite da equação de Dirac acoplada com o campo eletromagnético mas para baixas energias e campo fraco. Em cada passagem que precisarmos usar algum destes limites, deixaremos claro quais aproximações serão feitas. Consideremos então a equação de Dirac na presença do campo A_μ ,

$$[\Gamma^\mu (p_\mu - eA_\mu) + mc]\psi = 0 \Leftrightarrow (i\Gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0, \quad (3.214)$$

onde fizemos $p_\mu \rightarrow -i\hbar\partial_\mu$ e usamos a notação D_μ para a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{e}{\hbar}A_\mu. \quad (3.215)$$

Aplicamos o operador $(i\Gamma^\nu D_\nu + \frac{mc}{\hbar})$ à equação (3.214), chegando a

$$\left[\Gamma^\mu \Gamma^\nu D_\mu D_\nu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0. \quad (3.216)$$

Escrevemos $\Gamma^\mu \Gamma^\nu$ como a soma de suas partes simétrica e antissimétrica,

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu = \frac{1}{2}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu - \Gamma^\nu \Gamma^\mu). \quad (3.217)$$

Definindo o objeto $\Gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu - \Gamma^\nu \Gamma^\mu)$, temos

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu = -\eta^{\mu\nu} - i\Gamma^{\mu\nu}. \quad (3.218)$$

Retornamos agora com (3.218) em (3.216). Notemos antes que $\Gamma^{\mu\nu}$ é antissimétrico, logo, sua contração com $D_\mu D_\nu$ é reduzido a

$$\Gamma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \Gamma^{\mu\nu} \left(\frac{D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu}{2} + \frac{[D_\mu, D_\nu]}{2} \right) = \frac{1}{2} \Gamma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu], \quad (3.219)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ acima representa o comutador. Assim,

$$\left[-\eta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{i}{2} \Gamma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0. \quad (3.220)$$

Como $[D_\mu, D_\nu] \psi = -i \frac{e}{\hbar} F_{\mu\nu} \psi, \forall \psi$, chegamos finalmente à equação de Klein-Gordon com acoplamento mínimo

$$[\eta^{\mu\nu} (p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) - \frac{e\hbar}{2} \Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + m^2 c^2] \psi = 0. \quad (3.221)$$

Estamos usando a notação usual $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Consideremos o caso particular em que temos um campo magnético $\vec{B} = B_3 \hat{k}$ e $\vec{E} = 0$. Como temos liberdade na escolha do potencial A_μ , fixamos

$$A^\mu = (0, -\frac{B_3 y}{2}, \frac{B_3 x}{2}, 0). \quad (3.222)$$

Assim,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & -B_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.223)$$

E então

$$\frac{e\hbar}{2} \Gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = e\hbar B_3 \Gamma^{12} = \begin{pmatrix} e\hbar \sigma_3 B_3 & 0 \\ 0 & e\hbar \sigma_3 B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e\vec{S} \cdot \vec{B} & 0 \\ 0 & 2e\vec{S} \cdot \vec{B} \end{pmatrix}, \quad (3.224)$$

onde usamos $2\vec{S} = \hbar \vec{\sigma}$. O primeiro termo de (3.221) assume a forma,

$$\eta^{\mu\nu} (p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) = \hbar^2 \partial_0^2 - \hbar^2 \nabla^2 + eB_3 (p_1 y - x p_2) + \frac{B_3^2}{4} (x^2 + y^2), \quad (3.225)$$

onde usamos $p_\mu \rightarrow -i\hbar \partial_\mu$. Se assumirmos que o campo magnético é fraco o suficiente para desprezarmos termos de ordem 2 em (3.225) e reconhecendo o momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L_3 = x p_2 - p_1 y \quad (3.226)$$

chegamos a

$$\eta^{\mu\nu} (p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) \approx \hbar^2 \partial_0^2 - \hbar^2 \nabla^2 - e\vec{L} \cdot \vec{B}. \quad (3.227)$$

Reunindo as expressões acima de volta em (3.221)

$$[\hbar^2 \partial_0^2 - \hbar^2 \nabla^2 - e(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + m^2 c^2] \psi = 0. \quad (3.228)$$

Queremos ainda analisar o limite de baixas energias, ou seja, $|\vec{p}| \ll mc$. Anteriormente (letra "b" das consequências da equação de Dirac), discutimos o caso limite quando $p^i = 0$ e chegamos a $\chi_1 = 0$. Duas das componentes de ψ era nulas. Como $|\vec{p}| \ll mc$, vamos usar a aproximação que as duas componentes de $\chi_1 = (\chi_1^{(1)}, \chi_1^{(2)})$ são muito menores que as de $\chi_2 = (\chi_2^{(1)}, \chi_2^{(2)})$: $\chi_1^{(a)} \ll \chi_2^{(a)}$. Assim,

$$\psi = (\chi_1, \chi_2) \approx (0, \chi_2). \quad (3.229)$$

Neste caso, (3.228) fica reduzida à substituição de ψ por χ_2

$$[\hbar^2 \partial_0^2 - \hbar^2 \nabla^2 - e(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + m^2 c^2] \chi_2 = 0. \quad (3.230)$$

Agora, vamos tentar uma solução para χ_2 na forma

$$\chi_2 = e^{-i\frac{mc}{\hbar}x^0} \varphi, \quad (3.231)$$

onde φ oscila com frequência muito menor comparada a $\omega = \frac{mc^2}{\hbar}$. Temos então

$$\begin{aligned} (\hbar^2 \partial_0^2 + m^2 c^2) \chi_2 &= (-2im\hbar \partial_t \varphi + \frac{\hbar^2}{c^2} \partial_t^2 \varphi) e^{-i\frac{mc}{\hbar}x^0} \\ &\approx -2im\hbar \partial_t \varphi e^{-i\frac{mc}{\hbar}x^0}, \end{aligned} \quad (3.232)$$

já que na aproximação que estamos fazendo, $c \rightarrow +\infty$. Retornando em (3.230) com (3.232) obtemos

$$[i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}] \varphi, \quad (3.233)$$

ou,

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[\frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} \right] \varphi. \quad (3.234)$$

Este é um dos grandes sucessos da equação de Dirac: no limite de baixas energias e campo fraco, ela fornece a equação de Pauli e o fator de Landé "2" correto, que antes foi adicionado pela mão, para descrever corretamente, por exemplo, o efeito de Zeeman. Agora ele apareceu naturalmente. Vale mencionar que a equação de Dirac foi derivada de maneira completamente independente da equação de Pauli. Introduzimos graus de liberdade a mais com as matrizes Γ , que agora fica claro que estão ligados com o spin do elétron. Para a dedução da equação tudo que pedimos foi linearidade em p_μ , para que fosse válida superposição de estados e ainda para

que a energia e o momento fossem tratados no mesmo pé de igualdade.

3.4.3 Alguns pontos negativos da equação de Dirac

No parágrafo anterior mostramos um dos grandes sucessos da equação de Dirac: no limite de baixas energias e campo eletromagnético fraco, ela se reduzia à equação de Pauli. Este é um indício que de fato a equação de Dirac descreve corretamente efeitos do spin do elétron. Infelizmente a equação de Dirac apresenta alguns pontos controversos, se a interpretarmos com o ponto de vista da Mecânica Quântica Relativística. Vamos descrever três destes pontos. O primeiro deles está ligado com um desequilíbrio entre variáveis de configuração e momento. Vamos escrever a equação de Dirac na seguinte forma

$$i\hbar\partial_t\psi = (c\Gamma^0\Gamma^i p_i + mc^2\Gamma^0)\psi. \quad (3.235)$$

A equação tem a forma de uma equação de Schrödinger. Assim, identificamos o operador no lado direito de (3.235) como o Hamiltoniano do sistema

$$H = c(\alpha^i p_i + \beta), \quad (3.236)$$

onde usamos a notação das matrizes α^i e β . Na representação de Heisenberg, a evolução do operador posição x^j é dada por

$$\dot{x}^j = \frac{1}{i\hbar}[x^j, H] = c\alpha^j. \quad (3.237)$$

A equação (3.237) nos permite interpretar (x^j, α^i) como um par de variáveis conjugadas. Por outro lado, temos também as variáveis p_j . Quais são então as variáveis de configuração, digamos q^j , que formam pares de variáveis conjugadas com os momentos p_j ? Este é o desequilíbrio que mencionamos, que pode ser descrito esquematicamente por

$$(x^i, \alpha^j); \quad (?, p_i). \quad (3.238)$$

O segundo problema que vamos falar está ligado com os possíveis valores que \dot{x}^j pode assumir. Os possíveis resultados das medidas da velocidade de um elétron são dados pelos autovalores de $c\alpha^j$. A equação característica que fornece os autovalores de, digamos α^3 é dada

por

$$0 = \det(\alpha^3 - \lambda 1) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2. \quad (3.239)$$

Logo, os dois valores de λ são ± 1 . Ou seja, as medidas da velocidade de um elétron levariam somente aos valores $\pm c$, o que é um absurdo já que elétrons podem ser observados com velocidades menores do que c . Com isso, concluímos o segundo problema da equação de Dirac. Passamos agora ao terceiro e último problema que vamos descrever aqui. Apesar de tentar descrever um elétron livre, a solução da equação de movimento para x^i obtida com o uso de (3.236), além de conter um movimento retilíneo, apresenta também um movimento oscilatório, conhecido na literatura por *Zitterbewegung* [97]. Vejamos como varia a velocidade do elétron com o tempo, por exemplo, na direção z ,

$$i\hbar\dot{\alpha}^3 = [\alpha^3, H] = \alpha^3 H - H\alpha^3. \quad (3.240)$$

Por outro lado, vamos calcular o anticomutador de α^3 e H ,

$$\alpha^3 H + H\alpha^3 = \alpha^3 c\alpha^3 p_3 + c\alpha^3 p_3 \alpha^3 = 2cp_3 \quad (3.241)$$

já que as matrizes α^μ obedecem $\alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu = 2\delta^{\mu\nu}$ e ainda $[\alpha^i, p_j] = 0$. Assim, usando (3.241) em (3.240)

$$i\hbar\dot{\alpha}^3 = \alpha^3 H - (2cp_3 - \alpha^3 H) = 2\alpha^3 H - 2cp_3. \quad (3.242)$$

Como p_i e H são constantes pois comutam com H , chegamos à equação de segunda ordem

$$i\hbar\ddot{\alpha}^3 = 2\dot{\alpha}^3 H \Rightarrow \ddot{\alpha}^3 = -\frac{2i}{\hbar}\dot{\alpha}^3 H. \quad (3.243)$$

Esta equação pode ser integrada e fornece

$$\dot{\alpha}^3(t) = \dot{\alpha}^3(0)e^{-\frac{2i}{\hbar}Ht}, \quad (3.244)$$

onde $\dot{\alpha}^3(0)$ é o valor que o operador $\dot{\alpha}^3$ assume em $t = 0$. Retornamos agora com (3.244) em (3.242)

$$i\hbar\dot{\alpha}^3(0)e^{-\frac{2i}{\hbar}Ht} = 2\alpha^3 H - 2cp_3. \quad (3.245)$$

Assumindo que exista H^{-1} , chegamos a

$$\alpha^3(t) = cp_3H^{-1} + i\frac{\hbar}{2}\dot{\alpha}^3(0)e^{-\frac{2i}{\hbar}Ht}H^{-1}. \quad (3.246)$$

Como $\dot{x}^3 = c\alpha^3$, podemos obter $x^3 = x^3(t)$,

$$x^3(t) = X^3 + c^2p_3H^{-1}t - \frac{c\hbar^2}{4}\dot{\alpha}^3(0)e^{-\frac{2i}{\hbar}Ht}H^{-2}. \quad (3.247)$$

Logo, o movimento do elétron previsto pela equação de Dirac é composto de duas partes

$$R^3(t) = X^3 + c^2p_3H^{-1}t, \quad (3.248)$$

$$Z_B^3(t) = -\frac{c\hbar^2}{4}\dot{\alpha}^3(0)e^{-\frac{2i}{\hbar}Ht}H^{-2}. \quad (3.249)$$

A primeira, $R^3(t)$, corresponde a um movimento retilinear, com velocidade constante. Se interpretarmos H como a energia da partícula e fizermos $H = cp^0$, então $\dot{R}^3(t) = c\frac{p_3}{p^0}$, que é a velocidade de uma partícula relativística livre andando na direção z . A segunda parte, $Z_B^3(t)$, é um movimento oscilatório, primeiro previsto teoricamente por Schrödinger [97], que recebeu o nome de *Zitterbewegung*. Existe intenso trabalho experimental atualmente ligado com o *Zitterbewegung* [98]. Chamamos aqui o *Zitterbewegung* de "problema" associado com a equação de Dirac já que ela deveria descrever um elétron livre, sem aceleração, e não é isto que ocorre, já que $\ddot{x}^3(t) \neq 0$.

Estes problemas da equação de Dirac motivam os trabalhos que serão discutidos: vamos apresentar primeiramente um modelo semiclássico tal que sua quantização fornece a equação de Dirac. Este primeiro modelo consegue evitar os problemas da equação de Dirac citados aqui a partir da construção de variáveis \tilde{x}^μ no espaço de fase que podem ser interpretadas como variáveis de posição. A partícula \tilde{x} é livre do *Zitterbewegung*, anda com velocidade constante, limitada por c quando $p^2 < 0$ e podemos interpretar p_μ como momentos conjugados a \tilde{x}^μ . Infelizmente p_μ não satisfaz $p^2 + m^2c^2 = 0$ antes da quantização. Assim, na sequência apresentaremos um modelo que contém a relação de dispersão de energia momento clássica. Com isso conseguimos eliminar o indesejável *Zitterbewegung*, já que o vínculo de primeira classe $p^2 + m^2c^2 = 0$ gera transformações para x^μ . Neste caso x^μ não pode ser um observável, mantendo o *Zitterbewegung*.

3.4.4 Modelo mecânico para descrição do spin relativístico

Até agora discutimos as equações que descrevem o spin, a equação de Pauli e a sua generalização para o caso relativístico: a equação de Dirac. Em ambos os casos, já do início, as

equações são quânticas. Muito esforço foi feito para entender o spin classicamente, de forma que as equações correspondentes fossem obtidas, por exemplo, quantizando o respectivo modelo clássico [100, 101, 102, 103, 104, 105, 60, 106, 107]. Os primeiros trabalhos que foram dedicados à dinâmica do spin são o de Thomas [100] e de Frenkel [101].⁴ Depois disso, citamos ainda o trabalho clássico de Bargmann-Michel-Telegdi (BMT) [103], em que o movimento do spin sob campos uniformes prediziam teoricamente, por exemplo, a auto-polarização de elétrons, observado experimentalmente [104]. O problema é que os artigos baseados nos trabalhos de Frenkel ou BMT não levavam a uma formulação quântica razoável já que não produzem a equação de Pauli ou Dirac após a quantização [105]. Este problema particular foi resolvido por Berezin e Marinov [60]: eles apresentaram uma Hamiltoniana clássica para uma partícula com spin. A quantização do modelo leva à equação de Pauli e é possível generalizá-lo para uma versão relativística, que leva à equação de Dirac. Entretanto o espaço do spin é construído com variáveis de Grassmann ou anticomutativas. Neste caso, temos uma estrutura matemática formal que apresenta dificuldades se tentamos descrever efeitos de spin antes da quantização. Existem outras possibilidades para a descrição de spin. Por exemplo, Barut e Zhang [106] evitam as variáveis de Grassmann, construindo um tensor de spin com a ajuda de espinores. Entretanto a equação de Dirac não está presente e a massa da partícula não está fixa. O trabalho de Hanson e Regge [105] fornece uma teoria quântica para uma partícula com spin embora não produza as matrizes Γ . Assim, o objetivo central desta Seção é apresentar um modelo que descreva uma partícula com spin, utilizando variáveis comutativas. Além de posição e momento x^μ , p_ν , usaremos variáveis de momento angular $J^{5\mu}$, J^{0i} para parametrizar o espaço do spin. A quantização do modelo leva à equação de Dirac e às matrizes Γ , com a álgebra correspondente.⁵ Para obter o modelo, poderíamos tentar incluir o vetor de spin tridimensional S^i no vetor quadridimensional S^μ de BMT ou inseri-lo no tensor de spin de Frenkel $M^{\mu\nu}$ [101]. Infelizmente, os modelos baseados neste esquema, além de não fornecer a equação de Dirac não obedecem a um princípio variacional, isto é, não existem Lagrangianas ou Hamiltonianas de onde poderíamos obter as equações de movimento correspondentes. Como veremos estes problemas serão evitados. Observemos que o problema aqui é inverso à quantização: nós já temos a equação para o elétron com spin. Agora buscaremos um modelo semiclássico⁶ que quando quantizado produz a equação de Dirac. O procedimento de quantização [93] pode ser resumido da seguinte maneira. Sejam z^α variáveis no espaço de fase que descrevem determinado modelo, onde $\{z^\alpha, z^\beta\}$ é o parêntesis de Poisson correspondente. De acordo com Dirac, associamos as variáveis z^α com

⁴Para uma revisão moderna do trabalho de Frenkel, veja [102].

⁵Este trabalho é uma continuação do trabalho [107], que descreve o spin não relativístico com variáveis comutativas. A quantização do modelo fornece a equação de Pauli.

⁶Usamos a palavra "semiclássico" já que a Lagrangiana (e Hamiltoniana) clássica que apresentaremos contem a fator \hbar .

operadores hermitianos \hat{z}^α agindo no espaço de estados, obedecendo

$$\{z^\alpha, z^\beta\}|_{z \rightarrow \hat{z}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{z}^\alpha, \hat{z}^\beta]. \quad (3.250)$$

Ou seja, o procedimento de quantização canônica nada mais é que a realização de determinada álgebra num espaço vetorial.

Para o nosso caso, posição e momento da partícula correspondem às variáveis do espaço de fase x^μ e p_ν , com parêntesis de Poisson $\{x^\mu, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu$. A quantização leva a

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = x^\mu, \quad (3.251)$$

$$p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu, \quad (3.252)$$

$$\{x^\mu, p_\nu\} \rightarrow [x^\mu, p_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu. \quad (3.253)$$

Além disso, é sugestivo impor o vínculo

$$p_\mu \Sigma^\mu + mc\hbar = 0 \quad (3.254)$$

escrevendo, na quantização $\Sigma^\mu \rightarrow \hbar\Gamma^\mu$. O vínculo (3.254) é imposto no vetor de estado, levando à equação de Dirac. Agora precisamos exibir variáveis clássicas Σ^μ que produzem as matrizes Γ . Como veremos, isto pode ser feito inserindo as variáveis de spin S^i no tensor de momento angular J^{AB} , gerador do grupo $SO(2,3)$. Aqui $A = (\mu, 5) = (0, 1, 2, 3, 5)$ e a métrica é dada por $\eta^{AB} = (-1, +1, +1, +1, -1)$.

Consideremos a representação de Dirac

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.255)$$

onde 1 é a matriz identidade 2×2 e σ^i são as matrizes de Pauli. Definindo $\Gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\Gamma^\mu\Gamma^\nu - \Gamma^\nu\Gamma^\mu)$ conseguimos uma álgebra fechada entre os objetos Γ ,

$$[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] = -2i\Gamma^{\mu\nu}, \quad (3.256)$$

$$[\Gamma^{\mu\nu}, \Gamma^\alpha] = 2i(\eta^{\mu\alpha}\Gamma^\nu - \eta^{\nu\alpha}\Gamma^\mu), \quad (3.257)$$

$$[\Gamma^{\mu\nu}, \Gamma^{\alpha\beta}] = 2i(\eta^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\Gamma^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\Gamma^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta}\Gamma^{\mu\alpha}). \quad (3.258)$$

Fazendo a correspondência

$$\Gamma^\mu \leftrightarrow \Sigma^\mu \equiv J^{5\mu} \quad (3.259)$$

$$\Gamma^{\mu\nu} \leftrightarrow J^{\mu\nu} \quad (3.260)$$

então, por comparação, o último comutador acima pode ser identificado com álgebra de Lie 5-dimensional $so(2,3)$, com geradores J^{AB}

$$[J^{AB}, J^{CD}] = 2i(\eta^{AC} J^{BD} - \eta^{AD} J^{BC} - \eta^{BC} J^{AD} + \eta^{BD} J^{AC}). \quad (3.261)$$

Vamos introduzir agora variáveis clássicas que produzem (3.261) após a quantização. Para as variáveis de spin tomamos o espaço 10-dimensional parametrizado pelo par de variáveis conjugadas ω^A, π^B , equipado com o parêntesis de Poisson $\{\omega^A, \pi^B\} = \eta^{AB}$. Assim, o parêntesis de Poisson do momento angular definido por

$$J^{AB} = 2(\omega^A \pi^B - \omega^B \pi^A) \quad (3.262)$$

é exatamente (3.261), omitindo i ,

$$\{J^{AB}, J^{CD}\} = 2(\eta^{AC} J^{BD} - \eta^{AD} J^{BC} - \eta^{BC} J^{AD} + \eta^{BD} J^{AC}). \quad (3.263)$$

O parêntesis acima fornece uma realização possível do comutador (3.261) da álgebra de Lie $so(2,3)$. Como estamos interessados em obter as matrizes Γ no procedimento de quantização, reparametrizamos o espaço (ω^A, π^B) . No lugar das dez variáveis (ω^A, π^B) , vamos usar J^{AB} . Notamos entretanto que somente sete das dez funções J^{AB} são independentes. De fato, elas obedecem à identidade

$$J^{ij} = (J^{50})^{-1}(J^{5i} J^{0j} - J^{5j} J^{0i}). \quad (3.264)$$

Somos obrigados a adicionar mais três variáveis à descrição, digamos, $T_n = f_n(\omega^A, \pi^B)$, $n = 3, 4, 5$, para termos uma mudança de coordenadas

$$(\omega^A, \pi^B) \leftrightarrow (J^{5\mu}, J^{0i}, T_3, T_4, T_5). \quad (3.265)$$

Tomamos, por exemplo, $T_3 = \omega^0$, $T_4 = \omega^5$ e $T_5 = \pi^5$. Se quantizarmos o modelo com as novas variáveis, então produziremos operadores $\hat{\omega}^0$, $\hat{\omega}^5$ e $\hat{\pi}^5$, que não estão presentes na teoria de Dirac e não são necessários para a descrição do spin. Assim, devemos eliminar T_n , restringindo o modelo a uma superfície 7-dimensional do espaço (ω^A, π^B) . Uma sugestão é vincular o modelo impondo $T_n = 0$ e tomamos as funções T_n como os três invariantes sob a ação de $SO(2,3)$

que temos à nossa disposição

$$T_3 = (\pi^A)^2 + a_3, \quad (3.266)$$

$$T_4 = (\omega^A)^2 + a_4, \quad (3.267)$$

$$T_5 = \omega^A \pi^A, \quad (3.268)$$

ou seja, $\{J^{AB}, T_n\} = 0$. $a_{3,4}$ são constantes positivas. Esta escolha será justificada um pouco a frente. Infelizmente, a troca

$$(\omega^A, \pi^B) \leftrightarrow (J^{5\mu}, J^{0i}, T_n) \quad (3.269)$$

não é invertível já que

$$\text{rank} \frac{\partial(J^{5\mu}, J^{0i}, T_n)}{\partial(\omega^A, \pi^B)} = 9. \quad (3.270)$$

Entretanto, a mudança

$$(\omega^A, \pi^B) \leftrightarrow (J^{5\mu}, J^{0i}, T_4, T_5, \omega^5) \quad (3.271)$$

é invertível pois

$$\text{rank} \frac{\partial(J^{5\mu}, J^{0i}, T_4, T_5, \omega^5)}{\partial(\omega^A, \pi^B)} = 10. \quad (3.272)$$

Ainda definimos a superfície de spin por (3.266)-(3.268). A coordenada ω^5 permanece na formulação mas ela não pode ser um observável como mostraremos à frente.

Vamos motivar a escolha de $T_n = 0$, que definem a superfície de spin, como $SO(2,3)$ -invariantes. Primeiro, obtemos a sua álgebra. Temos

$$\{T_4, T_5\} = -2a_4. \quad (3.273)$$

De acordo com a terminologia de Dirac, (T_4, T_5) forma um par de segunda classe, que chamaremos de K_a , $a = 1, 2$. A combinação

$$\tilde{T}_3 = T_3 + \frac{a_3}{a_4} T_4 \quad (3.274)$$

é um vínculo de primeira classe já que sua álgebra é dada por

$$\{\tilde{T}_3, T_3\} = 4 \frac{a_3}{a_4} T_5, \quad (3.275)$$

$$\{\tilde{T}_3, T_4\} = -4T_5, \quad (3.276)$$

$$\{\tilde{T}_3, T_5\} = -2T_3. \quad (3.277)$$

Para uma quantização consistente de uma teoria com vínculos de segunda classe, os parêntesis de Poisson (PP) são substituídos pelos de Dirac (PD), definidos, como vimos anteriormente, por

$$\{A, B\}_{PD} = \{A, B\}_{PP} - \{A, K_a\} \Delta_{ab}^{-1} \{K_b, B\} \quad (3.278)$$

onde A, B são funções definidas no espaço de fase e Δ é a matriz não singular

$$\Delta_{ab} = \{K_a, K_b\}; \quad \det \Delta \neq 0. \quad (3.279)$$

Como queremos reproduzir a álgebra (3.258) depois da quantização, (3.263) deve permanecer inalterado na transição dos parêntesis de Poisson para o de Dirac, que acontecerá, caso os vínculos de segunda classe sejam invariantes pela ação de $SO(2,3)$

$$\begin{aligned} \{J^{AB}, J^{CD}\}_{PD} &= \{J^{AB}, J^{CD}\}_{PP} - \{J^{AB}, K_a\} \Delta_{ab}^{-1} \{K_b, J^{CD}\} \\ &= \{J^{AB}, J^{CD}\}_{PP}. \end{aligned} \quad (3.280)$$

Além do mais, como \tilde{T}_3 é de primeira classe, o modelo apresenta simetria local, que apresentaremos mais à frente. Os observáveis da teoria devem ser invariantes da simetria local gerada por \tilde{T}_3 . Assim, é conveniente também tomar

$$\{J^{AB}, \tilde{T}_3\} = 0, \quad (3.281)$$

ou seja, as variáveis de spin serão quantidades invariantes de gauge, e bom candidatos a observáveis. Além do mais, se $\{J^{AB}, T_3\} \neq 0$, então teremos que matar outras variáveis J^{AB} , que não é do nosso interesse. A discussão acima justifica a escolha de $SO(2,3)$ -invariantes para definir a superfície de spin. Notamos ainda que $\{\omega^5, \tilde{T}_3\} \neq 0$, ou seja, ω^5 não é invariante de gauge, logo não pode ser um observável da teoria.

Já estamos aptos a quantizar o modelo

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = x^\mu, \quad p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu; \quad (3.282)$$

$$J^{5\mu} \rightarrow \hbar\Gamma^\mu, \quad J^{\mu\nu} \rightarrow \hbar\Gamma^{\mu\nu}. \quad (3.283)$$

A equação de Dirac é encontrada se impormos mais uma restrição ao modelo, a saber

$$T_2 = p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0. \quad (3.284)$$

Finalmente concluímos que a dinâmica do spin relativístico pode ser descrita se construirmos uma teoria Hamiltoniana com todos os vínculos (3.266)-(3.268) e (3.284). Vamos apresentar uma realização deste logo abaixo.

3.4.5 Realização Dinâmica

Vamos discutir uma possível realização dinâmica para o modelo algébrico da superfície de spin apresentado. Começaremos com a ação Hamiltoniana, passando para a formulação Lagrangiana. Terminaremos esta parte discutindo algumas formulações Lagrangianas equivalentes.

Ação Hamiltoniana.

À luz dos vínculos (3.266)-(3.268) e (3.284), é sugestivo escrever a seguinte ação Hamiltoniana

$$S_H = \int d\tau \left(p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_A \dot{\omega}^A + \pi_{e_l} \dot{e}_l - H \right) \quad (3.285)$$

onde a Hamiltoniana completa H é dada por

$$H = H_0 + \lambda_{e_l} \pi_{e_l} = \frac{e_l}{2} T_l + \lambda_{e_l} \pi_{e_l}. \quad (3.286)$$

λ_{e_l} são os multiplicadores de Lagrange para π_{e_l} ; $l = 2, 3, 4$ e T_l são os vínculos (3.266)-(3.268). Com mais detalhes, H_0 é

$$H_0 = \frac{e_2}{2} (p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar) + \frac{e_3}{2} [(\pi^A)^2 + a_3] + \frac{e_4}{2} [(\omega^A)^2 + R]. \quad (3.287)$$

A variação de S_H com respeito às variáveis de momento fornece as equações de movimento para as variáveis de posição,

$$\frac{\delta S_H}{\delta p_\mu} = 0 \Rightarrow \dot{x}^\mu = \frac{e_2}{2} J^{5\mu} = e_2 (\omega^5 \pi^\mu - \pi^5 \omega^\mu), \quad (3.288)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta \pi_\mu} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}^\mu = e_3 \pi^\mu + e_2 \omega^5 p^\mu, \quad (3.289)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta \pi_5} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}^5 = e_3 \pi^5 + e_2 p_\mu \omega^\mu, \quad (3.290)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta \pi_{e_l}} = 0 \Rightarrow \dot{e}_l = \lambda_{e_l}, \quad (3.291)$$

bem com a variação de S_H com respeito às variáveis de posição nos dá as equações para os momentos

$$\frac{\delta S_H}{\delta x^\mu} = 0 \Rightarrow \dot{p}_\mu = 0, \quad (3.292)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta \omega^\mu} = 0 \Rightarrow \dot{\pi}^\mu = e_2 \pi^5 p^\mu - e_4 \omega^\mu, \quad (3.293)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta \omega^5} = 0 \Rightarrow \dot{\pi}^5 = e_2 p_\mu \pi^\mu - e_4 \omega^5. \quad (3.294)$$

Temos os vínculos $\pi_{e_l} = 0$, que aparecem a partir da variação da ação Hamiltoniana com respeito aos multiplicadores λ_{e_l} e ainda temos a variação de S_H com respeito às variáveis auxiliares, que fornece parte dos vínculos desejados da teoria

$$\frac{\delta S_H}{\delta e_2} = 0 \Rightarrow p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0 \quad (3.295)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta e_3} = 0 \Rightarrow (\pi_A)^2 + a_3 = 0, \quad (3.296)$$

$$\frac{\delta S_H}{\delta e_4} = 0 \Rightarrow (\omega^A)^2 + a_4 = 0. \quad (3.297)$$

A preservação no tempo de $(\omega^A)^2 + a_4$ nos dá o vínculo $T_5 = \omega^A \pi^A = 0$, que por sua vez nos leva a $e_4 = \frac{a_3}{a_4} e_3$. Para ver isso, usamos as equações de movimento (3.289), (3.290), (3.293) e (3.294),

$$[(\omega^A)^2 + a_4]' = 2\dot{\omega}^A \omega^A = 2e_3 \omega^A \pi^A = 0 \Rightarrow \omega^A \pi^A = 0; \quad (3.298)$$

$$(\omega^A \pi^A)' = e_3 (\pi^A)^2 - e_4 (\omega^A)^2 = 0 \Rightarrow e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3 = 0. \quad (3.299)$$

A evolução de $(\pi^A)^2 + a_3$ e $p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar$ não traz informação relevante. De fato, $\pi^A \dot{\pi}^A = -2e_4 \omega^A \pi^A$ e $(p_\mu J^{5\mu})' = 0$. Finalmente, o vínculo $e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3 = 0$ implica $\lambda_{e_4} = \frac{a_3}{a_4} \lambda_3$.

Temos dois pares de vínculos de segunda classe

$$(e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3, \pi_{e_4}); \quad (\omega^A \pi^A, (\omega^A)^2 + a_4).$$

Os vínculos restantes π_{e_2} , π_{e_3} e $(\pi^A)^2 + a_3$ são de primeira classe (a combinação correta de vínculos que é de primeira classe é dada por $\tilde{T}_3 = T_3 + \frac{a_3}{a_4} T_4$, como já discutimos). Dois deles são primários (π_{e_2} , π_{e_3}) e de acordo com a teoria geral [20, 28, 29], indicam a presença de duas simetrias locais. Uma delas é invariância de reparametrizações, que pode ser escrita na forma

$$\delta Y = \varepsilon \dot{Y}, \quad (3.300)$$

$$\delta e_l = (\varepsilon e_l), \quad \delta \pi_{e_l} = 0 \quad (3.301)$$

$$\delta\lambda_{e_l} = (\delta e_l); \quad (3.302)$$

onde $Y = (x^\mu, p_\mu, \omega^A, \pi_B)$ e $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ é uma função arbitrária. A variação de S_H com as transformações acima nos dá

$$\delta S_H = \int d\tau [\varepsilon(p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_A \omega^A - \frac{1}{2} e_l T_l)]; \quad (3.303)$$

como desejado. A outra simetria é dada por

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta p_\mu = 0, \quad (3.304)$$

$$\delta \omega^A = \xi \omega^A, \quad \delta \pi^A = -\xi \pi^A + \frac{\dot{\xi}}{e_3} \omega^A, \quad (3.305)$$

$$\delta e_2 = 0, \quad \delta e_3 = 2\xi e_3, \quad \delta e_4 = -\left(\frac{\dot{\xi}}{e_3}\right) - 2e_4 \xi, \quad (3.306)$$

$$\delta\lambda_{e_l} = (\delta e_l); \quad \delta\pi_{e_l} = 0, \quad (3.307)$$

onde $\xi = \dot{e}_4 - \frac{a_3}{a_4} \dot{e}_3 + 2\varepsilon(\dot{e}_4 - \frac{a_3}{a_4} \dot{e}_3)$. $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ é o parâmetro arbitrário da simetria. A variação de S_H também nos dá um termo de derivada total

$$\delta S_H = \int d\tau \left(\frac{\dot{\xi}}{2e_3} T_4 + \varepsilon a_4 e_4^2 + \varepsilon \frac{a_3^2}{a_4} e_3^2 - 2\varepsilon a_3 a_4 e_3 \right). \quad (3.308)$$

Ambas as simetrias serão usadas posteriormente para discutirmos o conteúdo físico do modelo.

Vamos discutir a estrutura das equações de movimento de S_H . Primeiro vemos que λ_{e_2} e λ_{e_3} não podem ser determinados nem com o sistema de vínculos nem com as equações dinâmicas. Como eles estão presentes nas equações para $Y = (x^\mu, p_\mu, \omega^A, \pi_A)$, sua solução geral contém funções arbitrárias. Contudo, podemos contornar este problema. De fato, a equação de movimento (3.288) para x^μ tem uma estrutura similar comparada à partícula relativística livre descrita pela ação $S = \int d\tau (\frac{1}{2e} \dot{x}^2 - \frac{e}{2} m^2 c^2)$. No último caso, temos $\dot{x}^\mu = e p^\mu$, $\dot{p}_\mu = 0$, junto com o vínculo $p^2 + m^2 c^2 = 0$. A variável auxiliar e entra na solução como uma função arbitrária. A ambiguidade reflete a liberdade que temos para selecionar uma parametrização para a trajetória da partícula. Podemos ver este fato de outra maneira, notando que a ação é invariante sob reparametrizações

$$\delta x^\mu = \varepsilon \dot{x}^\mu, \quad \delta e = (\varepsilon e); \quad (3.309)$$

De fato, a variação de S tem a forma

$$\delta S = \int d\tau [\varepsilon (\frac{1}{2e} \dot{x}^2 - \frac{e}{2} m^2 c^2)]. \quad (3.310)$$

Neste caso, $x^0(\tau)$, $x^i(\tau)$ são consideradas equações paramétricas para a trajetória física $x^i(t)$. Obtemos $x^i(t)$ invertendo $x^0(\tau)$ com respeito a τ , $\tau = \tau(x^0)$, então $x^i(t) = x^i(\tau(x^0))$. A dinâmica determinística da trajetória da partícula é dada por

$$\frac{dx^i}{dt} = c \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^0} = c \frac{p^i}{p^0}. \quad (3.311)$$

Podemos ainda mostrar que a partícula tem uma velocidade restrita. O vínculo $p^2 + m^2 c^2 = 0$ nos permite obter p^0 como função dos momentos restantes,

$$p^0 = \sqrt{(p^i)^2 + m^2 c^2}. \quad (3.312)$$

Assim, tomando o quadrado de (3.311) e usando (3.312),

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{(p^i)^2}{(p^i)^2 + m^2 c^2} \Rightarrow \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 < c^2. \quad (3.313)$$

Alternativamente, podemos mostrar que a velocidade da partícula não excede c se notarmos que \dot{x}^2 é negativo. Tomamos o quadrado de $\dot{x}^\mu = e p^\mu$ junto com o vínculo $p^2 + m^2 c^2 = 0$

$$\dot{x}^2|_{p^2 = -m^2 c^2} = -e^2 m^2 c^2. \quad (3.314)$$

Como $\frac{dx^i}{dt} = c \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^0}$,

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = c^2 \left(\frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^0}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{e^2 m^2 c^2}{(\dot{x}^0)^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 < c^2. \quad (3.315)$$

A situação descrita acima é similar no nosso modelo. Primeiro olhamos para a equação de movimento $\dot{x}^\mu = \frac{e_2}{2} J^{5\mu}$. A ambiguidade introduzida por e_2 tem a mesma origem do que para a partícula relativística livre, sendo relacionada com a invariância de reparametrizações da teoria, veja (3.300)-(3.302). Então interpretamos $x^\mu(\tau)$ como as equações paramétricas para a trajetória física $x^i(t)$, cuja dinâmica determinística é governada por

$$\frac{dx^i}{dt} = c \frac{J^{5i}}{J^{50}}. \quad (3.316)$$

Neste caso também podemos mostrar que a velocidade da partícula não pode exceder a velocidade da luz, embora o vínculo $p^2 + m^2 c^2 = 0$ não esteja presente na formulação. Para isso,

observamos que

$$(J^{5\mu})^2 + 4(a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2) = 0, \quad (3.317)$$

devido aos vínculos $(\pi^A)^2 + a_3 = 0$, $\omega^A \pi^A = 0$ e $(\omega^A)^2 + a_4 = 0$. Isolamos J^{50}

$$J^{50} = \sqrt{(J^{5i})^2 + 4(a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2)}, \quad (3.318)$$

e o usamos no quadrado da velocidade (3.316). Portanto,

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{(J^{5i})^2}{(J^{5i})^2 + 4(a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2)} \Rightarrow \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 < c^2. \quad (3.319)$$

Equivalentemente, o quadrado da equação de movimento para x^μ nos dá

$$\dot{x}^2 = -e_2^2(a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2), \quad (3.320)$$

ou seja, \dot{x}^2 é negativo para todo $a_{3,4} > 0$. (3.320) implica a restrição na velocidade da partícula

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{e_2^2(a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2)}{(\dot{x}^0)^2}\right) < c^2. \quad (3.321)$$

Assim, $(J^{5\mu})^2 + 4(a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2) = 0$ faz o papel de $p^2 + m^2 c^2 = 0$ para a partícula livre relativística.

Agora discutiremos a estrutura do setor (ω^A, π_B) . As equações de movimento para ω^A e π_B contem ambos e_2 e e_3 . Para remover esta arbitrariedade, buscamos equações de quantidades do modelo que não possuam dependência com e_3 . Notamos que

$$j^{\mu\nu} = e_2(p^\mu J^{5\nu} - p^\nu J^{5\mu}), \quad (3.322)$$

$$j^{5\mu} = e_2 p_\nu J^{\nu\mu}. \quad (3.323)$$

Removemos a ambiguidade introduzida por e_3 . Assim como no caso anterior, interpretamos $J^{AB}(\tau)$ como as equações paramétricas para $J^{AB}(t)$. Assim, a dinâmica determinística de J^{AB} pode ser encontrada excluindo e_2

$$\frac{dJ^{\mu\nu}(t)}{dt} = c \frac{j^{\mu\nu}}{\dot{x}^0} = 2c \frac{p^\mu(t)J^{5\nu}(t) - p^\nu(t)J^{5\mu}(t)}{J^{50}(t)}, \quad (3.324)$$

$$\frac{dJ^{5\mu}(t)}{dt} = c \frac{j^{5\mu}}{\dot{x}^0} = 2c \frac{p_\nu(t)J^{\nu\mu}(t)}{J^{50}(t)}. \quad (3.325)$$

A dinâmica acima pode ser reproduzida se usarmos a noção de invariantes de calibre (ou gauge).

As variáveis J^{AB} são invariantes com respeito à simetria (3.304)-(3.307)

$$\begin{aligned} \delta J^{AB} = & 2\left[\xi \omega^A \pi^B + \omega^A \left(-\xi \pi^B + \frac{\dot{\xi}}{e_3} \omega^B\right) + \right. \\ & \left. -\xi \omega^B \pi^A - \omega^B \left(-\xi \pi^A + \frac{\dot{\xi}}{e_3} \omega^A\right)\right] \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.326)$$

Isto indica que as equações de movimento não podem depender da função arbitrária e_3 , como vimos em (3.322). Além do mais, a invariância $\delta J^{AB} = 0$ nos permite interpretarmos estas variáveis como possíveis observáveis do modelo.

Busca pela formulação Lagrangiana.

Agora vamos encontrar a formulação Lagrangiana correspondente à ação Hamiltoniana S_H . Primeiro, notamos que H_0 em (3.287) tem a forma

$$\frac{1}{2} P_a G^{ab} P_b + \frac{e_2}{2} m c \hbar + \frac{a_3}{2} e_3 + \frac{e_4}{2} T_4,$$

onde $P_a = (p_\mu, \pi_\mu, \pi_5)$ e $G^{ab} = G^{ab}(\omega^A, e_l)$ é uma matriz 9×9 não singular,

$$\det G = e_2^8 e_3 (\omega^5)^6 (\omega^A)^2,$$

que pode ser escrita esquematicamente como

$$G^{ab} = \begin{pmatrix} 0_{(4 \times 4)} & e_2 \omega^5 \eta^{\mu\nu}_{(4 \times 4)} & e_2 \omega^{\nu}_{(4 \times 1)} \\ e_2 \omega^5 \eta^{\mu\nu}_{(4 \times 4)} & e_3 \eta^{\mu\nu}_{(4 \times 4)} & 0_{(4 \times 1)} \\ e_2 \omega^{\mu}_{(1 \times 4)} & 0_{(1 \times 4)} & -e_3 (1 \times 1) \end{pmatrix}. \quad (3.327)$$

A notação $0_{(4 \times 4)}$ indica que o primeiro elemento de G^{ab} acima é formado pela matriz nula 4×4 , por exemplo. Para achar a Lagrangiana, invertamos as equações Hamiltonianas para as variáveis de posição $Q^a = (x^\mu, \omega^\nu, \omega^5)$, $\dot{Q}^a = G^{ab} P_b$, com respeito a P_a , $P_a = G_{ab}^{-1} \dot{Q}^b$. Então escrevemos

$$L = (P_a \dot{Q}^a - H_0)|_{P_a = G_{ab}^{-1} \dot{Q}^b}. \quad (3.328)$$

Assim,

$$L = \frac{1}{2} G_{ab}^{-1} \dot{Q}^a \dot{Q}^b - \frac{e_2}{2} m c \hbar - \frac{a_3}{2} e_3 - \frac{e_4}{2} T_4. \quad (3.329)$$

O problema de restabelecer a formulação Lagrangiana partindo da ação Hamiltoniana é redu-

zido a obter a inversa da matriz G^{ab} . Como G_{ab}^{-1} é dada por

$$G_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{e_3}{e_2^2(\omega^5)^2}h_{\mu\nu} & \frac{1}{e_2\omega^5}h_{\mu\nu} & \frac{1}{e_2(\omega^A)^2}\omega_\nu \\ \frac{1}{e_2\omega^5}h_{\mu\nu} & \frac{1}{e_3(\omega^A)^2}\omega_\mu\omega_\nu & -\frac{\omega^5}{e_3(\omega^A)^2}\omega_\nu \\ \frac{1}{(e_2\omega^A)^2}\omega_\mu & -\frac{\omega^5}{e_3(\omega^A)^2}\omega_\mu & \frac{(\omega^5)^2}{e_3(\omega^A)^2} \end{pmatrix}, \quad (3.330)$$

onde $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\omega_\mu\omega_\nu}{(\omega^A)^2}$ e $\det G^{-1} = \frac{1}{e_2^8 e_3 (\omega^5)^6 (\omega^A)^2}$, finalmente temos a Lagrangiana

$$L = -\frac{e_3}{2e_2^2(\omega^5)^2}\dot{x}^2 + \frac{1}{e_2\omega^5}\dot{\omega}x + \frac{1}{2e_3(\omega^A)^2}(\omega^A\dot{\omega}^A - \frac{e_3}{e_2\omega^5}\omega\dot{x})^2 + \\ -\frac{e_2}{2}m\dot{c}\hbar - \frac{a_3}{2}e_3 - \frac{e_4}{2}[(\omega^A)^2 + a_4]. \quad (3.331)$$

Ela é definida no espaço de configurações $\{x^\mu, \omega^\mu, \omega^5, e_2, e_3, e_4\}$. e_2, e_3, e_4 são variáveis auxiliares, m, c, \hbar tem o seu significado usual, $a_{3,4}$ são constantes positivas e estamos usando a notação $\omega x = \eta_{\mu\nu}\omega^\mu x^\nu$. A ação $S = \int d\tau L$ é invariante por reparametrizações,

$$\delta x^\mu = \varepsilon \dot{x}^\mu, \quad \delta \omega^A = \varepsilon \dot{\omega}^A, \quad (3.332)$$

$$\delta e_l = (\varepsilon e_l), \quad (3.333)$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ é o parâmetro arbitrário, bem como sob ação da simetria local

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta \omega^A = \xi \omega^A, \quad (3.334)$$

$$\delta e_2 = 0, \quad \delta e_3 = 2\xi e_3, \quad \delta e_4 = -\left(\frac{\xi}{e_3}\right) - 2e_4\xi, \quad (3.335)$$

onde $\xi = \dot{\varepsilon}(e_4 - \frac{a_3}{a_4}e_3) + 2\varepsilon(\dot{e}_4 - \frac{a_3}{a_4}\dot{e}_3)$ e $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ é uma função arbitrária de τ . Para ver isso, reescrevemos L numa forma equivalente, rearranjando seus termos

$$L = -\frac{e_3}{2e_2^2(\omega^5)^2}[(Dx^\mu)^2 - \frac{1}{(\omega^A)^2}(Dx^\mu\omega_\mu)^2] + \frac{1}{2e_3}(\dot{\omega}^A)^2 - \\ -\frac{e_2}{2}m\dot{c}\hbar - \frac{e_4}{2}[(\omega^A)^2 + R], \quad (3.336)$$

onde usamos a definição sugestiva de derivada covariante

$$Dx^\mu = \dot{x}^\mu - \frac{e_2}{e_3}J_L^{5\mu}$$

e o correspondente momento angular no espaço de configurações $J_L^{5\mu}$,

$$J_L^{5\mu} = \omega^5\dot{\omega}^\mu - \dot{\omega}^5\omega^\mu.$$

Sob reparametrizações, os termos de L variam segundo

$$\delta \left(-\frac{e_3}{2e_2^2(\omega^5)^2} \right) = -\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{e_3}{2e_2^2(\omega^5)^2} \right) + \frac{e_3}{2e_2^2(\omega^5)^2} \dot{\varepsilon}, \quad (3.337)$$

$$\delta Dx^\mu = (\varepsilon Dx^\mu); \quad \delta Dx^\mu \omega_\mu = (\varepsilon Dx^\mu \omega_\mu), \quad (3.338)$$

$$\delta \left(\frac{1}{2e_3} (\dot{\omega}^A)^2 \right) = \left(\varepsilon \frac{1}{2e_3} (\dot{\omega}^A)^2 \right); \quad (3.339)$$

$$\delta (e_4 [(\omega^A)^2 + a_4]) = (\varepsilon e_4 [(\omega^A)^2 + a_4]); \quad (3.340)$$

Com as transformações acima, encontramos $\delta L = (\varepsilon L)$. Sob a simetria (3.334), (3.335) as seguintes quantidades são invariantes

$$\delta \left(\frac{e_3}{e_2^2(\omega^5)^2} \right) = 0, \quad (3.341)$$

$$\delta \left(\frac{e_2}{e_3} J_L^{5\mu} \right) = 0, \quad (3.342)$$

$$\delta (Dx^\mu) = 0, \quad (3.343)$$

$$\delta \left(\frac{(Dx^\mu \omega_\mu)^2}{(\omega^A)^2} \right) = 0 \quad (3.344)$$

Vamos usá-las para mostrar que $\delta L = div$. Primeiro, tomamos um $\xi = \xi(\tau)$ arbitrário. Como o primeiro termo de (3.336) é invariante (veja a lista acima), temos

$$\delta L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\dot{\xi}}{e_3} \dot{\omega}^A \omega^A - 2\xi a_3 e_3 - \delta e_4 [(\omega^A)^2 + a_4] - 2\xi e_4 (\omega^A)^2 \right\}. \quad (3.345)$$

Se tomarmos $\delta e_4 = -2e_4 \xi - \chi$, onde χ é uma função a ser determinada, então podemos cancelar o último termo em (3.345). Ficamos com

$$\delta L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\dot{\xi}}{e_3} \dot{\omega}^A \omega^A + \chi [(\omega^A)^2 + a_4] - 2\xi (a_3 e_3 - a_4 e_4) \right\} \quad (3.346)$$

Assim escolhemos $\chi = \left(\frac{\dot{\xi}}{e_3} \right) \cdot e$ e o fator $2\xi (a_3 e_3 - a_4 e_4)$ será uma derivada total quando $\xi = \dot{\varepsilon} (e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3) + 2\varepsilon (\dot{e}_4 - \frac{a_3}{a_4} \dot{e}_3)$. Finalmente chegamos a

$$\delta L = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{\xi}}{e_3} [(\omega^A)^2 + a_4] + 2\varepsilon [e_4^2 a_4 - 2a_3 e_3 e_4 + \frac{a_3^2}{a_4} e_3^2] \right\}; \quad (3.347)$$

como afirmamos.⁷ As simetrias acima tiveram um papel crucial quando discutimos o setor físico da teoria. Em particular, devido à invariância por reparametrizações, interpretamos $x^\mu = x^\mu(\tau)$ como a trajetória parametrizada para $x^i(t)$; $i = 1, 2, 3$ e a outra simetria local nos permitiu achar algumas quantidades invariantes, como por exemplo J^{AB} , que são possíveis candidatos a observáveis do modelo.

De acordo com a teoria geral [20, 28, 29], a presença de simetrias locais em uma Lagrangiana singular é equivalente à presença de vínculos de primeira classe na descrição Hamiltoniana correspondente. Parte dos vínculos que aparecem no curso da hamiltonização de L são os que usamos para construir o espaço de spin. Reconstruiremos a formulação Hamiltoniana via o método de Dirac para sistemas vinculados, mas antes vamos analisar as consequências da Lagrangiana obtida. Começamos escrevendo as equações de Euler-Lagrange (usamos L dada em (3.331))

$$\frac{\delta S}{\delta e_2} = 0 \Rightarrow \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \dot{x}^2 - \dot{\omega} \dot{x} + \frac{\omega \dot{x}}{(\omega^A)^2} \Delta - \frac{e_2^2 \omega^5}{2} m c \hbar = 0, \quad (3.348)$$

$$\frac{\delta S}{\delta e_3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2e_2^2 (\omega^5)^2} \dot{x}^2 + \frac{\Delta^2}{2e_3^2 (\omega^A)^2} + \frac{\omega \dot{x} \Delta}{e_2 e_3 \omega^5 (\omega^A)^2} + \frac{a_3}{2} = 0, \quad (3.349)$$

$$\frac{\delta S}{\delta e_4} = 0 \Rightarrow (\omega^A)^2 + a_4 = 0, \quad (3.350)$$

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{e_3}{e_2^2 (\omega^5)^2} \dot{x}_\mu + \frac{1}{e_2 \omega^5} \dot{\omega}_\mu - \frac{\Delta}{e_2 \omega^5 (\omega^A)^2} \omega_\mu \right] = 0, \quad (3.351)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \omega^\mu} = 0 \Rightarrow & \left[\frac{1}{e_2 \omega^5} \dot{x}_\mu + \frac{1}{e_3 (\omega^A)^2} \Delta \omega_\mu \right] = -\frac{\Delta^2}{e_3 (\omega^A)^4} \omega_\mu + \\ & + \frac{1}{e_3 (\omega^A)^2} \Delta (\dot{\omega}_\mu - \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \dot{x}_\mu) - e_4 \omega_\mu, \end{aligned} \quad (3.352)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \omega^5} = 0 \Rightarrow & -\left[\frac{\Delta}{e_3 (\omega^A)^2} \omega^5 \right] = \frac{e_3}{e_2^2 (\omega^5)^3} \dot{x}^2 - \frac{1}{e_2 (\omega^5)^2} \dot{\omega} \dot{x} + \\ & + \frac{\Delta^2}{e_3 (\omega^A)^4} \omega^5 + \frac{\Delta}{e_3 (\omega^A)^2} \left(-\dot{\omega}^5 + \frac{e_3}{e_2 (\omega^5)^2} \omega \dot{x} \right) + e_4 \omega^5, \end{aligned} \quad (3.353)$$

onde $\Delta = \omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \omega \dot{x}$. Vamos enumerar algumas conclusões que podem ser obtidas a partir das equações de movimento.

⁷Observe que temos uma simetria da forma $\ddot{\epsilon}$

a) $\frac{\delta S}{\delta e_4} = 0$ implica o vínculo $(\omega^A)^2 + a_4 = 0$, que, por sua vez leva a

$$\omega^A \dot{\omega}^A = 0. \quad (3.354)$$

Ambas (3.350) e (3.354) serão usadas para simplificar as equações de movimento.

b) Como $\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$, podemos integrar a equação de movimento para x^μ

$$\tilde{p}^\mu = -\frac{e_3}{e_2^2(\omega^5)^2} \dot{x}^\mu + \frac{1}{e_2 \omega^5} \dot{\omega}^\mu - \frac{e_3(\omega \dot{x})}{e_2^2(\omega^5)^2 a_4} \omega^\mu, \quad (3.355)$$

onde \tilde{p}^μ é um quadri vetor constante e usamos (3.350) and (3.354).

c) Podemos demonstrar mais uma vez que a velocidade da partícula é menor que c . Usando (3.350) e (3.354) de volta nas equações para e_3 , encontramos

$$\dot{x}^2 = -\left(\frac{(\omega \dot{x})^2}{a_4} + a_3 e_2^2 (\omega^5)^2\right) \equiv -\zeta^2. \quad (3.356)$$

Como \dot{x}^μ é do tipo tempo, a velocidade da partícula é limitada por c

$$\dot{x}^2 = -\zeta^2 \Rightarrow \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{(\dot{x}^0)^2}\right) < c^2. \quad (3.357)$$

d) Vamos obter a equação que corresponde à equação de Dirac na formulação Lagrangiana. Se usarmos (3.350), (3.354) e (3.356) na equação para e_2 , então

$$\dot{\omega} \dot{x} + e_2 \omega^5 a_3 e_3 + \frac{e_2^2 \omega^5}{2} m c \hbar = 0. \quad (3.358)$$

Contraímos (3.355) com \dot{x}^μ e usamos (3.356), (3.358), obtendo

$$\tilde{p} \dot{x} + \frac{e_2}{2} m c \hbar = 0. \quad (3.359)$$

Na teoria de Dirac do elétron, $\dot{x}^\mu \sim \Gamma^\mu$. Assim podemos interpretar (3.359) como a equação de Dirac.

e) Vamos mostrar que as equações de movimento Lagrangianas implicam $e_4 = \frac{a_3}{a_4} e_3$. Combinamos as equações para ω^A

$$0 = \omega^\mu \frac{\delta S}{\delta \omega^\mu} + \omega^5 \frac{\delta S}{\delta \omega^5} = -e_4 (\omega^A)^2 + a_3 e_3. \quad (3.360)$$

Já que $(\omega^A)^2 = -a_4$, temos $e_4 = \frac{a_3}{a_4} e_3$, como afirmamos. Vamos discutir uma maneira alternativa para encontrarmos $e_4 = \frac{a_3}{a_4} e_3$. Existe a seguinte identidade

$$\omega^A \frac{\partial L}{\partial \omega^A} = 0, \quad (3.361)$$

que pode ser verificada explicitamente

$$\omega^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^\mu} + \omega^5 \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^5} = \frac{1}{e_2 \omega^5} (\omega \dot{x}) - \frac{(\omega \dot{x}) e_3}{e_2 \omega^5 e_3} \equiv 0. \quad (3.362)$$

Se diferenciarmos a identidade acima

$$\dot{\omega}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^A} + \omega^A \frac{\partial L}{\partial \omega^A} = 0, \quad (3.363)$$

onde usamos as equações de movimento $\frac{\partial L}{\partial \omega^A} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^A} \right)'$: Já que

$$\dot{\omega}^A \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^A} = \frac{1}{e_2 \omega^5} (\omega \dot{x}) + \frac{\Delta}{e_3 (\omega^A)^2} \omega^A \dot{\omega}^A, \quad (3.364)$$

e

$$\begin{aligned} \omega^A \frac{\partial L}{\partial \omega^A} = & -\frac{1}{e_2 \omega^5} (\omega \dot{x}) + \frac{\Delta}{e_3 (\omega^A)^2} \omega^A \dot{\omega}^A - e_4 (\omega^A)^2 + \\ & + \frac{e_3}{e_2^2 (\omega^5)^2} \dot{x}^2 - \frac{\Delta^2}{e_3 (\omega^A)^2} \end{aligned} \quad (3.365)$$

então a equação (3.363) fornece (sobre a superfície dos vínculos)

$$0 = a_4 e_4 + \frac{e_3}{e_2^2 (\omega^5)^2} (\dot{x}^2 + \frac{(\omega \dot{x})^2}{a_4}) \Rightarrow e_4 = \frac{a_3}{a_4} e_3 \quad (3.366)$$

onde usamos (3.356).

f) Juntando as informações acima, é possível simplificar as equações de movimento para as variáveis ω^A . A equação para ω^5 assume a forma

$$\left(\frac{\omega \dot{x}}{e_2} \right)' = a_3 e_3 \omega^5 + \frac{a_4 e_2}{2 \omega^5} m c \hbar + \frac{(\omega \dot{x})}{e_2 \omega^5} \left(\frac{e_3}{a_4 e_2} \omega \dot{x} - \dot{\omega}^5 \right). \quad (3.367)$$

A equação para ω^μ fica

$$\left(\frac{a_4}{e_2 \omega^5} \dot{x}^\mu + \frac{(\omega \dot{x})}{e_2 \omega^5} \omega^\mu \right)' = (\omega \dot{x}) \tilde{p}^\mu - a_3 e_3 \omega^\mu. \quad (3.368)$$

Hamiltonização: método de Dirac para sistemas vinculados.

Como queremos quantizar o modelo e confirmar que somos levados à equação de Dirac, vamos reescrever sua formulação Hamiltoniana de acordo com o método de Dirac para sistemas vinculados e confirmar que a Lagrangiana (3.331) realmente implica na formulação Hamiltoniana (3.286). Partimos dos momentos conjugados

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{e_3}{e_2^2 (\omega^5)^2} \dot{x}^\mu + \frac{1}{e_2 \omega^5} \dot{\omega}^\mu - \frac{1}{e_2 \omega^5 (\omega^A)^2} (\omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \omega \dot{x}) \omega_\mu, \quad (3.369)$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^\mu} = \frac{1}{e_2 \omega^5} \dot{x}^\mu + \frac{1}{e_3 (\omega^A)^2} (\omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \omega \dot{x}) \omega_\mu, \quad (3.370)$$

$$\pi_5 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}^5} = -\frac{1}{e_3 (\omega^A)^2} (\omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \omega \dot{x}) \omega^5, \quad (3.371)$$

e vínculos primários

$$\pi_{e_l} = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}_l} = 0; \quad l = 2, 3, 4. \quad (3.372)$$

Invertendo as equações (3.369), (3.370) e (3.371) (elas são a forma explícita de $P_a = G_{ab}^{-1} \dot{Q}^b$), expressamos as velocidades em termos dos momentos e variáveis de configuração

$$\dot{x}^\mu = e_2 (\omega^5 \pi^\mu - \pi^5 \omega^\mu), \quad (3.373)$$

$$\dot{\omega}^\mu = e_3 \pi^\mu + e_2 \omega^5 p^\mu, \quad (3.374)$$

$$\dot{\omega}^5 = e_3 \pi^5 + e_2 p \omega. \quad (3.375)$$

Estamos aptos agora a escrever a Hamiltoniana H_0 ,

$$\begin{aligned} H_0 &= (p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_A \omega^A + \pi_{e_l} \dot{e}_l - L)|_{(3.372),(3.373),(3.374),(3.375)} \\ &= \frac{e_2}{2} (p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar) + \frac{e_3}{2} [(\pi^A)^2 + a_3] + \frac{e_4}{2} [(\omega^A)^2 + a_4]. \end{aligned} \quad (3.376)$$

A Hamiltoniana completa é dada por $H = H_0 + \lambda_{e_l} \pi_{e_l}$, onde $\lambda_{e_l}, l = 2, 3, 4$ são os multiplicadores de Lagrange para os vínculos primários $\pi_{e_l} = 0$, que é exatamente (3.286). De acordo com o método de Dirac, vínculos devem ser zero por todo o tempo. Então, temos a seguinte cadeia de vínculos de etapas superiores

Segunda etapa:

$$\begin{aligned} T_2 &= p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0 \\ T_3 &= (\pi^A)^2 + a_3 = 0, \\ T_4 &= (\omega^A)^2 + a_4 = 0. \end{aligned} \quad (3.377)$$

Terceira etapa:

$$T_5 = \omega^A \pi_A = 0. \quad (3.378)$$

Quarta etapa:

$$e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3 = 0. \quad (3.379)$$

Este último vínculo, por sua vez, nos permite encontrar um dos multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_{e_4} = \frac{a_3}{a_4} \lambda_{e_3}. \quad (3.380)$$

O par $(e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3, \pi_{e_4})$ é de segunda classe. Eliminamos essas variáveis passando do parêntesis de Poisson para o de Dirac. Notamos que o par $(\omega^A \omega_A + a_4, \omega^A \pi_A)$ também é de segunda classe. Como eles são invariantes sob ação de $SO(2,3)$, os parêntesis de Poisson e de Dirac para os J 's coincidem, veja (3.280). Relembramos que vamos quantizar o modelo de acordo com a álgebra (3.261), então mantemos os vínculos na formulação. Ficamos então com o seguinte quadro: a Hamiltoniana completa é

$$H = \frac{e_2}{2} (p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar) + \frac{e_3}{2} [(\pi^A)^2 + a_3] + \frac{a_4}{2} [(\omega^A)^2 + a_4] + \lambda_{e_2} \pi_{e_2} + \lambda_{e_3} \pi_{e_3}. \quad (3.381)$$

Temos a cadeia de vínculos

$$\pi_{e_2} = 0, \quad \pi_{e_3} = 0, \quad (3.382)$$

$$p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0, \quad (\pi^A)^2 + a_3 = 0, \quad (3.383)$$

$$(\omega^A)^2 + a_4 = 0, \quad \omega^A \pi^A = 0. \quad (3.384)$$

As equações de movimento são

$$\dot{x}^\mu = \frac{e_2}{2} J^{5\mu}, \quad \dot{p}^\mu = 0; \quad (3.385)$$

$$\dot{\omega}^\mu = e_3 \pi^\mu + e_2 \omega^5 p^\mu, \quad \dot{\pi}^\mu = e_2 \pi^5 p^\mu - \frac{a_3}{a_4} e_3 \omega^\mu; \quad (3.386)$$

$$\dot{\omega}^5 = e_3 \pi^5 + e_2 p \omega, \quad \dot{\pi}^5 = e_2 p \pi - \frac{a_3}{a_4} e_3 \omega^5; \quad (3.387)$$

$$\dot{e}_2 = \lambda_{e_2}, \quad \pi_{e_2} = 0; \quad (3.388)$$

$$\dot{e}_3 = \lambda_{e_3}, \quad \pi_{e_3} = 0. \quad (3.389)$$

Isto completa a realização dinâmica. Nossos próximos passos serão discutir a quantização canônica do modelo e ainda resolver as equações de movimento clássicas.

Formulações equivalentes.

Antes de continuarmos, vamos discutir duas formulações equivalentes para o nosso modelo. A estrutura da Lagrangiana (3.331) sugere pelo menos duas modificações na sua estrutura, a

saber

- a) a mudança de variáveis: $e_2 \omega^5 \rightarrow \tilde{e}_2$,
- b) a substituição $(\omega^A)^2 \rightarrow -a_4$ no terceiro termo.

A ideia por trás de a) e b) é simplesmente a simplificação da forma de L . Com isso, geramos as seguintes Lagrangianas,

$$L_1 = -\frac{e_3}{2\tilde{e}_2^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{\tilde{e}_2} \dot{\omega} \dot{x} + \frac{1}{2e_3(\omega^A)^2} (\omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{\tilde{e}_2} \omega \dot{x})^2 + \\ -\frac{\tilde{e}_2}{2\omega^5} m c \hbar - \frac{a_3}{2} e_3 - \frac{e_4}{2} [(\omega^A)^2 + a_4]; \quad (3.390)$$

$$L_2 = -\frac{e_3}{2e_2^2(\omega^5)^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{e_2 \omega^5} \dot{\omega} \dot{x} - \frac{1}{2e_3 a_4} (\omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{e_2 \omega^5} \omega \dot{x})^2 + \\ -\frac{e_2}{2} m c \hbar - \frac{a_3}{2} e_3 - \frac{e_4}{2} [(\omega^A)^2 + a_4]. \quad (3.391)$$

Para o primeiro caso, a Hamiltoniana correspondente é dada por

$$H_1 = \frac{\tilde{e}_2}{2\omega^5} T_2 + \frac{e_3}{2} T_3 + \frac{e_4}{2} T_4 + \lambda_{\tilde{e}_2} \pi_{\tilde{e}_2} + \lambda_{e_3} \pi_{e_3} + \lambda_{e_4} \pi_{e_4}. \quad (3.392)$$

Os vínculos coincidem com os da formulação inicial e as equações de movimento também são as mesmas como antes, com exceção da substituição $e_2 \omega^5 \rightarrow \tilde{e}_2$, que nada mais é que uma mudança de variáveis, logo as formulações são equivalentes. Para o caso b), não estamos fazendo uma troca de variáveis. Então não é possível concluir imediatamente a equivalência entre L e L_2 . Vamos analisar em detalhes a formulação Hamiltoniana de L_2 (neste caso, também vamos usar a substituição $e_2 \omega^5 \rightarrow \tilde{e}_2$). Os momentos conjugados são

$$p_\mu = -\frac{e_3}{\tilde{e}_2^2} \dot{x}_\mu + \frac{1}{\tilde{e}_2} \omega_\mu - \frac{\Delta}{a_4 \tilde{e}_2} \omega_\mu, \quad (3.393)$$

$$\pi_\mu = \frac{1}{\tilde{e}_2} \dot{x}_\mu - \frac{\Delta}{a_4 e_3} \omega_\mu, \quad (3.394)$$

$$\pi_5 = \frac{\Delta}{a_4 e_3} \omega^5, \quad (3.395)$$

onde $\Delta = \omega^A \dot{\omega}^A - \frac{e_3}{\tilde{e}_2} \omega \dot{x}$. Encontramos então as velocidades como função dos momentos e variáveis de configuração

$$\dot{x}^\mu = \frac{\tilde{e}_2}{\omega^5} (\omega^5 \pi^\mu - \pi^5 \omega^\mu), \quad (3.396)$$

$$\dot{\omega}^\mu = \tilde{e}_2 p^\mu + e_3 \pi^\mu, \quad (3.397)$$

$$\dot{\omega}^5 = \frac{\tilde{e}_2}{\omega^5} p \omega + e_3 \pi^5 + \frac{e_3 \pi^5}{(\omega^5)^2} T_4. \quad (3.398)$$

Observamos que as equações acima são as mesmas que para L_1 , a única diferença aparece em (3.398): ela contém um termo adicional proporcional a T_4 . Neste caso, a Hamiltoniana também conterá um termo a mais proporcional a T_4

$$H_2 = \frac{\tilde{e}_2}{2\omega^5} T_2 + \frac{e_3}{2} T_3 + \frac{1}{2} \left[e_4 - e_3 \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} \right] T_4 + \lambda_{\tilde{e}_2} \pi_{\tilde{e}_2} + \lambda_{e_3} \pi_{e_3} + \lambda_{e_4} \pi_{e_4}. \quad (3.399)$$

As equações de movimento são

$$\dot{x}^\mu = \frac{\tilde{e}_2}{\omega^5} (\omega^5 \pi^\mu - \pi^5 \omega^\mu), \quad \dot{p}^\mu = 0; \quad (3.400)$$

$$\dot{\omega}^\mu = \tilde{e}_2 p^\mu + e_3 \pi^\mu, \quad \dot{\pi}^\mu = \frac{\tilde{e}_2}{\omega^5} \pi^5 p^\mu - \left(e_4 - e_3 \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} \right) \omega^\mu; \quad (3.401)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}^5 &= \frac{\tilde{e}_2}{\omega^5} p \omega + e_3 \pi^5 + \frac{e_3 \pi^5}{(\omega^5)^2} T_4, \\ \dot{\pi}^5 &= \frac{\tilde{e}_2}{\omega^5} p \pi + e_3 \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^3} T_4 - \left(e_4 - e_3 \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} \right) \omega^5. \end{aligned} \quad (3.402)$$

Vínculos de etapas superiores são dados por

$$T_2 = p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0, \quad (3.403)$$

$$T_3 = (\pi^A)^2 + a_3 = 0, \quad (3.404)$$

$$T_4 = (\omega^A)^2 + a_4 = 0, \quad (3.405)$$

$$T_5 = \omega^A \pi_A = 0, \quad (3.406)$$

$$e_4 - \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} e_3 - \frac{a_3}{a_4} e_3 = 0. \quad (3.407)$$

O multiplicador de Lagrange λ_{e_4} pode ser encontrado com a evolução do último vínculo acima

$$\lambda_{e_4} = \left[\frac{a_3}{a_4} + \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} \right] \lambda_{e_3} + \left[\frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} \right] e_3. \quad (3.408)$$

Se substituirmos os vínculos (3.405) e (3.407) de volta nas equações de movimento, então elas coincidem com as de H , sendo que a diferença está na substituição $e_2 \omega^5 \rightarrow \tilde{e}_2$. Como somos levados à mesma formulação dinâmica, concluímos que as formulações H e H_2 também são equivalentes. Destacamos ainda que a modificação b), isto é, a substituição $(\omega^A)^2 \rightarrow a_4$ em L efetivamente só gerou um deslocamento na variável e_4 na formulação Hamiltoniana $e_4 \rightarrow e_4 - \frac{(\pi^5)^2}{(\omega^5)^2} e_3$.

3.4.6 Quantização canônica

Com a formulação hamiltoniana em mãos, estamos aptos a quantizar o modelo. O par $(e_4 - \frac{a_3}{a_4} e_3, \pi_{e_4})$ foi eliminado da construção e deixamos o par $(\omega^A \omega_A + a_4, \omega^A \pi_A)$ intocado pois os parêntesis de Dirac e Poisson das quantidades J^{AB} coincidem, veja (3.280). Quantizamos o modelo de acordo com (3.282), (3.283) e o vínculo de primeira classe $p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0$ é imposto ao vetor de estado, levando precisamente à equação de Dirac, como desejado.

3.4.7 Solução para as equações clássicas de movimento

Estamos interessados em resolver as equações de movimento para as variáveis que possuem invariância local: $x^i(t)$, $p^\mu(t)$ e $J^{AB}(t)$. Suas equações são

$$\frac{dx^i}{dt} = c \frac{J^{5i}(t)}{J^{50}(t)}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = 0 \quad (3.409)$$

$$\frac{dJ^{\mu\nu}(t)}{dt} = 2c \frac{p^\mu(t)J^{5\nu}(t) - p^\nu(t)J^{5\mu}(t)}{J^{50}(t)}, \quad (3.410)$$

$$\frac{dJ^{5\mu}(t)}{dt} = 2cp_\nu \frac{J^{\nu\mu}(t)}{J^{50}(t)}, \quad (3.411)$$

veja (3.316), (3.324) e (3.325). Elas foram obtidas de

$$\dot{x}^\mu = \frac{e_2}{2} J^{5\mu}, \quad (3.412)$$

$$j^{\mu\nu} = e_2(p^\mu J^{5\nu} - p^\nu J^{5\mu}), \quad (3.413)$$

$$j^{5\mu} = e_2 p_\nu J^{\nu\mu}, \quad (3.414)$$

eliminando a ambiguidade devido a e_2 . Como as equações (3.409)-(3.411) não dependem de e_2 e e_3 , podemos tomá-los como quiser. A escolha mais simples que nos permite resolver (3.412)-(3.414) é fazer e_2 constante. Após integrar (3.412)-(3.414), estaremos aptos a construir a solução de (3.409)-(3.411). Como veremos, teremos dois tipos de soluções distintas. Uma delas prevê o *Zitterbewegung*: além do movimento linear, a partícula também oscila com frequência angular constante. A outra solução nos fornece um movimento parabólico.

Fixado então e_2 constante, vemos que $J^{5\mu}$ obedece uma equação diferencial de segunda ordem fechada, que nos permitirá obter as soluções de $x^\mu(\tau)$ e $J^{AB}(\tau)$. De fato,

$$j^{5\mu} = e_2 p_\nu J^{\nu\mu} \Rightarrow \dot{j}^{5\mu} = e_2^2 p_\nu (p^\nu J^{5\mu} - p^\mu J^{5\nu}), \quad (3.415)$$

onde usamos a equação (3.413) para $J^{\mu\nu}$ (p_μ é um quadrivetor constante já que $\dot{p}_\mu = 0$). Usando

o vínculo

$$p_\nu J^{5\nu} = -m\hbar c$$

temos então

$$j^{5\mu} - e_2^2 p^2 J^{5\mu} = e_2^2 m\hbar c p^\mu, \quad (3.416)$$

cuja solução depende do sinal de p^2 . Vamos discutir as duas possibilidades separadamente.

i) Primeiro caso: $p^2 = -|p|^2 < 0$.

Neste caso, a solução geral de (3.416) é dada por

$$J^{5\mu} = \frac{m\hbar c}{|p|^2} p^\mu + A^\mu \cos(\omega\tau) + B^\mu \sin(\omega\tau), \quad (3.417)$$

onde $\omega = e_2 |p|$. Como $\dot{x}^\mu = \frac{e_2}{2} J^{5\mu}$, a solução para $x^\mu(\tau)$ é

$$x^\mu(\tau) = X^\mu + e_2 \frac{m\hbar c}{2|p|^2} p^\mu \tau + \frac{1}{2|p|} A^\mu \sin(\omega\tau) - \frac{1}{2|p|} B^\mu \cos(\omega\tau). \quad (3.418)$$

Podemos também integrar a equação $J^{0i} = e_2(p^0 J^{5i} - p^i J^{50})$

$$J^{0i} = \Sigma^{0i} + \frac{1}{|p|} (p^0 A^i - p^i A^0) \sin(\omega\tau) - \frac{1}{|p|} (p^0 B^i - p^i B^0) \cos(\omega\tau), \quad (3.419)$$

onde A^μ , B^μ , X^μ e Σ^{0i} são constantes. Os J 's restantes são dados por

$$J^{ij} = (J^{50})^{-1} (J^{5i} J^{0j} - J^{5j} J^{0i}). \quad (3.420)$$

Escreveremos a solução explícita para os J^{ij} em um momento. Antes, vamos considerar algumas restrições sobre as soluções. Para que o vínculo $T_2 = 0$ seja satisfeito, devemos ter

$$p_\mu J^{5\mu} = -m\hbar c + pA \cos(\omega\tau) + pB \sin(\omega\tau) = -m\hbar c, \quad \forall \tau. \quad (3.421)$$

Assim, deve valer

$$p_\mu A^\mu = 0, \quad (3.422)$$

$$p_\mu B^\mu = 0. \quad (3.423)$$

Quando mostramos que a partícula possuía velocidade limitada por c , usamos o fato que $(J^{5\mu})^2 < 0$, veja (3.317). Assim, as constantes A^μ e B^μ são tais que

$$A^2 \cos^2(\omega\tau) + 2AB \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) + B^2 \sin^2(\omega\tau) < \left(\frac{m\hbar c}{|p|} \right)^2, \quad \forall \tau. \quad (3.424)$$

Vamos olhar agora para a solução $x^\mu(\tau)$. Como o modelo apresenta invariância de reparametrizações, x^0 deve ser uma função monótona de τ . Assim, fazemos $A^0 = B^0 = 0$. Esta restrição sobre a componente zero de (3.418) nos dá (por simplicidade, fixamos $X^0 = 0$)

$$x^0 = ct = \frac{e_2 m c \hbar}{2|p|^2} p^0 \tau \Rightarrow \tau = \frac{2|p|^2}{e_2 m \hbar p^0} t. \quad (3.425)$$

Conseguimos então encontrar $x^i = x^i(t)$,

$$x^i(t) = X^i + c \frac{p^i}{p^0} t + \frac{1}{2|p|} A^i \sin(\tilde{\omega} t) - \frac{1}{2|p|} B^i \cos(\tilde{\omega} t), \quad (3.426)$$

onde $\tilde{\omega} = \frac{2|p|^3}{m \hbar p^0}$. A solução para J^{ij} com $A^0 = B^0 = 0$ é dada por,

$$\begin{aligned} J^{ij} = & \left(\frac{m c \hbar}{|p|^2} p^0 \right)^{-1} \left\{ \frac{m c \hbar}{|p|^2} (p^i \Sigma^{0j} - p^j \Sigma^{0i}) + \frac{p^0}{|p|} (B^i A^j - B^j A^i) + \right. \\ & \sin(\omega \tau) \left[\frac{m c \hbar}{|p|^3} p^0 (p^i A^j - p^j A^i) + B^i \Sigma^{0j} - B^j \Sigma^{0i} \right] + \\ & \left. \cos(\omega \tau) \left[-\frac{m c \hbar}{|p|^3} p^0 (p^i B^j - p^j B^i) + A^i \Sigma^{0j} - A^j \Sigma^{0i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.427)$$

Para que as soluções acima sejam consistentes, devemos ainda verificar se a equação $J^{5\mu} = e_2 p_\nu J^{\nu\mu}$ é satisfeita. Substituindo nesta equação as soluções que obtivemos, para cada valor que o índice livre μ pode assumir, teremos uma identidade quando,

$$\mu = 0 \Rightarrow p_i \Sigma^{i0} = 0, \quad (3.428)$$

$$\mu = i \Rightarrow m c \hbar \Sigma^{0i} = |p| (A^i B^0 - A^0 B^i), \quad (3.429)$$

ou seja, fixamos as constantes Σ^{0i} . Temos ainda uma última restrição a ser considerada no modelo:

$$(J^{AB})^2 = 8[(\omega^A)^2 (\pi^B)^2 - (\omega^A \pi^A)^2] = 8a_3 a_4. \quad (3.430)$$

Substituindo as soluções para as variáveis J , temos

$$\begin{aligned} (J^{AB})^2 &= -2(J^{5\mu})^2 - 2(J^{0i})^2 + (J^{ij})^2 \\ &= 2 \left(\frac{m c \hbar}{|p|} \right)^2 - 2(\vec{A}^2 + \vec{B}^2) + 2 \left(\frac{|p|}{m c \hbar} \right)^2 (\vec{A}^2 \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2) \\ &= 8a_3 a_4, \end{aligned} \quad (3.431)$$

ou seja,

$$\left(\frac{m c \hbar}{|p|} \right)^2 - (\vec{A}^2 + \vec{B}^2) + \left(\frac{|p|}{m c \hbar} \right)^2 (\vec{A}^2 \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2) = 4a_3 a_4. \quad (3.432)$$

Vamos discutir a solução $x^i(t)$, que é dada por um movimento retilíneo,

$$R^i(t) = X^i + c \frac{p^i}{p^0} t \quad (3.433)$$

somado ao movimento oscilatório

$$Z^i(t) = \frac{1}{2|p|} A^i \sin(\tilde{\omega}t) - \frac{1}{2|p|} B^i \cos(\tilde{\omega}t), \quad (3.434)$$

nomeado por Schrödinger de *Zitterbewegung* [97]. Começamos mostrando que de fato a velocidade da partícula é restrita. Para isso, vamos precisar das restrições (3.422)-(3.423) quando $A^0 = B^0 = 0$,

$$\vec{p} \cdot \vec{A} = 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{B} = 0; \quad (3.435)$$

$$(\vec{A} \cos(\tilde{\omega}t) + \vec{B} \sin(\tilde{\omega}t))^2 < \left(\frac{m\hbar}{|p|} \right)^2. \quad (3.436)$$

Agora olhamos para o quadrado da velocidade,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 &= c^2 \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2} + \frac{|p^4|}{(m\hbar p^0)^2} (\vec{A} \cos(\tilde{\omega}t) + \vec{B} \sin(\tilde{\omega}t))^2 \\ &< c^2 \frac{\vec{p}^2}{(p^0)^2} + \frac{|p^4|}{(m\hbar p^0)^2} \frac{(m\hbar)^2}{|p|^2} = c^2, \end{aligned} \quad (3.437)$$

como queríamos. Curiosamente, o *Zitterbewegung* se dá num plano perpendicular ao movimento retilíneo, devido a (3.435). Poderíamos agora nos perguntar se o *Zitterbewegung* pode ser circular. Neste caso, de acordo com (3.434), devemos ter $|\vec{A}| = |\vec{B}| \equiv r$ e $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Substituindo estas condições em (3.432), encontramos a seguinte equação para r ,

$$\left(\frac{|p|}{m\hbar} r^2 - \frac{m\hbar}{|p|} \right)^2 = 4a_3 a_4. \quad (3.438)$$

Mas pela restrição (3.436), obrigatoriamente,

$$r^2 = \frac{m\hbar}{|p|} \left(\frac{m\hbar}{|p|} - 2\sqrt{a_3 a_4} \right). \quad (3.439)$$

Finalmente, com a solução acima temos o valor do raio para que o *Zitterbewegung* seja circular

$$|\vec{Z}| = \frac{1}{2|p|} \sqrt{\left(\frac{m\hbar}{|p|} \right)^2 - 2 \frac{m\hbar}{|p|} \sqrt{a_3 a_4}}. \quad (3.440)$$

Após a quantização, conseguimos ainda fixar o valor do produto entre as constantes a_3 e a_4 , já que

$$(\hat{J}^{AB})^2 = -2\hbar^2 (\Gamma^\mu)^2 + \hbar^2 (\Gamma^{\mu\nu})^2 = 20\hbar^2 = 8a_3 a_4. \quad (3.441)$$

Assim, o raio acima toma o valor

$$|\vec{Z}| = \frac{\hbar}{2|p|} \sqrt{\left(\frac{mc}{|p|}\right)^2 - \sqrt{10} \frac{mc}{|p|}}. \quad (3.442)$$

Para concluir, vamos calcular o seguinte momento angular associado ao *Zitterbewegung*

$$\vec{s} = m\vec{Z} \times \frac{d\vec{Z}}{dt} = \frac{|p|}{2\hbar p^0} \vec{A} \times \vec{B}. \quad (3.443)$$

Usaremos \vec{s} um pouco mais à frente para darmos uma possível interpretação para o spin.

Vamos resumir os resultados obtidos com as restrições correspondentes. A solução para as variáveis invariantes de calibre são,

$$x^i(t) = X^i + c \frac{p^i}{p^0} t + \frac{1}{2|p|} A^i \sin(\tilde{\omega}t) - \frac{1}{2|p|} B^i \cos(\tilde{\omega}t), \quad (3.444)$$

$$J^{5\mu}(t) = \frac{m\hbar}{|p|^2} p^\mu + A^\mu \cos(\tilde{\omega}t) + B^\mu \sin(\tilde{\omega}t), \quad (3.445)$$

$$J^{0i} = \frac{p^0}{|p|} (A^i \sin(\omega\tau) - B^i \cos(\omega\tau)), \quad (3.446)$$

$$J^{ij}(t) = \frac{|p|}{m\hbar} (B^i A^j - B^j A^i) + \frac{1}{|p|} (p^i A^j - p^j A^i) \sin(\tilde{\omega}t) - \frac{1}{|p|} (p^i B^j - p^j B^i) \cos(\tilde{\omega}t), \quad (3.447)$$

onde são válidas as seguintes restrições

$$\vec{p} \cdot \vec{A} = 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{B} = 0; \quad (3.448)$$

$$(\vec{A} \cos(\tilde{\omega}t) + \vec{B} \sin(\tilde{\omega}t))^2 < \left(\frac{m\hbar}{|p|}\right)^2, \quad (3.449)$$

$$\left(\frac{m\hbar}{|p|}\right)^2 - (\vec{A}^2 + \vec{B}^2) + \left(\frac{|p|}{m\hbar}\right)^2 (\vec{A} \times \vec{B})^2 = 4a_3 a_4. \quad (3.450)$$

ii) Segundo caso: $p^2 = +|p|^2 > 0$.

A solução geral de (3.416) é agora dada por

$$J^{5\mu}(\tau) = -\frac{m\hbar}{|p|^2} p^\mu + A^\mu e^{\omega\tau} + B^\mu e^{-\omega\tau}, \quad (3.451)$$

com $\omega = e_2 |p|$. Com $J^{5\mu}(\tau)$ nas mãos, podemos integrar ambas as equações para x^μ e $J^{\mu\nu}$.

$$x^\mu(\tau) = X^\mu - \frac{e_2 m\hbar}{2|p|^2} p^\mu \tau + \frac{1}{2|p|} A^\mu e^{\omega\tau} - \frac{1}{2|p|} B^\mu e^{-\omega\tau}, \quad (3.452)$$

$$J^{\mu\nu}(\tau) = \Sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{|p|} (p^\mu A^\nu - p^\nu A^\mu) e^{\omega\tau} - \frac{1}{|p|} (p^\mu B^\nu - p^\nu B^\mu) e^{-\omega\tau}, \quad (3.453)$$

onde A^μ , B^μ , X^μ e $\Sigma^{\mu\nu}$ são constantes. Devemos nos lembrar que somente J^{0i} são independentes. J^{ij} são dados por (3.420). Vamos agora checar a consistência das soluções. $J^{5\mu} = e_2 p_\nu J^{\nu\mu}$ impõe, para $\mu = 0$,

$$p_i \Sigma^{i0} = 0. \quad (3.454)$$

Para $\mu = i$, devemos ter

$$J^{5i} = e_2 (p_0 J^{0i} + p_j J^{ji}) \quad (3.455)$$

onde $J^{ij} = (J^{50})^{-1} (J^{5i} J^{0j} - J^{5j} J^{0i})$. Com esses J^{ij} substituídos em (3.455), podemos encontrar os Σ^{0i} ,

$$\Sigma^{0i} = \frac{2|p|}{m\hbar} (A^0 B^i - B^0 A^i). \quad (3.456)$$

Agora, retornamos com esses dados em (3.420), obtendo os Σ 's restantes,

$$\Sigma^{ij} = \frac{2|p|}{m\hbar} (A^i B^j - A^j B^i). \quad (3.457)$$

Vamos agora impor as restrições que os vínculos da teoria impõem. Para que T_2 seja válido,

$$p_\mu J^{5\mu} = -m\hbar + pAe^{\omega\tau} + pBe^{-\omega\tau} = -m\hbar, \quad \forall \tau, \quad (3.458)$$

colocamos então

$$p_\mu A^\mu = 0, \quad (3.459)$$

$$p_\mu B^\mu = 0. \quad (3.460)$$

Como antes, $(J^{5\mu})^2 < 0$,

$$(J^{5\mu})^2 = \left(\frac{m\hbar}{|p|} \right)^2 + A^2 e^{2\omega\tau} + 2AB + B^2 e^{-2\omega\tau} < 0, \quad \forall \tau. \quad (3.461)$$

Como $e^{2\omega\tau}$ cresce, A^2 deve ser negativo.

$$A^2 < 0, \quad (3.462)$$

pelo menos para $\tau \rightarrow +\infty$. A solução geral para $x^i(\tau)$ e $x^0(\tau)$ é

$$x^i(\tau) = X^i - \frac{e_2 m\hbar}{2|p|^2} p^i \tau + \frac{1}{2|p|} A^i e^{\omega\tau} - \frac{1}{2|p|} B^i e^{-\omega\tau}, \quad (3.463)$$

$$x^0(\tau) = X^0 - \frac{e_2 m\hbar}{2|p|^2} p^\mu \tau + \frac{1}{2|p|} A^0 e^{\omega\tau} - \frac{1}{2|p|} B^0 e^{-\omega\tau}. \quad (3.464)$$

Este movimento hiperbólico já foi observado [111]. Infelizmente a descrição aqui não pode ser

dada com tantos detalhes como no primeiro caso. É impossível inverter $x^0 = x^0(\tau)$. Podemos, entretanto, exibir uma solução estacionária no seguinte sentido: $\tau \rightarrow +\infty$. Neste caso, x^0 é proporcional a $e^{\omega\tau}$ e os termos com τ e $e^{-\omega\tau}$ são desprezíveis comparados a $e^{\omega\tau}$. Então,

$$x^0(\tau) \approx \frac{1}{2|p|} A^0 e^{\omega\tau} \Rightarrow e^{\omega\tau} = \frac{2|p|c}{A^0} t, \quad (3.465)$$

que implica

$$x^i(t) = X^i + c \frac{A^i}{A^0} t. \quad (3.466)$$

Se lembrarmos que $A^2 < 0$, veja (3.462), então a velocidade da partícula é restrita

$$A^2 = -|A|^2 \Rightarrow (A^0)^2 = \vec{A}^2 + |A|^2. \quad (3.467)$$

Substituindo esta expressão no quadrado da velocidade

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = c^2 \frac{\vec{A}^2}{(A^0)^2} = c^2 \frac{\vec{A}^2}{\vec{A}^2 + |A|^2} < c^2, \quad (3.468)$$

como queríamos. Finalmente, resta considerar o vínculo $(J^{AB})^2 = 8a_3a_4$.

$$\begin{aligned} 8a_3a_4 = (J^{AB})^2 &= -2(J^{5\mu})^2 + (J^{\mu\nu})^2 \\ &= -2\left(\frac{m\hbar c}{|p|}\right)^2 + (\Sigma^{\mu\nu})^2 - 8AB. \end{aligned} \quad (3.469)$$

Para o cálculo acima usamos os fatos que $pA = pB = 0$ e ainda $p_\mu \Sigma^{\mu\nu} = 0$. Calculando então $(\Sigma^{\mu\nu})^2$, chegamos a

$$4a_3a_4 = -\left(\frac{m\hbar c}{|p|}\right)^2 + \left(\frac{2|p|}{m\hbar c}\right)^2 [(\vec{A} \times \vec{B})^2 - (A^0 \vec{B} - B^0 \vec{A})^2] - 4AB. \quad (3.470)$$

Para finalizar, façamos um resumo das soluções obtidas com as respectivas restrições. As variáveis x^μ e J^{AB} são dadas por,

$$x^\mu(\tau) = X^\mu - \frac{e_2 m \hbar c}{2|p|^2} p^\mu \tau + \frac{1}{2|p|} A^\mu e^{\omega\tau} - \frac{1}{2|p|} B^\mu e^{-\omega\tau}, \quad (3.471)$$

$$J^{5\mu}(\tau) = -\frac{m\hbar c}{|p|^2} p^\mu + A^\mu e^{\omega\tau} + B^\mu e^{-\omega\tau}, \quad (3.472)$$

$$J^{\mu\nu}(\tau) = \Sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{|p|} (p^\mu A^\nu - p^\nu A^\mu) e^{\omega\tau} - \frac{1}{|p|} (p^\mu B^\nu - p^\nu B^\mu) e^{-\omega\tau}, \quad (3.473)$$

onde $\omega = e_2 |p|$. Infelizmente neste caso só foi possível escrever a solução na sua forma implí-

cita. As constantes de integração satisfazem,

$$p_\mu A^\mu = p_\mu B^\mu = 0, \quad p_\mu \Sigma^{\mu\nu} = 0; \quad (3.474)$$

$$\Sigma^{0i} = \frac{2|p|}{m\hbar}(A^0 B^i - B^0 A^i), \quad \Sigma^{ij} = \frac{2|p|}{m\hbar}(A^i B^j - A^j B^i); \quad (3.475)$$

$$4a_3 a_4 = - \left(\frac{m\hbar}{|p|} \right)^2 + \left(\frac{2|p|}{m\hbar} \right)^2 [(\vec{A} \times \vec{B})^2 - (A^0 \vec{B} - B^0 \vec{A})^2] - 4AB. \quad (3.476)$$

Por fim, as constantes A^μ e B^μ são tais que $(J^{5\mu})^2 < 0$ para todo τ . Em particular, como $\tau \rightarrow +\infty$, temos $A^2 < 0$.

3.4.8 Variáveis livres do *Zitterbewegung*

No trabalho [97], Schrödinger separou o operador de posição \hat{x} para o elétron de Dirac em duas partes, uma relacionada com o movimento retilíneo e a outra com o *Zitterbewegung*. As duas partes são chamadas usualmente de centro de massa e centro de carga. Na nossa teoria, para o análogo ao centro de massa (coordenadas de Pryce-Newton-Wigner), tomamos

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2p^2} p_\nu J^{\mu\nu}. \quad (3.477)$$

A equação de movimento para a variável \tilde{x} é

$$\dot{\tilde{x}}^\mu = \tilde{e} p^\mu; \quad \tilde{e} \equiv -\frac{e_2 m\hbar}{2p^2}, \quad (3.478)$$

onde usamos as equações de movimento de J^{AB} dadas em (3.322), (3.323) e o vínculo (3.284). Assim, a partícula \tilde{x} se move numa linha reta $\tilde{x}^i(t) = X^i + c \frac{p^i}{p^0} t$, livre do *Zitterbewegung*. A equação (3.478) nos permite interpretar p^μ como o momento para variável \tilde{x}^μ . É interessante observar que $\tilde{x}^\mu(t)$ é invariante de calibre. Para $p^2 < 0$, a velocidade da partícula é restrita. Escrevemos $(p^0)^2 = (p^i)^2 + |p|^2$. Assim, substituindo p^0 no quadrado da velocidade fornece

$$\left(\frac{d\tilde{x}^i}{dt} \right)^2 = c^2 \frac{(p^i)^2}{(p^i)^2 + |p|^2} < c^2. \quad (3.479)$$

Para as variáveis de spin livres do *Zitterbewegung* tomamos o vetor de Pauli-Lubanski

$$S^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\nu J_{\alpha\beta}. \quad (3.480)$$

Ele não precessiona $\dot{S}^\mu = 0$ e no sistema onde a partícula não tem movimento retilíneo $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$, temos

$$S^\mu = \left(0, \frac{1}{2} mc \varepsilon^{ijk} J_{jk} \right), \quad (3.481)$$

que é exatamente o gerador de rotações em 3 dimensões, como esperado. $S^\mu(t)$ é também invariante de calibre. Substituindo a solução (3.446) para J_{ij} em S^i dado acima, encontramos

$$S^i = \frac{mc}{\hbar} \varepsilon^{ijk} B^j A^k. \quad (3.482)$$

Agora utilizando o vetor \vec{s} construído em (3.443), temos

$$S^i = 2mcs^i. \quad (3.483)$$

Logo, temos uma possível interpretação para o vetor de spin de Pauli-Lubanski: é o momento angular associado ao *Zitterbewegung*.

3.4.9 Comparação com a teoria de Barut-Zanghi

Barut e Zanghi construíram um tensor de spin $S_{\mu\nu}$ com ajuda do espinor de Dirac z

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \bar{z} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] z. \quad (3.484)$$

Parte das equações de movimento são

$$\dot{x}^\mu = v^\mu; \quad \dot{S}^{\mu\nu} = \pi^\mu v^\nu - \pi^\nu v^\mu. \quad (3.485)$$

Se fizermos a identificação $J^{5\mu} \leftrightarrow v^\mu$, $J^{\mu\nu} \leftrightarrow S^{\mu\nu}$ e $p^\mu \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi^\mu$, então, no calibre $e_2 = 2$ nossas equações coincidem com as de Barut e Zanghi.

3.4.10 Generalização: modelo com $p^2 + m^2c^2 = 0$

Quando derivamos a equação de Dirac, obrigamos que as matrizes α^μ satisfizessem a álgebra (3.200), que implicava na relação $p^2 + m^2c^2 = 0$. Isto é, cada uma das 4 componentes de $\psi = (\psi_a)$, $a = 1, 2, 3, 4$ em (3.204) satisfazem

$$(p^2 + m^2c^2)\psi_a = 0. \quad (3.486)$$

Por outro lado, classicamente o vínculo

$$T_2 = p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0 \quad (3.487)$$

não implica em

$$T_1 = p^2 + m^2c^2. \quad (3.488)$$

Para melhorar esta situação seria interessante construir uma teoria em que T_1 aparecesse como um vínculo independente. Observe que quando discutimos as variáveis \tilde{x} em (3.477), para que a partícula tivesse velocidade restrita, pedimos que $p^2 < 0$. Esta situação é imediatamente satisfeita caso a teoria contenha T_1 . Vamos então discutir brevemente o modelo para uma partícula com spin onde além de T_2 , a teoria apresente também o vínculo T_1 [112]. A ação Hamiltoniana neste caso será

$$S = \int d\tau [p_\mu \dot{x}^\mu + \pi_A \dot{\omega}^A + \pi_{e_a} \dot{e}_a - H] \quad (3.489)$$

onde $a = 1, 2, 3, 4$ e

$$H = \frac{e_a}{2} T_a + \lambda e_a \pi_{e_a}. \quad (3.490)$$

Estamos usando a mesma notação anterior. A única diferença da Hamiltoniana acima para (3.286) é a presença do termo $\frac{e_1}{2} T_1$, juntamente com o multiplicador de Lagrange e momento correspondente: $\lambda_{e_1} \pi_{e_1}$. A variação da ação com respeito às variáveis ω^A e π_B nos leva às mesmas equações dadas em (3.289)-(3.290) e (3.293)-(3.294). A variação com respeito às variáveis auxiliares e_a nos leva aos vínculos $T_a = 0$. Como antes, $\dot{T}_4 = 0$ implica $T_5 = 0$. Já temos todos os vínculos que definem a superfície de spin. Com $\dot{T}_5 = 0$ obtemos $e_4 = \frac{a_3}{a_4} e_3$ e por fim o multiplicador $\lambda_{e_4} = \frac{a_3}{a_4} \lambda_{e_3}$. Como anteriormente, λ_{e_2} e λ_{e_3} não podem ser encontrados, bem como λ_{e_1} , já que adicionamos o vínculo de primeira classe T_1 na formulação. Anteriormente, quando $e_1 = 0$, as variáveis e_2 e e_3 entravam como funções arbitrárias nas equações de movimento para ω^A e π_B . x^μ só tinha o arbítrio devido a e_2 , que estava relacionado com invariância de reparametrizações da teoria. Agora a própria equação de movimento para x^μ possui dois arbítrios devidos a e_1 e e_2

$$\dot{x}^\mu = e_1 p^\mu + \frac{e_2}{2} J^{5\mu}. \quad (3.491)$$

Variáveis com dinâmica ambígua não representam observáveis do modelo, que é exatamente o caso de x^μ . Neste sentido matamos o *Zitterbewegung*: como para $e_a = const.$ temos

$$\ddot{x}^\mu = -\frac{1}{2} e_2^2 J^{\mu\nu} p_\nu, \quad (3.492)$$

a coordenada apresenta o movimento oscilatório, que como discutimos, não pode ser um fenômeno observável. De acordo com a teoria geral [20, 28, 29], as variáveis físicas são aquelas que possuem dinâmica determinística. Para a variável de posição, assim como antes, tomamos as coordenadas de Pryce-Newton-Wigner

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2p^2} p_\nu J^{\mu\nu}. \quad (3.493)$$

A equação de movimento para \tilde{x}^μ é

$$\dot{\tilde{x}}^\mu = \tilde{e} p^\mu; \quad \tilde{e} = e_1 + \frac{\hbar e_2}{2mc}. \quad (3.494)$$

Se lembrarmos que $\dot{p}_\mu = 0$, temos uma estrutura similar à da partícula relativística livre: a ambiguidade devido a \tilde{e} está relacionada com a invariância de reparametrizações da teoria. A dinâmica determinística é dada por

$$\frac{d\tilde{x}^i}{dt} = c \frac{p^i}{p^0}. \quad (3.495)$$

Como $p^2 + m^2 c^2 = 0$, a velocidade da partícula \tilde{x} é restrita. Observe que estas coordenadas são livres do *Zitterbewegung*.

Para as variáveis de spin livres do *Zitterbewegung* tomamos, como antes, o vetor de spin de Pauli-Lubanski,

$$S^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\nu J_{\alpha\beta}. \quad (3.496)$$

Não há diferença nenhuma desta parte para a da Subseção anterior, já que com o acréscimo do vínculo $T_1 = 0$, o setor (ω^A, π_B) ficou intocado. Vamos terminar com um comentário sobre a interação com o campo eletromagnético externo. As equações de Klein-Gordon e Dirac na presença de campo externo são dadas por (3.221) e (3.213). Logo os vínculos que deveriam reproduzi-las são

$$\tilde{T}_1 = (p^\mu - eA^\mu)^2 - \frac{e}{2} F_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + m^2 c^2 = 0, \quad (3.497)$$

$$\tilde{T}_2 = (p_\mu - eA_\mu) J^{5\mu} + mc\hbar = 0. \quad (3.498)$$

O seu parêntesis de Poisson é dado por

$$\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\} = \frac{e}{2} \partial_\alpha F_{\mu\nu} J^{\mu\nu} J^{5\alpha}. \quad (3.499)$$

Quando o campo externo é constante,

$$\{\tilde{T}_1, \tilde{T}_2\} = 0. \quad (3.500)$$

Assim, os vínculos são de primeira classe e conseguimos ligar a interação sem quebrar as simetrias locais do modelo.

3.4.11 Resumo dos resultados

Apresentamos uma derivação da equação que primeiramente tentou descrever efeitos de spin: a equação de Pauli. Usando somente argumentos ligados com Mecânica Quântica (princípio da superposição) e Relatividade Especial (tratar momento e energia no mesmo pé de igualdade), derivamos a equação de Dirac. Ela apresenta variáveis adicionais que descrevem o spin relativisticamente. Mostramos um dos grandes sucessos da equação de Dirac: ela leva à equação de Pauli no limite de baixas energias (e campo eletromagnético fraco). Levantamos então alguns problemas da equação de Dirac, entre eles, um desequilíbrio entre variáveis de posição e momento; a velocidade do elétron de Dirac e o *Zitterbewegung* para motivar a construção de um modelo semiclássico que pode contornar estas dificuldades. A descrição dos graus de liberdade de spin foram feitos numa superfície 7-dimensional imersa no espaço de fase ω^A, π_B equipado com os parêntesis de Poisson $\{\omega^A, \pi^B\} = \eta^{AB}$. A superfície foi definida pelas equações $(\pi^A)^2 + a_3 = 0$, $\omega^A \pi^A = 0$ e $(\omega^A)^2 + a_4 = 0$, onde $a_{3,4}$ são constantes positivas. No lugar das variáveis iniciais, usamos variáveis de momento angular $J^{5\mu}, J^{0i}$ como coordenadas do espaço de spin. As razões, entre outras, são

1. $J^{AB}(t)$ são quantidades invariantes de calibre do modelo. Logo, podem ser possíveis observáveis para a teoria.
2. A quantização das variáveis de spin J^{AB} leva às matrizes Γ e à álgebra correspondente.

Além do mais, o modelo também apresenta o vínculo $p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0$, que imposto no vetor de estado produz a equação de Dirac na quantização.

Apresentamos uma possível realização dinâmica do modelo: a ação Hamiltoniana foi definida no espaço de fase com coordenadas $x^\mu, p_\nu, \omega^A, \pi_B, e_l$ e π_{e_l} . As variáveis auxiliares e_l garantiram a aparência dos vínculos desejados que definem a superfície do spin. Devido à relação $(J^{5\mu})^2 + 4[a_3(\omega^5)^2 + a_4(\pi^5)^2] = 0$, a partícula possui velocidade restrita, veja (3.321). Esta propriedade contorna o primeiro problema da equação de Dirac discutido anteriormente, que os únicos possíveis valores para a velocidade do elétron são $\pm c$.

O modelo apresentou duas simetrias locais, sendo uma delas invariância de reparametrizações.

Resolvemos as equações de movimento para as variáveis invariantes de calibre $x^i(t)$ e $J^{AB}(t)$. Ambas as soluções apresentaram *Zitterbewegung*. Foi possível mostrar que o *Zitterbewegung* ocorre num plano ortogonal ao movimento retilíneo. Outra possível solução para as equações de movimento produziu um movimento hiperbólico.

Exibimos variáveis também invariantes de calibre $\tilde{x}^i(t)$, operador de posição de Pryce-Newton-Wigner do elétron de Dirac, que resolveu os problemas da equação de Dirac:

- i) Como $\tilde{x}^\mu = \tilde{e}p^\mu$, p^μ pode ser interpretado como o momento conjugado a \tilde{x}^μ .
- ii) Para $p^2 < 0$, a partícula \tilde{x} tem uma velocidade restrita, veja (3.479).
- iii) A solução $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(t)$ é livre do *Zitterbewegung*.

Para as variáveis de spin livres do *Zitterbewegung* tomamos o vetor de spin de Pauli-Lubanski. Mostramos o seguinte resultado: o vetor de spin de Pauli-Lubanski pode ser interpretado como o momento angular associado ao *Zitterbewegung* (3.483). Discutimos também outra maneira de matar o movimento oscilatório da partícula x , [112]. Foi construído um modelo com ambos os vínculos $p^2 + m^2c^2 = 0$ e $p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0$. O vínculo de primeira classe $p^2 + m^2c^2 = 0$ é o gerador de uma simetria local para x^μ , que não pode ser invariante de gauge. Neste caso, o modelo é livre do *Zitterbewegung*, já que x^μ não pode ser observável. Este modelo supre uma deficiência do modelo anterior, já que $p_\mu J^{5\mu} + mc\hbar = 0$ não implica na relação de dispersão $p^2 + m^2c^2 = 0$. Por fim descrevemos como fazer a interação do modelo com campo eletromagnético externo homogêneo.

4 CONCLUSÃO

Começamos este trabalho motivando o uso de método de Dirac-Bergmann para hamiltonização de sistemas singulares a partir de vários exemplos, incluindo mecânicas clássica e quântica, teoria eletromagnética, teoria de Yang-Mills, gravitação, teoria de cordas e membranas, teorias de calibre e partícula relativística livre. Eles compartilham a seguinte similaridade: todos são descritos por uma Lagrangiana singular, cuja análise pode ser feita utilizando o algoritmo de Dirac para a correspondente hamiltonização. Apresentamos então o método em detalhes, numa sequência de passos. Discutimos também a interpretação para teorias singulares para os casos em que estão presentes vínculos de primeira e segunda classes separadamente. Como continuação natural, estendemos o método para teorias de campo. Com alguns exemplos, deixamos claro certas sutilezas que aparecem quando passamos de sistemas discretos para contínuos.

O objetivo central desta tese foi apresentar diversas aplicações distintas para o método de Dirac, tanto para sistemas mecânicos discretos quanto para contínuos. Vamos resumir os resultados.

1. Após revisar um algoritmo de obtenção de simetrias locais para teorias singulares, descrevemos o método para teorias de campo. O método de obtenção de simetrias pode ser resumido da seguinte maneira: partindo de uma Lagrangiana singular, constroi-se uma Lagrangiana estendida, equivalente à inicial através de métodos algébricos e em termos das quantidades da formulação inicial. Os geradores das simetrias da teoria estendida são os próprios vínculos (de primeira classe) da formulação inicial. O método é aplicado para alguns exemplos, incluindo Eletromagnetismo, Yang-Mills e modelo Sigma não linear.
2. Apresentamos uma maneira de obter as regras cinemáticas da Relatividade Especial Dupla de Magueijo-Smolín, incluindo a relação de dispersão deformada de energia-momento e a transformação de Lorentz não linear dos momentos. Partimos de uma Lagrangiana singular invariante sob a ação do grupo $SO(1,4)$. A relação de dispersão deformada aparece quando fixamos um calibre específico. A regra de transformação dos momentos surge quando impomos a covariância do calibre escolhido.

3. Mostramos que é possível obter a equação de Schrödinger a partir de uma reformulação do paradigma da quantização canônica, onde espaço e tempo são quantizados. Usamos uma Lagrangiana singular com invariância de reparametrizações, construída usando a forma paramétrica da trajetória da partícula. O vínculo do modelo, imposto sobre o vetor de estado, fornece a equação de Schrödinger. Observamos ainda que não precisamos postular a equação de Schrödinger, já que ela surge naturalmente da formulação da mecânica clássica de uma partícula com invariância de reparametrizações.
4. Após uma revisão sobre as descrições do spin, incluindo a equação de Pauli e a equação de Dirac, construímos um modelo semiclássico que descreve uma partícula relativística com spin. Usamos variáveis de momento angular para parametrizar o espaço do spin, que é construído a partir de vínculos presentes no formalismo Hamiltoniano correspondente. A quantização do modelo leva à equação de Dirac e às matrizes gama. O modelo conseguiu cobrir algumas dificuldades apresentadas pela equação de Dirac, apesar de não apresentar a relação $p^2 + m^2c^2 = 0$, antes da quantização. Assim, como sua generalização natural, discutimos por fim um modelo que continha as mesmas propriedades do primeiro, além de conter também a condição de massa prevista pela relatividade especial para toda partícula massiva.

5 PERSPECTIVAS

Na Seção 3.4 discutimos como o modelo de partícula relativística com spin poderia cobrir os problemas da equação de Dirac levantados. Para isso, definimos coordenadas

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \frac{1}{2p^2} p_\nu J^{\mu\nu}. \quad (5.1)$$

A partícula \tilde{x} apresentou as seguintes propriedades:

- a) p^μ foi interpretado como o momento conjugado a \tilde{x}^μ ;
- b) A partícula possui velocidade restrita devido à relação $p^2 + m^2 c^2 = 0$;
- c) A partícula \tilde{x} é livre do indesejável *Zitterbewegung*.

Contudo, precisamos pagar um preço para esta descrição: temos uma geometria não comutativa, já que $\{\tilde{x}^\mu, \tilde{x}^\nu\} \neq 0$. Neste caso, as letras a), b) e c) acima nos motivam a usar não comutatividade para analisar o modelo de partícula relativística com spin.

CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS

- "Non-Grassmann mechanical model of the Dirac equation", A. A. Deriglazov, B. F. Rizzuti, G. P. Z. Chauca and P. S. Castro, arXiv:1202.5757 [hep-th].

- "Generalization of the Extended Lagrangian Formalism on a Field Theory and Applications", A. A. Deriglazov e B. F. Rizzuti, Phys. Rev. D **83** (2011) 125011; arXiv:1105.4171 v1 [hep-th].

- "Reparametrization-Invariant Formulation of Classical Mechanics and the Schrödinger Equation", A. A. Deriglazov e B. F. Rizzuti, Am. J. Phys. **79** (2011) 882; arXiv:1105.0313 v2 [math-ph].

- "Five-Dimensional Mechanics as the Starting Point for the Magueijo-Smolín Doubly Special Relativity", B. F. Rizzuti e A. A. Deriglazov, Phys. Lett. B **702** (2011) 173; arXiv:1106.5397 v2 [hep-th].

- "Generalization of the Extended Lagrangian Formalism on a Field Theory and Applications for Gauge Theories", painel apresentado no XXXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2010, Passa Quatro - MG.

- "Another comment on "A Lagrangian for DSR Particle and the Role of Noncommutativity", B. F. Rizzuti, arXiv:0710.3724 v2 [hep-th].

- "Doubly Special Relativity and the Problem of its Consistent Construction in Configuration Space", B. F. Rizzuti e A. Deriglazov, painel apresentado no XXVIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2007, Águas de Lindóia - SP.

- "De Sitter Dynamics and Magueijo-Smolín Doubly Special Relativity Kinematics", B. F. Rizzuti and A. A. Deriglazov, painel apresentado no XXVI Encontro Nacional de Física de

Partículas e Campos, 2005, São Lourenço - MG.

- "Position space versions of the Magueijo-Smolín doubly special relativity proposal and the problem of total momentum", A. A. Deriglazov and B. F. Rizzuti, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 123515; arXiv:hep-th/0410087 v4.
- "Particle Dynamics in Doubly Special Relativity Theory", B. F. Rizzuti and A. A. Deriglazov, painel apresentado no XXV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, 2004, Caxambu - MG.
- "Dinâmica de uma partícula em Doubly Special Relativity Theory (DSR)", B. F. Rizzuti e A. A. Deriglazov, painel apresentado no XI Seminário de Iniciação Científica da UFJF, 2004, Juiz de Fora, MG.
- "Descrição de Sistemas Mecânicos com Vínculos Cinemáticos e o Princípio de Hertz", B. F. Rizzuti e A. A. Deriglazov, painel apresentado no X Seminário de Iniciação Científica da UFJF, 2003, Juiz de Fora, MG.

REFERÊNCIAS

- [1] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2** (1950) 129; *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva Univ., New York, 1964).
- [2] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.* **75** (1949) 680.
- [3] P. G. Bergmann and I. Goldberg, *Phys. Rev.* **98** (1955) 531.
- [4] J.L. Anderson and P.G. Bergmann, *Phys. Rev.* **83** (1951) 1018.
- [5] A. A. Deriglazov and B. F. Rizzuti, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 125011; arXiv:1105.4171v1 [hep-th].
- [6] A. A. Deriglazov and B. F. Rizzuti, *Am. J. Phys.* **79** (2011) 882; arXiv:1105.0313v2 [math-ph].
- [7] A. A. Deriglazov, B. F. Rizzuti, G. P. Z. Chauca and P. S. Castro, arXiv:1202.5757 [hep-th].
- [8] B. F. Rizzuti and A. A. Deriglazov, *Phys. Lett. B* **702** (2011) 173; arXiv:1106.5397v2 [hep-th].
- [9] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 3rd. ed. 2002).
- [10] A. A. Deriglazov, *Phys. Lett. A* **373** (2009) 3920; arXiv:0903.1428v3 [math-ph].
- [11] C. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
- [12] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics* (New York, Springer, 1982).
- [13] Pradip Mukherjee and Anirban Saha, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 4305; arXiv:0705.4358v3 [hep-th].
- [14] Rabin Banerjee, Pradip Mukherjee and Anirban Saha, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 026006; arXiv:0403065v2 [hep-th].
- [15] Notas de aula em Teoria Quântica de Campos do Professor Losif Lvovich Buchbinder.
- [16] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. II, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [17] *New Phenomena in Lepton-Hadron Physics*, Edited by Dietrich E. C. Fries and Julius Wess (New York and London, Plenum Press, 1979).
- [18] M. J. Herrero, arXiv:hep-ph/9812242v1.
- [19] David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (New York, John Wiley and Sons, 1987).

- [20] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Berlin: Springer-Verlag, 1990).
- [21] A. A. Deriglazov, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 11083; arXiv:hep-th/0701021v4.
- [22] A. A. Deriglazov, J. Math. Phys. **50** (2009) 012907; arXiv:0901.3893v1 [hep-th].
- [23] Giovanni Amelino-Camelia, Nature **418** (2002) 34; arXiv:gr-qc/0207049v1.
- [24] Giovanni Amelino-Camelia, Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 35; arXiv:gr-qc/0012051v2
- [25] J. Magueijo and L. Smolin, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 190403.
- [26] A. A. Deriglazov and B. F. Rizzuti, Phys. Rev. D **71** (2005) 123515; arXiv:hep-th/0410087v4.
- [27] Giovanni Amelino-Camelia, Symmetry **2**, (2010) 230; arXiv:1003.3942v1 [gr-qc].
- [28] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1992).
- [29] A. A. Deriglazov, *Classical Mechanics, Hamiltonian and Lagrangian Formalism* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010).
- [30] Notas de aula do Prof. André Arbex Hallack em Análise no \mathfrak{R}^n . Disponível em: < http://www.ufjf.br/andre_hallack/files/2009/08/anrn-06.pdf >. Acesso em: 12 out. 2011.
- [31] Elon Lages Lima, Curso de Análise, vol. 2 (Projeto Euclides, IMPA, 2005).
- [32] B. F. Rizzuti, *Busca de Simetrias Locais em Teorias Lagrangeanas Singulares*, Dissertação de mestrado. Disponível em < http://www.btdt.ufjf.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=314 >. Acesso em: 30 out. 2011.
- [33] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1967).
- [34] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 392.
- [35] R. D. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, Nucl. Phys. B **122** (1977) 61.
- [36] Paul Joseph Steinhardt, Ann. Phys. **128** (1980) 425.
- [37] M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Nucl. Phys. B **332** (1990) 169.
- [38] Marc Henneaux, Claudio Teitelboim and J. David Vergara, Nucl. Phys. B **387** (1992) 391.
- [39] Merced Montesinos and José David Vergara, Phys. Rev. D **65** (2002) 064002.
- [40] Merced Montesinos and José David Vergara, Gen. Rel. Grav. **33** (2001) 921.
- [41] Vladimir Cuesta, Merced Montesinos and José David Vergara, Phys. Rev. D **76** (2007) 025025.
- [42] Máximo Bañados, Phys. Rev. D **52** (1995) 5816.

- [43] A. A. Deriglazov and K. E. Evdokimov, *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 4045; A. A. Deriglazov, *Int. J. Mod. Phys. A* **22** (2007) 2105.
- [44] W. M. Seiler and R. W. Tucker, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 4431.
- [45] A. A. Deriglazov and Z. Kuznetsova, *Phys. Lett. B* **646** (2007) 47.
- [46] K. Kamimura, *Nuovo Cimento* **68B** (1982) 33; R. Sugano and T. Kimura, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 2337.
- [47] M. E. V. Costa, H. O. Girotti and T. J. M. Simões, *Phys. Rev. D* **32**, 405 (1985); A. Cabo and D. Louis-Martinez, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2726.
- [48] R. Banerjee and J. Barcelos-Neto, *Ann. Phys.* **265** (1998) 134; J. Barcelos-Neto, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 2265.
- [49] K. Harada and H. Mukaida, *Z. Phys. C* **48** (1990) 151; P. Mitra and R. Rajaraman, *Ann. Phys.* **203** (1990) 137.
- [50] I. Batalin and R. Marnelius, *Mod. Phys. Lett. A* **16** (2001) 1505.
- [51] V. A. Borokhov and I. V. Tyutin, *Physics of Atomic Nuclei* **61** (1998) 1603; *Physics of Atomic Nuclei* **62** (1999) 10.
- [52] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Int. J. Mod. Phys. A* **21** (2006) 327.
- [53] David Derbes, *Am. J. Phys.* **64** (7) (1996) 881.
- [54] Paul Mazur and Robert H. Barron, *Am. J. Phys.* **42** (1974) 600.
- [55] L. I. Schiff, *Quantum mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1949).
- [56] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995).
- [57] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (University of Toronto Press, Toronto, 1949).
- [58] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, revised ed. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [59] M. Srednicki, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [60] F. A. Berezin and M. S. Marinov, *JETP Lett.* **21** (1975) 320; *Ann. Phys.* **104** (1977) 336.
- [61] Robert Marnelius, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2535.
- [62] G. Fulop, D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1941.
- [63] L. Mandelstam and I. G. Tamm, *J. Phys. (USSR)* **9** (1945) 249.
- [64] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **122** (1961) 1649.
- [65] P. Busch, *Lect. Notes Phys.* **734** (2008) 73.

- [66] A. A. Deriglazov, *Int. J. Theor. Phys.* **50** (2011) 654.
- [67] J. Magueijo and L. Smolin, *Phys. Rev. D* **67** (2003) 044017.
- [68] J. Kowalski-Glikman, *Phys.Lett. B* **547** (2002) 291.
- [69] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, *Class. Quantum Grav.* **20** (2003) 4799.
- [70] A. A. Deriglazov, *Phys. Lett. B* **603** (2004) 124.
- [71] D. Kimberly, J. Magueijo and J. Medeiros, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 084007.
- [72] J. Magueijo and L. Smolin, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 1725.
- [73] F. Girelli, T. Konopka, J. Kowalski-Glikman and E. R. Livine, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 045009.
- [74] B. F. Rizzuti, arXiv:0710.3724v2 [hep-th].
- [75] S. Mignemi, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 047702.
- [76] S. Mignemi, arXiv:0711.4053v1 [gr-qc].
- [77] G. Amelino-Camelia and L. Smolin, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 084017.
- [78] G. Amelino-Camelia, C. Lämmerzahl, F. Mercati and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 171302.
- [79] J. Magueijo, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 124020; G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman, L. Smolin, arXiv:1104.2019v1 [hep-th].
- [80] S. Mignemi, *Ann. Phys.* **522** (2010) 924.
- [81] H. S. Snyder, *Phys. Rev.* **71** (1947) 38.
- [82] Daniel M. Greenberger, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 2329; *J. Math. Phys.* **11** (1970) 2341.
- [83] C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys. B* **442** (1995) 593 [Erratum-ibid. B **456** (1995) 753].
- [84] M. Daszkiewicz, K. Imilkowska, and J. Kowalski- Glikman, *Phys. Lett. A* **323** (2004) 345.
- [85] Carlo Rovelli, arXiv:0808.3505v2 [gr-qc].
- [86] T. Kifune, *Astrophys. J. Lett.* **518** (1999) L21.
- [87] G. Amelino-Camelia and T. Piran, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 036005.
- [88] Simon Judes and Matt Visser, *Phys.Rev. D* **68** (2003) 045001.
- [89] W. Gerlach e O. Stern, *Zeitschrift für Physik* **9** (1922) 353.
- [90] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Quantum Mechanics*, vols. I, II (John Wiley and Sons, New York, 1977).

- [91] Neil W. Ashcroft e N. David Mermin, *Solid State Physics* (Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976).
- [92] G. E. Uhlenbeck and S. A. Goudsmit, *Naturwissenschaften* **13** (1925) 953; *Nature* **117** (1926) 264.
- [93] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1958).
- [94] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* **117** (1928) 610.
- [95] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, New Jersey, 2003).
- [96] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [97] E. Schrödinger, *Sitzunger. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* **24** (1930) 418.
- [98] L. Lamata, J. León, T. Schätz, e E. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 253005; Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Robert Keil, Andreas Tünnermann, Stefan Nolte, Stefano Longhi, e Alexander Szameit, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 143902; J. Y. Vaishnav e Charles W. Clark, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 153002.
- [99] W. Pauli, *Z. Phys.* **31** (1925) 373.
- [100] L. H. Thomas, *Nature* **117** (1926) 514.
- [101] J. Frenkel, *Z. Phys.* **37** (1926) 243.
- [102] I. M. Ternov and V. A. Bordovitsyn, *Sov. Phys. Usp.* **23** (1980) 679.
- [103] V. Bargmann, L. Michel and V. L. Telegdi, *Phys. Rev. Lett.* **2** (1959) 435.
- [104] J. D. Jackson, *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976) 417.
- [105] A. J. Hanson and T. Regge, *Ann. Phys.* **87** (1974) 498.
- [106] A. O. Barut and N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 2009.
- [107] A. A. Deriglazov, *Mod. Phys. Lett. A* **25** (2010) 2769.
- [108] M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc. A* **195** (1948) 62.
- [109] T. D. Newton and E. P. Wigner, *Rev. Mod. Phys* **21** (1949) 400.
- [110] A. O. Barut and W. Thacker, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 1386.
- [111] N. Kudryashova and Y. N. Obukhov, *Phys. Lett. A* **374** (2010) 3801.
- [112] A. A. Deriglazov, arXiv:1106.5228v1 [hep-th].