

“Os números reais”: um convite ao
professor de matemática do ensino
fundamental e do ensino médio

Willian José da Cruz

Juiz de Fora (MG)

Abril, 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Willian José da Cruz

“Os números reais”: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)

Abril, 2011

Willian José da Cruz

“Os números reais”: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares

Prof^a. Dr^a. Romelia Mara Alves Souto

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Juiz de Fora, 29 de abril de 2011.

Cruz, Willian José da.

Os números reais : um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio / Willian José da Cruz. – 2011. 120 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números reais. 3. Formação de professores. I. Título.

CDU 51(075)

DEDICATÓRIA

À minha esposa, aos meus filhos,
aos meus pais, aos meus professores
e aos meus amigos, pelo apoio
recebido durante a elaboração
deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu forças para vencer esta etapa, proporcionando-me momentos de paciência e de segurança, que me permitiram alcançar êxito neste trabalho.

À minha família, que colaborou no decorrer deste trabalho, sempre me apoiando nos momentos mais difíceis e me incentivando, quando solicitada, permitindo criar um ambiente propício ao estudo e à pesquisa.

A meu orientador, o Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares por compartilhar comigo seus conhecimentos, suas angústias e sua vontade de transformar a educação, sendo parceiro nos momentos de vitória e amigo nas horas de frustração e de preocupação.

À Prof^a. Dr^a. Regina Kopke, pela colaboração extremada neste trabalho, contribuindo para o desenvolvimento dele, com sutileza e com o olhar dinâmico e minucioso, conferindo a ele o grau de cientificidade e de estética tão característico de sua conduta profissional.

Aos meus colegas de turma, pelo companheirismo constante e pelos momentos de descontração, deixando sempre presente a certeza de estarmos juntos, no mesmo barco!!!

RESUMO

Com a percepção que distingue a matemática escolar em vários aspectos da matemática científica, esta pesquisa propõe uma aproximação entre essas duas formas conceituais, no que discute o entender e fazer matemática, perpassando pelas ideias que diferenciam cada uma delas. Ainda que num tratamento formal na apresentação dos Números Reais, serão apontadas possíveis consequências e aplicações desta apresentação nas séries finais do ensino fundamental e do ensino médio. Esta pesquisa também é uma tentativa de iniciar uma reflexão, a partir dos Números Reais, que possa permitir uma mudança na forma de trabalho com a disciplina Análise Real, nos cursos de Licenciatura em Matemática, diminuindo a dicotomia entre a formação matemática do professor e sua prática docente.

Palavras-chave: Educação Matemática, Matemática Escolar, Análise Real, Números Reais, Licenciatura em Matemática, Formação de Professores.

ABSTRACT

With the perception that distinguishes school mathematics in various scientific aspects of mathematics, this research proposes a rapprochement between these two conceptual ways in which discusses the understanding and doing mathematics, passing by the ideas that distinguish each one. Although a formal treatment in the presentation of real numbers, will be pointed out the possible consequences and applications of this presentation in the final grades of elementary school and high school. This research is also an attempt to initiate a reflection from the real numbers, that would enable a shift in the discipline of working with Real Analysis courses in Mathematics, reducing the dichotomy between mathematics teacher education and practice teacher.

Keywords: Mathematics Education, School Mathematics, Real Analysis, Real Numbers, Mathematics Degree, Teacher Education.

MEMORIAL

Há quinze anos, lecionando, o autor busca compreender as causas que levaram a Matemática ao *status* de matéria escolar mais temida pela grande maioria das pessoas. Tanta importância é dada a esse conteúdo que estudantes e escolas colocam a Matemática como uma das disciplinas principais do currículo e um dos parâmetros de discussão para determinar quem aprende de fato ou quem tem dificuldades em aprendizagem e ainda para determinar níveis de inteligência.

Seu envolvimento mais próximo com a Matemática foi estimulado por causa de uma reprovação que teve na então 7ª série do 1º grau (hoje ensino fundamental), em que não entendia os significados dos produtos notáveis ou das regras de simplificações das enormes expressões algébricas. Esse conteúdo não despertava expectativas ou prazer para entender a Matemática, o que era como desvendar um mistério que não levava a lugar nenhum.

Na busca de vencer tal situação de desconforto familiar, pois todos de sua família sentiram muito essa reprovação, debruçou-se sobre os livros para tentar “vencer esse conteúdo” que parecia um cofre fechado, no qual, para rompê-lo, teria que descobrir o seu segredo.

A partir dessa insatisfação, aliada à vontade de superar aquela reprovação, os conceitos matemáticos elementares passaram a fazer algum sentido para ele. Já no 2º grau (hoje ensino médio), tornou-se professor de reforço dos estudantes de 5ª a 8ª séries, à época da Escola Estadual Henrique Diniz, localizada em um bairro de Barbacena, zona da mata mineira, iniciando, mesmo que de maneira não formal, sua carreira na perspectiva da educação.

Naquele momento, ouvia daqueles estudantes alguns questionamentos que mostravam a indignação dos mesmos frente à Matemática: “Por que estudamos essa matéria?” “Quem inventou essa matéria?” perguntavam frequentemente.

Esses questionamentos também faziam parte do cotidiano do autor. Assim começou a surgir nele, a vontade de se tornar, de fato, professor e de mudar a visão daqueles e de outros estudantes quanto um aprendizado significativo em Matemática.

Ao final do 2º grau, ingressou no curso de Matemática de uma universidade de Barbacena, MG, com uma vontade enorme de obter um conhecimento que

despertasse o interesse dos estudantes quanto à importância de estudar Matemática e seus principais objetivos.

Dentro de uma visão acadêmica, a Matemática, no curso de licenciatura, era trabalhada de uma forma muito técnica que só fazia aumentar a sua angústia quanto aos questionamentos surgidos na época em que era professor de reforço e via que nada estava mudando e, a cada dia, se tornava mais grave a resistência e o desconforto de estudantes, com o ensino e com a aprendizagem dessa matéria.

Durante o curso de graduação, assumiu algumas aulas em escolas públicas estaduais e na rede privada e começou a ver, nos estudantes daquelas turmas, as mesmas dificuldades que havia sentido quando cursava o ensino fundamental.

Sendo premiado como 1º aluno de sua turma, e mais confiante em buscar formas de transformar a realidade matemática dos estudantes, com os quais tinha contato, após a formatura no curso de Licenciatura em matemática em 1998, percebeu a necessidade, cada vez maior, de buscar respostas para tamanha inquietação.

Aprovado no concurso público da Prefeitura Municipal de Barbacena, MG, em 1999, e tendo sido convidado para atuar como professor de matemática em uma escola particular de ensino fundamental nessa cidade, no mesmo ano, e, dois anos após, aprovado no concurso público do Estado de Minas Gerais, e também convidado a lecionar no ensino superior da mesma universidade particular de Barbacena na qual se formou, vivenciou, de perto, os questionamentos relacionados ao ensino e aprendizagem da Matemática.

Sentindo a necessidade de diminuir os questionamentos em relação ao ensino e a aprendizagem da Matemática, o autor buscou formas de contribuir para uma melhor aproximação entre aluno, e matéria.

Nesse momento, nasce o projeto “Matemática *in Concert* (CRUZ & KOPKE, 2010), que inicialmente tinha o nome de “Ensinando Matemática com Música”. O desenvolvimento do projeto possibilitou que a Matemática se tornasse mais prazerosa e mais dinâmica, mas algumas dificuldades fizeram com que o projeto não alcançasse, naquele momento, os resultados esperados, como por exemplo, convencer a direção da escola na qual o projeto se iniciou de que era um passo para diminuir a resistência por esse conteúdo.

Como estava convencido da possibilidade de que esse seria um caminho para aumentar o gosto pela Matemática, continuou compondo músicas e, de forma

não muito ordenada, apresentando as canções para os estudantes (CRUZ & KOPKE, 2010).

Por sua inquietação com a aprendizagem da matemática, o autor procurou, em 1999, cursar pós-graduação, em especialização em Matemática, na qual se convenceu do que queria como professor. O curso possibilitou que tivesse acesso ao conhecimento matemático de uma forma que não havia tido chance de ter na graduação, mas a inquietação sobre a matemática na escola permanecia, pois os estudos apenas fizeram aprofundar a constatação de que o ensino de matemática permanecia ancorado no tecnicismo e na apresentação de conteúdos formais e já postos.

Isso fez o autor entender a tamanha resistência, por parte das pessoas, quanto ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. Então, continuou procurando, em sua atuação como professor, caminhos que tornassem o conhecimento dessa matéria mais acessível aos estudantes.

Com a oportunidade que teve, durante cinco anos, em trabalhar no ensino superior de uma universidade particular de Barbacena, MG, no curso de Licenciatura em matemática com as disciplinas: Álgebra Linear, Geometria Plana, Geometria Analítica e Introdução à Análise Matemática (Análise Real), percebeu que algumas dessas disciplinas não apresentavam ligação direta com a matemática desenvolvida no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio. Essa percepção já se concretizava na licenciatura e na pós-graduação em que o autor era aluno.

Em 2002, assumiu por dois anos a direção da Escola Municipal Crispim de Paula Nésio, de ensino fundamental, na zona rural da cidade de Barbacena, MG, e, a partir daí, começou a conhecer de perto a problemática causada pelo ensinar e pelo aprender matemática no ensino fundamental. Nesse momento, ouvia dos professores de matemática, que lecionavam nessas turmas, relatos de estudantes que tinham aversão pela matemática e, principalmente, pelo trabalho com os Números Reais. Muitas vezes, esses estudantes não faziam as atividades desse conteúdo, tendo dificuldades em assimilar as ideias constituídas nessa matéria.

Ainda na direção dessa escola, o autor percebeu também que o problema, relacionado ao ensinar e ao aprender matemática não era especificamente nas séries finais do ensino fundamental, mas em todos os ciclos da escolaridade básica.

Em 2009, ingressou no curso de Pós-graduação *stricto sensu* da UFJF, no Mestrado Profissional em Educação Matemática, e nessa trajetória, tendo mais

contato com essa forma de fazer *educação* pela *matemática*, o autor entendeu que toda prática que considera ser determinada por uma concepção matemática é denominada de Educação Matemática.

O autor concorda com Bicudo (1991, p. 8) que a Educação Matemática necessita compreender o humano, o social, não considerando a Filosofia, a Psicologia, a Sociologia, a Economia, a Antropologia e a História da linguagem como conhecimentos estanques, pois sua região de inquérito é formada por esse todo.

Mais próximo das leituras em Educação Matemática, outras reflexões foram compreendidas e assumidas pelo autor, o qual acredita que a matemática, nas concepções de Educação Matemática, é considerada apenas um termo ou uma palavra que ganha consistência, materializando-se apenas em uma prática.

Essas reflexões e as experiências vividas pelo autor, tanto como estudante ou como professor, reforçaram a percepção de que havia um afastamento entre o que se aprende no conteúdo de Análise Real no curso de Licenciatura em Matemática e o que é praticado pelo professor de matemática no ensino fundamental e no ensino médio.

Essa percepção, associada às questões anteriores quando cursava os cursos de graduação e de pós-graduação e quando era professor desse conteúdo, deixaram o autor cada vez mais instigado e motivado a buscar um aprofundamento conceitual para entender como estão sendo abordados os Números Reais na perspectiva da Análise Real, no ensino fundamental e no ensino médio.

Com essa percepção, o autor se sentiu motivado em desenvolver esta pesquisa, que tem como ponto principal a vontade de aproximar o conhecimento formal da matemática dos cursos de Análise Real ao desenvolvimento da matemática no ensino fundamental e no ensino médio, valorizando os aspectos construtivos da matemática escolar e respeitando as objetividades da matemática acadêmica.

Lecionando atualmente no ensino superior, na Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF, MG, o autor percebe que esse afastamento entre o que se aprende no curso de Análise Real e a matemática desenvolvida no ensino fundamental e no ensino médio se acentuam por uma dificuldade em encontrar leituras que possam contribuir para essa possível aproximação, o que justifica o empenho em empreender esta pesquisa, a qual se mostra na vontade de apresentar os Números

Reais em suas estruturas algébrica e topológica, no intuito de desvelar consequências desses no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

Propõe-se nesta pesquisa, iniciar, se possível, uma reflexão da forma como poderia ser trabalhado o conteúdo Análise Real, nos cursos de licenciatura em matemática, sugerindo, tanto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio, quanto ao estudante em matemática, uma forma de mergulhar no formalismo matemático das demonstrações, dos teoremas e das definições, mas não se esquecendo a matemática desenvolvida no seio escolar.

INTRODUÇÃO

Este trabalho, ora realizado no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, inicia-se com uma reflexão pessoal do autor, o qual descreve sua trajetória acadêmica, suas angústias enquanto professor de matemática e os motivos e/ou razões que conduziram ao desenvolvimento desta pesquisa.

Apresentando os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, esta pesquisa tem como objetivo convidar o professor, e/ou licenciando em matemática, a entender e a identificar na sua prática tal tratamento, buscando também refletir sobre a possibilidade de iniciar, por meio dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o trabalho com o conteúdo Análise Real, nos cursos de licenciatura em matemática.

Outro objetivo a destacar é sugerir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio que o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades estão presentes em sua sala de aula, ainda que o tratamento formal, em sua plenitude, possa não ser considerado.

Empreende-se nesta pesquisa, para alcançar os objetivos propostos, uma discussão sobre matemática escolar e matemática acadêmica, diferenciando essas duas formas de entender e de conceber a matemática e também discutir aspectos da formação do professor de matemática, não se esquecendo das especificidades que estão envolvidas na dinâmica do trabalho docente. Para este empreendimento, destacam-se educadores matemáticos que estudam questões relacionadas à formação do professor matemática, que contribuem para a dinâmica desta pesquisa.

A forma de conceber a matemática escolar, explicitada no capítulo I, a configura como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente, levando, tanto o professor do ensino fundamental e do ensino médio quanto o licenciando em matemática, a uma reflexão que possibilite perceber que o trabalho na escola não pode se pautar apenas em uma proposta mais acadêmica.

A prática e a formação do futuro professor de matemática são discutidas, desencadeando relações envolvidas na dinâmica da sala de aula, na validade das questões matemáticas presentes no cotidiano, e buscando uma melhor compreensão das propostas para o ensino deste conteúdo por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

Nesse mesmo tópico, questões que envolvem o estudo e as aplicações de números e de operações contribuirão para dinâmica de entender e de constituir as questões numéricas envolvidas no ensino fundamental e no ensino médio, usando as operações, de modo especial, para desenvolver o estágio crítico da criança.

O capítulo I também faz uma breve incursão histórica sobre o conteúdo Análise Real, aproximando-o dos conceitos históricos que determinaram a criação desta disciplina, buscando também entender o porquê é importante estudá-la, destacando os números reais.

O Capítulo II traz uma apresentação dos números naturais e inteiros, mostrando aspectos que estão envolvidos na apresentação desses no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

O Capítulo III apresenta os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, identificando elementos desta construção em atividades e/ou contextos que se mostram ao longo do ensino fundamental e do ensino médio.

Nesse capítulo, são apresentados axiomas e teoremas, sendo esse acompanhado de demonstrações que têm por objetivo aproximar o professor e/ou licenciando em matemática, dos aspectos formais que se apresentam nos cursos de Análise Real. O foco está nas consequências dessa constituição na estrutura matemática dos números reais que é desenvolvida ao longo do ensino fundamental e do ensino médio.

Abre-se uma discussão sobre as questões de incomensurabilidade, percebendo a necessidade de números irracionais e decimais infinitos periódicos e não-periódicos, para um aprofundamento conceitual destas questões tão presentes nas salas de aulas de matemática, no intuito de buscar uma aproximação entre formação e prática docente.

São apresentados no capítulo IV os números decimais, tendo como suporte o desenvolvimento geométrico. A pretensão é que o professor e/ou licenciando em matemática perceba que existe uma correspondência estabelecida entre todos os pontos da reta numérica real e todas as frações decimais finitas ou infinitas de maneira a definir que um número real é uma decimal finita ou infinita.

A construção dos números reais nas estruturas “algébrica e topológica” se encerra nesta pesquisa, definindo números reais como corpos ordenados completos e arquimedianos, com a tentativa de aproximar as questões que são desenvolvidas nos cursos de formação de professores na disciplina Análise Real e a prática

docente, respeitando a autonomia do professor em incorporar ou não tal tratamento em seu fazer pedagógico.

OBJETIVOS

Objetivando esta pesquisa apresentar o conjunto dos números reais em suas estruturas, “algébrica e topológica”, de maneira a convidar o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender e, se possível, identificar em sua prática tal tratamento, destacam-se outros dois objetivos:

- Sugerir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio que o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades estão presentes em sua sala de aula em todos os momentos, ainda que o tratamento formal em sua plenitude possa não ser considerado ou apresentado, mas suas consequências estão sim presentes ao longo de todo o ensino fundamental e médio.
- Iniciar uma reflexão, a partir de números reais, da forma como a disciplina Análise Real poderia ser trabalhada nos cursos de licenciatura em matemática.

O autor coloca-se disposto em empreender a investigação, considerando, como afirma Severino (1993, p. 113), que o trabalho científico deve ser “pessoal, no sentido de que a temática tem que ser a problemática vivenciada pelo pesquisador”.

Sensibilizado pela problemática, e sentindo a questão do trabalho com a matemática no ensino fundamental e no ensino médio, a opção é construir um elo entre o formalismo conceitual dos números reais e a matemática vivenciada na escola básica, permitindo, tanto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio quanto ao licenciando em matemática, uma identificação e uma comparação desses elementos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa resumiu-se na busca de textos que tratassem sob todos os aspectos do tema “os números reais em suas estruturas algébrica e topológica” e em quatro livros didáticos, sendo dois usados no ensino fundamental e dois usados no ensino médio, que pudessem contribuir para identificação de elementos dos números reais estudados no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

A abordagem escolhida foi a construção dos números reais como estrutura de corpo ordenado completo e arquimediano que, ao longo do processo, oportunizaram identificar elementos em livros didáticos os quais utilizavam, com ou sem rigor, tais estruturas.

Dadas as diferentes abordagens, surgiu a necessidade de se dedicar às leituras de um número significativo de textos para o recorte de alguns que mais traduziam a necessidade desta pesquisa.

Esta pesquisa se baseou na descrição e na interpretação de textos das mais diversas classes, contribuindo para reinterpretação das definições e/ou teoremas, que permitiram atingir uma compreensão mais aprofundada dos mesmos, colaborando para uma interpretação pessoal do autor com relação aos dados.

O levantamento bibliográfico foi realizado por meio de consultas a livros-textos de Análise, a livros didáticos, aos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio, a teses, a dissertações, livros-textos de educação matemática, a artigos e outros.

Com relação à apresentação dos dados, como esta pesquisa é exploratória, descritiva e explicativa, o procedimento utilizado limitou-se em apresentar uma análise das informações disponíveis, fornecendo uma visão e uma apresentação dos números reais nas estruturas “algébrica e topológica”, oportunizando, tanto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio quanto ao licenciando em matemática, uma aproximação desse conteúdo, contemplado nos cursos de Análise Real, ou Introdução à Análise na Reta.

As conclusões foram percebidas durante todo processo de obtenção dos dados, da redução, da escrita e da apresentação dos mesmos, permitindo que se avançasse progressivamente do exploratório para o descritivo e do descritivo para o explicativo.

Em anexo, conforme o artigo 7º inciso 3º da portaria do Ministério da Educação de 22 de junho de 2009, que regulamenta os mestrados profissionais no Brasil, diz que o trabalho de conclusão final do curso poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas, desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e outros, desde que previamente propostos e aprovados pela CAPES. A opção foi propor, ao final desta pesquisa, uma oficina que tem como objetivo apresentar as representações decimais dos números reais em um desenvolvimento formal; discutir questões que envolvem esse assunto no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio e estudar os conceitos que envolvem a densidade do conjunto dos números reais.

CAPÍTULO I: REVISÃO DA LITERATURA

1. Matemática escolar e matemática acadêmica

Neste tópico, serão descritas, de forma a destacar, algumas diferenças substantivas entre essas duas formas de se fazer e de se entender matemática, proporcionando ao professor do ensino fundamental e do ensino médio e/ou ao licenciando em matemática, condições para desvelar as especificidades do conhecimento matemático, produzido pela matemática escolar e pela matemática acadêmica.

1.1. Matemática acadêmica

A matemática acadêmica ou matemática científica nesta pesquisa serão considerados termos com mesmo sentido.

A matemática científica é estruturada axiomaticamente, sustentando-se em definições, teoremas, postulados e conceitos primitivos previamente estabelecidos para as provas e validades das mesmas, exigindo uma formulação das definições, não caracterizando ambiguidades na construção lógica de um objeto matemático, para não produzir contradições na teoria.

As definições formais e o processo de sistematização são elementos fundamentais no decorrer do processo de conformação da teoria, que é validado por demonstrações rigorosas (MOREIRA, 2004, p. 24).

1.2. Matemática escolar

A matemática escolar se configura como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA, 2004, p. 12). Os valores constituídos pela matemática escolar se desenvolvem no contexto educativo, válida a necessidade de encontrar formas distintas para desenvolvimento do conhecimento matemático no âmbito da escola.

Na perspectiva da matemática produzida na escola, o saber docente divide-se em vários componentes, um deles, dentre os quais se destaca, é o conhecimento da disciplina que assume um papel essencial.

1.2.1. Matemática escolar x matemática acadêmica

A apresentação de um conhecimento pronto e acabado pode não favorecer o estudante a construir o conhecimento matemático e a pensar matematicamente. O formalismo de regras e de procedimentos, herança da tendência formalista moderna, tem estado presente na educação brasileira.

Para essa tendência, Fiorentini (1995) esclarece que:

o ensino de um modo geral continua sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que expõe/demonstra rigorosamente tudo no quadro negro. O estudante, salvo algumas poucas experiências alternativas, continua sendo considerado passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor (FIORENTINI, 1995, p. 14.).

Essa concepção torna os estudantes treinados para aplicar mecanicamente essas regras e definições, sem, contudo proporcionar a eles a formação conceitual e investigativa tão necessária aos cidadãos deste século.

Ao mesmo tempo, negar que as estratégias e conhecimentos produzidos na prática não possam ser aplicados em toda parte porque são construídos fora do ambiente escolar, é impedir que a aprendizagem aconteça de maneira mais favorável e contribuir para possíveis reprovações em matemática.

A busca é para que a escola intensifique o trabalho na condução de um processo de ensino e aprendizagem, que leve em conta o conhecimento prévio que os estudantes possuem para que, a partir deles e sobre a própria experiência, possam construir novos conhecimentos.

A matemática é reconhecida como parte do cotidiano e elemento importante para compreensão de mundo. Afinal, o mundo está rodeado de tabelas, de gráficos e de informações diversas que são apresentadas em termos matemáticos, as quais são compreendidas e usadas como meio de comunicação.

Então, faz-se necessário preparar os estudantes para uma sociedade tão complexa, tornando-os capazes de pensar sobre relações numéricas e espaciais, compreender e se expressar sobre essas relações, desenvolvendo uma consciência crítica para serem reconhecidos como membros desta sociedade.

A matemática tem sido conceituada como uma ciência que oferece um amplo instrumento para o pensamento. Ser dotado de um determinado senso lógico-matemático é indispensável como instrumento intelectual para o bem viver.

Caracteriza-se, por desenvolver e ser uma forma de pensamento, que na sua matéria-prima está relacionada a “ideias” e o grande desafio é a construção coerente destas ideias.

A matemática na escola tem se preocupado, de um modo geral, com os cálculos, lógicas, geometria, mas, acima de tudo, deveria se preocupar com o pensar, pois os cálculos matemáticos são apenas um meio para atingir um determinado fim.

É preciso que o trabalho com a matemática na escola não se pautar apenas por uma proposta mais acadêmica. Nessa perspectiva, busca-se encontrar um elo entre a formação do professor de matemática, com sua prática no ensino fundamental e no ensino médio, para que possa permitir questionamentos como: quais são as relações existentes entre o conjunto de significados que a comunidade científica dos matemáticos identifica com o nome de matemática e o conjunto de saberes especificamente associados à educação matemática escolar? Entende-se que vários fatores compõem a problemática do ensino e aprendizagem da matemática, dos quais se destacam a formação e, a prática docente.

1.3. Formação e a prática do professor de matemática

Este tópico trata da prática e da formação do futuro professor de matemática, destacando as relações envolvidas na dinâmica da sala de aula, a matemática do cotidiano e o conhecimento matemático do professor, nas questões que envolvem números.

1.3.1. A formação do futuro professor de matemática

A formação do indivíduo vai muito além das relações didáticas que envolvem uma sala de aula, da relação professor - estudante e conteúdo (FIORENTINI, 2004). Para esse autor, a pedagogia deve se preocupar também com as relações interpessoais que acontecem nas aulas, nos momentos e nos espaços fora da sala, entre uma aula e outra, nos momentos de conversas, nas relações no corredor, nos momentos do não-ensino, durante o recreio, etc.

Fiorentini (2004) diz:

(...) eu considero a didática como uma parte da pedagogia... Enquanto a didática tem relação mais direta com o conteúdo que se ensina e aprende... A pedagogia vai além dos conteúdos, pois preocupa-se também com as dimensões sócio-afetiva, emocional, pessoal e ética, tendo como norte a formação de valores e de um sujeito emancipado sócio-politicamente (FIORENTINI, 2004, p. 2).

É preciso desenvolver um trabalho que promova a interatividade, proporcionando ao educando uma participação mais ativa nas atividades propostas, fugindo do modelo tradicional de ensino, no qual o educando é apenas um espectador passivo diante do contexto apresentado na exposição de aulas.

D'Ambrósio (2008, p. 83) argumenta que a educação, em geral, enfrenta grandes problemas, considerando o mais grave, e que afeta particularmente a educação matemática de hoje, a maneira deficiente como se forma o professor. Esse mesmo autor exalta os inúmeros pontos críticos na atuação do professor de matemática, que se prende a deficiência de sua formação.

A formação do professor de matemática é um dos grandes desafios do futuro e, nesse aspecto, o professor de matemática deverá desenvolver características para cumprir um novo papel.

Essas características são: visão do que vem a ser a matemática; visão do que constitui a atividade matemática; visão do que é aprendizagem matemática e visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem matemática (D'AMBRÓSIO, 2008, p. 87).

1.3.2. Matemática no cotidiano

A aplicação da matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presente. De acordo com Bicudo (1991), a matemática é vista por alguns como o grande legado da humanidade e, como tal, a atitude de considerá-la como:

(...) a priori, independente da experiência. Exata no sentido de terem todos os seus termos, definições, regras de inferência, etc. um significado preciso. (...) Abstrata no sentido de eliminar de uma situação tudo o que não for essencial a um dado propósito. (...) Absoluta, não passível de revisão com base na experiência. (...) Simbólica sendo uma das principais características de Matemática. Esse uso está ligado a sua natureza exata, mas ainda mais ao desenvolvimento da Matemática como um tipo de linguagem (BICUDO, 1991, p.34).

Discutir essa forma de entender a matemática leva a uma reflexão sobre o papel que está sendo desempenhado em salas de aulas de matemática e também a

questionar para o que se preparam os estudantes e se realmente estão sendo valorizados os conhecimentos deles.

O papel da matemática escolar não se resume apenas na apresentação de conhecimentos matemáticos descontextualizados e sem relações com as vivências do educando. Também há pesquisas em Educação Matemática que sugerem alternativas na tentativa de contribuir para o trabalho docente, criando oportunidades de um aprofundamento nas análises de práticas pedagógicas específicas para a construção crítica de possibilidades que possam ser constituídas, adaptadas, e aplicadas nos diversos contextos aos quais se apresentam.

1.3.3. Os PCNs e as ideias de números

Os Parâmetros Curriculares Nacionais referendam a reelaboração e renovação da proposta curricular, reforçando a importância de que a escola seja a responsável pela formulação de sua proposta pedagógica e de seu projeto educacional, sendo esses compartilhados por toda equipe pedagógica, visando a melhoria da qualidade da educação, resultando no compartilhamento de responsabilidades entre os todos os educadores.

Os PCNs são auxílios aos professores na tarefa de refletir e de discutir aspectos da prática pedagógica, transformando continuamente o cotidiano escolar, sendo uma proposta flexível, que vai se concretizando nas decisões regionais e locais, configurando como um modelo curricular heterogêneo e não impositivo.

Os objetivos dão importância à valorização da matemática pelo educando como instrumento capaz de permitir a compreensão do mundo em sua volta, estimulando o interesse, a curiosidade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Os conteúdos são escolhidos de acordo com o critério de relevância social e contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las.

São apontadas as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os temas transversais.

1.3.4. Números e operações no ensino fundamental

De acordo com os parâmetros curriculares do ensino fundamental (BRASIL, 1998), os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados de forma dialética pelos alunos.

Esses conhecimentos intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando suas propriedades, suas relações e o modo como se configuram historicamente.

Ao longo do processo de escolarização, o aluno percebe a existência de diversas categorias de números criadas em função de distintos problemas que a humanidade teve que enfrentar – números naturais, números inteiros positivos e negativos, os números racionais em suas representações fracionárias e decimais e os números irracionais.

À medida que se depara com as operações de adição, de subtração, de multiplicação, de divisão, de potenciação e de radiciação, os conceitos numéricos vão se ampliando.

No processo operatório, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diversos significados de cada uma das operações, nas relações existentes entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando distintos tipos, dos quais se destacam o exato e o aproximado, o mental e o escrito (BRASIL, 1998, p. 75).

1.3.5. A caracterização numérica em relação aos PCNs para o ensino médio

Os PCNs do ensino médio fundamentam-se filosoficamente na estética da sensibilidade, destacando-se a capacidade de criar, de observar, de perceber e de ter curiosidade.

O respeito à diversidade, ao direito comum de cada cidadão e à solidariedade são pressupostos da política de igualdade. A ética da identidade traz o respeito à autonomia responsável dos estudantes, da escola e da comunidade.

A abordagem numérica é contemplada no conteúdo “Números e Operações”: naturais, racionais, irracionais, reais, sendo desenvolvida de acordo com as finalidades do ensino de matemática para essa fase de estudo que têm como objetivos conduzir o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, (PCN- EM), 1998, p. 119).

As relações numéricas envolvidas nos PCN, tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental, não superam todos os desafios que se apresentam nessas fases de ensino, mas é uma tentativa para conduzir o fazer pedagógico em suas dimensões processual e diagnóstica.

Esse fazer pedagógico é tratado como parte fundamental do processo de ensino e aprendizagem permitindo corrigir, detectar, apreciar e estimular projetos bem sucedidos.

As concepções fundamentais que se desenvolvem a respeito dos números naturais, por exemplo, iniciam-se bem cedo pelas crianças, as quais dão significados aos números, em atividades principalmente de contagem.

As operações matemáticas muito fortemente também têm significâncias de associação com o dia a dia. Os conceitos das quatro operações, em geral, são adequadamente constituídos nos cursos de formação de professores das séries iniciais, sendo, muitas vezes, desconsiderados num curso de licenciatura na formação do professor de matemática, indicando uma acentuada separação na formação docente desse ciclo de ensino, com a formação do professor que leciona nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Moreira e David (2005) argumentam:

Ainda que o licenciado em matemática, de um modo geral, não trabalhe com alunos das quatro séries iniciais do ensino fundamental, acreditamos que a separação acentuada existente entre a formação do docente desse ciclo e a do professor que leciona nos outros ciclos do ensino fundamental e médio é equivocada, pois pode contribuir para intensificar a descontinuidade do processo de transição das séries iniciais para a quinta série e seguintes. Isso, por si só, já coloca uma demanda no sentido de que o licenciado conheça a matemática que é trabalhada nas séries iniciais (MOREIRA & DAVID, 2005, p.52).

Reconhecer números e operações perpassa pela compreensão dos significados de números naturais, do sistema de numeração decimal e pela identificação dos números inteiros e racionais em diferentes contextos (BRASIL, 1998)

É fato que o professor do ensino fundamental do 6º ano retoma e amplia todo trabalho desenvolvido com números naturais nas séries anteriores e inicia o conceito de números racionais, considerando-os nessa fase de conceituação como elementos de um conjunto, os quais determinam, de uma forma geral e completa, as operações de adição e multiplicação, mas de uma forma restrita a subtração e a divisão. Também desperta os estudantes para a percepção de relações entre esses números, nos mais distintos universos aos quais são considerados, como por exemplo, o universo dos números primos e compostos, dos divisores, de múltiplos e de outros.

No 7º ano é introduzido o conceito de números negativos, trabalhando os inteiros e os racionais negativos, já no 8º ano, introduzem-se os conceitos de números racionais e irracionais, definindo os números reais, dando sequência no 9º ano e no ensino médio.

Através desta concepção, é necessário que o professor do ensino fundamental das séries finais e do ensino médio, conheça a matemática do ponto de vista escolar e principalmente conheça a matemática trabalhada nas séries iniciais, para que possam entender as dúvidas de conceituação que aparecem frequentemente entre os estudantes.

Para essa concepção, Moreira e David (2005) dizem:

No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que, por um lado, conhecer profundamente — do ponto de vista da matemática escolar — aquilo que os alunos consideram num dado momento, como o universo (grifo do autor) numérico, e, por outro, lidar com dúvidas e concepções incorretas dos alunos, as quais vão se referir tanto ao "novo" conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente "conhecido", que está sendo ampliado (MOREIRA & DAVID, 2005, p.53).

A axiomatização do processo de ensino e aprendizagem de matemática tem, por um lado, a importância de organização, de sistematização e de conhecimento, mas servem para propósitos definidos, que, muitas vezes chocam com os aspectos pedagógicos (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 58).

A ideia dominante que impera nos cursos de licenciatura até hoje apresenta a organização lógico-formal-dedutiva da matemática como a única forma de domínio conceitual, porém o conhecimento matemático nesta filosofia de trabalho, transparece um amontoado de fatos dispersos e desconexos da caracterização e do formato de uma teoria.

Fiorentini (2004) esclarece que:

(...) para ser professor de matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da matemática produzida historicamente, precisa, sobretudo, conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático (ou seja, não apenas o modo formal ou simbólico) (FIORENTINI, 2004, p. 4) .

A construção do conhecimento se desenvolve no plano cognitivo dos estudantes que produzem em estágios diferenciados a compreensão dos conhecimentos antigos e o processo de acomodação do novo conhecimento.

Em relação à aprendizagem escolar da Aritmética dos números naturais, por exemplo, pode-se considerar um tema complexo, cuja apreensão, em níveis satisfatórios, não se esgota no processo desenvolvido ao longo das séries iniciais do ensino fundamental. Estas dificuldades, muitas vezes, acompanham o estudante ao longo de todo ensino fundamental e médio.

Pode-se destacar nesse processo, a compreensão relativa ao sistema de numeração decimal, que, segundo Moreira e David (2005), é um desenvolvimento de longo prazo. A compreensão e o domínio deste conteúdo, muitas vezes, dura todo ensino fundamental, pois é um dos aspectos mais complicados da aprendizagem dos números.

Destaca-se também, a grande dificuldade dos estudantes em aceitar a comutatividade da adição e da multiplicação e, acima de tudo, o entendimento do significado dessa propriedade, para não transferi-la indevidamente à divisão e à subtração.

Moreira e David (2005) continuam afirmando:

Fica claro que uma discussão a respeito dos significados e das propriedades das operações com os naturais – de modo especial a multiplicação e a divisão – e do sistema decimal de numeração interessa diretamente à formação matemática na licenciatura, porque, na sua prática docente na escola, o professor estará lidando com alunos cujo processo de apreensão conceitual e operacional dos conhecimentos envolvidos nessas questões ainda não se completou. (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 55).

Certos aspectos que envolvem o conhecimento dos significados dos números, dos sistemas de numeração e dos algoritmos, fazem parte da prática profissional do professor de matemática na escola básica, porém o licenciando em matemática não trabalha integralmente em sua formação esse assunto, sendo os conhecimentos relativos às operações de multiplicação e de adição de números naturais considerados apenas fatos.

Os números naturais com as operações de adição e de multiplicação não podem ser considerados elementos de um conjunto dado, aceito de forma axiomática, pois essa forma de pensar e de agir não permitirá o enfrentamento de questões postas pela necessidade concretizada na própria prática a qual se pretende formar o profissional.

Mais do que identificar e conhecer a cadeia que estabelece a dependência lógico-formal entre suas propriedades é conhecer as operações matemáticas. Referindo-se aos processos de produção de significados para as operações, Moreira e David (2005) afirmam:

(...) Nesses casos, o professor precisa lidar com o processo de construção de significados muito mais por meio de reiteradas “concretizações” em diferentes situações, do que por definições por indução ou de deduções formais das propriedades estruturais das operações, já que estas últimas expressam exatamente o contrário: a *identificação* de todos os significados concretos possíveis (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 57).

Na prática docente, há a necessidade de desenvolver o estágio crítico da criança, usando as operações como instrumento de apoio no processo de construção do conceito abstrato do número, pois em certas fases da vida do educando, os números referem-se a objetos concretos.

1.4. O que é análise? Por que os reais?

Será apresentado neste tópico um breve histórico sobre o conteúdo Análise na Reta ou Análise Real, permitindo uma aproximação da construção histórica desta matéria.

Na sequência, busca-se uma compreensão do porquê de esse conteúdo estar na grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática. Destacam-se também a apresentação de argumentos que traduzem a importância de se estudar os números reais, no intuito de constituir um amplo campo de discussão, na tentativa de diminuir a dicotomia existente entre formação e prática docente.

1.4.1. Incursão histórica – o que é análise

Análise Real é a área da matemática que trata do formalismo e do rigor matemático usados para justificar os conceitos do cálculo. Geralmente, divide-se a matemática em três áreas: a Álgebra, a Geometria e a Análise, sendo a Análise a mais nova delas, que se constitui como uma ramificação do cálculo que é uma teoria criada no século XVII, por Newton e Leibniz, sendo este um fato histórico de grande importância para o desenvolvimento da física moderna.

O estabelecimento dos fundamentos do Cálculo caminhou pelo século XVIII, quando aconteceram as primeiras tentativas de rigorização do cálculo (REIS, 2009, p. 83), adentrando pelo século XIX, com o movimento da aritmetização da análise.

Segundo Reis (2009), as tentativas fracassadas de obter uma rigorização do Cálculo, realizadas no século XVIII foram os primeiros passos para a fundação da Análise.

A mudança do modelo geométrico por um modelo mais formal, baseado na ideia de número, o que é conhecido como aritmetização, foi pensada de forma que pudesse ter o rigor necessário e nesse modelo, as questões observadas poderiam ser abarcadas e resolvidas.

Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da aritmetização da Análise, dos quais, destacam-se Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) e Bernhard Bolzano (1781 – 1848). O primeiro autor foi considerado um dos precursores do movimento e o segundo foi considerado por Felix Klein (1849-1925) o pai da aritmetização da Análise.

Desde a criação do cálculo, a Análise inseriu-se em praticamente todas as áreas da matemática, quer seja por causa de sua riqueza intrínseca quer seja pelas

suas aplicações. Suas subdivisões adquiriam vida própria e são frequentemente estudadas com fins em si próprios.

A disciplina Análise Real, costuma integrar os currículos de bacharelado e de licenciatura e, de acordo com as diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura, elencadas no parecer do Conselho Nacional de Educação e Câmara de Educação Superior (2002), deve fazer parte dos conteúdos comuns a todos os cursos de licenciatura.

No entanto, segundo Reis (2001, p. 80), tem-se observado no Brasil que as disciplinas de Análise I ou de Análise Real estão sendo consideradas disciplinas eletivas ou optativas, oferecendo ao estudante de licenciatura a opção de cursá-la ou não.

Para esta perspectiva, Reis (2001) que realizou um estudo baseado na análise de manuais didáticos e entrevistas semiestruturadas com professores-pesquisadores, que se destacam na área de Cálculo e de Análise Real, como também com autores de estudos e de livros didáticos argumenta:

Isto nos traz uma série de indagações: Fica, então, a critério do estudante decidir se Análise é ou não importante para sua formação de professor? Por outro lado, perguntamos: Os próprios professores do curso de Licenciatura não consideram mais a disciplina de Análise, importante para a formação profissional de seus alunos? (REIS, 2001, p. 80).

Esse mesmo autor esclarece que considera fundamental a disciplina de Análise na formação do futuro professor de matemática e continua afirmando:

Antes de mais nada, gostaríamos de deixar claro nossa convicção de que Análise é uma disciplina / área fundamental para a formação do professor de Matemática, convicção esta proveniente de nossa prática pedagógica com formação de professores e que pretendemos reafirmar / reelaborar durante a análise das entrevistas, momento em que questionamos nossos entrevistados a respeito da importância do Cálculo e da Análise na formação do professor de Matemática. (REIS, 2001, p. 80).

Para Ávila (2006, p.4) esta disciplina é uma grande oportunidade para desenvolver o estudante de licenciatura e o futuro professor, aproximando-o do tratamento refinado com definições, com teoremas, com demonstrações que são os embasamentos lógicos da matemática.

Moreira *et al* (2005), em pesquisa feita com 80 matemáticos que lecionam a disciplina Análise Real nas 14 principais Instituições universitárias e de pesquisas do Brasil, mostraram, na opinião dos professores respondentes à época (que totalizaram 31) a importância da obrigatoriedade de se estudá-la na formação

profissional do futuro professor de matemática.

Essa pesquisa teve como tema, a ementa, a bibliografia e o papel da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em matemática nessas instituições de ensino no ano de 2005.

Com relação à obrigatoriedade da disciplina Análise Real, no curso de licenciatura em matemática, na pesquisa de Moreira *et al* (2005) a maioria dos respondentes, totalizando 93,5%, disseram que achavam importante a disciplina elencar os currículos nesses cursos.

As respostas foram distribuídas em três categorias e trabalhadas segundo a análise de conteúdo que é, de acordo com Bardin (1979, p. 42), um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos e por objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores que podem ser quantitativos ou qualitativos, permitindo a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção e de recepção, chamadas de variáveis inferidas dessas mensagens.

Categoria 1. A disciplina deve ser obrigatória no curso de licenciatura porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam. Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de “pensar matematicamente”, proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática, constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de “cultura matemática”.

Categoria 2. A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os “porquês” e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras.

Categoria 3. A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências (MOREIRA *et al*, 2005, p. 20, 22, 24).

Para categoria 1, a aprendizagem matemática está associada à internalização de um processo que visa aproximar das perspectivas do matemático. A categoria 2 justifica a matemática elementar. A categoria 3 percebe a matemática como um instrumento para compreensão de certos fenômenos naturais. Essa última categoria está interligada ao desenvolvimento de uma percepção de matemática como um conjunto de conhecimentos que são úteis.

Moreira *et al* (2005, p. 38) reconhecem que a sistematização lógico-formal-dedutiva e suas formulações conceituais, baseada na estrutura curricular que se

apresenta na maioria dos cursos de Análise Real, não dão conta de todas as questões que se colocam para o professor em sua prática.

Uma alternativa seria a reorganização do processo de formação matemática dentro da licenciatura, desenvolvendo-o autonomamente e se estruturando para dar um sentido pedagógico, visando à prática escolar.

Para Moreira *et al*, (2005, P. 40) não se trata de baixar o nível da formação matemática, mas de superar a visão dicotomizada das relações entre formação matemática sólida e as demandas do conhecimento da prática docente escolar.

A questão (1), do questionário usado nesta pesquisa de Moreira *et al* (2005), indicava quais itens, nas opiniões dos professores pesquisados, deveriam ser trabalhados numa disciplina de Análise na Reta para licenciatura em matemática em suas instituições de ensino superior.

Os números reais constituídos como um corpo ordenado completo teve 27 indicações, com 87,1% de aprovação dos professores dessas instituições como matéria que deveria elencar o currículo para o curso de licenciatura.

1.4.2. A importância de estudar os números reais

Na pesquisa de Moreira *et al*, (2005, p. 79) ficou evidente a importância de se trabalhar os números reais como um conjunto cujos elementos se relacionam segundo a estrutura de Corpo Ordenado apesar de haver outras apresentações para estes números, as quais Moreira e David (2005) destacam:

- Número real é um corte de Dedekind nos racionais, isto, é um par (A,B) de subconjuntos não vazios e complementares de \mathbb{Q} , tais que, A não possui elemento Máximo. Nesta construção, todo elemento de A é cota inferior para B e todo elemento de B é cota superior para A .
- Número real é uma classe de equivalência de intervalos interligados de sequências de Cauchy de números racionais, a qual é válida a relação: duas sequências são equivalentes se e somente se, a diferença entre elas converge para zero.
- Número real é uma classe de equivalência de intervalos racionais encaixantes, segundo a relação de equivalência $[a_n, b_n] \sim [c_n, d_n]$ se e somente se as sequências de números racionais $(a_n - c_n)$ e $(b_n - d_n)$ convergem ambas para zero. (MOREIRA *et al*, 2005, p. 78).

Dentre os cinco livros adotados nos cursos de Análise Real, e escolhidos pela maioria dos professores respondentes, na pesquisa de Moreira *et al* (2005), no mínimo dois deles definem os números reais como corpo no sentido da álgebra abstrata.

Em termos da educação matemática escolar, o conjunto dos números reais é constituído para dar solução a problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais.

A priori, nesta pesquisa, define-se a estrutura algébrica dos corpos para um exame detalhado das necessidades de uma nova noção de números e a negociação dos significados para os números irracionais, constituindo um elemento fundamental no processo de discussão da ideia de número real.

O conceito de números reais, de uma forma geral, é tratado nos cursos de licenciatura, desvinculado do processo histórico no qual foi estabelecida a sua formalização. A referência de textos históricos de livros da história da matemática traz que a formalização do conceito de número real deu-se entre os séculos XVII e XIX (PASQUINI, 2007. p. 42).

Grande parte da matemática tratada num curso de licenciatura é fruto da produção de matemáticos que viveram no século XIX. Anterior a este período, os números eram pensados em termos geométricos e sua formulação não elucidava, de forma suficiente, questões que surgiram na época.

CAPÍTULO II – NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS

2. Uma visão da Aritmética básica

Neste capítulo, apresenta-se uma breve introdução de números naturais e inteiros, mostrando aspectos que estão presentes no ensino fundamental e no ensino médio e o tratamento formal que é dado a esses números.

2.1. Os números naturais

Os números, de uma forma generalizada, constituem uma base para matemática. Na dinâmica do desenvolvimento da matemática escolar, os estudantes aprendem a lidar com as frações, os decimais e os números inteiros negativos mecanicamente, porém, para uma análise mais profunda desses tipos de números, deve-se retornar a elementos mais simples.

Criados pela mente humana com o objetivo de contar objetos em coleções distintas, os números naturais 1, 2, 3,..., não têm nenhuma referência com as características individuais dos objetos contados. O número três, por exemplo, é uma abstração de todos os conjuntos que contém três objetos, ou seja, esse número não tem nenhuma dependência com a qualidade dos objetos ou dos símbolos utilizados para representá-lo.

Para Courant e Robbins (2000, p.1), deve-se, portanto, aceitar os números naturais como um conjunto dado, juntamente com as duas operações, adição e multiplicação, por meio das quais seus elementos podem ser combinados.

A capacidade que esses números têm de constituir contagens, é vinculada para criança a objetos tangíveis, como os dedos ou contas e a linguagem primitiva exibe um sentido de número concreto.

Os números naturais são definidos como elementos de um conjunto, simbolizado por N , o qual é denominado conjunto dos números naturais, provido de uma natureza abstrata.

A simbologia mais difundida no ensino fundamental e no ensino médio para o conjunto dos números naturais é $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ (DANTE, 2009). O conjunto N^* , denominado conjunto dos números naturais não-nulos, ou seja, exclui-se o elemento zero.

2.2. A validade das operações em \mathbb{N}

A teoria dos números naturais é conhecida como Aritmética. Baseia no fato de que a adição e a multiplicação de naturais obedecem a certas leis. A generalização destas leis é representada simbolicamente por letras a, b, c, \dots as quais representam números naturais quaisquer, pois a utilização apenas de símbolos como 1, 2, 3, ..., que se referem a números naturais específicos indicaria a proposição $1 + 2 = 2 + 1$ como apenas um exemplo particular da lei geral, a qual garante que a soma de dois naturais é a mesma, não importando a ordem dos termos.

Esses termos considerados na adição são chamados de parcelas. Os elementos da multiplicação são conhecidos como fatores.

As leis fundamentais da Aritmética são:

- propriedade comutativa da adição: $a + b = b + a$
- propriedade comutativa da multiplicação: $ab = ba$
- propriedade associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- propriedade associativa da multiplicação $(ab)c = a(bc)$
- propriedade distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Operando de forma lúdica, usando a representação de conjuntos, pode-se investigar as leis da Aritmética dos naturais. Para adicionar dois inteiros a e b , colocam-se os diagramas correspondentes lado a lado junta-se a quantidade a de elementos do primeiro diagrama com a quantidade b de elementos do segundo diagrama, formando um novo conjunto.

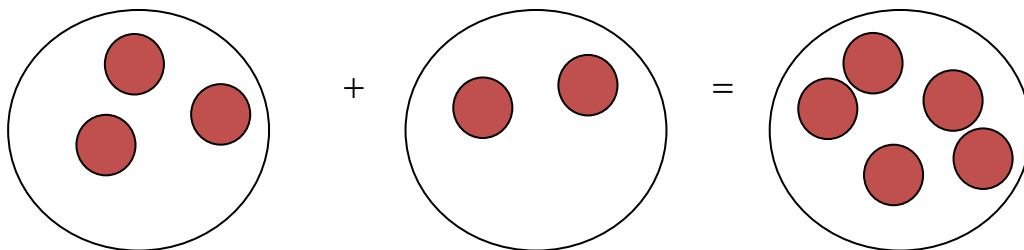


Figura I: Adição de números naturais

Para a multiplicação das quantidades a e b , coloca-se os pontos em dois diagramas. Aumentando a quantidade a de elementos do primeiro diagrama, tantas vezes indicar a quantidade b de elementos do segundo diagrama, forma-se um novo conjunto.

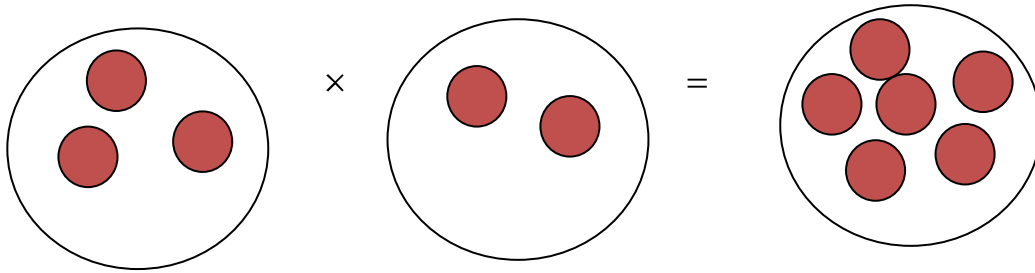


Figura II: Multiplicação de números naturais

Pode-se concluir que multiplicar a por b , é somar a por si mesmo b vezes, ou seja: $a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ vezes}}$

Baseando-se na definição de adição de dois naturais, pode-se definir a relação de ordem que aqui será chamada de relação de desigualdade.

A relação de ordem em \mathbb{N} permitirá comparar números naturais, formalizando a ideia intuitiva de que 1 é menor que 2 e assim por diante (FERREIRA, 2010, P.31)

Relações equivalentes, a menor que b ($a < b$), e b maior que a ($b > a$), significa que o diagrama com b elementos pode ser obtido do diagrama com a elementos pela adição de um terceiro diagrama com c elementos, adequadamente escolhido de modo que $b = a + c$. Desta forma, pode-se escrever que $c = b - a$

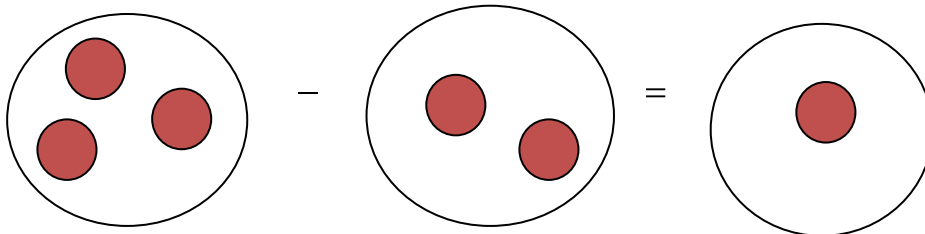


Figura III: Subtração de números naturais

No desenvolvimento da estrutura das operações sobre \mathbb{N} , a subtração é dada como uma restrição ao processo de soma. Porém para o domínio dos naturais, o símbolo $b - a$ só tem sentido apenas sob a restrição $b > a$. A operação $3 - 4$ não tem sentido no universo dos números naturais.

A comutatividade, a associatividade e a distributividade, tanto da multiplicação quanto da adição, podem ser observadas na construção de diagramas, percebendo desta forma que as verificações das propriedades que são postas no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio aproximam-se das concepções de números naturais que os estudantes possuem, desenvolvendo significados associados às diversidades de situações do dia a dia.

Propriedade comutativa da adição: $a + b = b + a$

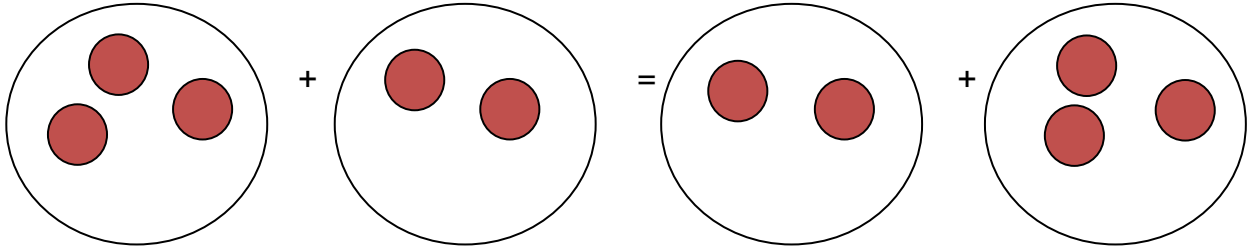


Figura IV: Propriedade comutativa da adição

Propriedade comutativa da multiplicação: $a \times b = b \times a$

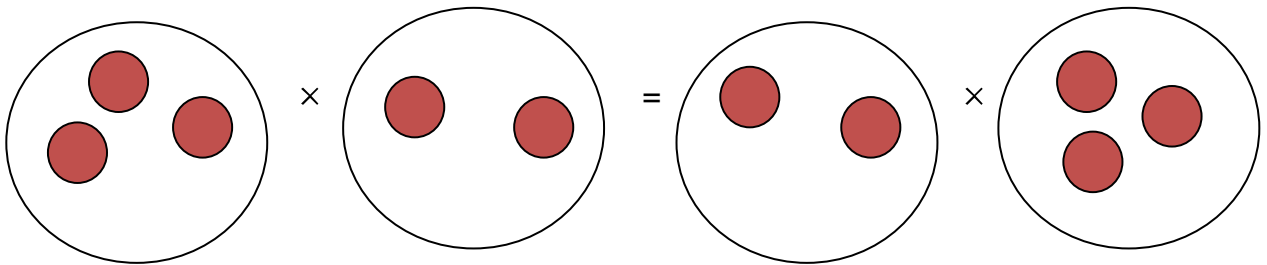


Figura V: Propriedade comutativa da multiplicação

Propriedade associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

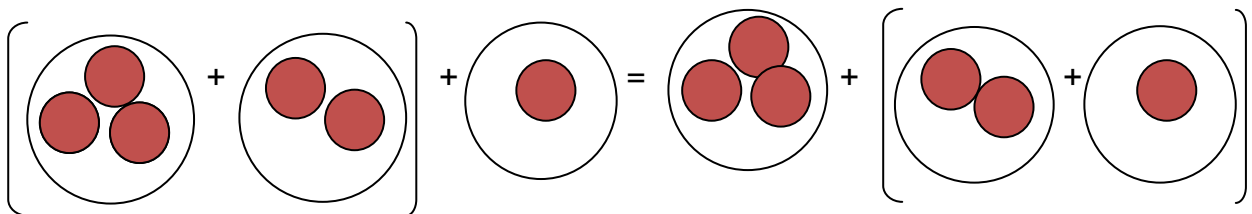


Figura VI: Propriedade associativa da adição

Propriedade associativa da multiplicação: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

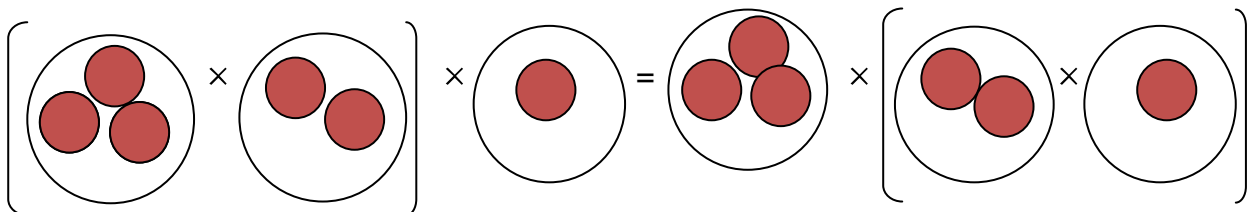


Figura VII: Propriedade associativa da multiplicação

Propriedade distributiva: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

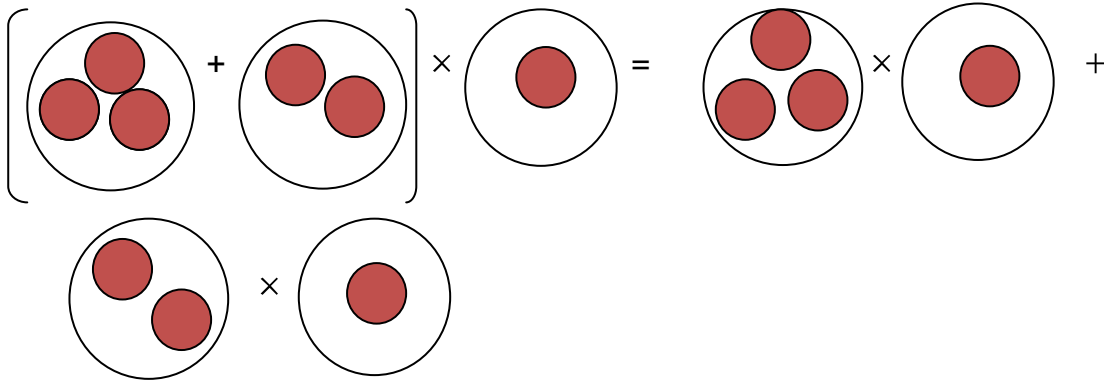


Figura VIII: Propriedade distributiva

2.3. A Introdução do zero

A introdução do zero como resultado de retirar objetos após um número finito de operações representou um salto significativo na constituição do processo operatório da matemática, logo, $a - a = 0$. Nesse contexto, o conjunto dos números naturais foi ligeiramente considerado como novo conjunto $N \cup \{0\}$.

No desejo de se manter a estrutura das operações em N , garantindo a adição e sua inversa, a subtração; a multiplicação e sua inversa, a divisão; potenciação e suas inversas, a radiciação e a logaritmação, pode-se defrontar com impossibilidades. Uma delas é a divisão por zero. Quanto é c dividido por zero, sendo c um número natural?

Para responder a essa pergunta é preciso voltar à definição da multiplicação que pode ser entendida como uma forma abreviada de se fazer somas de parcelas iguais, por exemplo, $2 \times 3 = 2 + 2 + 2$ ou $3 \times 2 = 3 + 3$, respeitando a lei da comutatividade, descrita para multiplicação em N . De uma forma generalizada, é razoável aceitar que $0 \times c = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{c \text{ vezes}}$.

Mas quanto seria $c \times 0$? No campo dos Naturais, este valor poderia ser qualquer coisa, pois não se pode aplicar o mesmo raciocínio acima para calcular o valor de $c \times 0$, porque não faz sentido, $c \times 0 = c + c + c + c + \dots + c$ (0 vezes).

Qual seria o significado produzido na mente de qualquer pessoa diante desta simbologia? É razoável supor que talvez não haja produção de significados com coerência pela mente do estudante que entra em contato pela primeira vez com essas operações? Seria conveniente deixar $c \times 0$ sem significação?

O homem tem tendência de generalizar e de estender todas as aquisições do pensamento e procurar o maior rendimento possível destas generalizações. Logo, a solução destas operações reside no fato de usar o que será chamado aqui de princípio da extensão¹.

Para garantir a propriedade comutativa da multiplicação e aceitar o desejo do homem em estender o conjunto dos números naturais para o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sem perder as estruturas das leis da Aritmética, há a necessidade em aceitar que $c \times 0 = 0$, portanto, $0 \times c = c \times 0 = 0$.

A introdução do zero abre caminho para discussão de outro problema, envolvendo agora, a operação de potenciação. Sabe-se que a potenciação satisfaz a propriedade multiplicativa, ou seja: $a^m = a \times a \times a \times \dots \times a$ (m vezes), sendo a e m pertencentes ao conjunto dos números naturais, de outra forma, a potenciação a^m é definida como o produto de m fatores iguais a a .

Com esta definição tem-se que:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ vezes}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}} = a^{m+n} \text{ com } a, m, n \in \mathbb{N}.$$

Quando se depara com a expressão " 2^0 ", automaticamente vem à lembrança do que é difundido nos ensinamentos fundamental e médio, garantindo que todo número elevado a zero, desde que não seja o próprio zero, é um.

Do ponto de vista mais generalizado, pode-se concluir que, sendo $a \in \mathbb{N}$ (ou seja $a \neq 0$), $a^0 = 1$? Qual o significado produzido pelo estudante diante dessa expressão? Buscando uma possível explicação para a sentença que se apresenta, seria necessário usar o princípio da extensão.

Mantendo-se esta propriedade formal, então a entidade a definir $x = a^0$ deve ser tal que $x \times a^n = a^0 \times a^n = a^{0+n}$. Como $0 + n = n$, então $a^{0+n} = a^n$, ou seja, $a^0 \times a^n = a^n$. De acordo com a definição da operação de multiplicação:

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ vezes}}, \text{ fazendo } b = 1 \text{ tem-se:}$$

$a \times b = b \times a = a$, de forma a definir que $a \times 1 = a$. Logo, pela manutenção da propriedade citada, exige-se que $a^0 = 1$.

¹O princípio da extensão é definido por Bento de Jesus Caraça, em seu livro "Conceitos fundamentais da Matemática" como a tendência do homem de generalizar e de estender todas as aquisições de seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições são obtidas, e de procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências (CARAÇA, 1951, P. 10).

As impossibilidades em operações matemáticas, como subtração e divisão, por exemplo, são mais frequentes do que os casos de possibilidades, pelo fato das restrições que são atribuídas.

Todas as vezes que aparece uma impossibilidade, faz-se necessário utilizar o princípio da extensão, que tem como objetivo eliminar tais impossibilidades, criando, em geral, novos campos numéricos, quase sempre pela necessidade de ordem prática, não limitando sua utilização em questões de natureza teórica. Mas esse princípio não resolve todos os problemas e algumas impossibilidades terão que continuar existindo, como por exemplo, a divisão por zero.

2.4. A formalização dos números naturais

A opção de formalização dos números naturais pela forma axiomática não construtiva significa assumir a existência de um conjunto que satisfaz a certos axiomas que são capazes de caracterizar completamente a ideia intuitiva de números naturais, seguindo uma sequência de forma rigorosa.

A axiomatização dos números naturais foi desenvolvida no final do século XIX pelo matemático italiano Giuseppe Peano (FERREIRA, 2010, P.20).

Essa forma axiomática traduz esses números como ordinais, ou seja, objetos que ocupam lugares determinados numa sequência ordenada: 1 é o primeiro número natural, o 2 vem logo depois do 1, o 3 vem em seguida e assim sucessivamente, porém podem ocorrer números cardinais, como, por exemplo, resultado de uma operação de contagem, em resposta a pergunta, “quantos elementos possuem esse conjunto?” (LIMA, 2009, p. 33).

Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos, ou seja, esses números são apresentados por uma lista de propriedades que os satisfazem, e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que esses números são, mas como se comportam.

Para Dedekind (LIMA, 2009), os números naturais são definidos a partir da teoria de conjuntos e dos axiomas, hoje conhecidos como de Peano, são demonstrações de teoremas. O mais importante não são os axiomas que Peano²

²Peano deduz a teoria dos números naturais em três axiomas, aos quais são conhecidos como axiomas de Peano. São dados, como objetos não-definidos, um conjunto denotado por N , cujos elementos são chamados de números naturais e uma função $h: N \rightarrow N$.

Para cada n pertencente a N , o número $h(n)$, que é o valor da função h assumida no ponto n , é chamado de sucessor de n . Essa função satisfaz os seguintes axiomas.

escolheu, e sim atitude adotada por ele que prevalece na matemática até os dias atuais sob o nome de método axiomático.

2.5. Números inteiros negativos

No ensino fundamental, os números inteiros negativos e suas propriedades são introduzidas para dar significado a certas operações de subtração, do tipo $2 - 4$, $3 - 8$, etc. Uma vez introduzidos esses números, são definidas as demais operações como $3 - (-4)$, $(-2)(-2)$ $8 \div (-4)$, etc.

Para Ferreira (2010, p. 41), a definição destas operações é dada de modo ingênuo, não rigoroso, numa tentativa de estender as operações Aritméticas e suas propriedades do conjunto N para o conjunto Z (conjunto dos números inteiros). Com essa forma empírica, com a qual se apresentam os números inteiros no âmbito do ensino fundamental, é que foram descobertos e aplicados em expressões matemáticas de certas situações e na resolução de problemas

O contato com os números inteiros acontece no 7º ano do ensino fundamental, descrevendo o conjunto desses números como a união dos números naturais com os inteiros negativos, mais o zero, representando-o pela letra Z , que é a inicial da palavra alemã *Zahl*, que significa número em alemão e também a primeira letra do sobrenome do matemático alemão Ernest Zermelo (1871 – 1955), que se dedicou ao estudo dos números inteiros (DANTE, 2009).

Do ponto de vista do rigor matemático, apenas admitir a existência de números negativos e incorporá-los ao conjunto dos números naturais não é adequado.

Para Ferreira (2010), em N , só são constituídas as operações de adição e de multiplicação. A subtração não é, a rigor, uma operação em N e, por essa razão, a

a.1) $h: N \rightarrow N$ é injetiva. Isso implica dizer que dados m e n elementos de N , $h(m) = h(n)$ se $m = n$. Em outras palavras, dois números que tem o mesmo sucessor são iguais.

a.2) $N - h(N)$ resulta em um conjunto com um único elemento. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Esse número é chamado de um e simbolizado (1). Pode-se dizer que qualquer que seja n pertencente a N , tem-se 1 diferente $h(n)$. De outra forma, se n é diferente de um, então existe um único n' pertencente a N , tal que $h(n') = n$.

a.3) Se X , contido em N , é um subconjunto tal que 1 pertença a X e, para todo n pertencente a X , tem-se também $h(n)$ pertencente a X , então $X = N$. Esse último axioma, é conhecido como princípio da indução, que pode ser enunciado também da seguinte forma: Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 é satisfeito pela propriedade P e se, de fato, um número natural n se satisfizer em P e puder concluir que todos os elementos $n + 1$ satisfazem dessa propriedade, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.

linha adotada pela matemática acadêmica é a de construir os números negativos, a partir das estruturas algébricas existentes no âmbito dos números naturais.

CAPÍTULO III – A CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS REAIS

3. Estrutura algébrica dos corpos

Neste capítulo, serão apresentados os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”. Ao mesmo tempo, serão identificados elementos desses no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, constituindo, dessa forma, a proposta que esta pesquisa ora se apresenta, no intuito de contribuir para uma reflexão do que poderia ser trabalhado em Análise Real, nos cursos de licenciatura e permitir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio identificar em sua prática consequências desta construção formal.

3.1. Operações binárias criando estruturas algébricas

De acordo com o estudo da Teoria dos conjuntos, sejam dois conjuntos não vazios, os quais serão denotados por A e B . Chama-se produto cartesiano de A por B , o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) , com x em A e y em B .

Costuma-se indicar o produto cartesiano de A por B com a notação $A \times B$ (A cartesiano B), logo, de uma forma mais geral, tem-se $A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Uma operação binária $(*)$ num conjunto não vazio S é uma regra para combinar dois elementos $x, y \in S$, produzindo um elemento $z \in S$, representado como $x * y$. De outro modo, uma operação binária num conjunto não vazio S é uma função $f: S \times S \rightarrow S$. Se x e y são elementos de S , $f(x, y)$ é representado como $x * y$.³

Um conjunto no qual estão definidas e fixadas duas operações binárias, denotadas por “+” e “·”, as quais são chamadas de adição e multiplicação respectivamente, satisfazendo os axiomas seguintes é chamado de corpo, denotado nesta pesquisa por K .

³Um exemplo de operação binária é a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(x, y) = x + y + 1$. Nota-se que combina dois elementos x, y de \mathbb{N} , produzindo um elemento $x + y + 1$ de \mathbb{N} . Outro exemplo é a função $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que $f(x, y) = x^y$, esta operação é de potenciação sobre \mathbb{N} . Observa-se que quaisquer que sejam os naturais x e y , o símbolo x^y representa um número natural, portanto, f está bem definida. Observa-se ainda que esta operação não pode ser estendida a \mathbb{Z} , pois, por exemplo, a imagem de $(2, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, é 2^{-1} elemento que não pertence a \mathbb{Z} , nem tão pouco estendida a \mathbb{Q} , pois a imagem de $(2, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é $2^{\frac{1}{2}}$, não pertencente a \mathbb{Q} e nem a \mathbb{R} porque por exemplo, $(-1, \frac{1}{2})$ pertence a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mas $(-1)^{\frac{1}{2}}$, não pertence a \mathbb{R} .

3.1.1. Os axiomas da adição:

Axioma 1A. A adição é uma operação comutativa no corpo K , ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K , verifica-se a igualdade:

$$x + y = y + x$$

Axioma 2A. A adição é associativa, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Axioma 3A. A adição tem um único elemento neutro, ou seja, para a adição, existe um único elemento m , pertencente a K , tal que qualquer que seja x pertencente a K .

$$x + m = m + x = x$$

Axioma 4A. Todo elemento de K tem simétrico, isto é, qualquer que seja $x \in K$, existe pelo menos um y de K , tal que:

$$x + y = y + x = m$$

Demonstração de teoremas: A demonstração de teoremas é um dos preceitos da matemática e exige algumas considerações. Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir alguns fatos como conhecidos. Esta é a natureza da matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo “se isto, então aquilo”. Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, prova-se aquilo como consequência (LIMA, 2004, p. 77).

Em muitos momentos da matemática, deseja-se mostrar a unicidade de um objeto, satisfazendo determinadas propriedades. Quase sempre, o caminho a ser seguido consiste em admitir a possibilidade de dois objetos a e b satisfazendo tais propriedades e mostrar que tais objetos são iguais.

Observação: Em relação ao axioma (3A), teria que garantir a unicidade do elemento neutro, porém, salienta-se que, na prática, não há a necessidade de verificar a unicidade, posto que esta é garantida pela própria existência deste elemento, caso contrário, se a e b são elementos neutros da adição em K , logo, de acordo com o axioma (3A), tem-se: $a + b = b + a = a$, pois b é neutro e $a + b = b + a = b$, pois a é neutro, conclui-se que $a = b$.

O elemento neutro da adição será chamado de zero e tem sua designação indicada pelo símbolo "**0**".

$$x + 0 = 0 + x = x$$

Teorema (1): O elemento simétrico da adição em K é único.

Demonstração: Para demonstrar a unicidade do elemento simétrico na adição, admiti-se a existência de a e b em K , elementos simétricos de x pertencente a K . Logo: $a + x = x + a = 0$ e $b + x = x + b = 0$. Somando $a + x + b = (a + x) + b = 0 + b = b$ e $a + x + b = a + (x + b) = a$, logo, $a = b$, mostrando, dessa forma, que, se para um determinado elemento de K , a adição admitir dois elementos simétricos, eles serão iguais, garantindo a unicidade deste elemento.

Qualquer que seja $x \in K$, o simétrico de x , designado por $-x$, é o único elemento de K cuja soma com x é igual a 0.

Teorema (2)⁴: Qualquer que seja $x \in K$, $x = -(-x)$.

Demonstrando: Sabendo-se que $(-x) + x = 0$, implica dizer que x é o simétrico do $-x$, como o simétrico de $-x$ é $-(-x)$, e pela unicidade do elemento simétrico, conclui-se que $x = -(-x)$.

3.1.2. Os axiomas da multiplicação

Axioma 1M. A multiplicação é uma operação comutativa no corpo K , ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K , verifica-se a igualdade:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2M. A multiplicação é associativa, isto é, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Axioma 3M. A multiplicação tem um único elemento neutro diferente de zero, ou seja, para a multiplicação, existe um único elemento α diferente de zero, pertencente a K , tal que qualquer que seja x pertencente a K :

$$x \cdot \alpha = \alpha \cdot x = x$$

Axioma 4M. Todo elemento K , distinto de zero, tem inverso, ou seja, qualquer que seja $x \in K$, com $x \neq 0$, existe pelo menos um $y \neq 0$, tal que:

$$x \cdot y = y \cdot x = \alpha$$

⁴Enfatiza-se que $-(-x)$ é o simétrico de $-x$ e, por esse motivo, $-(-x)$ é igual a x , pelo fato de o elemento simétrico ser único, garantindo assim algumas relações, envolvendo operações com números negativos. Logo, pode-se entender que, por exemplo, $-(-2)$ é o simétrico de -2 . Como o simétrico de -2 é 2 , então $-(-2) = 2$.

Observação: A existência do elemento neutro, automaticamente garante a unicidade de tal elemento, caso contrário demonstra-se, seguindo os passos seguintes. Se a e b são elementos neutros da multiplicação em K , então, de acordo com o axioma (3M), tem-se: $a \cdot b = b \cdot a = a$ e $a \cdot b = b \cdot a = b$, conclui-se que $a = b$.

Em relação à multiplicação, o elemento neutro será chamado de um e designado pelo símbolo "1", a respeito da notação, $1 \neq 0$.

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

Teorema (3): Para cada elemento $x \in K$, sendo $x \neq 0$, seu inverso é único.

Demonstração: Admiti-se a existência de dois elementos inversos " a " e " b ", pertencentes a K , (ambos diferentes de zero) de qualquer que seja $x \in K$, tais que: $a \cdot x = x \cdot a = 1$ e $b \cdot x = x \cdot b = 1$. Partindo de $a \cdot x \cdot b = (a \cdot x) \cdot b = 1 \cdot b = b$ e $a \cdot x \cdot b = a \cdot (x \cdot b) = a \cdot 1 = a$, concluindo que $a = b$, ou seja, dessa forma garante-se que o elemento inverso da multiplicação é único.

Sendo x um elemento de K , diferente de zero, existe o inverso de x , designado por $x^{-1} = \frac{1}{x}$, que é o único elemento de K cujo produto com x é igual a 1. Anota-se ainda que $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$.

3.1.3. A distributividade: uma relação entre a adição e a multiplicação

Axioma D. O encontro das duas operações, adição e multiplicação, acontece nesse axioma e é chamado de propriedade distributiva, ou seja, a multiplicação é distributiva a respeito da adição: quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

3.1.4. A importância dos elementos simétricos e inversos

Para Courant e Robbins (2000), a diferença $b - a$, de dois números inteiros, é um número inteiro c que satisfaz a sentença $a + c = b$, ou seja, é a solução da equação $a + x = b$, porém, no domínio dos números naturais, o símbolo $b - a$ não tem significado geral, apenas quando é restringido que $b > a$ (ver pág. 39), pois, dessa forma, a equação $a + x = b$ vai ter um número natural como solução. Na ótica de estrutura algébrica, o conjunto dos números naturais não constitui um corpo.

Numa visão de sala de aula, muitos questionamentos podem surgir na

aplicação e na validade de algumas operações, por exemplo quanto é $0 \cdot 2$? Algumas confusões podem levar os estudantes a responderem 2, trocando o elemento neutro da adição e o elemento neutro da multiplicação, o professor, por sua vez, deve buscar alternativas que possam responder a esses questionamentos, mas, para isso, acredita-se ser necessário conhecer o porquê que todo número multiplicado por zero é igual a zero. De forma analítica, esse fato é demonstrado no seguinte de teorema:

Teorema (4): Qualquer que seja x , pertencente a K , $0 \cdot x = 0$.

A demonstração desse teorema está totalmente relacionada à estrutura de corpo K , definida acima, e aos axiomas que a sustenta. Para esse fato, já provado que o elemento neutro da adição é único, tem-se: $x + (-x) = 0 \Rightarrow 1 \cdot x + (-x) = 0 \Rightarrow (0 + 1) \cdot x + (-x) = 0$, pela propriedade distributiva, temos $0 \cdot x + x + (-x) = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + (x + (-x)) = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + 0 = 0$, logo, $0 \cdot x = 0$.

De acordo com o desenvolvimento em Análise Real, tem-se o seguinte teorema:

Teorema (5): Qualquer que seja x , pertencente a K , tem-se $-x = (-1) \cdot x$.

Demonstrando: Já provado anteriormente, $0 \cdot x = 0$, logo, $(1 + (-1)) \cdot x = 0$, pela propriedade distributiva, tem-se $1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0 \Rightarrow x + (-1) \cdot x = 0$, então, o simétrico de x é $(-1) \cdot x$. Como o elemento simétrico de x é $-x$ e pela unicidade desse elemento, conclui-se que $-x = (-1) \cdot x$.

Nota-se que $-x$ é o simétrico de x , garantido pelo axioma (4A) e no segundo membro da igualdade $-x = (-1) \cdot x$ tem-se o simétrico de 1 multiplicado por x . Logo, para encontrar o simétrico de x , basta multiplicar o simétrico de 1 por x .

A operação $b + (-a)$ será representada por $b - a$ e, dessa forma, defini-se a operação de subtração de b por a como a soma do elemento b pelo simétrico do elemento a .

3.1.5. A multiplicação de números negativos

Na introdução de novos símbolos $-1, -2, -3, \dots$, em uma Aritmética ampliada que abrange tanto inteiros positivos como negativos, deve-se definir as operações de tal forma que as regras originais de operações Aritméticas sejam preservadas (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 64).

Indica-se a multiplicação de quaisquer elementos a e b , denotada $a \cdot b$ por ab .

Definir uma operação de multiplicação com elementos negativos é uma consequência do desejo de se preservar a lei da distributividade $a(b + c) = ab + ac$. Um fato a destacar são as famosas regras de sinais. Por exemplo, sabe-se que $(-1) \cdot (-1)$ é igual a 1, porém, se $(-1) \cdot (-1)$ fosse igual a -1 , então, a expressão $-1(1 - 1)$ poderia ser igual a -2 , pois aplicando a distributividade tem-se: $-1(1 - 1) = -1(1 + (-1)) = -1(1) + (-1) \cdot (-1) = -1 - 1 = -2$, mas, por outro lado, resolvendo a subtração dentro do parênteses tem-se: $-1(1 - 1) = -1 \cdot 0 = 0$.

Mas como provar tais regras? Os matemáticos levaram muito tempo para compreender que as regras de sinais, juntamente com todas as definições que envolvem números inteiros e as frações não podiam ser provadas (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 64).

Para alcançar a liberdade nas operações, e preservar ao mesmo tempo as leis fundamentais da Aritmética, podem e devem ser provadas essas regras, apenas com base nas definições das leis comutativas, associativas e distributivas da estrutura de corpo. Logo, $(-1) \cdot (-1)$ é igual a 1, sendo válida a igualdade $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$. (ver pág 4). Dessa forma, $(-a) \cdot (-b) = ab$, ou seja, $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b = a \cdot 1 \cdot b = a \cdot b = ab$.

3.1.6. Princípio de equivalência

No estudo de igualdades, fala-se dos chamados princípios de equivalência, (Giovanni Jr e Castrucci, 2009, p. 118), que garantem a resolução de equações do tipo $2x + 2 = 4$, por exemplo, no campo dos inteiros. Esses princípios são chamados de aditivos e de multiplicativos.

O princípio aditivo permite adicionar aos dois membros de uma igualdade um mesmo valor, encontrando, dessa forma, uma nova igualdade, equivalente à primeira, já o princípio multiplicativo permite multiplicar os dois membros de uma igualdade por um mesmo valor, mantendo-se a equivalência. Logo, se $a = b$, então $a + c = b + c$ ou $a \cdot c = b \cdot c$. Para essas afirmações, demonstra-se o teorema abaixo e, a partir dele, os corolários seguintes:

Teorema (6): Dado um corpo K , e sejam x e y elementos de K . Tem-se $x = y$, se e somente se, $x - y = 0$.

A demonstração será desenvolvida em duas partes:

1ª - se $x = y$, então $x - y = 0$. Partido de $y + (-y) = 0$, e considerando $x = y$, tem-se que $x + (-y) = 0$, logo, $x - y = 0$.

2ª - se $x - y = 0$, então $x = y$. Sendo $x - y = 0$, então $x + (-y) = 0$, logo, x é o simétrico de $(-y)$ e $(-y)$ é o simétrico de x . Como y é o simétrico de $(-y)$ e este simétrico é único, então $x = y$.

Corolário 1 : Quaisquer que sejam x e y pertencentes a K , se $x = y$, então $x + z = y + z$.

Demonstrando: se $x = y$, então $x - y = 0$, e adicionando $+z$ e $(-z)$ a $x - y$, tem-se $x - y + z + (-z) = 0$. Usando a associatividade e a comutatividade, escreve-se que $x + z - y - z = 0 \Rightarrow (x + z) - (y + z) = 0$; logo, $x + z = y + z$.

Corolário 2: Quaisquer que sejam x, y , pertencentes a K se $x = y$, então $x \cdot z = y \cdot z$

Demonstrando: Sendo $x - y = 0$, e sabendo que $0 \cdot z = 0$, então $(x - y) \cdot z = 0$. Usando a propriedade distributiva, tem-se que $xz - yz = 0$, logo, $xz = yz$, de acordo com o teorema (8).

Agora, tem sentido o uso dos princípios de equivalência para resolução de equações. Em relação ao exemplo, $2x + 2 = 4$, tem-se $2x + 2 - 2 = 4 - 2$, logo, $2x = 2$. Multiplicando membro a membro por $\frac{1}{2}$, tem-se $x = 1$ que é o resultado da equação acima. Uma forma generalizada é apresentada no teorema, seguinte.

Teorema (7): Seja K , um corpo e a e b elementos de K , sendo $a \neq 0$. A equação do 1º grau $ax + b = 0$ possui uma única solução, ou seja, $x = \frac{-b}{a}$.

Demonstração: Se $ax + b = 0$, então, $ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow ax + 0 = -b \Rightarrow$

$$ax = -b \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b) \Rightarrow 1 \cdot x = \frac{(-b)}{a} \Rightarrow x = \frac{(-b)}{a}.$$

Talvez fosse interessante resolver equações⁵ do 1º grau, usando tal procedimento, visando o amadurecimento do aluno.

3.2. Os números racionais

Neste tópico, serão apresentados os números racionais como corpo, sendo identificadas as operações e as contradições operatórias, no que se refere à divisão por zero. Ressalta-se também, a construção geométrica dos números racionais,

⁵Um exemplo de equações lineares: $3x - 5 = 2x + 7 \Rightarrow 3x - 5 + 5 = 2x + 7 + 5 \Rightarrow 3x = 2x + 12 \Rightarrow 3x - 2x = 2x - 2x + 12 \Rightarrow x = 12$.

identificando-se algumas propriedades fundamentais que envolvem esses números.

3.2.1. A estrutura de corpo do conjunto dos números racionais

Os números racionais representam uma ampliação no domínio da Aritmética para além dos números inteiros, que são abstrações do processo de contar coleções finitas de objetos (COURANT & ROBBINS, 2000, p.61).

No cotidiano, há necessidade não somente de contar objetos individuais, mas também de medir quantidades tais como comprimentos, áreas, pesos e tempos. Se o desejo é operar livremente com as medidas dessas quantidades, que são capazes de subdivisões arbitrariamente pequenas, é necessário ampliar o domínio da Aritmética para além dos números inteiros. O primeiro passo é, segundo Courant e Robbins (2000), reduzir o problema de medir ao problema de contar.

Inicialmente escolhe-se, de forma arbitrária, a unidade de medida, como por exemplo, o metro, o quilômetro, a polegada, o centímetro, o grama ou o segundo, dependendo do contexto ao qual se deseja atribuir essa medida. Na sequência, conta-se o número dessas unidades, que, juntas, vão constituir a quantidade a ser medida, por exemplo, certa distância entre duas cidades, pode medir exatamente 240 km. De uma forma mais geral, o processo de contar unidades não é suficiente, pois nem sempre a quantidade dada é um múltiplo inteiro da unidade escolhida. O máximo que se pode dizer é que o valor da quantidade situa-se entre dois múltiplos sucessivos. Quando isso ocorre, há necessidade de introduzir novas subunidades, que são obtidas mediante a divisão da unidade original em um número n de partes iguais (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 62).

No simbolismo matemático, a subunidade obtida pela divisão da unidade original em n partes iguais é representada pelo símbolo $\frac{1}{n}$. No caso da quantidade conter exatamente m destas subunidades, sua medida é representada pelo símbolo $\frac{m}{n}$. Esse símbolo é chamado de fração ou razão e, algumas vezes, escrito como $m \div n$ ou $m \cdot n^{-1}$.

Pode-se definir a operação de divisão de um número a por um número b , como sendo a multiplicação do número a pelo inverso do número b , ou seja, $3 \div 2$, é o mesmo que $3 \cdot 2^{-1}$, uma ideia muito trabalhada no cálculo de potências, quando o expoente é negativo (Giovanni Jr e Castrucci, 2009, p. 104).

O segundo e decisivo passo foi dado de forma consciente somente após

séculos de tentativas, despojando-se o símbolo $\frac{m}{n}$ de sua referência concreta ao processo de medir e às quantidades medidas, considerando-o um puro número, entidade em si própria, ao mesmo nível dos naturais. Quando m e n são números inteiros, o símbolo $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$ é chamado de número racional (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 62).

O conjunto de todos os números racionais será denotado por \mathbb{Q} . Doravante, toda vez que aparecer um símbolo na forma $\frac{m}{n}$, por exemplo, considera-se que n é diferente de zero.

O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$ (adição) e $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'}$ (multiplicação) é um exemplo de corpo, no qual são válidos os axiomas da adição, da multiplicação e da distributividade.

Como exemplo, verifica-se que a comutatividade, tanto da adição quanto da multiplicação, é válida em \mathbb{Q} :

$$\text{- comutatividade da adição: } \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'} = \frac{qp' + pq'}{qq'} = \frac{p'}{q'} + \frac{p}{q}$$

$$\text{- comutatividade da multiplicação: } \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'} = \frac{p' \cdot p}{q' \cdot q} = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{p}{q}$$

Os outros axiomas também são válidos em \mathbb{Q} , garantindo que esse conjunto é uma estrutura de corpo.

Nota-se que $\frac{p}{p} = 1$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ se $pq' = qp'$ para quaisquer inteiros p, q, p', q' . O simétrico de $\frac{p}{q}$ é $-\frac{p}{q}$. O zero é $\frac{0}{q}$ com $q \neq 0$ e o inverso de $\frac{p}{q} \neq 0$ é $\frac{q}{p}$.

A construção dos números racionais pode parecer extremamente simples, mas pesquisas mostram que, em termos da prática docente no ensino fundamental e no ensino médio, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações escolares (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 59 e 60).

Nessa perspectiva, o PCN em matemática do ensino fundamental destaca:

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associado a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal (BRASIL, 1998, p. 100).

Outro aspecto que se destaca na concepção formal dos números racionais, se refere às operações e às ideias essenciais que fundamentam os seus conceitos.

Os termos fracionários, a serem adicionados, devem ter como referência a mesma unidade-todo, tanto em sua representação aritmética quanto geométrica.

Assim, quando as frações tiverem denominadores diferentes, a unidade-todo será dividida em partes iguais ao número de um dos denominadores; também subdividida em partes iguais ao número do segundo denominador e, finalmente, a divisão exigirá tantas partes quanto for o produto dos denominadores. Isso significa dizer que há uma transformação em frações equivalentes, necessariamente com os mesmos denominadores.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$$

Quanto à operação de multiplicação, a abordagem adotada atualmente no ensino fundamental e no ensino médio cria condições para os estudantes conviverem com diversas interpretações. Tal operação, nesse campo numérico, não se sustenta por si só, pois articula uma série de relações com outros conceitos, como: medida de segmento de reta; divisão Aritmética e geométrica (segmento); a divisão da divisão (por exemplo, tomar dois quintos de três quartos); a identificação de uma nova fração (tomar quintos de quartos que se transforma em vinte avos); adição de fração (exemplo, quatro quinze avos mais quatro quinze avos).

Assim, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo

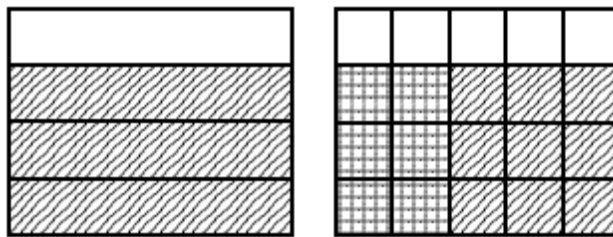


Figura IX: Todo considerado

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

As definições das operações de números racionais são impostas, principalmente para utilização dos números racionais como medidas. Segundo Courant e Robbins (2000, p. 63), “os números racionais são criações nossas e que as regras são impostas por nossa vontade”.

Na busca de definir as operações, pode-se decretar outra regra para adição, como: $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$, situação muito presente em salas de aulas de matemática dos

ensinos fundamental e médio que, em particular, forneceria $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, que é um absurdo, do ponto de vista de medida.

Regras desse tipo, embora sejam logicamente permitidas, tornariam a Aritmética um jogo sem sentido, pois o livre exercício do intelecto é orientado pela necessidade de se criar um instrumento que seja adequado para lidar com medidas, dando consistência e utilidades aplicativas.

A invenção das frações como novos símbolos numéricos, torna a divisão, que no conjunto dos números inteiros é restrita, sem restrições, exceto no caso da divisão por zero, que é excluída de uma vez por todas (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 65).

Outro questionamento, que é muito comum no ensino fundamental e no ensino médio é, “por que não se pode dividir por zero”? Ou, quanto é $\frac{1}{0}$?

Na estrutura de corpo, todo número diferente de zero tem inverso e esse é único, logo, se $\frac{1}{0}$ existir, então $\frac{1}{0} = 0^{-1}$, que é o inverso de zero e, dessa forma, $0 \cdot 0^{-1} = 1$, contradizendo o teorema (3), o qual provou que 0 multiplicado por qualquer valor é 0. Outro absurdo é que se a divisão por zero fosse permitida, então $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 \cdot 0^{-1} = 2 \cdot 0 \cdot 0^{-1} \Rightarrow 1 = 2$.

À medida que se ampliam os conjuntos numéricos e se estendem as operações para os novos campos, os significados dessas operações vão tomando um sentido mais abrangente e mais geral, de certa forma, pode-se dizer mais algébrico (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 66).

Teorema (8): Dados a, b, c e d num corpo K , sendo b e d diferentes de zero, tem-se:

$$i) \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}, \quad ii) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad iii) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Demonstrando (i): Seja $x \in K$ elemento de tal forma que $bx = 1$, ou seja, $x = \frac{1}{b}$ e $y \in K$ elemento tal que $dy = 1$, ou seja, $y = \frac{1}{d}$. Prova-se que existe um único elemento $z \in K$ tal que $(bd) \cdot z = 1$, ou seja, $z = \frac{1}{bd}$ é xy . Bem, partido de $(bd) \cdot (xy)$, escreve-se: $(bd) \cdot (xy) = b \cdot [d \cdot (x \cdot y)] = b \cdot [(d \cdot y) \cdot x] = b \cdot (1 \cdot x) = b \cdot x = 1$, logo $xy = z$. Tendo $xy = z$, pode-se concluir que $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}$

Demonstrando (ii): Como $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$, usando a propriedade associativa, tem-se: $a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = a \cdot c \cdot \frac{1}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Demonstrando (ii): Para a demonstração desta operação, considera-se a relação $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{d} = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}$. Baseando-se no axioma do elemento inverso, multiplica-se a primeira parcela por $d \cdot \frac{1}{d} = d \cdot d^{-1}$ e a outra por $b \cdot \frac{1}{b} = b \cdot b^{-1}$. Dessa forma, $a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot d^{-1} + c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot b^{-1}$; pela comutatividade e pela associatividade, tem-se: $a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot d^{-1} + c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} = a \cdot d \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} + c \cdot b \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} = a \cdot d \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} + c \cdot b \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{b}$. Usando a propriedade distributiva, tem-se $(a \cdot d + c \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}$. Então, $(a \cdot d + c \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = (ad + bc) \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

3.2.2. A interpretação geométrica dos números racionais

Para esta forma de interpretar os números racionais, toma-se uma reta numérica e escolhe-se um ponto para ser o zero. Demarca-se o segmento de 0 a 1. Defina o comprimento deste segmento como unidade de medida que fica à livre escolha. Representa os inteiros positivos e negativos como conjunto de pontos equidistantes na reta numerada, sendo à esquerda de zero os negativos e à direita de zero os positivos.

Para se representar frações com denominadores n , divida cada um dos segmentos da unidade escolhida em n partes iguais; os pontos da subdivisão vão representar as frações com denominador n . Se, para cada inteiro n , for feito o mesmo raciocínio, todos os números racionais serão representados por pontos desta reta numérica. Esses pontos serão chamados de pontos racionais. Nesta pesquisa, um pouco à frente (ver pág 82), ficará claro que o conjunto dos números racionais não esgota a reta numérica.

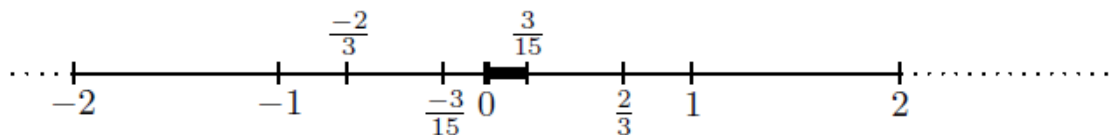


Figura X: A reta numérica racional

As frações equivalentes são representadas na reta numérica por um mesmo ponto, ou seja, o ponto que representa fração $\frac{2}{3}$ é o mesmo que representa a fração $\frac{4}{6}$ e as demais frações equivalentes a $\frac{2}{3}$.

3.3. Corpo ordenado

Apresentam-se os corpos ordenados, no intuito de desvelar as ideias de comparações, de desigualdades e de intervalos, presentes em muitos textos de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. Dessa forma, busca-se, na compreensão dos processos formais, uma proximidade das relações operatórias, desenvolvidas no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

3.3.1 O que são corpos ordenados?

Já se sabe que o conjunto dos números racionais, com as operações de adição e de multiplicação usuais, é um corpo. Indo um pouco além, sabe-se que \mathbb{Q} é um corpo ordenado, isto é, em \mathbb{Q} tem sentido se falar em elementos positivos e negativos. Senão, observe:

Dada a fração $\frac{a}{b}$, concebida como quociente de inteiros relativos, logo, pode-se considerar sempre $b > 0$, posto que para $b < 0$, resulta em $-b > 0$ e a fração $\frac{a}{b}$ podem ser substituídas pela fração equivalente $\frac{-a}{-b}$.

Assumindo que seja sempre positivo o denominador b , valem as relações seguintes: $\frac{a}{b} < 0$, $\frac{a}{b} = 0$ ou $\frac{a}{b} > 0$, segundo seja $a < 0$, $a = 0$ ou $a > 0$ respectivamente.

Um fato que pode ser destacado é o estudo de comparação de frações, “quem é maior $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$?”. Essa comparação é garantida, em análise, pelo fato de $x^{-1} > y^{-1}$ se, e somente se, $x < y$, considerando x e y elementos positivos de um corpo K . Demonstrar esta situação, basta observar que $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \Rightarrow \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} > 0 \Rightarrow \frac{y}{xy} > \frac{x}{xy}$ como $xy = xy$, então $x < y$. Partindo de $x < y$, multiplica-se membro a membro por $\frac{1}{xy}$, encontrando-se, dessa forma, que $x^{-1} > y^{-1}$.

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, intercede entre elas uma, e somente uma das relações $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, segundo seja $ad < bc$, $ad = bc$ ou $ad > bc$.

3.3.2. Generalizando a noção de corpo ordenado.

Um corpo K será dito ordenado se neste corpo está destacado ou fixado um subconjunto P , chamado de conjunto dos elementos positivos de K , que satisfaz as seguintes condições:

1ª – Se a e b pertencem a P , então $a + b$ pertence a P , ou seja, se dois elementos do corpo K são positivos, a soma deles também é um elemento positivo.

2ª – Se a e b pertencem a P , então $a \cdot b$ pertence a P , ou seja, o produto de dois elementos do corpo K positivos é um elemento de K positivo.

3ª - Se a pertence a K , então verifica uma, e somente uma das seguintes propriedades

$$a \in P \text{ ou } a = 0, \text{ ou } -a \in P$$

A terceira condição também é conhecida como propriedade da tricotomia. Esta terceira condição implica que o conjunto $M = \{-a; a \in P\}$ o qual é denominado conjuntos dos elementos do corpo ordenado K negativos, não tem elementos comuns com o P . Desta forma, pode-se concluir que o conjunto K é a união dos três conjuntos disjuntos, P , $\{0\}$ e M .

A partir destas considerações, define-se que: se um elemento $a \in P$, contudo este elemento é positivo e diz que este elemento é maior que zero " $a > 0$ ". (Bem entendido, $a > 0$, se e somente se $a \in P$). Se $-a \in P$, então a é um elemento negativo e desta forma, $a < 0$.

Se a pertence a P ou é 0, então $a \geq 0$. Por outro lado, se $-a \in P$ ou é 0, então $a \leq 0$. Pode-se então introduzir que o elemento zero é tanto positivo quanto negativo, admitindo, assim, um *status* dual (BARTLE, 1983, p. 43). De uma forma mais geral, definiu-se no ensino fundamental e no ensino médio que P é o conjunto dos números positivos, $P \cup \{0\}$ conjunto dos números não negativos.

Destaca-se, neste momento, que o elemento $(-a)$ não é necessariamente negativo, podendo ser positivo, se a for um elemento negativo. Caso a seja positivo, então $-a$ será negativo.

As relações de ordem definidas nos cursos de Análise Real são introduzidas, admitindo-se a e b , dois elementos de K , tal que se $(a - b) \in P$, então $a > b$, ou se $-(a - b) \in P$, logo $a < b$. Da mesma forma, se $(a - b) \in P \cup \{0\}$, então, $a \geq b$, e se $-(a - b) \in P \cup \{0\}$, então $a \leq b$.

Confluindo com essas ideias, para um princípio de formalização, o curso de Análise Real na licenciatura em matemática coloca as relações de ordem, estabelecendo algumas propriedades, as quais são denominadas de Leis Familiares da Desigualdade (BARTLE, 2000, P. 42), que, sem dúvida, estão presentes nas obras do ensino fundamental e do ensino médio.

Sejam a, b , e c elementos de K , logo:

- se $a > b$ e $b > c$, então, $a > c$.

Para demonstrar essa situação, pode-se partir da definição apresentada neste capítulo, a qual garante que se $a > b$, então $(a - b) \in P$, e se $b > c$; $(b - c) \in P$. Observe que $a - c = (a - b) + (b - c)$, o que garante que $(a - c) \in P$, pois como definido anteriormente, a soma de dois elementos positivos é um elemento positivo.

- a segunda propriedade fala exatamente da validade das relações $a > b, a = b, a < b$ e a verificação dessa propriedade se estabelece nas possibilidades de $(a - b) \in P, a - b = 0$ e $-(a - b) \in P$

- a terceira propriedade diz que se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$.

Essa propriedade pode ser provada, considerando que $a \neq b$. Dessa forma, ou $(a - b) \in P$ ou $(b - a) \in P$, ou seja, ou $a > b$, ou $b > a$. Em qualquer caso, verifica-se uma contrariedade das hipóteses.

Num corpo ordenado, se $a \neq 0$, então $a^2 \in P$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a \cdot a$ e no segundo caso $a^2 = (-a) \cdot (-a)$, ou seja, $(-a) \cdot (-a) = (-1) \cdot (a) \cdot (-1) \cdot (a) = (a) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (a) = (a) \cdot 1 \cdot (a) = (a) \cdot (a) = a^2$. Um caso particular é que num corpo ordenado $1 = 1 \cdot 1$ é sempre positivo.

Pode-se pensar em vários teoremas a partir dessa estrutura e identificar, no desenvolvimento matemático dos ensinamentos fundamental e médio, muitas relações possíveis ligadas a esses teoremas.

Essa propriedade fala que, se um corpo é ordenado, então o quadrado de qualquer elemento diferente de zero é positivo. O que isso significa sobre corpos conhecidos no ensino fundamental e no ensino médio? O que dizer dos números complexos?

O corpo C dos números complexos deve ser tal que possa admitir as operações de adição, de multiplicação e também possibilitar a extração de raízes quadradas de números negativos.

Segundo Dante (2009, p.431), uma boa maneira de definir esse conjunto é usando a relação de pares ordenados, proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837. Esses pares ordenados estão definidos da seguinte forma:

Igualdade: $(a, b) = (c, d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$

Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

A unidade imaginária é a denominação para o número complexo $(0, 1)$, o qual é denotado por “ i ”. Observe que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

O corpo dos números complexos (\mathbb{C}) não pode ser ordenado, isto é, por mais que se tente, não é possível destacar um conjunto em \mathbb{C} que possa ser chamado conjunto dos elementos positivos de \mathbb{C} , satisfazendo as propriedades, já que em \mathbb{C} tem um elemento cujo seu quadrado é negativo.

Outra situação a considerar é se $1 > 0$, tem-se $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 < \dots$. O subconjunto de K , formado por esses elementos, é infinito. Mais precisamente, o conjunto \mathbb{N} (Conjunto dos números naturais) pode ser considerado subconjunto de K .

Indica-se o símbolo $1'$ como o elemento unidade do corpo K . Defina uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow K$, pondo $f(1) = 1', f(2) = 1' + 1', f(3) = 1' + 1' + 1'$, etc. Definindo de maneira correta a função f , utiliza-se a indução: $f(1) = 1'$ e $f(m + 1) = f(m) + 1'$. Por indução, verifica-se que $f(m + n) = f(m) + f(n)$. Como todos os valores de $f(n)$ são positivos, se $m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$. Dessa forma, define-se uma bijeção do conjunto \mathbb{N} dos números naturais sobre o conjunto $N' = f(\mathbb{N})$, formado pelos elementos $1', 1' + 1', 1' + 1' + 1'$, etc. Há o costume de identificar N' como \mathbb{N} e considerar que os números naturais estão contidos em K . Logo $\mathbb{N} \subset K$ e, dessa forma, será permitido escrever 1 ao invés de $1'$. Em particular, todo corpo ordenado é infinito.

A definição que muitas vezes é usada no ensino fundamental e no ensino médio de que todo número natural é inteiro e todo número inteiro é racional, é perfeitamente identificada com a seguinte consideração: Dado um corpo ordenado K . Considerando $\mathbb{N} \subset K$, fazendo os simétricos $-n$ dos elementos n de \mathbb{N} e mais o zero, sendo $0 \in K$, tem-se constituído o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros. Dessa forma, admite-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset K$.

Considerando m e n elementos de \mathbb{Z} , com $n \neq 0$, existe $n^{-1} \in K$, de acordo com o axioma (4M). Dessa forma, pode-se referir ao conjunto formado por todos os elementos $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n} \in K$, com $n \neq 0$, como um subcorpo de K , sendo este, o menor deles.

Como todo subcorpo deve conter pelo menos 0 e 1, e mais, o conjunto N por adições sucessivas de 1, o conjunto Z por tomadas de simétricos e o conjunto das frações $\frac{m}{n}; m, n \in Z e n \neq 0$, de um modo natural, pode-se considerar que $N \subset Z \subset Q \subset K$, identificando que o corpo Q dos números racionais é evidentemente o menor subcorpo ordenado de K .

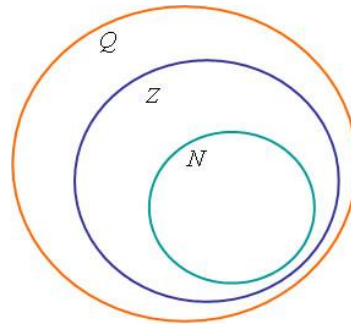


Figura XI: ilustração de Q

3.3.3. Noção de Intervalos

Fixados $a < b$, elementos de um corpo ordenado K , destacam-se os seguintes subconjuntos de K .

$[a, b] = \{x \in K ; a \leq x \leq b\} \rightarrow$ intervalo fechado de extremos a e b

$[a, b) = \{x \in K ; a \leq x < b\} \rightarrow$ intervalo fechado na esquerda e aberto na direita.

$(a, b] = \{x \in K ; a < x \leq b\} \rightarrow$ intervalo aberto na esquerda e fechado na direita

$(a, b) = \{x \in K ; a < x < b\} \rightarrow$ intervalo aberto

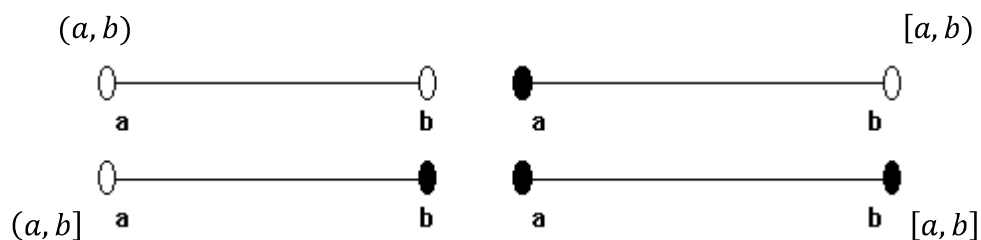


Figura XII. Intervalos ou segmentos

Os intervalos acima são ditos limitados. Na sequência, são apresentados intervalos ilimitados cujas representações geométricas são retas e/ou semi-retas

$(-\infty, b] = \{x \in K ; x \leq b\} \rightarrow$ é a semi reta esquerda fechada de origem em b

$(-\infty, b) = \{x \in K ; x < b\} \rightarrow$ é a semi reta esquerda aberta de origem em b

$(a, \infty] = \{x \in K ; x \geq a\} \rightarrow$ é a semi reta direita fechada de origem em a

$(a, \infty) = \{x \in K ; x > a\} \rightarrow$ é a semi reta direita aberta de origem em a

$(-\infty, \infty) = K \rightarrow$ intervalo cuja representação gráfica é uma reta. Esse intervalo pode ser considerado aberto ou fechado.

Quando é considerado um intervalo de extremos a e b , sempre supõem que $a < b$, com exceção do intervalo fechado $[a, b]$, no qual $a = b$. Esse último intervalo pode ser denotado por $[a, a]$. Sua representação geométrica consiste em um único ponto a e é chamado de intervalo degenerado.

Não é difícil afirmar que todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito, basta observar que num corpo ordenado K , se $x < y$ então $x < \frac{x+y}{2} < y$. Desta forma, se I , for um intervalo entre a e b , com $a < b$, então, pode-se obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$, pertencentes a I . Tomando $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$, $x_3 = \frac{a+x_2}{2}, \dots, x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2}, \dots$ tem-se $a < \dots < x_3 < x_2 < x_1 < b$.

Considerando que o intervalo entre dois números racionais a e b ($a < b$) distintos é não degenerado, observa-se que sempre, entre dois números racionais, vai existir um número racional n , dado por: $n = \frac{a+b}{2}$.

3.3.4. As inequações na estrutura de corpos ordenados

No ensino fundamental e no ensino médio, são introduzidas as chamadas inequações, que são sentenças matemáticas com uma ou mais incógnitas (letras) expressas por uma desigualdade. Para resolver essas inequações é preciso observar bem o que acontece, quando se multiplica membro a membro da sentença por um número positivo e por um número negativo.

Teorema (9): Dados x, y, z , elementos de um corpo K ordenado. Se $x < y$, então qualquer que seja $z > 0$, tem-se $xz < yz$.

Demonstrando: Se $x < y$, então $y - x \in P$ e se $z > 0$ então $z \in P$. Multiplicando $y - x$ por z , temos $(y - x)z \in P$. Usando a propriedade distributiva, temos $(yz - xz) \in P$, logo, $xz < yz$.

Teorema (10): Sendo x, y e z , elementos de um corpo K ordenado, se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$.

Demonstrando: Se $x < y$, então $y - x \in P$ e se $z < 0$ então $-z \in P$. Multiplicando $y - x$ por $-z$, temos $(y - x) \cdot (-z) \in P$. Usando a propriedade distributiva, temos $(-yz + xz) \in P$, logo, $xz > yz$.

Esses teoremas justificam que, ao se multiplicar os membros de uma desigualdade, denotada pelos sinais: $>$ (maior), $<$ (menor), \leq (menor do que ou igual a), \geq (maior do que ou igual a), por um número positivo, a desigualdade não se altera e, se o número for negativo, a desigualdade é alterada, ou seja, o maior é substituído pelo menor e vice-versa. Logo, a inequação $-x < 1$, pode ser equivalentemente representada por $x > -1$, satisfazendo o conjunto no qual foi definido a sua solução.

Teorema (11): Dados x e y , elementos de um corpo ordenado K . Se $x < y$, então, qualquer que seja z pertencente a K , tem-se que $x + z < y + z$.

Demonstrando: Se $x < y$, então $y - x \in P$ $(y - x) + z + (-z) \in P$. Logo, $y + z - x - z \in P$, $(y + z) - (x + z) \in P \Rightarrow x + z < y + z$.

Esta propriedade recebe o nome de “monotonicidade da adição” e garante que, mesmo somando membro a membro de uma desigualdade por um número qualquer, encontra-se uma desigualdade equivalente a primeira.

Teorema (12): Dados a e b , elementos de um corpo K ordenado. Tem-se $a \cdot b > 0$ se, e somente se, $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.

A demonstração desse teorema vai permitir uma maior compreensão da resolução de inequações produto, como por exemplo, $(x - 7)(x + 2) > 0$.

Demonstração: Esta demonstração se desenvolverá por duas partes:

- 1ª parte: Se $a \cdot b > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$. Sendo $a \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b$ é positivo, ou seja, $a \cdot b \in P$. Considere $a < 0$, ou seja, a negativo e $b > 0$, logo, $-a \in P$ e $b \in P$, dessa forma $-a \cdot b \in P$, contradizendo a hipótese de $a \cdot b \in P$. Da mesma forma, considere $a > 0$ e $b < 0$, logo $a \in P$ e $-b \in P$, então $a \cdot (-b) \in P \Rightarrow -a \cdot b \in P$, mais uma vez contradizendo a hipótese. Logo, se $a \cdot b > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.

- 2ª parte: Esta segunda parte vai transcorrer de forma a garantir as propriedades de corpos ordenados. Se $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$. De fato, se $a > 0$ então $a \in P$ e se $b > 0$ então $b \in P$, logo, $a \cdot b \in P$. Por outro lado, se $a < 0 \Rightarrow -a \in P$ e $b < 0 \Rightarrow -b \in P$, logo, $(-a) \cdot (-b) \in P$, ou seja, $(-1)a \cdot (-1)b > 0$.

Usando a propriedade comutativa, tem-se $a(-1) \cdot (-1)b > 0 \Rightarrow a \cdot 1 \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

A resolução da inequação, com uma incógnita, consiste na aplicação sucessiva das propriedades das desigualdades que transcorrem neste trabalho, até se chegar a uma expressão final do tipo $x > c, x < c, x \leq c, x \geq c$.

Corolário 3: Dados a e b , elementos de um corpo K ordenado. Tem-se $a \cdot b < 0$ se, e somente se, $a > 0$ e $b < 0$ ou $a < 0$ e $b > 0$.

Demonstração: 1ª parte: Se $a \cdot b < 0$, então $a < 0$ e $b > 0$ ou $a > 0$ e $b < 0$. Considerando $a \cdot b < 0$, então $-(a \cdot b) \in P$. Logo, $(-1)(a \cdot b) \in P$, ou seja, $(-1)(a) \cdot b \in P \Rightarrow -a \cdot b \in P \Rightarrow -a \in P$ e $b \in P$, dessa forma, $a < 0$ e $b > 0$. Ou $(-1)(a \cdot b) \in P$, ou seja, $(-1)(a) \cdot b \in P$. Usando a propriedade comutativa, $(a) \cdot (-1) \cdot b \in P \Rightarrow a \cdot (-b) \in P \Rightarrow a \in P$ e $-b \in P$, dessa forma, $a > 0$ e $b < 0$.

2ª parte: Se $a < 0$ e $b > 0$ e $a > 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b < 0$. Partindo de $a < 0$ e $b > 0$, tem-se $-a \in P$ e $b \in P$, dessa forma $-a \cdot b \in P, \Rightarrow -(a \cdot b) \in P$, logo $a \cdot b < 0$. De maneira análoga, considere $a > 0$ e $b < 0$, logo $a \in P$ e $-b \in P$, então $a \cdot (-b) \in P \Rightarrow a \cdot (-1) \cdot b \in P, \Rightarrow -(a \cdot b) \in P$, logo $a \cdot b < 0$.

Teorema (13): Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

Demonstrando: Se $a > b$, então $a - b > 0$ e, se $c > d$, então $c - d > 0$, ou seja, $(a - b) \in P$ e $(c - d) \in P$. De forma que $(a - b) + (c - d) \in P \Rightarrow (a + c) - (b + d) \in P \Rightarrow a + c > b + d$.

Um erro muito frequente, cometido ao resolver inequação do tipo $\frac{2}{x-1} < -1$ por exemplo, é escrever de uma forma direta a sentença, multiplicando membro a membro por $(x-1)$. Dessa forma, tem-se $2 < (-1)(x-1)$ para $x \neq 1$. A observação que se faz é que o erro vem do fato de não saber o sinal de $x - 1$.

Quando se resolve uma inequação, todas as etapas podem e devem ser justificadas pelos axiomas do corpo, pelos axiomas de ordem e pelas propriedades decorrentes destes axiomas.

Para ilustrar, pode-se acompanhar com detalhe a resolução da inequação citada acima: $\frac{2}{x-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < -1 + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-1)^{-1} < 0 \Leftrightarrow (x+1) > 0$ e $(x-1)^{-1} < 0$ ou $(x+1) < 0$ e $(x-1)^{-1} > 0$. Um

detalhe a ser considerado é que $(x - 1)^{-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ de outra forma, $(x - 1)^{-1} < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0$. Conseqüentemente, analisando os sinais de $x + 1$ e $x - 1$, conclui-se que $x > -1$ e $x < 1$, ou seja, $-1 < x < 1$.

Pode-se encaminhar a solução da inequação acima, multiplicando membro a membro por $x - 1$, desde que seja considerado o sinal de $x - 1$.

3.3.5. Módulo de um elemento de um corpo ordenado K

Seguindo a definição da coleção “Tudo é Matemática”, livro do 7º ano do ensino fundamental (DANTE, 2009, p. 26), módulo, ou valor absoluto de um número inteiro, é a distância do ponto que representa esse número até a origem, atribuindo a esse conceito, a visão geométrica do que é módulo. Definições equivalentes a essa, são encontradas em diversos livros didáticos do ensino fundamental.

No ensino desse tópico no curso de Análise Real na licenciatura em matemática, módulo, ou valor absoluto, pode ser definido sobre qualquer corpo K ordenado, de acordo com a propriedade tricotomia, a qual garante que, se $a \neq 0$, então um dos números, a ou $-a$, é estritamente positivo. Define-se o valor absoluto de $a \neq 0$, como o elemento positivo do conjunto $\{a, -a\}$.

Por definição, o valor absoluto de 0 é 0. Se $a \in K$, é definido o valor absoluto de a , o qual pode ser simbolicamente representado por $|a|$, como: $|a| = a$ se $a \geq 0$ e $|a| = -a$ se $a < 0$. Este fato pode ser usado como definição que $|a| = \max\{a, -a\}$, significando que o módulo, ou valor absoluto de “ a ”, é o máximo do conjunto cujos elementos são a e $-a$.

Na linguagem de função, o domínio da função valor absoluto é todo conjunto K, e seu conjunto imagem é $P \cup \{0\}$. Em especial, a função valor absoluto leva os elementos x e $-x$ no mesmo elemento do contradomínio.

$$f: Q \rightarrow Q, \text{ tal que } f(x) = |x|, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Pode-se concluir que dois elementos simétricos têm o mesmo módulo.

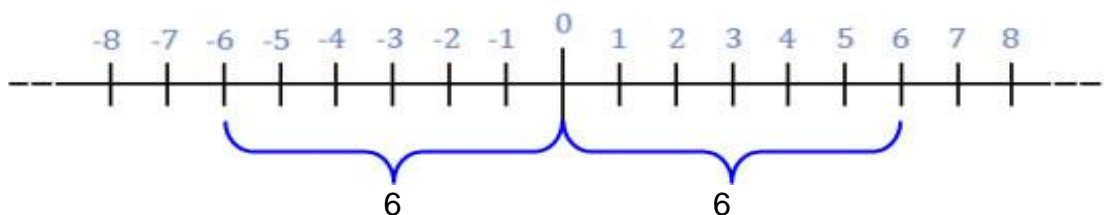


Figura XIII: elementos simétricos

Destacam-se algumas propriedades as quais serão citadas e demonstradas nesta pesquisa, a fim de se pensar nas noções analíticas para certas situações em matemática, associada ao ensino fundamental e médio.

(1ª) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$. De fato, pois, se $a = 0$, por definição $|0| = 0$ e se $a \neq 0$, então, também $-a \neq 0$, de modo que $|a| \neq 0$.

(2ª) $|ab| = |a| \cdot |b|$ qualquer que seja a, b , números do corpo K . Para esta demonstração, se $a > 0$ e $b > 0$, então, $ab > 0$, de tal forma que $|ab| = ab = |a||b|$. De outra forma, se $a > 0$ e $b < 0$ então, $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab)$, como $|a| = a$ e $|b| = -b$, logo $|a| \cdot |b| = -ab$, desta forma $|ab| = |a| \cdot |b|$ de maneira análoga para $a < 0$ e $b > 0$.

(3ª) $|-a| = |a|$, para todo a pertencente a K . Para $a = 0$, tem-se que $|0| = 0$; para $a > 0$, tem-se $|a| = a = |-a|$. Se $a < 0$, então $|a| = -a = |-a|$.

(4ª) Se $c \geq 0$, então $|a| \leq c$ se, e somente se, $-c \leq a \leq c$. Para esta demonstração infere-se que $-c \leq a$, de modo que $-c \leq a \leq c$. Reciprocamente, se essa relação se verifica então $a \leq c$ e $-a \leq c$, concluindo que $|a| \leq c$.

Um resultado importante deste estudo, refere-se à desigualdade triangular: Se a e b são elementos de um corpo K ordenado, qualquer, então $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.⁶

Essas questões matemáticas frequentemente aparecem nas atividades principalmente de cálculo. Pensando em demonstrar esse teorema, parte-se de $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq \pm b \leq |b|$, dessa forma, infere-se que, $-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a \pm b| \leq |a| + |b|$, provando dessa forma, a segunda parte dessa desigualdade. Como $|a| = |(a - b) + b|$, e como foi demonstrado para a segunda parte da desigualdade, tem-se $|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, da mesma forma $|a| - |b| \leq |a - b|$. Combinando essas duas desigualdades, pode-se deduzir que $||a| - |b|| \leq |a - b|$, que é a primeira parte da desigualdade, com o sinal menos. Para se obter a desigualdade com sinal mais, basta substituir b por $-b$.

Corolário 4: Se $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são elementos de um corpo K ordenado, então $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$.

⁶ A desigualdade comumente referida como desigualdade triangular é $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração: Para $n = 2$, a conclusão é precisamente a desigualdade triangular. Se $n > 2$, utiliza-se a indução matemática⁷, ou seja, $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + a_{k+1}| \leq |(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)| + |a_{k+1}|$

Seja ϵ um elemento positivo e a e x elementos quaisquer, todos de um corpo ordenado K . As seguintes sentenças são equivalentes:

- i) $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$
- ii) $a - \epsilon < x < a + \epsilon$
- iii) $|x - a| < \epsilon$

Outra configuração para estas sentenças permite escrevê-las como: $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Leftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon$.

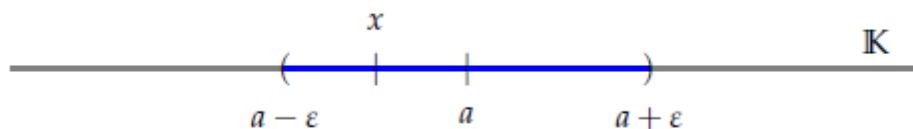


Figura XIV: x pertencente ao intervalo $|a - \epsilon|$

As configurações geométricas não devem intervir nas demonstrações, mas constituem um auxílio valiosíssimo para o entendimento de conceitos e de teoremas em Análise (LIMA, 2009, p. 73). Mostrando a veracidade das sentenças acima, tem-se: (i) \Rightarrow (ii) Segue da própria definição de intervalo. (ii) \Rightarrow (iii) Se $a - \epsilon < x < a + \epsilon$, então, somando $-a$ em todos os membros, temos $(-a) + a - \epsilon < x + (-a) < (-a) + a + \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x - a < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \epsilon$. (iii) \Rightarrow (i) Utilizando a 4ª propriedade de módulo, tem-se $|x - a| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x - a < \epsilon$, somando a em todos os membros, temos $a - \epsilon < x < a + \epsilon$, o que significa dizer que $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

3.4. Conjuntos limitados – do supremo ao ínfimo

Neste tópico serão conhecidos elementos máximos e mínimos envolvidos em corpos ordenados, identificando supremos e ínfimos. É um tópico com relações restritas no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, mas contribui para

⁷A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação dos casos particulares. É utilizada em diversas ciências, inclusive na matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na matemática, no intuito demonstrar teoremas de certos tipos de problemas. Segundo Polya (1995, p.91), é de se lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. A indução procura encontrar a coerência nos fatos observados. Seus mais notáveis instrumentos são a generalização, a particularização e a analogia.

uma aproximação e identificação de elementos importantes na construção dos números reais.

3.4.1. Identificando supremo e ínfimo

Na noção de intervalos, pode-se definir intervalos limitados. O intervalo (a, b) , sendo a e b elementos de um corpo ordenado K , com $a < b$ é limitado inferiormente, pois todos os valores x , pertencentes a esse intervalo, são maiores que a e, limitado superiormente, sendo todos os valores x desse intervalo menores que b .

Seja um corpo ordenado K . Um subconjunto X de K é limitado superiormente, se existir b pertencente a K , tal que $b \geq x$, qualquer que seja $x \in X$. Pode-se traduzir esse conceito, dizendo que $X \subset]-\infty, b]$. Cada b pertencente a K , com essa propriedade chama-se cota superior de X . Um exemplo é o intervalo $(4, 8)$, no qual 8 é considerado uma cota superior desse intervalo. Em alguns textos de Análise Real, a cota superior recebe o nome de majorante.

Se um conjunto tem uma cota superior então admite uma infinidade delas, pois, se b é uma cota superior de X , então $b + n$ também é, qualquer que seja n pertencente aos naturais. A destacar, no intervalo $(4, 8)$, citado anteriormente, 9 é uma cota superior do intervalo.

De maneira análoga, $X \subset K$ diz limitado inferiormente, quando existir a pertencente a K , tal que, para todo x pertencente a X , tem-se $a \leq x$. Um elemento a que goza dessa propriedade é denominado cota inferior ou minorante de X . Pode-se considerar que $X \subset [a, +\infty[$.

Um conjunto que tem cota inferior a admite uma infinidade delas, ou seja, se a é cota inferior de X , então $a - n$ também o é, qualquer que seja n , pertencente ao conjunto dos números naturais. Voltando ao intervalo $(4, 8)$, 4 é uma cota inferior do intervalo, mas 3 também é uma cota inferior desse mesmo intervalo.

No corpo dos números racionais, o conjunto dos números naturais é limitado inferiormente, pois $\mathbb{N} \subset [0, +\infty[$, mas não é limitado superiormente. Para mostrar que \mathbb{N} não é limitado superiormente em \mathbb{Q} , dado qualquer $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, o objetivo é encontrar um n pertencente ao conjunto dos números naturais, tal que, $n > \frac{a}{b}$. Se

$\frac{a}{b} \leq 0$, basta considerar $n = 1$; se $\frac{a}{b} > 0$, não há perda de generalidade em admitir a e b naturais. Neste caso, considerando $n = a + 1$, tem-se:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b} \leq a+1 = n$$

O fato de \mathbb{N} não ser limitado superiormente em \mathbb{Q} , constitui uma propriedade intrínseca no corpo dos racionais.

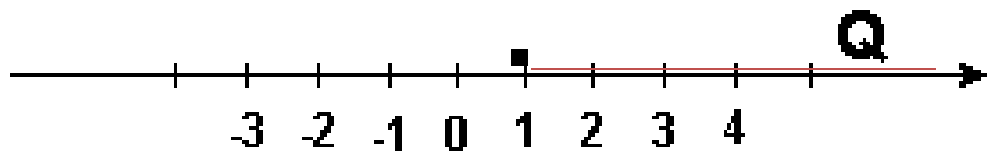


Figura XV: \mathbb{N} contido em \mathbb{Q}

Um subconjunto X , de um corpo ordenado K , chama-se limitado, quando é limitado superiormente e inferiormente, ou seja, quando existem a e b , pertencentes a K , tais que $X \subset [a, b]$.

3.4.2. Princípio Arquimediano

Arquimedes de Siracusa nasceu no ano de 287 a.C. e veio a falecer no ano de 212 a.C. É considerado consensualmente o maior matemático da Antiguidade, superando todos os outros, pela quantidade de dificuldades dos problemas que trabalhou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações (BOYER, 1992,p.28). Interessava pela matemática pura e aplicada e foi o fundador de dois ramos da física (estática e hidrodinâmica).

Em seu trabalho sobre áreas e volumes, desenvolveu também o método de exaustão, pelo qual aproximava-se quantidades desejadas pelas somas parciais de séries ou pelos termos de uma sequência.

Princípio Arquimediano: Dados os elementos $x, y \in K$, se $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x > y$. Nota-se que num corpo ordenado, o Princípio Arquimediano é equivalente as afirmações que se segue.

- (i) $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;
- (ii) Dado a e $b \in K$, com $a > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;
- (iii) Dado qualquer $\epsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

A demonstração destas equivalências transcorrerá de $(i) \Rightarrow (ii)$ inicialmente, na sequência de $(ii) \Rightarrow (iii)$ e por fim $(iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Como \mathbb{N} é ilimitado superiormente, qualquer que seja $a > 0$, pertencente a K e b pertencentes a K , existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$ (ver pág. 70) e, portanto, $b < a \cdot n$. Partindo para demonstrar $(ii) \Rightarrow (iii)$. Dado $\epsilon > 0$ existe, em relação à (ii) , um $n \in \mathbb{N}$, tal que $\epsilon \cdot n > 1$; então, $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$. Finalmente, a demonstração de $(iii) \Rightarrow (i)$. Dado qualquer $x > 0$, existe, em relação à (iii) , um $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$, ou seja, $n > x$. Pode-se dizer, dessa forma, que nenhum elemento maior que zero, em K , pode ser cota superior de \mathbb{N} . Evidentemente um elemento menor ou igual a zero também não pode. Logo \mathbb{N} é ilimitado superiormente.

Um corpo ordenado K será dito Arquimediano, se nele for válido o Princípio Arquimediano ou equivalentemente às afirmações (i), (ii), (iii) acima. Nota-se que o corpo \mathbb{Q} dos racionais é Arquimediano.

3.5. Supremo e ínfimo, algumas considerações

Para uma melhor compreensão do que é supremo e ínfimo, empreende-se neste tópico, uma breve explanação destes assuntos, buscando entender quando um conjunto tem ou não um maior elemento e quando tem ou não um menor elemento.

3.5.1 Supremo, a menor das cotas superiores

Destaca-se que um conjunto limitado superiormente pode admitir uma menor cota superior, a qual recebe o nome de supremo. Um conjunto X cotado superiormente, uma cota superior b , se diz supremo de X , se é menor do que qualquer cota superior de X .

Em outras palavras, um número b pertencente a um corpo ordenado K diz supremo de um subconjunto X de K se satisfaz duas condições:

1ª) $x \leq b$, qualquer que seja x pertencente a X

Pela primeira condição, b é uma cota superior de X , ou seja, $X \subset]-\infty, b]$.

2ª) Se v é um elemento de K , tal que $x \leq v$, para todo $x \in X$, então $b \leq v$.

Nota-se que b é menor que qualquer outra cota superior de X .

O supremo de um subconjunto X de um corpo ordenado K é único, pois se m e n são supremos de X , então ambos são cotas superiores de X . Como m é o supremo de X e n cota superior de X , então $m \leq n$. De forma análoga, se n é o supremo de X e m a cota superior de X , então $n \leq m$. De acordo com as propriedades de corpos ordenados descritas nesta pesquisa (ver pág. 60), se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.

3.5.2. Ínfimo, a maior das cotas inferiores

Um conjunto limitado inferiormente pode admitir ínfimo que é a maior de suas cotas inferiores. Dado um corpo ordenando k , se um subconjunto X de K , cotado inferiormente, tem uma cota inferior a que é a maior delas, então a recebe o nome de ínfimo.

Um elemento a , pertencente a K , se diz ínfimo de um subconjunto X de K , se satisfaz a duas condições:

- 1ª) $x \geq a$, qualquer que seja x pertencente a X . Essa condição garante que a é cota inferior de X , ou seja, $X \subset [a, +\infty[$;
- 2ª) Se u é um elemento de K , tal que $x \geq u$, então $a \geq u$. Essa segunda condição diz que a é maior do que qualquer cota inferior de X .

Se um subconjunto X , de um corpo ordenado K , admite ínfimo, esse é único. De fato, se p e q são ínfimos de um subconjunto X de K , sendo p e q elementos de K , então, se p é o ínfimo de X , sendo q a cota inferior de X , logo $p \geq q$. De maneira análoga, se q é o ínfimo de X , e p a cota inferior de X , então $q \geq p$, portanto $p = q$.

3.5.3. Relações envolvendo supremo e ínfimo

Existindo supremo e ínfimo de um determinado subconjunto X , de um corpo K ordenado, serão usadas as denotações $Sup X$, para o supremo de X , e $Inf X$, para o ínfimo de X .

Pode ser conveniente atribuir outra caracterização para o supremo de um subconjunto de um corpo K ordenado. Um elemento b , de K , é o supremo de um subconjunto X de K , não vazio, se, e somente se, goza das seguintes propriedades:

- (a) Não há elemento $x \in X$, tal que $b < x$;
- (b) Se $v < b$, então existe um elemento $x_v \in X$ tal que $x_v > v$.

A demonstração dessas propriedades reside no fato de que só existe um único supremo para $X \subset K$. Seguindo a demonstração, suponha-se que b satisfaça as propriedades (a) e (b). A condição (a) implica que b é cota superior de X . Se v é tal que $v < b$, então a propriedade (b) mostra que v não pode ser cota superior de X , logo b é a menor das cotas superiores de X , ou seja, é o supremo ($\text{Sup } X = b$). Reciprocamente, seja b o supremo de X . Como b é cota superior de X , vale a propriedade (a). Se $v < b$, então v não é cota superior de X , portanto vai existir um elemento $x_v \in X$, tal que $v < x_v$.

Analisando os exemplos que se segue, considere dois conjuntos, os quais serão denotados por A_1 e A_2 , ambos contidos em um corpo K ordenado. Sendo $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ e $A_2 = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$. Nota-se que o conjunto A_1 tem cota superior que é o 1, porém qualquer $b \geq 1$ também é cota superior de A_1 . Verifica-se que 1 é a menor das cotas superiores de A_1 , portanto é o seu supremo.

O conjunto A_2 tem as mesmas cotas superiores de A_1 . Nota-se que 1 é a menor cota superior de A_2 , ou seja, é o supremo de A_2 . Observe que o supremo de A_2 pertence ao conjunto A_2 , já o supremo de A_1 não pertence ao conjunto A_1 . Essa observação garante que, quando um conjunto contém supremo, não está se fazendo nenhuma afirmação sobre o supremo ser ou não elemento desse conjunto.

Outra observação importante é sobre o conjunto vazio, ou seja, se $X = \emptyset$, então todo $b \in K$ é cota superior de X . Como não existe o menor elemento num corpo K ordenado, segue-se que o conjunto vazio não possui supremo, o mesmo aplica-se ao ínfimo.

Um elemento a , de K , é o ínfimo de um subconjunto X de K , não vazio, se, e somente, são válidas as seguintes propriedades:

- (c) Não há elemento $x \in X$, tal que $x < a$;
- (d) Se $v > a$, então existe um elemento $x_v \in X$ tal que $x_v < v$.

Demonstrando: suponha-se que a satisfaça as propriedades (a) e (b). A condição (a) implica que a é cota inferior de X . Se v é tal que $v > a$, então a propriedade (b) mostra que v não pode ser cota inferior de X , logo a é a maior das cotas inferiores de X , ou seja, é o ínfimo de X ($\text{Inf } X = a$). Reciprocamente, seja a o ínfimo de X . Como a é cota inferior de X , vale a propriedade (a). Se $v > a$, então v não é cota inferior de X , portanto vai existir um elemento $x_v \in X$, tal que $v > x_v$.

Voltando aos conjuntos $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ e $A_2 = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$, subconjuntos de um corpo ordenado K , percebe-se que 0 é o ínfimo dos dois conjuntos, e, de forma análoga ao supremo, o ínfimo não necessariamente tem que ser elemento do conjunto.

Pode-se generalizar o fato da existência de supremo e ínfimo que sejam elementos de um mesmo conjunto, da seguinte forma: Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, então este é o supremo, se X possuir um elemento mínimo, este será o ínfimo. Reciprocamente, se $Sup X$ pertencer ao conjunto X , então é o maior elemento de X e, se $Inf X$ pertencer a X , esse será o menor elemento de X . No caso do conjunto $A_2 = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$, 1 é o maior elemento do conjunto e 0 é o menor elemento desse mesmo conjunto. Já o conjunto $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ apesar de ser cotado, superiormente e inferiormente, não tem o menor e nem o maior elemento.

Outro exemplo a ser observado, considere o conjunto $Y \subset \mathbb{Q}$ das frações do tipo $\frac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $Y = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$. Afirma-se que $Inf Y = 0$ e $Sup Y = \frac{1}{2}$.

Demonstrando, em primeiro lugar, tem-se que $\frac{1}{2} \in Y$ e, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$, para todo $n > 1$. Logo, $\frac{1}{2}$ é o maior elemento de Y , ou é cota superior de Y , por conseguinte, é a menor delas, $\frac{1}{2} = Sup Y$.

Por outro lado, $0 < \frac{1}{2^n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, de fato, 0 é cota inferior de Y . Falta apenas provar que nenhum número racional $m > 0$ é cota inferior de Y . Para esta demonstração, sendo \mathbb{Q} um corpo ordenado, Arquimediano, dado $m > 0$, pode-se obter $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \frac{1}{m} - 1$, significando que $1 + n > \frac{1}{m}$. Para continuidade desta demonstração, será introduzida a desigualdade conhecida como desigualdade Bernoulli⁸.

⁸Desigualdade de Bernoulli: Essa desigualdade garante que em todo corpo ordenado K , se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale $(1+x)^n \geq 1+nx$. A demonstração dessa desigualdade é feita por indução em n . Para $n = 1$, verifica-se que $(1+x)^1 \geq 1+1x \Rightarrow 1+x = 1+x$. Para $n = k$, tem-se $(1+x)^k \geq 1+kx$. Para $n = k+1 \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. De fato, dado $n = k \Rightarrow (1+x)^k \geq 1+kx$, multiplicando membro a membro por $(1+x)$, tem-se que $(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x)$, isto significa que $(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 \geq 1+x+kx = 1+(1+x)k$, provando dessa forma que essa desigualdade é válida.

Ora, pela desigualdade de Bernoulli, tem-se que $2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n > \frac{1}{m}$, ou seja, $\frac{1}{2^n} < m$. Logo, nenhum $m > 0$ é cota inferior de Y , e, portanto, $\text{Inf } Y = 0$, e esse elemento não pertence ao conjunto Y . Logo, não existe o menor elemento deste conjunto.

Conceitos matemáticos como supremo e ínfimo, não são citados no ensino fundamental e no ensino médio, pode-se dizer que esses elementos estão presentes nas atividades que envolvem intervalos, portanto a observação se um conjunto possui maior elemento ou não, pode e deve ser trabalhada no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, deixando os questionamentos e as validades destes, relacionados à percepção e vivência do educando.

3.5.4. Este conjunto não tem supremo?

A pergunta que fica é se todo conjunto limitado à direita ou à esquerda tem supremo ou tem ínfimo. Para responder a essa questão, observe o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. Esse conjunto admite supremo no corpo ordenado dos números racionais?

Pensar no conjunto acima é o mesmo que pensar $A \subset (-2,2)$, no qual os elementos de extremos são elementos do corpo ordenado \mathbb{Q} . Baseado nessa informação, mais uma vez discuti-se a existência do supremo de tal conjunto e conseqüentemente do ínfimo.

Pode-se dizer que tal conjunto acima tem supremo? Então inicia-se uma discussão, em relação à existência de tal número, e, principalmente, que número é este.

Com a proposta de demonstrar se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ tem ou não supremo, suponha-se a existência de tal elemento, o qual será denotado por a , logo, $a = \text{Sup } A$.

Essa demonstração será elencada provando as afirmações que segue:

- 1ª) mostrar que a^2 não é o menor que dois ou seja, $a^2 \geq 2$;
- 2ª) mostrar que a^2 não é maior que dois, ou seja, $a^2 \leq 2$;

Demonstração da primeira afirmação: Se n é natural ($n \geq 1$), logo $\frac{1}{n} \leq 1$. Percebe-se que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, mas como n é arbitrariamente grande, considere ($n > 1$) e conseqüentemente $\frac{1}{n} < 1$ e $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$.

Desenvolvendo o produto notável $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2$, tem-se $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right)$, tem-se que $a^2 + 2a \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right) < a^2 + 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n}$. Fazendo $a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2$, o objetivo é encontrar um n , que satisfaça tal condição.

Existindo este n , prossegue-se a demonstração. Como $a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2 \Leftrightarrow 2a + 1 < n(2 - a^2) \Leftrightarrow n > \frac{2a+1}{2-a^2}$ pelo princípio Arquimediano (ver pág. 71). Para todo n que satisfaça a condição $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$, tem-se $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-a^2}{2a+1}$, então $\frac{1}{n} < \frac{2-a^2}{2a+1} \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot (2a + 1) < 2 - a^2 \Rightarrow \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2$. Se $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$. Somando a^2 , membro a membro, tem-se $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2 + a^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, dessa forma, verifica-se que a^2 não pode ser menor que dois, pois a é o supremo do conjunto A , significando que não pode existir outro elemento maior que ele, pertencente ao mesmo conjunto, cujo quadrado é menor que dois.

Como já foi apresentado nesta pesquisa (ver pág. 75), se o supremo pertence ao conjunto, então ele é o máximo do conjunto, logo é $a^2 \geq 2$.

Demonstração da segunda afirmação: Com n natural arbitrariamente grande, tem-se $n > 1$ logo $\frac{1}{n} < 1$. Sabendo-se que $\left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ e $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n}$. Fazendo-se $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} > 2$, o objetivo é encontrar um n que satisfaça tal condição $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} > 2 \Leftrightarrow -2a \cdot \frac{1}{n} > 2 - a^2 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} < a^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{a^2-2}{2a}$.

Pelo Princípio Arquimediano, tem-se $0 < \frac{1}{n} < \frac{a^2-2}{2a}$, logo existe um n , tal que $n > \frac{2a}{a^2-2}$. Desenvolvendo a inequação, tem-se $\frac{2a}{n} < a^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} + 2 < a^2 \Leftrightarrow 2 < a^2 - \frac{2a}{n} < a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(a - \frac{1}{n}\right)^2$. Dessa forma, podemos obter $\left(a - \frac{1}{n}\right) < a$, sendo $\left(a - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$. De fato, a^2 não pode ser maior que dois, pois $a = \sup A$, e, como foi demonstrado, existe um valor menor que a , cujo quadrado é maior que dois, então $a^2 \leq 2$.

Se a^2 não pode ser menor que dois e não pode ser maior que dois, então a^2 tem que ser igual a dois. Mas existe algum número racional cujo quadrado é dois?

A resposta para pergunta acima é direta: não. Porém deve ser provada. Se existir tal número, então será uma fração da forma $\frac{m}{n}$, sendo m e n números primos entre si.

Considere $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ sendo a fração $\frac{m}{n}$ irredutível com m e n inteiros e diferentes de zero. Logo $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$ e, por conseguinte $m^2 = 2n^2$. Essa última igualdade diz que m^2 é, conseqüentemente, m deve ser par, ou seja, $m = 2p$, sendo p um inteiro qualquer. Substituindo m por $2p$ na relação $m^2 = 2n^2$, tem-se como resultado $(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2$ ou $2p^2 = n^2$, que exige outrossim que n seja par. Este resultado contradiz a hipótese inicial de que $\frac{m}{n}$ seja fração irredutível.

Nenhum número racional, elevado ao quadrado, é igual a 2, concluindo que em \mathbb{Q} , o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ não tem supremo.

De acordo com as demonstrações anteriores, se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não vazio, limitado superiormente⁹, possua supremo, nesse tal corpo existirá um elemento $a > 0$, cujo quadrado é dois.

3.6. Conjunto dos números reais

Com a intenção de identificar um conjunto, no qual são determinados os números racionais e os números não-rationais, discute-se, neste tópico, corpos ordenados completos e a identificação de números reais, aproximando, tanto o professor do ensino fundamental e do ensino médio, quanto ao licenciando em matemática, do formalismo conceitual desses números e, ao mesmo tempo, contribuindo para uma melhor identificação desses elementos na prática docente em salas de aulas de matemática.

⁹Outro exemplo de conjunto limitado superiormente num corpo ordenado K , não Arquimediano que não possui supremo é o conjunto dos números naturais. O conjunto dos números naturais \mathbb{N} , contido em K , é limitado superiormente. Se b pertence a K , então b é uma cota superior para \mathbb{N} , logo $n + 1 \leq b$, para todo n pertencente a \mathbb{N} . Da desigualdade acima, segue-se que $n \leq b - 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, se $b \in K$, for uma cota superior de \mathbb{N} , então $b - 1$ também o será. Como $b - 1 < b$, segue-se que num corpo ordenado não Arquimediano K , o conjunto dos números naturais é limitado superiormente, mas não possui $\sup \mathbb{N}$ em K .

3.6.1. Corpo ordenado completo

Um corpo ordenado K é dito completo, se todo subconjunto não vazio $X \subset K$, limitado superiormente, possui supremo em K , da mesma forma, se um subconjunto $Y \subset K$ for limitado inferiormente, tem que possuir ínfimo. Pode-se concluir que todo corpo ordenado completo é Arquimediano.

Dado Y , e seja $X = -Y$, ou seja, $X = \{-y; y \in Y\}$, logo X é não vazio e limitado superiormente, logo existe $a = \sup X$. De forma análoga, facilmente observa-se que $-a = \inf Y$.

3.6.2. O corpo ordenado completo dos números reais

A partir deste momento, definem-se os Números Reais como corpo ordenado completo e, evidentemente, todas as propriedades de corpos ordenados completos serão válidas para \mathbb{R} .

Na abordagem atual das licenciaturas, os números reais são definidos axiomáticamente e, uma vez assim estabelecidos, prova-se que existem reais que não são racionais (MOREIRA & DAVID, 2005, p.82)

O número real positivo a , em que $a^2 = 2$ é um número real. Simboliza-se esse número por $\sqrt{2}$. Pode-se pensar na existência de mais algum número real positivo que, elevado ao quadrado, dê 2? A resposta para questão acima é não, pois se existirem dois números reais, a e b , ambos positivos, cujo quadrado seja dois, então $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow 0 = a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. No caso anterior, se $(a - b) \cdot (a + b) = 0$, logo um dos fatores seriam iguais a zero, então $a - b = 0$ ou $a + b = 0$. No primeiro caso, $a = b$, e, no segundo caso, $a = -b$, porém no segundo caso há uma contradição, pois a e b são ambos positivos, logo $a = -b$ não pode acontecer.

De acordo com o primeiro caso, $a = b$, ou seja, só existe um número positivo cujo quadrado é 2. Já se sabe que esse número $\sqrt{2}$, não é racional, porém é real. Logo, aos elementos de \mathbb{R} que não são elementos de \mathbb{Q} , serão denominados de números irracionais. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais.

Os irracionais são números reais porque são supremos de subconjuntos de \mathbb{R} não vazios e limitados superiormente de um corpo ordenado completo, porém outra forma de definição é que a partir de resultados de sequências numéricas, e de séries numéricas, prova-se que todo número real admite uma representação decimal

infinita e, no caso dos irracionais, uma representação infinita não-periódica (Ver pág. 79).

Moreira e David (2005) entendem essa forma de definir os números reais como uma espécie de legitimidade formal para se adotar nos textos escolares a apresentação usual dos números irracionais e dos números reais.

Os autores continuam afirmando:

(...) uma vez garantido o fato de que não há nada matematicamente incorreto em se apresentar os irracionais como números que não são frações ou como decimais infinitos e não-periódicos, a questão pedagógica referente à introdução dos reais para os alunos cujo universo numérico é o recém-construído conjunto dos racionais fica simplesmente esquecida (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 82).

Dando continuidade, serão descritos aspectos dos números reais, identificando elementos que estão presentes nos textos do ensino fundamental e do ensino médio.

3.6.3. Os números irracionais, algumas concepções

Os números irracionais estão ligados ao conceito mais difundido de medidas que trata da incomensurabilidade, a qual será descrita nesta pesquisa, como fonte de apoio para a compreensão do questionamento surgido e respondido: “quem é o supremo do conjunto $A = \{x \in Q; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$?”.

A priori, uma análise feita nos livros didáticos do ensino fundamental, mostra que os números irracionais são definidos como números que não podem ser representados por uma divisão entre dois números inteiros, ou números que têm uma representação infinita e não-periódica.

“Sim, existem números cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Por exemplo, 0,101001000100001000000.... e 2,71727374.... são representações decimais infinitas não-periódicas. Não há um mesmo padrão que se repete após a vírgula” (DANTE, 2009, p. 30).

No trecho acima, retirado de uma coleção de livros do ensino fundamental (8º ano), o autor faz uma referência a números que não são racionais, por sua representação decimal, e afirma que esses números são irracionais, denotando o conjunto de todos esses números pela letra (I).

Outra coleção também usada no ensino fundamental, no mesmo ano escolar (8º ano), apresenta os números irracionais, através do uso de potências e de aproximações para raízes quadradas não exatas, aplicando inicialmente o Teorema de Pitágoras.

“Vamos então determinar a raiz quadrada do número 2 e, assim, encontrar a medida da hipotenusa” (GIOVANNI & CASTRUCCI, 2009, p.22).

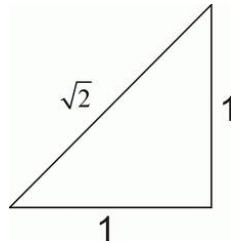


Figura XVI: Triângulo retângulo

Buscando as aproximações, verifica-se que raiz quadrada de 2 está entre dois números quadrados perfeitos, 1 e 4, como o quadrado de 1 = 1 e o quadrado de 2 é igual a 4, o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. E, a partir daí, várias tentativas são feitas na busca de descobrir qual valor mais próximo desta raiz quadrada.

$$(1,1)^2 = 1,21 < 2$$

$$(1,2)^2 = 1,44 < 2$$

$$(1,3)^2 = 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2$$

$$(1,5)^2 = 2,25 > 2$$

Com essa distribuição, percebe-se que o valor da $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5. Continuando o cálculo, tem-se:

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2$$

$$(1,42)^2 = 2,0164 > 2$$

Então $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42 e, prosseguindo os cálculos, tem-se:

$$(1,411)^2 = 1,990921 < 2$$

$$(1,412)^2 = 1,993744 < 2$$

$$(1,413)^2 = 1,996569 < 2$$

$$(1,414)^2 = 1,999396 < 2$$

$$(1,415)^2 = 2,002225 > 2$$

Desse modo, verifica-se que $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415. Prosseguindo os cálculos, encontra-se uma aproximação para $\sqrt{2}$ que seria 1,414213562.... Nota-se que essa representação é infinita, mas não-periódica (GIOVANNI & CASTRUCCI, 2009, p.22).

Para Giovanni e Castrucci (2009), os números que apresentam a característica de ser infinito e não-periódico são chamados de números irracionais.

Esses mesmos autores concluem que número irracional é todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não-periódica.

Giovanni e Castrucci (2009) continuam afirmando:

Um número irracional nunca pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiro. Nem todo número que representa raiz quadrada de outro número é um número irracional, ou seja: 1) As raízes quadradas de números quadrados perfeitos são números racionais. 2) Entre dois naturais quadrados perfeitos existem números racionais cujas raízes quadradas são números racionais (GIOVANNI & CASTRUCCI, 2009, p. 24).

3.6.4. Grandezas incomensuráveis

Em termos históricos, a primeira evidência da necessidade de números irracionais ocorre com a ideia da incomensurabilidade. Os números conhecidos hoje como irracionais não existiam na matemática grega. Aristóteles associava a irracionalidade da raiz quadrada de 2 à tentativa de escrever tal número como a razão de dois inteiros primos entre si¹⁰ (fração irredutível), ou seja, a demonstração de que não existe um número racional que elevado ao quadrado dê como resultado, o número dois (ÁVILA, 2006).

Raiz quadrada de dois parece ser o primeiro irracional a ser descoberto. Essa possibilidade pode ser também associada à descoberta das grandezas incomensuráveis, que estão interligadas às medições de segmentos.

Ao se comparar as magnitudes de dois segmentos de reta, aos quais serão denotados por “a” e “b”, existe a possibilidade de que o segmento “a” esteja contido no segmento “b” em uma quantidade “r” inteira e exata de vezes. Dessa forma, a medida do segmento “b” poderá ser expressa em termos da medida do segmento “a”, afirmando que “b” é “r” vezes “a”. Mas o segmento “b” pode não resultar em um múltiplo inteiro do segmento “a”, então, pode-se dividir “a” por exemplo, n segmentos iguais, sendo cada comprimento $\frac{a}{n}$, de tal forma que algum múltiplo m inteiro de segmento $\frac{a}{n}$ seja igual a b (COURANT & ROBBINS, 2000, P.67). Tal consideração é ilustrada abaixo:

$$b = \frac{m}{n} a$$

¹⁰Dois números inteiros m e n, ambos diferentes de zero, são primos entre si, se admitirem apenas o número 1 como divisor positivo comum.

Quando uma igualdade da forma anterior é válida, pode-se dizer que os dois segmentos são comensuráveis, uma vez que eles têm medida comum, ou seja, o segmento $\frac{a}{n}$ está contido n vezes em “a” e m vezes em “b”.

No tempo de Pitágoras, aproximadamente no século VI a.C, pensava-se que, dados dois segmentos quaisquer (AB) e (CD), seria sempre possível encontrar um terceiro segmento (EF), contido em um número inteiro de vezes no primeiro segmento (AB) e um número inteiro de vezes no segundo segmento (CD), dizendo, assim, que esse terceiro segmento (EF) era um submúltiplo comum dos dois segmentos anteriores.

Um progresso sensível na operação de medir consistia na determinação de um submúltiplo comum à unidade previamente fixada e à grandeza a qual iria medir.

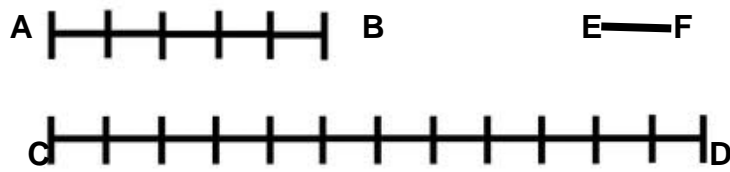


Figura XVII: Grandezas comensuráveis

A existência de tal submúltiplo garantiria a comensurabilidade das grandezas, ou seja, duas grandezas são comensuráveis quando existe uma unidade, por menor que seja, a qual cabe exatamente um número inteiro de vezes numa e noutra. Se duas grandezas, de mesma espécie, não admitem um submúltiplo comum, por menor que seja, então elas são denominadas de incomensuráveis.

Para uma discussão mais aprofundada, escolhe-se o segmento unitário $[0,1]$, então os segmentos comensuráveis com segmento unitário corresponderão a todos os pontos racionais $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$, sobre a reta numérica.

Um fato importante é dado pela seguinte proposição: “O conjunto dos pontos racionais é denso sobre a reta” (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 67). A afirmação anterior significa que, dentro de cada intervalo, por menor que se possa pensar, vão existir pontos racionais.

Precisamente, tome um denominador n , suficientemente grande, de modo, que o intervalo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ seja menor do que o intervalo $[a, b]$ considerado. Pelo menos

uma das frações $\frac{m}{n}$ deve ficar dentro do intervalo, por isso, não existe qualquer intervalo na reta que não contenha pontos racionais, por menor que seja este intervalo, além disso, deve haver infinitos pontos racionais em qualquer intervalo, pois, se houvesse um número finito de pontos, o intervalo entre dois pontos racionais adjacentes estaria, segundo Courant e Robbins (2000, p. 67), destruído de pontos racionais, o que, de acordo com o que foi apresentado, seria impossível.

Para as finalidades práticas de medidas, os números racionais são inteiramente suficientes (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 68). Essa consideração é válida também do ponto de vista teórico, uma vez que o conjunto de pontos racionais cobre a reta densamente. Parece que os pontos racionais cobrem toda reta numérica, mas isso não é verdade, pois, caso fosse, qualquer segmento seria comensurável com a unidade.

A revelação da existência de segmentos incomensuráveis, ou seja, da existência de número irracional, foi um acontecimento de grande importância, que possivelmente marcou a origem do que é considerada uma contribuição especificamente grega a procedimentos de rigor e de formalismo em matemática, afetando profundamente a matemática e a filosofia da época grega até os dias de hoje.

A construção geométrica simples que pode resultar em um segmento incomensurável com a unidade é feita usando o compasso¹¹

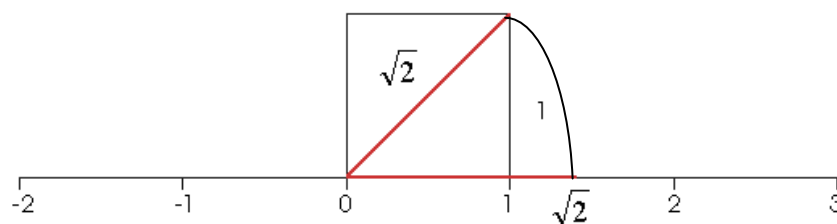


Figura XVIII: Número construtível

¹¹Primeiro se constrói um quadrado de lado 1. Utilizando um compasso, abra-o até que fique com comprimento da diagonal. Com essa abertura, coloca-se a ponta seca do compasso no zero e, com a outra extremidade, traça-se um semicírculo, passando pela reta orientada, no lugar que o semicírculo cortar a reta orientada é o ponto $\sqrt{2}$.

Se este segmento é demarcado sobre a reta numérica, por meio de um compasso, então o ponto assim construído não pode coincidir com nenhum dos pontos racionais, logo pode-se concluir que o conjunto de pontos racionais, embora denso, não cobre toda reta numérica, o que pode parecer estranho em termos intuitivos, mas a descoberta dos incomensuráveis instigou e ainda instiga filósofos e matemáticos, causando um efeito que Courant e Robbins (2000) consideram ser provocativo e especulativo na mente humana.

Pode-se definir então que um número irracional, representa o comprimento de um segmento incomensurável com a unidade, para haver uma correspondência mútua entre números e pontos de uma reta.

3.6.5. A crise dos incomensuráveis e a sua solução

As descobertas de grandezas não comensuráveis, feita pelos próprios pitagóricos, causaram uma das primeiras e grandes crises da matemática. Os matemáticos gregos acreditavam, em certo período da história, que medições de grandezas contínuas só poderiam ser concebidas, de forma a expressar a razão entre dois números naturais.

Essa descoberta produziu uma grande crise entre esses pitagóricos, pois suas observações envolviam comprimentos de cordas e o som por elas emitido e os estudos de outros fenômenos assemelhavam-se a esse, permeando, como diz Ávila (2006, p.53), a natureza inteira.

Os pitagóricos, ao perceberem que a diagonal de um quadrado não poderia ser medida através de números racionais, se viram diante de um dilema, sendo deflagrada, naquele momento, a denominada crise dos incomensuráveis.

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar sua doutrina, mas um de seus discípulos, Hipasso, quebrou o voto de silêncio e foi assassinado (DANTE, 2009, p.32).

Porém os próprios gregos produziram soluções para essa crise, através da construção de soluções com régua e com compasso, possibilitando o que é usado até os dias atuais, a associação da representação geométrica de segmentos incomensuráveis e a representação Aritmética dos números irracionais.

CAPÍTULO IV – NÚMEROS DECIMAIS E FRAÇÕES DECIMAIS

4. Decimais infinitos e periódicos

Buscando uma generalização para o estudo dos decimais, empreende-se nesta pesquisa uma discussão sobre algumas formas de conceber tais números, clareando a possibilidade de encontrar formas gerais para identificá-los

4.1. Frações decimais

Frações decimais são frações cujo denominador é 10, ou uma potência de 10. Assim as frações $\frac{2}{10}$, $\frac{34}{1000}$, $-\frac{32}{100}$ são exemplos de frações decimais.

Existem frações que são denominadas parcialmente decimais, pois seus denominadores podem ser transformados em potências de 10, por meio da equivalência. A fração $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{8}$, por exemplo, podem ser escritas equivalentemente como frações com denominadores iguais a uma potência de 10: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ e $\frac{9}{8} = \frac{1125}{1000}$.

4.2. Representação decimal

Representação decimal de um número real α não negativo é uma expressão que se caracteriza pela forma $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, que pode ser escrita compactamente como $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, em que a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e os índices $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ são dígitos, ou seja, são números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

Com relação as frações decimais, sua representação decimal é finita, logo $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$ e $\frac{9}{8} = \frac{1125}{1000} = 1,125$.

Todas as frações equivalentes às frações decimais têm denominadores que podem ser escritos como potências de 2 ou 5, ou de 2 e 5. Se houver algum denominador que apresente pelo menos um fator diferente de 2 e 5, então a fração não pode ser equivalentemente escrita na forma de fração decimal.

Pode-se representar um número racional na reta numérica, considerando aqueles que se originam pela subdivisão de cada intervalo unitário em 10, na sequência em 100, 1000 e daí por diante. Essa divisão é feita em segmentos iguais.

Os pontos obtidos destas subdivisões correspondem a frações decimais. Um exemplo a ser considerado é o número $0,321 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$. Esse ponto, esta

localizado no primeiro intervalo comprimento unitário, no segundo subintervalo de comprimento 10^{-1} , no terceiro subintervalo de comprimento 10^{-2} e no quarto subintervalo de comprimento 10^{-3} . Dessa forma, pode-se escrever que o ponto $0,321 = 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$. Essa forma de escrita será denominada nesta pesquisa como forma polinômica.

Se a fração decimal contiver n dígitos após o ponto decimal, será representada pela forma $f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \dots + a_n 10^{-n}$, onde z é um inteiro e os a 's são dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9, os quais indicam os décimos, centésimos e assim por diante (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 70).

A forma abreviada de representar o número f é $z, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n$. Como exemplo, o número 3,459 tem, por comparação, $z = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$ e pode ser escrito na forma polinômica como $f = 3 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$. A observação imediata que se traduz para frações decimais é a forma como podem ser escritas, ou seja, como frações comuns.

Considere a fração $\frac{p}{q}$, sendo $q = 10^n$, se p e q tem divisores comuns, pode-se reduzir a fração dada a uma fração comum com um denominador sendo algum divisor da potência 10^n . Reforçando o que já foi mencionado, nenhuma fração irredutível pode ser escrita na forma de fração decimal, se o denominador não é um divisor de uma potência de 10.

Mas como fica a fração $\frac{1}{3}$, por exemplo? Essa fração não pode ser escrita na forma de uma fração decimal com uma quantidade n finita de casas decimais, pois, segundo Courant e Robbins (2000), por maior que seja o valor de n escolhido, a igualdade $\frac{1}{3} = \frac{b}{10^n}$, implicaria em $3b = 10^n$, que do ponto de vista matemático é um absurdo, já que 3 não é um fator de qualquer potência de 10.

A questão que fica é que se esse número tem uma representação decimal, como seria essa representação? Volta-se a reta numérica e escolhe-se um ponto P qualquer que não corresponda a nenhuma fração decimal, pode-se considerar a fração $\frac{1}{3}$, por exemplo, ou o número $\sqrt{2}$.

Escolhendo um ponto P qualquer, o qual não pode ser escrito na forma de fração decimal, com uma quantidade finita de n dígitos e utilizando o processo da divisão em subintervalos de 10, ou seja, em dez partes iguais, P não vai ocorrer como ponto inicial de um subintervalo, mas P pode ainda ser incluído em intervalos

que se tornam cada vez menores, em relação à divisão decimal, em qualquer grau de aproximação a qual se deseja.

Supondo que o ponto P esteja situado no primeiro intervalo unitário. Ao se subdividir esse intervalo em dez partes iguais, cada parte com o comprimento de 10^{-1} , verifica-se que P , está contido, por exemplo, no quarto intervalo.

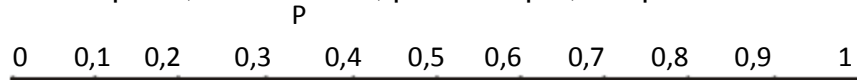


Figura XIX: Subdivisão do segmento unitário em dez partes iguais

Nesse momento, P está situado, digamos entre 0,3 e 0,4. Dando sequência, subdivide o intervalo entre 0,3 e 0,4 em dez partes iguais, cada uma com o comprimento de 10^{-2} . Nesse caso, considere P estará situado, no quarto deste intervalo, entre 0,33 e 0,34.

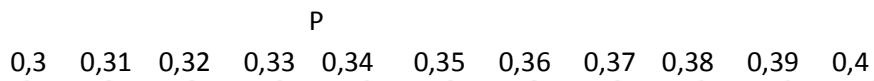


Figura XX: Subdivisão do segmento $[0,3; 0,4]$ em dez partes iguais

Subdividindo novamente, verifica-se que, por exemplo, P está situado no primeiro intervalo de comprimento 10^{-3} , logo, P está, digamos, entre 0,330 e 0,331.

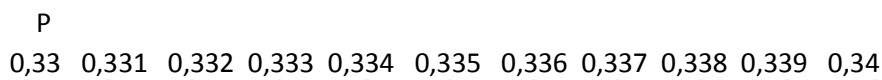


Figura XXI: Subdivisão do segmento $[0,33; 0,34]$ em dez partes iguais

Continuando esse raciocínio indefinidamente, pode-se levar a uma sequência sem fim de dígitos $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$, satisfazendo a propriedade que segue:

Qualquer que seja o número n escolhido, o ponto P está incluído no intervalo I_n cujo ponto inicial é fração decimal $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{n-1} a_n$. O ponto terminal é $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_n (a_n + 1)$ com comprimento de I_n sendo 10^{-n} .

Se a escolha for sucessivamente $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, pode-se observar que cada um destes intervalos, $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, \dots$ está contido naquele que o precedeu, enquanto seus comprimentos $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$ tendem a zero (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 71). Pode-se dizer que um ponto P está contido em uma sequência de intervalos encaixados.

Considerando o ponto $P = \frac{1}{3}$, então os dígitos $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ serão todos iguais a 3. Nesse caso, P estará contido em um intervalo encaixado que vai de $0,33333\dots33$ até $0,33333\dots34$, isto é, $0,33333\dots333 < \frac{1}{3} < 0,33333\dots34$, para qualquer quantidade de dígitos arbitrariamente grande. A forma de expressar essa concepção, é dizer que o número $0,33333\dots33$, tende a $\frac{1}{3}$, à medida que a quantidade n de dígitos aumenta. Dessa forma, escreve-se que $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, indicando que a fração decimal deve ser continuada indefinidamente, ou seja, $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$. Mas como ficaria a representação decimal do ponto $\sqrt{2}$?

Ao analisar a solução da equação $x^2 = 2$, identifica-se que o resultado é o ponto irracional $\sqrt{2}$. Pode-se conduzir este ponto, a uma fração decimal indefinidamente continuada, mas, segundo Courant e Robbins (2000, p.72), a lei que determina os valores dos dígitos na sequência não é, de forma alguma, óbvia. Pode-se afirmar que não existe explicitamente uma forma que determine os dígitos sucessivos deste ponto, porém é possível calcular quantos dígitos quiser.

Voltando à equação $x^2 = 2$, verifica-se que 2 está entre x^2 e $(x + 1)^2$, ou seja, $x^2 < 2 < (x + 1)^2$, o número $(x + 1)$ é considerado a raiz quadrada de 2 a menos de uma unidade, por excesso. Se $x = 1$, então, a solução da equação $x^2 = 2$ satisfaz $1 < x < 2$. Seguindo o desenvolvimento acima, tem-se as aproximações racionais para a solução da equação $x^2 = 2$, que se encontram entre 1 e 2.

A raiz quadrada de 2 a menos de um décimo por falta é o maior número inteiro de décimos, cujo quadrado é menor que 2. Isso é equivalente a dizer que $\left(\frac{x}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2$, sendo o número $\left(\frac{x+1}{10}\right)^2$ é a raiz quadrada de 2 por excesso, a menos de um décimo.

Para demarcar o ponto $\sqrt{2}$, divide o intervalo entre 1 e 2, em dez partes iguais, conforme a figura abaixo:

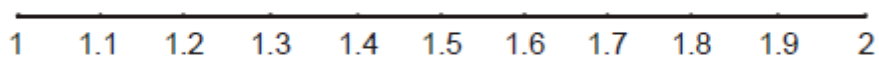


Figura XXII: Subdivisão do segmento [1; 2] em dez partes iguais

Verifica-se que $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$ e $(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$. Nota-se que 1,4 é a raiz quadrada de 2, a menos de um décimo por falta e 1,5 é a raiz quadrada de 2 a menos de um décimo por excesso, logo $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Na sequência, obtém-se a solução aproximada da equação a menos de $\frac{1}{100}$, por falta e por excesso, logo basta dividir o intervalo entre 1,4 e 1,5 em dez partes iguais:



Figura XXIII: Subdivisão do segmento $[1,4; 1,5]$ em dez partes iguais

Logo $(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0264$. O valor 1,41 é a raiz quadrada de 2 a menos de um centésimo pela falta e 1,42 é a raiz quadrada de 2 a menos de um centésimo por excesso. Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se que $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$, $(1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2$, e assim por diante. As classes das soluções da equação $x^2 = 2$, por falta e por excesso, constituídas por decimais infinitas: $A = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots\}$ e $B = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; \dots\}$.

De uma forma geral, afirma-se que um ponto P que não está representado por qualquer fração decimal com um número n , finito de dígitos, é representado por uma fração decimal infinita, $z, a_2 a_3 a_4 \dots$. Se, para cada valor de n , o ponto P se situar em um intervalo cujo comprimento é 10^{-n} , o seu ponto inicial será indicado por $z, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n$.

É importante observar que existe uma correspondência estabelecida entre todos os pontos da reta numérica e todas as frações decimais finitas ou infinitas de maneira a definir que um número é uma decimal finita ou infinita (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 72).

As decimais infinitas que não representam números racionais são os números irracionais. Essas considerações eram aceitas como satisfatórias para o sistema dos números racionais e dos irracionais, até meados do século XIX, sendo conhecidas como contínuo numérico.

Um reexame crítico de princípios e de consolidação de resultados, os matemáticos perceberam que o conceito de número irracional exigia uma análise mais precisa, no entanto o desenvolvimento do sistema numérico permitiu um

grande avanço da matemática desde o século XVII, e, em particular, da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral.

CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa se configura como uma proposta para iniciar uma reflexão sobre o que poderia ser trabalho da disciplina de Análise Real para os cursos de licenciatura em matemática e também um convite ao professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender aspectos da construção dos números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, identificando consequências desta na matemática produzida no ambiente escolar.

Para este empreendimento, o autor se dispôs a apresentar algumas questões envolvidas na dinâmica de sala de aula e também a clarear aspectos que diferenciam matemática escolar e matemática acadêmica. Como o foco desta pesquisa tem como referência a formação inicial ou continuada do professor, empreendeu-se neste trabalho um diálogo, permitindo, dentre várias concepções, concluir que, em termos da formação do professor de matemática, ainda há a necessidade de se encontrar formas para uma melhor qualificação.

Durante o processo de desenvolvimento deste trabalho foi criado pelo orientador, Prof. Dr. Carlos A. S. Soares, um grupo de estudos em Análise Real que tinha como objetivo discutir e desenvolver conhecimentos na matéria em questão.

O grupo era composto por três pessoas: o orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, os mestrandos, Francisco Bessa e Willian Cruz. Neste mesmo grupo, sendo convidado inicialmente pelo professor Francisco Bessa a participar de uma das reuniões, o professor Hernando se integrou ao grupo, com a diferença de não ter cursado no mestrado a disciplina Tópicos de Análise Matemática I.

O professor Hernando passou a ser então o ponto de apoio e de validação desta pesquisa. Durante a produção deste trabalho foi solicitado a ele, em virtude da visão que já trazia da graduação, que pudesse buscar questões à medida que a pesquisa avançasse, dentro do material produzido pela mesma.

Com as dúvidas surgidas nos encontros do grupo quanto ao desenvolvimento de certos aspectos da matemática formal e correlações identificadas, no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, a pesquisa foi se diferenciando em várias abordagens, das linguagens traduzidas nos livros-textos de Análise, ganhando uma característica particular de ser um instrumento que discute formação, matemática escolar e acadêmica e, ao mesmo tempo, se apresentando como ferramenta para o estudo de certas definições, demonstrações e/ou aplicações da matemática formal, dos cursos de Análise Real.

Ao se falar de demonstrações, percebe-se, segundo Garnica (2002, p. 76) a inexistência de referências sobre a prova rigorosa (demonstrações) tratada no contexto da formação de professores, embora existam literaturas em Educação Matemática, que trazem um número significativo de publicações relativas ao tema, abrindo possibilidades de analisar a prova como uma atividade social e de negociação em comunidade, a qual é considerada constituição de um regime de verdade.

No grupo, vários aspectos eram discutidos, sempre percebendo quais contribuições poderiam emergir na perspectiva do trabalho formal da matemática e das consequências desse no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio. Ao término do trabalho, foram feitas duas perguntas para o professor Hernando sobre a importância das provas e das demonstrações no curso de Análise Real para licenciatura.

1 - Para você, qual é o papel das demonstrações em matemática?

RESP: Penso que o papel das demonstrações é dar veracidade às afirmativas matemáticas, como as fórmulas, teoremas, etc¹².

Segundo Bicudo (2002, p.67), um dos maiores passos isolados da lógica dos últimos 200 anos, foi a explicitação do conceito de demonstração. Em termos lógicos, uma demonstração pode ser considerada uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma, ou conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na seqüência dada (BICUDO 2002, p.67), porém o mesmo autor afirma que:

Em suma, quando se trata de discorrer sobre a DEMONSTRAÇÃO¹³ MATEMÁTICA, o matemático parece estar na mesma posição de Santo Agostinho em relação ao tempo e, talvez, a única coisa sensata a fazer seja responder como o Santo. DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA – se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei (BICUDO, 2002, p.71).

Não foi objetivo desta pesquisa discutir o que é demonstração, mas, com certeza, foi um questionamento que acompanhou todo trabalho, causando dúvidas e despertando interesses.

Estudar uma matemática mais formal, aproximando-se das demonstrações matemáticas, fez surgir outros questionamentos que foram respondidos pelo professor Hernando, o qual se mostrou muito entusiasmado não só em dar as

¹² Os destaques sublinhados dão ênfase às respostas do participante da pesquisa.

¹³ Destaque do autor da citação.

respostas, mas em procurar associar sua vivência como professor do ensino médio a estas questões.

2 - Você acha necessário fazer demonstrações no processo de ensino e aprendizagem em matemática na educação básica? E na formação do professor?

RESP: Desde que a demonstração não seja um fator complicador que desmotive os alunos, sua inserção em certos momentos pode contribuir para um melhor entendimento dos conceitos matemáticos.

Quanto ao professor, penso que, independente do segmento que trabalhe, o conhecimento da sua disciplina deva ser progressivo e continuamente estimulado.

Durante o processo de produção de alguns teoremas, o grupo se sentiu incomodado, principalmente quando colocado frente às demonstrações do supremo e do ínfimo de um conjunto, no que fala de sua existência ou não. Basicamente, foram necessários exatamente cinco encontros para que, de fato, fosse compreensível tanto para o professor Hernando quanto para o grupo tal procedimento.

Essas dúvidas fizeram com que neste tema o autor não conseguisse encontrar um elo que aproximava este assunto do desenvolvimento da matemática, vivenciada no ensino fundamental e no ensino médio. De fato, ainda é um obstáculo a compreensão de tal assunto.

Em relação às demonstrações e/ou provas rigorosas na formação de matemática do professor que leciona na educação básica, Garnica (2002) coloca esse assunto entre dois campos, os quais denominam como o campo da técnica e o campo da crítica, que apresentam divergências sobre “verdade”, em particular “verdade matemática”, e sobre as vertentes nas quais poderiam se situar, sendo a técnica, o campo de produção científica da matemática e a crítica o campo da Educação Matemática.

Garnica (2002) conclui:

(...) a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da “ideologia da certeza” para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais (GARNICA, 2002, p. 75).

Apesar das dificuldades encontradas no produzir e no transcrever esta pesquisa, a aproximação do desenvolvimento formal da matemática permitiu abrir campo para outras discussões, relativas à formação matemática do professor de matemática.

Essas dificuldades se acentuaram pela pouca literatura que tratasse do assunto nas concepções da Educação Matemática e pela forma como o autor trazia certos conceitos com as imagens conceituais que tinha do conhecimento da matemática que trabalhava na Educação Básica.

As compreensões de certos aspectos da matemática formal foram observadas no transcorrer deste trabalho, buscando associar questões importantes da matemática do ensino fundamental e do ensino médio, dando aos mesmos um tratamento mais rigoroso.

Um exemplo são questões que envolvem o módulo de um número real; o autor percebeu que situações de cálculos com equações do 2º grau, raízes quadradas e módulo causavam muitas dúvidas no grupo.

Módulo de um número x pode ser caracterizado por $|x| = \sqrt{x^2}$ e a partir desta caracterização discutem-se alguns tópicos envolvidos na educação básica, principalmente no ensino médio no que diz respeito ao cálculo de equações e inequações.

As aplicações modulares permitem resolver sentenças como $x^2 = 16$ (por exemplo), na qual estão envolvidas relações que, muitas vezes, são omitidas no transcorrer destes cálculos na educação básica. Essas situações de resolução de equações quadradas, ou 2º grau, geralmente admitem duas soluções que são valores simétricos, as quais ficam, muitas vezes, reduzidas a aplicações de regras, como: “passar o quadrado para o segundo membro como mais ou menos a raiz quadrada do termo do segundo membro” (grifo nosso).

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$$

Porém, em relação ao desenvolvimento formal da Análise Real, destacam-se as propriedades de módulo, já que os dois membros da igualdade acima são positivos. Logo, para pensar nesse mais ou menos do resultado dessa sentença e evitar que essa forma de calcular seja generalizada para cálculo de raízes quadradas, que por definição é positiva, ou seja, $\sqrt{16} = 4$. Propõem-se a aplicação da definição de módulo, garantido, assim, as soluções da sentença em destaque:

$$x^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4.$$

De forma generalizada: Sendo a um elemento positivo, logo:

$$x^2 = a \Rightarrow |x| = \sqrt{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Um cuidado a ser observado é na igualdade que segue: $|-r| = r$. Essa igualdade não é verdadeira, pois para $r = -5$, por exemplo, tem-se $| -(-5) | = -5$, que é falso, pois o módulo nunca é negativo (DANTE, 2009, p. 100).

Outra diferença notável no que se refere a módulo é a percepção das igualdades $|x| = 7$ e $x = |7|$. No primeiro caso, $x = 7$ ou $x = -7$, já no segundo caso, $x = 7$, não admitindo outra solução.

A aplicação de módulo no ensino fundamental e no ensino médio inicia-se no 7º ano do ensino fundamental. Já no ensino médio vem fortemente ligada aos ensinamentos de funções modulares, equações e inequações modulares.

As dúvidas que perpassaram pelo grupo, foram trazidas pelos membros do mesmo, que atuam na educação básica e com experiência de mais de uma década em sala de aula. O grupo não estava seguro para falar das situações que se apresentaram nos encontros.

Outras questões, como o caso da multiplicação por zero, que foi amplamente discutida, a ponto de surgir o questionamento de como foi importante a introdução do zero e dos números negativos em especial, o grupo concordou com Courant e Robbins (2000, p. 64), os quais afirmam que a introdução do símbolo 0 foi um grande passo no sentido de remover a restrição dada à operação $b - a$, definindo-se que $a - a = 0$. Mais importante ainda foi a introdução dos símbolos $-1, -2, -3, \dots$ juntamente com a definição $b - a = -(a - b)$ (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 64).

Os questionamentos do grupo são geralmente encontrados por professores de matemática do ensino fundamental e do ensino médio em sua prática. A tentativa é de perceber quais contribuições podem emergir na dinâmica desta pesquisa na formação do futuro professor de matemática, pois os questionamentos são diversos e as estruturas de aprendizagem são distintas.

A aceitação de certos axiomas na construção da estrutura de corpo foi um grande salto na dinâmica de buscar relações envolvidas na estrutura da matemática produzida no ensino fundamental e no ensino médio. No que se refere aos elementos simétrico e inverso, algumas dúvidas presentes em salas de aula de

matemática, que se apresentaram em alguns momentos na discussão do grupo foram resolvidas.

No caso desses axiomas se impõem apenas a existência (de simétrico ou inverso), mas, de fato, prova-se ainda a unicidade (estes elementos são únicos). A unicidade desses elementos permite entender conceitos matemáticos envolvidos nas operações comuns de equações ou na própria Aritmética.

Destaca-se nesta pesquisa, um ponto principal que é a apresentação e o significado dos números irracionais. Diversos textos escolares apresentam o número irracional, como o número que não se pode escrever na forma de fração e também como o número que tem uma representação infinita e não-periódica, porém, na perspectiva do autor, esse assunto vem acompanhado de várias questões que o professor pode explorar. Segundo Moreira e David (2005, p. 82), essas duas caracterizações não tem significado algum para o aluno se o mesmo ainda assume o universo dos racionais.

Os mesmos autores esclarecem:

Quando não se sabe o que significa uma forma decimal infinita e não-periódica também não se sabe o que é número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a ideia escolar de número está associada, na sua acepção mais ampla, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais não são números já que não são razão de inteiros (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 82).

É comum no ensino fundamental e no ensino médio definir números reais como a união entre os racionais e os irracionais, não esclarecendo o sentido de se conceber os números irracionais como números ou o significado que possa ter.

Ressalta-se que, na construção dos números reais como corpos ordenados completos, prova-se a existência de reais que não são racionais, sendo esses, supremos de subconjuntos de reais não-vazios e limitados superiormente.

Moreira e David (2005) criticam em seu trabalho, o tratamento formal dado aos números reais na licenciatura, mostrando que essa forma de apresentar tais números não oferece alternativas para o tratamento dado aos mesmos, nos textos escolares, que é “legítimo, mesmo de forma inadequada”, esclarecem os autores. Os mesmos autores consideram que uma forma possível de se trabalhar números irracionais, seria através da incomensurabilidade, trabalhando as questões de medidas, permitindo discutir a insuficiência dos números racionais, podendo servir de base para uma abordagem que venha ser mais compreensível e transparente para o educando.

Não há um consenso em relação ao trabalho com a incomensurabilidade no ensino fundamental e no ensino médio, porém, o autor concorda com Moreira e David que apóiam a discussão de tal noção na licenciatura.

Os autores dizem:

(...) O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos com o trabalho da incomensurabilidade e sua vinculação como o significado dos números irracionais pode ser essencial ao desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção e adaptação ou mesmo a construção e a implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema "números reais (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 83).

Abordada nesta pesquisa a definição formal da representação decimal, percebe-se que, a partir dos resultados estabelecidos, pode-se provar que todo número real admite uma representação decimal infinita e que a representação decimal dos irracionais é infinita e não-periódica, com o intuito de chamar a atenção do professor e\ou licenciando em matemática para as validades da matemática escolar, tendo alternativas para melhor definir os caminhos do seu fazer pedagógico.

Buscou-se nesta pesquisa, aproximar-se das situações que envolvem o contexto do ensino fundamental e do ensino médio, ora trabalhando numa visão mais geométrica, ora numa visão mais algébrica. Nesse construto, se destacam as dízimas periódicas que são as representações decimais de uma divisão continuada, ou prolongada indefinidamente. Esses decimais infinitos e periódicos também são considerados números, já que partem de frações racionais.

Por serem números que geralmente causam muita confusão principalmente em termos de operações, o autor propôs nesta pesquisa, em anexo, criar uma oficina que tem como objetivos:

- apresentar as representações decimais de números reais em um desenvolvimento formal e discutir questões que envolvem este assunto no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio
- desenvolver junto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio, uma relação de proximidade entre o conteúdo Análise Real e a matemática produzida no seio escolar, discutindo as idéias e noções sobre números racionais e irracionais em suas respectivas representações decimais.
- Sugerir uma melhor compreensão na noção da densidade dos números reais, traduzir as diferentes linguagens dadas a este conceito, principalmente no que se refere a frações geratrizes das dízimas, períodos das dízimas e outras configurações.

O autor procurou, neste trabalho, proporcionar ao professor e\ou licenciando em matemática, situações estudadas em um curso de Análise Real, levantando algumas questões e mostrando as dificuldades que perpassam por assuntos mais abstratos. Para esta pesquisa, foram dispostas etapas importantes, a destacar o estudo de um número significativo de textos, livros e outros; compreensão dos conteúdos apresentados; desenvolvimento da pesquisa dentro do rigor necessário; a construção de um procedimento metodológico coerente com os objetivos definidos; desprendimento de certos aspectos da matemática escolar e acadêmica, para uma melhor compreensão destas duas formas do fazer matemático.

O autor assumiu também grandes dificuldades em buscar na sua prática elementos que pudessem compor a dinâmica desta pesquisa. Muitas vezes, o cansaço e o desânimo foram sendo obstáculos para se desenvolver o trabalho e apresentá-lo com a qualidade e o dinamismo de poder ser um instrumento de apoio a possíveis discussões sobre o ensino de Análise Real na licenciatura.

O autor buscou aspectos que poderiam ser conseqüências da construção formal dos números reais no desenvolvimento da matemática tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, mas, em muitos momentos, ele não conseguiu associar tais aspectos, então, apresentou algumas considerações dentro do próprio campo da matemática formal.

Como a proposta desta pesquisa era apresentar os números reais nas estruturas “algébrica e topológica”, convidando o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender tais aspectos e, se possível, iniciar, a partir dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o curso de Análise Real para licenciatura, o autor acredita ter vencido esta etapa. Porém não é um término de um trabalho, mas o início de um desenvolvimento que pode seguir por várias direções, sendo outros estudos e pesquisas responsáveis para indicar novas possibilidades.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.
- BARTLLE, Robert G. **Elementos de Análise Real**. Tradução de Alfredo A. de Farias. – Rio de Janeiro: Campus, 1983.
- BICUDO, Irineu. **Educação Matemática e Ensino de Matemática. Temas e Debates: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, Ano IV – N. 3 – 1991**.
- _____. **Demonstração em matemática**. In: Bolema, nº. 18. Rio Claro, 2002. p. (65 – 72).
- BICUDO, M.A.V. **Sobre Educação Matemática**. In: Segunda Jornada de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula; Rio Claro, 1991.
- BOYER, Carl Benjamim. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**, volume 6. São Paulo: Atual, 1992.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998, 148 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. v 2. Brasília: MEC, 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Portaria normativa No- 7**. Publicada no Diário oficial da União em 22 de junho, 2009.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura**. Publicada no Diário oficial da União em 05 de março, 2002.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, 1951
- COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA., 2000.
- CRUZ, Willian José e KOPKE, Regina Coeli Moraes. **Matemática in Concert, metodologia lúdica de ensino**. In Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.
- CRUZ, Willian José. **Projeto Matemática in concert: a favor da aprendizagem**. In: Anais do V Encontro Mineiro de Educação Matemática. Lavras, 2009.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Matemática à ação: reflexão sobre a educação e matemática**. Campinas: Papyrus, 1986.
- _____. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 16ª ed. Campinas SP: Papyrus, 2008.
- _____. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. 5ªed. São Paulo: Ática, 1998.
- _____. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1993. (Série Fundamentos 74).

_____. **Etnomatemática: elo entre as tradições a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. (Coleção do ensino fundamental). São Paulo: Ática, 2009.

_____. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). São Paulo: Ática, 2009.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

FIORENTINI, Dário. **A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática**. In: Mesa redonda VII EPEM: SBEM-SP, São Paulo, Junho de 2004.

FIORENTINI, Dário (Org.) **Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil**. (Artigo), Revista Zetetike, ano 3 – nº 4, 1995.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

GARNICA, A. V. M. **As demonstrações em Educação Matemática: Um ensaio**. In: Bolema, nº. 18. Rio Claro, 2002. p. (73 – 81).

GIOVANNI, José Ruy Junior e CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática**. (coleção do ensino fundamental). São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). 4ª Ed. São Paulo: Atual, 2007.

LAROUSSE, Ática: **Dicionário da língua portuguesa** – São Paulo: Ática, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise; v.1. 12 ed**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

_____. **Explorando o ensino da Matemática: artigos: volume 1** Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 240 p.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti e DAVID Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

_____. **Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores**. (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, - Jan./Jun. 2003.

_____. **O conhecimento matemático do professor**. (Artigo), Revista Brasileira de Educação nº 28, 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. **Por que análise real na licenciatura?** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 23, - Jan./Jun. 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. Belo Horizonte: 2004. 195 f. BBE. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Orientador: Maria Manuela Martins Soares David.

PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para os Números Reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação**. 2007. 398 f. Tese (Doutorado em

Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/UNESP, Rio Claro (SP), 2007.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 604 f. Tese (Doutorado em Educação) - FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

_____. **Educação Matemática no ensino superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. (81 – 97).

SEVERINO. Antonio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 19ª ed. São Paulo: Cortez, 1993.

ANEXO

OFICINA: Um olhar para as Representações decimais de números reais.

INTRODUÇÃO

Este trabalho, ora realizado no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, inicia-se com uma reflexão pessoal do autor, o qual descreve sua trajetória acadêmica, suas angústias enquanto professor de matemática e os motivos e/ou razões que conduziram ao desenvolvimento desta pesquisa.

Apresentando os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, esta pesquisa tem como objetivo convidar o professor, e/ou licenciando em matemática, a entender e a identificar na sua prática tal tratamento, buscando também refletir sobre a possibilidade de iniciar, por meio dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o trabalho com o conteúdo Análise Real, nos cursos de licenciatura em matemática.

Outro objetivo a destacar é sugerir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio que o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades estão presentes em sua sala de aula, ainda que o tratamento formal, em sua plenitude, possa não ser considerado.

Empreende-se nesta pesquisa, para alcançar os objetivos propostos, uma discussão sobre matemática escolar e matemática acadêmica, diferenciando essas duas formas de entender e de conceber a matemática e também discutir aspectos da formação do professor de matemática, não se esquecendo das especificidades que estão envolvidas na dinâmica do trabalho docente. Para este empreendimento, destacam-se educadores matemáticos que estudam questões relacionadas à formação do professor matemática, que contribuem para a dinâmica desta pesquisa.

A forma de conceber a matemática escolar, explicitada no capítulo I, a configura como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente, levando, tanto o professor do ensino fundamental e do ensino médio quanto o licenciando em matemática, a uma reflexão que possibilite perceber que o trabalho na escola não pode se pautar apenas em uma proposta mais acadêmica.

A prática e a formação do futuro professor de matemática são discutidas, desencadeando relações envolvidas na dinâmica da sala de aula, na validade das questões matemáticas presentes no cotidiano, e buscando uma melhor compreensão das propostas para o ensino deste conteúdo por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

Nesse mesmo tópico, questões que envolvem o estudo e as aplicações de números e de operações contribuirão para dinâmica de entender e de constituir as questões numéricas envolvidas no ensino fundamental e no ensino médio, usando as operações, de modo especial, para desenvolver o estágio crítico da criança.

O capítulo I também faz uma breve incursão histórica sobre o conteúdo Análise Real, aproximando-o dos conceitos históricos que determinaram a criação desta disciplina, buscando também entender o porquê é importante estudá-la, destacando os números reais.

O Capítulo II traz uma apresentação dos números naturais e inteiros, mostrando aspectos que estão envolvidos na apresentação desses no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

O Capítulo III apresenta os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, identificando elementos desta construção em atividades e/ou contextos que se mostram ao longo do ensino fundamental e do ensino médio.

Nesse capítulo, são apresentados axiomas e teoremas, sendo esse acompanhado de demonstrações que têm por objetivo aproximar o professor e/ou licenciando em matemática, dos aspectos formais que se apresentam nos cursos de Análise Real. O foco está nas consequências dessa constituição na estrutura matemática dos números reais que é desenvolvida ao longo do ensino fundamental e do ensino médio.

Abre-se uma discussão sobre as questões de incomensurabilidade, percebendo a necessidade de números irracionais e decimais infinitos periódicos e não-periódicos, para um aprofundamento conceitual destas questões tão presentes nas salas de aulas de matemática, no intuito de buscar uma aproximação entre formação e prática docente.

São apresentados no capítulo IV os números decimais, tendo como suporte o desenvolvimento geométrico. A pretensão é que o professor e/ou licenciando em matemática perceba que existe uma correspondência estabelecida entre todos os pontos da reta numérica real e todas as frações decimais finitas ou infinitas de maneira a definir que um número real é uma decimal finita ou infinita.

A construção dos números reais nas estruturas “algébrica e topológica” se encerra nesta pesquisa, definindo números reais como corpos ordenados completos e arquimedianos, com a tentativa de aproximar as questões que são desenvolvidas nos cursos de formação de professores na disciplina Análise Real e a prática

docente, respeitando a autonomia do professor em incorporar ou não tal tratamento em seu fazer pedagógico.

OBJETIVOS

Objetivando esta pesquisa apresentar o conjunto dos números reais em suas estruturas, “algébrica e topológica”, de maneira a convidar o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender e, se possível, identificar em sua prática tal tratamento, destacam-se outros dois objetivos:

- Sugerir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio que o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades estão presentes em sua sala de aula em todos os momentos, ainda que o tratamento formal em sua plenitude possa não ser considerado ou apresentado, mas suas consequências estão sim presentes ao longo de todo o ensino fundamental e médio.
- Iniciar uma reflexão, a partir de números reais, da forma como a disciplina Análise Real poderia ser trabalhada nos cursos de licenciatura em matemática.

O autor coloca-se disposto em empreender a investigação, considerando, como afirma Severino (1993, p. 113), que o trabalho científico deve ser “pessoal, no sentido de que a temática tem que ser a problemática vivenciada pelo pesquisador”.

Sensibilizado pela problemática, e sentindo a questão do trabalho com a matemática no ensino fundamental e no ensino médio, a opção é construir um elo entre o formalismo conceitual dos números reais e a matemática vivenciada na escola básica, permitindo, tanto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio quanto ao licenciando em matemática, uma identificação e uma comparação desses elementos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa resumiu-se na busca de textos que tratassem sob todos os aspectos do tema “os números reais em suas estruturas algébrica e topológica” e em quatro livros didáticos, sendo dois usados no ensino fundamental e dois usados no ensino médio, que pudessem contribuir para identificação de elementos dos números reais estudados no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

A abordagem escolhida foi a construção dos números reais como estrutura de corpo ordenado completo e arquimediano que, ao longo do processo, oportunizaram identificar elementos em livros didáticos os quais utilizavam, com ou sem rigor, tais estruturas.

Dadas as diferentes abordagens, surgiu a necessidade de se dedicar às leituras de um número significativo de textos para o recorte de alguns que mais traduziam a necessidade desta pesquisa.

Esta pesquisa se baseou na descrição e na interpretação de textos das mais diversas classes, contribuindo para reinterpretação das definições e/ou teoremas, que permitiram atingir uma compreensão mais aprofundada dos mesmos, colaborando para uma interpretação pessoal do autor com relação aos dados.

O levantamento bibliográfico foi realizado por meio de consultas a livros-textos de Análise, a livros didáticos, aos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio, a teses, a dissertações, livros-textos de educação matemática, a artigos e outros.

Com relação à apresentação dos dados, como esta pesquisa é exploratória, descritiva e explicativa, o procedimento utilizado limitou-se em apresentar uma análise das informações disponíveis, fornecendo uma visão e uma apresentação dos números reais nas estruturas “algébrica e topológica”, oportunizando, tanto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio quanto ao licenciando em matemática, uma aproximação desse conteúdo, contemplado nos cursos de Análise Real, ou Introdução à Análise na Reta.

As conclusões foram percebidas durante todo processo de obtenção dos dados, da redução, da escrita e da apresentação dos mesmos, permitindo que se avançasse progressivamente do exploratório para o descritivo e do descritivo para o explicativo.

Em anexo, conforme o artigo 7º inciso 3º da portaria do Ministério da Educação de 22 de junho de 2009, que regulamenta os mestrados profissionais no Brasil, diz que o trabalho de conclusão final do curso poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas, desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e outros, desde que previamente propostos e aprovados pela CAPES. A opção foi propor, ao final desta pesquisa, uma oficina que tem como objetivo apresentar as representações decimais dos números reais em um desenvolvimento formal; discutir questões que envolvem esse assunto no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio e estudar os conceitos que envolvem a densidade do conjunto dos números reais.

CAPÍTULO I: REVISÃO DA LITERATURA

1. Matemática escolar e matemática acadêmica

Neste tópico, serão descritas, de forma a destacar, algumas diferenças substantivas entre essas duas formas de se fazer e de se entender matemática, proporcionando ao professor do ensino fundamental e do ensino médio e/ou ao licenciando em matemática, condições para desvelar as especificidades do conhecimento matemático, produzido pela matemática escolar e pela matemática acadêmica.

1.1. Matemática acadêmica

A matemática acadêmica ou matemática científica nesta pesquisa serão considerados termos com mesmo sentido.

A matemática científica é estruturada axiomaticamente, sustentando-se em definições, teoremas, postulados e conceitos primitivos previamente estabelecidos para as provas e validades das mesmas, exigindo uma formulação das definições, não caracterizando ambiguidades na construção lógica de um objeto matemático, para não produzir contradições na teoria.

As definições formais e o processo de sistematização são elementos fundamentais no decorrer do processo de conformação da teoria, que é validado por demonstrações rigorosas (MOREIRA, 2004, p. 24).

1.2. Matemática escolar

A matemática escolar se configura como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA, 2004, p. 12). Os valores constituídos pela matemática escolar se desenvolvem no contexto educativo, válida a necessidade de encontrar formas distintas para desenvolvimento do conhecimento matemático no âmbito da escola.

Na perspectiva da matemática produzida na escola, o saber docente divide-se em vários componentes, um deles, dentre os quais se destaca, é o conhecimento da disciplina que assume um papel essencial.

1.2.1. Matemática escolar x matemática acadêmica

A apresentação de um conhecimento pronto e acabado pode não favorecer o estudante a construir o conhecimento matemático e a pensar matematicamente. O formalismo de regras e de procedimentos, herança da tendência formalista moderna, tem estado presente na educação brasileira.

Para essa tendência, Fiorentini (1995) esclarece que:

o ensino de um modo geral continua sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que expõe/demonstra rigorosamente tudo no quadro negro. O estudante, salvo algumas poucas experiências alternativas, continua sendo considerado passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor (FIORENTINI, 1995, p. 14.).

Essa concepção torna os estudantes treinados para aplicar mecanicamente essas regras e definições, sem, contudo proporcionar a eles a formação conceitual e investigativa tão necessária aos cidadãos deste século.

Ao mesmo tempo, negar que as estratégias e conhecimentos produzidos na prática não possam ser aplicados em toda parte porque são construídos fora do ambiente escolar, é impedir que a aprendizagem aconteça de maneira mais favorável e contribuir para possíveis reprovações em matemática.

A busca é para que a escola intensifique o trabalho na condução de um processo de ensino e aprendizagem, que leve em conta o conhecimento prévio que os estudantes possuem para que, a partir deles e sobre a própria experiência, possam construir novos conhecimentos.

A matemática é reconhecida como parte do cotidiano e elemento importante para compreensão de mundo. Afinal, o mundo está rodeado de tabelas, de gráficos e de informações diversas que são apresentadas em termos matemáticos, as quais são compreendidas e usadas como meio de comunicação.

Então, faz-se necessário preparar os estudantes para uma sociedade tão complexa, tornando-os capazes de pensar sobre relações numéricas e espaciais, compreender e se expressar sobre essas relações, desenvolvendo uma consciência crítica para serem reconhecidos como membros desta sociedade.

A matemática tem sido conceituada como uma ciência que oferece um amplo instrumento para o pensamento. Ser dotado de um determinado senso lógico-matemático é indispensável como instrumento intelectual para o bem viver.

Caracteriza-se, por desenvolver e ser uma forma de pensamento, que na sua matéria-prima está relacionada a “ideias” e o grande desafio é a construção coerente destas ideias.

A matemática na escola tem se preocupado, de um modo geral, com os cálculos, lógicas, geometria, mas, acima de tudo, deveria se preocupar com o pensar, pois os cálculos matemáticos são apenas um meio para atingir um determinado fim.

É preciso que o trabalho com a matemática na escola não se pautar apenas por uma proposta mais acadêmica. Nessa perspectiva, busca-se encontrar um elo entre a formação do professor de matemática, com sua prática no ensino fundamental e no ensino médio, para que possa permitir questionamentos como: quais são as relações existentes entre o conjunto de significados que a comunidade científica dos matemáticos identifica com o nome de matemática e o conjunto de saberes especificamente associados à educação matemática escolar? Entende-se que vários fatores compõem a problemática do ensino e aprendizagem da matemática, dos quais se destacam a formação e, a prática docente.

1.3. Formação e a prática do professor de matemática

Este tópico trata da prática e da formação do futuro professor de matemática, destacando as relações envolvidas na dinâmica da sala de aula, a matemática do cotidiano e o conhecimento matemático do professor, nas questões que envolvem números.

1.3.1. A formação do futuro professor de matemática

A formação do indivíduo vai muito além das relações didáticas que envolvem uma sala de aula, da relação professor - estudante e conteúdo (FIORENTINI, 2004). Para esse autor, a pedagogia deve se preocupar também com as relações interpessoais que acontecem nas aulas, nos momentos e nos espaços fora da sala, entre uma aula e outra, nos momentos de conversas, nas relações no corredor, nos momentos do não-ensino, durante o recreio, etc.

Fiorentini (2004) diz:

(...) eu considero a didática como uma parte da pedagogia... Enquanto a didática tem relação mais direta com o conteúdo que se ensina e aprende... A pedagogia vai além dos conteúdos, pois preocupa-se também com as dimensões sócio-afetiva, emocional, pessoal e ética, tendo como norte a formação de valores e de um sujeito emancipado sócio-politicamente (FIORENTINI, 2004, p. 2).

É preciso desenvolver um trabalho que promova a interatividade, proporcionando ao educando uma participação mais ativa nas atividades propostas, fugindo do modelo tradicional de ensino, no qual o educando é apenas um espectador passivo diante do contexto apresentado na exposição de aulas.

D'Ambrósio (2008, p. 83) argumenta que a educação, em geral, enfrenta grandes problemas, considerando o mais grave, e que afeta particularmente a educação matemática de hoje, a maneira deficiente como se forma o professor. Esse mesmo autor exalta os inúmeros pontos críticos na atuação do professor de matemática, que se prende a deficiência de sua formação.

A formação do professor de matemática é um dos grandes desafios do futuro e, nesse aspecto, o professor de matemática deverá desenvolver características para cumprir um novo papel.

Essas características são: visão do que vem a ser a matemática; visão do que constitui a atividade matemática; visão do que é aprendizagem matemática e visão do que constitui um ambiente propício à aprendizagem matemática (D'AMBRÓSIO, 2008, p. 87).

1.3.2. Matemática no cotidiano

A aplicação da matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presente. De acordo com Bicudo (1991), a matemática é vista por alguns como o grande legado da humanidade e, como tal, a atitude de considerá-la como:

(...) a priori, independente da experiência. Exata no sentido de terem todos os seus termos, definições, regras de inferência, etc. um significado preciso. (...) Abstrata no sentido de eliminar de uma situação tudo o que não for essencial a um dado propósito. (...) Absoluta, não passível de revisão com base na experiência. (...) Simbólica sendo uma das principais características de Matemática. Esse uso está ligado a sua natureza exata, mas ainda mais ao desenvolvimento da Matemática como um tipo de linguagem (BICUDO, 1991, p.34).

Discutir essa forma de entender a matemática leva a uma reflexão sobre o papel que está sendo desempenhado em salas de aulas de matemática e também a

questionar para o que se preparam os estudantes e se realmente estão sendo valorizados os conhecimentos deles.

O papel da matemática escolar não se resume apenas na apresentação de conhecimentos matemáticos descontextualizados e sem relações com as vivências do educando. Também há pesquisas em Educação Matemática que sugerem alternativas na tentativa de contribuir para o trabalho docente, criando oportunidades de um aprofundamento nas análises de práticas pedagógicas específicas para a construção crítica de possibilidades que possam ser constituídas, adaptadas, e aplicadas nos diversos contextos aos quais se apresentam.

1.3.3. Os PCNs e as ideias de números

Os Parâmetros Curriculares Nacionais referendam a reelaboração e renovação da proposta curricular, reforçando a importância de que a escola seja a responsável pela formulação de sua proposta pedagógica e de seu projeto educacional, sendo esses compartilhados por toda equipe pedagógica, visando a melhoria da qualidade da educação, resultando no compartilhamento de responsabilidades entre os todos os educadores.

Os PCNs são auxílios aos professores na tarefa de refletir e de discutir aspectos da prática pedagógica, transformando continuamente o cotidiano escolar, sendo uma proposta flexível, que vai se concretizando nas decisões regionais e locais, configurando como um modelo curricular heterogêneo e não impositivo.

Os objetivos dão importância à valorização da matemática pelo educando como instrumento capaz de permitir a compreensão do mundo em sua volta, estimulando o interesse, a curiosidade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Os conteúdos são escolhidos de acordo com o critério de relevância social e contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática apresentam os objetivos em termos das capacidades a serem desenvolvidas em cada ciclo, assim como os conteúdos para desenvolvê-las.

São apontadas as possíveis conexões entre os blocos de conteúdos, entre a matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e com os temas transversais.

1.3.4. Números e operações no ensino fundamental

De acordo com os parâmetros curriculares do ensino fundamental (BRASIL, 1998), os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados de forma dialética pelos alunos.

Esses conhecimentos intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando suas propriedades, suas relações e o modo como se configuram historicamente.

Ao longo do processo de escolarização, o aluno percebe a existência de diversas categorias de números criadas em função de distintos problemas que a humanidade teve que enfrentar – números naturais, números inteiros positivos e negativos, os números racionais em suas representações fracionárias e decimais e os números irracionais.

À medida que se depara com as operações de adição, de subtração, de multiplicação, de divisão, de potenciação e de radiciação, os conceitos numéricos vão se ampliando.

No processo operatório, o trabalho a ser realizado se concentrará na compreensão dos diversos significados de cada uma das operações, nas relações existentes entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando distintos tipos, dos quais se destacam o exato e o aproximado, o mental e o escrito (BRASIL, 1998, p. 75).

1.3.5. A caracterização numérica em relação aos PCNs para o ensino médio

Os PCNs do ensino médio fundamentam-se filosoficamente na estética da sensibilidade, destacando-se a capacidade de criar, de observar, de perceber e de ter curiosidade.

O respeito à diversidade, ao direito comum de cada cidadão e à solidariedade são pressupostos da política de igualdade. A ética da identidade traz o respeito à autonomia responsável dos estudantes, da escola e da comunidade.

A abordagem numérica é contemplada no conteúdo “Números e Operações”: naturais, racionais, irracionais, reais, sendo desenvolvida de acordo com as finalidades do ensino de matemática para essa fase de estudo que têm como objetivos conduzir o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, (PCN- EM), 1998, p. 119).

As relações numéricas envolvidas nos PCN, tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental, não superam todos os desafios que se apresentam nessas fases de ensino, mas é uma tentativa para conduzir o fazer pedagógico em suas dimensões processual e diagnóstica.

Esse fazer pedagógico é tratado como parte fundamental do processo de ensino e aprendizagem permitindo corrigir, detectar, apreciar e estimular projetos bem sucedidos.

As concepções fundamentais que se desenvolvem a respeito dos números naturais, por exemplo, iniciam-se bem cedo pelas crianças, as quais dão significados aos números, em atividades principalmente de contagem.

As operações matemáticas muito fortemente também têm significâncias de associação com o dia a dia. Os conceitos das quatro operações, em geral, são adequadamente constituídos nos cursos de formação de professores das séries iniciais, sendo, muitas vezes, desconsiderados num curso de licenciatura na formação do professor de matemática, indicando uma acentuada separação na formação docente desse ciclo de ensino, com a formação do professor que leciona nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Moreira e David (2005) argumentam:

Ainda que o licenciado em matemática, de um modo geral, não trabalhe com alunos das quatro séries iniciais do ensino fundamental, acreditamos que a separação acentuada existente entre a formação do docente desse ciclo e a do professor que leciona nos outros ciclos do ensino fundamental e médio é equivocada, pois pode contribuir para intensificar a descontinuidade do processo de transição das séries iniciais para a quinta série e seguintes. Isso, por si só, já coloca uma demanda no sentido de que o licenciado conheça a matemática que é trabalhada nas séries iniciais (MOREIRA & DAVID, 2005, p.52).

Reconhecer números e operações perpassa pela compreensão dos significados de números naturais, do sistema de numeração decimal e pela identificação dos números inteiros e racionais em diferentes contextos (BRASIL, 1998)

É fato que o professor do ensino fundamental do 6º ano retoma e amplia todo trabalho desenvolvido com números naturais nas séries anteriores e inicia o conceito de números racionais, considerando-os nessa fase de conceituação como elementos de um conjunto, os quais determinam, de uma forma geral e completa, as operações de adição e multiplicação, mas de uma forma restrita a subtração e a divisão. Também desperta os estudantes para a percepção de relações entre esses números, nos mais distintos universos aos quais são considerados, como por exemplo, o universo dos números primos e compostos, dos divisores, de múltiplos e de outros.

No 7º ano é introduzido o conceito de números negativos, trabalhando os inteiros e os racionais negativos, já no 8º ano, introduzem-se os conceitos de números racionais e irracionais, definindo os números reais, dando sequência no 9º ano e no ensino médio.

Através desta concepção, é necessário que o professor do ensino fundamental das séries finais e do ensino médio, conheça a matemática do ponto de vista escolar e principalmente conheça a matemática trabalhada nas séries iniciais, para que possam entender as dúvidas de conceituação que aparecem frequentemente entre os estudantes.

Para essa concepção, Moreira e David (2005) dizem:

No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que, por um lado, conhecer profundamente — do ponto de vista da matemática escolar — aquilo que os alunos consideram num dado momento, como o universo (grifo do autor) numérico, e, por outro, lidar com dúvidas e concepções incorretas dos alunos, as quais vão se referir tanto ao "novo" conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente "conhecido", que está sendo ampliado (MOREIRA & DAVID, 2005, p.53).

A axiomatização do processo de ensino e aprendizagem de matemática tem, por um lado, a importância de organização, de sistematização e de conhecimento, mas servem para propósitos definidos, que, muitas vezes chocam com os aspectos pedagógicos (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 58).

A ideia dominante que impera nos cursos de licenciatura até hoje apresenta a organização lógico-formal-dedutiva da matemática como a única forma de domínio conceitual, porém o conhecimento matemático nesta filosofia de trabalho, transparece um amontoado de fatos dispersos e desconexos da caracterização e do formato de uma teoria.

Fiorentini (2004) esclarece que:

(...) para ser professor de matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da matemática produzida historicamente, precisa, sobretudo, conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático (ou seja, não apenas o modo formal ou simbólico) (FIORENTINI, 2004, p. 4) .

A construção do conhecimento se desenvolve no plano cognitivo dos estudantes que produzem em estágios diferenciados a compreensão dos conhecimentos antigos e o processo de acomodação do novo conhecimento.

Em relação à aprendizagem escolar da Aritmética dos números naturais, por exemplo, pode-se considerar um tema complexo, cuja apreensão, em níveis satisfatórios, não se esgota no processo desenvolvido ao longo das séries iniciais do ensino fundamental. Estas dificuldades, muitas vezes, acompanham o estudante ao longo de todo ensino fundamental e médio.

Pode-se destacar nesse processo, a compreensão relativa ao sistema de numeração decimal, que, segundo Moreira e David (2005), é um desenvolvimento de longo prazo. A compreensão e o domínio deste conteúdo, muitas vezes, dura todo ensino fundamental, pois é um dos aspectos mais complicados da aprendizagem dos números.

Destaca-se também, a grande dificuldade dos estudantes em aceitar a comutatividade da adição e da multiplicação e, acima de tudo, o entendimento do significado dessa propriedade, para não transferi-la indevidamente à divisão e à subtração.

Moreira e David (2005) continuam afirmando:

Fica claro que uma discussão a respeito dos significados e das propriedades das operações com os naturais – de modo especial a multiplicação e a divisão – e do sistema decimal de numeração interessa diretamente à formação matemática na licenciatura, porque, na sua prática docente na escola, o professor estará lidando com alunos cujo processo de apreensão conceitual e operacional dos conhecimentos envolvidos nessas questões ainda não se completou. (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 55).

Certos aspectos que envolvem o conhecimento dos significados dos números, dos sistemas de numeração e dos algoritmos, fazem parte da prática profissional do professor de matemática na escola básica, porém o licenciando em matemática não trabalha integralmente em sua formação esse assunto, sendo os conhecimentos relativos às operações de multiplicação e de adição de números naturais considerados apenas fatos.

Os números naturais com as operações de adição e de multiplicação não podem ser considerados elementos de um conjunto dado, aceito de forma axiomática, pois essa forma de pensar e de agir não permitirá o enfrentamento de questões postas pela necessidade concretizada na própria prática a qual se pretende formar o profissional.

Mais do que identificar e conhecer a cadeia que estabelece a dependência lógico-formal entre suas propriedades é conhecer as operações matemáticas. Referindo-se aos processos de produção de significados para as operações, Moreira e David (2005) afirmam:

(...) Nesses casos, o professor precisa lidar com o processo de construção de significados muito mais por meio de reiteradas “concretizações” em diferentes situações, do que por definições por indução ou de deduções formais das propriedades estruturais das operações, já que estas últimas expressam exatamente o contrário: a *identificação* de todos os significados concretos possíveis (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 57).

Na prática docente, há a necessidade de desenvolver o estágio crítico da criança, usando as operações como instrumento de apoio no processo de construção do conceito abstrato do número, pois em certas fases da vida do educando, os números referem-se a objetos concretos.

1.4. O que é análise? Por que os reais?

Será apresentado neste tópico um breve histórico sobre o conteúdo Análise na Reta ou Análise Real, permitindo uma aproximação da construção histórica desta matéria.

Na sequência, busca-se uma compreensão do porquê de esse conteúdo estar na grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática. Destacam-se também a apresentação de argumentos que traduzem a importância de se estudar os números reais, no intuito de constituir um amplo campo de discussão, na tentativa de diminuir a dicotomia existente entre formação e prática docente.

1.4.1. Incursão histórica – o que é análise

Análise Real é a área da matemática que trata do formalismo e do rigor matemático usados para justificar os conceitos do cálculo. Geralmente, divide-se a matemática em três áreas: a Álgebra, a Geometria e a Análise, sendo a Análise a mais nova delas, que se constitui como uma ramificação do cálculo que é uma teoria criada no século XVII, por Newton e Leibniz, sendo este um fato histórico de grande importância para o desenvolvimento da física moderna.

O estabelecimento dos fundamentos do Cálculo caminhou pelo século XVIII, quando aconteceram as primeiras tentativas de rigorização do cálculo (REIS, 2009, p. 83), adentrando pelo século XIX, com o movimento da aritmetização da análise.

Segundo Reis (2009), as tentativas fracassadas de obter uma rigorização do Cálculo, realizadas no século XVIII foram os primeiros passos para a fundação da Análise.

A mudança do modelo geométrico por um modelo mais formal, baseado na ideia de número, o que é conhecido como aritmetização, foi pensada de forma que pudesse ter o rigor necessário e nesse modelo, as questões observadas poderiam ser abarcadas e resolvidas.

Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da aritmetização da Análise, dos quais, destacam-se Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) e Bernhard Bolzano (1781 – 1848). O primeiro autor foi considerado um dos precursores do movimento e o segundo foi considerado por Felix Klein (1849-1925) o pai da aritmetização da Análise.

Desde a criação do cálculo, a Análise inseriu-se em praticamente todas as áreas da matemática, quer seja por causa de sua riqueza intrínseca quer seja pelas

suas aplicações. Suas subdivisões adquiriam vida própria e são frequentemente estudadas com fins em si próprios.

A disciplina Análise Real, costuma integrar os currículos de bacharelado e de licenciatura e, de acordo com as diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura, elencadas no parecer do Conselho Nacional de Educação e Câmara de Educação Superior (2002), deve fazer parte dos conteúdos comuns a todos os cursos de licenciatura.

No entanto, segundo Reis (2001, p. 80), tem-se observado no Brasil que as disciplinas de Análise I ou de Análise Real estão sendo consideradas disciplinas eletivas ou optativas, oferecendo ao estudante de licenciatura a opção de cursá-la ou não.

Para esta perspectiva, Reis (2001) que realizou um estudo baseado na análise de manuais didáticos e entrevistas semiestruturadas com professores-pesquisadores, que se destacam na área de Cálculo e de Análise Real, como também com autores de estudos e de livros didáticos argumenta:

Isto nos traz uma série de indagações: Fica, então, a critério do estudante decidir se Análise é ou não importante para sua formação de professor? Por outro lado, perguntamos: Os próprios professores do curso de Licenciatura não consideram mais a disciplina de Análise, importante para a formação profissional de seus alunos? (REIS, 2001, p. 80).

Esse mesmo autor esclarece que considera fundamental a disciplina de Análise na formação do futuro professor de matemática e continua afirmando:

Antes de mais nada, gostaríamos de deixar claro nossa convicção de que Análise é uma disciplina / área fundamental para a formação do professor de Matemática, convicção esta proveniente de nossa prática pedagógica com formação de professores e que pretendemos reafirmar / reelaborar durante a análise das entrevistas, momento em que questionamos nossos entrevistados a respeito da importância do Cálculo e da Análise na formação do professor de Matemática. (REIS, 2001, p. 80).

Para Ávila (2006, p.4) esta disciplina é uma grande oportunidade para desenvolver o estudante de licenciatura e o futuro professor, aproximando-o do tratamento refinado com definições, com teoremas, com demonstrações que são os embasamentos lógicos da matemática.

Moreira *et al* (2005), em pesquisa feita com 80 matemáticos que lecionam a disciplina Análise Real nas 14 principais Instituições universitárias e de pesquisas do Brasil, mostraram, na opinião dos professores respondentes à época (que totalizaram 31) a importância da obrigatoriedade de se estudá-la na formação

profissional do futuro professor de matemática.

Essa pesquisa teve como tema, a ementa, a bibliografia e o papel da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em matemática nessas instituições de ensino no ano de 2005.

Com relação à obrigatoriedade da disciplina Análise Real, no curso de licenciatura em matemática, na pesquisa de Moreira *et al* (2005) a maioria dos respondentes, totalizando 93,5%, disseram que achavam importante a disciplina elencar os currículos nesses cursos.

As respostas foram distribuídas em três categorias e trabalhadas segundo a análise de conteúdo que é, de acordo com Bardin (1979, p. 42), um conjunto de técnicas de análise das comunicações, visando obter, por procedimentos e por objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores que podem ser quantitativos ou qualitativos, permitindo a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção e de recepção, chamadas de variáveis inferidas dessas mensagens.

Categoria 1. A disciplina deve ser obrigatória no curso de licenciatura porque se constitui em ocasião privilegiada para o aluno tomar contato com o que significa matemática e com as formas como os matemáticos pensam. Desenvolve o raciocínio lógico e a capacidade de “pensar matematicamente”, proporcionando, também, maior maturidade intelectual ao aluno. O trabalho na disciplina abrange métodos, técnicas, estruturas, concepções e valores fundamentais da matemática, constituindo-se, assim, em uma introdução ao que se poderia chamar de “cultura matemática”.

Categoria 2. A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os “porquês” e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras.

Categoria 3. A disciplina constitui, para o aluno, um espaço de percepção da matemática como um instrumento que permite um entendimento profundo de certos fenômenos naturais e que tem aplicações em outras ciências (MOREIRA *et al*, 2005, p. 20, 22, 24).

Para categoria 1, a aprendizagem matemática está associada à internalização de um processo que visa aproximar das perspectivas do matemático. A categoria 2 justifica a matemática elementar. A categoria 3 percebe a matemática como um instrumento para compreensão de certos fenômenos naturais. Essa última categoria está interligada ao desenvolvimento de uma percepção de matemática como um conjunto de conhecimentos que são úteis.

Moreira *et al* (2005, p. 38) reconhecem que a sistematização lógico-formal-dedutiva e suas formulações conceituais, baseada na estrutura curricular que se

apresenta na maioria dos cursos de Análise Real, não dão conta de todas as questões que se colocam para o professor em sua prática.

Uma alternativa seria a reorganização do processo de formação matemática dentro da licenciatura, desenvolvendo-o autonomamente e se estruturando para dar um sentido pedagógico, visando à prática escolar.

Para Moreira *et al*, (2005, P. 40) não se trata de baixar o nível da formação matemática, mas de superar a visão dicotomizada das relações entre formação matemática sólida e as demandas do conhecimento da prática docente escolar.

A questão (1), do questionário usado nesta pesquisa de Moreira *et al* (2005), indicava quais itens, nas opiniões dos professores pesquisados, deveriam ser trabalhados numa disciplina de Análise na Reta para licenciatura em matemática em suas instituições de ensino superior.

Os números reais constituídos como um corpo ordenado completo teve 27 indicações, com 87,1% de aprovação dos professores dessas instituições como matéria que deveria elencar o currículo para o curso de licenciatura.

1.4.2. A importância de estudar os números reais

Na pesquisa de Moreira *et al*, (2005, p. 79) ficou evidente a importância de se trabalhar os números reais como um conjunto cujos elementos se relacionam segundo a estrutura de Corpo Ordenado apesar de haver outras apresentações para estes números, as quais Moreira e David (2005) destacam:

- Número real é um corte de Dedekind nos racionais, isto, é um par (A,B) de subconjuntos não vazios e complementares de \mathbb{Q} , tais que, A não possui elemento Máximo. Nesta construção, todo elemento de A é cota inferior para B e todo elemento de B é cota superior para A .
- Número real é uma classe de equivalência de intervalos interligados de sequências de Cauchy de números racionais, a qual é válida a relação: duas sequências são equivalentes se e somente se, a diferença entre elas converge para zero.
- Número real é uma classe de equivalência de intervalos racionais encaixantes, segundo a relação de equivalência $[a_n, b_n] \sim [c_n, d_n]$ se e somente se as sequências de números racionais $(a_n - c_n)$ e $(b_n - d_n)$ convergem ambas para zero. (MOREIRA *et al*, 2005, p. 78).

Dentre os cinco livros adotados nos cursos de Análise Real, e escolhidos pela maioria dos professores respondentes, na pesquisa de Moreira *et al* (2005), no mínimo dois deles definem os números reais como corpo no sentido da álgebra abstrata.

Em termos da educação matemática escolar, o conjunto dos números reais é constituído para dar solução a problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais.

A priori, nesta pesquisa, define-se a estrutura algébrica dos corpos para um exame detalhado das necessidades de uma nova noção de números e a negociação dos significados para os números irracionais, constituindo um elemento fundamental no processo de discussão da ideia de número real.

O conceito de números reais, de uma forma geral, é tratado nos cursos de licenciatura, desvinculado do processo histórico no qual foi estabelecida a sua formalização. A referência de textos históricos de livros da história da matemática traz que a formalização do conceito de número real deu-se entre os séculos XVII e XIX (PASQUINI, 2007. p. 42).

Grande parte da matemática tratada num curso de licenciatura é fruto da produção de matemáticos que viveram no século XIX. Anterior a este período, os números eram pensados em termos geométricos e sua formulação não elucidava, de forma suficiente, questões que surgiram na época.

CAPÍTULO II – NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS

2. Uma visão da Aritmética básica

Neste capítulo, apresenta-se uma breve introdução de números naturais e inteiros, mostrando aspectos que estão presentes no ensino fundamental e no ensino médio e o tratamento formal que é dado a esses números.

2.1. Os números naturais

Os números, de uma forma generalizada, constituem uma base para matemática. Na dinâmica do desenvolvimento da matemática escolar, os estudantes aprendem a lidar com as frações, os decimais e os números inteiros negativos mecanicamente, porém, para uma análise mais profunda desses tipos de números, deve-se retornar a elementos mais simples.

Criados pela mente humana com o objetivo de contar objetos em coleções distintas, os números naturais 1, 2, 3,..., não têm nenhuma referência com as características individuais dos objetos contados. O número três, por exemplo, é uma abstração de todos os conjuntos que contém três objetos, ou seja, esse número não tem nenhuma dependência com a qualidade dos objetos ou dos símbolos utilizados para representá-lo.

Para Courant e Robbins (2000, p.1), deve-se, portanto, aceitar os números naturais como um conjunto dado, juntamente com as duas operações, adição e multiplicação, por meio das quais seus elementos podem ser combinados.

A capacidade que esses números têm de constituir contagens, é vinculada para criança a objetos tangíveis, como os dedos ou contas e a linguagem primitiva exibe um sentido de número concreto.

Os números naturais são definidos como elementos de um conjunto, simbolizado por N , o qual é denominado conjunto dos números naturais, provido de uma natureza abstrata.

A simbologia mais difundida no ensino fundamental e no ensino médio para o conjunto dos números naturais é $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ (DANTE, 2009). O conjunto N^* , denominado conjunto dos números naturais não-nulos, ou seja, exclui-se o elemento zero.

2.2. A validade das operações em \mathbb{N}

A teoria dos números naturais é conhecida como Aritmética. Baseia no fato de que a adição e a multiplicação de naturais obedecem a certas leis. A generalização destas leis é representada simbolicamente por letras a, b, c, \dots as quais representam números naturais quaisquer, pois a utilização apenas de símbolos como 1, 2, 3, ..., que se referem a números naturais específicos indicaria a proposição $1 + 2 = 2 + 1$ como apenas um exemplo particular da lei geral, a qual garante que a soma de dois naturais é a mesma, não importando a ordem dos termos.

Esses termos considerados na adição são chamados de parcelas. Os elementos da multiplicação são conhecidos como fatores.

As leis fundamentais da Aritmética são:

- propriedade comutativa da adição: $a + b = b + a$
- propriedade comutativa da multiplicação: $ab = ba$
- propriedade associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- propriedade associativa da multiplicação $(ab)c = a(bc)$
- propriedade distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Operando de forma lúdica, usando a representação de conjuntos, pode-se investigar as leis da Aritmética dos naturais. Para adicionar dois inteiros a e b , colocam-se os diagramas correspondentes lado a lado junta-se a quantidade a de elementos do primeiro diagrama com a quantidade b de elementos do segundo diagrama, formando um novo conjunto.

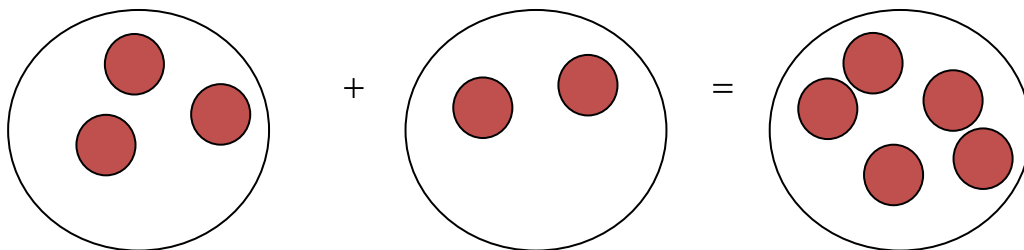


Figura I: Adição de números naturais

Para a multiplicação das quantidades a e b , coloca-se os pontos em dois diagramas. Aumentando a quantidade a de elementos do primeiro diagrama, tantas vezes indicar a quantidade b de elementos do segundo diagrama, forma-se um novo conjunto.

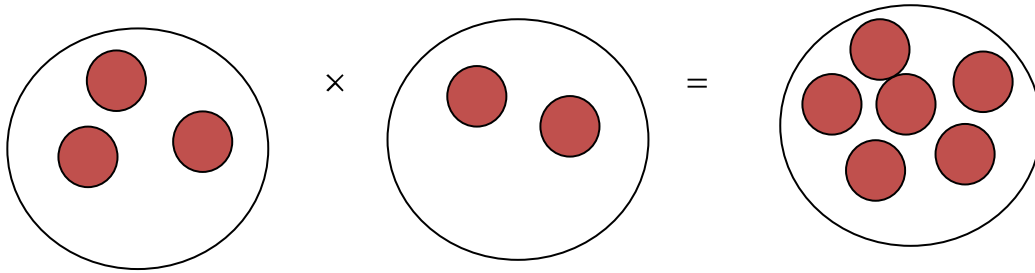


Figura II: Multiplicação de números naturais

Pode-se concluir que multiplicar a por b , é somar a por si mesmo b vezes, ou seja: $a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ vezes}}$

Baseando-se na definição de adição de dois naturais, pode-se definir a relação de ordem que aqui será chamada de relação de desigualdade.

A relação de ordem em \mathbb{N} permitirá comparar números naturais, formalizando a ideia intuitiva de que 1 é menor que 2 e assim por diante (FERREIRA, 2010, P.31)

Relações equivalentes, a menor que b ($a < b$), e b maior que a ($b > a$), significa que o diagrama com b elementos pode ser obtido do diagrama com a elementos pela adição de um terceiro diagrama com c elementos, adequadamente escolhido de modo que $b = a + c$. Desta forma, pode-se escrever que $c = b - a$

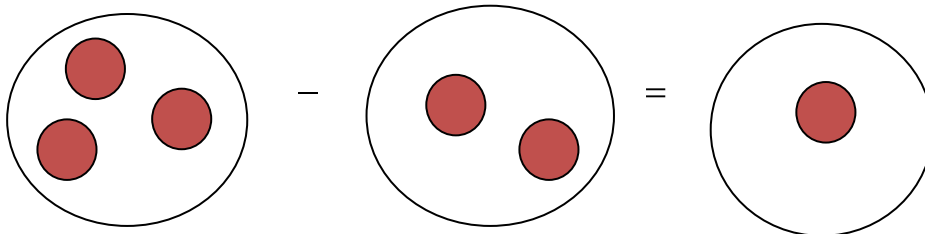


Figura III: Subtração de números naturais

No desenvolvimento da estrutura das operações sobre \mathbb{N} , a subtração é dada como uma restrição ao processo de soma. Porém para o domínio dos naturais, o símbolo $b - a$ só tem sentido apenas sob a restrição $b > a$. A operação $3 - 4$ não tem sentido no universo dos números naturais.

A comutatividade, a associatividade e a distributividade, tanto da multiplicação quanto da adição, podem ser observadas na construção de diagramas, percebendo desta forma que as verificações das propriedades que são postas no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio aproximam-se das concepções de números naturais que os estudantes possuem, desenvolvendo significados associados às diversidades de situações do dia a dia.

Propriedade comutativa da adição: $a + b = b + a$

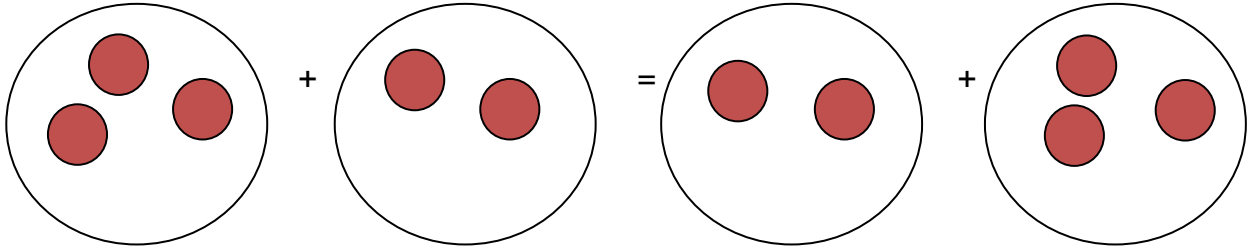


Figura IV: Propriedade comutativa da adição

Propriedade comutativa da multiplicação: $a \times b = b \times a$

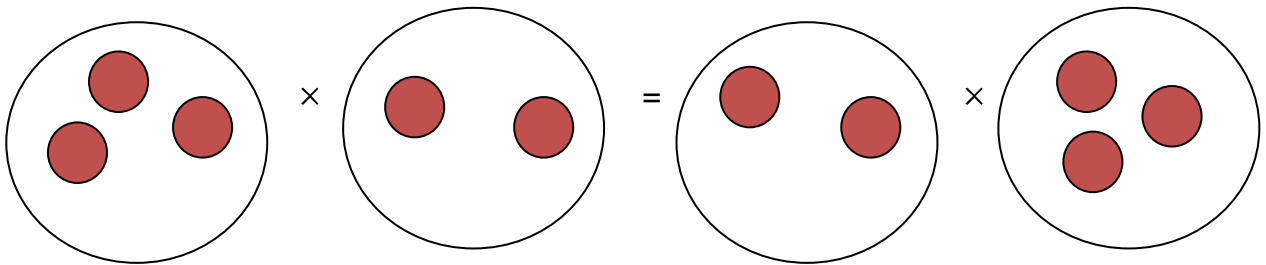


Figura V: Propriedade comutativa da multiplicação

Propriedade associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

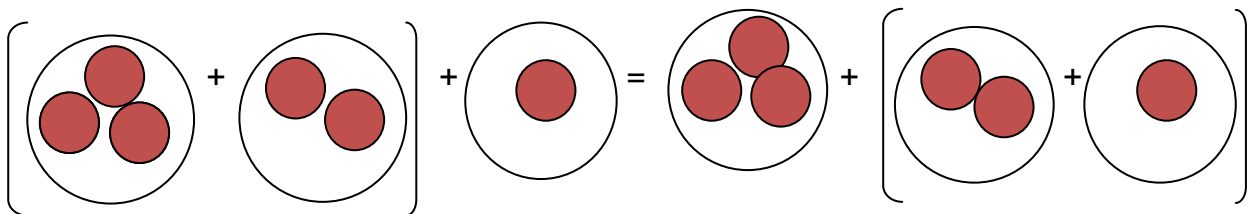


Figura VI: Propriedade associativa da adição

Propriedade associativa da multiplicação: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

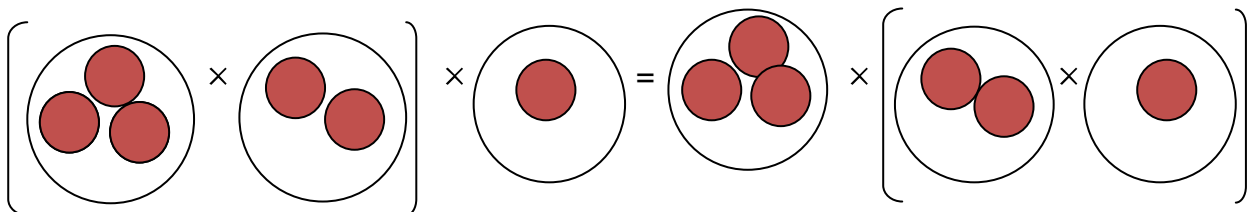


Figura VII: Propriedade associativa da multiplicação

Propriedade distributiva: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

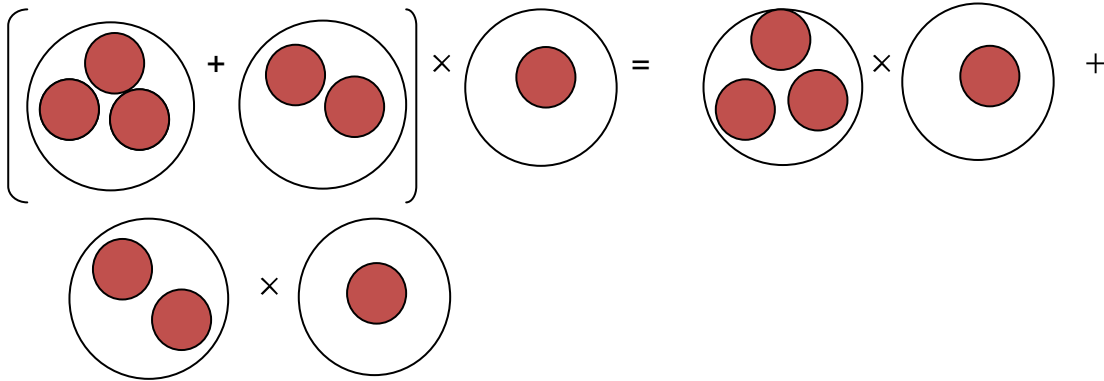


Figura VIII: Propriedade distributiva

2.3. A Introdução do zero

A introdução do zero como resultado de retirar objetos após um número finito de operações representou um salto significativo na constituição do processo operatório da matemática, logo, $a - a = 0$. Nesse contexto, o conjunto dos números naturais foi ligeiramente considerado como novo conjunto $N \cup \{0\}$.

No desejo de se manter a estrutura das operações em N , garantindo a adição e sua inversa, a subtração; a multiplicação e sua inversa, a divisão; potenciação e suas inversas, a radiciação e a logaritmação, pode-se defrontar com impossibilidades. Uma delas é a divisão por zero. Quanto é c dividido por zero, sendo c um número natural?

Para responder a essa pergunta é preciso voltar à definição da multiplicação que pode ser entendida como uma forma abreviada de se fazer somas de parcelas iguais, por exemplo, $2 \times 3 = 2 + 2 + 2$ ou $3 \times 2 = 3 + 3$, respeitando a lei da comutatividade, descrita para multiplicação em N . De uma forma generalizada, é razoável aceitar que $0 \times c = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{c \text{ vezes}}$.

Mas quanto seria $c \times 0$? No campo dos Naturais, este valor poderia ser qualquer coisa, pois não se pode aplicar o mesmo raciocínio acima para calcular o valor de $c \times 0$, porque não faz sentido, $c \times 0 = c + c + c + c + \dots + c$ (0 vezes).

Qual seria o significado produzido na mente de qualquer pessoa diante desta simbologia? É razoável supor que talvez não haja produção de significados com coerência pela mente do estudante que entra em contato pela primeira vez com essas operações? Seria conveniente deixar $c \times 0$ sem significação?

O homem tem tendência de generalizar e de estender todas as aquisições do pensamento e procurar o maior rendimento possível destas generalizações. Logo, a solução destas operações reside no fato de usar o que será chamado aqui de princípio da extensão¹.

Para garantir a propriedade comutativa da multiplicação e aceitar o desejo do homem em estender o conjunto dos números naturais para o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sem perder as estruturas das leis da Aritmética, há a necessidade em aceitar que $c \times 0 = 0$, portanto, $0 \times c = c \times 0 = 0$.

A introdução do zero abre caminho para discussão de outro problema, envolvendo agora, a operação de potenciação. Sabe-se que a potenciação satisfaz a propriedade multiplicativa, ou seja: $a^m = a \times a \times a \times \dots \times a$ (m vezes), sendo a e m pertencentes ao conjunto dos números naturais, de outra forma, a potenciação a^m é definida como o produto de m fatores iguais a a .

Com esta definição tem-se que:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ vezes}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ vezes}} = a^{m+n} \text{ com } a, m, n \in \mathbb{N}.$$

Quando se depara com a expressão " 2^0 ", automaticamente vem à lembrança do que é difundido nos ensinamentos fundamental e médio, garantindo que todo número elevado a zero, desde que não seja o próprio zero, é um.

Do ponto de vista mais generalizado, pode-se concluir que, sendo $a \in \mathbb{N}$ (ou seja $a \neq 0$), $a^0 = 1$? Qual o significado produzido pelo estudante diante dessa expressão? Buscando uma possível explicação para a sentença que se apresenta, seria necessário usar o princípio da extensão.

Mantendo-se esta propriedade formal, então a entidade a definir $x = a^0$ deve ser tal que $x \times a^n = a^0 \times a^n = a^{0+n}$. Como $0 + n = n$, então $a^{0+n} = a^n$, ou seja, $a^0 \times a^n = a^n$. De acordo com a definição da operação de multiplicação:

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{b \text{ vezes}}, \text{ fazendo } b = 1 \text{ tem-se:}$$

$a \times b = b \times a = a$, de forma a definir que $a \times 1 = a$. Logo, pela manutenção da propriedade citada, exige-se que $a^0 = 1$.

¹O princípio da extensão é definido por Bento de Jesus Caraça, em seu livro "Conceitos fundamentais da Matemática" como a tendência do homem de generalizar e de estender todas as aquisições de seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições são obtidas, e de procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências (CARAÇA, 1951, P. 10).

As impossibilidades em operações matemáticas, como subtração e divisão, por exemplo, são mais frequentes do que os casos de possibilidades, pelo fato das restrições que são atribuídas.

Todas as vezes que aparece uma impossibilidade, faz-se necessário utilizar o princípio da extensão, que tem como objetivo eliminar tais impossibilidades, criando, em geral, novos campos numéricos, quase sempre pela necessidade de ordem prática, não limitando sua utilização em questões de natureza teórica. Mas esse princípio não resolve todos os problemas e algumas impossibilidades terão que continuar existindo, como por exemplo, a divisão por zero.

2.4. A formalização dos números naturais

A opção de formalização dos números naturais pela forma axiomática não construtiva significa assumir a existência de um conjunto que satisfaz a certos axiomas que são capazes de caracterizar completamente a ideia intuitiva de números naturais, seguindo uma sequência de forma rigorosa.

A axiomatização dos números naturais foi desenvolvida no final do século XIX pelo matemático italiano Giuseppe Peano (FERREIRA, 2010, P.20).

Essa forma axiomática traduz esses números como ordinais, ou seja, objetos que ocupam lugares determinados numa sequência ordenada: 1 é o primeiro número natural, o 2 vem logo depois do 1, o 3 vem em seguida e assim sucessivamente, porém podem ocorrer números cardinais, como, por exemplo, resultado de uma operação de contagem, em resposta a pergunta, “quantos elementos possuem esse conjunto?” (LIMA, 2009, p. 33).

Do ponto de vista de Peano, os números naturais não são definidos, ou seja, esses números são apresentados por uma lista de propriedades que os satisfazem, e tudo o mais decorre daí. Não interessa o que esses números são, mas como se comportam.

Para Dedekind (LIMA, 2009), os números naturais são definidos a partir da teoria de conjuntos e dos axiomas, hoje conhecidos como de Peano, são demonstrações de teoremas. O mais importante não são os axiomas que Peano²

²Peano deduz a teoria dos números naturais em três axiomas, aos quais são conhecidos como axiomas de Peano. São dados, como objetos não-definidos, um conjunto denotado por N , cujos elementos são chamados de números naturais e uma função $h: N \rightarrow N$.

Para cada n pertencente a N , o número $h(n)$, que é o valor da função h assumida no ponto n , é chamado de sucessor de n . Essa função satisfaz os seguintes axiomas.

escolheu, e sim atitude adotada por ele que prevalece na matemática até os dias atuais sob o nome de método axiomático.

2.5. Números inteiros negativos

No ensino fundamental, os números inteiros negativos e suas propriedades são introduzidas para dar significado a certas operações de subtração, do tipo $2 - 4$, $3 - 8$, etc. Uma vez introduzidos esses números, são definidas as demais operações como $3 - (-4)$, $(-2)(-2)$ $8 \div (-4)$, etc.

Para Ferreira (2010, p. 41), a definição destas operações é dada de modo ingênuo, não rigoroso, numa tentativa de estender as operações Aritméticas e suas propriedades do conjunto N para o conjunto Z (conjunto dos números inteiros). Com essa forma empírica, com a qual se apresentam os números inteiros no âmbito do ensino fundamental, é que foram descobertos e aplicados em expressões matemáticas de certas situações e na resolução de problemas

O contato com os números inteiros acontece no 7º ano do ensino fundamental, descrevendo o conjunto desses números como a união dos números naturais com os inteiros negativos, mais o zero, representando-o pela letra Z , que é a inicial da palavra alemã *Zahl*, que significa número em alemão e também a primeira letra do sobrenome do matemático alemão Ernest Zermelo (1871 – 1955), que se dedicou ao estudo dos números inteiros (DANTE, 2009).

Do ponto de vista do rigor matemático, apenas admitir a existência de números negativos e incorporá-los ao conjunto dos números naturais não é adequado.

Para Ferreira (2010), em N , só são constituídas as operações de adição e de multiplicação. A subtração não é, a rigor, uma operação em N e, por essa razão, a

a.1) $h: N \rightarrow N$ é injetiva. Isso implica dizer que dados m e n elementos de N , $h(m) = h(n)$ se $m = n$. Em outras palavras, dois números que tem o mesmo sucessor são iguais.

a.2) $N - h(N)$ resulta em um conjunto com um único elemento. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Esse número é chamado de um e simbolizado (1). Pode-se dizer que qualquer que seja n pertencente a N , tem-se 1 diferente $h(n)$. De outra forma, se n é diferente de um, então existe um único n' pertencente a N , tal que $h(n') = n$.

a.3) Se X , contido em N , é um subconjunto tal que 1 pertença a X e, para todo n pertencente a X , tem-se também $h(n)$ pertencente a X , então $X = N$. Esse último axioma, é conhecido como princípio da indução, que pode ser enunciado também da seguinte forma: Seja P uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 é satisfeito pela propriedade P e se, de fato, um número natural n se satisfizer em P e puder concluir que todos os elementos $n + 1$ satisfazem dessa propriedade, então todos os números naturais gozam dessa propriedade.

linha adotada pela matemática acadêmica é a de construir os números negativos, a partir das estruturas algébricas existentes no âmbito dos números naturais.

CAPÍTULO III – A CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS REAIS

3. Estrutura algébrica dos corpos

Neste capítulo, serão apresentados os números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”. Ao mesmo tempo, serão identificados elementos desses no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, constituindo, dessa forma, a proposta que esta pesquisa ora se apresenta, no intuito de contribuir para uma reflexão do que poderia ser trabalhado em Análise Real, nos cursos de licenciatura e permitir ao professor do ensino fundamental e do ensino médio identificar em sua prática consequências desta construção formal.

3.1. Operações binárias criando estruturas algébricas

De acordo com o estudo da Teoria dos conjuntos, sejam dois conjuntos não vazios, os quais serão denotados por A e B . Chama-se produto cartesiano de A por B , o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) , com x em A e y em B .

Costuma-se indicar o produto cartesiano de A por B com a notação $A \times B$ (A cartesiano B), logo, de uma forma mais geral, tem-se $A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Uma operação binária $(*)$ num conjunto não vazio S é uma regra para combinar dois elementos $x, y \in S$, produzindo um elemento $z \in S$, representado como $x * y$. De outro modo, uma operação binária num conjunto não vazio S é uma função $f: S \times S \rightarrow S$. Se x e y são elementos de S , $f(x, y)$ é representado como $x * y$.³

Um conjunto no qual estão definidas e fixadas duas operações binárias, denotadas por “+” e “·”, as quais são chamadas de adição e multiplicação respectivamente, satisfazendo os axiomas seguintes é chamado de corpo, denotado nesta pesquisa por K .

³Um exemplo de operação binária é a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(x, y) = x + y + 1$. Nota-se que combina dois elementos x, y de \mathbb{N} , produzindo um elemento $x + y + 1$ de \mathbb{N} . Outro exemplo é a função $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que $f(x, y) = x^y$, esta operação é de potenciação sobre \mathbb{N} . Observa-se que quaisquer que sejam os naturais x e y , o símbolo x^y representa um número natural, portanto, f está bem definida. Observa-se ainda que esta operação não pode ser estendida a \mathbb{Z} , pois, por exemplo, a imagem de $(2, -1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, é 2^{-1} elemento que não pertence a \mathbb{Z} , nem tão pouco estendida a \mathbb{Q} , pois a imagem de $(2, \frac{1}{2}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é $2^{\frac{1}{2}}$, não pertencente a \mathbb{Q} e nem a \mathbb{R} porque por exemplo, $(-1, \frac{1}{2})$ pertence a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mas $(-1)^{\frac{1}{2}}$, não pertence a \mathbb{R} .

3.1.1. Os axiomas da adição:

Axioma 1A. A adição é uma operação comutativa no corpo K , ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K , verifica-se a igualdade:

$$x + y = y + x$$

Axioma 2A. A adição é associativa, ou seja, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K :

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Axioma 3A. A adição tem um único elemento neutro, ou seja, para a adição, existe um único elemento m , pertencente a K , tal que qualquer que seja x pertencente a K .

$$x + m = m + x = x$$

Axioma 4A. Todo elemento de K tem simétrico, isto é, qualquer que seja $x \in K$, existe pelo menos um y de K , tal que:

$$x + y = y + x = m$$

Demonstração de teoremas: A demonstração de teoremas é um dos preceitos da matemática e exige algumas considerações. Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir alguns fatos como conhecidos. Esta é a natureza da matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo “se isto, então aquilo”. Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, prova-se aquilo como consequência (LIMA, 2004, p. 77).

Em muitos momentos da matemática, deseja-se mostrar a unicidade de um objeto, satisfazendo determinadas propriedades. Quase sempre, o caminho a ser seguido consiste em admitir a possibilidade de dois objetos a e b satisfazendo tais propriedades e mostrar que tais objetos são iguais.

Observação: Em relação ao axioma (3A), teria que garantir a unicidade do elemento neutro, porém, salienta-se que, na prática, não há a necessidade de verificar a unicidade, posto que esta é garantida pela própria existência deste elemento, caso contrário, se a e b são elementos neutros da adição em K , logo, de acordo com o axioma (3A), tem-se: $a + b = b + a = a$, pois b é neutro e $a + b = b + a = b$, pois a é neutro, conclui-se que $a = b$.

O elemento neutro da adição será chamado de zero e tem sua designação indicada pelo símbolo "**0**".

$$x + 0 = 0 + x = x$$

Teorema (1): O elemento simétrico da adição em K é único.

Demonstração: Para demonstrar a unicidade do elemento simétrico na adição, admiti-se a existência de a e b em K , elementos simétricos de x pertencente a K . Logo: $a + x = x + a = 0$ e $b + x = x + b = 0$. Somando $a + x + b = (a + x) + b = 0 + b = b$ e $a + x + b = a + (x + b) = a$, logo, $a = b$, mostrando, dessa forma, que, se para um determinado elemento de K , a adição admitir dois elementos simétricos, eles serão iguais, garantindo a unicidade deste elemento.

Qualquer que seja $x \in K$, o simétrico de x , designado por $-x$, é o único elemento de K cuja soma com x é igual a 0.

Teorema (2)⁴: Qualquer que seja $x \in K$, $x = -(-x)$.

Demonstrando: Sabendo-se que $(-x) + x = 0$, implica dizer que x é o simétrico do $-x$, como o simétrico de $-x$ é $-(-x)$, e pela unicidade do elemento simétrico, conclui-se que $x = -(-x)$.

3.1.2. Os axiomas da multiplicação

Axioma 1M. A multiplicação é uma operação comutativa no corpo K , ou seja, quaisquer que sejam os elementos x e y de K , verifica-se a igualdade:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2M. A multiplicação é associativa, isto é, quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K :

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Axioma 3M. A multiplicação tem um único elemento neutro diferente de zero, ou seja, para a multiplicação, existe um único elemento α diferente de zero, pertencente a K , tal que qualquer que seja x pertencente a K :

$$x \cdot \alpha = \alpha \cdot x = x$$

Axioma 4M. Todo elemento K , distinto de zero, tem inverso, ou seja, qualquer que seja $x \in K$, com $x \neq 0$, existe pelo menos um $y \neq 0$, tal que:

$$x \cdot y = y \cdot x = \alpha$$

⁴Enfatiza-se que $-(-x)$ é o simétrico de $-x$ e, por esse motivo, $-(-x)$ é igual a x , pelo fato de o elemento simétrico ser único, garantindo assim algumas relações, envolvendo operações com números negativos. Logo, pode-se entender que, por exemplo, $-(-2)$ é o simétrico de -2 . Como o simétrico de -2 é 2 , então $-(-2) = 2$.

Observação: A existência do elemento neutro, automaticamente garante a unicidade de tal elemento, caso contrário demonstra-se, seguindo os passos seguintes. Se a e b são elementos neutros da multiplicação em K , então, de acordo com o axioma (3M), tem-se: $a \cdot b = b \cdot a = a$ e $a \cdot b = b \cdot a = b$, conclui-se que $a = b$.

Em relação à multiplicação, o elemento neutro será chamado de um e designado pelo símbolo "1", a respeito da notação, $1 \neq 0$.

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

Teorema (3): Para cada elemento $x \in K$, sendo $x \neq 0$, seu inverso é único.

Demonstração: Admiti-se a existência de dois elementos inversos " a " e " b ", pertencentes a K , (ambos diferentes de zero) de qualquer que seja $x \in K$, tais que: $a \cdot x = x \cdot a = 1$ e $b \cdot x = x \cdot b = 1$. Partindo de $a \cdot x \cdot b = (a \cdot x) \cdot b = 1 \cdot b = b$ e $a \cdot x \cdot b = a \cdot (x \cdot b) = a \cdot 1 = a$, concluindo que $a = b$, ou seja, dessa forma garante-se que o elemento inverso da multiplicação é único.

Sendo x um elemento de K , diferente de zero, existe o inverso de x , designado por $x^{-1} = \frac{1}{x}$, que é o único elemento de K cujo produto com x é igual a 1. Anota-se ainda que $a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$.

3.1.3. A distributividade: uma relação entre a adição e a multiplicação

Axioma D. O encontro das duas operações, adição e multiplicação, acontece nesse axioma e é chamado de propriedade distributiva, ou seja, a multiplicação é distributiva a respeito da adição: quaisquer que sejam os elementos x, y e z de K :

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

3.1.4. A importância dos elementos simétricos e inversos

Para Courant e Robbins (2000), a diferença $b - a$, de dois números inteiros, é um número inteiro c que satisfaz a sentença $a + c = b$, ou seja, é a solução da equação $a + x = b$, porém, no domínio dos números naturais, o símbolo $b - a$ não tem significado geral, apenas quando é restringido que $b > a$ (ver pág. 39), pois, dessa forma, a equação $a + x = b$ vai ter um número natural como solução. Na ótica de estrutura algébrica, o conjunto dos números naturais não constitui um corpo.

Numa visão de sala de aula, muitos questionamentos podem surgir na

aplicação e na validade de algumas operações, por exemplo quanto é $0 \cdot 2$? Algumas confusões podem levar os estudantes a responderem 2, trocando o elemento neutro da adição e o elemento neutro da multiplicação, o professor, por sua vez, deve buscar alternativas que possam responder a esses questionamentos, mas, para isso, acredita-se ser necessário conhecer o porquê que todo número multiplicado por zero é igual a zero. De forma analítica, esse fato é demonstrado no seguinte de teorema:

Teorema (4): Qualquer que seja x , pertencente a K , $0 \cdot x = 0$.

A demonstração desse teorema está totalmente relacionada à estrutura de corpo K , definida acima, e aos axiomas que a sustenta. Para esse fato, já provado que o elemento neutro da adição é único, tem-se: $x + (-x) = 0 \Rightarrow 1 \cdot x + (-x) = 0 \Rightarrow (0 + 1) \cdot x + (-x) = 0$, pela propriedade distributiva, temos $0 \cdot x + x + (-x) = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + (x + (-x)) = 0 \Rightarrow 0 \cdot x + 0 = 0$, logo, $0 \cdot x = 0$.

De acordo com o desenvolvimento em Análise Real, tem-se o seguinte teorema:

Teorema (5): Qualquer que seja x , pertencente a K , tem-se $-x = (-1) \cdot x$.

Demonstrando: Já provado anteriormente, $0 \cdot x = 0$, logo, $(1 + (-1)) \cdot x = 0$, pela propriedade distributiva, tem-se $1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0 \Rightarrow x + (-1) \cdot x = 0$, então, o simétrico de x é $(-1) \cdot x$. Como o elemento simétrico de x é $-x$ e pela unicidade desse elemento, conclui-se que $-x = (-1) \cdot x$.

Nota-se que $-x$ é o simétrico de x , garantido pelo axioma (4A) e no segundo membro da igualdade $-x = (-1) \cdot x$ tem-se o simétrico de 1 multiplicado por x . Logo, para encontrar o simétrico de x , basta multiplicar o simétrico de 1 por x .

A operação $b + (-a)$ será representada por $b - a$ e, dessa forma, defini-se a operação de subtração de b por a como a soma do elemento b pelo simétrico do elemento a .

3.1.5. A multiplicação de números negativos

Na introdução de novos símbolos $-1, -2, -3, \dots$, em uma Aritmética ampliada que abrange tanto inteiros positivos como negativos, deve-se definir as operações de tal forma que as regras originais de operações Aritméticas sejam preservadas (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 64).

Indica-se a multiplicação de quaisquer elementos a e b , denotada $a \cdot b$ por ab .

Definir uma operação de multiplicação com elementos negativos é uma consequência do desejo de se preservar a lei da distributividade $a(b + c) = ab + ac$. Um fato a destacar são as famosas regras de sinais. Por exemplo, sabe-se que $(-1) \cdot (-1)$ é igual a 1, porém, se $(-1) \cdot (-1)$ fosse igual a -1 , então, a expressão $-1(1 - 1)$ poderia ser igual a -2 , pois aplicando a distributividade tem-se: $-1(1 - 1) = -1(1 + (-1)) = -1(1) + (-1) \cdot (-1) = -1 - 1 = -2$, mas, por outro lado, resolvendo a subtração dentro do parênteses tem-se: $-1(1 - 1) = -1 \cdot 0 = 0$.

Mas como provar tais regras? Os matemáticos levaram muito tempo para compreender que as regras de sinais, juntamente com todas as definições que envolvem números inteiros e as frações não podiam ser provadas (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 64).

Para alcançar a liberdade nas operações, e preservar ao mesmo tempo as leis fundamentais da Aritmética, podem e devem ser provadas essas regras, apenas com base nas definições das leis comutativas, associativas e distributivas da estrutura de corpo. Logo, $(-1) \cdot (-1)$ é igual a 1, sendo válida a igualdade $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$. (ver pág 4). Dessa forma, $(-a) \cdot (-b) = ab$, ou seja, $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot a \cdot (-1) \cdot b = a \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot b = a \cdot 1 \cdot b = a \cdot b = ab$.

3.1.6. Princípio de equivalência

No estudo de igualdades, fala-se dos chamados princípios de equivalência, (Giovanni Jr e Castrucci, 2009, p. 118), que garantem a resolução de equações do tipo $2x + 2 = 4$, por exemplo, no campo dos inteiros. Esses princípios são chamados de aditivos e de multiplicativos.

O princípio aditivo permite adicionar aos dois membros de uma igualdade um mesmo valor, encontrando, dessa forma, uma nova igualdade, equivalente à primeira, já o princípio multiplicativo permite multiplicar os dois membros de uma igualdade por um mesmo valor, mantendo-se a equivalência. Logo, se $a = b$, então $a + c = b + c$ ou $a \cdot c = b \cdot c$. Para essas afirmações, demonstra-se o teorema abaixo e, a partir dele, os corolários seguintes:

Teorema (6): Dado um corpo K , e sejam x e y elementos de K . Tem-se $x = y$, se e somente se, $x - y = 0$.

A demonstração será desenvolvida em duas partes:

1ª - se $x = y$, então $x - y = 0$. Partido de $y + (-y) = 0$, e considerando $x = y$, tem-se que $x + (-y) = 0$, logo, $x - y = 0$.

2ª - se $x - y = 0$, então $x = y$. Sendo $x - y = 0$, então $x + (-y) = 0$, logo, x é o simétrico de $(-y)$ e $(-y)$ é o simétrico de x . Como y é o simétrico de $(-y)$ e este simétrico é único, então $x = y$.

Corolário 1 : Quaisquer que sejam x e y pertencentes a K , se $x = y$, então $x + z = y + z$.

Demonstrando: se $x = y$, então $x - y = 0$, e adicionando $+z$ e $(-z)$ a $x - y$, tem-se $x - y + z + (-z) = 0$. Usando a associatividade e a comutatividade, escreve-se que $x + z - y - z = 0 \Rightarrow (x + z) - (y + z) = 0$; logo, $x + z = y + z$.

Corolário 2: Quaisquer que sejam x, y , pertencentes a K se $x = y$, então $x \cdot z = y \cdot z$

Demonstrando: Sendo $x - y = 0$, e sabendo que $0 \cdot z = 0$, então $(x - y) \cdot z = 0$. Usando a propriedade distributiva, tem-se que $xz - yz = 0$, logo, $xz = yz$, de acordo com o teorema (8).

Agora, tem sentido o uso dos princípios de equivalência para resolução de equações. Em relação ao exemplo, $2x + 2 = 4$, tem-se $2x + 2 - 2 = 4 - 2$, logo, $2x = 2$. Multiplicando membro a membro por $\frac{1}{2}$, tem-se $x = 1$ que é o resultado da equação acima. Uma forma generalizada é apresentada no teorema, seguinte.

Teorema (7): Seja K , um corpo e a e b elementos de K , sendo $a \neq 0$. A equação do 1º grau $ax + b = 0$ possui uma única solução, ou seja, $x = \frac{-b}{a}$.

Demonstração: Se $ax + b = 0$, então, $ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow ax + 0 = -b \Rightarrow$

$$ax = -b \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b) \Rightarrow 1 \cdot x = \frac{(-b)}{a} \Rightarrow x = \frac{(-b)}{a}.$$

Talvez fosse interessante resolver equações⁵ do 1º grau, usando tal procedimento, visando o amadurecimento do aluno.

3.2. Os números racionais

Neste tópico, serão apresentados os números racionais como corpo, sendo identificadas as operações e as contradições operatórias, no que se refere à divisão por zero. Ressalta-se também, a construção geométrica dos números racionais,

⁵Um exemplo de equações lineares: $3x - 5 = 2x + 7 \Rightarrow 3x - 5 + 5 = 2x + 7 + 5 \Rightarrow 3x = 2x + 12 \Rightarrow 3x - 2x = 2x - 2x + 12 \Rightarrow x = 12$.

identificando-se algumas propriedades fundamentais que envolvem esses números.

3.2.1. A estrutura de corpo do conjunto dos números racionais

Os números racionais representam uma ampliação no domínio da Aritmética para além dos números inteiros, que são abstrações do processo de contar coleções finitas de objetos (COURANT & ROBBINS, 2000, p.61).

No cotidiano, há necessidade não somente de contar objetos individuais, mas também de medir quantidades tais como comprimentos, áreas, pesos e tempos. Se o desejo é operar livremente com as medidas dessas quantidades, que são capazes de subdivisões arbitrariamente pequenas, é necessário ampliar o domínio da Aritmética para além dos números inteiros. O primeiro passo é, segundo Courant e Robbins (2000), reduzir o problema de medir ao problema de contar.

Inicialmente escolhe-se, de forma arbitrária, a unidade de medida, como por exemplo, o metro, o quilômetro, a polegada, o centímetro, o grama ou o segundo, dependendo do contexto ao qual se deseja atribuir essa medida. Na sequência, conta-se o número dessas unidades, que, juntas, vão constituir a quantidade a ser medida, por exemplo, certa distância entre duas cidades, pode medir exatamente 240 km. De uma forma mais geral, o processo de contar unidades não é suficiente, pois nem sempre a quantidade dada é um múltiplo inteiro da unidade escolhida. O máximo que se pode dizer é que o valor da quantidade situa-se entre dois múltiplos sucessivos. Quando isso ocorre, há necessidade de introduzir novas subunidades, que são obtidas mediante a divisão da unidade original em um número n de partes iguais (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 62).

No simbolismo matemático, a subunidade obtida pela divisão da unidade original em n partes iguais é representada pelo símbolo $\frac{1}{n}$. No caso da quantidade conter exatamente m destas subunidades, sua medida é representada pelo símbolo $\frac{m}{n}$. Esse símbolo é chamado de fração ou razão e, algumas vezes, escrito como $m \div n$ ou $m \cdot n^{-1}$.

Pode-se definir a operação de divisão de um número a por um número b , como sendo a multiplicação do número a pelo inverso do número b , ou seja, $3 \div 2$, é o mesmo que $3 \cdot 2^{-1}$, uma ideia muito trabalhada no cálculo de potências, quando o expoente é negativo (Giovanni Jr e Castrucci, 2009, p. 104).

O segundo e decisivo passo foi dado de forma consciente somente após

séculos de tentativas, despojando-se o símbolo $\frac{m}{n}$ de sua referência concreta ao processo de medir e às quantidades medidas, considerando-o um puro número, entidade em si própria, ao mesmo nível dos naturais. Quando m e n são números inteiros, o símbolo $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$ é chamado de número racional (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 62).

O conjunto de todos os números racionais será denotado por \mathbb{Q} . Doravante, toda vez que aparecer um símbolo na forma $\frac{m}{n}$, por exemplo, considera-se que n é diferente de zero.

O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$ (adição) e $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'}$ (multiplicação) é um exemplo de corpo, no qual são válidos os axiomas da adição, da multiplicação e da distributividade.

Como exemplo, verifica-se que a comutatividade, tanto da adição quanto da multiplicação, é válida em \mathbb{Q} :

$$\text{- comutatividade da adição: } \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'} = \frac{qp' + pq'}{qq'} = \frac{p'}{q'} + \frac{p}{q}$$

$$\text{- comutatividade da multiplicação: } \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'} = \frac{p' \cdot p}{q' \cdot q} = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{p}{q}$$

Os outros axiomas também são válidos em \mathbb{Q} , garantindo que esse conjunto é uma estrutura de corpo.

Nota-se que $\frac{p}{p} = 1$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ se $pq' = qp'$ para quaisquer inteiros p, q, p', q' . O simétrico de $\frac{p}{q}$ é $-\frac{p}{q}$. O zero é $\frac{0}{q}$ com $q \neq 0$ e o inverso de $\frac{p}{q} \neq 0$ é $\frac{q}{p}$.

A construção dos números racionais pode parecer extremamente simples, mas pesquisas mostram que, em termos da prática docente no ensino fundamental e no ensino médio, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações escolares (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 59 e 60).

Nessa perspectiva, o PCN em matemática do ensino fundamental destaca:

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associado a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal (BRASIL, 1998, p. 100).

Outro aspecto que se destaca na concepção formal dos números racionais, se refere às operações e às ideias essenciais que fundamentam os seus conceitos.

Os termos fracionários, a serem adicionados, devem ter como referência a mesma unidade-todo, tanto em sua representação aritmética quanto geométrica.

Assim, quando as frações tiverem denominadores diferentes, a unidade-todo será dividida em partes iguais ao número de um dos denominadores; também subdividida em partes iguais ao número do segundo denominador e, finalmente, a divisão exigirá tantas partes quanto for o produto dos denominadores. Isso significa dizer que há uma transformação em frações equivalentes, necessariamente com os mesmos denominadores.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$$

Quanto à operação de multiplicação, a abordagem adotada atualmente no ensino fundamental e no ensino médio cria condições para os estudantes conviverem com diversas interpretações. Tal operação, nesse campo numérico, não se sustenta por si só, pois articula uma série de relações com outros conceitos, como: medida de segmento de reta; divisão Aritmética e geométrica (segmento); a divisão da divisão (por exemplo, tomar dois quintos de três quartos); a identificação de uma nova fração (tomar quintos de quartos que se transforma em vinte avos); adição de fração (exemplo, quatro quinze avos mais quatro quinze avos).

Assim, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo

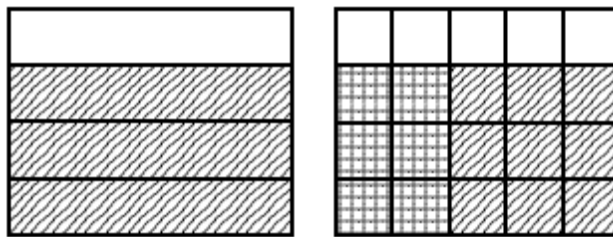


Figura IX: Todo considerado

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

As definições das operações de números racionais são impostas, principalmente para utilização dos números racionais como medidas. Segundo Courant e Robbins (2000, p. 63), “os números racionais são criações nossas e que as regras são impostas por nossa vontade”.

Na busca de definir as operações, pode-se decretar outra regra para adição, como: $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$, situação muito presente em salas de aulas de matemática dos

ensinos fundamental e médio que, em particular, forneceria $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, que é um absurdo, do ponto de vista de medida.

Regras desse tipo, embora sejam logicamente permitidas, tornariam a Aritmética um jogo sem sentido, pois o livre exercício do intelecto é orientado pela necessidade de se criar um instrumento que seja adequado para lidar com medidas, dando consistência e utilidades aplicativas.

A invenção das frações como novos símbolos numéricos, torna a divisão, que no conjunto dos números inteiros é restrita, sem restrições, exceto no caso da divisão por zero, que é excluída de uma vez por todas (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 65).

Outro questionamento, que é muito comum no ensino fundamental e no ensino médio é, “por que não se pode dividir por zero”? Ou, quanto é $\frac{1}{0}$?

Na estrutura de corpo, todo número diferente de zero tem inverso e esse é único, logo, se $\frac{1}{0}$ existir, então $\frac{1}{0} = 0^{-1}$, que é o inverso de zero e, dessa forma, $0 \cdot 0^{-1} = 1$, contradizendo o teorema (3), o qual provou que 0 multiplicado por qualquer valor é 0. Outro absurdo é que se a divisão por zero fosse permitida, então $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 \cdot 0^{-1} = 2 \cdot 0 \cdot 0^{-1} \Rightarrow 1 = 2$.

À medida que se ampliam os conjuntos numéricos e se estendem as operações para os novos campos, os significados dessas operações vão tomando um sentido mais abrangente e mais geral, de certa forma, pode-se dizer mais algébrico (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 66).

Teorema (8): Dados a, b, c e d num corpo K , sendo b e d diferentes de zero, tem-se:

$$i) \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}, \quad ii) \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad iii) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Demonstrando (i): Seja $x \in K$ elemento de tal forma que $bx = 1$, ou seja, $x = \frac{1}{b}$ e $y \in K$ elemento tal que $dy = 1$, ou seja, $y = \frac{1}{d}$. Prova-se que existe um único elemento $z \in K$ tal que $(bd) \cdot z = 1$, ou seja, $z = \frac{1}{bd}$ é xy . Bem, partido de $(bd) \cdot (xy)$, escreve-se: $(bd) \cdot (xy) = b \cdot [d \cdot (x \cdot y)] = b \cdot [(d \cdot y) \cdot x] = b \cdot (1 \cdot x) = b \cdot x = 1$, logo $xy = z$. Tendo $xy = z$, pode-se concluir que $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}$

Demonstrando (ii): Como $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d}$, usando a propriedade associativa, tem-se: $a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = a \cdot c \cdot \frac{1}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Demonstrando (ii): Para a demonstração desta operação, considera-se a relação $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{d} = a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}$. Baseando-se no axioma do elemento inverso, multiplica-se a primeira parcela por $d \cdot \frac{1}{d} = d \cdot d^{-1}$ e a outra por $b \cdot \frac{1}{b} = b \cdot b^{-1}$. Dessa forma, $a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot d^{-1} + c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot b^{-1}$; pela comutatividade e pela associatividade, tem-se: $a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot d^{-1} + c \cdot d^{-1} \cdot b \cdot b^{-1} = a \cdot d \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} + c \cdot b \cdot d^{-1} \cdot b^{-1} = a \cdot d \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} + c \cdot b \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{b}$. Usando a propriedade distributiva, tem-se $(a \cdot d + c \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}$. Então, $(a \cdot d + c \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = (ad + bc) \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

3.2.2. A interpretação geométrica dos números racionais

Para esta forma de interpretar os números racionais, toma-se uma reta numérica e escolhe-se um ponto para ser o zero. Demarca-se o segmento de 0 a 1. Defina o comprimento deste segmento como unidade de medida que fica à livre escolha. Representa os inteiros positivos e negativos como conjunto de pontos equidistantes na reta numerada, sendo à esquerda de zero os negativos e à direita de zero os positivos.

Para se representar frações com denominadores n , divida cada um dos segmentos da unidade escolhida em n partes iguais; os pontos da subdivisão vão representar as frações com denominador n . Se, para cada inteiro n , for feito o mesmo raciocínio, todos os números racionais serão representados por pontos desta reta numérica. Esses pontos serão chamados de pontos racionais. Nesta pesquisa, um pouco à frente (ver pág 82), ficará claro que o conjunto dos números racionais não esgota a reta numérica.

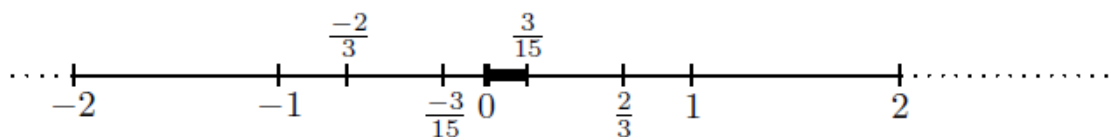


Figura X: A reta numérica racional

As frações equivalentes são representadas na reta numérica por um mesmo ponto, ou seja, o ponto que representa fração $\frac{2}{3}$ é o mesmo que representa a fração $\frac{4}{6}$ e as demais frações equivalentes a $\frac{2}{3}$.

3.3. Corpo ordenado

Apresentam-se os corpos ordenados, no intuito de desvelar as ideias de comparações, de desigualdades e de intervalos, presentes em muitos textos de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. Dessa forma, busca-se, na compreensão dos processos formais, uma proximidade das relações operatórias, desenvolvidas no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio.

3.3.1 O que são corpos ordenados?

Já se sabe que o conjunto dos números racionais, com as operações de adição e de multiplicação usuais, é um corpo. Indo um pouco além, sabe-se que \mathbb{Q} é um corpo ordenado, isto é, em \mathbb{Q} tem sentido se falar em elementos positivos e negativos. Senão, observe:

Dada a fração $\frac{a}{b}$, concebida como quociente de inteiros relativos, logo, pode-se considerar sempre $b > 0$, posto que para $b < 0$, resulta em $-b > 0$ e a fração $\frac{a}{b}$ podem ser substituídas pela fração equivalente $\frac{-a}{-b}$.

Assumindo que seja sempre positivo o denominador b , valem as relações seguintes: $\frac{a}{b} < 0$, $\frac{a}{b} = 0$ ou $\frac{a}{b} > 0$, segundo seja $a < 0$, $a = 0$ ou $a > 0$ respectivamente.

Um fato que pode ser destacado é o estudo de comparação de frações, “quem é maior $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$?”. Essa comparação é garantida, em análise, pelo fato de $x^{-1} > y^{-1}$ se, e somente se, $x < y$, considerando x e y elementos positivos de um corpo K . Demonstrar esta situação, basta observar que $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} \Rightarrow \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} > 0 \Rightarrow \frac{y}{xy} > \frac{x}{xy}$ como $xy = xy$, então $x < y$. Partindo de $x < y$, multiplica-se membro a membro por $\frac{1}{xy}$, encontrando-se, dessa forma, que $x^{-1} > y^{-1}$.

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, intercede entre elas uma, e somente uma das relações $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, segundo seja $ad < bc$, $ad = bc$ ou $ad > bc$.

3.3.2. Generalizando a noção de corpo ordenado.

Um corpo K será dito ordenado se neste corpo está destacado ou fixado um subconjunto P , chamado de conjunto dos elementos positivos de K , que satisfaz as seguintes condições:

1ª – Se a e b pertencem a P , então $a + b$ pertence a P , ou seja, se dois elementos do corpo K são positivos, a soma deles também é um elemento positivo.

2ª – Se a e b pertencem a P , então $a \cdot b$ pertence a P , ou seja, o produto de dois elementos do corpo K positivos é um elemento de K positivo.

3ª - Se a pertence a K , então verifica uma, e somente uma das seguintes propriedades

$$a \in P \text{ ou, } a = 0, \text{ ou } -a \in P$$

A terceira condição também é conhecida como propriedade da tricotomia. Esta terceira condição implica que o conjunto $M = \{-a; a \in P\}$ o qual é denominado conjuntos dos elementos do corpo ordenado K negativos, não tem elementos comuns com o P . Desta forma, pode-se concluir que o conjunto K é a união dos três conjuntos disjuntos, P , $\{0\}$ e M .

A partir destas considerações, define-se que: se um elemento $a \in P$, contudo este elemento é positivo e diz que este elemento é maior que zero " $a > 0$ ". (Bem entendido, $a > 0$, se e somente se $a \in P$). Se $-a \in P$, então a é um elemento negativo e desta forma, $a < 0$.

Se a pertence a P ou é 0, então $a \geq 0$. Por outro lado, se $-a \in P$ ou é 0, então $a \leq 0$. Pode-se então introduzir que o elemento zero é tanto positivo quanto negativo, admitindo, assim, um *status* dual (BARTLE, 1983, p. 43). De uma forma mais geral, definiu-se no ensino fundamental e no ensino médio que P é o conjunto dos números positivos, $P \cup \{0\}$ conjunto dos números não negativos.

Destaca-se, neste momento, que o elemento $(-a)$ não é necessariamente negativo, podendo ser positivo, se a for um elemento negativo. Caso a seja positivo, então $-a$ será negativo.

As relações de ordem definidas nos cursos de Análise Real são introduzidas, admitindo-se a e b , dois elementos de K , tal que se $(a-b) \in P$, então $a > b$, ou se $-(a-b) \in P$, logo $a < b$. Da mesma forma, se $(a-b) \in P \cup \{0\}$, então, $a \geq b$, e se $-(a-b) \in P \cup \{0\}$, então $a \leq b$.

Confluindo com essas ideias, para um princípio de formalização, o curso de Análise Real na licenciatura em matemática coloca as relações de ordem, estabelecendo algumas propriedades, as quais são denominadas de Leis Familiares da Desigualdade (BARTLE, 2000, P. 42), que, sem dúvida, estão presentes nas obras do ensino fundamental e do ensino médio.

Sejam a, b , e c elementos de K , logo:

- se $a > b$ e $b > c$, então, $a > c$.

Para demonstrar essa situação, pode-se partir da definição apresentada neste capítulo, a qual garante que se $a > b$, então $(a - b) \in P$, e se $b > c$; $(b - c) \in P$. Observe que $a - c = (a - b) + (b - c)$, o que garante que $(a - c) \in P$, pois como definido anteriormente, a soma de dois elementos positivos é um elemento positivo.

- a segunda propriedade fala exatamente da validade das relações $a > b, a = b, a < b$ e a verificação dessa propriedade se estabelece nas possibilidades de $(a - b) \in P, a - b = 0$ e $-(a - b) \in P$

- a terceira propriedade diz que se $a \geq b$ e $b \geq a$, então $a = b$.

Essa propriedade pode ser provada, considerando que $a \neq b$. Dessa forma, ou $(a - b) \in P$ ou $(b - a) \in P$, ou seja, ou $a > b$, ou $b > a$. Em qualquer caso, verifica-se uma contrariedade das hipóteses.

Num corpo ordenado, se $a \neq 0$, então $a^2 \in P$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $a^2 = a \cdot a$ e no segundo caso $a^2 = (-a) \cdot (-a)$, ou seja, $(-a) \cdot (-a) = (-1) \cdot (a) \cdot (-1) \cdot (a) = (a) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (a) = (a) \cdot 1 \cdot (a) = (a) \cdot (a) = a^2$. Um caso particular é que num corpo ordenado $1 = 1 \cdot 1$ é sempre positivo.

Pode-se pensar em vários teoremas a partir dessa estrutura e identificar, no desenvolvimento matemático dos ensinamentos fundamental e médio, muitas relações possíveis ligadas a esses teoremas.

Essa propriedade fala que, se um corpo é ordenado, então o quadrado de qualquer elemento diferente de zero é positivo. O que isso significa sobre corpos conhecidos no ensino fundamental e no ensino médio? O que dizer dos números complexos?

O corpo C dos números complexos deve ser tal que possa admitir as operações de adição, de multiplicação e também possibilitar a extração de raízes quadradas de números negativos.

Segundo Dante (2009, p.431), uma boa maneira de definir esse conjunto é usando a relação de pares ordenados, proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837. Esses pares ordenados estão definidos da seguinte forma:

Igualdade: $(a, b) = (c, d)$ se e somente se $a = c$ e $b = d$

Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

A unidade imaginária é a denominação para o número complexo $(0, 1)$, o qual é denotado por “ i ”. Observe que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$

O corpo dos números complexos (\mathbb{C}) não pode ser ordenado, isto é, por mais que se tente, não é possível destacar um conjunto em \mathbb{C} que possa ser chamado conjunto dos elementos positivos de \mathbb{C} , satisfazendo as propriedades, já que em \mathbb{C} tem um elemento cujo seu quadrado é negativo.

Outra situação a considerar é se $1 > 0$, tem-se $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1 < \dots$. O subconjunto de K , formado por esses elementos, é infinito. Mais precisamente, o conjunto \mathbb{N} (Conjunto dos números naturais) pode ser considerado subconjunto de K .

Indica-se o símbolo $1'$ como o elemento unidade do corpo K . Defina uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow K$, pondo $f(1) = 1', f(2) = 1' + 1', f(3) = 1' + 1' + 1'$, etc. Definindo de maneira correta a função f , utiliza-se a indução: $f(1) = 1'$ e $f(m + 1) = f(m) + 1'$. Por indução, verifica-se que $f(m + n) = f(m) + f(n)$. Como todos os valores de $f(n)$ são positivos, se $m < p \Rightarrow f(m) < f(p)$. Dessa forma, define-se uma bijeção do conjunto \mathbb{N} dos números naturais sobre o conjunto $N' = f(\mathbb{N})$, formado pelos elementos $1', 1' + 1', 1' + 1' + 1'$, etc. Há o costume de identificar N' como \mathbb{N} e considerar que os números naturais estão contidos em K . Logo $\mathbb{N} \subset K$ e, dessa forma, será permitido escrever 1 ao invés de $1'$. Em particular, todo corpo ordenado é infinito.

A definição que muitas vezes é usada no ensino fundamental e no ensino médio de que todo número natural é inteiro e todo número inteiro é racional, é perfeitamente identificada com a seguinte consideração: Dado um corpo ordenado K . Considerando $\mathbb{N} \subset K$, fazendo os simétricos $-n$ dos elementos n de \mathbb{N} e mais o zero, sendo $0 \in K$, tem-se constituído o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros. Dessa forma, admite-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset K$.

Considerando m e n elementos de \mathbb{Z} , com $n \neq 0$, existe $n^{-1} \in K$, de acordo com o axioma (4M). Dessa forma, pode-se referir ao conjunto formado por todos os elementos $m \cdot n^{-1} = \frac{m}{n} \in K$, com $n \neq 0$, como um subcorpo de K , sendo este, o menor deles.

Como todo subcorpo deve conter pelo menos 0 e 1, e mais, o conjunto N por adições sucessivas de 1, o conjunto Z por tomadas de simétricos e o conjunto das frações $\frac{m}{n}; m, n \in Z e n \neq 0$, de um modo natural, pode-se considerar que $N \subset Z \subset Q \subset K$, identificando que o corpo Q dos números racionais é evidentemente o menor subcorpo ordenado de K .

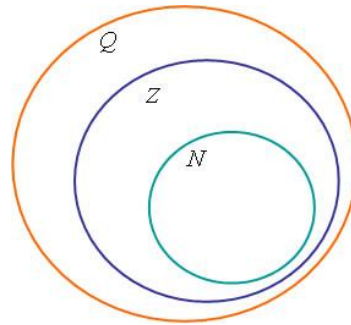


Figura XI: ilustração de Q

3.3.3. Noção de Intervalos

Fixados $a < b$, elementos de um corpo ordenado K , destacam-se os seguintes subconjuntos de K .

$[a, b] = \{x \in K ; a \leq x \leq b\} \rightarrow$ intervalo fechado de extremos a e b

$[a, b) = \{x \in K ; a \leq x < b\} \rightarrow$ intervalo fechado na esquerda e aberto na direita.

$(a, b] = \{x \in K ; a < x \leq b\} \rightarrow$ intervalo aberto na esquerda e fechado na direita

$(a, b) = \{x \in K ; a < x < b\} \rightarrow$ intervalo aberto

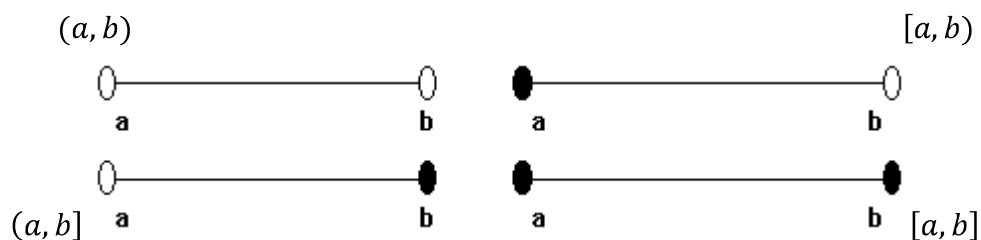


Figura XII. Intervalos ou segmentos

Os intervalos acima são ditos limitados. Na sequência, são apresentados intervalos ilimitados cujas representações geométricas são retas e/ou semi-retas

$(-\infty, b] = \{x \in K ; x \leq b\} \rightarrow$ é a semi reta esquerda fechada de origem em b

$(-\infty, b) = \{x \in K ; x < b\} \rightarrow$ é a semi reta esquerda aberta de origem em b

$(a, \infty] = \{x \in K ; x \geq a\} \rightarrow$ é a semi reta direita fechada de origem em a

$(a, \infty) = \{x \in K ; x > a\} \rightarrow$ é a semi reta direita aberta de origem em a

$(-\infty, \infty) = K \rightarrow$ intervalo cuja representação gráfica é uma reta. Esse intervalo pode ser considerado aberto ou fechado.

Quando é considerado um intervalo de extremos a e b , sempre supõem que $a < b$, com exceção do intervalo fechado $[a, b]$, no qual $a = b$. Esse último intervalo pode ser denotado por $[a, a]$. Sua representação geométrica consiste em um único ponto a e é chamado de intervalo degenerado.

Não é difícil afirmar que todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito, basta observar que num corpo ordenado K , se $x < y$ então $x < \frac{x+y}{2} < y$. Desta forma, se I , for um intervalo entre a e b , com $a < b$, então, pode-se obter uma infinidade de elementos $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$, pertencentes a I . Tomando $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$, $x_3 = \frac{a+x_2}{2}, \dots, x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2}, \dots$ tem-se $a < \dots < x_3 < x_2 < x_1 < b$.

Considerando que o intervalo entre dois números racionais a e b ($a < b$) distintos é não degenerado, observa-se que sempre, entre dois números racionais, vai existir um número racional n , dado por: $n = \frac{a+b}{2}$.

3.3.4. As inequações na estrutura de corpos ordenados

No ensino fundamental e no ensino médio, são introduzidas as chamadas inequações, que são sentenças matemáticas com uma ou mais incógnitas (letras) expressas por uma desigualdade. Para resolver essas inequações é preciso observar bem o que acontece, quando se multiplica membro a membro da sentença por um número positivo e por um número negativo.

Teorema (9): Dados x, y, z , elementos de um corpo K ordenado. Se $x < y$, então qualquer que seja $z > 0$, tem-se $xz < yz$.

Demonstrando: Se $x < y$, então $y - x \in P$ e se $z > 0$ então $z \in P$. Multiplicando $y - x$ por z , temos $(y - x)z \in P$. Usando a propriedade distributiva, temos $(yz - xz) \in P$, logo, $xz < yz$.

Teorema (10): Sendo x, y e z , elementos de um corpo K ordenado, se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$.

Demonstrando: Se $x < y$, então $y - x \in P$ e se $z < 0$ então $-z \in P$. Multiplicando $y - x$ por $-z$, temos $(y - x) \cdot (-z) \in P$. Usando a propriedade distributiva, temos $(-yz + xz) \in P$, logo, $xz > yz$.

Esses teoremas justificam que, ao se multiplicar os membros de uma desigualdade, denotada pelos sinais: $>$ (maior), $<$ (menor), \leq (menor do que ou igual a), \geq (maior do que ou igual a), por um número positivo, a desigualdade não se altera e, se o número for negativo, a desigualdade é alterada, ou seja, o maior é substituído pelo menor e vice-versa. Logo, a inequação $-x < 1$, pode ser equivalentemente representada por $x > -1$, satisfazendo o conjunto no qual foi definido a sua solução.

Teorema (11): Dados x e y , elementos de um corpo ordenado K . Se $x < y$, então, qualquer que seja z pertencente a K , tem-se que $x + z < y + z$.

Demonstrando: Se $x < y$, então $y - x \in P$ $(y - x) + z + (-z) \in P$. Logo, $y + z - x - z \in P$, $(y + z) - (x + z) \in P \Rightarrow x + z < y + z$.

Esta propriedade recebe o nome de “monotonicidade da adição” e garante que, mesmo somando membro a membro de uma desigualdade por um número qualquer, encontra-se uma desigualdade equivalente a primeira.

Teorema (12): Dados a e b , elementos de um corpo K ordenado. Tem-se $a \cdot b > 0$ se, e somente se, $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.

A demonstração desse teorema vai permitir uma maior compreensão da resolução de inequações produto, como por exemplo, $(x - 7)(x + 2) > 0$.

Demonstração: Esta demonstração se desenvolverá por duas partes:

- 1ª parte: Se $a \cdot b > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$. Sendo $a \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b$ é positivo, ou seja, $a \cdot b \in P$. Considere $a < 0$, ou seja, a negativo e $b > 0$, logo, $-a \in P$ e $b \in P$, dessa forma $-a \cdot b \in P$, contradizendo a hipótese de $a \cdot b \in P$. Da mesma forma, considere $a > 0$ e $b < 0$, logo $a \in P$ e $-b \in P$, então $a \cdot (-b) \in P \Rightarrow -a \cdot b \in P$, mais uma vez contradizendo a hipótese. Logo, se $a \cdot b > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.

- 2ª parte: Esta segunda parte vai transcorrer de forma a garantir as propriedades de corpos ordenados. Se $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$. De fato, se $a > 0$ então $a \in P$ e se $b > 0$ então $b \in P$, logo, $a \cdot b \in P$. Por outro lado, se $a < 0 \Rightarrow -a \in P$ e $b < 0 \Rightarrow -b \in P$, logo, $(-a) \cdot (-b) \in P$, ou seja, $(-1)a \cdot (-1)b > 0$.

Usando a propriedade comutativa, tem-se $a(-1) \cdot (-1)b > 0 \Rightarrow a \cdot 1 \cdot b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

A resolução da inequação, com uma incógnita, consiste na aplicação sucessiva das propriedades das desigualdades que transcorrem neste trabalho, até se chegar a uma expressão final do tipo $x > c, x < c, x \leq c, x \geq c$.

Corolário 3: Dados a e b , elementos de um corpo K ordenado. Tem-se $a \cdot b < 0$ se, e somente se, $a > 0$ e $b < 0$ ou $a < 0$ e $b > 0$.

Demonstração: 1ª parte: Se $a \cdot b < 0$, então $a < 0$ e $b > 0$ ou $a > 0$ e $b < 0$. Considerando $a \cdot b < 0$, então $-(a \cdot b) \in P$. Logo, $(-1)(a \cdot b) \in P$, ou seja, $(-1)(a) \cdot b \in P \Rightarrow -a \cdot b \in P \Rightarrow -a \in P$ e $b \in P$, dessa forma, $a < 0$ e $b > 0$. Ou $(-1)(a \cdot b) \in P$, ou seja, $(-1)(a) \cdot b \in P$. Usando a propriedade comutativa, $(a) \cdot (-1) \cdot b \in P \Rightarrow a \cdot (-b) \in P \Rightarrow a \in P$ e $-b \in P$, dessa forma, $a > 0$ e $b < 0$.

2ª parte: Se $a < 0$ e $b > 0$ e $a > 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b < 0$. Partindo de $a < 0$ e $b > 0$, tem-se $-a \in P$ e $b \in P$, dessa forma $-a \cdot b \in P, \Rightarrow -(a \cdot b) \in P$, logo $a \cdot b < 0$. De maneira análoga, considere $a > 0$ e $b < 0$, logo $a \in P$ e $-b \in P$, então $a \cdot (-b) \in P \Rightarrow a \cdot (-1) \cdot b \in P, \Rightarrow -(a \cdot b) \in P$, logo $a \cdot b < 0$.

Teorema (13): Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

Demonstrando: Se $a > b$, então $a - b > 0$ e, se $c > d$, então $c - d > 0$, ou seja, $(a - b) \in P$ e $(c - d) \in P$. De forma que $(a - b) + (c - d) \in P \Rightarrow (a + c) - (b + d) \in P \Rightarrow a + c > b + d$.

Um erro muito frequente, cometido ao resolver inequação do tipo $\frac{2}{x-1} < -1$ por exemplo, é escrever de uma forma direta a sentença, multiplicando membro a membro por $(x-1)$. Dessa forma, tem-se $2 < (-1)(x-1)$ para $x \neq 1$. A observação que se faz é que o erro vem do fato de não saber o sinal de $x - 1$.

Quando se resolve uma inequação, todas as etapas podem e devem ser justificadas pelos axiomas do corpo, pelos axiomas de ordem e pelas propriedades decorrentes destes axiomas.

Para ilustrar, pode-se acompanhar com detalhe a resolução da inequação citada acima: $\frac{2}{x-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < -1 + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-1)^{-1} < 0 \Leftrightarrow (x+1) > 0$ e $(x-1)^{-1} < 0$ ou $(x+1) < 0$ e $(x-1)^{-1} > 0$. Um

detalhe a ser considerado é que $(x - 1)^{-1} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0$ de outra forma, $(x - 1)^{-1} < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0$. Conseqüentemente, analisando os sinais de $x + 1$ e $x - 1$, conclui-se que $x > -1$ e $x < 1$, ou seja, $-1 < x < 1$.

Pode-se encaminhar a solução da inequação acima, multiplicando membro a membro por $x - 1$, desde que seja considerado o sinal de $x - 1$.

3.3.5. Módulo de um elemento de um corpo ordenado K

Seguindo a definição da coleção “Tudo é Matemática”, livro do 7º ano do ensino fundamental (DANTE, 2009, p. 26), módulo, ou valor absoluto de um número inteiro, é a distância do ponto que representa esse número até a origem, atribuindo a esse conceito, a visão geométrica do que é módulo. Definições equivalentes a essa, são encontradas em diversos livros didáticos do ensino fundamental.

No ensino desse tópico no curso de Análise Real na licenciatura em matemática, módulo, ou valor absoluto, pode ser definido sobre qualquer corpo K ordenado, de acordo com a propriedade tricotomia, a qual garante que, se $a \neq 0$, então um dos números, a ou $-a$, é estritamente positivo. Define-se o valor absoluto de $a \neq 0$, como o elemento positivo do conjunto $\{a, -a\}$.

Por definição, o valor absoluto de 0 é 0. Se $a \in K$, é definido o valor absoluto de a , o qual pode ser simbolicamente representado por $|a|$, como: $|a| = a$ se $a \geq 0$ e $|a| = -a$ se $a < 0$. Este fato pode ser usado como definição que $|a| = \max\{a, -a\}$, significando que o módulo, ou valor absoluto de “ a ”, é o máximo do conjunto cujos elementos são a e $-a$.

Na linguagem de função, o domínio da função valor absoluto é todo conjunto K, e seu conjunto imagem é $P \cup \{0\}$. Em especial, a função valor absoluto leva os elementos x e $-x$ no mesmo elemento do contradomínio.

$$f: Q \rightarrow Q, \text{ tal que } f(x) = |x|, \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Pode-se concluir que dois elementos simétricos têm o mesmo módulo.

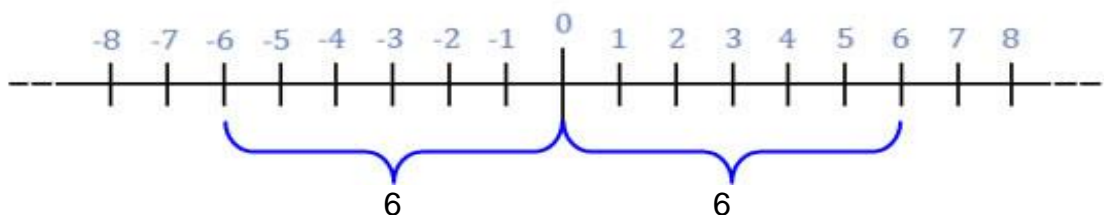


Figura XIII: elementos simétricos

Destacam-se algumas propriedades as quais serão citadas e demonstradas nesta pesquisa, a fim de se pensar nas noções analíticas para certas situações em matemática, associada ao ensino fundamental e médio.

(1ª) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$. De fato, pois, se $a = 0$, por definição $|0| = 0$ e se $a \neq 0$, então, também $-a \neq 0$, de modo que $|a| \neq 0$.

(2ª) $|ab| = |a| \cdot |b|$ qualquer que seja a, b , números do corpo K . Para esta demonstração, se $a > 0$ e $b > 0$, então, $ab > 0$, de tal forma que $|ab| = ab = |a||b|$. De outra forma, se $a > 0$ e $b < 0$ então, $ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab)$, como $|a| = a$ e $|b| = -b$, logo $|a| \cdot |b| = -ab$, desta forma $|ab| = |a| \cdot |b|$ de maneira análoga para $a < 0$ e $b > 0$.

(3ª) $|-a| = |a|$, para todo a pertencente a K . Para $a = 0$, tem-se que $|0| = 0$; para $a > 0$, tem-se $|a| = a = |-a|$. Se $a < 0$, então $|a| = -a = |-a|$.

(4ª) Se $c \geq 0$, então $|a| \leq c$ se, e somente se, $-c \leq a \leq c$. Para esta demonstração infere-se que $-c \leq a$, de modo que $-c \leq a \leq c$. Reciprocamente, se essa relação se verifica então $a \leq c$ e $-a \leq c$, concluindo que $|a| \leq c$.

Um resultado importante deste estudo, refere-se à desigualdade triangular: Se a e b são elementos de um corpo K ordenado, qualquer, então $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.⁶

Essas questões matemáticas frequentemente aparecem nas atividades principalmente de cálculo. Pensando em demonstrar esse teorema, parte-se de $-|a| \leq a \leq |a|$ e $-|b| \leq \pm b \leq |b|$, dessa forma, infere-se que, $-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a \pm b| \leq |a| + |b|$, provando dessa forma, a segunda parte dessa desigualdade. Como $|a| = |(a - b) + b|$, e como foi demonstrado para a segunda parte da desigualdade, tem-se $|(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, da mesma forma $|a| - |b| \leq |a - b|$. Combinando essas duas desigualdades, pode-se deduzir que $||a| - |b|| \leq |a - b|$, que é a primeira parte da desigualdade, com o sinal menos. Para se obter a desigualdade com sinal mais, basta substituir b por $-b$.

Corolário 4: Se $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são elementos de um corpo K ordenado, então $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$.

⁶ A desigualdade comumente referida como desigualdade triangular é $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração: Para $n = 2$, a conclusão é precisamente a desigualdade triangular. Se $n > 2$, utiliza-se a indução matemática⁷, ou seja, $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + a_{k+1}| \leq |(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k)| + |a_{k+1}|$

Seja ϵ um elemento positivo e a e x elementos quaisquer, todos de um corpo ordenado K . As seguintes sentenças são equivalentes:

- i) $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$
- ii) $a - \epsilon < x < a + \epsilon$
- iii) $|x - a| < \epsilon$

Outra configuração para estas sentenças permite escrevê-las como: $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Leftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \epsilon$.

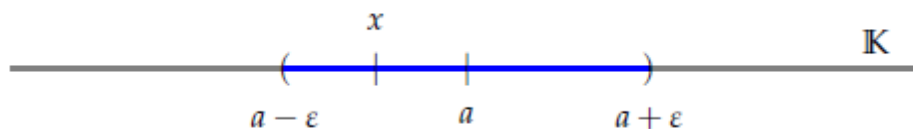


Figura XIV: x pertencente ao intervalo $|a - \epsilon|$

As configurações geométricas não devem intervir nas demonstrações, mas constituem um auxílio valiosíssimo para o entendimento de conceitos e de teoremas em Análise (LIMA, 2009, p. 73). Mostrando a veracidade das sentenças acima, tem-se: (i) \Rightarrow (ii) Segue da própria definição de intervalo. (ii) \Rightarrow (iii) Se $a - \epsilon < x < a + \epsilon$, então, somando $-a$ em todos os membros, temos $(-a) + a - \epsilon < x + (-a) < (-a) + a + \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x - a < \epsilon \Rightarrow |x - a| < \epsilon$. (iii) \Rightarrow (i) Utilizando a 4ª propriedade de módulo, tem-se $|x - a| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x - a < \epsilon$, somando a em todos os membros, temos $a - \epsilon < x < a + \epsilon$, o que significa dizer que $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

3.4. Conjuntos limitados – do supremo ao ínfimo

Neste tópico serão conhecidos elementos máximos e mínimos envolvidos em corpos ordenados, identificando supremos e ínfimos. É um tópico com relações restritas no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, mas contribui para

⁷A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação dos casos particulares. É utilizada em diversas ciências, inclusive na matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na matemática, no intuito demonstrar teoremas de certos tipos de problemas. Segundo Polya (1995, p.91), é de se lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. A indução procura encontrar a coerência nos fatos observados. Seus mais notáveis instrumentos são a generalização, a particularização e a analogia.

uma aproximação e identificação de elementos importantes na construção dos números reais.

3.4.1. Identificando supremo e ínfimo

Na noção de intervalos, pode-se definir intervalos limitados. O intervalo (a, b) , sendo a e b elementos de um corpo ordenado K , com $a < b$ é limitado inferiormente, pois todos os valores x , pertencentes a esse intervalo, são maiores que a e, limitado superiormente, sendo todos os valores x desse intervalo menores que b .

Seja um corpo ordenado K . Um subconjunto X de K é limitado superiormente, se existir b pertencente a K , tal que $b \geq x$, qualquer que seja $x \in X$. Pode-se traduzir esse conceito, dizendo que $X \subset]-\infty, b]$. Cada b pertencente a K , com essa propriedade chama-se cota superior de X . Um exemplo é o intervalo $(4, 8)$, no qual 8 é considerado uma cota superior desse intervalo. Em alguns textos de Análise Real, a cota superior recebe o nome de majorante.

Se um conjunto tem uma cota superior então admite uma infinidade delas, pois, se b é uma cota superior de X , então $b + n$ também é, qualquer que seja n pertencente aos naturais. A destacar, no intervalo $(4, 8)$, citado anteriormente, 9 é uma cota superior do intervalo.

De maneira análoga, $X \subset K$ diz limitado inferiormente, quando existir a pertencente a K , tal que, para todo x pertencente a X , tem-se $a \leq x$. Um elemento a que goza dessa propriedade é denominado cota inferior ou minorante de X . Pode-se considerar que $X \subset [a, +\infty[$.

Um conjunto que tem cota inferior a admite uma infinidade delas, ou seja, se a é cota inferior de X , então $a - n$ também o é, qualquer que seja n , pertencente ao conjunto dos números naturais. Voltando ao intervalo $(4, 8)$, 4 é uma cota inferior do intervalo, mas 3 também é uma cota inferior desse mesmo intervalo.

No corpo dos números racionais, o conjunto dos números naturais é limitado inferiormente, pois $\mathbb{N} \subset [0, +\infty[$, mas não é limitado superiormente. Para mostrar que \mathbb{N} não é limitado superiormente em \mathbb{Q} , dado qualquer $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, o objetivo é encontrar um n pertencente ao conjunto dos números naturais, tal que, $n > \frac{a}{b}$. Se

$\frac{a}{b} \leq 0$, basta considerar $n = 1$; se $\frac{a}{b} > 0$, não há perda de generalidade em admitir a e b naturais. Neste caso, considerando $n = a + 1$, tem-se:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b} \leq a+1 = n$$

O fato de \mathbb{N} não ser limitado superiormente em \mathbb{Q} , constitui uma propriedade intrínseca no corpo dos racionais.

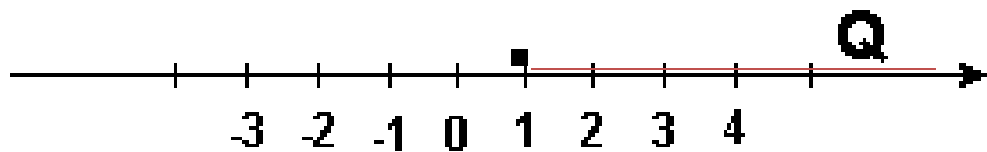


Figura XV: \mathbb{N} contido em \mathbb{Q}

Um subconjunto X , de um corpo ordenado K , chama-se limitado, quando é limitado superiormente e inferiormente, ou seja, quando existem a e b , pertencentes a K , tais que $X \subset [a, b]$.

3.4.2. Princípio Arquimediano

Arquimedes de Siracusa nasceu no ano de 287 a.C. e veio a falecer no ano de 212 a.C. É considerado consensualmente o maior matemático da Antiguidade, superando todos os outros, pela quantidade de dificuldades dos problemas que trabalhou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações (BOYER, 1992,p.28). Interessava pela matemática pura e aplicada e foi o fundador de dois ramos da física (estática e hidrodinâmica).

Em seu trabalho sobre áreas e volumes, desenvolveu também o método de exaustão, pelo qual aproximava-se quantidades desejadas pelas somas parciais de séries ou pelos termos de uma sequência.

Princípio Arquimediano: Dados os elementos $x, y \in K$, se $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x > y$. Nota-se que num corpo ordenado, o Princípio Arquimediano é equivalente as afirmações que se segue.

- (i) $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;
- (ii) Dado a e $b \in K$, com $a > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;
- (iii) Dado qualquer $\epsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$.

A demonstração destas equivalências transcorrerá de $(i) \Rightarrow (ii)$ inicialmente, na sequência de $(ii) \Rightarrow (iii)$ e por fim $(iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Como \mathbb{N} é ilimitado superiormente, qualquer que seja $a > 0$, pertencente a K e b pertencentes a K , existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$ (ver pág. 70) e, portanto, $b < a \cdot n$. Partindo para demonstrar $(ii) \Rightarrow (iii)$. Dado $\epsilon > 0$ existe, em relação à (ii) , um $n \in \mathbb{N}$, tal que $\epsilon \cdot n > 1$; então, $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$. Finalmente, a demonstração de $(iii) \Rightarrow (i)$. Dado qualquer $x > 0$, existe, em relação à (iii) , um $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$, ou seja, $n > x$. Pode-se dizer, dessa forma, que nenhum elemento maior que zero, em K , pode ser cota superior de \mathbb{N} . Evidentemente um elemento menor ou igual a zero também não pode. Logo \mathbb{N} é ilimitado superiormente.

Um corpo ordenado K será dito Arquimediano, se nele for válido o Princípio Arquimediano ou equivalentemente às afirmações (i), (ii), (iii) acima. Nota-se que o corpo \mathbb{Q} dos racionais é Arquimediano.

3.5. Supremo e ínfimo, algumas considerações

Para uma melhor compreensão do que é supremo e ínfimo, empreende-se neste tópico, uma breve explanação destes assuntos, buscando entender quando um conjunto tem ou não um maior elemento e quando tem ou não um menor elemento.

3.5.1 Supremo, a menor das cotas superiores

Destaca-se que um conjunto limitado superiormente pode admitir uma menor cota superior, a qual recebe o nome de supremo. Um conjunto X cotado superiormente, uma cota superior b , se diz supremo de X , se é menor do que qualquer cota superior de X .

Em outras palavras, um número b pertencente a um corpo ordenado K diz supremo de um subconjunto X de K se satisfaz duas condições:

1ª) $x \leq b$, qualquer que seja x pertencente a X

Pela primeira condição, b é uma cota superior de X , ou seja, $X \subset]-\infty, b]$.

2ª) Se v é um elemento de K , tal que $x \leq v$, para todo $x \in X$, então $b \leq v$.

Nota-se que b é menor que qualquer outra cota superior de X .

O supremo de um subconjunto X de um corpo ordenado K é único, pois se m e n são supremos de X , então ambos são cotas superiores de X . Como m é o supremo de X e n cota superior de X , então $m \leq n$. De forma análoga, se n é o supremo de X e m a cota superior de X , então $n \leq m$. De acordo com as propriedades de corpos ordenados descritas nesta pesquisa (ver pág. 60), se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.

3.5.2. Ínfimo, a maior das cotas inferiores

Um conjunto limitado inferiormente pode admitir ínfimo que é a maior de suas cotas inferiores. Dado um corpo ordenado K , se um subconjunto X de K , cotado inferiormente, tem uma cota inferior a que é a maior delas, então a recebe o nome de ínfimo.

Um elemento a , pertencente a K , se diz ínfimo de um subconjunto X de K , se satisfaz a duas condições:

- 1ª) $x \geq a$, qualquer que seja x pertencente a X . Essa condição garante que a é cota inferior de X , ou seja, $X \subset [a, +\infty[$;
- 2ª) Se u é um elemento de K , tal que $x \geq u$, então $a \geq u$. Essa segunda condição diz que a é maior do que qualquer cota inferior de X .

Se um subconjunto X , de um corpo ordenado K , admite ínfimo, esse é único. De fato, se p e q são ínfimos de um subconjunto X de K , sendo p e q elementos de K , então, se p é o ínfimo de X , sendo q a cota inferior de X , logo $p \geq q$. De maneira análoga, se q é o ínfimo de X , e p a cota inferior de X , então $q \geq p$, portanto $p = q$.

3.5.3. Relações envolvendo supremo e ínfimo

Existindo supremo e ínfimo de um determinado subconjunto X , de um corpo K ordenado, serão usadas as denotações $Sup X$, para o supremo de X , e $Inf X$, para o ínfimo de X .

Pode ser conveniente atribuir outra caracterização para o supremo de um subconjunto de um corpo K ordenado. Um elemento b , de K , é o supremo de um subconjunto X de K , não vazio, se, e somente se, goza das seguintes propriedades:

- (a) Não há elemento $x \in X$, tal que $b < x$;
- (b) Se $v < b$, então existe um elemento $x_v \in X$ tal que $x_v > v$.

A demonstração dessas propriedades reside no fato de que só existe um único supremo para $X \subset K$. Seguindo a demonstração, suponha-se que b satisfaça as propriedades (a) e (b). A condição (a) implica que b é cota superior de X . Se v é tal que $v < b$, então a propriedade (b) mostra que v não pode ser cota superior de X , logo b é a menor das cotas superiores de X , ou seja, é o supremo ($\text{Sup } X = b$). Reciprocamente, seja b o supremo de X . Como b é cota superior de X , vale a propriedade (a). Se $v < b$, então v não é cota superior de X , portanto vai existir um elemento $x_v \in X$, tal que $v < x_v$.

Analisando os exemplos que se segue, considere dois conjuntos, os quais serão denotados por A_1 e A_2 , ambos contidos em um corpo K ordenado. Sendo $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ e $A_2 = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$. Nota-se que o conjunto A_1 tem cota superior que é o 1, porém qualquer $b \geq 1$ também é cota superior de A_1 . Verifica-se que 1 é a menor das cotas superiores de A_1 , portanto é o seu supremo.

O conjunto A_2 tem as mesmas cotas superiores de A_1 . Nota-se que 1 é a menor cota superior de A_2 , ou seja, é o supremo de A_2 . Observe que o supremo de A_2 pertence ao conjunto A_2 , já o supremo de A_1 não pertence ao conjunto A_1 . Essa observação garante que, quando um conjunto contém supremo, não está se fazendo nenhuma afirmação sobre o supremo ser ou não elemento desse conjunto.

Outra observação importante é sobre o conjunto vazio, ou seja, se $X = \emptyset$, então todo $b \in K$ é cota superior de X . Como não existe o menor elemento num corpo K ordenado, segue-se que o conjunto vazio não possui supremo, o mesmo aplica-se ao ínfimo.

Um elemento a , de K , é o ínfimo de um subconjunto X de K , não vazio, se, e somente, são válidas as seguintes propriedades:

- (c) Não há elemento $x \in X$, tal que $x < a$;
- (d) Se $v > a$, então existe um elemento $x_v \in X$ tal que $x_v < v$.

Demonstrando: suponha-se que a satisfaça as propriedades (a) e (b). A condição (a) implica que a é cota inferior de X . Se v é tal que $v > a$, então a propriedade (b) mostra que v não pode ser cota inferior de X , logo a é a maior das cotas inferiores de X , ou seja, é o ínfimo de X ($\text{Inf } X = a$). Reciprocamente, seja a o ínfimo de X . Como a é cota inferior de X , vale a propriedade (a). Se $v > a$, então v não é cota inferior de X , portanto vai existir um elemento $x_v \in X$, tal que $v > x_v$.

Voltando aos conjuntos $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ e $A_2 = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$, subconjuntos de um corpo ordenado K , percebe-se que 0 é o ínfimo dos dois conjuntos, e, de forma análoga ao supremo, o ínfimo não necessariamente tem que ser elemento do conjunto.

Pode-se generalizar o fato da existência de supremo e ínfimo que sejam elementos de um mesmo conjunto, da seguinte forma: Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, então este é o supremo, se X possuir um elemento mínimo, este será o ínfimo. Reciprocamente, se $Sup X$ pertencer ao conjunto X , então é o maior elemento de X e, se $Inf X$ pertencer a X , esse será o menor elemento de X . No caso do conjunto $A_2 = \{x \in K; 0 \leq x \leq 1\}$, 1 é o maior elemento do conjunto e 0 é o menor elemento desse mesmo conjunto. Já o conjunto $A_1 = \{x \in K; 0 < x < 1\}$ apesar de ser cotado, superiormente e inferiormente, não tem o menor e nem o maior elemento.

Outro exemplo a ser observado, considere o conjunto $Y \subset \mathbb{Q}$ das frações do tipo $\frac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $Y = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\}$. Afirma-se que $Inf Y = 0$ e $Sup Y = \frac{1}{2}$.

Demonstrando, em primeiro lugar, tem-se que $\frac{1}{2} \in Y$ e, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$, para todo $n > 1$. Logo, $\frac{1}{2}$ é o maior elemento de Y , ou é cota superior de Y , por conseguinte, é a menor delas, $\frac{1}{2} = Sup Y$.

Por outro lado, $0 < \frac{1}{2^n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, de fato, 0 é cota inferior de Y . Falta apenas provar que nenhum número racional $m > 0$ é cota inferior de Y . Para esta demonstração, sendo \mathbb{Q} um corpo ordenado, Arquimediano, dado $m > 0$, pode-se obter $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > \frac{1}{m} - 1$, significando que $1 + n > \frac{1}{m}$. Para continuidade desta demonstração, será introduzida a desigualdade conhecida como desigualdade Bernoulli⁸.

⁸Desigualdade de Bernoulli: Essa desigualdade garante que em todo corpo ordenado K , se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale $(1+x)^n \geq 1+nx$. A demonstração dessa desigualdade é feita por indução em n . Para $n = 1$, verifica-se que $(1+x)^1 \geq 1+1x \Rightarrow 1+x = 1+x$. Para $n = k$, tem-se $(1+x)^k \geq 1+kx$. Para $n = k+1 \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. De fato, dado $n = k \Rightarrow (1+x)^k \geq 1+kx$, multiplicando membro a membro por $(1+x)$, tem-se que $(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x)$, isto significa que $(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 \Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2 \geq 1+x+kx = 1+(1+x)k$, provando dessa forma que essa desigualdade é válida.

Ora, pela desigualdade de Bernoulli, tem-se que $2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n > \frac{1}{m}$, ou seja, $\frac{1}{2^n} < m$. Logo, nenhum $m > 0$ é cota inferior de Y , e, portanto, $\text{Inf } Y = 0$, e esse elemento não pertence ao conjunto Y . Logo, não existe o menor elemento deste conjunto.

Conceitos matemáticos como supremo e ínfimo, não são citados no ensino fundamental e no ensino médio, pode-se dizer que esses elementos estão presentes nas atividades que envolvem intervalos, portanto a observação se um conjunto possui maior elemento ou não, pode e deve ser trabalhada no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, deixando os questionamentos e as validades destes, relacionados à percepção e vivência do educando.

3.5.4. Este conjunto não tem supremo?

A pergunta que fica é se todo conjunto limitado à direita ou à esquerda tem supremo ou tem ínfimo. Para responder a essa questão, observe o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$. Esse conjunto admite supremo no corpo ordenado dos números racionais?

Pensar no conjunto acima é o mesmo que pensar $A \subset (-2,2)$, no qual os elementos de extremos são elementos do corpo ordenado \mathbb{Q} . Baseado nessa informação, mais uma vez discuti-se a existência do supremo de tal conjunto e conseqüentemente do ínfimo.

Pode-se dizer que tal conjunto acima tem supremo? Então inicia-se uma discussão, em relação à existência de tal número, e, principalmente, que número é este.

Com a proposta de demonstrar se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ tem ou não supremo, suponha-se a existência de tal elemento, o qual será denotado por a , logo, $a = \text{Sup } A$.

Essa demonstração será elencada provando as afirmações que segue:

- 1ª) mostrar que a^2 não é o menor que dois ou seja, $a^2 \geq 2$;
- 2ª) mostrar que a^2 não é maior que dois, ou seja, $a^2 \leq 2$;

Demonstração da primeira afirmação: Se n é natural ($n \geq 1$), logo $\frac{1}{n} \leq 1$. Percebe-se que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, mas como n é arbitrariamente grande, considere ($n > 1$) e conseqüentemente $\frac{1}{n} < 1$ e $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$.

Desenvolvendo o produto notável $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2$, tem-se $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right)$, tem-se que $a^2 + 2a \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right) < a^2 + 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n}$. Fazendo $a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2$, o objetivo é encontrar um n , que satisfaça tal condição.

Existindo este n , prossegue-se a demonstração. Como $a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2 \Leftrightarrow 2a + 1 < n(2 - a^2) \Leftrightarrow n > \frac{2a+1}{2-a^2}$ pelo princípio Arquimediano (ver pág. 71). Para todo n que satisfaça a condição $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$, tem-se $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-a^2}{2a+1}$, então $\frac{1}{n} < \frac{2-a^2}{2a+1} \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot (2a+1) < 2 - a^2 \Rightarrow \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2$. Se $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2 - a^2 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2$. Somando a^2 , membro a membro, tem-se $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2 + a^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, dessa forma, verifica-se que a^2 não pode ser menor que dois, pois a é o supremo do conjunto A , significando que não pode existir outro elemento maior que ele, pertencente ao mesmo conjunto, cujo quadrado é menor que dois.

Como já foi apresentado nesta pesquisa (ver pág. 75), se o supremo pertence ao conjunto, então ele é o máximo do conjunto, logo é $a^2 \geq 2$.

Demonstração da segunda afirmação: Com n natural arbitrariamente grande, tem-se $n > 1$ logo $\frac{1}{n} < 1$. Sabendo-se que $\left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ e $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n}$. Fazendo-se $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} > 2$, o objetivo é encontrar um n que satisfaça tal condição $a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} > 2 \Leftrightarrow -2a \cdot \frac{1}{n} > 2 - a^2 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} < a^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{a^2-2}{2a}$.

Pelo Princípio Arquimediano, tem-se $0 < \frac{1}{n} < \frac{a^2-2}{2a}$, logo existe um n , tal que $n > \frac{2a}{a^2-2}$. Desenvolvendo a inequação, tem-se $\frac{2a}{n} < a^2 - 2 \Leftrightarrow \frac{2a}{n} + 2 < a^2 \Leftrightarrow 2 < a^2 - \frac{2a}{n} < a^2 - 2a \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(a - \frac{1}{n}\right)^2$. Dessa forma, podemos obter $\left(a - \frac{1}{n}\right) < a$, sendo $\left(a - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$. De fato, a^2 não pode ser maior que dois, pois $a = \sup A$, e, como foi demonstrado, existe um valor menor que a , cujo quadrado é maior que dois, então $a^2 \leq 2$.

Se a^2 não pode ser menor que dois e não pode ser maior que dois, então a^2 tem que ser igual a dois. Mas existe algum número racional cujo quadrado é dois?

A resposta para pergunta acima é direta: não. Porém deve ser provada. Se existir tal número, então será uma fração da forma $\frac{m}{n}$, sendo m e n números primos entre si.

Considere $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ sendo a fração $\frac{m}{n}$ irredutível com m e n inteiros e diferentes de zero. Logo $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$ e, por conseguinte $m^2 = 2n^2$. Essa última igualdade diz que m^2 é, conseqüentemente, m deve ser par, ou seja, $m = 2p$, sendo p um inteiro qualquer. Substituindo m por $2p$ na relação $m^2 = 2n^2$, tem-se como resultado $(2p)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4p^2 = 2n^2$ ou $2p^2 = n^2$, que exige outrossim que n seja par. Este resultado contradiz a hipótese inicial de que $\frac{m}{n}$ seja fração irredutível.

Nenhum número racional, elevado ao quadrado, é igual a 2, concluindo que em \mathbb{Q} , o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ não tem supremo.

De acordo com as demonstrações anteriores, se existir um corpo ordenado no qual todo conjunto não vazio, limitado superiormente⁹, possua supremo, nesse tal corpo existirá um elemento $a > 0$, cujo quadrado é dois.

3.6. Conjunto dos números reais

Com a intenção de identificar um conjunto, no qual são determinados os números racionais e os números não-rationais, discute-se, neste tópico, corpos ordenados completos e a identificação de números reais, aproximando, tanto o professor do ensino fundamental e do ensino médio, quanto ao licenciando em matemática, do formalismo conceitual desses números e, ao mesmo tempo, contribuindo para uma melhor identificação desses elementos na prática docente em salas de aulas de matemática.

⁹Outro exemplo de conjunto limitado superiormente num corpo ordenado K , não Arquimediano que não possui supremo é o conjunto dos números naturais. O conjunto dos números naturais \mathbb{N} , contido em K , é limitado superiormente. Se b pertence a K , então b é uma cota superior para \mathbb{N} , logo $n + 1 \leq b$, para todo n pertencente a \mathbb{N} . Da desigualdade acima, segue-se que $n \leq b - 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, se $b \in K$, for uma cota superior de \mathbb{N} , então $b - 1$ também o será. Como $b - 1 < b$, segue-se que num corpo ordenado não Arquimediano K , o conjunto dos números naturais é limitado superiormente, mas não possui $\sup \mathbb{N}$ em K .

3.6.1. Corpo ordenado completo

Um corpo ordenado K é dito completo, se todo subconjunto não vazio $X \subset K$, limitado superiormente, possui supremo em K , da mesma forma, se um subconjunto $Y \subset K$ for limitado inferiormente, tem que possuir ínfimo. Pode-se concluir que todo corpo ordenado completo é Arquimediano.

Dado Y , e seja $X = -Y$, ou seja, $X = \{-y; y \in Y\}$, logo X é não vazio e limitado superiormente, logo existe $a = \sup X$. De forma análoga, facilmente observa-se que $-a = \inf Y$.

3.6.2. O corpo ordenado completo dos números reais

A partir deste momento, definem-se os Números Reais como corpo ordenado completo e, evidentemente, todas as propriedades de corpos ordenados completos serão válidas para \mathbb{R} .

Na abordagem atual das licenciaturas, os números reais são definidos axiomáticamente e, uma vez assim estabelecidos, prova-se que existem reais que não são racionais (MOREIRA & DAVID, 2005, p.82)

O número real positivo a , em que $a^2 = 2$ é um número real. Simboliza-se esse número por $\sqrt{2}$. Pode-se pensar na existência de mais algum número real positivo que, elevado ao quadrado, dê 2? A resposta para questão acima é não, pois se existirem dois números reais, a e b , ambos positivos, cujo quadrado seja dois, então $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow 0 = a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. No caso anterior, se $(a - b) \cdot (a + b) = 0$, logo um dos fatores seriam iguais a zero, então $a - b = 0$ ou $a + b = 0$. No primeiro caso, $a = b$, e, no segundo caso, $a = -b$, porém no segundo caso há uma contradição, pois a e b são ambos positivos, logo $a = -b$ não pode acontecer.

De acordo com o primeiro caso, $a = b$, ou seja, só existe um número positivo cujo quadrado é 2. Já se sabe que esse número $\sqrt{2}$, não é racional, porém é real. Logo, aos elementos de \mathbb{R} que não são elementos de \mathbb{Q} , serão denominados de números irracionais. O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é o conjunto dos números irracionais.

Os irracionais são números reais porque são supremos de subconjuntos de \mathbb{R} não vazios e limitados superiormente de um corpo ordenado completo, porém outra forma de definição é que a partir de resultados de sequências numéricas, e de séries numéricas, prova-se que todo número real admite uma representação decimal

infinita e, no caso dos irracionais, uma representação infinita não-periódica (Ver pág. 79).

Moreira e David (2005) entendem essa forma de definir os números reais como uma espécie de legitimidade formal para se adotar nos textos escolares a apresentação usual dos números irracionais e dos números reais.

Os autores continuam afirmando:

(...) uma vez garantido o fato de que não há nada matematicamente incorreto em se apresentar os irracionais como números que não são frações ou como decimais infinitos e não-periódicos, a questão pedagógica referente à introdução dos reais para os alunos cujo universo numérico é o recém-construído conjunto dos racionais fica simplesmente esquecida (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 82).

Dando continuidade, serão descritos aspectos dos números reais, identificando elementos que estão presentes nos textos do ensino fundamental e do ensino médio.

3.6.3. Os números irracionais, algumas concepções

Os números irracionais estão ligados ao conceito mais difundido de medidas que trata da incomensurabilidade, a qual será descrita nesta pesquisa, como fonte de apoio para a compreensão do questionamento surgido e respondido: “quem é o supremo do conjunto $A = \{x \in Q; x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$?”.

A priori, uma análise feita nos livros didáticos do ensino fundamental, mostra que os números irracionais são definidos como números que não podem ser representados por uma divisão entre dois números inteiros, ou números que têm uma representação infinita e não-periódica.

“Sim, existem números cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Por exemplo, 0,101001000100001000000.... e 2,71727374.... são representações decimais infinitas não-periódicas. Não há um mesmo padrão que se repete após a vírgula” (DANTE, 2009, p. 30).

No trecho acima, retirado de uma coleção de livros do ensino fundamental (8º ano), o autor faz uma referência a números que não são racionais, por sua representação decimal, e afirma que esses números são irracionais, denotando o conjunto de todos esses números pela letra (I).

Outra coleção também usada no ensino fundamental, no mesmo ano escolar (8º ano), apresenta os números irracionais, através do uso de potências e de aproximações para raízes quadradas não exatas, aplicando inicialmente o Teorema de Pitágoras.

“Vamos então determinar a raiz quadrada do número 2 e, assim, encontrar a medida da hipotenusa” (GIOVANNI & CASTRUCCI, 2009, p.22).

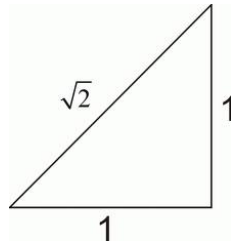


Figura XVI: Triângulo retângulo

Buscando as aproximações, verifica-se que raiz quadrada de 2 está entre dois números quadrados perfeitos, 1 e 4, como o quadrado de 1 = 1 e o quadrado de 2 é igual a 4, o valor de $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2. E, a partir daí, várias tentativas são feitas na busca de descobrir qual valor mais próximo desta raiz quadrada.

$$(1,1)^2 = 1,21 < 2$$

$$(1,2)^2 = 1,44 < 2$$

$$(1,3)^2 = 1,69 < 2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < 2$$

$$(1,5)^2 = 2,25 > 2$$

Com essa distribuição, percebe-se que o valor da $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5. Continuando o cálculo, tem-se:

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2$$

$$(1,42)^2 = 2,0164 > 2$$

Então $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42 e, prosseguindo os cálculos, tem-se:

$$(1,411)^2 = 1,990921 < 2$$

$$(1,412)^2 = 1,993744 < 2$$

$$(1,413)^2 = 1,996569 < 2$$

$$(1,414)^2 = 1,999396 < 2$$

$$(1,415)^2 = 2,002225 > 2$$

Desse modo, verifica-se que $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415. Prosseguindo os cálculos, encontra-se uma aproximação para $\sqrt{2}$ que seria 1,414213562.... Nota-se que essa representação é infinita, mas não-periódica (GIOVANNI & CASTRUCCI, 2009, p.22).

Para Giovanni e Castrucci (2009), os números que apresentam a característica de ser infinito e não-periódico são chamados de números irracionais.

Esses mesmos autores concluem que número irracional é todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não-periódica.

Giovanni e Castrucci (2009) continuam afirmando:

Um número irracional nunca pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiro. Nem todo número que representa raiz quadrada de outro número é um número irracional, ou seja: 1) As raízes quadradas de números quadrados perfeitos são números racionais. 2) Entre dois naturais quadrados perfeitos existem números racionais cujas raízes quadradas são números racionais (GIOVANNI & CASTRUCCI, 2009, p. 24).

3.6.4. Grandezas incomensuráveis

Em termos históricos, a primeira evidência da necessidade de números irracionais ocorre com a ideia da incomensurabilidade. Os números conhecidos hoje como irracionais não existiam na matemática grega. Aristóteles associava a irracionalidade da raiz quadrada de 2 à tentativa de escrever tal número como a razão de dois inteiros primos entre si¹⁰ (fração irredutível), ou seja, a demonstração de que não existe um número racional que elevado ao quadrado dê como resultado, o número dois (ÁVILA, 2006).

Raiz quadrada de dois parece ser o primeiro irracional a ser descoberto. Essa possibilidade pode ser também associada à descoberta das grandezas incomensuráveis, que estão interligadas às medições de segmentos.

Ao se comparar as magnitudes de dois segmentos de reta, aos quais serão denotados por “a” e “b”, existe a possibilidade de que o segmento “a” esteja contido no segmento “b” em uma quantidade “r” inteira e exata de vezes. Dessa forma, a medida do segmento “b” poderá ser expressa em termos da medida do segmento “a”, afirmando que “b” é “r” vezes “a”. Mas o segmento “b” pode não resultar em um múltiplo inteiro do segmento “a”, então, pode-se dividir “a” por exemplo, n segmentos iguais, sendo cada comprimento $\frac{a}{n}$, de tal forma que algum múltiplo m inteiro de segmento $\frac{a}{n}$ seja igual a b (COURANT & ROBBINS, 2000, P.67). Tal consideração é ilustrada abaixo:

$$b = \frac{m}{n} a$$

¹⁰Dois números inteiros m e n, ambos diferentes de zero, são primos entre si, se admitirem apenas o número 1 como divisor positivo comum.

Quando uma igualdade da forma anterior é válida, pode-se dizer que os dois segmentos são comensuráveis, uma vez que eles têm medida comum, ou seja, o segmento $\frac{a}{n}$ está contido n vezes em “a” e m vezes em “b”.

No tempo de Pitágoras, aproximadamente no século VI a.C, pensava-se que, dados dois segmentos quaisquer (AB) e (CD), seria sempre possível encontrar um terceiro segmento (EF), contido em um número inteiro de vezes no primeiro segmento (AB) e um número inteiro de vezes no segundo segmento (CD), dizendo, assim, que esse terceiro segmento (EF) era um submúltiplo comum dos dois segmentos anteriores.

Um progresso sensível na operação de medir consistia na determinação de um submúltiplo comum à unidade previamente fixada e à grandeza a qual iria medir.

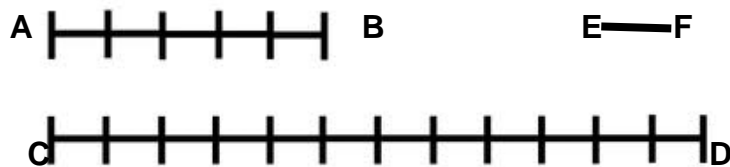


Figura XVII: Grandezas comensuráveis

A existência de tal submúltiplo garantiria a comensurabilidade das grandezas, ou seja, duas grandezas são comensuráveis quando existe uma unidade, por menor que seja, a qual cabe exatamente um número inteiro de vezes numa e noutra. Se duas grandezas, de mesma espécie, não admitem um submúltiplo comum, por menor que seja, então elas são denominadas de incomensuráveis.

Para uma discussão mais aprofundada, escolhe-se o segmento unitário $[0,1]$, então os segmentos comensuráveis com segmento unitário corresponderão a todos os pontos racionais $\frac{m}{n}$, com $n \neq 0$, sobre a reta numérica.

Um fato importante é dado pela seguinte proposição: “O conjunto dos pontos racionais é denso sobre a reta” (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 67). A afirmação anterior significa que, dentro de cada intervalo, por menor que se possa pensar, vão existir pontos racionais.

Precisamente, tome um denominador n , suficientemente grande, de modo, que o intervalo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ seja menor do que o intervalo $[a, b]$ considerado. Pelo menos

uma das frações $\frac{m}{n}$ deve ficar dentro do intervalo, por isso, não existe qualquer intervalo na reta que não contenha pontos racionais, por menor que seja este intervalo, além disso, deve haver infinitos pontos racionais em qualquer intervalo, pois, se houvesse um número finito de pontos, o intervalo entre dois pontos racionais adjacentes estaria, segundo Courant e Robbins (2000, p. 67), destruído de pontos racionais, o que, de acordo com o que foi apresentado, seria impossível.

Para as finalidades práticas de medidas, os números racionais são inteiramente suficientes (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 68). Essa consideração é válida também do ponto de vista teórico, uma vez que o conjunto de pontos racionais cobre a reta densamente. Parece que os pontos racionais cobrem toda reta numérica, mas isso não é verdade, pois, caso fosse, qualquer segmento seria comensurável com a unidade.

A revelação da existência de segmentos incomensuráveis, ou seja, da existência de número irracional, foi um acontecimento de grande importância, que possivelmente marcou a origem do que é considerada uma contribuição especificamente grega a procedimentos de rigor e de formalismo em matemática, afetando profundamente a matemática e a filosofia da época grega até os dias de hoje.

A construção geométrica simples que pode resultar em um segmento incomensurável com a unidade é feita usando o compasso¹¹

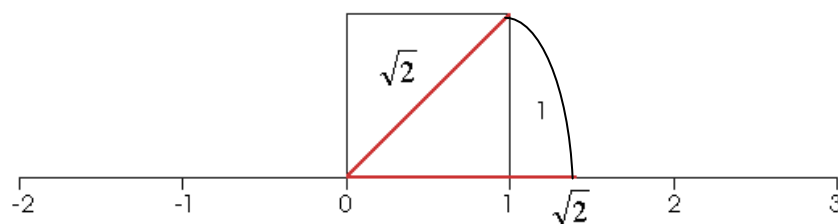


Figura XVIII: Número construtível

¹¹Primeiro se constrói um quadrado de lado 1. Utilizando um compasso, abra-o até que fique com comprimento da diagonal. Com essa abertura, coloca-se a ponta seca do compasso no zero e, com a outra extremidade, traça-se um semicírculo, passando pela reta orientada, no lugar que o semicírculo cortar a reta orientada é o ponto $\sqrt{2}$.

Se este segmento é demarcado sobre a reta numérica, por meio de um compasso, então o ponto assim construído não pode coincidir com nenhum dos pontos racionais, logo pode-se concluir que o conjunto de pontos racionais, embora denso, não cobre toda reta numérica, o que pode parecer estranho em termos intuitivos, mas a descoberta dos incomensuráveis instigou e ainda instiga filósofos e matemáticos, causando um efeito que Courant e Robbins (2000) consideram ser provocativo e especulativo na mente humana.

Pode-se definir então que um número irracional, representa o comprimento de um segmento incomensurável com a unidade, para haver uma correspondência mútua entre números e pontos de uma reta.

3.6.5. A crise dos incomensuráveis e a sua solução

As descobertas de grandezas não comensuráveis, feita pelos próprios pitagóricos, causaram uma das primeiras e grandes crises da matemática. Os matemáticos gregos acreditavam, em certo período da história, que medições de grandezas contínuas só poderiam ser concebidas, de forma a expressar a razão entre dois números naturais.

Essa descoberta produziu uma grande crise entre esses pitagóricos, pois suas observações envolviam comprimentos de cordas e o som por elas emitido e os estudos de outros fenômenos assemelhavam-se a esse, permeando, como diz Ávila (2006, p.53), a natureza inteira.

Os pitagóricos, ao perceberem que a diagonal de um quadrado não poderia ser medida através de números racionais, se viram diante de um dilema, sendo deflagrada, naquele momento, a denominada crise dos incomensuráveis.

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar sua doutrina, mas um de seus discípulos, Hipasso, quebrou o voto de silêncio e foi assassinado (DANTE, 2009, p.32).

Porém os próprios gregos produziram soluções para essa crise, através da construção de soluções com régua e com compasso, possibilitando o que é usado até os dias atuais, a associação da representação geométrica de segmentos incomensuráveis e a representação Aritmética dos números irracionais.

CAPÍTULO IV – NÚMEROS DECIMAIS E FRAÇÕES DECIMAIS

4. Decimais infinitos e periódicos

Buscando uma generalização para o estudo dos decimais, empreende-se nesta pesquisa uma discussão sobre algumas formas de conceber tais números, clareando a possibilidade de encontrar formas gerais para identificá-los

4.1. Frações decimais

Frações decimais são frações cujo denominador é 10, ou uma potência de 10. Assim as frações $\frac{2}{10}$, $\frac{34}{1000}$, $-\frac{32}{100}$ são exemplos de frações decimais.

Existem frações que são denominadas parcialmente decimais, pois seus denominadores podem ser transformados em potências de 10, por meio da equivalência. A fração $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{8}$, por exemplo, podem ser escritas equivalentemente como frações com denominadores iguais a uma potência de 10: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ e $\frac{9}{8} = \frac{1125}{1000}$.

4.2. Representação decimal

Representação decimal de um número real α não negativo é uma expressão que se caracteriza pela forma $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, que pode ser escrita compactamente como $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, em que a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e os índices $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ são dígitos, ou seja, são números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

Com relação as frações decimais, sua representação decimal é finita, logo $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$ e $\frac{9}{8} = \frac{1125}{1000} = 1,125$.

Todas as frações equivalentes às frações decimais têm denominadores que podem ser escritos como potências de 2 ou 5, ou de 2 e 5. Se houver algum denominador que apresente pelo menos um fator diferente de 2 e 5, então a fração não pode ser equivalentemente escrita na forma de fração decimal.

Pode-se representar um número racional na reta numérica, considerando aqueles que se originam pela subdivisão de cada intervalo unitário em 10, na sequência em 100, 1000 e daí por diante. Essa divisão é feita em segmentos iguais.

Os pontos obtidos destas subdivisões correspondem a frações decimais. Um exemplo a ser considerado é o número $0,321 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000}$. Esse ponto, esta

localizado no primeiro intervalo comprimentos unitário, no segundo subintervalo de comprimento 10^{-1} , no terceiro subintervalo de comprimento 10^{-2} e no quarto subintervalo de comprimento 10^{-3} . Dessa forma, pode-se escrever que o ponto $0,321 = 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$. Essa forma de escrita será denominada nesta pesquisa como forma polinômica.

Se a fração decimal contiver n dígitos após o ponto decimal, será representada pela forma $f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \dots + a_n 10^{-n}$, onde z é um inteiro e os a 's são dígitos 0, 1, 2, 3, ..., 9, os quais indicam os décimos, centésimos e assim por diante (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 70).

A forma abreviada de representar o número f é $z, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n$. Como exemplo, o número 3,459 tem, por comparação, $z = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$ e pode ser escrito na forma polinômica como $f = 3 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 9 \times 10^{-3}$. A observação imediata que se traduz para frações decimais é a forma como podem ser escritas, ou seja, como frações comuns.

Considere a fração $\frac{p}{q}$, sendo $q = 10^n$, se p e q tem divisores comuns, pode-se reduzir a fração dada a uma fração comum com um denominador sendo algum divisor da potência 10^n . Reforçando o que já foi mencionado, nenhuma fração irredutível pode ser escrita na forma de fração decimal, se o denominador não é um divisor de uma potência de 10.

Mas como fica a fração $\frac{1}{3}$, por exemplo? Essa fração não pode ser escrita na forma de uma fração decimal com uma quantidade n finita de casas decimais, pois, segundo Courant e Robbins (2000), por maior que seja o valor de n escolhido, a igualdade $\frac{1}{3} = \frac{b}{10^n}$, implicaria em $3b = 10^n$, que do ponto de vista matemático é um absurdo, já que 3 não é um fator de qualquer potência de 10.

A questão que fica é que se esse número tem uma representação decimal, como seria essa representação? Volta-se a reta numérica e escolhe-se um ponto P qualquer que não corresponda a nenhuma fração decimal, pode-se considerar a fração $\frac{1}{3}$, por exemplo, ou o número $\sqrt{2}$.

Escolhendo um ponto P qualquer, o qual não pode ser escrito na forma de fração decimal, com uma quantidade finita de n dígitos e utilizando o processo da divisão em subintervalos de 10, ou seja, em dez partes iguais, P não vai ocorrer como ponto inicial de um subintervalo, mas P pode ainda ser incluído em intervalos

que se tornam cada vez menores, em relação à divisão decimal, em qualquer grau de aproximação a qual se deseja.

Supondo que o ponto P esteja situado no primeiro intervalo unitário. Ao se subdividir esse intervalo em dez partes iguais, cada parte com o comprimento de 10^{-1} , verifica-se que P , está contido, por exemplo, no quarto intervalo.

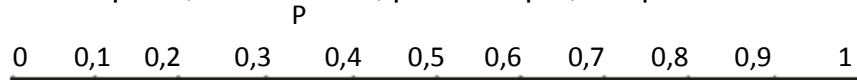


Figura XIX: Subdivisão do segmento unitário em dez partes iguais

Nesse momento, P está situado, digamos entre 0,3 e 0,4. Dando sequência, subdivide o intervalo entre 0,3 e 0,4 em dez partes iguais, cada uma com o comprimento de 10^{-2} . Nesse caso, considere P estará situado, no quarto deste intervalo, entre 0,33 e 0,34.

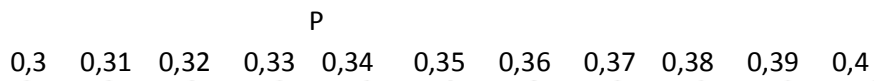


Figura XX: Subdivisão do segmento $[0,3; 0,4]$ em dez partes iguais

Subdividindo novamente, verifica-se que, por exemplo, P está situado no primeiro intervalo de comprimento 10^{-3} , logo, P está, digamos, entre 0,330 e 0,331.

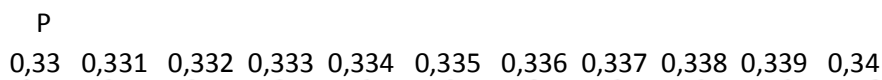


Figura XXI: Subdivisão do segmento $[0,33; 0,34]$ em dez partes iguais

Continuando esse raciocínio indefinidamente, pode-se levar a uma sequência sem fim de dígitos $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$, satisfazendo a propriedade que segue:

Qualquer que seja o número n escolhido, o ponto P está incluído no intervalo I_n cujo ponto inicial é fração decimal $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{n-1} a_n$. O ponto terminal é $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_n (a_n + 1)$ com comprimento de I_n sendo 10^{-n} .

Se a escolha for sucessivamente $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, pode-se observar que cada um destes intervalos, $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, \dots$ está contido naquele que o precedeu, enquanto seus comprimentos $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots$ tendem a zero (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 71). Pode-se dizer que um ponto P está contido em uma sequência de intervalos encaixados.

Considerando o ponto $P = \frac{1}{3}$, então os dígitos $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ serão todos iguais a 3. Nesse caso, P estará contido em um intervalo encaixado que vai de $0,33333\dots33$ até $0,33333\dots34$, isto é, $0,33333\dots333 < \frac{1}{3} < 0,33333\dots34$, para qualquer quantidade de dígitos arbitrariamente grande. A forma de expressar essa concepção, é dizer que o número $0,33333\dots33$, tende a $\frac{1}{3}$, à medida que a quantidade n de dígitos aumenta. Dessa forma, escreve-se que $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, indicando que a fração decimal deve ser continuada indefinidamente, ou seja, $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$. Mas como ficaria a representação decimal do ponto $\sqrt{2}$?

Ao analisar a solução da equação $x^2 = 2$, identifica-se que o resultado é o ponto irracional $\sqrt{2}$. Pode-se conduzir este ponto, a uma fração decimal indefinidamente continuada, mas, segundo Courant e Robbins (2000, p.72), a lei que determina os valores dos dígitos na sequência não é, de forma alguma, óbvia. Pode-se afirmar que não existe explicitamente uma forma que determine os dígitos sucessivos deste ponto, porém é possível calcular quantos dígitos quiser.

Voltando à equação $x^2 = 2$, verifica-se que 2 está entre x^2 e $(x + 1)^2$, ou seja, $x^2 < 2 < (x + 1)^2$, o número $(x + 1)$ é considerado a raiz quadrada de 2 a menos de uma unidade, por excesso. Se $x = 1$, então, a solução da equação $x^2 = 2$ satisfaz $1 < x < 2$. Seguindo o desenvolvimento acima, tem-se as aproximações racionais para a solução da equação $x^2 = 2$, que se encontram entre 1 e 2.

A raiz quadrada de 2 a menos de um décimo por falta é o maior número inteiro de décimos, cujo quadrado é menor que 2. Isso é equivalente a dizer que $\left(\frac{x}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2$, sendo o número $\left(\frac{x+1}{10}\right)^2$ é a raiz quadrada de 2 por excesso, a menos de um décimo.

Para demarcar o ponto $\sqrt{2}$, divide o intervalo entre 1 e 2, em dez partes iguais, conforme a figura abaixo:

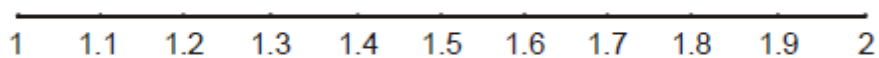


Figura XXII: Subdivisão do segmento [1; 2] em dez partes iguais

Verifica-se que $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$ e $(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$. Nota-se que 1,4 é a raiz quadrada de 2, a menos de um décimo por falta e 1,5 é a raiz quadrada de 2 a menos de um décimo por excesso, logo $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$. Na sequência, obtém-se a solução aproximada da equação a menos de $\frac{1}{100}$, por falta e por excesso, logo basta dividir o intervalo entre 1,4 e 1,5 em dez partes iguais:

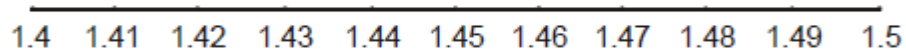


Figura XXIII: Subdivisão do segmento [1,4; 1,5] em dez partes iguais

Logo $(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0264$. O valor 1,41 é a raiz quadrada de 2 a menos de um centésimo pela falta e 1,42 é a raiz quadrada de 2 a menos de um centésimo por excesso. Seguindo o mesmo raciocínio, tem-se que $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$, $(1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2$, e assim por diante. As classes das soluções da equação $x^2 = 2$, por falta e por excesso, constituídas por decimais infinitas: $A = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots\}$ e $B = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; \dots\}$.

De uma forma geral, afirma-se que um ponto P que não está representado por qualquer fração decimal com um número n , finito de dígitos, é representado por uma fração decimal infinita, $z, a_2 a_3 a_4 \dots$. Se, para cada valor de n , o ponto P se situar em um intervalo cujo comprimento é 10^{-n} , o seu ponto inicial será indicado por $z, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n$.

É importante observar que existe uma correspondência estabelecida entre todos os pontos da reta numérica e todas as frações decimais finitas ou infinitas de maneira a definir que um número é uma decimal finita ou infinita (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 72).

As decimais infinitas que não representam números racionais são os números irracionais. Essas considerações eram aceitas como satisfatórias para o sistema dos números racionais e dos irracionais, até meados do século XIX, sendo conhecidas como contínuo numérico.

Um reexame crítico de princípios e de consolidação de resultados, os matemáticos perceberam que o conceito de número irracional exigia uma análise mais precisa, no entanto o desenvolvimento do sistema numérico permitiu um

grande avanço da matemática desde o século XVII, e, em particular, da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral.

CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa se configura como uma proposta para iniciar uma reflexão sobre o que poderia ser trabalho da disciplina de Análise Real para os cursos de licenciatura em matemática e também um convite ao professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender aspectos da construção dos números reais em suas estruturas “algébrica e topológica”, identificando consequências desta na matemática produzida no ambiente escolar.

Para este empreendimento, o autor se dispôs a apresentar algumas questões envolvidas na dinâmica de sala de aula e também a clarear aspectos que diferenciam matemática escolar e matemática acadêmica. Como o foco desta pesquisa tem como referência a formação inicial ou continuada do professor, empreendeu-se neste trabalho um diálogo, permitindo, dentre várias concepções, concluir que, em termos da formação do professor de matemática, ainda há a necessidade de se encontrar formas para uma melhor qualificação.

Durante o processo de desenvolvimento deste trabalho foi criado pelo orientador, Prof. Dr. Carlos A. S. Soares, um grupo de estudos em Análise Real que tinha como objetivo discutir e desenvolver conhecimentos na matéria em questão.

O grupo era composto por três pessoas: o orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, os mestrandos, Francisco Bessa e Willian Cruz. Neste mesmo grupo, sendo convidado inicialmente pelo professor Francisco Bessa a participar de uma das reuniões, o professor Hernando se integrou ao grupo, com a diferença de não ter cursado no mestrado a disciplina Tópicos de Análise Matemática I.

O professor Hernando passou a ser então o ponto de apoio e de validação desta pesquisa. Durante a produção deste trabalho foi solicitado a ele, em virtude da visão que já trazia da graduação, que pudesse buscar questões à medida que a pesquisa avançasse, dentro do material produzido pela mesma.

Com as dúvidas surgidas nos encontros do grupo quanto ao desenvolvimento de certos aspectos da matemática formal e correlações identificadas, no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio, a pesquisa foi se diferenciando em várias abordagens, das linguagens traduzidas nos livros-textos de Análise, ganhando uma característica particular de ser um instrumento que discute formação, matemática escolar e acadêmica e, ao mesmo tempo, se apresentando como ferramenta para o estudo de certas definições, demonstrações e/ou aplicações da matemática formal, dos cursos de Análise Real.

Ao se falar de demonstrações, percebe-se, segundo Garnica (2002, p. 76) a inexistência de referências sobre a prova rigorosa (demonstrações) tratada no contexto da formação de professores, embora existam literaturas em Educação Matemática, que trazem um número significativo de publicações relativas ao tema, abrindo possibilidades de analisar a prova como uma atividade social e de negociação em comunidade, a qual é considerada constituição de um regime de verdade.

No grupo, vários aspectos eram discutidos, sempre percebendo quais contribuições poderiam emergir na perspectiva do trabalho formal da matemática e das consequências desse no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio. Ao término do trabalho, foram feitas duas perguntas para o professor Hernando sobre a importância das provas e das demonstrações no curso de Análise Real para licenciatura.

1 - Para você, qual é o papel das demonstrações em matemática?

RESP: Penso que o papel das demonstrações é dar veracidade às afirmativas matemáticas, como as fórmulas, teoremas, etc¹².

Segundo Bicudo (2002, p.67), um dos maiores passos isolados da lógica dos últimos 200 anos, foi a explicitação do conceito de demonstração. Em termos lógicos, uma demonstração pode ser considerada uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma, ou conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na seqüência dada (BICUDO 2002, p.67), porém o mesmo autor afirma que:

Em suma, quando se trata de discorrer sobre a DEMONSTRAÇÃO¹³ MATEMÁTICA, o matemático parece estar na mesma posição de Santo Agostinho em relação ao tempo e, talvez, a única coisa sensata a fazer seja responder como o Santo. DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA – se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei (BICUDO, 2002, p.71).

Não foi objetivo desta pesquisa discutir o que é demonstração, mas, com certeza, foi um questionamento que acompanhou todo trabalho, causando dúvidas e despertando interesses.

Estudar uma matemática mais formal, aproximando-se das demonstrações matemáticas, fez surgir outros questionamentos que foram respondidos pelo professor Hernando, o qual se mostrou muito entusiasmado não só em dar as

¹² Os destaques sublinhados dão ênfase às respostas do participante da pesquisa.

¹³ Destaque do autor da citação.

respostas, mas em procurar associar sua vivencia como professor do ensino médio a estas questões.

2 - Você acha necessário fazer demonstrações no processo de ensino e aprendizagem em matemática na educação básica? E na formação do professor?

RESP: Desde que a demonstração não seja um fator complicador que desmotive os alunos, sua inserção em certos momentos pode contribuir para um melhor entendimento dos conceitos matemáticos.

Quanto ao professor, penso que, independente do segmento que trabalhe, o conhecimento da sua disciplina deva ser progressivo e continuamente estimulado.

Durante o processo de produção de alguns teoremas, o grupo se sentiu incomodado, principalmente quando colocado frente às demonstrações do supremo e do ínfimo de um conjunto, no que fala de sua existência ou não. Basicamente, foram necessários exatamente cinco encontros para que, de fato, fosse compreensível tanto para o professor Hernando quanto para o grupo tal procedimento.

Essas dúvidas fizeram com que neste tema o autor não conseguisse encontrar um elo que aproximava este assunto do desenvolvimento da matemática, vivenciada no ensino fundamental e no ensino médio. De fato, ainda é um obstáculo a compreensão de tal assunto.

Em relação às demonstrações e/ou provas rigorosas na formação de matemática do professor que leciona na educação básica, Garnica (2002) coloca esse assunto entre dois campos, os quais denominam como o campo da técnica e o campo da crítica, que apresentam divergências sobre “verdade”, em particular “verdade matemática”, e sobre as vertentes nas quais poderiam se situar, sendo a técnica, o campo de produção científica da matemática e a crítica o campo da Educação Matemática.

Garnica (2002) conclui:

(...) a prova rigorosa, sendo elemento fundamental para entender a prática científica da Matemática, seria também fundamental nos cursos de formação de professores, não como mero recurso técnico, mas numa abordagem crítica, que possibilitasse uma visada panorâmica nos modos de produção e manutenção da “ideologia da certeza” para que, a partir disso, pudessem ser produzidas formas alternativas de tratamento às argumentações sobre os objetos matemáticos em salas de aula reais (GARNICA, 2002, p. 75).

Apesar das dificuldades encontradas no produzir e no transcrever esta pesquisa, a aproximação do desenvolvimento formal da matemática permitiu abrir campo para outras discussões, relativas à formação matemática do professor de matemática.

Essas dificuldades se acentuaram pela pouca literatura que tratasse do assunto nas concepções da Educação Matemática e pela forma como o autor trazia certos conceitos com as imagens conceituais que tinha do conhecimento da matemática que trabalhava na Educação Básica.

As compreensões de certos aspectos da matemática formal foram observadas no transcorrer deste trabalho, buscando associar questões importantes da matemática do ensino fundamental e do ensino médio, dando aos mesmos um tratamento mais rigoroso.

Um exemplo são questões que envolvem o módulo de um número real; o autor percebeu que situações de cálculos com equações do 2º grau, raízes quadradas e módulo causavam muitas dúvidas no grupo.

Módulo de um número x pode ser caracterizado por $|x| = \sqrt{x^2}$ e a partir desta caracterização discutem-se alguns tópicos envolvidos na educação básica, principalmente no ensino médio no que diz respeito ao cálculo de equações e inequações.

As aplicações modulares permitem resolver sentenças como $x^2 = 16$ (por exemplo), na qual estão envolvidas relações que, muitas vezes, são omitidas no transcorrer destes cálculos na educação básica. Essas situações de resolução de equações quadradas, ou 2º grau, geralmente admitem duas soluções que são valores simétricos, as quais ficam, muitas vezes, reduzidas a aplicações de regras, como: “passar o quadrado para o segundo membro como mais ou menos a raiz quadrada do termo do segundo membro” (grifo nosso).

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} \Rightarrow x = \pm 4$$

Porém, em relação ao desenvolvimento formal da Análise Real, destacam-se as propriedades de módulo, já que os dois membros da igualdade acima são positivos. Logo, para pensar nesse mais ou menos do resultado dessa sentença e evitar que essa forma de calcular seja generalizada para cálculo de raízes quadradas, que por definição é positiva, ou seja, $\sqrt{16} = 4$. Propõem-se a aplicação da definição de módulo, garantido, assim, as soluções da sentença em destaque:

$$x^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4.$$

De forma generalizada: Sendo a um elemento positivo, logo:

$$x^2 = a \Rightarrow |x| = \sqrt{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Um cuidado a ser observado é na igualdade que segue: $|-r| = r$. Essa igualdade não é verdadeira, pois para $r = -5$, por exemplo, tem-se $| -(-5) | = -5$, que é falso, pois o módulo nunca é negativo (DANTE, 2009, p. 100).

Outra diferença notável no que se refere a módulo é a percepção das igualdades $|x| = 7$ e $x = |7|$. No primeiro caso, $x = 7$ ou $x = -7$, já no segundo caso, $x = 7$, não admitindo outra solução.

A aplicação de módulo no ensino fundamental e no ensino médio inicia-se no 7º ano do ensino fundamental. Já no ensino médio vem fortemente ligada aos ensinamentos de funções modulares, equações e inequações modulares.

As dúvidas que perpassaram pelo grupo, foram trazidas pelos membros do mesmo, que atuam na educação básica e com experiência de mais de uma década em sala de aula. O grupo não estava seguro para falar das situações que se apresentaram nos encontros.

Outras questões, como o caso da multiplicação por zero, que foi amplamente discutida, a ponto de surgir o questionamento de como foi importante a introdução do zero e dos números negativos em especial, o grupo concordou com Courant e Robbins (2000, p. 64), os quais afirmam que a introdução do símbolo 0 foi um grande passo no sentido de remover a restrição dada à operação $b - a$, definindo-se que $a - a = 0$. Mais importante ainda foi a introdução dos símbolos $-1, -2, -3, \dots$ juntamente com a definição $b - a = -(a - b)$ (COURANT & ROBBINS, 2000, p. 64).

Os questionamentos do grupo são geralmente encontrados por professores de matemática do ensino fundamental e do ensino médio em sua prática. A tentativa é de perceber quais contribuições podem emergir na dinâmica desta pesquisa na formação do futuro professor de matemática, pois os questionamentos são diversos e as estruturas de aprendizagem são distintas.

A aceitação de certos axiomas na construção da estrutura de corpo foi um grande salto na dinâmica de buscar relações envolvidas na estrutura da matemática produzida no ensino fundamental e no ensino médio. No que se refere aos elementos simétrico e inverso, algumas dúvidas presentes em salas de aula de

matemática, que se apresentaram em alguns momentos na discussão do grupo foram resolvidas.

No caso desses axiomas se impõem apenas a existência (de simétrico ou inverso), mas, de fato, prova-se ainda a unicidade (estes elementos são únicos). A unicidade desses elementos permite entender conceitos matemáticos envolvidos nas operações comuns de equações ou na própria Aritmética.

Destaca-se nesta pesquisa, um ponto principal que é a apresentação e o significado dos números irracionais. Diversos textos escolares apresentam o número irracional, como o número que não se pode escrever na forma de fração e também como o número que tem uma representação infinita e não-periódica, porém, na perspectiva do autor, esse assunto vem acompanhado de várias questões que o professor pode explorar. Segundo Moreira e David (2005, p. 82), essas duas caracterizações não tem significado algum para o aluno se o mesmo ainda assume o universo dos racionais.

Os mesmos autores esclarecem:

Quando não se sabe o que significa uma forma decimal infinita e não-periódica também não se sabe o que é número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a ideia escolar de número está associada, na sua acepção mais ampla, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais não são números já que não são razão de inteiros (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 82).

É comum no ensino fundamental e no ensino médio definir números reais como a união entre os racionais e os irracionais, não esclarecendo o sentido de se conceber os números irracionais como números ou o significado que possa ter.

Ressalta-se que, na construção dos números reais como corpos ordenados completos, prova-se a existência de reais que não são racionais, sendo esses, supremos de subconjuntos de reais não-vazios e limitados superiormente.

Moreira e David (2005) criticam em seu trabalho, o tratamento formal dado aos números reais na licenciatura, mostrando que essa forma de apresentar tais números não oferece alternativas para o tratamento dado aos mesmos, nos textos escolares, que é “legítimo, mesmo de forma inadequada”, esclarecem os autores. Os mesmos autores consideram que uma forma possível de se trabalhar números irracionais, seria através da incomensurabilidade, trabalhando as questões de medidas, permitindo discutir a insuficiência dos números racionais, podendo servir de base para uma abordagem que venha ser mais compreensível e transparente para o educando.

Não há um consenso em relação ao trabalho com a incomensurabilidade no ensino fundamental e no ensino médio, porém, o autor concorda com Moreira e David que apóiam a discussão de tal noção na licenciatura.

Os autores dizem:

(...) O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos com o trabalho da incomensurabilidade e sua vinculação como o significado dos números irracionais pode ser essencial ao desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção e adaptação ou mesmo a construção e a implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema "números reais (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 83).

Abordada nesta pesquisa a definição formal da representação decimal, percebe-se que, a partir dos resultados estabelecidos, pode-se provar que todo número real admite uma representação decimal infinita e que a representação decimal dos irracionais é infinita e não-periódica, com o intuito de chamar a atenção do professor e\ou licenciando em matemática para as validades da matemática escolar, tendo alternativas para melhor definir os caminhos do seu fazer pedagógico.

Buscou-se nesta pesquisa, aproximar-se das situações que envolvem o contexto do ensino fundamental e do ensino médio, ora trabalhando numa visão mais geométrica, ora numa visão mais algébrica. Nesse construto, se destacam as dízimas periódicas que são as representações decimais de uma divisão continuada, ou prolongada indefinidamente. Esses decimais infinitos e periódicos também são considerados números, já que partem de frações racionais.

Por serem números que geralmente causam muita confusão principalmente em termos de operações, o autor propôs nesta pesquisa, em anexo, criar uma oficina que tem como objetivos:

- apresentar as representações decimais de números reais em um desenvolvimento formal e discutir questões que envolvem este assunto no âmbito do ensino fundamental e do ensino médio
- desenvolver junto ao professor do ensino fundamental e do ensino médio, uma relação de proximidade entre o conteúdo Análise Real e a matemática produzida no seio escolar, discutindo as idéias e noções sobre números racionais e irracionais em suas respectivas representações decimais.
- Sugerir uma melhor compreensão na noção da densidade dos números reais, traduzir as diferentes linguagens dadas a este conceito, principalmente no que se refere a frações geratrizes das dízimas, períodos das dízimas e outras configurações.

O autor procurou, neste trabalho, proporcionar ao professor e\ou licenciando em matemática, situações estudadas em um curso de Análise Real, levantando algumas questões e mostrando as dificuldades que perpassam por assuntos mais abstratos. Para esta pesquisa, foram dispostas etapas importantes, a destacar o estudo de um número significativo de textos, livros e outros; compreensão dos conteúdos apresentados; desenvolvimento da pesquisa dentro do rigor necessário; a construção de um procedimento metodológico coerente com os objetivos definidos; desprendimento de certos aspectos da matemática escolar e acadêmica, para uma melhor compreensão destas duas formas do fazer matemático.

O autor assumiu também grandes dificuldades em buscar na sua prática elementos que pudessem compor a dinâmica desta pesquisa. Muitas vezes, o cansaço e o desânimo foram sendo obstáculos para se desenvolver o trabalho e apresentá-lo com a qualidade e o dinamismo de poder ser um instrumento de apoio a possíveis discussões sobre o ensino de Análise Real na licenciatura.

O autor buscou aspectos que poderiam ser conseqüências da construção formal dos números reais no desenvolvimento da matemática tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, mas, em muitos momentos, ele não conseguiu associar tais aspectos, então, apresentou algumas considerações dentro do próprio campo da matemática formal.

Como a proposta desta pesquisa era apresentar os números reais nas estruturas “algébrica e topológica”, convidando o professor do ensino fundamental e do ensino médio a entender tais aspectos e, se possível, iniciar, a partir dos números reais, uma discussão sobre como poderia ser o curso de Análise Real para licenciatura, o autor acredita ter vencido esta etapa. Porém não é um término de um trabalho, mas o início de um desenvolvimento que pode seguir por várias direções, sendo outros estudos e pesquisas responsáveis para indicar novas possibilidades.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.
- BARTLLE, Robert G. **Elementos de Análise Real**. Tradução de Alfredo A. de Farias. – Rio de Janeiro: Campus, 1983.
- BICUDO, Irineu. **Educação Matemática e Ensino de Matemática. Temas e Debates: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, Ano IV – N. 3 – 1991**.
- _____. **Demonstração em matemática**. In: Bolema, nº. 18. Rio Claro, 2002. p. (65 – 72).
- BICUDO, M.A.V. **Sobre Educação Matemática**. In: Segunda Jornada de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula; Rio Claro, 1991.
- BOYER, Carl Benjamim. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**, volume 6. São Paulo: Atual, 1992.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998, 148 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. v 2. Brasília: MEC, 1998.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Portaria normativa No- 7**. Publicada no Diário oficial da União em 22 de junho, 2009.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura**. Publicada no Diário oficial da União em 05 de março, 2002.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, 1951
- COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA., 2000.
- CRUZ, Willian José e KOPKE, Regina Coeli Moraes. **Matemática in Concert, metodologia lúdica de ensino**. In Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.
- CRUZ, Willian José. **Projeto Matemática in concert: a favor da aprendizagem**. In: Anais do V Encontro Mineiro de Educação Matemática. Lavras, 2009.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da Matemática à ação: reflexão sobre a educação e matemática**. Campinas: Papyrus, 1986.
- _____. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 16ª ed. Campinas SP: Papyrus, 2008.
- _____. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. 5ªed. São Paulo: Ática, 1998.
- _____. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer**. 2ªed. São Paulo: Ática, 1993. (Série Fundamentos 74).

_____. **Etnomatemática: elo entre as tradições a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. (Coleção do ensino fundamental). São Paulo: Ática, 2009.

_____. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). São Paulo: Ática, 2009.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

FIORENTINI, Dário. **A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática**. In: Mesa redonda VII EPEM: SBEM-SP, São Paulo, Junho de 2004.

FIORENTINI, Dário (Org.) **Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil**. (Artigo), Revista Zetetike, ano 3 – nº 4, 1995.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

GARNICA, A. V. M. **As demonstrações em Educação Matemática: Um ensaio**. In: Bolema, nº. 18. Rio Claro, 2002. p. (73 – 81).

GIOVANNI, José Ruy Junior e CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática**. (coleção do ensino fundamental). São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). 4ª Ed. São Paulo: Atual, 2007.

LAROUSSE, Ática: **Dicionário da língua portuguesa** – São Paulo: Ática, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise; v.1. 12 ed**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

_____. **Explorando o ensino da Matemática: artigos: volume 1** Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 240 p.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti e DAVID Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

_____. **Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores**. (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, - Jan./Jun. 2003.

_____. **O conhecimento matemático do professor**. (Artigo), Revista Brasileira de Educação nº 28, 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. **Por que análise real na licenciatura?** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 23, - Jan./Jun. 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. Belo Horizonte: 2004. 195 f. BBE. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais. Orientador: Maria Manuela Martins Soares David.

PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para os Números Reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação**. 2007. 398 f. Tese (Doutorado em

Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/UNESP, Rio Claro (SP), 2007.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 604 f. Tese (Doutorado em Educação) - FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

_____. **Educação Matemática no ensino superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. (81 – 97).

SEVERINO. Antonio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 19ª ed. São Paulo: Cortez, 1993.

ANEXO

OFICINA: Um olhar para as Representações decimais de números reais.

**ANEXO****PROPOSTA DE UMA OFICINA****Um olhar para as Representações decimais de números reais¹**

Willian José da Cruz²
Universidade Federal de Juiz de Fora
lukinha@barbacena.com.br
Carlos Alberto Santana Soares³
Universidade Federal de Juiz de Fora
carlos.soares@ufjf.edu.br

Resumo

Esta oficina se caracteriza por desenvolver um trabalho com as representações decimais de números reais, propondo uma melhor compreensão dos conceitos e das concepções atribuídos a este conteúdo no âmbito do ensino fundamental e médio. Dispõem-se neste trabalho utilizar de vários recursos, quer seja humanos quer seja tecnológicos, contribuindo para formação inicial ou continuada do professor de matemática. Esta oficina vem como proposta anexa ao trabalho de pesquisa para obtenção do grau de mestre profissional em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora. Configura-se como suporte à possibilidade de iniciar uma reflexão sobre como poderia ser o trabalho da disciplina Análise Real nos cursos de licenciatura em matemática. É também um convite ao professor do ensino fundamental e médio a entender aspectos formais na apresentação das dízimas periódicas e obter uma maior compreensão na diferença de definições e conceituações entre os decimais infinitos periódicos (dízimas periódicas) e os decimais infinitos não periódicos (os números irracionais) identificando consequências destas, na matemática produzida no ambiente escolar.

Palavras-chave: Educação Matemática, Matemática Escolar, Análise Real, Representação decimal, Densidade.

Justificativa

Ao desenvolver uma pesquisa para obtenção do grau de mestre no programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora, na qual, o autor apresenta a construção dos Números Reais nas estruturas “algébrica e topológica”, a proposta desta oficina surgiu, aliada à

¹Esta oficina foi aceita para publicação no XIII CIAEM – XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – Recife 2011.

²Willian José da Cruz; Mestrando em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora; Professor efetivo da Prefeitura Municipal de Barbacena – MG e Professor substituto da Universidade Federal de Juiz de Fora.

³Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, docente do programa de mestrado profissional em Educação Matemática – UFJF.

necessidade pessoal do autor em entender certos aspectos na construção dos números decimais infinitos periódicos e não periódicos e também compreender a noção de densidade, tão presente no estudo de limite, continuidade, derivada e integral de funções reais de variável real e pouco comentada nas aulas de matemática do ensino fundamental e médio. Na oportunidade, buscar-se-á elucidar situações apresentadas em livros textos de matemática adotados no ensino fundamental e médio, para uma melhor compreensão das questões envolvendo números reais nas representações decimais periódicas e não periódicas.

Cursando um mestrado profissional em Educação Matemática, que tem por característica aproximar o professor das leituras e pesquisas na área e por consequência, incentivá-lo a propor materiais de apoio às práticas pedagógicas que poderão servir de suporte para dinâmica da matemática, produzida no seio escolar, o autor se sentiu motivado a unir sua necessidade pessoal, à oportunidade de desenvolver esta oficina, visando buscar uma melhor compreensão das representações decimais, em seus aspectos formais e práticos, e compreender as leituras referentes a esse assunto, apresentadas nos livros didáticos.

Atribuir certos aspectos formais ao desenvolvimento das representações decimais pode contribuir para elucidar questões que ainda não foram totalmente discutidas ou compreendidas pelos professores que lecionam esta matéria, no ensino fundamental e médio (grifo nosso).

Penteado e Silva (2007, p.1) trazem, no seu trabalho intitulado “O Estudo da Densidade dos Números Reais no Ensino Médio”, que tem como tema a abordagem da densidade dos números reais, no sentido da existência de infinitos números racionais e infinitos irracionais entre dois números reais distintos que, algumas pesquisas realizadas em Israel e na França, apontam certas dificuldades dos alunos em compreender alguns conteúdos, devido à falta de conhecimento a respeito dos números reais e das suas propriedades. Os autores destacam algumas confusões sobre a noção da distinção entre números racionais e irracionais e a noção de densidade. Essas confusões estão associadas, segundo os autores, às concepções e às crenças dos pesquisados, de que um número irracional tem uma representação decimal ilimitada, a dificuldade de distinção entre a cardinalidade dos naturais e dos reais, a associação do número irracional como número não exato, a concepção de que o número irracional não é inteiro ou é negativo dentre outras destacadas pelos autores.

No Brasil, destaca-se a pesquisa feita por Iglioni e Silva (2001), realizada com alunos recém-ingressos nos cursos de ciência da computação e com os formandos dos cursos de licenciatura em matemática. Esta pesquisa evidenciou a confusão existente entre os conceitos de números racionais e irracionais em relação à representação decimal, ao sucessor e a existência de infinitos números.

Iglioni e Silva (2001) evidenciaram a forma pela qual os alunos confundiam a definição de número irracional, sendo para eles, números infinitos, ou seja, aquele que contem infinitos dígitos após a vírgula, ou ainda raízes. Nesta mesma pesquisa, os alunos definiram números racionais como sendo exatos ou inteiros. No caso do uso das reticências, os autores Iglioni e Silva (2001) afirmaram que os alunos pesquisados ficaram desconfortáveis, causando instabilidade nas respostas proferidas.

Segundo Moreira e David (2005, p. 90), os números decimais desempenham uma função ambígua, até certo estágio da aprendizagem escolar, sendo um tópico de grande importância. Tem o papel de ajudar na construção abstrata de número, quando se consideram certos decimais finitos, sendo um subconstruto associado a números racionais, ou como representação quando considerados registros de números racionais ou reais e ainda podem ser identificados com a própria noção de número, no caso em que se conceituam os irracionais como decimais infinitos e não periódicos.

A representação decimal dos reais se reduz primariamente a uma compreensão do sistema decimal de registros de números naturais, não passando de uma extensão dessa ideia básica (MOREIRA & DAVID, 2005, p. 90). O grande desafio é construir de forma coerente tal significado na apresentação desse elemento no âmbito do ensino fundamental e médio, diminuindo as dificuldades de compreensão dos estudantes.

No ensino fundamental, há o costume de apresentar aos estudantes, primeiro as frações ordinárias e conseqüentemente os números decimais, determinados a partir destas frações.

De acordo com Ávila (2006, p.23) a conversão de uma fração ordinária em decimal se faz dividindo o numerador da fração pelo denominador. Se o denominador da fração, na forma irredutível, só contiver os fatores primos de 10 (2 e/ou 5), a decimal resultante será finita. Se o denominador da fração ordinária em forma

irredutível tiver um fator primo diferente de 2 e 5, encontrar-se-á um decimal infinito e periódico, ou seja, o resultado será uma dízima periódica.

Para Moreira e David (2005, p. 92), a identificação da representação decimal como resultado de uma divisão continuada é uma das formas eficientes para a atribuição da qualidade de número às dízima periódica, identificando esse número como racional, pois é resultado da divisão dois inteiros que previamente já foram identificados como números racionais.

Ao conceber a representação decimal para números irracionais, Ávila (2006, p. 25), considera não ser nem finita e nem periódica. Esse mesmo autor considera que o primeiro número irracional apresentado ao aluno no ensino fundamental e médio é o número π (π), razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, porém, no sentido formal, a demonstração da irracionalidade desse número está fora do alcance da matemática para esse nível de ensino.

Ainda no ensino fundamental e médio, o aluno é apresentado aos radicais e novamente é informando a ele que raízes não exatas, como $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, etc, são números irracionais. Segundo Ávila (2006, p. 35), o aluno tem condições suficientes para entender a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, assim como outras demonstrações.

Para Ávila (2006), a apresentação dos números irracionais, da forma como foi discutida no parágrafo anterior, pode deixar no aluno a impressão de que só existem o π (π) e alguns radicais como números irracionais, formando talvez a ideia de que o conjunto dos número irracionais seja bem reduzido, no máximo enumerável.

Essa visão dicotomizada também está presente em livros didáticos de matemática adotados em algumas escolas públicas do Brasil. A imagem seguinte foi retirada do livro “Tudo é Matemática” do autor Luiz Roberto Dante (2010, p. 34).

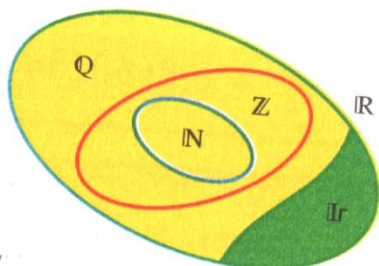


Figura I: O conjunto dos números reais

Segundo o autor, o diagrama acima relaciona os conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} e \mathbb{R} , sendo o conjunto \mathbb{I} dos números irracionais. Com base nessa apresentação, o livro traz uma imagem de que o conjunto dos números irracionais é bem pequeno, sugerindo ao leitor que esse conjunto tem poucos elementos, deixando a impressão que esse conjunto é enumerável⁴, o que de fato não é verdade, pois trata-se de um conjunto não enumerável, ou seja, a cardinalidade⁵ do conjunto dos números irracionais é diferente da cardinalidade de \mathbb{N} , demonstrada por Cantor em 1874.

Outra ilustração do mesmo livro (DANTE, 2010, p. 34) vem acompanhada da definição do autor que conjunto dos números reais é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Essa ilustração pode causar também algumas dúvidas, pois a imagem pode levar a subentender que os dois conjuntos têm o mesmo tamanho.

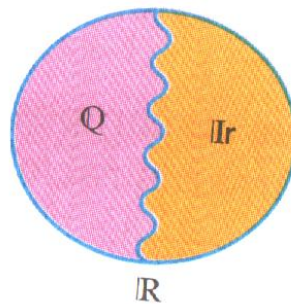


Figura II: Racionais e irracionais

Esta oficina abre campo para várias discussões, porém, para um recorte da mesma, este trabalho se pautará na compreensão das representações decimais dos números reais, fundamentando-se na observação e na apresentação das dízimas periódicas e na discussão de certos aspectos desenvolvidos nos estudos dos números decimais infinitos e não periódicos.

Moreira e David (2005, p. 96) apontam que, em outros estudos feitos para classificar números como racionais ou irracionais, é comum a identificação de dízimas periódicas como números irracionais. Segundo os mesmos autores, os alunos assumem que todos os números, os quais aparentemente apresentam certa

⁴Chama-se conjunto enumerável todo conjunto equivalente ao conjunto dos números naturais (ÁVILA, 2006, p. 33).

⁵Dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se seus elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca, ou seja, quando é possível estabelecer uma correspondência que leva elementos distintos de um conjunto a elementos distintos do outro, tal que todos os elementos de um e do outro conjunto sejam objetos dessa correspondência.

anomalia, são classificados como irracionais, ou seja, a infinidade de casas decimais significa que um valor efetivamente nunca é atingido. Da mesma maneira, a aceitação dos números negativos, que, de certa forma não faz parte da intuição dos alunos, são considerados também um número irracional.

Presentes nos livros de matemática do ensino fundamental e médio, as representações decimais despertam interesses, principalmente na forma pela qual são caracterizadas. Apesar de ser um assunto bastante trabalhado no ensino fundamental e médio, confusões entre as representações de números racionais e irracionais ainda causam dúvidas e é nesta perspectiva que esta oficina pode oferecer ao professor do ensino fundamental e médio em formação (continuada ou inicial), uma compreensão de certos aspectos desse tema.

Objetivos

Objetivando esta oficina apresentar as representações decimais de números reais em um desenvolvimento formal e discutir questões que envolvem este assunto no âmbito do ensino fundamental e médio, destacam-se também outros objetivos:

- desenvolver, junto ao professor do ensino fundamental e médio, uma relação de proximidade entre o conteúdo Análise Real e a matemática produzida no seio escolar, discutindo as ideias e noções sobre números racionais e irracionais em suas respectivas representações decimais.
- Sugerir uma melhor compreensão na noção da densidade dos números reais.

Plano de ação

O plano de ação para o desenvolvimento desta oficina será dividido em três etapas, preenchendo o tempo de trabalho destinado à mesma.

1º tempo - 60 min: Será feita uma apresentação expositiva da escolha do tema e/ou motivos que contribuíram para o desencadear desta oficina, bem como a apresentação das dízimas periódicas e dos decimais infinitos não-periódicos, sendo abordadas algumas considerações que possam ser importantes no decorrer do trabalho.

2º tempo - 1h 30 min: Serão apresentadas, neste segundo momento, cinco situações de sala de aula, na forma de questões, as quais serão discutidas e resolvidas durante esse tempo.

- A primeira, relacionada à transformação de frações em dízimas periódicas.
- A segunda, referente à transformação de dízimas periódicas na forma de frações geratrizes.
- A terceira, envolvendo decimais finitos escritos na forma infinita
- A quarta, envolvendo o período da dízima.
- A quinta, relacionada à densidade dos números reais e representação decimal dos números irracionais.

3º tempo - 30 min: debate final em relação aos problemas propostos, apresentação formal das dízimas periódicas e das definições de números decimais infinitos (periódicos e não-periódicos) encontradas em livros didáticos do ensino fundamental e médio e a apresentação da noção de densidade em no conjunto dos números reais.

Procedimento metodológico da oficina

Esta oficina se resume em apresentar as representações decimais e em entender aspectos da densidade dos números reais. Através de uma estrutura mais formal, busca-se compreender e validar os aspectos pedagógicos na aplicação desses tópicos, contribuindo para identificação de elementos estudados no âmbito do ensino fundamental e médio.

Para o desenvolvimento desta oficina, a abordagem, inicialmente escolhida, foi o desenvolvimento das dízimas periódicas, que, ao longo do processo, oportunizará tanto ao professor do ensino fundamental e médio quanto ao licenciando em matemática, identificar elementos em livros didáticos e outros, os quais utilizam, com ou sem rigor, tal estrutura.

Dando sequência, estudar-se-ão as representações decimais dos números irracionais, em contraste com as dízimas periódicas, no intuito de desvelar concepções e/ou consequências na aplicação deste assunto, no âmbito do ensino fundamental e médio.

Finalizando, serão conduzidas discussões em torno dos assuntos dízimas periódicas, números irracionais na forma decimal e densidade do conjunto dos números reais, formalizando alguns procedimentos e mostrando, não de forma impositiva, as possibilidades de entender questões formais.

Alguns conceitos a considerar

Limites: Uma aproximação para séries geométricas infinitas

Pense na representação decimal do número racional $\frac{1}{3}$. Esse número é aproximado por uma sequência de outros números racionais, no qual os índices n vão se tornando cada vez maiores, seguindo os valores consecutivos $1, 2, 3, \dots$. De uma forma generalizada, pode-se considerar que certo número racional s é aproximado por uma sequência de outros números racionais s_n , sendo n todos os valores consecutivos $1, 2, 3, \dots$.

Para começar, tome um segmento unitário e divida-o ao meio, pegue uma das metades, e divida-o novamente ao meio. Sempre pegando uma das metades restantes de cada divisão, vá dividindo-o ao meio, até que os intervalos menores obtidos tenham comprimento de 2^{-n} , no qual n é escolhido arbitrariamente grande; pode-se exemplificar, $n = 1000$, $n = 100000$, ou qualquer número que se desejar.

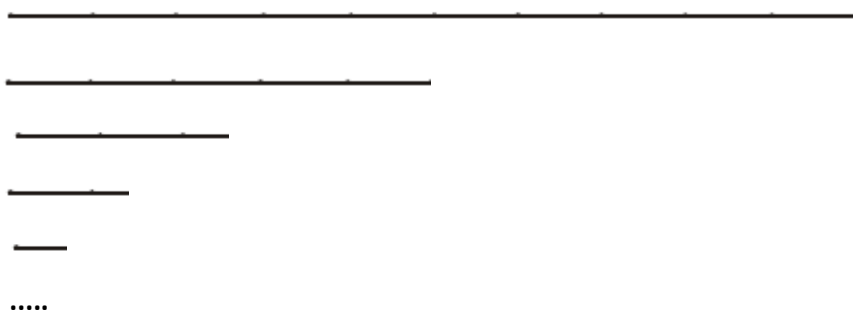


Figura III: Dividindo o segmento unitário ao meio

Adicionando os comprimentos de todos os intervalos exceto o último, obtém-se um comprimento total da sequência S_n , ou seja: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

Considere a sequência S_n para $n = 1$; note que S_1 difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^1$, ou $|S_1 - 1| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}$; para $n = 2$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; S_2 difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou $|S_2 - 1| = \left|\frac{3}{4} - 1\right| = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ e para $n = 3$, $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$; S_3 difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ou $|S_3 - 1| = \left|\frac{7}{8} - 1\right| = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ continuando o mesmo raciocínio acima, observa-se que a sequência S_n , difere de 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e esta diferença vai diminuindo, se tornando

arbitrariamente pequena, ou tendendo a zero, à medida que n aumenta de forma indefinida. O infinito considerado é o procedimento sem fim, não simbolizando uma quantidade efetiva, logo não faz sentido afirmar que a diferença é zero se n for infinito.

O comportamento da sequência S_n é descrito como a soma S_n aproximando do limite 1 à medida que n tende para o infinito, logo faz sentido a escrita $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$, no qual à direita tem-se uma série infinita, não significando que efetivamente vai ser adicionado os infinitos termos, pois trata-se apenas de uma expressão, que segundo Courant e Robbins (2000, p. 73) é abreviada para o fato de que 1 é o limite da soma infinita da sequência S_n , à medida que n tende ao infinito.

Nota-se que na igualdade $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ a forma de apresentar o símbolo incompleto $(+\dots)$ é meramente uma estenografia⁶ matemática para afirmar precisamente que 1 é o limite à medida que n tende ao infinito da quantidade $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$. Pode-se usar de forma abreviada, a simbologia $S_n \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$, ou a forma $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Essa última simbologia é utilizada dentro de um rigor matemático que não será descrito nesta oficina.

Para tornar geral o conceito de limite, considera-se um número q no intervalo de $(-1,1)$, logo as potências sucessivas de q , denotada por $q, q^2, q^3, q^4, \dots, q^n, \dots$, se aproxima de zero, quando n aumentar. Se q for negativo, haverá uma alternância dos valores das potências de q em valores positivos e negativos, os quais tenderão para zero pela esquerda ou pela direita alternadamente. O limite de q^n , à medida que n tende ao infinito é zero. Simbolicamente indica-se por $q^n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, para $-1 < q < 1$.

Se considerar $q > 1$ ou $q < -1$, será que q^n , à medida que n tende a ao infinito, tende a zero? Para uma análise mais detalhada, pode-se pensar em $q = 2$. Escrevendo as potências sucessivas de q , tem-se $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$, pode-se verificar que os valores crescem, se afastando de zero, logo não tende a zero, porém para uma prova rigorosa da relação $q^n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$, para $-1 < q < 1$, usa-se da desigualdade de Bernoulli, a qual afirma que $(1 + p)^n \geq 1 + np$, para qualquer

⁶ Técnica de escrita abreviada segundo sinais convencionais que permite a rápida transcrição de um discurso (LAROUSSE, 2001, P. 401).

$p > -1$ e n natural. Fixando q entre 0 e 1, tem-se $q = \frac{1}{1+p}$, para $p > 0$. Logo, $\frac{1}{q^n} = (1+p)^n \geq 1+np > np \Rightarrow \frac{1}{q^n} > np$, ou $0 < q^n < \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$. Logo, pode-se concluir que q^n está situado entre os valores fixos 0 e $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}$, sendo este último se aproximando de zero à medida que n aumenta arbitrariamente sem fim, dado que o ponto p é fixo e evidentemente $q^n \rightarrow 0$. No caso de q ser negativo, tem-se $q = -\frac{1}{1+p}$ e os valores fixos se tornam $(-\frac{1}{p}) \cdot (\frac{1}{n})$ e $(\frac{1}{p}) \cdot (\frac{1}{n})$, o invés de 0 e $(\frac{1}{p}) \cdot (\frac{1}{n})$, caso contrário, segundo Courant e Robbins (2000, p.75), o raciocínio não se altera.

Considerando a série geométrica $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$, sendo $-1 < q < 1$, pode-se expressar a soma S_n de uma forma mais simples e consistente. Esta representação aparece com frequência nos estudos de progressões geométricas que é um dos conteúdos de sequências do ensino médio.

Se multiplicar S_n por q , a igualdade $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$, passará a ser de forma equivalente $qS_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. Subtraindo as duas igualdades, tem-se $\begin{cases} S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ -qS_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1} \end{cases} \Rightarrow (1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$. Multiplicando membro a membro por $(1-q)^{-1}$, tem-se $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Pelo conceito de limite, aumentando n tem-se $q^{n+1} = q^n \cdot q$ tendendo a zero, logo, passando ao limite $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ quando $n \rightarrow \infty$, para $-1 < q < 1$.

Esta linguagem permite escrever que uma série geométrica infinita $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$, para $-1 < q < 1$. Voltando ao caso em que $q = \frac{1}{2}$, tem-se a série geométrica infinita $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Considera-se agora a série geométrica $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$. Colocando o fator $\frac{1}{2}$ em evidência, tem-se $S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

O intuito desta oficina é aproximar, tanto ao licenciando quanto ao professor de matemática do ensino fundamental e médio, do desenvolvimento formal das dízimas periódicas e identificar conceitos e caracterizações dadas a este assunto nos livros didáticos do ensino fundamental e médio.

Dízimas periódicas: um olhar diferenciado

Transformação de frações ordinárias em frações decimais infinitas dá origem ao fenômeno curioso das dízimas periódicas, gerando controvérsias, provocando questões e desencadeando problemas.

Como seria a representação decimal infinita e periódica do número 1? Para ilustrar o desenvolvimento das dízimas periódicas, considere o fato de que numa divisão de um número por ele mesmo, cujo resultado é 1, a exigência de que o resto seja sempre menor que o divisor fosse substituída por um fenômeno heterodoxo⁷, em que o resto⁸ seria igual ao divisor, como por exemplo, na divisão de 5 por 5. Observe:

$$\begin{array}{r}
 5,0 \quad | \quad 5 \\
 \hline
 5 \quad 0,9999\dots \\
 5 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

$5 \div 5 = 0,999 \dots$, como $5 \div 5 = 1$, então é facilmente compreensível que $0,9999\dots = 1$. Na linguagem de série geométrica, escreve-se o número $0,999\dots$ como a soma infinita $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots = \frac{9}{10} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) = \frac{9}{10} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = 1$. Logo, $0,9999\dots = 1$.

Ao pensar na representação decimal de um número, seria possível considerar que a decimal finita 0,34 e a decimal infinita 0,33999... representa o mesmo número? Uma questão a ser discutida e poderia causar dúvidas se não estivesse bem definido o conceito de números decimais.

Pode-se dizer que um número decimal finito pode ser escrito na forma infinita, bastando, para isso, considerar a dízima periódica 0,999... . No caso do exemplo, observa-se que 0,33999... é o mesmo que $\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{9}{10^3} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{9}{10^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{9}{10^3} \left(\frac{10}{9} \right) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10^2} = 0,34$.

⁷Heterodoxo é que ou aquele que se manifesta contrário a doutrina ortodoxa ou uma opinião tradicional (LAROUSSE, 2001, P. 509).

⁸ Em cada etapa da divisão, o resto considerado é o divisor, dividido por 10, isto é, o resto de 5 dividido por 5, na questão acima, não é 5, e sim cinco décimos.

De uma forma generalizada, um número racional inteiro ou decimal finito, pode ser escrito na forma de uma dízima periódica, representando o período desta dízima por 9.

Algumas considerações sobre as dízimas:

Os números racionais $\frac{p}{q}$ que não são frações decimais finitas podem ser desenvolvidos como frações decimais infinitas, realizando o processo elementar do algoritmo da divisão. Em cada etapa, há a necessidade de haver um resto não nulo, pois caso contrário, a fração decimal seria finita.

$$\frac{p}{q} \quad \left| \begin{array}{c} \\ \end{array} \right. \overline{c, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}}$$

Os restos r_i que surgem no processo da divisão serão $1, 2, 3, \dots, q - 1$ (todos inteiros), de tal forma que haja no máximo $q - 1$ possibilidades diferentes para valores dos restos, significando que algum resto r aparecerá uma segunda vez, fazendo com que todos os restos subsequente repitam novamente, mostrando que a expressão decimal para qualquer número racional é periódica.

O traço em cima dos dígitos $b_1 \dots b_j$ indica que esse conjunto repete infinitamente, determinando, dessa forma, o período da dízima. Um exemplo a considerar $\frac{1}{3} = 0,33333 \dots$ outro exemplo é o número racional $\frac{11}{90} = 0,122222 \dots$

Na sequência, serão apontadas algumas situações para uma melhor percepção do desenvolvimento das dízimas periódicas, aproximando do formalismo conceitual exigido nos cursos de Análise e abrindo campo para novas considerações.

Considere $p < q$ números primos entre si, logo $\frac{p}{q} = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}$. Se multiplicar membro a membro por 10^k , implicar-se-á na seguinte igualdade:

$$10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j} \Leftrightarrow 10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}.$$

O número $0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}$ é:

$$\begin{aligned} 0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j} &= \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j} + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^{2j}} + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^{3j}} + \dots = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^{2j}} + \dots \right) = \\ &= \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10^j}} \right) = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j} \cdot \left(\frac{10^j}{10^j - 1} \right) = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1}. \end{aligned}$$

Um olhar para as Representações decimais de um número real

Novamente, retorna-se a igualdade $10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}$

e verifica-se que:

$$10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k + 0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j} = 10^k \cdot \frac{p}{q} = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k + \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1}.$$

Multiplicando membro a membro por $10^j - 1$, tem-se a nova igualdade

$$(10^j - 1) \cdot 10^k \cdot \frac{p}{q} = (10^j - 1) \cdot a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k + b_1 b_2 \dots b_j.$$

Multiplicando membro a membro por q , tem-se:

$$(10^j - 1) \cdot 10^k \cdot p = q \cdot [(10^j - 1) \cdot (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k) + (b_1 b_2 \dots b_j)],$$

significando que q é divisor de $(10^j - 1) \cdot 10^k$. Se q for uma potência de 2 ou 5 ou de 2 e 5, então q é divisor de 10^k , e desta forma, o decimal é exato, ou seja, não tem a parte infinita e periódica. Porém se q não for múltiplo somente de 2 e 5, encontra-se a parte periódica, pois q será divisor de $(10^j - 1)$. Um exemplo a destacar é a representação decimal da fração $\frac{1}{6}$. Sabendo que 6 é múltiplo de 2 e 3, logo escreve-se que $2 \cdot 3$ é divisor de $(10^j - 1)10^k$, para $j = 1$ e para $k = 1$. Se analisar as condições de j e k , pode-se afirmar que a representação decimal da dízima terá um elemento decimal que não repete indefinidamente e um elemento decimal que faz parte do período da dízima. De fato, se dividir o numerador da fração pelo denominador, será encontrada a representação decimal de $\frac{1}{6} = 0,1666 \dots$. Outras situações acompanham o mesmo raciocínio.

A fração que dá origem a dízima é denominada fração geratriz (IEZZI, 2007, p. 12). Dada a dízima periódica $0, \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}$; essa dízima é considerada simples, pois o período inicia-se imediatamente logo após a vírgula. Considere m , sendo a geratriz desta dízima. A forma geral de encontrar m é dada por $m = \frac{b_1 b_2 \dots b_j}{10^j - 1}$, logo, se período tiver 4 termos, ou seja, $j = 4$, o denominador da dízima será $10^4 - 1 = 9999$. Isso explica o fato da geratriz da dízima periódica simples apresentar nove em seu denominador.

Aplicando o conceito anterior, ao exemplo que segue, encontra-se a geratriz da dízima $0,161616\dots$. Sabendo que o período é 16 e que $j = 2$, pois j corresponde à quantidade de algarismos do período, tem-se $\frac{16}{10^2 - 1} = \frac{16}{100 - 1} = \frac{16}{99}$.

Quando, logo após a vírgula, uma parte, sendo um algarismo ou um grupo de algarismos não se repete, ou seja, não pertence ao período tem-se as dízimas periódicas compostas, fazendo, como o próprio nome diz uma composição entre

não-período e período. Essas dízimas de forma geral, são representadas por $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}$.

Considere n , geratriz da dízima composta $0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \dots b_j}$; a forma geral de escrever n é dada por $n = \frac{[(10^j - 1)(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_k) + b_1 b_2 \dots b_j]}{(10^j - 1)10^k}$. Como exemplo, a dízima $0,16666\dots$ tem como geratriz $n = \frac{[(10^1 - 1) \cdot 1 + 6]}{(10^1 - 1)10^1} = \frac{9 \cdot 1 + 6}{9 \cdot 10} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

A proposta não é substituir a ideia de usar as séries geométricas para encontrar frações geratrizes, mas elucidar situações que ocorrem em salas de aulas de matemática. Cabe ao professor decidir qual a melhor forma de trabalhar com suas turmas, ficando claro que esta oficina serve como apoio para as práticas pedagógicas.

Guias de trabalho

1ª etapa: Apresentação e comentários

Representação decimal de um número real α não negativo é uma expressão que se caracteriza pela forma $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$, que pode ser escrita compactamente como $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, em que a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e os índices $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ são dígitos, ou seja, são números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$.

As frações que tem 10, 100, 1000 no denominador podem ser representadas na forma decimal. Essas frações são denominadas frações decimais. Com relação a fração decimal, sua representação decimal é finita, logo $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$ e $\frac{9}{8} = \frac{1125}{1000} = 1,125$.

Todas as frações equivalentes às frações decimais têm denominadores que podem ser escritos como potências de 2 ou 5, ou de 2 e 5. Se houver algum denominador que apresenta, pelo menos um fator diferente de 2 e 5, então a fração não pode ser equivalentemente escrita na forma de fração decimal.

2ª etapa: Atividades

1) Faz sentido escrever $1/3 = 0,33333\dots$? Qual o sentido de infinitas casas decimais?

Discussão: De acordo com os PCNs (1998) de matemática para o ensino fundamental, as dificuldades encontradas no processo de aprendizagem dos

números racionais, em especial, dos decimais finitos e infinitos se deve ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõem rupturas com ideias construídas para os números naturais. Ao trabalhar com os números racionais, os alunos acabam tendo que enfrentar obstáculos dos quais se destaca a representação do número racional na forma finita e infinita.

2) Escreva $12,314157\overline{237}$ na forma $\frac{a}{b}$.

Discussão: Ao se observar cálculos numéricos com aproximações, observa-se que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, sendo essa última, finita ou infinita periódica (BRASIL, 1998).

3) Mostre que $0,999\dots = 1$. E que $2,5 = 2,4999\dots$ e $1,48 = 1,47999\dots$

Discussão: As representações infinitas (tanto de racionais como de irracionais) dão origem ao problema da aproximação numérica, mostrando a necessidade de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número. Essa é uma oportunidade apropriada para se abordar o conceito de arredondamento e as consequências nos resultados das operações (BRASIL, 1998).

4) Responda, justificando a resposta. A representação decimal de $\frac{3}{17}$ é infinita e periódica? Caso afirmativo, quantos algarismos têm o período dessa dízima?

Discussão: Destacam-se as importâncias de centrar as situações de aprendizagem na elaboração de estratégias. De acordo com PCNs de matemática do ensino fundamental (1998), é preciso que o aluno desenvolva processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos.

5) Existe algum número real entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$? E entre $0,333\dots$ e $0,444\dots$? Justifique suas respostas. Como seria representação decimal dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$?

Discussão: Um conjunto é denso, se, entre dois de seus elementos quaisquer, exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto (CARAÇA, 1951, p. 56).

As discussões são apenas nortes motivadores para o desenvolvimento do debate que se abrirá depois de respondidas às questões.

3º tempo: Debate final

Nesta etapa, serão discutidos os pontos formais na apresentação das representações decimais, buscando refletir sobre como pode ser trabalhado esse assunto, associado às aulas de Análise Real nos cursos de licenciatura.

INFORMAÇÃO GERAL	
Título da oficina: Um olhar para as dízimas periódicas: convite ao professor do ensino fundamental e médio	
Instituições dos autores: Universidade Federal de Juiz de Fora	
Nome dos autores: Willian José da Cruz e Carlos Alberto Santana Soares	
País ou países dos autores: Brasil	
Número de horas mais convenientes:	3 horas
Nível de escolarização para o qual será dirigido (educação infantil, anos iniciais do ensino, Anos finais do ensino fundamental, ensino médio, ensino superior, ou geral).	ensino fundamental e médio
Número máximo de pessoas.	20 pessoas
Equipamentos audiovisuais ou informáticos necessários (Projetor multimídia, TV)	Projetor multimídia, computador

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.
- BARTLLE, Robert G. **Elementos de Análise Real**. Tradução de Alfredo A. de Farias. – Rio de Janeiro: Campus, 1983.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC /SEF, 1998, 148 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. v 2. Brasília: MEC, 1998.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa, 1951.
- COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTD, 2000.
- DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é matemática**. (Coleção do ensino fundamental). São Paulo: Ática, 2009.
- _____. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). São Paulo: Ática, 2009.
- GIOVANNI, José Ruy Junior e CASTRUCCI, Benedito. **A conquista da matemática**. (coleção do ensino fundamental). São Paulo: FTD, 2009.
- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática**. (Ensino médio – volume único). 4ª ed. São Paulo: Atual, 2007.
- IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. **Concepções dos alunos sobre números reais**. In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 39-67.
- LAROUSSE, Ática: **Dicionário da língua portuguesa** – São Paulo: Ática, 2001.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise; v.1. 12 ed**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- _____. **Explorando o ensino da Matemática**: artigos: volume 1 Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 240 p.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti e DAVID Maria Manuela Martins Soares **A formação matemática do professor**. Belo Horizonte: Autentica, 2005.
- _____. **O conhecimento matemático do professor**. (Artigo), Revista Brasileira de Educação nº 28, 2005.
- _____. **Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores**. (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 19, - Jan./Jun. 2003.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto. **Por que análise real na licenciatura?** (Artigo), Revista Zetetike - Cempem – FE – Unicamp – v.11 – n. 23, - Jan./Jun. 2005.
- PENTEADO, C. B; **Reações de Professores do Ensino Médio frente a questões relativas à Densidade dos Números Reais**, CIEM, 2000.

PENTEADO Cristina Berndt; SILVA, Benedito Antonio da; **O estudo da densidade dos números reais no ensino médio**. in: anais IX ENEM – encontro nacional de educação matemática, Rio de Janeiro, 2007.

PENTEADO, Cristina Berndt; **Percepções dos professores do ensino médio relativas a densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. 2004. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PUC – São Paulo.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 604 f. Tese (Doutorado em Educação) - FE/Unicamp, Campinas (SP), 2001.

_____. **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009.p. (81 – 97).