Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ramalho Garbelini Silva

Sistemas de Numeração: Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial.

Juiz de Fora

2016

Ramalho Garbelini Silva

Sistemas de Numeração: Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial.

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rogério Casagrande

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Ramalho Garbelini.
Sistemas de Numeração: Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial. / Ramalho Garbelini Silva. – 2016.
147 f. : il.

Orientador: Rogério Casagrande
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Sistemas de Numeração. 2. História dos Números. 3. Origem da Computação. I. Casagrande, Rogério, orient. II. Título.

Ramalho Garbelini Silva

Sistemas de Numeração: Das Talhas Numéricas aos Primórdios da Computação Artificial.

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 24 de agosto de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério Casagrande
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^{a}. Dr^{a}. Gilcélia Regiane de Souza
Universidade Federal São João del-Rei

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela saúde e força. Aos meus familiares. A todos os professores, pela paciência, ajuda, compreensão e atenciosidade. Aos nobres colegas de curso, pela agradável convivência, amizade, histórias de vida e superação. Aos idealizadores do PROFMAT, por oferecer uma oportunidade impactante de mudar e enriquecer nossa vida profissional e formação. Agradeço ao inestimável apoio financeiro da CAPES. A uma grande quantidade de pessoas, que auxiliou em livros, sugestões, caronas, estadias e encorajamento! E ao meu orientador Rogério Casagrande, pela tranquilidade e receptividade.

RESUMO

Este trabalho consiste em uma exposição sucinta dos elementos notáveis dos sistemas de numeração, partindo das talhas numéricas até os primórdios da computação artificial. Tem como objetivo ser um recurso que permita ampliar a percepção da simplicidade matemática, ressaltando a importância do uso e evolução dos sistemas numéricos, ao longo da história da humanidade. Serão apresentados sistemas compartilhados por povos e civilizações, até a consolidação do sistema binário, como elemento essencial dos atuais computadores. Ele se destina a alunos e professores, que buscam informações sobre o tema, inseridos em seus respectivos contextos históricos e culturais. Este trabalho também abre espaço para sugerir discussões pertinentes sobre temas da atualidade, sendo instrumento de apoio em provas e exames, em conexão com temas transversais, tai como questões éticas, pluralidade cultural, trabalho e consumo. Este trabalho também contribui para aspectos motivacionais da aprendizagem e educação tecnológica.

Palavras-chave: Sistemas de Numeração. História dos Números. Origem da Computação.

ABSTRACT

This study consists of a concise exposition of the notable elements in the numbering systems ranging from the tally system to the beginnings of artificial computing. It aims at being a resource that allows enhancing the perception of mathematical simplicity highlighting the importance of the use and evolution of numbering systems through human history. It presents systems shared by peoples and civilizations up to the consolidation of the binary system, which is the essential element of today's computers. It is intended for students and teachers that search for information on the subject regarding their particular cultural and historical settings. This study also provides an opportunity for suggesting relevant discussions on current issues, therefore being a supporting tool for tests and exams in connection with transverse themes, such as ethics, cultural plurality, work and consumerism. It also contributes to motivational aspects of learning and technological education.

Key-words: Numbering Systems. Number History. Computational Origin.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Osso de Lobo Dolní Vestonicě. 20
Figura 2 – O Adorador. 21
Figura 3 – Osso de Abri Cellier. 21
Figura 4 – Placa de Abri Lartet. 21
Figura 5 – Bastão de Isturitz. 22
Figura 6 – Ossos de Le Placard. 22
Figura 7 – Ossos de Mezim. 22
Figura 8 – Cyclon. 23
Figura 9 – Osso de Ishango. 23
Figura 10 – Numerações no osso de Ishango. 24
Figura 11 – Osso de Lebombo. 24
Figura 12 – Osso de Apolo 11. 24
Figura 13 – Esquema do ciclo do conhecimento. 25
Figura 14 – Ciclo Realidade - Individuo - Ação. 26
Figura 15 – Tokens de Jarmo, Iraque, c. 6.500 a.C. 29
Figura 16 – Fichas de Tepe Gawra, atual Iraque, c. 4.000 a.C. 29
Figura 17 – Fichas de Uruk, Iraque, c. 3.300 a.C. 30
Figura 18 – Discos ou fichas de Uruk, c. 3.300 a.C. 30
Figura 19 – Envelope de Susa, Irã, c. 3.300 a.C. 30
Figura 20 – Tábua de registros de produtos têxtil, Uruk, Iraque, c. 3.100 a.C. . . . 31
Figura 21 – Bloc de Godin Tepe, Irã, c. 3.200 a.C., com sinais circulares, decorrente do token de esfera, indicando uma grande porção de grãos, e duas cunhas, de token de cone, demarcando medidas pequenas de grãos. . . 31
Figura 22 – Mapa da Mesopotâmia. 32
Figura 23 – Lista de números do ATU. 33
Figura 24 – Símbolos de contagem de objetos discretos. 34
Figura 25 – Símbolos especiais pra contagem de objetos específicos. 34
Figura 26 – Símbolos de contagem de cereais e laticínios. 34
Figura 27 – Símbolos para quantificar áreas. 34
Figura 28 – Símbolos de quantificação de pesagens. 35
Figura 29 – Símbolos de quantificação temporal. 35
Figura 30 – Símbolos de quantificação de pesagens de grãos. 35
Figura 31 – Representação numérica cuneiforme. 36
Figura 32 – Ambiguidade na notação cuneiforme. 37
Figura 33 – Plimpton 322 – Um importante texto matemático cuneiforme. 39
Figura 34 – Mapa Egito Antigo 40
Figura 35 – Representação numérica hieroglífica e hierática. 42
Figura 36 – Olho de Hórus e a representação fracionária. 43

Figura 37 – Representação fracionário de numerador unitário. 43
Figura 38 – Representação especial de frações. 43
Figura 39 – Mapa Grécia Antiga 45
Figura 40 – Sistema micênico e cretense de numeração. 46
Figura 41 – Representação de 7.699 no sistema micênico e cretense. 46
Figura 42 – Representação de 7.699 no sistema grego arcaico. 46
Figura 43 – Sistema de numeração ático. 47
Figura 44 – Formação numérica no sistema ático. 47
Figura 45 – Números no sistema ático. 48
Figura 46 – Tábuas com números no sistema ático. 48
Figura 47 – Variações gráficas no sistema ático. 48
Figura 48 – Sistema numérico jônio ou alfabético. 49
Figura 49 – Região da Palestina 52
Figura 50 – Quadro de Numeração Hebraica 53
Figura 51 – Representação hebraica de 352 e 35. 53
Figura 52 – Representação hebraica de 300, 80, 30, 2 e 1. 54
Figura 53 – Representação hebraica de 352 e 35. 54
Figura 54 – Representação hebraica de 900, 800, 700, 600, 500. 54
Figura 55 – Representação hebraica de 500, 600, 700, 800 e 900. 54
Figura 56 – Formas terminas de algumas letras hebraicas. 55
Figura 57 – Milhares hebraicos. 55
Figura 58 – Representação hebraica 5.739 55
Figura 59 – Representação hebraica de 15 e 16. 55
Figura 60 – Representação hebraica corrente de 15 e 16. 56
Figura 61 – Palavra Yahvé em hebraico. 56
Figura 62 – Abreviação da palavra Yahvé em hebraico. 56
Figura 63 – Mapa da Fenícia. 57
Figura 64 – Quadro comparativo de raízes alfabéticas. 58
Figura 65 – Império Romano em máxima extensão territorial. 59
Figura 66 – Sistema numérico romano arcaico. 60
Figura 67 – Evolução gráfica do número 50. 60
Figura 68 – Evolução gráfica do número 100. 60
Figura 69 – Evolução gráfica do número 500. 60
Figura 70 – Evolução gráfica do número 1.000. 61
Figura 71 – Mapa da Índia 62
Figura 72 – Algarismos hindus. 63
Figura 73 – Afabeto Chinês Clássico. 65
Figura 74 – Representação numérica chinesa. 66
Figura 75 – Representação chinesa dos números 12, 32, 161, 240, 345, 1.328 e 16.343. 66

Figura 76 – Representação chinesa das potências de dez. 68
Figura 77 – Zero chinês: ling. 68
Figura 78 – Representação chinesa de 504, 1.058 e 2.003. 68
Figura 79 – Diversas formas dos algarismos chineses. 69
Figura 80 – Algarismos chineses no sistema Suan Zí. 71
Figura 81 – Representação chinesa de 12, 25, 46 e 69. 71
Figura 82 – Sistema barras horizontais. 71
Figura 83 – Exemplos de números no sistema chinês de barras. 72
Figura 84 – Representação chinesa de 764, 7.064 e 70.640. 72
Figura 85 – Emprego do zero, na representação chinesa de barras. 72
Figura 86 – Evolução do sistema hindu, difundido pelos árabes. 76
Figura 87 – Mapa América Pré-Colombiana. 77
Figura 88 – Quadro de algarismos Maias. 78
Figura 89 – Representação do 21 e 79 no sistema Maia. 78
Figura 90 – Representação de 4.399 no sistema Maia. 79
Figura 91 – Representação de 13.495 no sistema Maia. 79
Figura 92 – Emprego do zero no sistema Maia. 79
Figura 93 – Página 24 do Códex de Dresden. 80
Figura 94 – Glifo Deus-Carregador. 81
Figura 95 – Representação cefalomórfica dos algarismos. 81
Figura 96 – Representação antropomórfica do número 1 =kin=dia. 81
Figura 97 – Variedades de zeros Maias. 82
Figura 98 – Algarismos Astecas. 82
Figura 99 – Uso de numeração Asteca. 83
Figura 100 – Tipos de Nó. 83
Figura 101 – Representação numérica no Quipo. 84
Figura 102 – Representação de 3.643 no Quipo. 84
Figura 103 – Representação 5.477 no Quipo. 84
Figura 104 – Hexagramas do I Ching enviados a Leibniz. 87
Figura 105 – Trigramas. 88
Figura 106 – Yin Yang. 88
Figura 107 – Tábua Binária de Leibniz. 89
Figura 108 – Correspondência binária dos trigramas. 90
Figura 109 – Medalha binária idealizada por Leibniz. 91
Figura 110 – Soroban - Ábaco japonês. 96
Figura 111 – Ossos de Napier do século XVII. 96
Figura 112 – Relógio Calculador. 97
Figura 113 – Pascalina. 97
Figura 114 – Stepped Reckoner. 98

Figura 115 – Tear de Basile Bouchon. 99
Figura 116 – Pato de Vaucanson. 100
Figura 117 – The Writer. 100
Figura 118 – Tear de Jacquard. 101
Figura 119 – Máquina diferencial de Babbage. 102
Figura 120 – Código Morse. 103
Figura 121 – Analisador diferencial de Kelvin e Thomson 104
Figura 122 – Tabuladora de Hollerith. 105
Figura 123 – Conferência de Solvay. 106
Figura 124 – Analisador diferencial de Vannevar Bush. 107
Figura 125 – Válvulas Termiônicas. 107
Figura 126 – Representação de um relé. 110
Figura 127 – Estado de um relé. 111
Figura 128 – Relé em paralelo. 111
Figura 129 – Relé em série. 111
Figura 130 – Modelo K. 112
Figura 131 – Máquina de Atanasoff e Berry. 112
Figura 132 – Computador Colossus. 113
Figura 133 – Computador ENIAC. 114
Figura 134 – Símbolos e valores de tensões. 115
Figura 135 – Tensões dos 10 algarismos do sistema decimal. 116
Figura 136 – Mostrador de um odômetro. 127
Figura 137 – Gráfico de $y = x^{\frac{n}{x}}$ 129
Figura 138 – Infográfico comparativo entre as medidas de informação. 131
Figura 139 – Pixar in a Box: Matemática e ciência na produção de desenhos animados. 132
Figura 140 – Página com tradutor de códigos binários. 133
Figura 141 – Questão 149 - Enem 2015 - 2ª Aplicação - Caderno Amarelo. 134
Figura 142 – Questão 177 - Enem 2014 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo. 135
Figura 143 – Questão 176 - Enem 2014 - 3ª Aplicação - Caderno Cinza. 136
Figura 144 – Questão 139 - Enem 2012 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo. 137
Figura 145 – Questão 157 - Enem 2012 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo. 138
Figura 146 – Questão 150 - Enem 2012 - 2ª Aplicação - Caderno Cinza. 138
Figura 147 – Questão 137 - Enem 2011 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo. 139
Figura 148 – Questão 15 - 1ª Fase 2007 - Nível 3 139
Figura 149 – Questão 2 - 2ª Fase 2010 - Nível 1 140
Figura 150 – Questão 11 - 1ª Fase 2013 - Nível 2 140
Figura 151 – Questão 13 - 1ª Fase 2014 - Nível 2 140
Figura 152 – Questão 1 - 2ª Fase 2014 - Nível 1 141
Figura 153 – Séria Bits e Bytes. 141

Figura 154 – Atividade de Matrizes e Imagens Digitais. 142

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
MEC	Ministério da Educação.
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais.
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio.
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.
UFF	Universidade Federal Fluminense.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14

2 UM POUCO SOBRE MATEMÁTICA. 17

3 PRIMEIROS RESQUÍCIOS – TALHAS NUMÉRICAS 20

4 TOKENS (c. 7.500 a.C. – 3.000 a.C.) 29

5 MESOPOTÂMIOS (c. 7.500 a.C. – 3.000 a.C.) 32

6 EGÍPCIOS (c. 3.200 a.C. – 2.300 a.C.) 40

7 GREGOS (c. 2.000 a.C. – 146 a.C) 45

8 HEBREUS (c. 2.000 a.C – 70 d.C) 52

9 ROMANOS (c. 1.000 a.C. – 476 d.C) 59

10 HINDUS (c. 2.500 a.C – 535 d.C) 62

11 CHINESES (c. 5.000 a.C. – 1.911 d.C.) 65

12 ÁRABES (c. 630 d.C. – 1.258 d.C.) 74

13 PRÉ-COLOMBIANOS (c. 4.000 a.C – 1.533 d.C) 77

14 SISTEMA BINÁRIO 87

14.1 REFERÊNCIAS INICIAIS. 87

14.2 PRIMÓRDIOS DA COMPUTAÇÃO ARTIFICIAL. 95

15 DEFINIÇÃO DE BASE NUMÉRICA. 117

15.1 INTEIROS POSITIVOS EM BASES NATURAIS. 117

15.2 CONVERSÕES NUMÉRICAS ENTRE BASES. 120

15.2.1 **Sistema Decimal para Sistema Binário.** 120

15.2.2 **Sistema Decimal para Sistema Quaternário.** 121

15.2.3 **Sistema Decimal para Sistema Hexadecimal.** 121

15.2.4 **Número real e base binária.** 122

15.3 CURIOSIDADE DO SISTEMA TERNÁRIO. 127

16 SUGESTÕES DE APLICAÇÕES E TEMAS PARA INVESTIGAÇÕES. 130

16.1 ENSINO FUNDAMENTAL. 130
16.2 ENSINO MÉDIO. 133
16.2.1 **Enem.** 133
16.2.2 **OBMEP.** 139
16.2.3 **Uso de recursos da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC).** 141
16.2.4 **Conclusão.** 143

REFERÊNCIAS 145

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho é uma breve apresentação da trajetória dos sistemas de numeração ao longo da história. Com foco inicialmente nas formas representativas, compartilhadas por grupos, povos ou civilizações, que se organizaram e deixaram registros de conhecimentos numéricos. Também seguiremos pelo caminho da consolidação do sistema binário como elemento chave dos primórdios da computação artificial. A ideia de número ou de um sistema de numeração se revela de natureza complexa, sendo difícil abordar de maneira individual ou separada de uma série de fatores ou contextos. Esses fatores muitas vezes são associados a um sistema cultural, político, transcendental e de poder. Muito mais que respostas e esclarecimento, vamos nos deparar por um caminho repleto de interrogações e com as mais diversas formas de conexões.

Por trás das grandes inovações, que contribuíram para melhorias das nossas condições de sobrevivência, no início a matemática esteve presente. Nosso mundo atual, repleto de equipamentos que são elementos centrais dos sistemas produtivos, comunicacionais e de interação humana, a presença dos números ainda é muito forte e imperceptível. Um dos objetivos desse trabalho é contribuir para amenizar essa possível falta de percepção de alguns alunos ou até professores.

Como recurso de ensino e aprendizagem, esse trabalho atende aos apelos dos PCNs. Uma das contribuições é a de reafirmar o projeto da relação da matemática e temas transversais. Do que diz respeito da pluralidade cultural, pode-se levar em consideração que:

> Pela análise da história da produção do conhecimento matemático os alunos verificarão também as contribuições significativas de culturas que não tiveram hegemonia política. No estudo comparativo dos sistemas de numeração, por exemplo, poderão constatar a supremacia do sistema indo-arábico e concluir que a demora de sua adoção pelos europeus deveu-se também ao preconceito contra os povos de tez mais escura e não-cristãos. Outros exemplos poderão ser encontrados ao se pesquisar a produção do conhecimento matemático em culturas como a chinesa, a maia e a romana. ([10], p. 32-33)

Outro fator a ser evidenciado, é da possibilidade desse material contribuir para o processo de contextualização da aprendizagem, para alunos e professores. Recorrendo a História da Matemática, possibilita ampliar a percepção sobre a natureza e relevância do conhecimento matemático. Assim:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos

> e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. ([10], p. 42)

Grande parte dos alunos e até professores acreditam que a matemática é imutável, que não há, mais nada a ser descoberto, e que os conteúdos são ultrapassados ou até inúteis. A concepção utilitária e imediatista do conhecimento, aliado a fatores culturais e dificuldades de acesso a fontes de informações e formação, representam grande desafio para professores, alunos e todo sistema educacional. Essa mentalidade é totalmente oposta a nossa realidade, onde a cada dia somos bombardeados por novidades tecnológicas, impulsionadas por conhecimentos cuja base se encontra no contexto escolar. Por mais obsoletos que sejam os conteúdos, de matemática ou outra disciplina, é urgente a conexão dos assuntos trabalhados nas escolas com a realidade tecnológica da qual estamos inseridos:

> É esperado que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. ([10], p. 46)

Perceber que os conteúdos estudados, principalmente os mais simples, estão por trás de “grandes milagres” dos quais usufruímos, pode contribuir positivamente pra aspectos motivacionais e para reflexão da importância do conhecimento. “Inserir o conteúdo num contexto mais amplo provocando a curiosidade do aluno ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através de uma real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento.” ([12], p. 4). Dessa forma, a matemática pode ser um mecanismo contra processo de exclusão social e desigualdades:

> (...) a Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais. ([10], p. 56)

Os conhecimentos numéricos ganham grande destaque no ensino básico. Grande parte desse conhecimento se revela nos aspectos aritméticos ou operacionais, muitas vezes ainda inseridos com tarefas mecânicas e exaustivas. É fato que uma boa capacidade operativa e até automatizada em realizar procedimentos de cálculos, facilitam o avanço e desenvolvimento da aprendizagem, o que é importante relevar, é que esse processo pode ser enriquecido, confrontando com outras formas de representação numérica, discutindo vantagens e motivos de se estudar os métodos consolidados. Assim:

> (...) os problemas relacionados à evolução histórica dos números podem ser usados como interessantes contextos para ampliar a visão dos alunos sobre os números naturais, não apenas relatando como se deu essa evolução, mas explorando as situações com as quais as civilizações antigas se defrontaram, como: as limitações dos sistemas não-posicionais, os problemas com a representação numérica antes do surgimento do zero, os procedimentos de cálculo utilizados pelas civilizações suméria, egípcia, grega, maia, chinesa etc. Mostrar que a história dos números está ligada à das necessidades e preocupações de povos que, ao buscar recensear seus membros, seus bens, suas perdas, ao procurar datar a fundação de suas cidades e as suas vitórias, usando os meios disponíveis, construíram interessantes sistemas de numeração. Quando foram além e se impuseram a obrigação de representar grandes quantidades, como exprimir a quantidade de dias, meses e anos a partir de uma data específica ou de tentar fazer os cálculos utilizando os próprios símbolos do sistema, foram colocados no caminho da numeração posicional. ([10], p. 96)

No contexto do Ensino Médio, também é citado nos documentos como competência a serem desenvolvidas, fatores que este trabalho pode trazer contribuições:

> Explorar conteúdos relativos aos temas números, álgebra, medidas, geometria e noções de estatística e probabilidade envolve diferentes formas do pensar em Matemática, diferentes contextos para as aplicações, bem como a existência de razões históricas que deram origem e importância a esses conhecimentos. Mas para evitar a quantidade excessiva de informações, é preciso fazer um recorte, usando alguns critérios orientadores deste processo de seleção de temas.([11], p. 119)

Na seção 2 falaremos um pouco sobre Matemática, abordando aspectos sobre sua natureza. Nas seções 3 e 4, veremos as primeiras ideias sobre sistemas de numeração. Da seção 5 à 13, veremos sistemas numéricos compartilhados, por povos, grupos ou civilizações, e suas particularidades. Na seção 14, veremos sobre o Sistema Binário, e sua contribuição. Na seção 15, veremos sobre os conceitos matemáticos de Base Numérica. Na seção 16 será apresentada sugestões de aplicações e conclusão.

2 UM POUCO SOBRE MATEMÁTICA.

No aprendizado de matemática, a curiosidade de saber de onde vieram as coisas, e também para que elas servem, é muito acentuada. "Aprender matemática é como começar a conhecer outra pessoa. Quanto mais você sabe de seu passado, melhor pode entendê-la e interagir com ela, agora e no futuro." ([8], p. 1). Se perguntarmos para qualquer pessoa o que é matemática, geralmente vamos obter como resposta, que é a ciência que estuda os números. Realmente boa parte do pensamento matemático tem alicerce na ideia de número, sendo um bom ponto de partida e uma grande motivação para o estudo, mas dizer que a matemática se reduz ao estudo dos números está bem longe de nossa atual realidade. Uma definição bastante aceita, sobre o que é a matemática, é de que ela seja a "ciência dos padrões", e identificar padrões passa por dois processos, um deles é de natureza cognitiva, relacionado a nossa mente, num processo de percepção. O outro processo está na transmissão e registro desses padrões, que está profundamente associado à linguagem. Keith Devlin destaca que:

> Diferentes tipos de padrões fazem surgir diferentes áreas da matemática. Por exemplo, a teoria dos números estuda (e a aritmética usa) padrões de número e de cálculo numérico; a geometria estuda padrões de formas; o cálculo infinitesimal nos permite lidar com padrões de movimento; a lógica estuda padrões de raciocínio; a teoria de probabilidades lida com padrões do acaso; a topologia estuda padrões de proximidade e posição. ([22], p. 26)

O ato de perceber e executar padrões parecem ser instintivos e necessários a sobrevivência, do homem e de muitos seres vivos. De fato:

> Até o organismo mais simples precisa distinguir entre menos e mais comida. Animais que criam filhotes devem ter uma intuição muito boa para perceber se todos os seus filhotes estão presentes ou não. Outros animais precisam saber a diferença entre dois pontos de luz, que poderiam ser os olhos de um predador, e vários pontos de luz, que poderiam ser camuflagem ou reflexos aleatórios. Assim, muitas criaturas, inclusive os seres humanos, desenvolveram cérebro que são naturalmente muito bons em reconhecer padrões de coisas e fazer distinção entre eles. ([7], p. 13)

Podem-se identificar alguns atributos mentais que contribuem para lidar com reconhecimento e utilização de padrões ou com matemática ([22], p. 28-30). Vejamos alguns:

- Senso numérico – Reconhecer a diferença entre um objeto, um grupo de dois objetos, um grupo de três objetos, a ideia de que um grupo tem mais elementos que outro grupo, percepção de mudança em uma pequena coleção quando um ou mais objetos foram retirados ou acrescentados ao conjunto;

• Capacidade numérica – ou capacidade de contar, indefinidamente por grandes quantidades, é um processo que envolve ordenar os elementos de um grupo de algum modo, e, depois, aproveitar essa ordenação, contar todos os elementos, um por um ou de dois em dois ou de três a três, e assim por diante. Muito mais que estabelecer correspondências um-a-um, mas empregar um processo de contagem;

• Capacidade algorítmica – capacidade de executar processos, ou sequências de passos que levam a um objetivo determinado.

Uma pessoa pode ter senso numérico, saber comparar se um conjunto tem mais ou menos elementos, mas não ter uma capacidade numérica, saber contar. Pode ter um senso numérico, capacidade numérica e não ter capacidade algorítmica, como por exemplo, fazer somas e diferenças. Essas capacidades, são bases da enumeração, numeração, número e os sistemas de numeração, que serão descritas adiante. Outras capacidades mais elaboradas também são relatadas:

• Capacidade de lidar com abstrações – desvincular algo da realidade, do concreto, separar isoladamente de outras partes ou elementos e operar mentalmente com noções, ideias, conceitos;

• Senso de causa e efeito – capacidade de perceber que certos acontecimentos desencadeiam ou causam novos acontecimentos;

• Capacidade de elaborar e seguir uma sequência causal de fatos ou eventos – muito usado em provas e demonstrações matemáticas;

• Capacidade de raciocínio lógico – que consiste no estabelecimento da verdade de afirmações, que podem ser usadas para desenvolver uma cadeia de pensamentos até uma conclusão válida;

• Capacidade de raciocínio relacional – está associado com as relações ou ligações existentes entre objetos de estudos;

• Capacidade de raciocínio espacial – capacidade que constitui a base da geometria.

Em algum nível essas capacidades são inatas no ser humano, mas por mais apuradas que sejam ainda não são suficientes para lidar com matemática. Fatores como, o meio social, cultural, geográfico, familiar, temporal podem influenciar fortemente na forma de lidar, utilizar e desenvolver o conhecimento matemático. Esses novos elementos, são acrescentados pela contribuição da história, antropologia e pela etnomatemática e outras áreas do conhecimento. Assim:

> Todo individuo vivo desenvolve conhecimento e tem um comportamento que reflete esse conhecimento, que por sua vez vai se modificando em função dos resultados do comportamento. Para cada individuo, seu comportamento e seu conhecimento estão em permanente transformação, e se relacionam numa relação que po-

> deríamos dizer de verdadeira simbiose, em total interdependência. ([19], p. 18)

Com um destaque para a questão cultural:

> Ao reconhecer que os indivíduos de uma nação, de uma comunidade, de um grupo compartilham seus conhecimentos, tais como linguagem, os sistemas de explicações os mitos e cultos, a culinária e os costumes, e têm seus comportamentos compatibilizados e subordinados a sistemas de valores acordados pelo grupo, dizemos que esses indivíduos pertencem a uma cultura. No compartilhar conhecimento e compatibilizar comportamento estão sintetizadas as características de uma cultura. Assim falamos da cultura da família, da tribo, da comunidade, da agremiação, da profissão, da nação. ([19], p. 18)

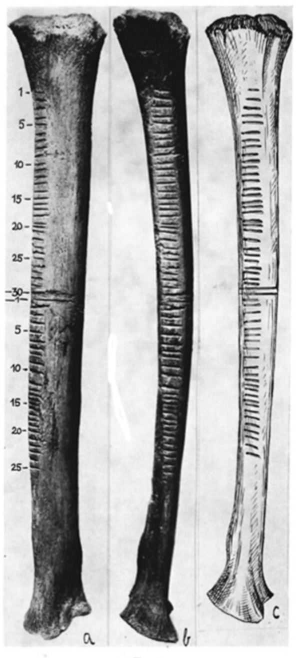
Diante do exposto, a tarefa de afirmar sobre o que é matemática, não é tão fácil, mas podemos explorar a ideia básica revelada pelas opiniões de um bom número de pessoas, que é sobre a questão do senso numérico, capacidade numérica e seus sistemas. Com o auxilio da história da matemática, descobertas arqueológicas e etnomatemáticas, pode-se traçar um caminho pelo desenvolvimento dos sistemas numéricos, não sendo uma prova definitiva, mas apenas uma sugestão, do possível alicerce do conhecimento matemático.

3 PRIMEIROS RESQUÍCIOS – TALHAS NUMÉRICAS

As talhas numéricas (*tally sticks*) são marcações em ossos, madeiras e pedras. Estes artefatos são evidências de que o homem passa a fazer uso de ideias de numerosidade com certas finalidades, apresentando supostos registros de padrões temporais, transações, obrigações e divisão de bens. São pistas conceituais do reconhecimento de números de objetos, distinguindo um, mais de um e muitos, sendo as primeiras referências documentadas sobre o senso numérico e capacidade numérica da humanidade. Conforme Almeida [2], na transição do Paleolítico Médio para o Paleolítico Superior, c. 40ka (c.– cerca de; aproximadamente; ka – 1000 anos atrás), encontram-se os principais registros sobre números e sistemas de numeração:

• Rádio de Lobo Dolní Vestonicě – c. 30ka – Encontrado na República Tcheca, no sítio arqueológico de Dolní Vestonicě por Karl Absolon em 1937, o osso possui 55 incisões, reunidas em grupo de cinco, sendo umas das mais antigas evidências do emprego de base cinco em um sistema de numeração.

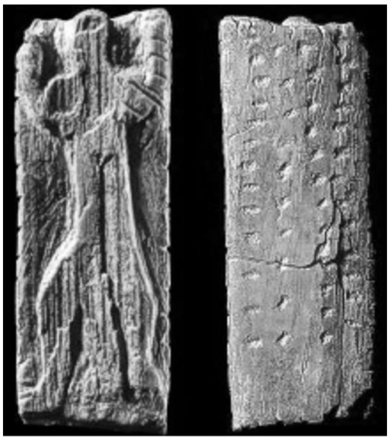
Figura 1 – Osso de Lobo Dolní Vestonicě.



FONTE: [3], p.6.

• O “Adorador” – c.35-32 ka – escavado em 1970, é uma pequena figura em marfim de mamute. Pode representar uma criatura híbrida em atitude de adoração. Possui 49 pontos no verso arranjados em 4 filas de 14, 10, 12 e 13 pontos, nas laterais há um total de 30 incisões em grupos de 6, 13, 7 e 13. As possíveis interpretações são de três lunações ou estimativa de gravidez humana.

Figura 2 – O Adorador.



FONTE: [2], p.164.

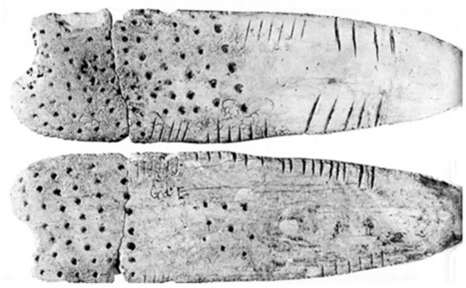
• Osso de Abri Cellier – c.24 ka – encontrado em 1927 no sítio arqueológico de Abri Cellier, Dordonha França, em osso de ave, com entalhes de supostas marcações de registros de tempo e calendários lunares.

Figura 3 – Osso de Abri Cellier.

FONTE: [3], p.6.

• Placa de Abri Lartet – c. 35-32 ka – Encontrado Dordonha na França, contento numa face 118 marcas e no verso 90, correspondendo a um registro de 11 meses.

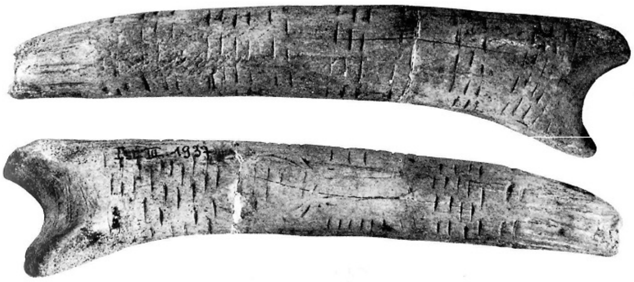
Figura 4 – Placa de Abri Lartet.



FONTE: [2], p.165.

• Bastão de Isturitz - c. 35-32 ka - Encontrado em Isturitz, sul da França, registra possivelmente nas faces quatro e cinco meses lunares;

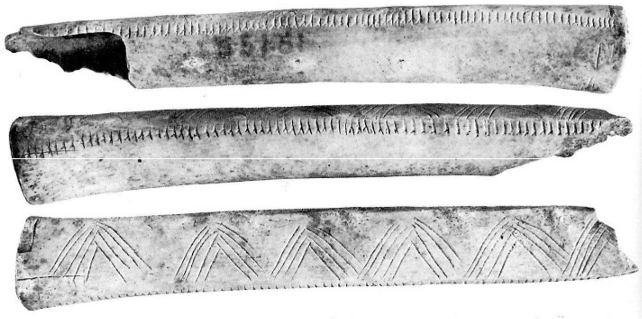
Figura 5 – Bastão de Isturitz.



FONTE: [3], p.6.

• Ossos de águia de Le Placard - c. 35-32 ka - Encontrado no sítio arqueológico Le Placard, Dordonha, na França, contendo possivelmente em cada lado seis meses lunares, totalizando um ano lunar.

Figura 6 – Ossos de Le Placard.



FONTE: [2], p.167.

• Ossos de mamute de Mezim – c. 29-15 ka – Encontrados em 1908 no sítio arqueológico de Mezim, Ucrânia.

Figura 7 – Ossos de Mezim.

FONTE: [3], p.6.

• Cyclon – c. 20 ka – Objetos de pedras encontradas na Austrália com possível emprego para contagem de aves emus e mortes de guerreiros.

Figura 8 – Cyclon.

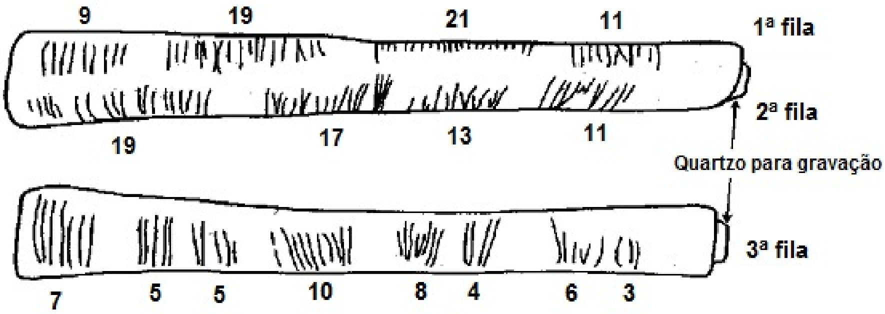
FONTE: [3], p.6.

• Osso de Ishango – c. 20 ka – osso de babuíno inscrito com marcações de quartzo, descoberto por Jean Heizelin de Brancourt em 1950, na área de Ishango, perto do lago Edwards no que é hoje República Democrática do Congo, o conjunto de entalhes sugere um sistemas de um calendário lunar com seis meses ou um sistema numeral; especulou-se que as marcas nos ossos seria uma espécie de calendário lunar de uma mulher da idade da pedra que controlava os ciclos menstruais, que originou o slogan “A menstruação criou a matemática” ([48], p. 26).

Figura 9 – Osso de Ishango.

FONTE: [3], p.6.

Figura 10 – Numerações no osso de Ishango.



FONTE: [28], p.14.

• Osso de Lebombo e Sibudu Cave – c. 60 ka – Descoberta na Border Cave, nas montanhas rochosas de Lebombo, entre a África do Sul e Swazilândia, é tido como o mais antigo artefato matemático, consiste em um perônio de babuíno com 29 entalhes, e no mesmo estrato encontrou-se dois fragmentos de ossos de costelas househods compostos de entalhes. Mesmo tipo de ossos entalhados foram encontrados em Sibudu Cave situado em KwaZulu-Natal, África do Sul.

Figura 11 – Osso de Lebombo.

FONTE: [3], p.7.

• Ossos de Apolo 11 – c. 74-68 ka – Provavelmente ainda em estudo, conjunto de estratos também conhecido por Still Bay, possui as mais antigas pinturas figurativas da África, encontrados no abrigo rochoso de Apolo 11, próximo ao rio Nuob, na Namíbia. Foi também encontrado ossos de costela com 23 entalhes regulares e outro com 12 entalhes.

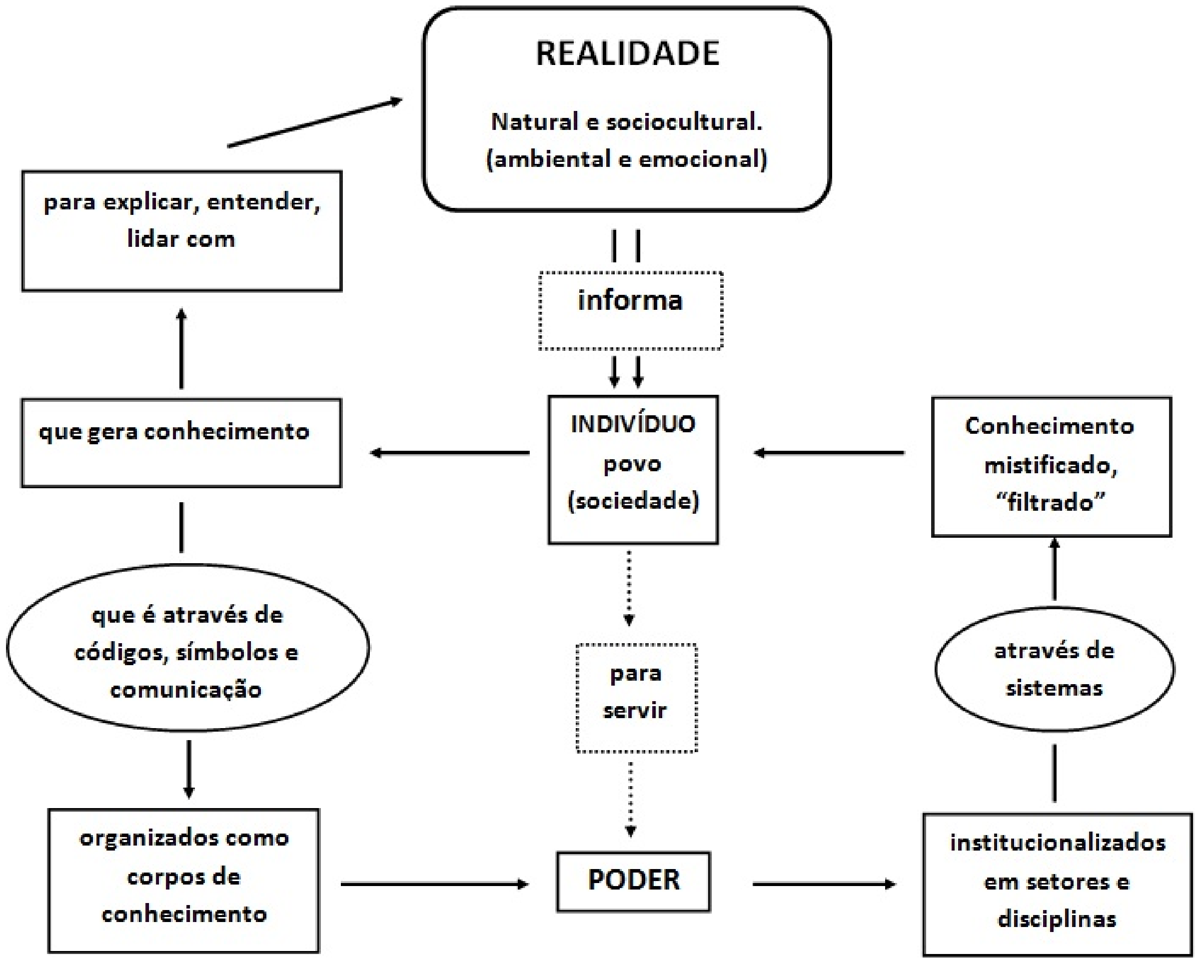
Figura 12 – Osso de Apolo 11.

FONTE: [3], p.7.

As descobertas descritas anteriormente levaram a uma grande discussão das motivações sobre a origem da contagem, bem como se contar seria um ato intuitivo, evolutivo ou se foi criado em algum momento ([28], p. 15). A importância desses estudos se dá pelo motivo da grande influencia do pensamento matemático numa ampla área do pensamento humano, e que por milhares de anos, contribui para uma vasta superestrutura sobre os alicerces do número. ([51], p. 11)

Das evidências milenares registradas, é possível deduzir que, de alguma forma os homens se organizavam e produziam conhecimentos, com aspirações de sobrevivência e transcendência, com os sistemas de registros e observações lunares demarcavam o tempo e o espaço, assim “a matemática começa a se organizar como um instrumento de análise das condições do céu e das necessidades do cotidiano.” ([19], p. 35). Ir além da sobrevivência, é a nova aspiração do homem, consolidado por um ciclo de conhecimento e interação com a realidade em que vive, representado na seguinte ilustração:

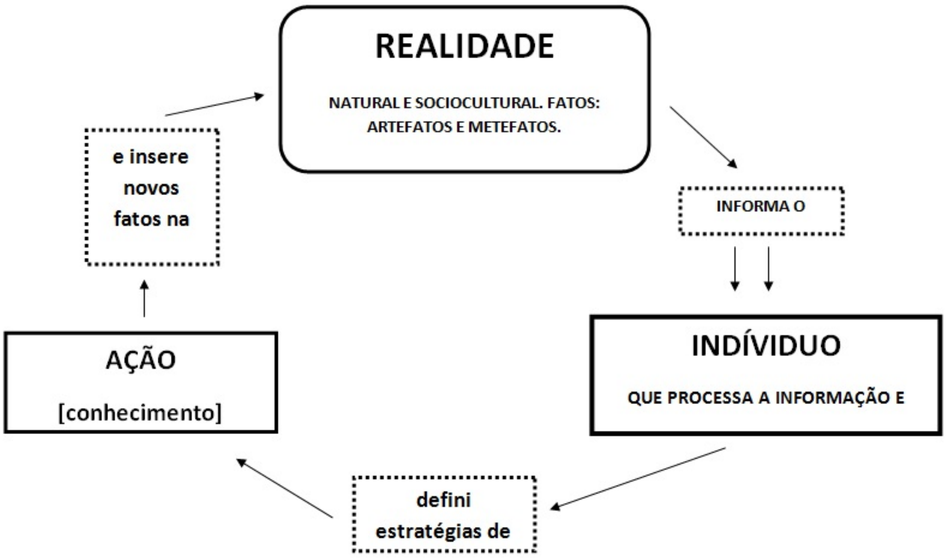
Figura 13 – Esquema do ciclo do conhecimento.



FONTE: [19], p.38.

A medida que o tempo passa a ideia do espaço e tempo, cada vez mais, ganha relevância, presentes no canto, na dança, nos cultos, nos rituais, nas confecções de ferramentas e principalmente no domínio da agricultura, que possibilitou a “mais importante transição conceitual da história da humanidade" ([19], p. 20). O homem deixa de ser nômade e passa a se organizar em assentamentos permanentes. E os conhecimentos sobre a realidade passam a se tornar estratégicos, condensados e descritos no ciclo seguinte:

Figura 14 – Ciclo Realidade - Individuo - Ação.



FONTE: [19], p.52.

Após esse estágio, começam a existir novos vestígios de sistemas de contagem e numeração, em grupos e regiões geográficas distintas, isoladas e dispersas. Vestígios, pois os materiais que chegaram até os dias de hoje são precários e incompletos, e com conteúdos que descrevem problemas e procedimentos que aparentam ser muito mais antigos que os materiais encontrados. Outro ponto de dificuldade é conseguir colocar em ordem cronológica e estabelecer algum tipo de ligação e influência com os conhecimentos dos grupos, ou civilizações. Mas esses vestígios mesmos que precários ajudam a iluminar o imenso mistério que permeiam os números e os sistemas de numeração, num processo que indica que enumeração evolui para numeração, e surge então a ideia de número e por fim o sistema de numeração.

Entende-se por enumeração o processo de comparação um a um de objetos de uma coleção ou conjunto, com outros objetos usados como marcadores. Nesse processo nenhum tipo de linguagem era necessário, era empregado no controle de guerreiros ou rebanhos, exigir reparações em casos de perdas em conflitos, vejamos:

> (...) quando os guerreiros partiam para a batalha, cada um punha uma pedra num monte. Quando voltavam para casa, cada um tirava uma. O número de pedras que sobrava era igual ao número de homens perdidos. O chefe retirava então uma pedra de cada vez e pegava uma vareta para cada pedra que retirava (varetas são mais fáceis de carregar). Caminhava então até outra tribo, com as

> varetas, e exigia um búfalo em troca de cada um deles. Assim, sem realmente contar ou mesmo compreender a noção de número, era possível efetuar permutas e transações muito precisas. ([7], p.15)

Esse procedimento de registro usando pedras, varetas, bolinhas de argila, ou outro objeto, tinha o problema de armazenamento, pois poderia ocupar um espaço considerável, e ainda os objetos poderiam ser perdidos. Outro método era o de sequenciar partes do corpo, que foi usado por algumas tribos, como os bugilai de Nova Guiné, que estabeleciam uma sequencia ordenada fixa e natural, usando por exemplo um toque com determinado dedo:

> Dedo mínimo da mão esquerda → Dedo anular da mão esquerda → Dedo médio da mão esquerda → Dedo médio da mão esquerda → Dedo indicador da mão esquerda → Dedo polegar da mão esquerda → Pulso esquerdo → cotovelo esquerdo → Ombro esquerdo → Lado esquerdo do peito → Lado Direito do Peito. Para checar se um rebanho de proporções adequadas estava completo bastava lembrar qual a última parte do corpo que tinha sido tocada. Se esta parte fosse, por exemplo, o cotovelo esquerdo, então ao último animal checado corresponderia o "cotovelo esquerdo". A ordem da sequência era fixa e natural. Todos a levavam consigo.([31], p.2-3)

O toque a uma determinada parte do corpo sofre uma transição para uma palavra que dá nome a esse procedimento, assim cria-se com o uso da linguagem, palavras que continham o significado correspondente às partes tocadas dispensando, por exemplo, toda a "coreografia" das partes do sequenciamento, que agora podem ser substituídas pelos sons das palavras que obedecem a ordem. Surge assim o processo de numeração, e nesse estágio é caracterizado pelo uso da linguagem e com palavras tomando o lugar de objetos na sequência ordenada. Em algum momento, alguns povos perceberam que a ordem dos objetos dos conjuntos comparados era irrelevante, perceberam que o nome do último objeto falado da sequência, não só informava o último objeto do conjunto comparado, mas também informava quantos objetos havia nesse conjunto, no total. Independente da ordenação ou rearranjo dos elementos do conjunto comparado, da natureza dos objetos, a quantidade seria a mesma, surge aí o conceito de número. Para a atividade comercial, isso representaria um avanço, por exemplo, mercadorias poderiam ser contadas mesmo se não estivessem presentes, e isso também facilitaria processos de armazenamentos, estocagens e controle de bens.

Muitos foram os marcadores usados nos processos de contagem, os cinco dedos das mãos, os dez dedos das duas mãos, os vinte dedos das mãos e dos pés. Uma indagação surge nesse processo: o que fazer quando os marcadores se esgotam ou quando ainda restam objetos a serem comparados? A resposta dessa indagação, está na evolução do uso de símbolos ao invés de ações, intensificando o mecanismo de escrita e registro. A ideia de agrupamento ganha força, como elemento primordial para o desenvolvimento do conceito da *base* de um sistema numérico.

Talhas, desenhos ou simbologias que indicavam agrupamentos de mesma quantidade, que se repetiam, foram sendo aprimorados, outros extintos, por diversos grupos, povos e civilizações. Esse processo de repetição de simbologias contribuía para representação de grande quantidade numérica. Mais fantástico que essa evolução é o grande mistério em determinar os rastros da trajetória evolutiva e do desenvolvimento dos sistemas numéricos.

4 TOKENS (c. 7.500 a.C. – 3.000 a.C.)

São pequenos objetos de argilas encontrados principalmente no oriente médio, *token* significa símbolo, marca. Esses objetos de argilas possuíam diversas formas geométricas: esferas, discos, cones, triângulos, ovoides, etc. Funcionavam como uma extensão da memória humana para coletar, manipular, guardar e recuperar dados. Usados possivelmente em questões contábeis e comerciais, para manter o controle de mercadorias, animais e produtos agrícolas ([1], p. 91).

A arqueóloga franco-americana Denise Schmandt-Besserat, é uma das principais contribuintes do estudo e interpretação dos *tokens*. Supõe-se que o cone representava uma pequena medida de cereal, uma esfera para uma maior medida de cereal, disco plano uma medida maior que a esfera, também de cereal. Um disco achatado indicavam unidade de animais ou rebanho com possivelmente dez animais. O tetraedro indicava uma unidade de trabalho, um homem ou um dia.

Figura 15 – Tokens de Jarmo, Iraque, c. 6.500 a.C.

FONTE: $https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/tokens/$ Acesso em: 12/03/2016.

Figura 16 – Fichas de Tepe Gawra, atual Iraque, c. 4.000 a.C.

FONTE: $https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/tokens-and-writing-the-cognitive-development/$ Acesso em: 12/03/2016.

Em algumas cidades era possível encontrar um repertório de até 300 formas para representar a quantidade de produtos disponibilizados nos meios urbanos.

Figura 17 – Fichas de Uruk, Iraque, c. 3.300 a.C.

FONTE: $https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/from-accounting-to-writing/$
Acesso em: 12/03/2016.

Figura 18 – Discos ou fichas de Uruk, c. 3.300 a.C.

FONTE: $https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/from-accounting-to-writing/$
Acesso em: 12/03/2016.

Havia até um sistema de registro de dívidas, para uma espécie de arquivamento.

Figura 19 – Envelope de Susa, Irã, c. 3.300 a.C.

FONTE: $https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/from-accounting-to-writing/$
Acesso em: 12/03/2016.

Esse processo foi evoluindo, e os objetos tridimensionais cada vez mais substituídos pelas demarcações em tábuas de argilas.

Figura 20 – Tábua de registros de produtos têxtil, Uruk, Iraque, c. 3.100 a.C.

FONTE: *https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/from-accounting-to-writing/*
Acesso em: 12/03/2016.

Figura 21 – Bloc de Godin Tepe, Irã, c. 3.200 a.C., com sinais circulares, decorrente do token de esfera, indicando uma grande porção de grãos, e duas cunhas, de token de cone, demarcando medidas pequenas de grãos.

FONTE: *https://sites.utexas.edu/dsb/tokens/tokens-and-writing-the-cognitive-development/*
Acesso em: 12/03/2016.

Na Mesopotâmia esse sistema sofre aprimoramentos evoluindo para o processo de registro cuneiforme. Essa evolução se deve principalmente pela intensa atividade burocrática e também por influencia de crenças religiosas, dos quais acreditavam que para garantir a vida eterna ou uma vida sem tribulações, seus nomes teriam que ser registrados, falados e lembrados após a morte. Esses artefatos também foram encontrados na Ásia Central, China, África e América Central. Esse sistema era melhor que os entalhes pois a argila era mais fácil de manipular, sem a necessidade de ferramentas ou habilidades exclusivas de se trabalhar, era de fácil produção, permitia grande quantidade de processamento de dados e informações, facilidade de manipular e armazenar, atendia as necessidades de contagem e contabilidade requerida pela agricultura, não dependia de fonética, dialetos ou língua. ([1], p. 95)

5 MESOPOTÂMIOS (c. 7.500 a.C. – 3.000 a.C.)

Mesopotâmia, nome dado pelos gregos que quer dizer, terra entre dois rios, é a região do oriente médio situado entre os rios Tigre e Eufrates, que desciam das montanhas em curso ao Golfo Pérsico, onde atualmente é a região do Iraque e vizinhança. Ao norte havia uma região mais montanhosa, desértica e de pouca fertilidade, enquanto ao centro e sul encontravam os vales, com planícies muito férteis, denominados Crescente Fértil, local onde surgiram os primeiros grandes núcleos urbanos. ([54], p. 30)

Figura 22 – Mapa da Mesopotâmia.

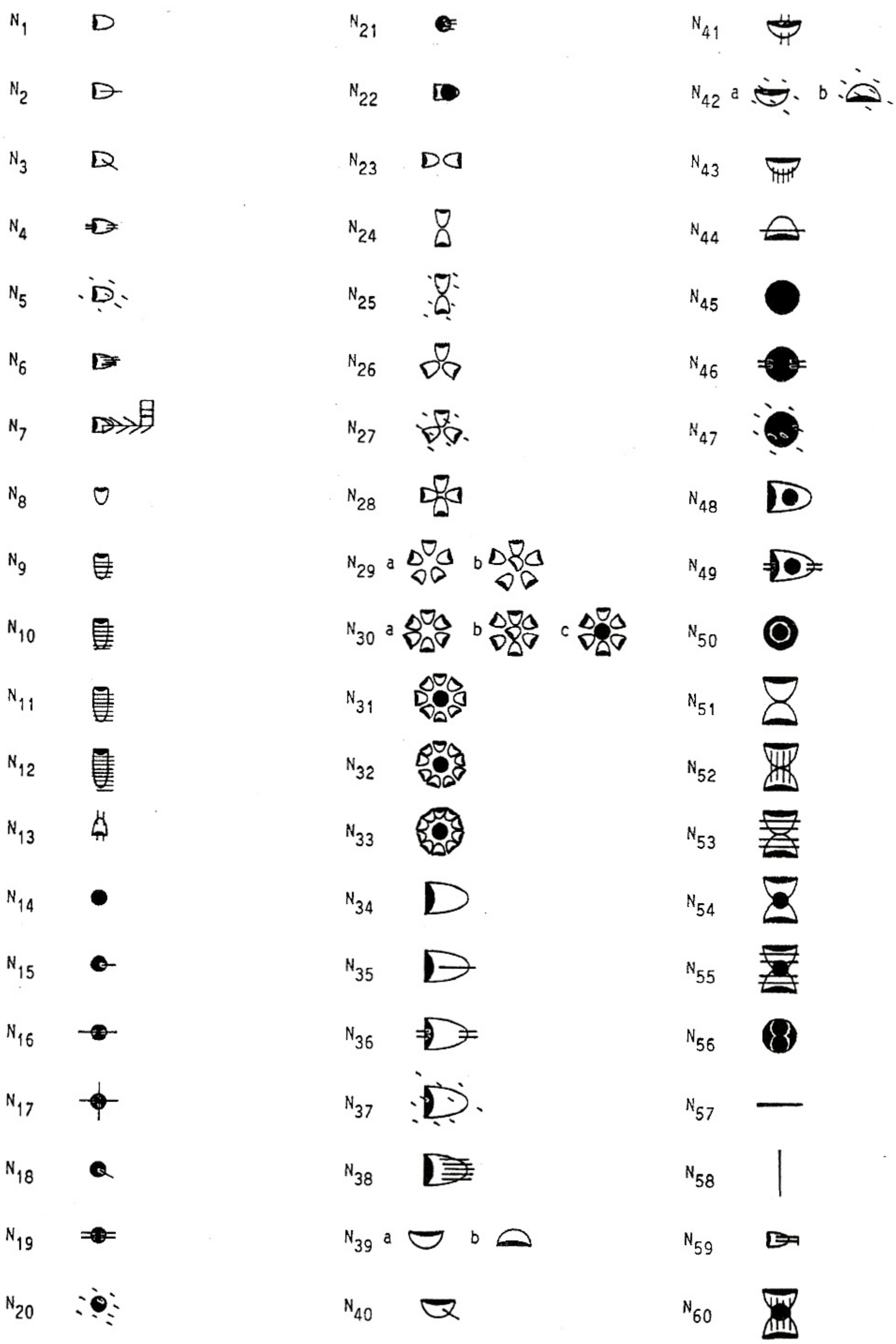
FONTE: [54], p.30.

Terra marcada por conflitos e constantes invasões, e também por violentas enchentes, que impulsionou o desenvolvimento de sistemas hidráulicos, construções de diques, canais de irrigação, sistemas de armazenagem hídrica para os severos períodos de seca, com grande desenvolvimento agrícola, pesqueiro e de transporte.

Antes de 2000 a.C., a região era ocupado pelos sumerianos e acadianos, com organização política associado a um sistema religioso, com governantes sendo intermediários e representantes de deuses, juntos com sacerdotes e burocratas. Eram hábeis em relações comerciais e nesse período tem o uso da escrita cuneiforme (caracteres em forma de cunha). Sumerianos situavam ao norte da Mesopotâmia, formado pelo conglomerado de cidades autônomas, que eram verdadeiros estados independentes, quase sempre em conflitos pela supremacia regional, as mais importantes eram Ur, Uruk, Nipur e Lagash. Na região central da Mesopotâmia situavam os acadianos, que em um dado momento acabou por unificar politicamente o centro e sul, e dominando os sumerianos, com o Rei Sargão I, por volta de 2300 a.C. consolidando os sistemas de escrita e de representação numérica. ([54], p. 31)

Segundo Almeida (2011) mais de 1200 sinais e suas variantes foram isolados nos textos arcaicos, dos quais 60 foram identificados como sinais numéricos, sendo talvez os mais antigos numerais que se tem conhecimento. Esses números estão indicados na tabela seguinte catalogado como símbolo N acompanhado por um índice numérico, dando “nome” aos signos na *Lista de Texto de Uruk* (ATU).

Figura 23 – Lista de números do ATU.



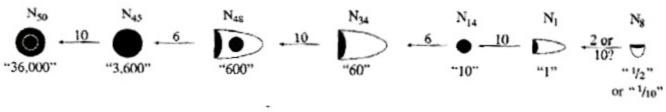
FONTE: [1], p.239.

Nessa representação só havia símbolos para quantidades 1, 10, 60 e 3600, o motivo para escolha é um mistério que ainda persiste até os dias de hoje. Um sistema numérico com a unidade, agrupamento de dez e agrupamento de 60, ou seja, uma mistura de base dez e base sessenta. Verificou-se também que os valores dos símbolos empregados, tinha valores distintos dependendo do contexto dos quais eram usados.

Vejamos alguns exemplos de sistemas empregados em alguns contextos:

• Contagem da maioria de objetos discretos - Contar pessoas, animais, peixes, objetos de madeiras e de pedra, produto do leite e tecidos.

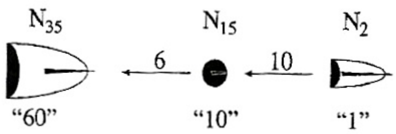
Figura 24 – Símbolos de contagem de objetos discretos.



FONTE: [1], p.240.

• Sistema sexagesimal – Contar determinados objetos, como animais mortos de rebanhos e jarros de certos tipos de líquidos.

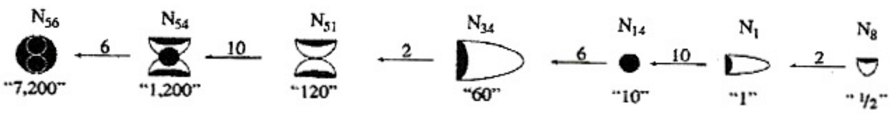
Figura 25 – Símbolos especiais pra contagem de objetos específicos.



FONTE: [1], p.240.

• Sistema Bissexagesimal – Usados para contar produtos de grão (discreto), queijo, peixe fresco, coisas associados a um sistema de rações.

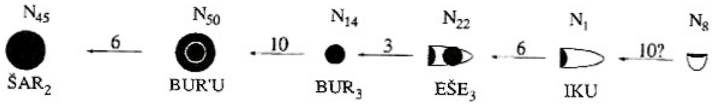
Figura 26 – Símbolos de contagem de cereais e laticínios.



FONTE: [1], p.241.

• Sistema de medição de áreas.

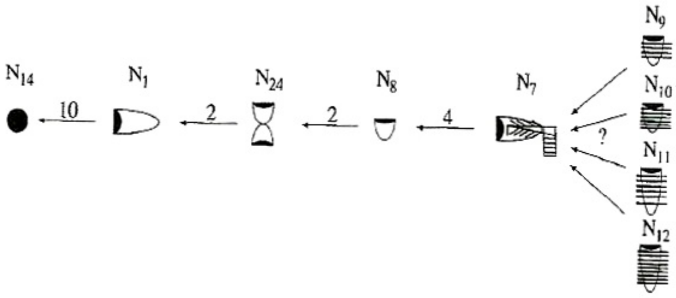
Figura 27 – Símbolos para quantificar áreas.



FONTE: [1], p.241.

• Um possível sistema usado em pesagens.

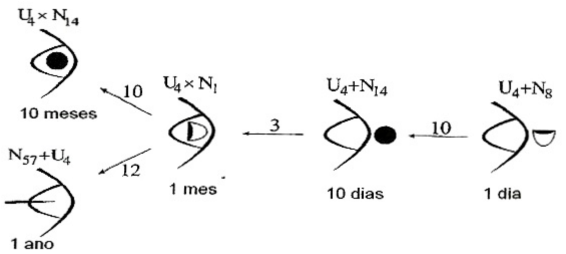
Figura 28 – Símbolos de quantificação de pesagens.



FONTE: [1], p.241.

• Um sistema usado para denotar unidades de tempo e de calendário (12 meses de 30 dias).

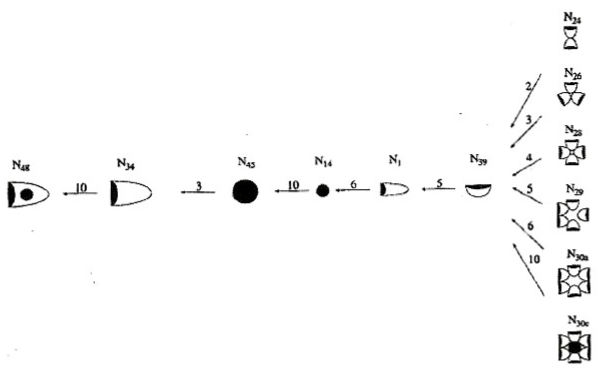
Figura 29 – Símbolos de quantificação temporal.



FONTE: [1], p.241.

• Sistema usado para capacidade de grão.

Figura 30 – Símbolos de quantificação de pesagens de grãos.



FONTE: [1], p.241.

O sistema decimal apesar de ter estrutura anatômica, ou seja pode empregar os dez dedos da mão, o agrupamento de dez, possui poucas possibilidade de divisões. A base 60 foi amplamente empregada, pois tudo indica que permite uma quantidade maior de múltiplos e submúltiplos, atendendo melhor as necessidades dos sumerianos em seus sistemas metrológicos.

Por volta de 2000 a.C. invasores destroem o Império Acadiano, com destaque para os amoritas, que vindo do deserto da Arábia, passam a dominar a Mesopotâmia, partindo de umas das principais cidades, a Babilônia. Inicia-se o primeiro Império Babilônico, com destaque para o famoso rei Hamurábi, que realizou a completa unificação da região da Mesopotâmia, e elaborou o primeiro código de leis completo de que se tem notícias. Conhecido pelo lema "olho por olho, dente por dente" ([54], p. 32)

Marcas em placas de argila inicialmente com formas circulares ou de unhas dos dedos, evoluíram para marcações que lembravam pegadas de pássaros, onde marcas diferentes representavam números diferentes. Essa forma de registro foi denominada escrita cuneiforme e representa um marco da origem do sistema da escrita ocidental. "É uma ironia maravilhosa pensar que a literatura foi um produto residual de uma notação numérica inventada pelos contadores mesopotâmios." ([6], p. 64)

Figura 31 – Representação numérica cuneiforme.

FONTE: [49], p.49.

Nesse sistema todos os números são representados por apenas dois tipos de símbolos.

Também é possível notar, por exemplo, que nesses registros, a quantidade 1 e 60 são representados pelo mesmo sinal. Tudo indica que nesse sistema os valores associados a esses símbolos que repetiam, indicando quantidades distintas, dependiam do posicionamento que ocupava na escrita. Ambiguidades eram encontradas, como das descrições do texto de Tatiana Roque ([49], p. 54):

Figura 32 – Ambiguidade na notação cuneiforme.

Valor decimal	Conversão para base 60	Notação com algarismos Indo-arábicos	Notação cuneiforme
2	2	2	
61	1 x 60 + 1	1;1	
120	2 x 60 + 0	2;0	
3.601	1 x 3.600 + 0 x 60 + 1	1;0;1	
7.200	2 x 3.600 + 0 x 60 + 0	2;0;0	
216.001	1 x 216.000 + 0 x 3.600 + 0 x 60 + 1	1;0;0;1	

FONTE: [49], p.54.

Para diferenciar a representação das quantidades indicadas pelo mesmo símbolo, iniciou-se um processo de escrever em colunas diferentes, e a introdução de colunas vazias entre os dois símbolos. Mesmo assim isso não permitia por exemplo, diferenciar a quantidade 7200 de 2 e de 120. A vulnerabilidade desse sistema encontrava no uso de apenas dois elementos simbólicos e ausência de um símbolo particular para representar o zero ou uma casa vazia. Então em muitas situações a compreensão da quantidade indicada, ficava na dependência de uma interpretação contextual.

Após a ocupação do norte da Mesopotâmia, a civilização Assíria empreende um processo expansionista dominando toda região, inaugurado o Império Assírio, por volta de (1300 a.C. – 612 a.C.), seu apogeu teve como referência o reinado de Assurbanipal, que além de grande guerreiro era entusiasta pela ciência e literatura, criando uma grande biblioteca em Nínive, sendo a nova capital da Assíria, reunindo um grande acervo cultural, formado por dezena de milhares de tijolos de argila. Com a morte de Assurbanipal, os caldeus invadem Nínive, destruindo a cidade e todo império Assírio. A Babilônia volta ser a capital da Mesopotâmia e surge o segundo Império da Babilônia (612 a.C – 539 a.C), mais grandioso que o de Hamurábi. Foi época de grandes construções públicas e de ampla reforma religiosa transformando o deus *Marduck* no principal Deus da babilônia. Atribui-se a *Marduck*, a construção da torre de Babel, citada no livro de Gêneses na Bíblia, como uma torre pra se chegar ao céu. Também nessa época, grandes muralhas foram erguidas para proteção das cidades e construídos luxuosos palácios com os famosos *Jardins Suspensos da Babilônia* como uma das maiores *maravilhas do mundo antigo*.

Sobre os registros encontrados dessa época, tudo indica que eram contabilidades primitivas de sacerdotes dos templos:

> O templo sumeriano, como já vimos, dispunha de propriedades, rebanhos e grandes receitas. Empregava e aumentava a riqueza auxiliando seus fiéis com adiantamentos e empréstimos. Os sacerdotes que administravam tais receitas prestavam contas ao seu senhor divino dos negócios realizados com a sua riqueza e deviam promover a conservação e aumento de suas propriedades. Enfrentavam um problema sem precedentes na história humana: jamais, antes, havia sido concentrado um volume tão grande de riquezas, sob um mesmo controle. Para registrar o que era devido ao deus, e suas transações, os sacerdotes não ousavam confiar na memória. Nem teriam sido de utilidade os recursos econômicos pessoais, como dar um nó no lenço. O sacerdote era mortal, mas a corporação a que pertencia era imortal, como o deus a que servia. O sacerdote podia morrer antes que o empréstimo feito com os bens de seu senhor fosse pago, mas o recebimento da dívida seria feito por um colega ou sucessor seu. O ministro do deus devia registrar quantos jarros de semente e de que qualidade havia emprestado, quantas ovelhas e de raças havia confiado a um pastor. E as transações deviam ser registradas de forma que toda a corporação, e não apenas um sacerdote, pudesse entender o registro e assegurar a satisfação dos compromissos para com o deus. Numa palavra, a escrita, como um sistema socialmente reconhecido de registro, era essencial para uma contabilidade satisfatória do templo. ([16], p. 177)

Com esses registros não podendo ser privados, muito mais que lembretes pessoais, o sistema tornou-se convencional, um cânone de sinais estabelecido e autorizado pela sociedade, com administradores e outros, iniciados na convenção.

Um dos artefatos cuneiformes mais conhecidos do mundo é a Plimpton 322, é um tablete de argila composta por uma tabela de 4 colunas e 15 linhas. Esse tablete lista os atualmente conhecidos ternos Pitagóricos, números sem casas decimais que especificam os comprimentos laterais dos triângulos retângulos, que são soluções para o teorema de Pitágoras. Por exemplo, os números, 3, 4 e 5 constituem uma terna Pitagórica. Essa tabela possivelmente seriam um possível solucionário para estudantes de álgebra ou problemas relacionados a trigonometria. O nome dessa tábua vem de George Plimpton, editor americano, que comprou essa tábua por 10 dólares em 1942, e depois fez a doação para a Universidade de Columbia. ([48], p. 34)

Figura 33 – Plimpton 322 – Um importante texto matemático cuneiforme.

FONTE: $http : //www - bcf.usc.edu/\ nemerson/450/a02.html$ Acesso em: 02/04/2016.

No sistema babilônico, também era possível a representação de números pequenos, equivalentes aos nossos números decimais e o cálculo de frações, encontrados amplamente em tabletes de observações astronômicas, com descrições de previsões de eclipses, movimentos planetários, e outros eventos celestes, com impecável precisão. Esse sistema contribuiu muito para nosso atual sistema de medição temporal, especula-se também que o número de dias arrendondados para 360, teria dado origem aos 360 graus do círculo, podendo ser dividido em seis partes de mesmo tamanho com sessenta graus, ou seja, a base desse sistema. ([17], p. 43)

6 EGÍPCIOS (c. 3.200 a.C. – 2.300 a.C.)

Situada no nordeste da África, numa região predominantemente desértica, a civilização egípcia se desenvolveu no vale fértil do rio Nilo, beneficiado pelos seus regimes de cheias. Com abundantes chuvas que caem durante certos meses na nascente do rio, ao sul do território egípcio (atual Sudão), provocavam o transbordamento de suas águas. Essas cheias, ao alagarem as margens do rios, depositavam sedimentos de alto poder fertilizante. Terminando as cheias e com os rios voltando ao seu leito normal, as margens ficavam prontas para uma agricultura farta. ([54], p. 21)

Figura 34 – Mapa Egito Antigo

FONTE: *https : //pt.wikipedia.org/wiki/Antigo_Egito* Acesso em: 14/05/2016.

Uma civilização marcada pelas grandes obras hidráulicas, irrigação e diques, fundamentais para a agricultura, com sistema político de uma monarquia teocrática, liderado pelo Faraó. A população deveria pagar os tributos e a ele servir, era considerado um deus vivo, sendo cultuado como tal. A religião era politeísta, constituída por centenas de deuses, alguns em formas de animais, como vacas, touros, crocodilo, serpentes, gatos, sendo *Amon-Ra* (Sol), um dos mais importantes. Os Deuses *Osíris, Ísis, Set, Hórus, Anúbis e Ápis* também tinham grande importância. Menés foi o primeiro dos faraós. Tinis foi uma das capitais, que mais tarde foi transferida para Mênfis, atual Cairo. Depois de 2780 a.C. a população que trabalhava na agricultura, também foi convocada para trabalhar em grandes projetos arquitetônicos, como as pirâmides, os templos funerários, destinados ao Faraó e sua família. As construções mais famosas são os da quarta dinastia egípcia: Quéops, Quéfren e Miquerinos. Só Quéops demorou cerca de vinte anos, recrutando mais de cem mil pessoas, em rodízio de três em três meses, praticamente toda população egípcia. Por volta de 2000 a.C. no Médio Império, a civilização passa por um período de grande prosperidade, com aprimoramentos de sistemas agrícolas e arquitetônicos, e de grande desenvolvimento artístico, literário e científico. Nesse período Tebas era a capital do império. Perto de 1800 a.C. invasores estrangeiros, hebreus e hicsos, usando cavalos, armas feito de metal, carros de guerra, equipamentos desconhecidos até então no vale do Nilo, isolaram os faraós em Tebas, controlando toda região. Os egípcios se unem, e pela liderança de Amósis I, expulsam os invasores e escravizam os hebreus. Perto de 1250 a.C. os hebreus conseguem deixar a região , sob o comando de Moisés, no chamado êxodo. Nesse período conhecido como Novo Império, houve grande movimento expansionistas, destacando o faraós, Tutmés III e Ramsés II, e o reformador religioso, Amenófis IV, que quis por fim ao culto politeísta, sem sucesso pois não conseguiu herdeiros que continuasse com as reformas. Um fato curioso, era o processo de mumificação, a cargo dos sacerdotes, para que a alma pudesse voltar a abrigar o corpo, trazendo grande conhecimento de anatomia que perduram até os dias de hoje. De extrema importância, na civilização egípcia, os escribas eram funcionários responsáveis pela contabilidade e supervisão administrativa. Aos escribas e sacerdotes deve-se o desenvolvimento matemático nesse período. ([54], p. 23-29)

A matemática do Egito nunca atingiu o nível obtido pela matemática babilônica. Deve-se, talvez, ao motivo de que na Babilônia as atividades econômicas eram mais desenvolvidas. Também no Egito as exigências em esforços administrativos e de engenharias eram bem menores que na Mesopotâmia. ([23], p. 67)

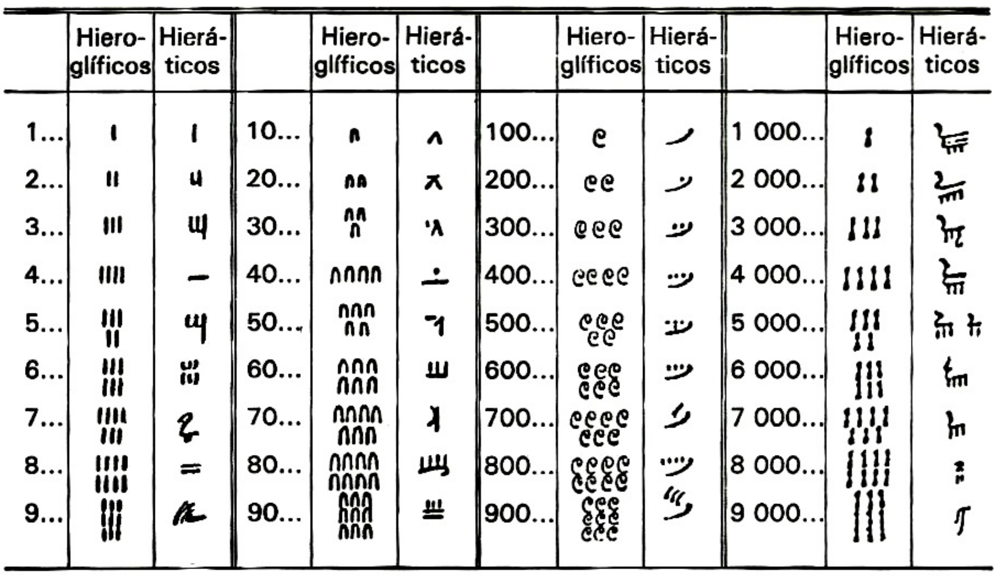
O sistema de representação numérica egípcio era na forma de hieróglifos, que em grego quer dizer escrita sagrada, que eram desenhos com determinados significados. Não era pictórica, ou seja, dava pra identificar o significado simplesmente olhando-os. Os hieróglifos já pertenciam ao grupo de ideogramas, e seu sentido e significado era convencional. No Egito foi inicialmente utilizado como meio de registrar espólios de guerra, principalmente capturas de prisioneiro e rebanhos.

Esse sistema usava a base dez, e também não havia símbolo para o zero, os números de 1 a 9 eram indicados por traços verticais e símbolos individuais eram usados para os múltiplos de 10 até 1.000.000. Os símbolos poderiam aparecer em qualquer ordem, pois usava a ideia de um principio aditivo simples. A quantidade 1, era indicado pelo traço vertical |; 10, era uma espécie de calcanhar ou arco ∩; 100, rolo de pergaminho, uma espiral ou uma corda enrolada ; 1.000, era indicado pela flor de lótus  ; 10.000, era representado por um dedo apontado para cima ; 100.000, podia ser um peixe, girino ou pássaro ; 1.000.000, seria um homem abismado ou adorador  . Em anos posteriores, com a necessidade de escrever grandes números, como por exemplo, 120.000 era representado pelo símbolo do número 120 com a flor de lótus vindo antes. Na tabela abaixo temos a representação numérica, com símbolos hieroglíficos.

<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>UNIDADES</td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||
	</td><td>		
	</td><td>				
</td><td>				
	</td><td>				
		</td><td>				
			</td></tr>
<tr><td>DEZENAS</td><td>∩</td><td>∩∩</td><td>∩∩∩</td><td>∩∩
∩∩</td><td>∩∩∩
∩∩</td><td>∩∩∩∩∩
∩</td><td>∩∩∩∩∩
∩∩</td><td>∩∩∩∩∩
∩∩∩</td><td>∩∩∩∩∩
∩∩∩∩</td></tr>
<tr><td>CENTENAS</td><td>𓍢</td><td>𓍢𓍢</td><td>𓍢𓍢𓍢</td><td>𓍢𓍢
𓍢𓍢</td><td>𓍢𓍢𓍢
𓍢𓍢</td><td>𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢
𓍢</td><td>𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢
𓍢𓍢</td><td>𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢
𓍢𓍢𓍢</td><td>𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢
𓍢𓍢𓍢𓍢</td></tr>
<tr><td>MILHARES</td><td>𓆼</td><td>𓆼𓆼</td><td>𓆼𓆼𓆼</td><td>𓆼𓆼
𓆼𓆼</td><td>𓆼𓆼𓆼
𓆼𓆼</td><td>𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼
𓆼</td><td>𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼
𓆼𓆼</td><td>𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼
𓆼𓆼𓆼</td><td>𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼
𓆼𓆼𓆼𓆼</td></tr>
<tr><td>DEZENAS
DE MIL</td><td>𓂭</td><td>𓂭𓂭</td><td>𓂭𓂭𓂭</td><td>𓂭𓂭
𓂭𓂭</td><td>𓂭𓂭𓂭
𓂭𓂭</td><td>𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭
𓂭</td><td>𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭
𓂭𓂭</td><td>𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭
𓂭𓂭𓂭</td><td>𓂭𓂭𓂭𓂭𓂭
𓂭𓂭𓂭𓂭</td></tr>
<tr><td>CENTENAS
DE MIL</td><td>𓆐</td><td>𓆐𓆐</td><td>𓆐𓆐
𓆐</td><td>𓆐𓆐
𓆐𓆐</td><td>𓆐𓆐𓆐
𓆐𓆐</td><td>𓆐𓆐𓆐
𓆐𓆐𓆐</td><td>𓆐𓆐𓆐𓆐
𓆐𓆐𓆐</td><td>𓆐𓆐𓆐𓆐
𓆐𓆐𓆐𓆐</td><td>𓆐𓆐𓆐𓆐𓆐
𓆐𓆐𓆐𓆐</td></tr>
<tr><td>1.000.000</td><td colspan="9">𓁨</td></tr>
</table>

Os hieroglifos estavam presentes em monumentos de pedra, madeira, metal, sendo bem elaborados e detalhados. Também foi encontrada outra forma de representação, chamada *hierática*, de caráter mais cursivo, usado principalmente em papiros, resultado possivelmente pela rapidez da escrita de pena. Os documentos matemáticos mais importantes do Egito, escritos em papiros faz uso da forma hierática de numerais.

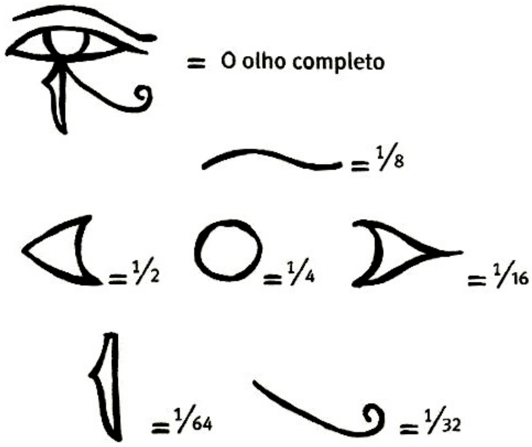
Figura 35 – Representação numérica hieroglífica e hierática.



FONTE: [31], p.23.

As frações causavam grande desconforto aos egípcios, utilizando ao longo do tempo diversas notações. Com um processo de divisões sucessivas, usavam símbolos, que eram partes do hieróglifo olho de *Hórus* ou olho de *Wadjet*.

Figura 36 – Olho de Hórus e a representação fracionária.



FONTE: [51], p.21.

O sistema mais famoso e amplamente utilizado para frações, era o de escrever frações $1/n$, simplesmente colocando o símbolo com aparência de semente, sobre o número escrito.

Figura 37 – Representação fracionário de numerador unitário.

FONTE: [33], p.349.

Para as frações 1/2, 2/3, 3/4, que talvez fossem as mais utilizados, havia uma representação especial.

Figura 38 – Representação especial de frações.

FONTE: [51], p.22.

Os hieróglifos egípcios e as escritas hieráticas, devido grande quantidade de simbologias, assim como o sistema dos sumérios, era sobrecarregados com uma surpreendente quantidade de ideogramas, chegando a cerca de 500 caracteres. Não se sabia ao certo como se fazia para se ter acesso aos ambientes de aprendizagem, que era de fato difícil, especializada, dependendo de talento e longo tempo. A escrita, era considerada uma profissão, privilegiada e oferecia perspectivas de progresso a postos, poder e riqueza. Documentos foram encontrados, com tom de advertências paternais, aconselhamento, sobre o ingresso na carreira dos estudos ou da escolha de outro seguimento:

> Decida-te pela escrita, e estarás protegido do trabalho árduo de qualquer tipo; poderás ser um magistrado de elevada reputação. O escriba está livre dos trabalhos manuais... é ele quem dá ordens... Não tens na mão a palheta do escriba? É ela que estabelece a diferença entre o que és e o homem que segura um remo. ([16], p. 183)

Uma grande desvantagem desse sistema é a excessiva quantidade de símbolos para indicar números grandes. A medida que as relações urbanas vão evoluindo, os processos administrativos e econômicos vão ficando cada vez mais complicados e trabalhosos, administrar obras públicas gigantescas, com um imenso exército de trabalhadores, calcular o abastecimento de matéria prima, ou recolher grande quantidade de impostos, fazer o controle de cereais em enormes celeiros de formas cilíndricas ou piramidais, ou dominar movimentações de grandes negociações em grandes mercados, seria um grande estímulo para cada vez mais estarem atentos, a melhorias nos sistemas de registros e manipulação numéricas. ([16], p. 193)

7 GREGOS (c. 2.000 a.C. – 146 a.C)

Geograficamente a Grécia era um aglomerado de ilhas e regiões montanhosas, com baixa pluviosidade e solo pouco fértil, abrangia o sul da península Balcânica (Grécia europeia ou continental), as ilhas do mar Egeu (Grécia insular) e o litoral da Ásia Menor (Grécia asiática). A partir do século VIII a.C, o território da Grécia europeia foi ampliado com a fundação de diversas colônias no Mediterrâneo ocidental, principalmente no sul da Itália, que passou a chamar Magna Grécia ([54], p.60).

Figura 39 – Mapa Grécia Antiga

FONTE: [54], p. 60.

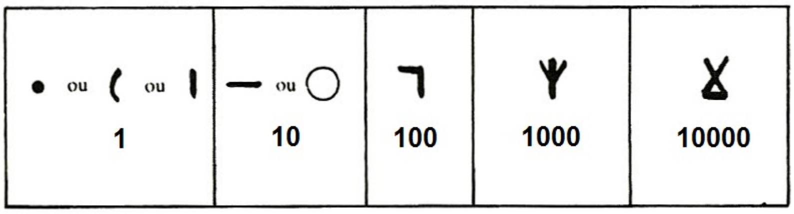
Com carências de abastecimento, e dificuldades em desenvolver agricultura em grande escala, esses aspectos influenciaram para que a Grécia não desenvolvesse um governo central. A organização política era a polis, cidade-estado cada uma com organização governamental, democrática ou monárquica, e legislações particulares. Nesse contexto, presumisse que cidadãos eram propícios a ter uma necessidade de argumentação e justificativas ou provas. Também pela localização geográfica, os gregos tiveram contatos com povos vizinhos, sejam por atividades comerciais ou ocupação, principalmente os egípcios e mesopotâmios. Os marinheiros podiam ir até ao mar negro ou Ásia Menor com grande facilidade. Diante dessa diversidade de contatos culturais e necessidade de informações estratégicas:

> Os gregos foram expostos a respostas diferentes para questões fundamentais acerca do mundo e começaram a criar as suas próprias alternativas. Em muitas áreas do pensamento aprenderam a não

> aceitar o que vinha dos tempos antigos. Em vez disso começaram a perguntar, e a tentar responder, 'porquê?'. Os pensadores gregos chegaram gradualmente à consciência de que o mundo à sua volta era inteligível, que podiam descobrir as suas características da investigação racional.(...) E mesmo apesar da civilização ocidental ter uma grande dívida com os gregos pelas suas realizações na literatura , arte e arquitetura, é a matemática grega que devemos a ideia da prova matemática, uma ideia que está na base da matemática moderna e, por extensão, no fundamento da nossa civilização tecnológica moderna. ([37], p.60)

Os principais sistemas de numeração dos gregos foram o ático e o jônio, após uma fase de numeração arcaica parecida com as dos egípcios. Esse sistema arcaico, era decimal e aditivo, com signo especial para unidade e potências de dez, influenciado por versões dos micênicos e cretenses.

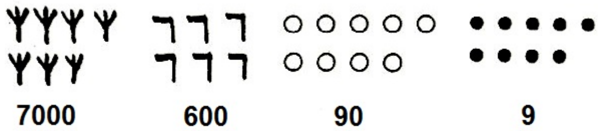
Figura 40 – Sistema micênico e cretense de numeração.



FONTE: [35], p.181.

Por exemplo, o número 7.699, no sistema cretense e micênico, ficaria:

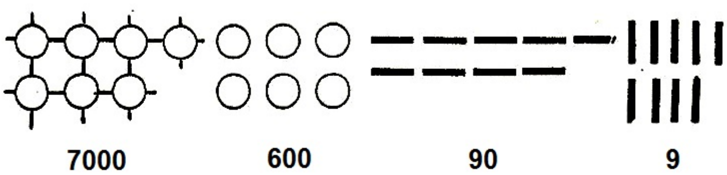
Figura 41 – Representação de 7.699 no sistema micênico e cretense.



FONTE: [35], p.182.

E no sistema grego arcaico teríamos:

Figura 42 – Representação de 7.699 no sistema grego arcaico.



FONTE: [35], p.182.

Esse método tinha a vantagem de facilitar os cálculos pela escrita, devido ao principio aditivo, mas para registro havia nosso já conhecido problema de grande repetição de símbolos nas representações.

O sistema ático ou herodiânico (nome que se deve aos vestígios encontrados em um fragmento de Herodian, um gramático do segundo século). A Ática era uma pequena península da Grécia, banhada pelo mar Egeu. Nessa região estava a importante cidade de Atenas, uma colina cultivável, e com forte atividade comercial. Nos sistema ático, os algarismos são letras iniciais dos nomes gregos dos seus correspondentes numéricos, assim os símbolos estão associados ao som ou nome da quantidade padrão de representatividade. Esse principio é chamado de acrofonia. Vejamos as representações:

Figura 43 – Sistema de numeração ático.

O SINAL	APENAS LETRA	E CUJO VALOR É IGUAL A	CORRESPONDE À INICIAL DA PALAVRA	ISTO É, AO NOME DO NÚMERO
𐅃	PI (trata-se da forma arcaica da letra P)	5	Πευτε Pénte	*Cinco*
Δ	DELTA	10	Δεκα Déka	*Dez*
H	ETA	100	Ηεκατον Hékaton	*Cem*
X	XI (pronunciar "KHI")	1.000	Χιλιοι Khílioi	*Mil*
M	MU	10.000	Μυριοι Myrioi	*Dez mil*

FONTE: [33], p.384.

Alguns símbolos são representações feitas por associações que segue a ideia do principio multiplicativo:

Figura 44 – Formação numérica no sistema ático.

50	𐅄	𐅃.Δ	5 × 10
500	𐅅	𐅃.H	5 × 100
5.000	𐅆	𐅃.X	5 × 1.000
50.000	𐅇	𐅃.M	5 × 10.000

FONTE: [33], p.384.

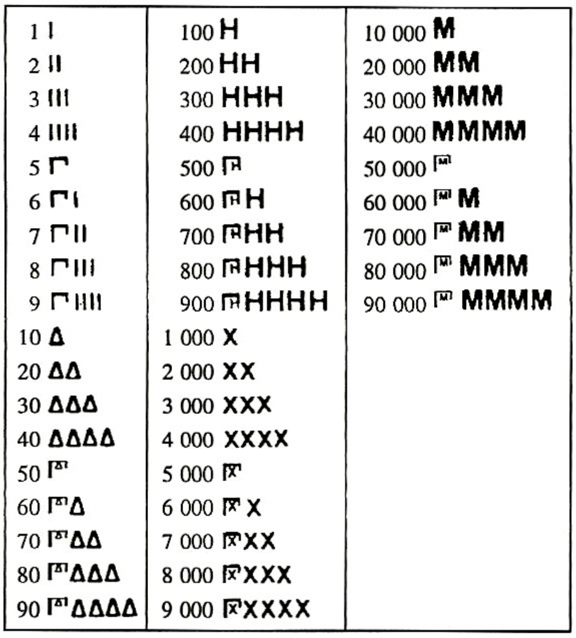
Assim temos a seguinte correspondência:

Figura 45 – Números no sistema ático.

FONTE: [35], p.184.

Segue abaixo uma tábua com as devidas grafias numéricas:

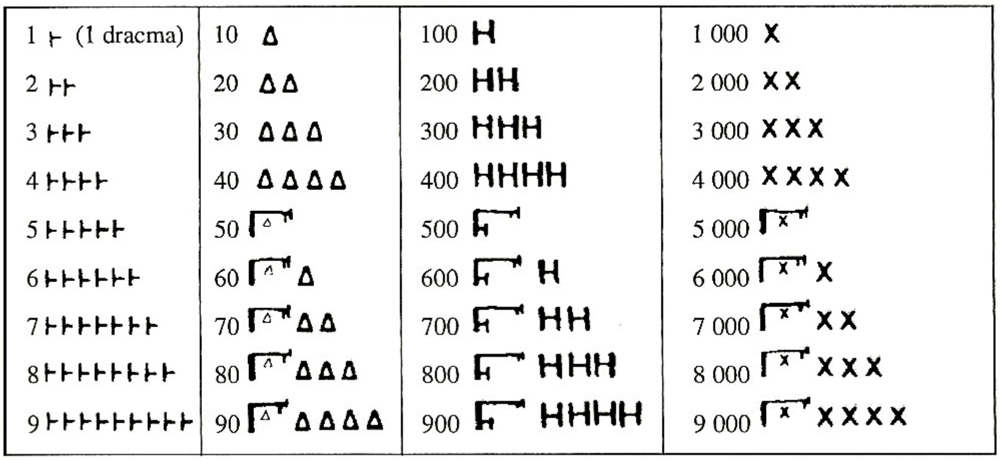
Figura 46 – Tábuas com números no sistema ático.



FONTE: [33], p.381.

Mais tarde encontrou-se uma variação sutil, principalmente no símbolo da unidade, denominada dracma:

Figura 47 – Variações gráficas no sistema ático.



FONTE: [33], p.387.

Uma desvantagem desse sistema é a dificuldade nas questões operatórias por escrito, os cálculos eram auxiliados por instrumentos mecânicos, os ábacos. Mas esse modo de representar os números cumpria o objetivo maior, que era a de desempenhar a função de registros contábeis e legais.

O sistema jônio ou alfabético, era uma versão que usava 24 letras do alfabeto grego, acrescentando três signos do alfabeto fenício, o dígamo, o san e o qoppa, divididos em três classes de unidade, de base dez.

Figura 48 – Sistema numérico jônio ou alfabético.

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	capa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mi	40	Υ	υ	ípsilon	400
Ε	ε	épsilon	5	Ν	ν	ni	50	Φ	φ	phi	500
Ϝ	ϛ	dígamo	6	Ξ	ξ	csi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	dzeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	qoppa	90	Ϡ	ϡ	san	900

FONTE: [35], p.218.

Nesse sistema os números eram formados pelo principio aditivo e justaposição as letras-números das ordens de unidades. Exemplos: IA=11; IB=12; IE=15; IZ=17; XME=645.

Em situações que fossem necessárias distinção de letras comuns e letras-números, era utilizada uma barra vertical por cima das letras:$\overline{Z} = 6$, $\overline{IE} = 15$, $\overline{OH} = 78$ e $\overline{PB} = 72$. Pra números de 1.000 a 9.000, usa-se um acento multiplicador por 1.000, mas também só era usado em situações em que não teria possibilidade de interpretação em um dado contexto: 'A=1.000,'B=2.000,'E=5.000,'Z=6.000 e 'H=8.000 . Uma observação importante, é que em nenhuma dessas representações contemplavam o princípio posicional e nem a ideia do zero.

Na Grécia é importante ressaltar a importância de alguns matemáticos que contribuíram imensamente com a mudança de compreensão e significado da natureza dos números. O primeiro a ser mencionado é Tales (c.624-574 a.C.), de Mileto na Ásia Menor, famoso por ficar andando sem rumo, perdido em seus pensamentos, com muitas histórias registradas, desde previsão de eclipse, medições de distância de navios no mar, e registrar propriedades e regras de construções geométricas bem como explicações ou provas dessas regras. Por causa disso recebeu o reconhecimento de pioneiro da tradição matemática grega, onde além das regras e registro dos procedimentos, estes de certa forma eram explicados e demonstrados. Tales tinha um espírito investigativo, e viajou para o Egito e Babilônia em busca de novos conhecimentos, recebendo a denominação de discípulo dos egípcios e caldeus. Por causa do seu comportamento de ficar devaneando, foi alvo de críticas e comentários, que diziam que sua atitude era ociosa. Uma história, que não se sabe ser verdadeira, dizia que ele cansado, fez uma previsão de grande colheita de azeitonas, e a partir desse conhecimento, propositalmente e com descrição adquiriu grande número de prensas de azeitonas dos mercados, tornando uma espécie de monopolista. Quando suas previsões se confirmaram, todos os produtores, principalmente os que fizeram chacotas tiveram que ir até ele, pra adquirir as prensas. Dizem que Tales queria mostrar que sua forma de agir não era tão ociosa, e podia fazer dinheiro caso bem entendesse. E mostrava que fenômenos materiais seriam governados por leis inteligíveis. ([37], p. 61)

Outro destaque é Pitágoras (c.572-497 a.C), que também passou muito tempo pelo Egito, Babilônia e possivelmente até na Índia. Contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao Tzu. Criou uma espécie de escola, ou ordem mística e filosófica, ao sul da Itália, em Crotona, reunindo um grupo de discípulos. Nesse grupo, havia uma ideia ou dogma de que o número era a essência de todas as coisas, e que tudo poderia ser contado ou medido. Ali começa-se a estabelecer a relação entre números e medidas, estudo de propriedades de figuras geométricas, estruturas estéticas associadas a medições, associar padrões geométricos a quantidades, e empregar números para estudo de fenômenos físicos, bem como astronomia, harmonias musicais e engenharia. A medida que são aprofundados certos estudos, alguns problemas vão surgindo. Estudando as relações do triângulo retângulo, surge a ideia da incomensurabilidade da diagonal do quadrado, sobre um problema de origem no Egito, analisam o processo da duplicação do cubo. Ajuda no problema de transformar um círculo em um quadrado de mesma área, e no problema de dividir um ângulo qualquer em três partes iguais, seguindo certas regras combinadas. Esses problemas impulsionaram a busca de explicações, enfraquecendo e renovando ideias, forçando a desenvolver instrumentos de investigação e organização mais elaborados das ideias. As palavras filosofia, ou amor a sabedoria e matemática, que significa o que é aprendido, supõe-se criação de Pitágoras para descrever atividades intelectuais.

Uma pessoa importante é Platão (427-347 a.C.), nasceu em Atenas (ou perto), estudou filosofia com Sócrates, e saiu pelo mundo em busca de novos conhecimentos. Nessa época os filhos de nobres eram enviados para estudo com os sofistas, professores sagazes que treinavam os estudantes na arte da retórica e cobravam muito caro. Sócrates não cobrava por seus serviços, era considerado o homem mais sábio de Atenas, sempre questionador, valorizava a sabedoria baseada em argumentos, raciocínio, perguntas, e em não acreditar nas coisas simplesmente porque alguém importante disse que são verdades ([56], p. 4). Platão estudou matemática na África e ao retornar para Atenas fundou a *Academia*, que era uma espécie de instituição de investigação científica e filosófica. Sua importância para a matemática se deve principalmente pelo grande entusiasmo e convicção de que o estudo da matemática fornecia um excelente treinamento para o espírito e desenvolvimento humano e por propagar que o estudo de matemática seria essencial no currículo para educação de homens de estado. Na *Academia*, havia um famoso lema *"Que aqui não adentre aqueles não versados em geometria."* Os diálogos de Platão são interpretados como primórdios de uma filosofia da matemática. Falava da logística que era uma espécie de técnicas de computação, que seria de alto valor para negociantes e guerreiros que se não soubesse as artes dos números, não saberiam dispor suas tropas. ([9], p. 78)

Aristóteles (384-322 a.C.), foi discípulo de Platão e mestre de Alexandre, *O Grande*. Considerado fundador da lógica, contribuiu com processos de formulações de conceitos, construções de teoremas, discussão sobre a ideia do infinito, influenciando muitos que futuramente, se dedicariam a estudar e escrever sobre os fundamentos da matemática.

Em Alexandria, na parte egípcia do império, passa a se tornar o grande centro de erudição, e por lá estava Euclides, o autor de *Os Elementos (Stoichia)*, um dos textos matemáticos mais bem sucedidos de todos os tempos. Sobre a vida de Euclides pouco se sabe, nem ao menos o local de seu nascimento. Supõe-se que ele tenha estudado com os discípulos de Platão, talvez até na própria *Academia*. Sobre os escritos de Euclides, muito se perdeu, alguns alegam que mais da metade de suas obras, e muitas delas, sendo de assuntos considerados os mais importantes de toda sua obra. ([9], p. 87). *Os Elementos* era um livro didático, com exposição dos assuntos básicos de matemática em ordem lógica. Sem pretensão de requerer originalidade do conteúdo é possível que Euclides utilizou muito dos resultados conhecidos e fornecidos por predecessores. A arte de calcular não estava incluída, pois não era parte da instrução matemática. *Os Elementos* se divide em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o décimo sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. Possui algumas pequenas falhas, mas é impecável pela construção lógica. A primeira versão impressa surgiu em 1482 em Veneza, com recorde em número de edições e talvez o de maior influência na história do ocidente, depois da Bíblia. Esse livro é um divisor de águas e influência até os dias de hoje nas publicações e desenvolvimento da matemática, consolidando a união da matemática e lógica. Proclo (412-485) filósofo grego neoplatônico, chegou a dizer que *Os Elementos* teriam com todo o resto da matemática, o mesmo tipo de relação que as letras do alfabeto têm com a linguagem. ([9], p. 90, 92 e 98)

8 HEBREUS (c. 2.000 a.C – 70 d.C)

A civilização hebraica desenvolve-se na região da antiga Palestina, nas margens do mediterrâneo, fazendo fronteira com a Síria, Fenícia e pelo deserto da Arábia. Com território cortado pelo rio Jordão, possui vale com área fértil e excelente para agricultura. As outras regiões eram formadas por região montanhosa, com solo pobre e seco, ocupado por grupos nômades dedicados ao pastoreio. As tribos hebraicas ocupam o território, que inicialmente chamava Canaã, terra dos cananeus, que também era de origem semita, ou seja, denominações dos decentes de Sem, personagem do Antigo Testamento, filho primogênito de Noé, grande referência do antepassado dos Hebreus. Hebreus também significa "povo do outro lado do rio". O grande legado dos hebreus, é o conjunto de livros sagrados, a Bíblia, o livro sagrado que mais influenciou e moldou as estruturas da civilização ocidental.([54], p. 39)

Figura 49 – Região da Palestina

FONTE: [54], p.39.

Com forte sistema de cobrança de impostos, burocratas e comerciantes tinham necessidades contábeis e registros, e como outras civilizações os hebreus herdara dos fenícios o sistema de escrita. Assim como os gregos, os hebreus possuíam um sistema numérico associado as vinte e duas letras do alfabeto. Esses números eram amplamente utilizados nos calendários, nos escritos sagrados, enumerando parágrafos, versos e páginas dos escritos em hebraicos.

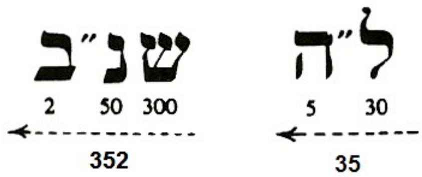
Figura 50 – Quadro de Numeração Hebraica

Letras hebraicas	Nomes e transcrições das letras		Valores numéricos	Letras hebraicas	Nomes e transcrições das letras		Valores numéricos
א	'Alef	'a	1	ל	Lamed	l	30
ב	Bét	b	2	מ	Mém	m	40
ג	Guimel	g	3	נ	Nun	n	50
ד	Dalet	d	4	ס	Samekh	s	60
ה	Hé	h	5	ע	'Ayin	'	70
ו	Vav	v	6	פ	Pé	p	80
ז	Zayin	z	7	צ	Tsadé	ts	90
ח	Hét	h	8	ק	Qof	q	100
ט	Tét	t	9	ר	Resh	r	200
י	Yod	y	10	ש	Shin	sh	300
כ	Kaf	k	20	ת	Tav	t	400

FONTE: [33], p.457.

De base decimal, baseado no principio da adição, os números eram lidos, escritos e interpretados da direita para esquerda posicionando os símbolos que indicavam as diferentes ordens de unidades, começando sempre da ordem numérica mais elevada, no sentido mencionado. Vejamos por exemplo, a representação dos número 352 e 35:

Figura 51 – Representação hebraica de 352 e 35.



FONTE: [35], p.214.

Para distinguir letras normais da letras numerais, foi inserido uma espécie de acento, na extremidade superior esquerda. Quando uma única letra indicava um número teríamos a seguinte representação:

Figura 52 – Representação hebraica de 300, 80, 30, 2 e 1.

FONTE: [33], p.458.

Se o número tivesse duas ou mais letras, o acento era duplicado e colocado entre as duas ultimas letras:

Figura 53 – Representação hebraica de 352 e 35.

FONTE: [33], p.458.

Pela tabela de numeração alfabética, vê-se que a maior letra numeral é 400. E para representações superiores, foi usado uma combinação repetida da letra tav (=400) e fazendo as devidas complementações, por um processo aditivo.

Figura 54 – Representação hebraica de 900, 800, 700, 600, 500.

FONTE: [35], p.215.

Dependendo do número esse processo poderia se tornar bem trabalhoso, e então foi inserido um novo conjunto de símbolos que só amenizou o problema.

Figura 55 – Representação hebraica de 500, 600, 700, 800 e 900.

FONTE: [35], p.217.

Estes novos símbolos que foram inseridos, representam formas terminais de algumas letras, que eram usadas no final de palavras.

Figura 56 – Formas terminas de algumas letras hebraicas.

LETRAS	Kaf	Mém	Noun	Pé	Tsadé
FORMAS ORDINÁRIAS	כ	מ	נ	פ	צ
FORMAS TERMINAIS ASSOCIADAS	ך	ם	ן	ף	ץ

FONTE: [35], p.216.

Como o problema não foi solucionado, uma nova convenção foi inserida, que é de colocar dois pontos sobre a letra, que indicaria um processo de multiplicar por 1000.

Figura 57 – Milhares hebraicos.

FONTE: [35], p.217.

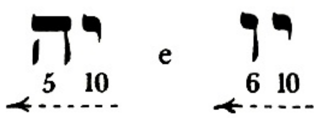
Com esse processo, os números de 1 a 999.999 poderiam ser representados com mais facilidade. Vejamos por exemplo a representação do número 5.739:

Figura 58 – Representação hebraica 5.739

FONTE: [33], p.461.

O problema de fato só é resolvido, com um processo de escrever o número por extenso quando os valores forem superiores ou iguais a um milhão. Algumas curiosidade ou anomalias poderiam ser encontrados nesse sistema numérico, uma delas é a escrita de certos números. Os número 15 e 16 pelo exposto, teria a seguinte representação:

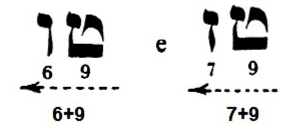
Figura 59 – Representação hebraica de 15 e 16.



FONTE: [33], p.463.

Mas na prática esses números eram representados do seguinte modo:

Figura 60 – Representação hebraica corrente de 15 e 16.



FONTE: [33], p.464.

A ideia por trás dessa exceção estava fundamentada na crença da religião judaica, de uma proibição em que nenhum homem poderia escrever e nem pronunciar o nome do deus Yahvé: [33], p.464.

Figura 61 – Palavra Yahvé em hebraico.

FONTE: [33], p.464.

O nome de Yahvé também foi encontrado em formas abreviadas, e que algumas dessas formas coincidia com a possível representação dos números 15 e 16, caindo na religiosa proibição.

Figura 62 – Abreviação da palavra Yahvé em hebraico.

FONTE: [33], p.464.

Com as associação de números e letras alfabéticas, palavras eram codificadas e decodificadas, despertando a intuição mística, poética e religiosa. Os gregos chamavam essa relação de *isopsefia*, e os rabinos e cabalísticos de *gematria*. Dessa relação pode-se notar que o verbo contar (números) e contar (histórias) vem da mesma raiz etimológica. Alguns números que tivessem correlação com certas palavras, poderiam trazer significados e interpretações sobre fatos, eventos, sorte, azar, destino, profecias. Atualmente esses conhecimentos são chamados de Numerologia.

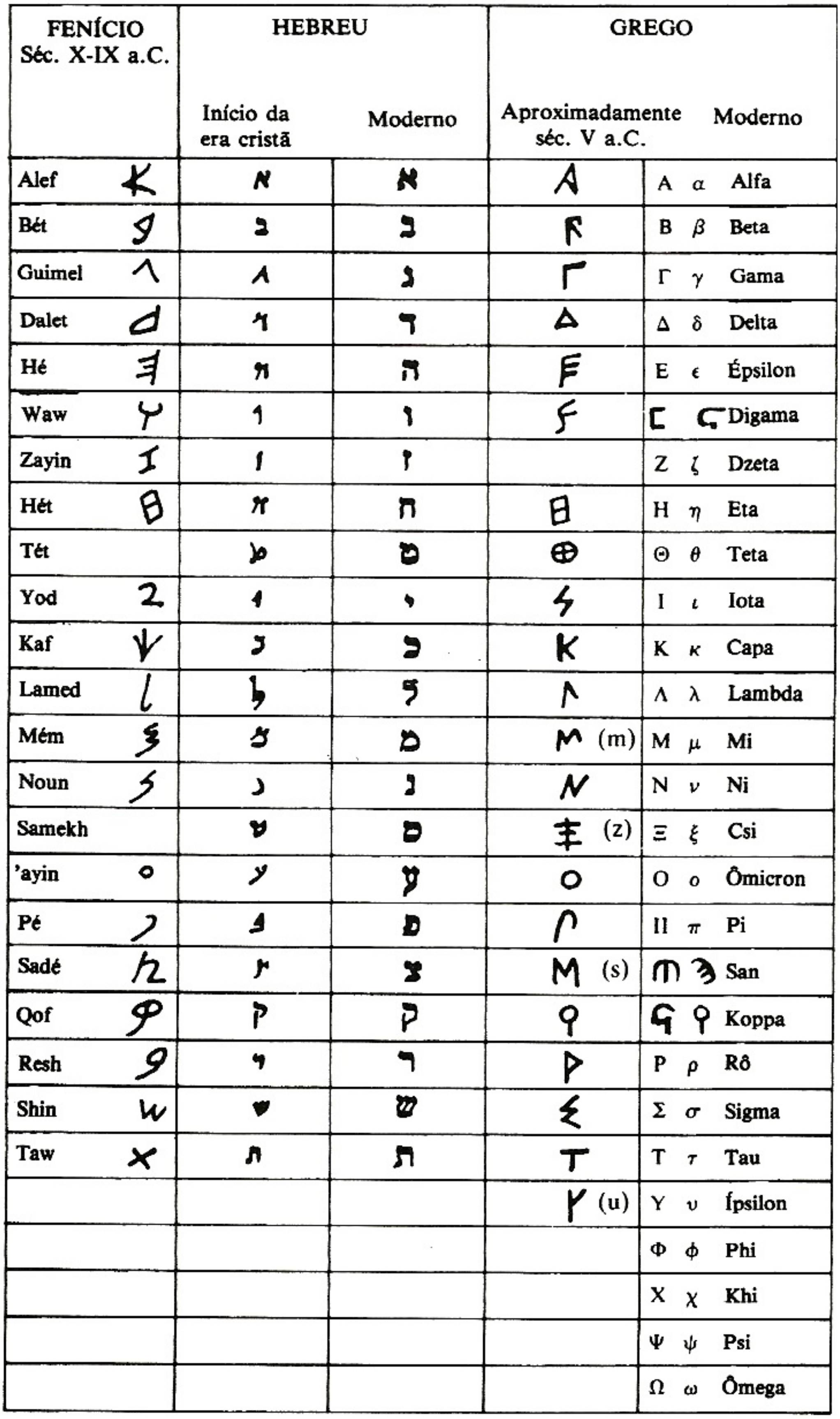
As semelhanças com os sistemas de escrita e numeração dos gregos e hebreus, não é mero acaso. Os dois sistemas tem raízes no sistema dos fenícios. Os fenícios (3.000 a.C – 300 a.C.) corresponde à região litorânea da Síria, no norte da Palestina, cercada por montanhas e pelo rio Orontes. Com solo pobre, a atividade agrícola era dificultada, se dedicaram a pesca e extração de madeiras, e pela atividade marítima e comercial. Foram considerados os maiores mercadores e navegantes da antiguidade oriental. ([54], p. 45)

Figura 63 – Mapa da Fenícia.

FONTE: [54], p.45.

Não construíram um império aos moldes dos egípcios e mesopotâmios, desenvolveram cidades autônomas e independentes controlados pela elite mercantil, composta por mercadores e proprietários de navios. No campo da matemática popularizaram as aplicabilidades técnicas, em navegação e negociação, aplicações em astronomia e no processo de registro, elaborando um sistema de escrita que é matriz da nossa escrita atual. Foi na cidade de Biblos que essa escrita foi difundida, diferenciando dos hieróglifos egípcios e da escrita cuneiforme dos mesopotâmios. Propagaram o uso dos papiros, de maioria egípcios, com escrita à base de tinta vegetal. Ao serem difundidos na Grécia, os livros feitos aos moldes dos fenícios, receberam o nome de *bíblia*, por causa da cidade de Biblos, e papiros deu origem a palavra *papel*.

Figura 64 – Quadro comparativo de raízes alfabéticas.



FENÍCIO Séc. X-IX a.C.		HEBREU Início da era cristã	HEBREU Moderno	GREGO Aproximadamente séc. V a.C.	GREGO Moderno
Alef			א		A α Alfa
Bét			ב		B β Beta
Guimel			ג		Γ γ Gama
Dalet			ד		Δ δ Delta
Hé			ה		E ϵ Épsilon
Waw			ו		Digama
Zayin			ז		Z ζ Dzeta
Hét			ח		H η Eta
Tét			ט		Θ θ Teta
Yod			י		I ι Iota
Kaf			כ		K κ Capa
Lamed			ל		Λ λ Lambda
Mém			מ	(m)	M μ Mi
Noun			נ		N ν Ni
Samekh			ס	(z)	Ξ ξ Csi
’ayin			ע		O o Ômicron
Pé			פ		Π π Pi
Sadé			צ	(s)	San
Qof			ק		Koppa
Resh			ר		P ρ Rô
Shin			ש		Σ σ Sigma
Taw			ת		T τ Tau
				(u)	Υ υ Ípsilon
					Φ φ Phi
					X χ Khi
					Ψ ψ Psi
					Ω ω Ômega

FONTE: [35], p.211.

9 ROMANOS (c. 1.000 a.C. – 476 d.C)

Grande parte dos imperadores romanos foram de ditadores militares, boa parte analfabetos, com reinados terminando em golpes sangrentos. O Império Romano se expande por quase todo sul da Europa, Oriente Médio e Norte Africano.

Figura 65 – Império Romano em máxima extensão territorial.

FONTE: http://historiadomundo.uol.com.br/romana/mapa-do-imperio-romano.htm
Acesso em: 28/05/2016.

Os romanos não davam tanta atenção ao saber. Uma espécie de ditadura militar, que não via com bons olhos o incentivo as pesquisa científicas. Com regime altamente escravista, não havia estímulo para desenvolver equipamentos que poupassem esforços. O desenvolvimento maior foi nas áreas das artes, literatura e filosofia, impulsionadas pela acensão do Cristianismo, principalmente como religião oficial, por Constantino I. Mesmo com histórico de perseguições, grupos extremistas de cristãos eram intolerantes com cientistas, ou quem ousasse contrariar os dogmas religiosos.

O sistema romano de numeração consolidado, também foi um sistema alfabético e com traços de representação acrofônica, ou seja, um símbolo relativo ao som ou nome da quantidade padrão de representatividade, muito parecido com o sistema dos gregos. Mas essa representatividade é muito tardia. Os algarismos usados e suas correspondências eram: I = 1; V = 5; X = 10; L = 50; C = 100, D = 500 e M = 1000 onde cada letra-número era independente uma das outras, e suas justaposições implicava a soma dos valores correspondentes, por exemplo: CCXXXII = 232; MMDCXXVII = 2.627. Outra regra era de que, todo signo numérico colocado à esquerda de um algarismo de valor superior é dele abatido, assim tínhamos as representações de: IV=4 os invés de IIII; IX=10 ao invés de VIIII; XIX=19 ao invés de XVIIII; XL=40 ao invés de XXXX; XC=90 ao invés de LXXXX; CD=400 ao invés de CCCC e CM=900 ao invés de DCCCC. Portanto na grafia dos números associava-se a simultaneamente o princípio de adição e subtração.

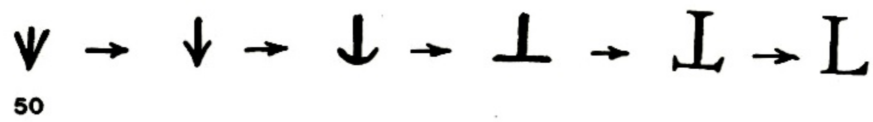
A origem desses símbolos, apesar de serem identificadas com letras da escrita latina, é parte de um processo evolutivo que não está relacionado primordialmente com as letras do alfabeto, mas uma forma de grafia arcaica, herdada dos etruscos, povo que dominou a região da atual Itália, do século VII ao século IV a.C. com origens na pratica ancestral de entalhe, possivelmente de registro de rebanhos, realizados pelos pastores. Os primórdios dessa representatividade seriam:

Figura 66 – Sistema numérico romano arcaico.

FONTE: [35], p.186.

Com o passar do tempo, alguns signos passaram por transformações:

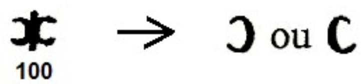
Figura 67 – Evolução gráfica do número 50.



FONTE: [35], p.187.

Do mesmo modo, temos uma evolução para o algarismo da centena, para a letra C, que é inicial da palavra latina *centum*:

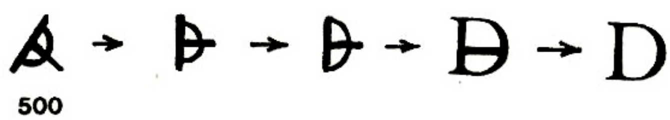
Figura 68 – Evolução gráfica do número 100.



FONTE: [35], p.187.

O algarismo associado a 500 sofre uma metamorfose até ser associado a letra D:

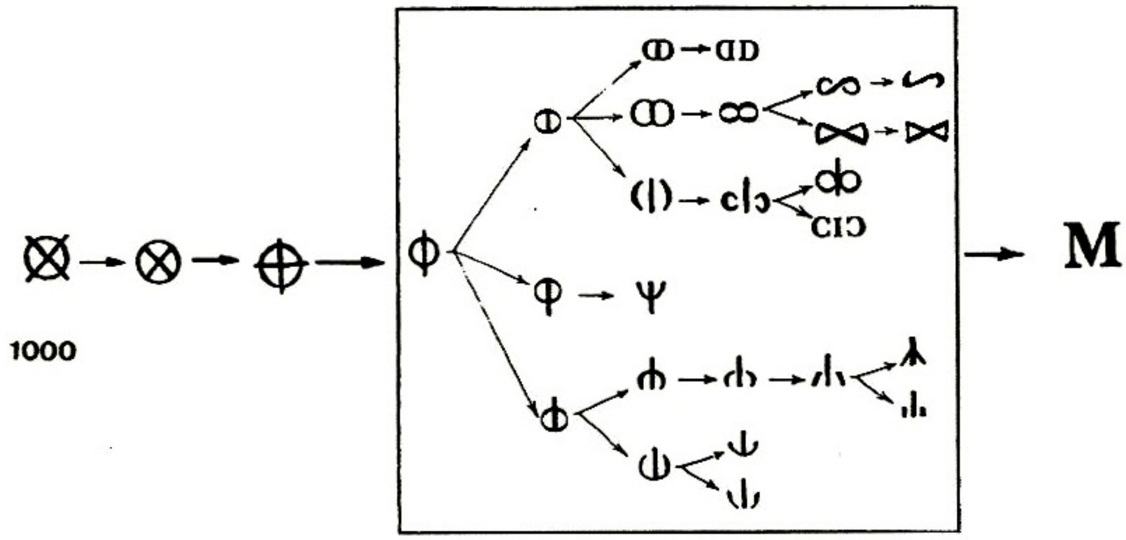
Figura 69 – Evolução gráfica do número 500.



FONTE: [35], p.187.

O algarismo associado a 1.000 unidades, evolui até de tornar na letra M, inicial da palavra Mile:

Figura 70 – Evolução gráfica do número 1.000.



FONTE: [35], p.188.

Com essa representação letra-número, ainda continuamos com os mesmos problemas dos gregos, a dificuldade de realizar cálculos na forma escrita. Os cálculos eram muitas vezes executados por auxilio e recursos mecânicos, por exemplo, os ábacos. Portanto as representações numéricas teriam também como função primordial, registros numéricos.

10 HINDUS (c. 2.500 a.C – 535 d.C)

A civilização indiana se desenvolveu ao sul da Ásia numa península entre o oceano índico e ao sul do Himalaia.

Figura 71 – Mapa da Índia

FONTE: *https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_%C3%8Dndia#/media/File:Guptaempire.gif* Acesso em: 18/06/2016.

O matemático Laplace (1749-1827) disse:

> Foi da Índia que nos legou o método engenhoso de exprimir todos os números por meio de dez símbolos, atribuindo-se a cada símbolo não só a um valor absoluto mas também um valor de posição; uma ideia importante e profunda que, por nos parecer hoje tão simples, lhe ignoramos o verdadeiro mérito. Mas a sua própria simplicidade e a grande facilidade que deu a todos os cálculos, colocaram nossa aritmética na vanguarda das descobertas úteis e melhor apreciaremos a grandeza de tal realização se nos lembrarmos que ela escapou até o gênio de Arquimedes e Apolônio, dois dos maiores filhos da antiguidade. ([20], p. 29)

Atribui-se atualmente a Índia o título do berço na numeração moderna, título que já foi atribuído aos gregos, mas sem alguma fundamentação histórica convincente. Apesar dos gregos terem provas de bons calculistas, por exemplo, Arquimedes, que calculou a quantidade e grãos de areia que poderia caber no mundo, esse cálculo não foi feito por auxílio de algarismos, pois suas grafias eram impróprias para as operações. Muitas fontes e documentos comprovam, que por volta do século V da era cristã, nasceu o protótipo do nosso sistema de numeração atual, e que traçou a base do cálculo escrito, praticado hoje em dia. Era um conjunto de nove caracteres, independente de qualquer apelo que motivasse nossa intuição ou sensibilidade para as quantidades associadas. Era bem diferente dos sistemas vistos anteriormente, sem barras, desenhos, pontos ou letras acrofônicas:

Figura 72 – Algarismos hindus.

FONTE: [35], p.265.

Nesses signos se encontram a origem dos nossos algarismos, denominados hoje, de forma equivocada, por "algarismos arábicos". Nessa forma primitiva, esse sistema que era de base dez, ainda não possuía a operacionalidade como o nosso atual sistema, ainda faltava a regra de posicionamento, e existia mais outros símbolos, para as dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar, limitando a escrita até a quantia de 99.999. Essa limitação era uma pedra no sapato dos sábios astrônomos hindus, que eram atacados pela loucura dos números grandes. A saída para contornar essa limitação, de não contar números grande por algarismos, foi a de usar o que hoje chamamos escrever por extenso, usando o recurso da oralidade, uma espécie de sistema falado, atribuindo nome aos primeiros nove algarismos associados aos primeiros nove números da contagem: 1-eka; 2-dvi; 3-tri; 4-catur; 5-panka; 6-sat; 7-sapta; 8-asta e 9-nava. Esse processo de nomear, se estendeu apara as potências de 10, atribuindo nomes independentes:10 – dasa; 100 – sata; 1.000 – sahasra; 10.000 – ayuta; 100.000 – laksa; 1.000.000 – prayuta; 10.000.000 – koti; 100.000.000 – vyarbuda e 1.000.000.000 – padma. Por exemplo nesse sistema o número $7651234 = 7 \times 1.000.000 + 6 \times 100.000 + 5 \times 10.000 + 1 \times 1.000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$, seria lido como 4; 3 dasa; 2 sata ; 1 sahasra; 5 ayuta; 6 laksa; 7 prayuta.

Por volta do século V de nossa era, os matemáticos e astrônomos, suprimiram a menção aos nomes indicadores da base e de suas diversas potências, falando somente o nome dos algarismos na ordem crescente das potências de dez. Assim por exemplo o número $1234 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$, seria mencionado "quatro, três, dois e um". Com esse processo, elaborara-se um sistema de numeração oral de posição, com valores variáveis dependendo do posicionamento ou ordem de pronunciamento. Mas como ficaria por exemplo, o número 502 nesse sistema? É notável que se não tiver uma palavra para o zero, esse número seria facilmente confundido com o 52. A grande saída dos sábios hindus, foi inventar uma palavra para indicar a ausência das unidades em dada posição, e essa palavra foi *śūnya*, que significa vazio. Portando 502 seria dito como: *dvi śūnya panka*.

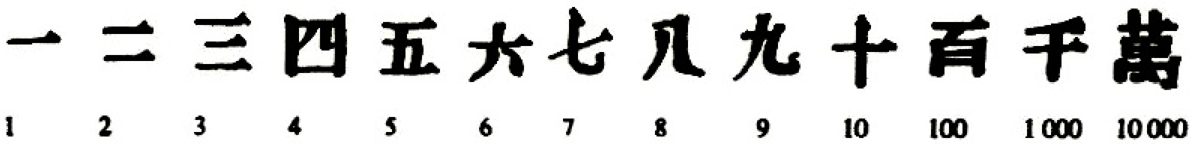
Depois desse processo, os hindus dispunham de algarismos distintos de 1 a 9, todos distintos e independentes de qualquer apego a intuição visual direta, tinham o conhecimento do principio posicional e deram um significado ao menos oral para o zero. Em um tratado de cosmologia com título *Lokavibhaga*, publicados por um movimento hindu jainista em 25 de agosto do ano 458 do calendário Juliano, aparecem números escritos por extenso usando os procedimentos mencionados e ainda com explicações inclusive da ordem de posicionamentos dos números "ditos". Como a obra aparentemente tinha o interesse de atingir “o grande público”, esse procedimento se espalhou. Com esse sistema era viável exprimir qualquer número, independente do seu tamanho, sem a repetição em massa de simbologias. No ano de 628, o matemático Brahmapugta, em uma obra escreve sobre os “os bens”, “as dívidas” e “o nada”, que atualmente são números positivos, negativos e nulos. Nessa obra ensinava o modo de efetuar as seis operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes. E também unificava e consolidava duas ideias sobre o zero: a de ausência e de quantidade nula ou nulidade.

11 CHINESES (c. 5.000 a.C. – 1.911 d.C.)

Os chineses, são representados pelos povos que se desenvolveram nas margens dos rios Iang-Tse e Amarelo, com similaridade com o vale do Nilo e aos vales dos rios Tigre e Eufrates. Sobre a matemática dos chineses se tem vestígios de atividades de contagem, medições e pesagens de objetos. As referências são de textos em faixas de bambu, descobertos em 1980, que revelam alguns registros clássicos de matemática, possivelmente de 1200 a.C. É de grande dificuldade investigar as datas dos diversos documentos, diante de rupturas políticas de imperadores que mandavam queimar ou eliminar os escritos como forma de aplacar ou impedir tensões populares. Também era muito forte a cultura de transmissão oral, e a matemática era voltada fundamentalmente para as atividades comerciais e temporais, como calendários e astronomia. Desde os tempos remotos, os chineses usavam dois sistemas de notação numérica, onde um vigorava o princípio multiplicativo e outro o principio posicional.

Um dos sistemas é o que vigora até os dias de hoje, e é composto pelos símbolos abaixo:

Figura 73 – Afabeto Chinês Clássico.



FONTE: [35], p.228.

Na composição numérica os símbolos são dispostos verticalmente de alto para baixo e da direita para esquerda. Atualmente a convenção é dispor horizontalmente da esquerda para a direita.

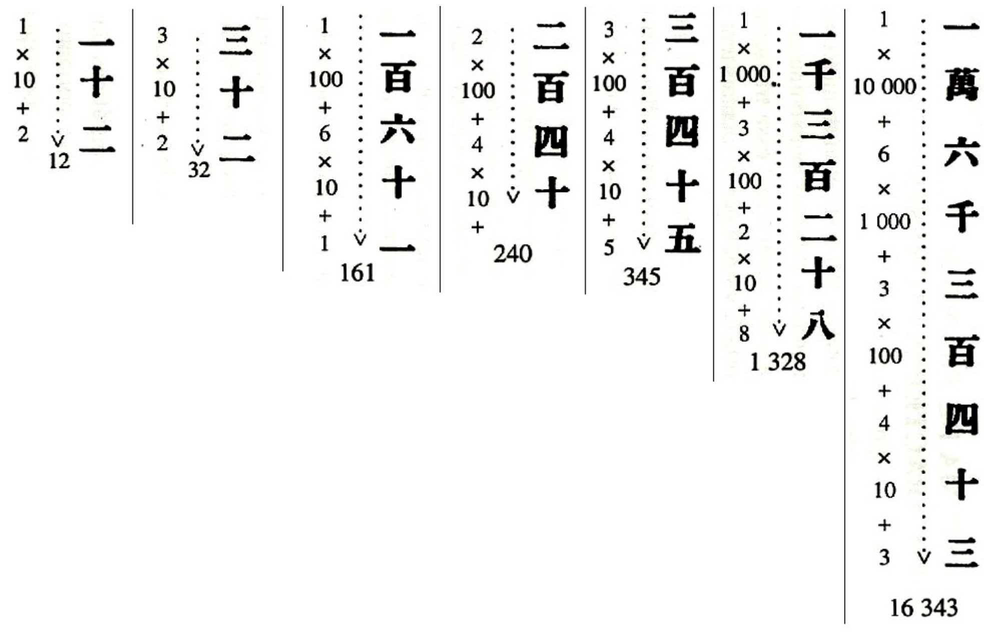
Figura 74 – Representação numérica chinesa.

DEZENAS:		CENTENAS		MILHARES		DEZENAS DE MILHAR	
10	一十 1 × 10	100	一百 1 × 100	1000	一千 1 × 1000	10000	一萬 1 × 10 000
20	二十 2 × 10	200	二百 2 × 100	2000	二千 2 × 1000	20000	二萬 2 × 10 000
30	三十 3 × 10	300	三百 3 × 100	3000	三千 3 × 1000	30 000	三萬 3×10 000
40	四十 4 × 10	400	四百 4 × 100	4000	四千 4 × 1000	40 000	四萬 4×10 000
50	五十 5 × 10	500	五百 5 × 100	5000	五千 5 × 1000	50000	五萬 5×10 000
60	六十 6 × 10	600	六百 6 × 100	6000	六千 6 × 1000	60 000	六萬 6 × 10 000
70	七十 7 × 10	700	七百 7 × 100	7000	七千 7 × 1000	70 000	七萬 7 × 10 000
80	八十 8 × 10	800	八百 8 × 100	8000	八千 8 × 1000	80000	八萬 8 × 10 000
90	九十 9 × 10	900	九百 9 × 100	9000	九千 9 × 1000	90000	九萬 9 × 10 000

FONTE: [33], p.552.

Os chineses com os princípios multiplicativos e aditivo, faziam as composições numéricas como nos exemplos abaixo:

Figura 75 – Representação chinesa dos números 12, 32, 161, 240, 345, 1.328 e 16.343.



FONTE: [33], p.553.

Cada símbolo está associado ao nome da quantidade, comporta também um significado fonético, ao nome de cada quantidade, que são bem pequenos e logicamente fáceis: 1-yi; 2-èr; 3-san; 4-sì; 5-wu; 6-liù; 7-ba; 9-jiu; 10-shí. Usando o processo aditivo forma-se os número de 11 a 19:

- 11 – shí yi – "dez-um" $= 10 + 1$;
- 12 – shí èr – "dez-dois" $= 10 + 2$;
- 13 – shí san – "dez-três" $= 10 + 3$ e etc.

E para as dezenas aplica-se o processo multiplicativo:

- 20 – èr shí – "dois-dez" $= 2 \times 10$;
- 30 – san shí – "três-dez" $= 3 \times 10$;
- 40 – sí shí – "quatro-dez" $= 4 \times 10$ e etc.

Para 100 usa-se a palavra bai:

- 100 – yi bai – "uma centena" $= 1 \times 100$;
- 200 – èr bai – "duzentos" $= 2 \times 100$;
- 300 – san bai – "trezentos" $= 3 \times 100$ e etc.

Para 1.000 usa-se a palavra qiân:

- 1.000 – yi qian – "um mil" $= 1 \times 1.000$;
- 2.000 – èr qian – "dois mil" $= 2 \times 1.000$;
- 3.000 – san qian – "três mil" $= 3 \times 1.000$ e etc.

Para 10.000 usa-se wàn:

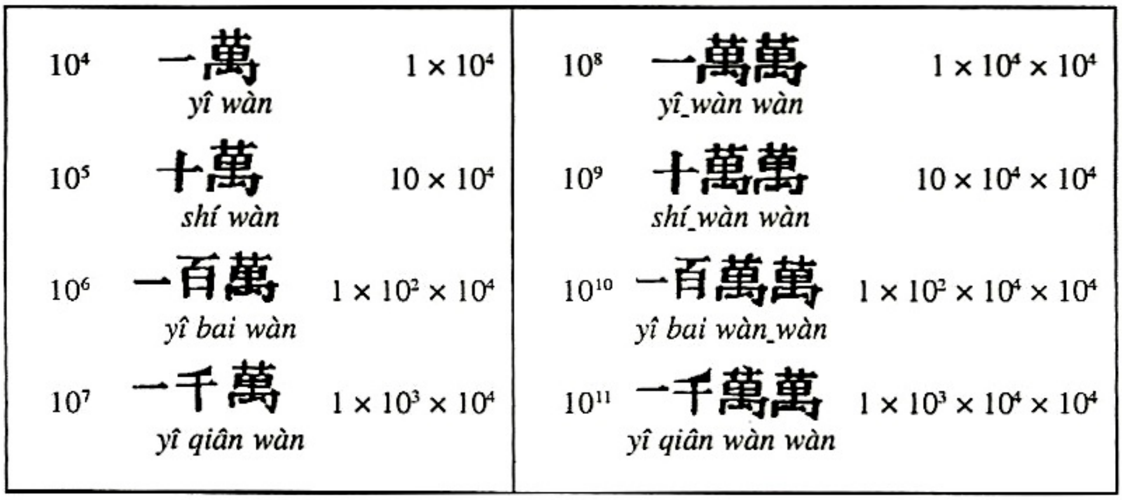
- 10.000 – yi wàn – "uma miríade" $= 1 \times 10.000$;
- 20.000 – èr wàn – "duas miríades" $= 2 \times 10.000$;
- 30.000 – san wàn – "três miríades" $= 3 \times 10.000$ e etc.

Para números maiores vamos encontrar uma combinação com termos multiplicativos:

- $10 \times 10.000 = 100.000$ – shí wàn;
- $1 \times 100 \times 10.000 = 1.000.000$ – yi bai wàn;
- $1 \times 1.000 \times 10.000 = 10.000.000$ – yi qian wàn;
- $1 \times 10.000 \times 10.000 = 100.000.000$ – yi wàn wàn;
- $10 \times 10.000 \times 10.000 = 1.000.000.000$ – shí wàn wàn;
- $1 \times 100 \times 10.000 \times 10.000 = 10.000.000.000$ – yi bai wàn wàn;
- $1 \times 1.000 \times 10.000 \times 10.000 = 100.000.000.000$ – yi qiàn wàn wàn.

Sempre em múltiplo que não ultrapassas a miríade e se iniciar pelo fator dez dispensa o produto por 1 (yi).

Figura 76 – Representação chinesa das potências de dez.



10^4	一萬 *yî wàn*	1×10^4	10^8	一萬萬 *yî_wàn wàn*	$1 \times 10^4 \times 10^4$
10^5	十萬 *shí wàn*	10×10^4	10^9	十萬萬 *shí_wàn wàn*	$10 \times 10^4 \times 10^4$
10^6	一百萬 *yî bai wàn*	$1 \times 10^2 \times 10^4$	10^{10}	一百萬萬 *yî bai wàn_wàn*	$1 \times 10^2 \times 10^4 \times 10^4$
10^7	一千萬 *yî qiân wàn*	$1 \times 10^3 \times 10^4$	10^{11}	一千萬萬 *yî qiân wàn wàn*	$1 \times 10^3 \times 10^4 \times 10^4$

FONTE: [33], p.577.

Apesar de não ser necessário o zero (*ling*), atualmente é obrigatório a menção da palavra, para eliminar qualquer tipo de má interpretação.

Figura 77 – Zero chinês: ling.

FONTE: [33], p.556.

Figura 78 – Representação chinesa de 504, 1.058 e 2.003.

FONTE: [33], p.556.

Também dependendo do contexto que serão usado, as representações numéricas, podem assumir variações, com objetivos de por exemplo evitar fraudes, segurança em emissão de documentos.

Figura 79 – Diversas formas dos algarismos chineses.

FONTE: [33], p.561.

A origem dessa escrita está associada a aos ossos e cascas de tartarugas descobertas no período de século XIV-XI a.C. usados em contextos místicos, práticas religiosas, adivinhações. No Japão e Coréia praticamente se usa um método muito parecido, com simbologias e nomes com algumas adaptações.

De modo geral, em testes internacionais de avaliação de aprendizagem, os chineses, coreanos e japoneses geralmente ficam no topo do ranking das maiores notas. Especialistas atribuem esse bom resultado principalmente a esse sistema de numeração, simples e fácil de compreender e memorizar, principalmente pelas crianças. No livro Fora de série, temos alguns relatos curiosos:

> Existe também uma grande diferença em como os sistemas de

> nomeação de números das línguas ocidentais e asiáticas são estruturados. No nosso sistema, dizemos dezesseis, dezessete, dezoito e dezenove. Seria de esperar, portanto, que disséssemos “dezeum”, “dezedois”, “dezetrês”, etc. Mas não fazemos isso, usamos uma forma distinta: onze, doze, treze... Na maioria dos números a dezena vem primeiro e a unidade depois: dez(e)sete, vinte e sete, trinta e sete, porém os números de onze a quinze não seguem essa lógica. Não é estranho? Isso não acontece na China, no Japão e na Coréia. Eles dispõem de um sistema de contagem lógico: onze é “dez-um”, doze é “dez-dois”; vinte e quatro é “dois dez quatro”, e assim por diante. Essa diferença proporciona às crianças asiáticas duas vantagens. A primeira é que aprendem a contar com muito mais rapidez. As crianças chinesas de quatro anos sabem contar em média, até 40, enquanto as americanas nessa idade contam apenas até 15 e só chegam ao 40 aos cinco anos. Ou seja, as crianças americanas de cinco anos já estão um ano atrás das asiáticas na habilidade matemática mais elementar.(...) Ele (sistema asiático) modifica a atitude em relação à matemática. Em vez de um aprendizado mecânico, existe um padrão que a pessoa cosegue identificar. Há uma expectativa de que ela é capaz de fazer aquilo e de que existe uma lógica no processo. No caso das frações, dizemos três quintos. Em chinês, é, literalmente, “de cinco partes, pegue 3”. Isso é definir fração de modo conceitual. É distinguir o denominador do numerador. (...) O conhecido desencanto com a matemática entre as crianças ocidentais começa na terceira e quarta séries. (...) Uma parte dessa desilusão talvez se deva ao fato de que a matemática parece não fazer sentido: sua estrutura linguística é canhestra, enquanto suas regras básicas se afiguram arbitrárias e complicadas. As crianças asiáticas, ao contrário, não tem a mesma sensação de confusão. Elas conseguem memorizar mais números e fazer cálculos com mais rapidez. Além disso, a maneira como as frações são expressas em sua língua corresponde exatamente ao que uma fração é de verdade - e talvez isso as torne mais propensas a gostar de matemática. E, quem sabe, por apreciarem essa disciplina um pouco mais, façam um esforço um pouco maior e assistam a mais aulas e estejam mais dispostas a fazer os deveres de casa, e assim por diante, numa espécie de círculo virtuoso. ([29], p. 214-215)

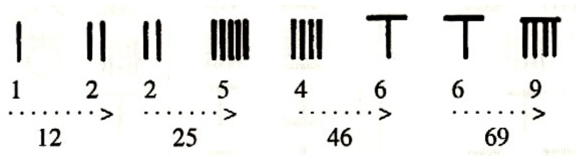
Outro sistema de numeração, era o Suan Zí, semelhante a nosso sistema de numeração, tem base 10 e usa o principio da posição, ou seja cada símbolo tem valor determinado pelo lugar que ocupam na leitura dos números. As unidade de 1 a 9 é representado por combinações de traços horizontais e verticais, diferentemente do nosso sistema que apresenta nove símbolos distintos e independentes para as nove unidades iniciais.

Figura 80 – Algarismos chineses no sistema Suan Zí.

FONTE: [33], p.581.

Exemplos:

Figura 81 – Representação chinesa de 12, 25, 46 e 69.



FONTE: [33], p.581.

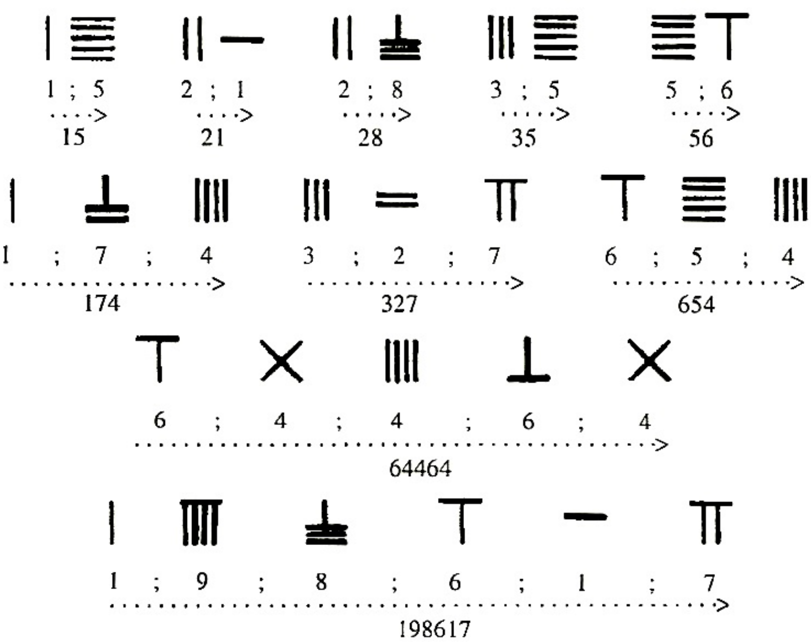
Esse sistema era problemático, pois é possível notar que, por exemplo, o número 12 podia ser confundido com o 3 e 21, também a representação do 25, poderia se confundir coma de 34, 43, 52, 214 ou 223. Um modo de sanar o problema, foi introduzir um sistema com uma simbologia de barras verticais, com a convenção de que cada algarismo seria uma combinação sequencial intercalada, os que estivesse na posição de ordem ímpar (unidades simples, centena, ...) pelo sistema de barras verticais e os que ocupassem ordem par (dezenas, milhares,...) seriam representados pelo sistema de barras horizontais.

Figura 82 – Sistema barras horizontais.

FONTE: [33], p.582.

Exemplos:

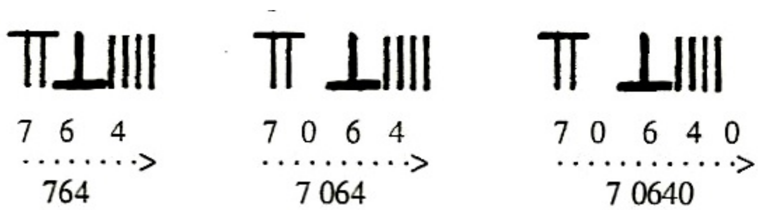
Figura 83 – Exemplos de números no sistema chinês de barras.



FONTE: [33], p.583.

Mesmo com a inserção do novo sistema, ainda permanecia o problema da falta do zero, como diferenciar os números abaixo?

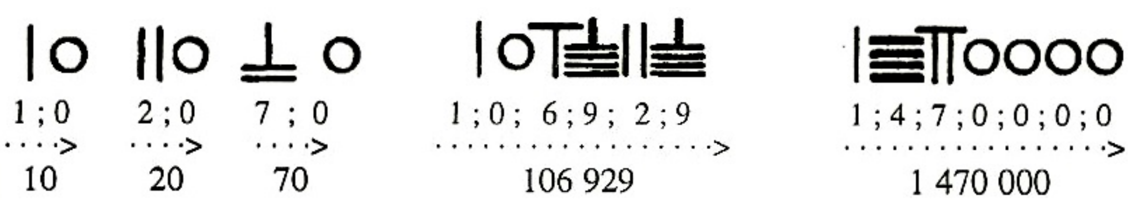
Figura 84 – Representação chinesa de 764, 7.064 e 70.640.



FONTE: [33], p.584.

Só aproximadamente no século VII d.C. , que os sábios chineses introduziram o zero, pela influencia doa matemático hindus.

Figura 85 – Emprego do zero, na representação chinesa de barras.



FONTE: [33], p.585.

Uma praticidade desse sistema estava no processo de calcular, onde eram usados varetas de bambu coloridas. Essas barras de contagens eram manipuladas com muita destreza, como que “voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar seu movimento” (BOYER, 2013, p. 145). As cores das varetas, geralmente preto e vermelho, contribui para operar com números negativos: “3 varetas vermelhas menos 4 varetas pretas dá uma vareta preta. Dessa maneira, um arranjo de varetas pretas representa uma dívida, e o valor da dívida é o arranjo correspondente de varetas vermelhas.” ([52], p. 156)

12 ÁRABES (c. 630 d.C. – 1.258 d.C.)

Sob a inspiração do profeta Maomé, uma nova religião monoteísta se propaga rapidamente conseguindo grande adesão na península árabe. Com a captura de Meca, por volta de 630 d.C, os exércitos islâmicos conquistam um imenso território ao mesmo tempo que propagava a nova religião, primeiramente pelas tribos politeístas do Oriente Médio, e depois para os fieis de outras crenças. O exército islâmico, conquista a Síria, Egito, chegam na índia e partes da Ásia Central. Com o Norte da África todo subjugado, o exercito islâmico tenta uma ofensiva sem sucesso na Espanha. Com um imenso território a ser administrado, os sucessores de Maomé, os califas, diante dos contextos acabam por se dividirem em várias partes. Com a inviabilidade de manter as guerras de conquistas, e com cada Califado se organizando, cria-se um contexto para o desenvolvimento de atividades intelectuais. ([37], p. 297)

Em 166, o califa Almansor fundou a sua nova capital em Bagdade, que se tornou o centro comercial e intelectual. Fundou-se bibliotecas, Casa da Sabedoria, que traduzia para o árabe textos gregos, indianos, escritos babilônicos, matemáticos e científicos. Os intelectuais sempre faziam investigações minuciosas que iam além das necessidades imediatas, fortalecido pelo sistema de crença de ser uma exigência divina. Nesse período consideravam o “conhecimento secular” não como estando em conflito com o “conhecimento sagrado”, mas como uma forma de alcançá-lo. Assim o estudo, era de certa forma encorajado pelas autoridades, que eram ao mesmo tempo seculares e religiosos. Assim nas novas traduções e trabalhos científicos era uma espécie de fusão entre a ciência e inspiração divina. O nome de Deus sempre era invocado no princípio e fim dos trabalhos, referindo a assistência divina nos textos. Muitos estudiosos ao invés de usarem a referência “árabe” optam por “islâmica” para se referir a produção intelectual deste período. Em alguns Califados, não havia esse apoio ao estudo, pois pregavam que tudo que era necessário já estava no livro sagrado, o Corão. A importância dos matemáticos islâmicos está no aperfeiçoamento completo do nosso sistema de numeração posicional, sistematização de várias áreas da matemática: o estudo da álgebra (que foi o campo de maior contribuição dos islâmicos), bem como as relações da álgebra e geometria, estudo de análise combinatória, incorporando a um sistema abstrato, estudo da trigonometria, e tentativa de provar o quinto postulado de Euclides.

Em 773 um estudioso indiano visitou a corte de Almansor, em Bagadade, levando uma copia do texto astronômico indiano de Brahmagupta. Nesse texto continha o sistema astronômico e numérico hindu, o califa sabendo do conteúdo, ordenou que fosse traduzido para o árabe. Os muçulmanos já tinham um sistema numérico, que era uma combinação de dois sistemas, um deles era um sistema de contagem com os dedos, com cálculos mentais, usado por comerciantes e nos mercados, que se transmitia por gerações e outro era um sistema expresso em palavra em frações de origem babilônica, de base sexagesimal.

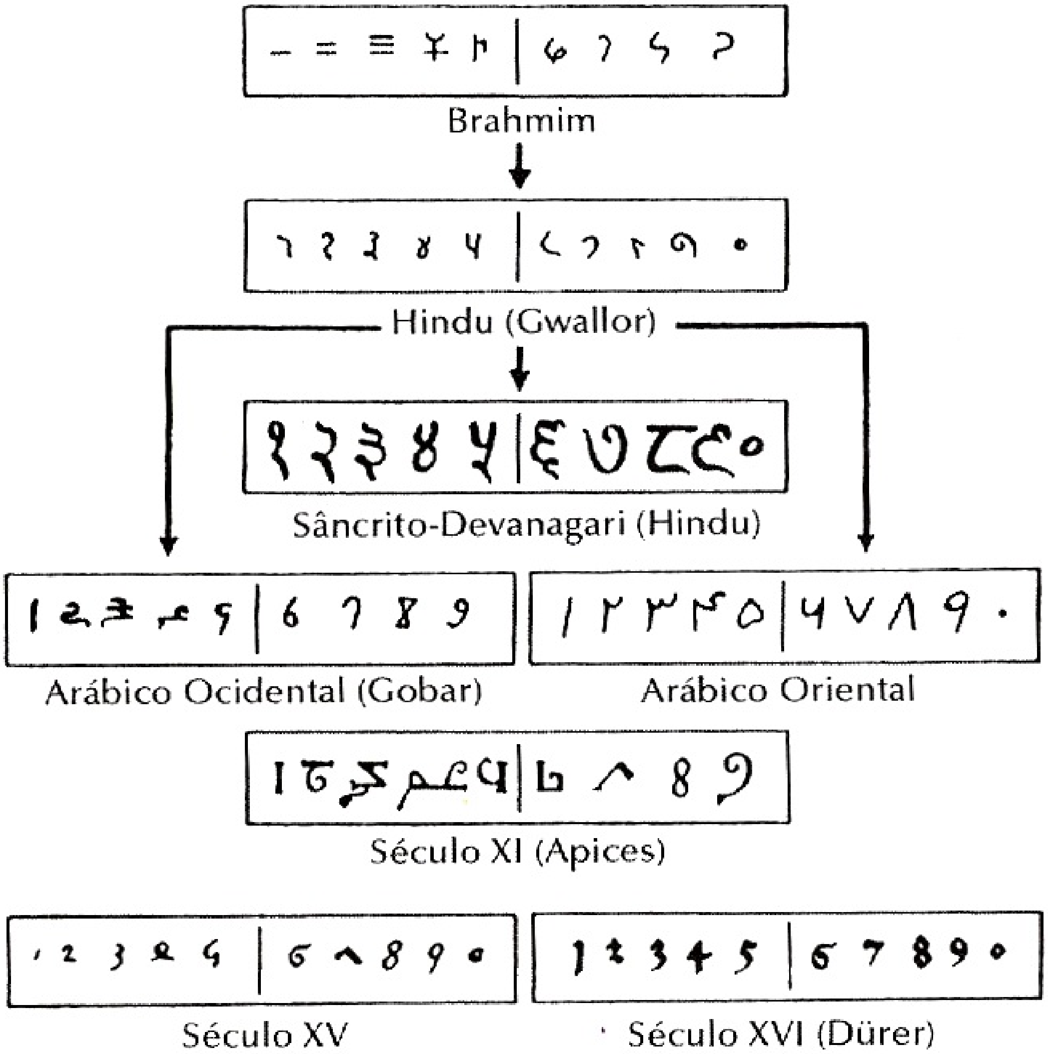
Gradualmente o conhecimento do sistema hindu, é propagado na cultura islâmica. O texto mais famoso é de Maomé ibn-Musa al-Khwarizmi (c.780-850), que era um dos primeiros membros da casa de sabedoria, o título do texto era *Livro sobre Adição e Subtração segundo os Métodos Indianos*. Nesse texto aparece a inserção dos nove caracteres e do zero, descreve os algoritmos de operações básicas, que seriam executados numa espécie de mesa de escrita com superfície de areia, com operações que manipulavam símbolos. Esse texto teve grande repercussão, e é provavelmente fonte de algumas palavras que usamos em matemática, "al-Khwarizmi" que foi usado por referências aos procedimentos operatórios, gerou algoritmo e algarismo, a palavra árabe desse texto "sifr", que era tradução do sânscrito "śūnya" foi latinizado "zéphirum" que gerou "zero" e "cifra" e "cifrão".

Após esse texto, numerosas obras vieram aperfeiçoando esses métodos. Abul Hasan al-Uqlidish, em 952, publica em Damasco *O Livro de Capítulos sobre Aritmética Hindu*, do qual enuncia as vantagens da adoção dos números indianos:

> A maioria dos escribas tem de o usar porque é fácil, rápido e necessita de poucos cuidados, pouco tempo para se obter a reposta e pouca preocupação em manter o coração ocupado com o que tem entre mãos, na medida em que, se fala, isso não interferirá no seu trabalho; e se o deixa e se ocupa de outra coisa, quando a ele regressa, encontrando-a no mesmo ponto, e assim continua, poupando-lhe o trabalho de o memorizar e manter o coração ocupado com ele. Isto não é o caso da outra (aritmética) que exige dobrar os dedos, entre outras coisas necessárias. A maioria tem de o usar (método hindiano) com números que não podem ser contados pelos dedos por serem grande. ([37], p. 301)

Nesse texto de al-Uqlish, ele insere o cálculo no papel, criticando o quadro de pó de areia usado pelos escribas, revela receitas de multiplicações e um inovador tratamento de frações decimais.

Figura 86 – Evolução do sistema hindu, difundido pelos árabes.

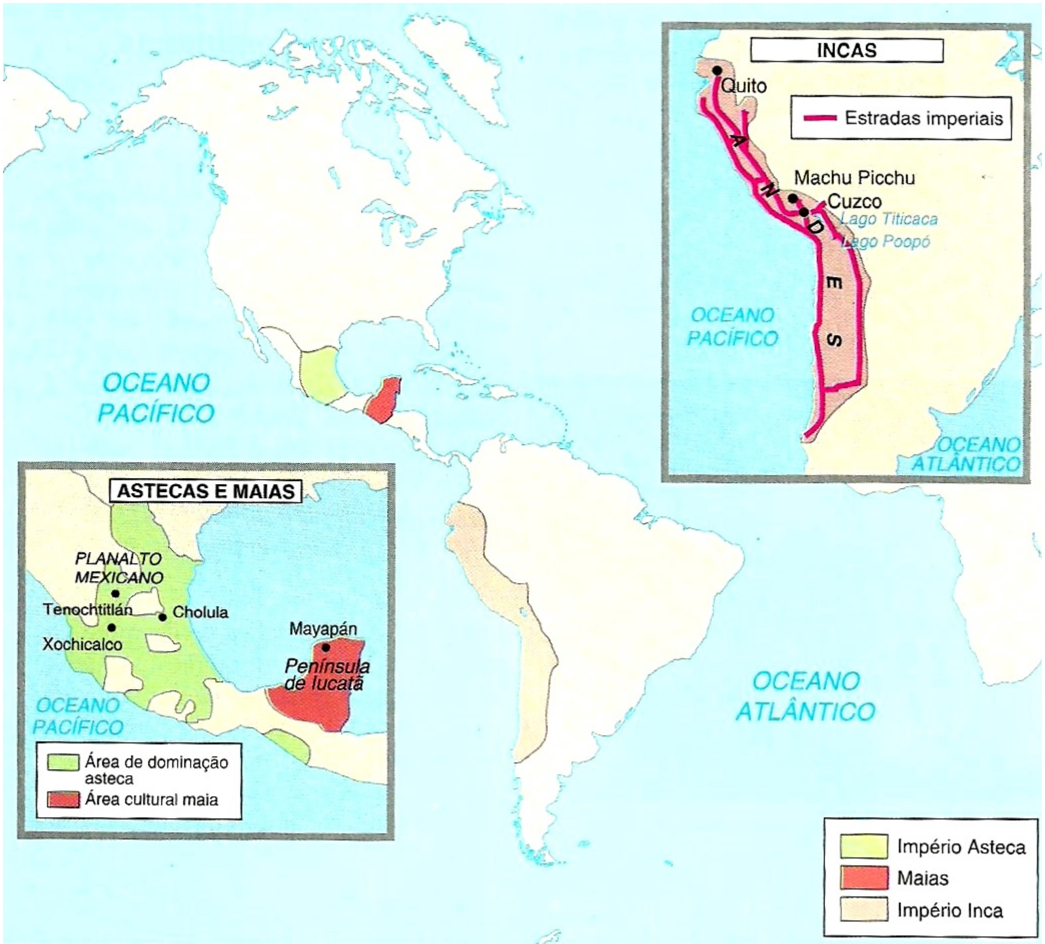


FONTE: [9], p.171.

13 PRÉ-COLOMBIANOS (c. 4.000 a.C – 1.533 d.C)

Aos povos, tribos e grupos de moradores das Américas, antes da chegada dos colonizadores europeus, recebem denominação de pré-colombianos. Grande parte dos nativos americanos, tinham estrutura simples de organização, eram nômade vivendo da caça e da pesca. Alguns desses grupos cresceram e chegaram a ser identificados como civilização, desenvolvendo grandes e organizados centros urbanos, sistema político, religioso, atividade agrícola, grandes construções e escrita. Se destacaram ao norte os Astecas, na região central os Maias e ao sul os Incas. Imensa parte dessa história ainda é desconhecida, devido a destruição e dizimação de tudo que se encontrava pelo caminho pelos europeus, principalmente os espanhóis. Das fontes que ainda restam, permanecem as dificuldade em decifrar as informações sendo um grande mistério até os dias atuais.

Figura 87 – Mapa América Pré-Colombiana.



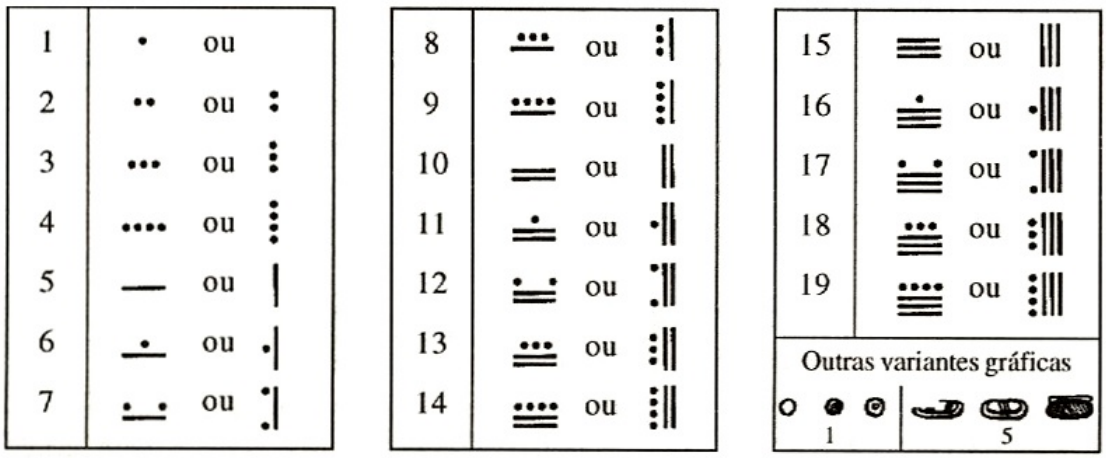
FONTE: [54], p.222.

Sobre os maias não há registro de terem tratados numericamente das questões administrativas, aritméticas, mas sabe-se que usavam os números como instrumentos de registro de datas e medições de durações temporais. Os maias tinham dois tipos de calendários, um religioso (tzolkin) de 260 dias e outro solar civil (haab) com 365 dias.

Todas as observações astronômicas, como por exemplo, ciclos de planetas e previsão de eclipses, tinham uma precisão muito maior que dos outros povos do mundo, motivo de grande admiração, uma vez que, os instrumentos de medições eram rudimentares. Os maias não conheciam o vidro, então não possuíam os instrumentos ópticos, como relógios, ampulhetas, clepsidras, e a menor unidade temporal era o dia. Grande parte desses registros eram feitos pelo *gnômon*, uma espécie de relógio solar, que era utilizado para observação dos astros, com uma estrutura de madeira cruzada, e uma mira de tubo de jadeíta.

O sistema numérico era simples, formados por pontos e traços, e com os algarismos tendo valor determinado pelo posicionamento na escrita do número. Era um sistema misto, parecido com o babilônico, com base 20, mas para valores inferiores a 20 uma base 5. E outras particularidades que veremos a seguir.

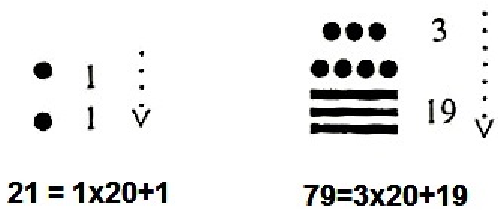
Figura 88 – Quadro de algarismos Maias.



FONTE: [33], p.639.

Os números são interpretados verticalmente, de cima para baixo, e com valores superiores das colunas assumindo ordens maiores, uma espécie de disposição dos símbolos ocupando patamar ou andar.

Figura 89 – Representação do 21 e 79 no sistema Maia.

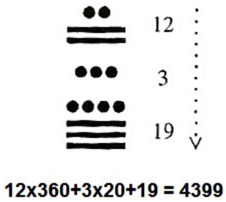


FONTE: [33], p.640.

Uma curiosidade é a de que no terceiro patamar, ao invés de termos a ordem

$20 \times 20 = 400$, encontraremos 360. Esse método estava supostamente associado as necessidades de facilitar os registros de tempo e calendários.

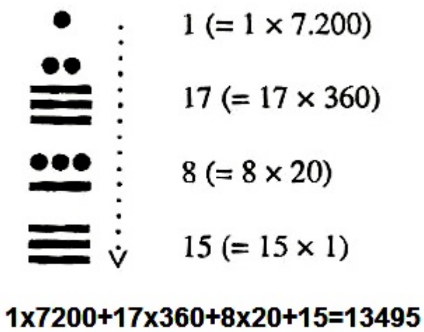
Figura 90 – Representação de 4.399 no sistema Maia.



FONTE: [33], p.640.

Do quarto patamar em diante, teremos ordens com o valores 20 vezes a anterior. Então no quarto patamar teremos valores iguais a $20 \times 360 = 7.200$, a quinta ordem seria de valor $20 \times 7.200 = 144.000$ e assim por diante.

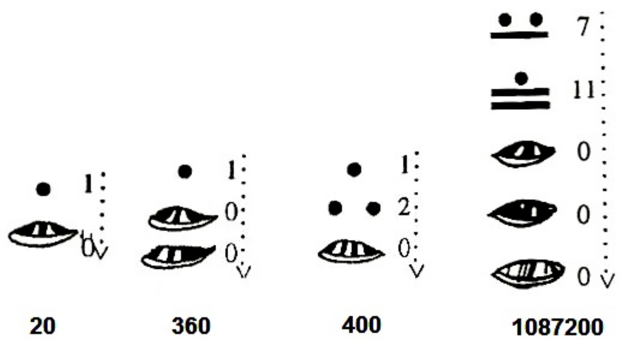
Figura 91 – Representação de 13.495 no sistema Maia.



FONTE:[33], p.640.

Caso não houvesse unidades em determinada ordem, uma espécie de símbolo de caramujo era colocado nesse "vazio". No sistema numérico maia existia o zero, coisas que os europeus precisaram esperar até a Idade Média para receber dos árabes a invenção dos hindus.

Figura 92 – Emprego do zero no sistema Maia.



FONTE: [33], p.643.

Muito dessas decodificações, foram encontrados em uma cópia do século XI, do *Códex de Dresden* (nome da biblioteca que o possui). Esse código, era um tratado de astronomia e adivinhação, dos astrônomos e sacerdotes maias. Os maias faziam seus registros com uma escrita na forma de desenhos e nos monumentos eram esculpidos em relevo. Em outras culturas também era usado o mesmo procedimento, em uma espécie de livro sanfonado, os códex, em pele de veado. Sobre essa escrita, os especialistas conseguiram identificar os sinais de numeração nos glifos associados aos calendários. Nesse sistema de calendários podemos encontrar: 1 kin = 1 dia ; 1 uinal = 1 mês = 20 dias; 1 tun = 1 ano = 360 dias; 1 katun = ciclo de 20 anos = 7.200 dias; 1 baktun = ciclo de 400 anos = 144.000 dias; 1 pictum = ciclo de 8.000 anos = 288.000 dias.

Figura 93 – Página 24 do Códex de Dresden.

FONTE: http://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/2967/24/ Acesso em: 11/06/2016.

O sistema maia não era puramente de base 20, ou seja, não possuía somente potências de 20, em cada ordem. O zero maia não pode desempenhar a capacidade operatória do zero do sistema hindu e portanto, era mais restrito no sentido aritmético.

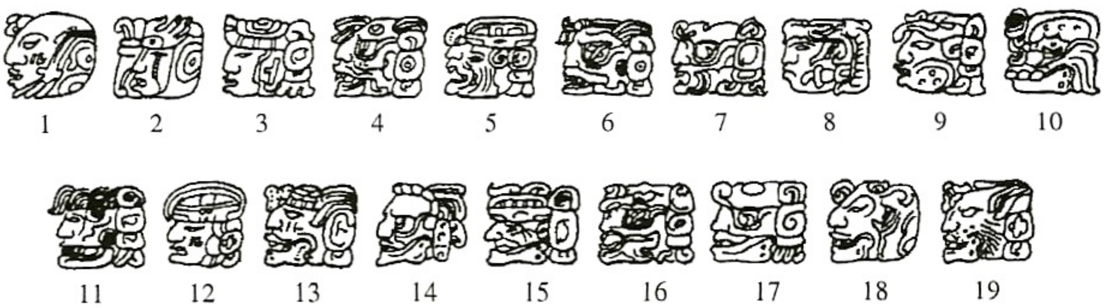
Sobre os calendários, as divisões importantes dos períodos, como meses, dias, anos, determinados períodos, eram representado por glifos de fardos, que eram carregados por deuses, ou melhor deus-carregador, que estava ligado a certas ocorrências para o bem ou para o mal em determinados períodos e de acordo com o estado de humor e personalidade dos deuses representados. Os sacerdotes eram astrônomos, uniam a mística, religião e poder, contribuindo para dominar e controlar o povo, traçar o destino de determinada pessoa pela data do seu nascimento, oferecer conselhos pra datas de batalhas, estabelecer datas de casamento, dias e tipos de rituais e outras interferências.

Figura 94 – Glifo Deus-Carregador.

FONTE: https://horadelsur.wordpress.com/tag/poesia-visual/ Acesso em: 11/06/2016.

Em algumas construções, números que demarcavam datas eram também representadas por outro processo, eram entalhado nas paredes com formas de cabeça dos deuses, essas formas recebiam o nome de representações cefalomórficas e outras representações antropomórficas, equivalentes aos deuses-carregadores, essa forma de representar era também uma forma de homenagear os deuses associados ao tempo, e por isso o zero não poderia também faltar nessas representações, pois os mais não ousariam desafiar o humor ou desagradar algum deles.

Figura 95 – Representação cefalomórfica dos algarismos.



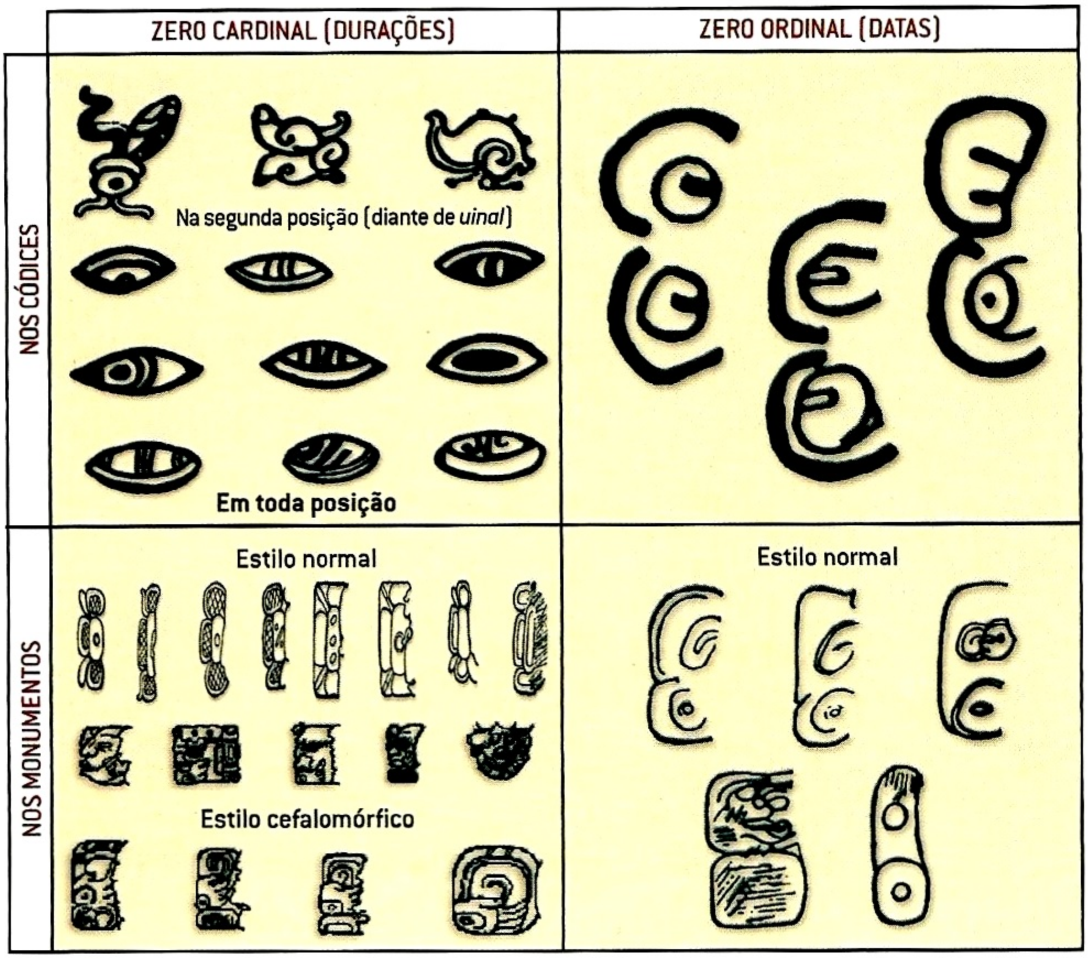
FONTE: [33], p.656.

Figura 96 – Representação antropomórfica do número 1 =kin=dia.

FONTE: [33], p.656.

Pela diversidade de formas e estilos de representatividade, acrescido da carência de fontes, tornam o processo de decodificação algo muito difícil e complexo. Só o zero foi identificado nas diferentes formas:

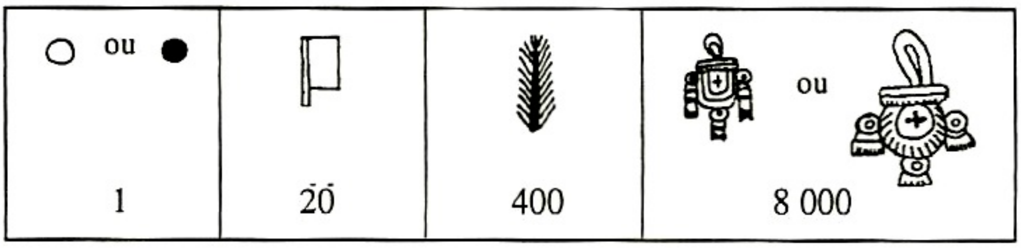
Figura 97 – Variedades de zeros Maias.



FONTE: [15], p.12.

Sobre a numeração asteca, sabe-se que ela também é de base 20, um sistema muito simples com principio aditivo, com unidade representada por um ponto, a vintena por um machado, uma espécie de pluma indicaria 400 e 800 seria uma bolsa.

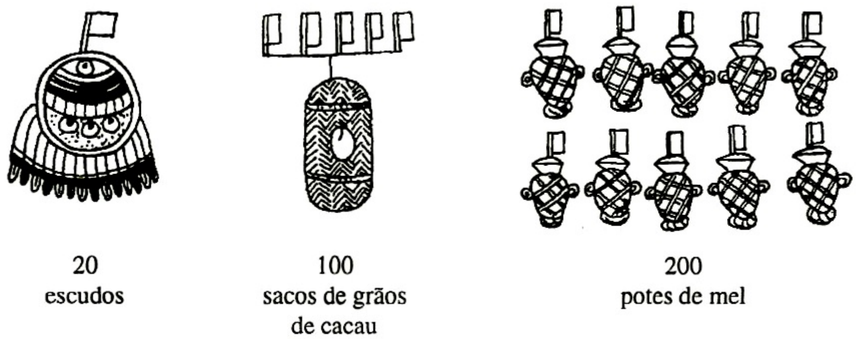
Figura 98 – Algarismos Astecas.



FONTE: [33], p.634.

Para indicar as numerações, usavam desenhos ou pictogramas do que queria se quantificar e desenhavam os símbolos representativos das quantidades associadas, usando repetição por quantas vezes fosse necessário. Esse sistema com grande semelhança foi usado pelos zapotecas e mixtecas.

Figura 99 – Uso de numeração Asteca.



FONTE: [33], p.634.

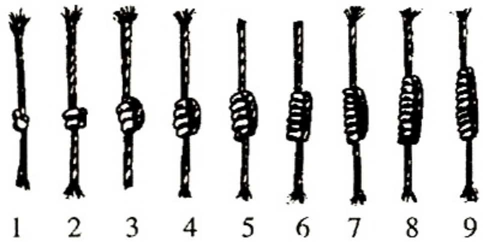
No tempo da colonização, houve relatos de que quando os nativos iam a Cuzco para pagar tributos aos colonos, amarravam cordas coloridas dando nós, e enfileirava essas cordas amarrando numa outra, semelhante a um espécie de varal. Esse amarrado de cordas com nós, recebia o nome de quipos, que quer dizer nós na língua nativa. Esse foi o único meio de registro numérico encontrado dos incas, era de base decimal, e usado como instrumento de armazenagem de informação, sobre estocagem, estatística de recenseamento, força de trabalho, livro contábil e registros de datas. Somente os burocratas, conhecidos como *quipucamayocs*, compreendiam o sistema dos quipos. Poucos exemplares se encontram atualmente, e foram obtidos em sítios funerários, junto aos cadáveres, pois os incas enterravam os defuntos com objetos de uso quando vivos. Muito mais que registrar números, cada cor possivelmente seria usado para determinado uso, poderia ser ferramentas, utensílios, armas, guerreiros. Também havia variação nos tipos de nós, que se diferenciavam pelo formato e tipos de nós.

Figura 100 – Tipos de Nó.

FONTE: [15], p.16.

Um nó longo, com várias voltas, indicava a representação decimal das unidades:

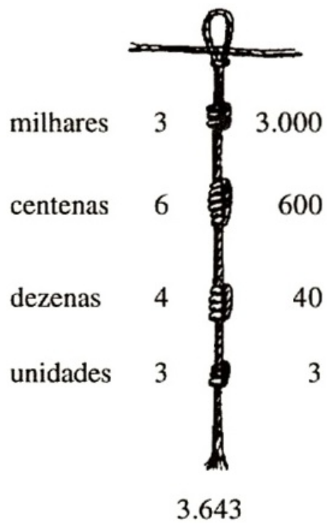
Figura 101 – Representação numérica no Quipo.



FONTE: [35], p.100.

A cada nível separado por um espaçamento longo entre os nós, correspondiam as ordens das potências de dez.

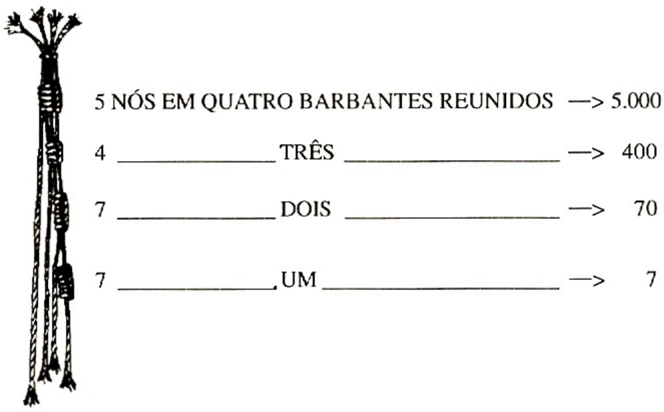
Figura 102 – Representação de 3.643 no Quipo.



FONTE: [35], p.100.

Outro modo também era encontrado: nó em dois barbantes indicava as dezenas, nó em três barbantes a centena, nó em quatro barbantes a milhar.

Figura 103 – Representação 5.477 no Quipo.



FONTE: [35], p.102.

No livro As veias abertas da América Latina, de Eduardo Galeano, é possível encontrar relatos sobre como se deu a dominação dos povos nativos, com objetivo de se tornar um relato de política econômica, o livro é polêmico recebendo críticas até do próprio autor. Segue abaixo alguns relatos:

> Havia de tudo entre os indígenas da América: astrônomos e canibais, engenheiros e selvagens da Idade da Pedra. Mas nenhuma das culturas nativas conhecia o ferro nem o arado, nem o vidro e a pólvora, nem empregava a roda, a não ser em pequenos carrinhos. (...) Fernão Cortez desembarcou em Veracruz acompanhado por não mais de 100 marinheiros e 08 soldados; trazia 16 cavalos, 32 bestas, 10 canhões de bronze e alguns arcabuzes, mosquetões e pistolas. Bastou-lhe isto. E entretanto a capital dos astecas, Tenochtitlán, era cinco vezes maior do que Madri e tinha o dobro da população de Sevilha, a maior das cidades espanholas. Francisco Pizarro, por seu lado, entrou em Cajamarca com 180 soldados, 37 cavalos, e encontrou um exército de 100 mil índios. (...) Os indígenas foram derrotados também pelo assombro. (...) Os estrangeiros traziam "veados" nos quais montavam e "ficavam da altura dos tetos". Por todas ás partes tinham o corpo envolto, "somente as caras aparecem. São brancas, como se fossem de cal. Têm cabelo amarelo, embora alguns os tenham pretos. Sua barba é grande...". Montezuma acreditou que era o deus Quetzalcóatl que voltava. Oito presságios haviam anunciado, pouco antes, o retorno. (...) O deus Quetzalcóatl tinha vindo pelo leste e pelo leste tinha-se ido: era branco e barbudo. Também branco e barbudo era Viracocha, o deus bissexual dos incas. E o leste era o berço dos antepassados heroicos dos maias. Os deuses vingativos que agora regressavam para saldar contas com seus povos traziam armaduras e camisas de malhas, escudos brilhantes que devolviam os dardos e as pedras; suas armas disparavam raios mortíferos e escureciam a atmosfera com fumaças irrespiráveis. Os conquistadores praticavam também, com refinamento e sabedoria, a técnica da traição e da intriga. Souberam aliar-se com os tlaxcaltecas contra Montezuma e explorar, com proveito, a divisão do império incaico entre Huáscar e Atahualpa, os irmãos inimigos. Uma vez abatidas, pelo crime, as chefias indígenas, souberam ganhar cúmplices entre as castas dominantes intermediárias, sacerdotes, funcionários, militares. Além disso, também usaram outras armas ou, se se prefere, outros fatores trabalharam objetivamente para a vitória. Os cavalos e as bactérias, por exemplo. As bactérias e os vírus foram os aliados mais eficazes. Os europeus traziam consigo, como pragas bíblicas, a varíola e o tétano, várias doenças pulmonares, intestinais e venéreas, o tracoma, o tifo, a lepra, a febre amarela, as cáries que apodreciam as bocas. A varíola foi a primeira a aparecer. Não seria um castigo sobrenatural aquela epidemia desconhecida e repugnante que aumentava a febre e descompunha as carnes? "Já se foram a mexer em Tlaxcala. Então se difundiu a epidemia: tosse, grãos ardentes, que queimam", diz uma testemunha indígena, e outro: "Muitos morreram com a pegajosa,

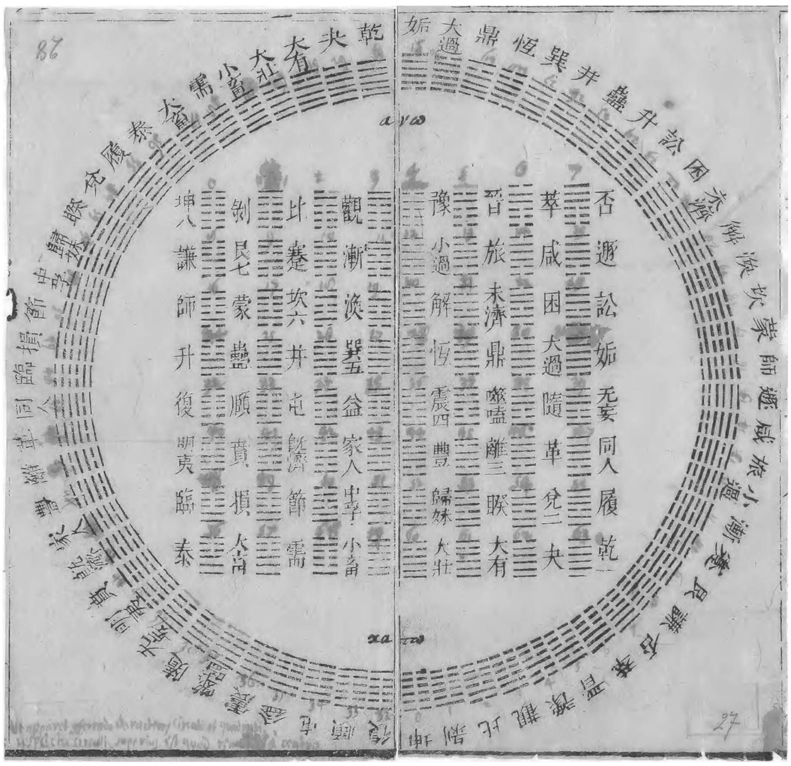
compacta, dura doença de grãos". Os índios morriam como moscas; seus organismos não opunham defesas contra doenças novas. E os que sobreviviam ficavam debilitados e inúteis. O antropólogo brasileiro Darcy Ribeiro calcula que mais da metade da população aborígene da América, Austrália e ilhas oceânicas morreu logo no primeiro contato com os homens brancos. ([27], p.35-38)

14 SISTEMA BINÁRIO

14.1 REFERÊNCIAS INICIAIS.

Um pequeno artigo publicado pelo filósofo, teólogo, diplomata e matemático alemão, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), em um periódico científico da França, causou grande impacto ao longo das gerações. O artigo descrevia uma possível decodificação dos *mistérios* de figuras de um lendário filósofo e rei chinês, chamado Fuxi (ou Fu Hsi), considerado o fundador da civilização Chinesa, que possivelmente viveu cerca de 4000 a. C. Os chineses atribuíram a Fuxi, os ensinamentos de caça, escrita, pesca, costura, culinária, domesticação de animais, a matemática, o calendário e o I Ching. O artigo de Leibniz era sobre resultados de trocas de correspondências com o reverendo jesuíta, o francês Pe. Joachin Bouvet (1656-1730), que morava em Pequim, e contribuía com estudos e materiais de consulta. Bouvet relatou a Leibniz sobre um livro muito antigo, que segundo os chineses continha a chave para o conhecimento de todas as coisas, ou explicaria todo o funcionamento do universo, e em novembro de 1701, enviou para Leibniz uma figura contendo os desenhos de Fuxi, que eram os 64 hexagramas do I Ching. O I Ching ou Livro das Mutações, serviu de oráculos e base de duas principais correntes filosóficas chinesas, o Confucionismo e Taoismo.

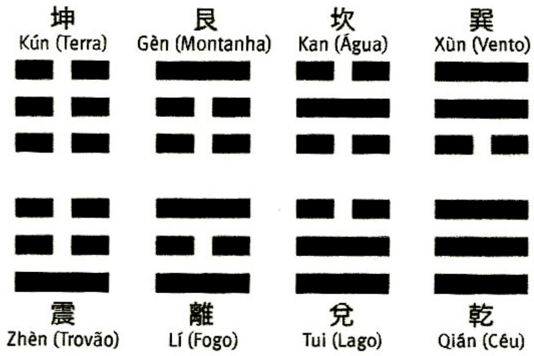
Figura 104 – Hexagramas do I Ching enviados a Leibniz.



FONTE: *https://en.wikipedia.org/wiki/I_Ching%27s_influence#/media/File:*
Diagram_of_I_Ching_hexagrams_owned_by_Gottfried_Wilhelm_Leibniz,_1701.jpg
Acesso em: 09/07/2016.

Os hexagramas são figuras lineares compostas por seis linhas ou covas, de dois tipos, as linhas inteiras e as linhas interrompidas. Conta a lenda que o rei Fuxi estava passeando nas margens do rio Amarelo, quando viu uma criatura com cabeça de cavalo e corpo de dragão sair das águas do rio, possuindo nas costas 8 símbolos, compostos por três linhas, dos dois tipos, as inteiras e as interrompidas. Com um insight divino, Fuxi memorizou e registrou os desenhos, dizendo que neles estariam contidos o conhecimento de todas as coisas. Esses oito símbolos são os trigramas, que combinados dois a dois (8×8), formam os 64 hexagramas.

Figura 105 – Trigramas.



FONTE: [52], p. 44.

A dualidade ou binaridade das linhas foi associada ao principio taoista do yin yang (c. 700 a.C.), das interligações das forças universais. Descreve a ideia de polaridade, onde tudo no universo pode ser enquadradas em duas categorias interligadas, complementares e antagônicas. “Uma concepção que opõe, em alternância, complementaridade ou interação, duas energias: uma ‘feminina’, o yin, e outra ‘masculina’, o yang”. ([34], p. 575)

Figura 106 – Yin Yang.

FONTE: *https : //en.wikipedia.org/wiki/Yin_and_yang* Acesso em: 09/07/2016.

Os desenhos chineses de Fuxi, foram interpretados por uma correspondência de um sistema numérico de base dois, *que serve apenas dos caracteres 0 e 1* e Leibniz dizia que esse simples sistema serviria para a perfeição da ciência de números.

Figura 107 – Tábua Binária de Leibniz.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	1	1	3
0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	1	0	1	5
0	0	0	1	1	0	6
0	0	0	1	1	1	7
0	0	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	9
0	0	1	0	1	0	10
0	0	1	0	1	1	11
0	0	1	1	0	0	12
0	0	1	1	0	1	13
0	0	1	1	1	0	14
0	0	1	1	1	1	15
0	1	0	0	0	0	16
0	1	0	0	0	1	17
0	1	0	0	1	0	18
0	1	0	0	1	1	19
0	1	0	1	0	0	20
0	1	0	1	0	1	21
0	1	0	1	1	0	22
0	1	0	1	1	1	23
0	1	1	0	0	0	24
0	1	1	0	0	1	25
0	1	1	0	1	0	26
0	1	1	0	1	1	27
0	1	1	1	0	0	28
0	1	1	1	0	1	29
0	1	1	1	1	0	30
0	1	1	1	1	1	31
1	0	0	0	0	0	32

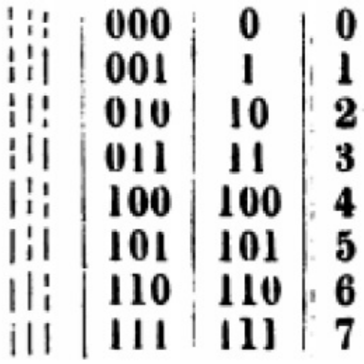
etc.

FONTE: [40], p.91.

Nessa tábua é possível notar um padrão geométrico retangular, com linhas obedecendo as potências de 2. Segue-se a seguinte interpretação, de Leibniz:

> O que há de surpreendente nesse cálculo é que essa aritmética de 0 e 1 contém o mistério das linhas de um antigo rei e filósofo chamado Fuxi (...). Há várias figuras lineares a ele atribuídas que se relacionam todas a essa aritmética; mas basta apresentar aqui a figura de oito Cova, como se chama, tida como fundamental, e a ela acrescentar a explicação que é óbvia, desde que se note primeiro que uma linha inteira — significa a unidade ou 1, e em segundo que uma linha quebrada — significa o zero ou 0. ([40], p.93)

Figura 108 – Correspondência binária dos trigramas.



FONTE: [40], p.93.

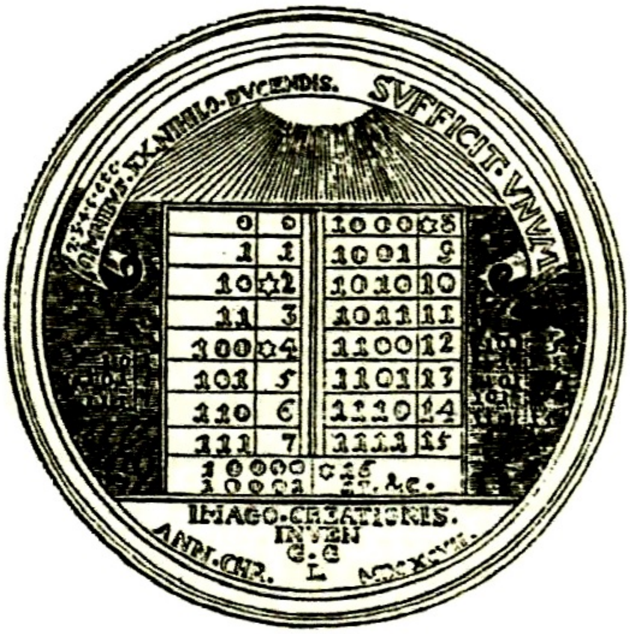
Esse mesmo sistema de maneira simples, permitia através de combinações de potências de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,...), escrever com facilidade qualquer número inteiro, facilitando por exemplo, os sistemas de pesagens, possibilitando "pesar toda sorte de massas com poucos pesos e poderia servir para que as moedas proporcionassem vários valores com poucas peças." Também seriam mais viável executar cálculos com considerável facilidade, com a desvantagem de uma longa ou extensa representação numérica. Muito mais que uma simples decodificação, outras motivações contribuíram com esse trabalho de números binários:

> Leibniz era um otimista inveterado. Não só acreditava poder reunir as seitas religiosas conflitantes de seu tempo numa única igreja universal, como, também acreditava que podia encontrar um meio de cristianizar a China através do que ele considerava ser a imagem da criação na aritmética binária. Como Deus pode ser representado pela unidade e o nada pelo zero, ele imaginava que Deus tivesse criado o tudo do nada, assim como na aritmética binária todos os números se expressam por meio da unidade e do zero. Essa ideia agradava tanto a Leibniz que a comunicou ao jesuíta Grimaldi, presidente do Conselho de Matemática da China, na esperança de que ele pudesse converter o imperador chinês (que era muito ligado a ciência) e indiretamente, toda a China ao cristianismo."([23], p. 444)

Diante de um cenário desafiador, os missionários jesuítas, envolvidos no processo de catequização dos chineses, encontram grandes dificuldades, pois a China estava sob a ótica do desenvolvimento intelectual e técnico-científico, talvez em igual patamar com a Europa. No ano de 1689, Leibniz encontra com o padre jesuíta Claudio Filippo Grimaldi (1638-1712) em Roma, e toma ciência das questões culturais e técnicas da China, despertando grande curiosidade. Grimald é um jesuíta influente e extraordinário cientista, estava à frente da propagação da doutrina cristã, que também contribuiria para preparar o terreno para um possível domínio colonial, aos moldes Europeu. Nesse processo que de grande importância estratégica, em 1687, a frança escolhe seis dos melhores matemáticos da *Académie des Sciences*, que eram também padres jesuítas, e envia a China não só para intensificar os trabalhos de conversão, mas de colher o máximo de informações culturais e científicas e enviá-las a França. Entre esses enviados estava o Pe Bouvet, um dos principais representantes em decodificar e interpretar textos "heréticos", que teve as mais significativas correspondências com Leibniz. [44]

Empolgado Leibniz sugere ao duque Rodolfo de Brunswick, a confecção de uma moeda ou medalhão memorial, contendo uma tábua com representações binárias dos números de 0 a 15, com uma frase em latim: *omnibus ex nihilo ducendis suffit unum* (para tudo surgir do nada, basta um). A medalha acabou não sendo produzida. ([52], p. 45)

Figura 109 – Medalha binária idealizada por Leibniz.



FONTE: [52], p.46.

Para alguns o cálculo binário nasce com a filosofia chinesa, que é incorreto. Sobre as interpretações de Leibniz, só se pode concluir que houve uma correlação com as figuras de Fuxi, no fato delas trabalharem com dois símbolos (tipos de linha), e para por aí. O princípio da numeração binária, fundada no principio de posição e munida do zero, serve para demarcar os números. Outro fato é de que na época do surgimento e propagação dos desenhos de Fuxi, os chineses não tinham o conhecimento do zero e não trabalhava com os recursos operatórios da numeração escrita, do tempo de Leibniz.

Desde criança, com prodigiosa capacidade autodidata, Leibniz aprendeu latim e grego por conta própria, e aos 12 anos já dominava a todo conhecimento corrente de matemática, filosofia, teologia e leis publicadas pelos textos da época. Também desenvolvia a mentalidade e uma concepção de uma ciência universal, *Characteristica generalis*, algo que futuramente contribuiria com a lógica simbólica de George Boole (1815-1864) e em 1910, nos *Principia mathematica* de Whitehead e Russell (EVES, 2004, p. 442). Com esse trabalho Leibniz queria deixar uma ferramenta de pensamento definitiva, representando noções e ideias simples por símbolos, os mais complexos por combinações adequadas desses sinais básicos, na esperança de literalmente, ser capaz de computar a verdade de qualquer sentença, em qualquer disciplina científica, por meras operações algébricas, e que com cálculo lógico correto, até os debates em filosofia seriam resolvidos por cálculo. Assim, também se torna um dos maiores contribuintes em uso sistemático de símbolos e notações, com o intuito de universalizar e pôr ordem em todas as coisas. Na lógica, esse processo foi altamente significativo:

> Para reduzir as discussões lógicas à forma sistemática, desejava desenvolver uma característica universal, que servisse como uma espécie da álgebra da lógica. (...) Símbolos universais ou ideogramas deveriam ser introduzidos para o pequeno número de conceitos fundamentais necessários ao pensamento, e ideias compostas deveriam ser formadas desse 'alfabeto' dos pensamentos humanos, exatamente do mesmo modo como as fórmulas são desenvolvidas em matemática.(...) A verdade e o erro seriam então apenas questão de cálculo correto ou errado dentro do sistema, e terminariam as controvérsias filosóficas. Além disso, novas descobertas podias ser feitas por operações corretas, mas mais ou menos rotineiras, sobre os símbolos, de acordo com as regras do cálculo lógico. Leibniz tinha orgulho justificado dessa ideia, mas seu entusiasmo não encontrou ecos nos demais. O otimismo de Leibniz parece hoje ter sido injustificado; mas sua sugestão de uma álgebra lógica se desenvolveu em seu pensamento ao longo dos anos e foi reavivada no século dezenove." ([9], p. 291)

Em meados do século XIX, em que se intensifica um contexto, onde o conhecimento está interligado ao desenvolvimento dos sistemas produtivos, com máquinas se tornando ferramentas revolucionárias nesse sistema. Métodos de medição, controle, disciplinamento, impulsiona uma nova onde de produção de conhecimentos científicos e técnicos, que possibilitam o aumento de produtividade e redução de tempo de trabalho incorporado nos produtos, redução de custos, aumento de lucratividade e aumento de acumulação de riqueza, se tornando a nova forma de poder. Além da mudança da concepção do sistema produtivo, uma poderosa indústria também é mobilizada, que é a industria da guerra. Nesse terreno o paradigma mecanicista de Leibniz, em que o pensamento nada mais é que um processo mecânico de cálculo ganha força com George Boole (1815-1864).

George Boole nasceu na cidade industrial de Lincoln, Inglaterra. Filho de um sapateiro e de uma serviçal, era um grande autodidata. A pobreza da família o obriga, a trabalhar como professor, para ajudar a sustentar os pais e o irmão. Seus estudos, contribuíram para que começasse a publicar artigos em periódicos e a corresponder com

De Morgan (1806-1871), a quem estava enviando os artigos matemáticos para comentários. Dessa amizade, Boole teve muito interesse na controvérsia sobre lógica da qual De Morgan estava envolvido. Assim Boole acabou por estudar e publicar sobre o assunto. Sobre seus trabalho, sabe-se que:

> Boole de um passo adiante nas formulações precedentes: algebrizou a lógica, empregando efetivamente letras ou variáveis para representar classes de objetos de um certo universo de discurso. Tal trabalho não só exemplifica o processo moderno de matematização do conhecimento, algebrizando as "regras" do pensamento, como tem significado histórico na medida que inicia o processo de manipulação simbólica da lógica." ([53], p. 36)

No primeiro livro publicado *The Mathematical Analysis of Logic*, Bolle defende que a lógica deve ser associado a matemática:

> Poderíamos, com justiça, tomar isso como característica definitiva de um verdadeiro cálculo: que seja um método que se apoia no uso de símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais, e cujos resultados admitem uma interpretação consistente. É com base nesse princípio geral que eu pretendo estabelecer o cálculo da lógica, e que reivindico para ele um lugar entre as formas reconhecidas da análise matemática." ([9], p. 373)

No pequeno livro intitulado *Investigation of the laws of Thought*, pode-se dizer que Boole literalmente transformou a lógica em um tipo de álgebra, sendo conhecia por álgebra booleana. Assim:

> (...) estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra, chamada álgebra de Boole, ou álgebra dos conjuntos, ou álgebra da lógica. Boole usou letras x, y, z, ... para representar um subconjunto de coisas – números, pontos, ideias ou outras entidades – escolhidas de um conjunto universal ou universo de discurso, cuja totalidade ele designava pelo símbolo ou 'número' 1. Por exemplo, se 1 representava todos os europeus, x poderia representar todos os europeus que são cidadãos franceses, y poderia representar todos os homens europeus de mais de vinte e um anos, e z todos os europeus cuja altura está entre 1,50m e 1,80m. Boole tomou o símbolo 0 para indicar o conjunto vazio, que não contém nenhum elemento do conjunto universal, o que agora se chama conjunto nulo. ([9], p. 373-374)

Os números binários e a lógica consolidam uma união altamente sucedida e revolucionária, que mudará os rumos da organização humana. Leibniz conseguiu colocar o tema dos números binários como assunto da moda para os estudiosos europeus. A medida que a concepção de abstração vai amadurecendo, os estudiosos europeus começam a perceber propriedades estruturais no sistema de numeração, e passam a explorar possibilidades sobre a viabilidade de outros sistemas. O assunto será alvo de publicações de 1600 até 1970, com trabalhos enaltecendo vantagens, propriedade e aplicabilidades.

Apesar do sucesso das publicação de Leibniz, os primórdios dos estudos dos números binários se inicia em 1600, com o matemático, geógrafo e astrônomo inglês, Thomas Hariot (1560-1621), que elaborou para os trinta e um primeiros números, uma tabela de decomposição de potências consecutivas de 2. Esse material que não foi publicado, foi encontrado em seus pertences na forma de estudo sobre combinações, o que hoje é o resultado da quantidade de subconjuntos possíveis de ser formado, de um conjunto composto por dado número de elementos. Em meio a esses manuscritos também foi encontrado um outro resultado que afirmava que todo número natural de 1 a 2^{n-1} pode expresso pela soma de alguma combinação de potências dos n primeiros números do conjunto 1, 2, 4, 8, 16, ...

Em 1623, o inglês Francis Bacon (1561-1626) organiza uma codificação de cinco caracteres para as letras do alfabeto, fazendo substituição por sequência de letras a e b: A=aaaaa; B=aaaab; C=aaaba; D=aaabb; F=aabab; G=aabba; H=aabbb; I=abaaa e etc. Essa codificação é muito semelhante a representação binária pelos algarismo 0 e 1, se fizermos $a = 0$ e $b = 1$.

Em 1665, o francês Blaise Pascal (1623-1662) publica a obra *Dos caracteres de divisibilidade dos números deduzidos da soma de seus algarismos*, que pela primeira vez, fornece uma definição geral dos sistemas de numeração de base inteira igual ou superior a 2. A importância dessa obra, está no fato de ter contribuído para melhoria dos sistemas e estudos numéricos, adotando e desenvolvendo novas notações, estudo da natureza dos conjuntos numéricos, regras de potenciação de base e expoentes positivos e negativos, uso de frações decimais.

Em 1670 o bispo espanhol, Juan Caramuel y Lobkowitz publica *Mathesis Biceps* onde no capítulo *Meditatio* expõe um estudo sobre numeração de bases não decimais, com numeração binária, bases 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 20 e 60. Esse capítulo é iniciado pelas seguintes perguntas: "Existe uma aritmética ou muitas? Se muitas, o que são e como é que se distingue entre elas? Elas são úteis, ou apenas especulativas? Ou necessárias? Que lugar que ocupam na ordem das coisas?" ([30], p. 20). É por muito considerado de fato, o primeiro trabalho explicito de aritmética binária a ser publicado, lembrando que os trabalhos de Thomas Hariot não foram publicados e como Juan Caramuel y Lobkowitz era desconhecido, Leibniz é que foi aclamado como descobridor do sistema binário em 1703.

É importante ressaltar que na data de 1687, o inglês Isaac Newton (1643-1727) publica *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, contendo os fundamentos da mecânica clássica, as famosas três leis de Newton e a lei da gravitação universal. Trabalho importante para os estudos da cinemática, dinâmica, estática, energia mecânica. Pouco depois junto com Leibniz, se tornaria coinventor do *Cálculo Diferencial e Integral*.

Só a partir de 1701 que de fato Leibniz entra em campo com suas famosas publicações. Em 1732 o matemático suíço Leonhard Euler (1701-1783) com troca de correspondências aprimora os aspectos de notações e representações gráficas, desde exponencial e de sentenças lógicas. Em 1798 o matemático Francês Adrien Marie le Gendre (1752-1833) publica trabalhos sobre a *conversão do sistema binário ao sistema octal e ao sistema hexadecimal*.

14.2 PRIMÓRDIOS DA COMPUTAÇÃO ARTIFICIAL.

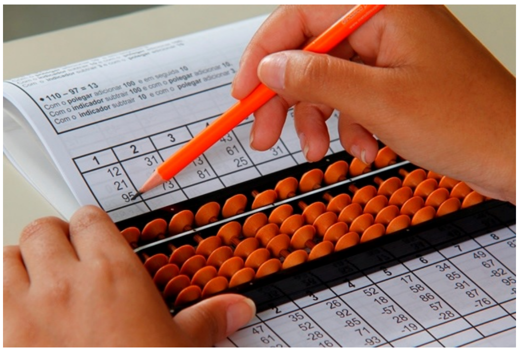
O período de 1760 até 1840, a Europa passa por um processo de grande mudança de estrutura de produção, conhecimento e organização política. Esse período é conhecido historicamente pela Revolução Industrial. Com a necessidade de implementação e desenvolvimento de máquinas, o cálculo mecânico ganha destaque. A intensificação das atividades bancárias e industrial exige ferramentas e formas de registros e cálculos para contabilidades e gestão dos investimentos, produção, inovação e gestão. Otimizar e automatizar processos, sejam de produção, gestão e ação, é a nova concepção inaugurada nesse período.

Desde a antiguidade, era nítida a necessidade de meios que ajudasse no processo de operação numérica: tábuas de consulta, objetos como pedras ou varetas, técnicas mnemônica, fichas, ou instrumentos mecânicos como os famosos ábacos. A palavra ábaco deriva da palavra *abq* ou pó, associado a bandeja de areia usado como instrumento de manipulação ou operação numérica. Os processos de operações numéricas, são chamados de cálculos. Calcular, derivado da palavra latina calculus, e associado ao grego *chalix*, significam pedrinha ou seixo, ao ato de calcular chamamos de computação. Desde os primórdios o homem com suas necessidade básicas de computar rebanhos, transações comerciais, partilhas de terras e com necessidade de demarcar e se organizar no tempo, exerce computações de calendários e processos de aferições temporais. Atualmente na matemática a ideia de cálculo é muito mais que realizar operações aritméticas básicas, mas sim uma “manobra hábil para chegar aos fins esperados, do objetivo planejado, etc.” ([34], p.563) Além do cálculo numérico, temos também o cálculo: algébrico, vetorial, matricial, tensorial, das funções, diferencial, integral, infinitesimal, econômico, avançado, sentencial ou proposicional e muitos outros. Com a consagrada frase “os números governam o mundo” de autoria de Platão, é nítido que:

> (...) se o governam, não o divertem. O problema vem de que o cálculo é lento, penoso e sobretudo fastidioso. E se é fastidioso é porque é frequentemente é repetitivo. Ora é precisamente o que provoca todas as espécies de bloqueios, constituindo frequentemente um entrave ao avanço das ciências e do conhecimento.([34], p.586)

Para amenizar a tarefa do processo de cálculo, um dos instrumentos mais antigos é o ábaco, ainda amplamente usado pelo mundo, sendo o *soroban*, o de maior popularidade. Nos países asiáticos é muito comum competições nacionais com uso do ábaco. No Brasil há franquias que propagam o aprendizado e prática de executar cálculos com esse ábaco como meio de *ginástica cerebral*.

Figura 110 – Soroban - Ábaco japonês.



FONTE: http://metodosupera.com.br/saude-mental/o-soroban-aprimoramento-da-concentracao-da-agilidade-de-raciocinio/ Acesso em: 15/07/2016.

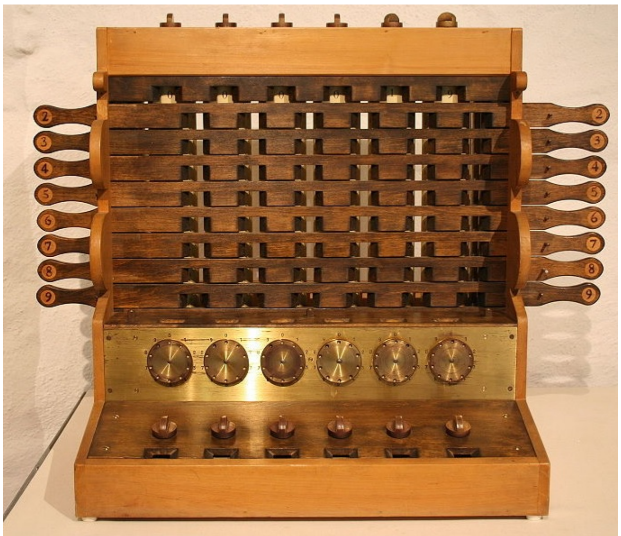
Em 1614 o escocês John Napier (1550-1617), Barão de Merchinston, administrador e dono de grandes propriedades, com objetivo de simplificar cálculos de produtos e quocientes e cálculos trigonométricos, publica um trabalho sobre logaritmos e inventa um dispositivo para facilitar os cálculos. O dispositivo conhecido por *Ossos de Napier* era uma espécie de tabuada de multiplicação, esculpidas em bastões ou ossos verticais, com diferentes colunas numeradas.

Figura 111 – Ossos de Napier do século XVII.

FONTE: http://zonadepruebas.org/backup/modules/smartsection/item.php?itemid=1083 Acesso em: 15/07/2016.

Um professor de astronomia e matemática da Universidade de Tübinge, constrói uma máquina que fazia adições e subtrações automaticamente e multiplicações e divisões semi automaticamente, esse professor era o alemão Wilhelm Schickard (1592-1635). Ele descreve a máquina de calcular em 1623 e 1624, e seria para uso de Johannes Kepler (1571-1630). A máquina construída, batizada de relógio calculador, foi destruída em um incêndio antes do término, e as outras cópias das máquinas desapareceram na Guerra dos Trinta Anos. Uma cratera lunar de 227 km de diâmetro, recebe o nome de *Cratera de Schickard*, em homenagem, ao criador da primeira calculadora mecânica.

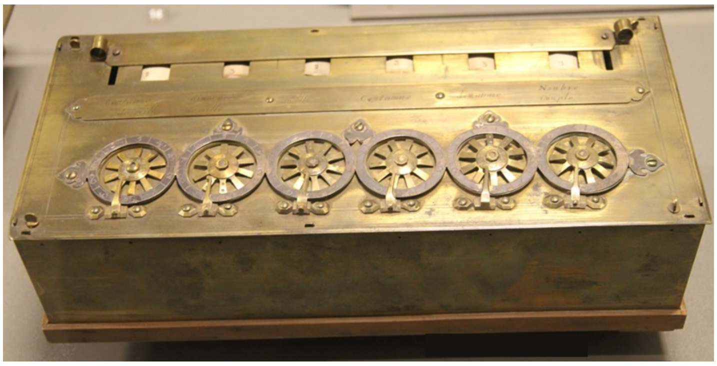
Figura 112 – Relógio Calculador.



FONTE: https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard#/media/File:Schickardmaschine.jpg Acesso em: 15/07/2016.

Em 1642, apara ajudar o pai nos cálculos trabalhosos, cansativos e rotineiros da coletoria regional de impostos de Rouen (França), Pascal cria uma máquina de somar e subtrair, com capacidade de operar com números de até seis dígitos. A calculadora de Pascal, conhecida como Pascalina, revela o protótipo das atuais máquinas de calcular, e tinha uma construção baseada em um sistema de engrenagens. A Pascalina foi construída para ajudar seu pai nos cálculos rotineiros na coletoria regional de impostos da cidade de Rouen.

Figura 113 – Pascalina.



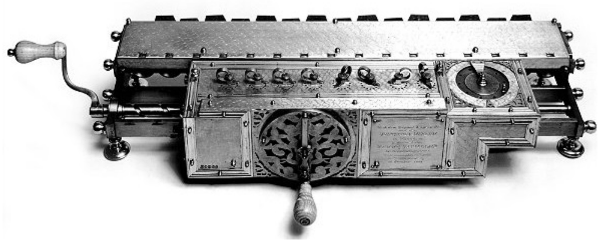
FONTE: http://www.ami19.org/Pascaline/IndexPascaline-English.html Acesso em: 15/07/2016.

Em 1671 Leibniz construiu uma máquina chamada *Stepped Reckoner*, que somava, subtraia, multiplicava e dividia. Aluno do professor alemão Erhard Weigel (1625-1699), que treinava multidões com tabelas de multiplicação, pode ter de certo modo influenciado, na busca de instrumentos alternativos para facilitar os cálculos. Sobre a utilidade da máquina, Leibniz disse:

> Podemos dizer que seria desejável para todos os que usam computações que, é bem conhecido, há encarregados de negócios financeiros, de administradores de outros estados, mercadores, topógrafos, geógrafos, navegadores, astrônomos e [aqueles ligados a] qualquer dos ofícios que utilizam a matemática. Mas limitando-nos a usos científicos, as velhas tabelas geométricas e astronômicas podiam ser corrigidas e construídas novas com ajudas das quais podíamos medir todas as espécies de curvas e figuras (...). Mais ainda, (...) seria fácil a qualquer um construir tabelas de modo a poder conduzir as suas investigações com pequeno trabalho e com grande precisão (...). Também os astrônomos seguramente não terão de continuar a exercitar a paciência requerida pela computação (...). Pois é trabalho sem mérito que homens excelentes percam horas como escravos no labor do cálculo, que podiam ser seguramente relegado para outrem se a máquina fosse usada. ([37], p. 1080)

O custo benefício para a fabricação de uma calculadora mecânica era muito alto, e os logaritmos contribuía fortemente para construção de tabelas de consultas, que cada vez mais se popularizava e estavam nas mesas e no bolso de quem a precisasse. A calculadora de Leibniz não chegou a ser comercializada, a de Pascal teve fabricação de pouco mais de 50 unidades.

Figura 114 – Stepped Reckoner.



FONTE:http://www.computerhistory.org/revolution/calculators/1/49/198 Acesso em: 17/07/2016.

Os dispositivos de engrenagens tinham por base a ideia mecânica do podômetro, uma espécie de relógio, composto por rodas dentadas e pinhões e uma alavanca, que girava sucessivamente, agulhas em torno de quatro mostradores, associados as unidades, dezenas, centenas e milhares. A referência mais antiga desse dispositivo é de 1525, pertencente ao artesão francês Jean Fernel. Em 1584, Errard de Ber-le-Duc define o aparelho como:

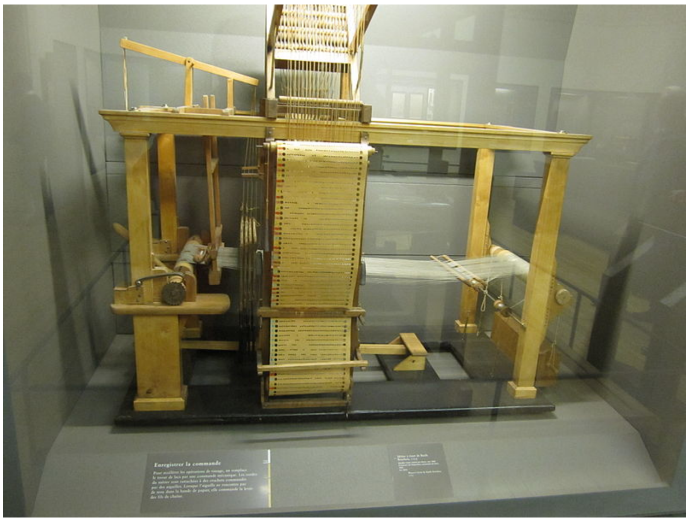
> Novo instrumento geográfico, o qual ligado à sola do cavalo, demonstra verdadeiramente pelo passo deste o comprimento do caminho

> que se teria feito (...) pelo qual os passos do homem se poderá medir exatamente o circuito de qualquer lugar ou o comprimento do caminho feito. ([34], p. 602)

Esse dispositivo permitia o transporte mecânico das unidades de cada ordem, e é base do atual conta-giros, velocímetros, contadores de roletas, e etc. Uma pessoa, poderia usar o podômetro, fixando o aparelho na cintura, no lado esquerdo e amarrava o cordão no joelho direito e na alavanca do aparelho. A cada passo dado a agulha do mostruário (ordem da unidade simples) marcava uma unidade. Na virada do nove para o zero, a agulha do próximo mostrador (ordem das dezenas) andava uma unidade, e assim por diante.

Em 1725, o tecelão Basile Bouchon inventa uma máquina que opera, recebendo instruções de uma tira de papel perfurado. Em 1728, Jean-Baptiste Falcon, assistente de Bouchon substitui a fita por cartões perfurados. Nesse sistema era necessário a presença permanente do tecelão durante o funcionamento dos teares. A partir desse momento inicia a era de comunicação entre homem e máquina.

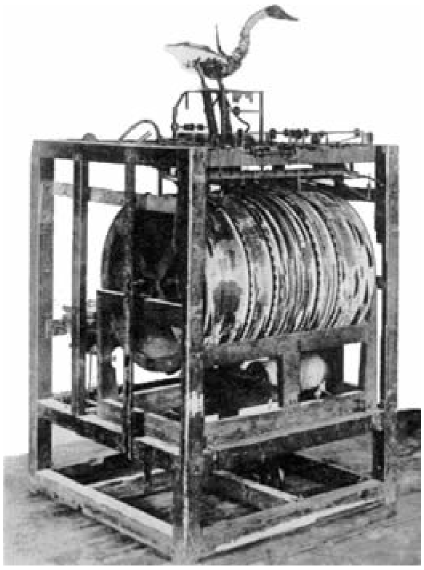
Figura 115 – Tear de Basile Bouchon.



FONTE:
https://en.wikipedia.org/wiki/Basile_Bouchon#/media/File:Basile_Bouchon_1725_loom.jpg
Acesso em: 17/07/2016.

Em 1739, o francês Jacques de Vaucanson (1709-1782), cria um pato mecânico que comia grãos, fazia a "digestão", e ainda defecava. O pato mecânico de nome *Digesting Duck* simulava o bater de asas, emitia som de pato, movimentava pescoço, patas, comia. Só nas asas haviam 400 partes articuladas. Toda simulação era comanda por uma espécie de tambor, com asperezas ou com relevos, parecido com as atuais caixinhas de joias músicas. E em 1749 ele substitui os cartões dos teares por um cilindro perfurado, movido por um sistema hidráulico. O tear teria seu funcionamento com instruções perfuradas em um cilindro (tambor cravejados de pontas) que girava repetidamente, movido por um sistema de queda d'água.

Figura 116 – Pato de Vaucanson.



FONTE:
http://insilicoinvivo.blogspot.com.br/2012/11/os-patos-mecanicos-de-vaucanson.html
Acesso em: 17/07/2016.

Em 1770, um relojoeiro suíço que residia em Paris, Pierre Jaquet-Droz (1721 - 1790), junto com seu filho Henri-Louis e Jean-Frédéric Leschot, constrói um boneco robô, *The Writer* semelhante ao pato de Vaucanson. O boneco é uma criança de três anos, que escreve mensagens com uma pena, com textos personalizados de até 40 letras.

Figura 117 – The Writer.

FONTE: http://www.thisiscolossal.com/2013/11/the-writer-automata/ Acesso em: 17/07/2016.

Em 1800 Alessandro Volta (1745-1827) cria a pilha elétrica, formada por empilhamento de pastilhas de zinco e cobre intercaladas por feltro embebido por uma solução ácida, formando uma coluna conectada por fios condutores nas extremidades. A unidade *Volt* é uma homenagem a Alessandro.

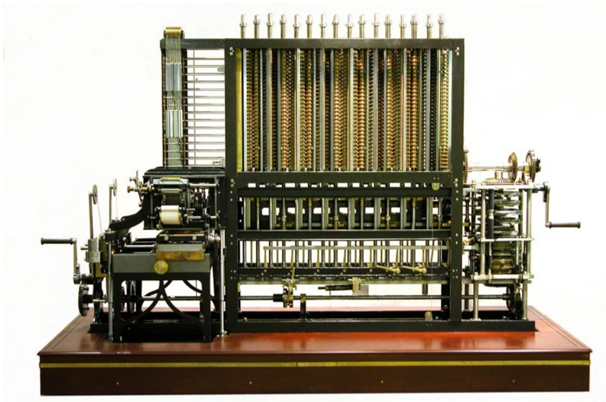
Em 1804 o francês Joseph Jacquard (1752-1834), com a morte do pai herda dois teares e tenta dar seguimento aos negócios da oficina de tecelagem. Com objetivo de aperfeiçoar o projeto dos teares, o negócio acaba não sendo bem sucedido. Jacquard desiste do negócio, tenta trabalhar com fabricação de cal, e participa de várias batalhas da guerra, inclusive perdendo um filho. Ao retornar dos campos de batalha, dedica seu tempo livre ao antigo projeto de melhorias no tear, com objetivo de automatizar as operações. Com auxilio de cartões perfurados, ele poderia dispensar os tecelões, programando as máquinas que executavam padrões de tecelagem desejados, sem alguém operando, com excelentes resultados. Jacquard declara a invenção de utilidade pública, ganha grande cifras de dinheiros com a invenção e a inimizades dos tecelões, principalmente de seda, que perderiam seus postos de trabalho. Os cartões perfurados, nada mais eram que uma forma de materializar uma espécie de memória, baseada no sistema binário.

Figura 118 – Tear de Jacquard.

FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph-Marie_Jacquard#/media/File:Jacquard_loom_p1040320.jpg Acesso em: 17/07/2016.

Em 1820 Charles Babbage (1791-1871) projeta a *máquina de diferenças* e tinha como objetivo tabular logaritmos, senos, cossenos e tangentes. Quando era criança, a mãe o levava para visitar exposições e museus que surgiam em Londres, e numa dessas visitas, o proprietário de um estabelecimento chamado Merlin, convida Babbage para conhecer a oficina no sótão, onde havia vários autômatos ou bonecos mecânicos, despertando grande facínio. Aplicando o "método matemático dito das *'diferenças finitas'* que, a partir de um valor inicial dado, permite substituir o cálculo dos valores de um polinômio de grau n por uma série de n adições sucessivas" ([34], p. 634) e adaptando uma ideia do matemático francês Gaspard de Prony (1755-1839), que para criar tábuas de logaritmo e de trigonometria, fazia a decomposição das operações em passos simples que envolvia apenas adição e subtração. De posse do método de De Prony, Babbage escreveu "Concebi de repente a ideia de aplicar o mesmo método em um trabalho imenso que estava me sobrecarregando, e manufaturar logaritmos como outros manufaturam alfinetes" ([36], p. 32). Sem recursos próprios e do governo britânico, o projeto se Babbage é abandonado. A dificuldade em desenvolver peças com precisão, com esgotamento de recursos e desinteresse do governo e dele próprio, o projeto é abandonado e substituído por outro mais ambicioso. O novo projeto é de construir a máquina analítica, um equipamento de 30m de comprimento, 10 metros de largura e movida por uma máquina a vapor. Seria programada por cartões perfurados, com capacidade de imprimir resultados e traçar curvas. Um projeto ambicioso para época. Devido a escassez de recursos técnicos, acrescido da incapacidade de concluir o projeto anterior da máquina de diferenças, Babbage fica num cenário de falta de credibilidade. A máquina recebe o nome de analítica, por trabalha com processos de decomposição, em partes elementares e ordenadas até a chegada do resultado. Babbage, nunca escreveu uma descrição completa da Máquina Analítica, mas deixou cerca de 300 folhas de desenhos de engenharia e milhares de páginas de notas detalhadas sobre suas ideias. Com razão ele disse: "Assim que uma máquina analítica existir, será necessário guiar o curso futuro da ciência". ([7], p. 95)

Figura 119 – Máquina diferencial de Babbage.



FONTE: *http : //pnld.moderna.com.br/category/dicas/page/*13/ Acesso em: 22/07/2016.

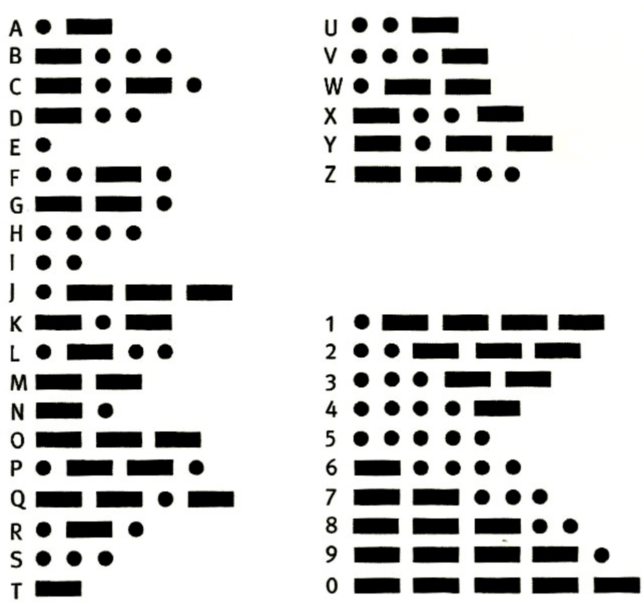
Em 1822 André-Marie Ampère (1755-1836) formula a lei da *eletrodinâmica*, que contribui com as propriedades do *magnetismo das rotações*, sentido das *correntes induzidas*, fenômenos de *autoindução* e *campo eletromagnético.*

Em 1827, o alemão Carl August von Steinheil (1801-1870) descobre que um único fio elétrico permite constituir, utilizando da terra como condutor de retorno nas instalações, uma verdadeira linha de transmissão.

Em 1831 o americano Joseph Henry (1797-1878) inventou o primeiro interruptor elétrico. Independentemente no mesmo ano o inglês Michael Faraday (1791-1867) através de um estudo semelhante, recebe o crédito de descobridor do eletromagnetismo. O resultado do estudo está por trás funcionamento dos motores e transformadores elétricos.

Em 1837 os britânicos William F. Cook (1801-1879) e Charles Wheatstone (1802-1875) desenvolve um interruptor eletromagnético capaz de ativar uma pilha elétrica a distância e produzir variação de corrente, ou seja, era possível de se fazer transmissão de sinais elétricos . Nesse mesmo ano americano Samuel F Morse, recebe o crédito de inventor do telégrafo, sistema de comunicação a distância, pela transmissão e pulsos elétricos. Através de um código baseado no sistema binário, o código Morse, as mensagens eram transmitidas letra a letra, por sequência de impulsos elétricos, que produziam sinais sonoros de dois tipos, que eram decodificados por uma pessoa receptora da mensagem, que soubesse interpretar os códigos. Os fios de transmissão ligavam cidades e até continentes.

Figura 120 – Código Morse.

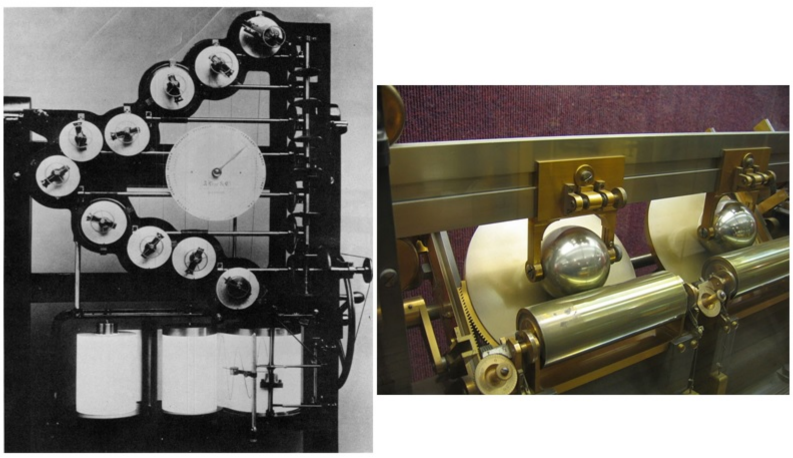


FONTE: [50], p.205.

Em 1842, Babbage discursa no Congresso de Cientistas Italianos em Turim, o engenheiro militar, capitão Luigi Menabrea anota, e depois com auxilio do próprio Babbage publica um descrição detalhada da Máquina Analítica em francês. A condessa de Lovelace, Augusta Ada Byron King (1815-1852), em seus estudos de matemática, tenta convencer Babbage de se tornar seu tutor. Com a recusa de Babbage, Ada consegue como tutor De Morgan, o pioneiro no campo da lógica simbólica, que influenciará fortemente as concepções matemática e resultados de Ada. Ada era grande admiradora da Máquina Analítica, e em 1843, por sugestão de um amigo, traduz a publicação de Menabrea, e a pedido de Babbage, acrescenta anotações que seriam publicadas, como *notas da tradutora*. Essas notas contribuíram para um salto conceitual das concepções sobre as máquinas analíticas que eram calculadoras para a transição do que atualmente chamamos de computador. Ada é considera como a primeira programadora de computador do mundo. Apesar de outros terem *programados* anteriormente, ela de fato foi a primeira que fez publicações, e a geração de números de Bernoulli, foi o primeiro programa de computador a ser publicado. E com Ada, e sob influência de De Morgan, a lógica formal chega ao mundo da máquina analítica, com a ideia revolucionária de que "essas máquinas podiam processar não apenas números, mas qualquer coisa que pudesse ter uma notação de símbolos." ([36], p. 38)

Em 1870, na Inglaterra, os irmãos Lord Kelvin (1824-1907) e James Thomson (1786-1849), criaram um equipamento analógico, baseado num planímetro, equipamento de medições de área de superfícies planas. O usuário traçaria uma curva e o equipamento calcularia a área da superfície formada abaixo da curva, usando uma esfera que deslizava sobre um disco rotativo, possibilitando resolver integrações. Objetivo dos irmãos era criar tábuas de marés e tabelas de identificação de ângulos de disparo, para executar certas trajetórias, para projéteis de artilharia. A partir desse aparelho implementado, conseguiram produzir tábuas de marés do período de um ano, no tempo de quatro horas. Por dificuldades mecânicas da época, o projeto não sofreu evoluções consideráveis.

Figura 121 – Analisador diferencial de Kelvin e Thomson

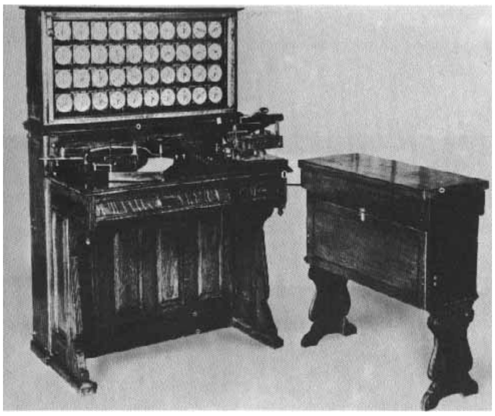


FONTE: http://www.assis.pro.br/public_html/hcomp/PreHistoriaTec.html Acesso em: 22/07/2016.

Em 1875, o americano Frank S. Baldwin, e em 1878 o engenheiro e industrial sueco

Willgott T. Odhner, são os pioneiros em fabricar e massificar o uso de máquinas de calcular. Em 1884 Hermann Hollerith (1869-1929), fez melhorias no sistema de cartões perfurados, utilizando circuitos elétricos para processamento de informações. Os cartões eram inseridos numa grade com mercúrio e um conjunto de pentes de pinos, criava um circuito elétrico onde houvesse perfuração. Os estadunidenses estavam com sérios problemas para analisar dados estatísticos sobre a população, a tabulação dos dados estavam durando cerca de oito anos. A aceleração do crescimento populacional e dificuldade em concluir os indicadores estatísticos, era um empecilho para que governantes pudessem traçar políticas públicas, econômica, tributação e regras constitucionais compatíveis com o cenário em que estavam. Em 1890, com cartões perfurados compostos por doze linhas e 24 colunas, que registravam fatos importantes sobre cada pessoa, todos os dados são coletados e finalizados. A máquina de Hollerith inseriu a ideia de tratamento artificial da informação estatística, compilando dados. A máquina de grande sucesso, ainda não era um computador, agradou empresa de seguros e de transportes. Em 1924, Hollerith funda a famosa empresa IBM, International Business Machine Corporation, que contribuirá fortemente com inovações e propagação dos instrumentos computacionais.

Figura 122 – Tabuladora de Hollerith.



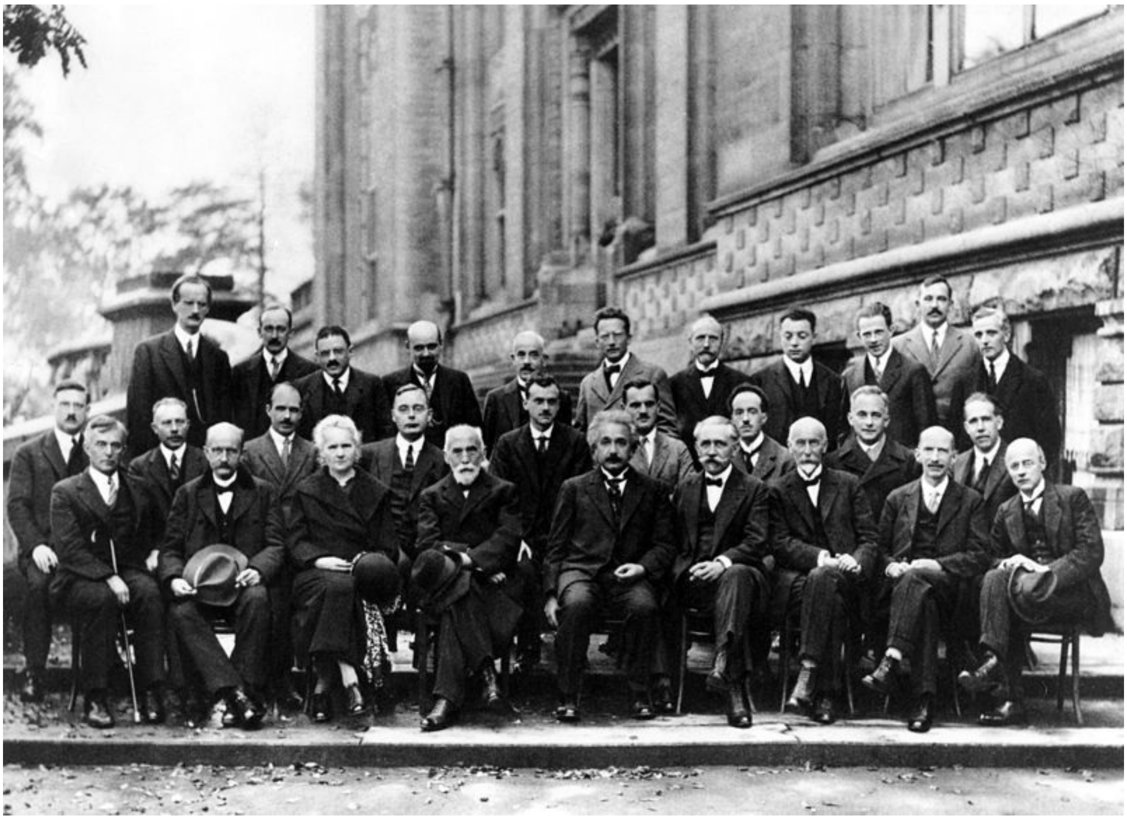
FONTE: http://drstecinfo.webnode.com.br/historia/ Acesso em: 22/07/2016.

As máquinas de Hollerith e Babbage eram dispositivos digitais, usavam dígitos nos processos de cálculos, números inteiros discretos e distintos. Os números inteiros eram operados através das engrenagens e discos dentados que giravam e contavam dígito por vez. Outra ideia que estava em estudo era a de encontrar um equipamento que pudesse simular fenômenos físicos, fazendo medições e cálculos. Como os fenômenos físicos, eram descritos por funções contínuas, a entrada e processamento de informação não seria supostamente atendida por um equipamento digital, era necessário um equipamento analógico, que computasse dados não inteiros ou discretos.

Em 1919 os ingleses W.H. Eccle e F.W. Jordam inventam o circuito eletrônico conhecido pelo nome flip-flop. Futuramente essa descoberta daria origem aos primeiros circuitos eletrônicos binários. Essas descoberta formam embrião dos circuitos eletrônicos binários. As publicações sobre aplicações de números binários ressurgem, sendo aplicada na descrição de funcionamento de interruptores eletromagnéticos e nos cálculo eletromecânico.

Em 1927, ocorre em Leiden, cidade holandesa, ocorreu a 5ª edição da Conferência de Solvay, realizadas no *Instituto Internacional da Solvay* de Física e Química. Fundado pelo químico belga Ernest Solvay, reuniu os principais cientistas da atualidade, com tema Elétrons e Fótons. Estavam presentes os famosos físicos e químicos da época, como: Erwin Schrödinger, Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg, Niels Bohr, Max Planck, Marie Curie, Hendrik Antoon Lorentz, Albert Einstein. Os trabalhos giravam em torno da teoria quântica

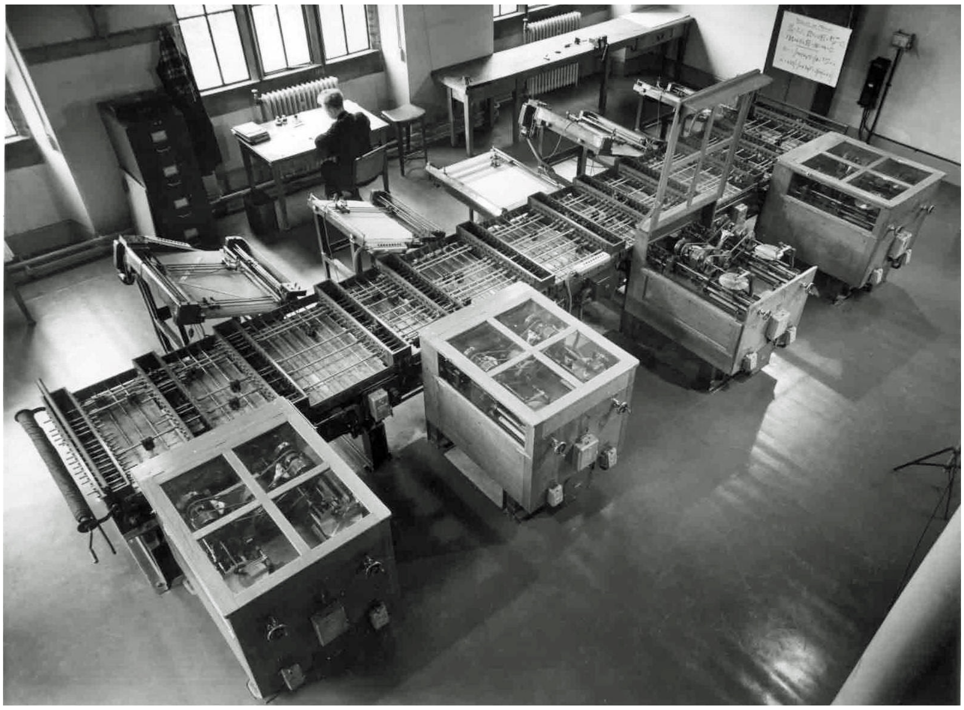
Figura 123 – Conferência de Solvay.



FONTE:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Werner_Heisenberg#/media/File:Solvay_conference_1927.jpg
Acesso em: 22/07/2016.

Em 1931, Massachusetts Institute of Technology – MIT, Vannevar Bush (1980-1974), construiu o primeiro computador eletromecânico analógico do mundo, compostos de engrenagens, polias, discos, que giravam por motores elétricos. O aparelho, parecido com o projeto do Lord Kelvin, foi usado principalmente para usos militares, resolvia equações com até dezoito variáveis, e ocupava um cômodo. Por várias décadas foi o único computador analógico. Vannevar Bush, também foi precursor do *word wide web.*

Figura 124 – Analisador diferencial de Vannevar Bush.



FONTE: https://www.ibiblio.org/pioneers/bush.html Acesso em: 22/07/2016.

Em 1932 o inglês Charles Eryl Wynn-Williams (1903-1979) publica uma invenção em: *A Thyratron "Scale of Two" Automatic Counter*, um contador binário eletrônico, espécie de válvula na forma de um tubo gasosos, empregada como reguladora de corrente e conversão de energia. Essa invenção permitindo realizar contagens com grande velocidade. Em 1935, Tommy Flowers (1905, 1998) é o pioneiro no uso de *válvulas termiônicas* como interruptores de circuitos.

Figura 125 – Válvulas Termiônicas.

FONTE: http://olhardigital.uol.com.br/noticia/nasa-usa-tecnologia-dos-anos-1940-para-reinventar-o-transistor/42728 Acesso em: 22/07/2016.

Em 1936 o francês Raymond L.- A Valtat (1898-1986) publica o artigo, *Cálculo mecânico: Máquina de calcular fundada no emprego da numeração binária*, divulgando o emprego da base binária nas máquinas de calcular. Semelhantemente o mesmo assunto é contemplado nas publicações do francês Louis Couffignal (1902-1966) e do inglês William Philips.

A matemática passa por um intenso processo de redefinição epistemológica de suas bases, principalmente na questão do logicismo formal. A matemática se organizava sobre as estruturas da lógica, com três fortes linhas: o logicismo, o formalismo e o intuicionismo. O centro do debate era principalmente sobre a consistência e completude do corpo de conhecimento matemático.

Os logicistas, têm por base as ideias de Leibniz, fortalecidas pelo trabalho *Principia Mathematica* de Bertrand Russel (1887-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947). Os logicistas afirmavam que seria "possível expressar em termos lógicos todas as proposições matemáticas, e que todas as proposições matemáticas verdadeiras são verdades lógicas." ([53], p.43). Com surgimento de paradoxos pelo caminho, essa corrente ainda tentou ajustes teóricos que defendesse essa forma de organização, mas não conseguiu sustentar a ideia de que a matemática pode ser reduzida à lógica formal, que carrega o principio da não contradição.

Os formalistas, com base em Kant (1724-1804), sendo David Hilbert (1862-1943) o principal expoente, não tinha ambição de reduzir a matemática à lógica, mas usar a lógica como "método de obter todas as conclusões legítimas em qualquer argumentação e sobre qualquer conteúdo" ([53], p. 44). Também entram nesse jogo as ideias de teoria formal, consistência e completude:

> Uma teoria formal é construída a partir de termos primitivos (que pelas propostas iniciais, deveriam ser objetos empíricos) (...) e regras de formação de fórmulas (os axiomas), além das regras de inferência (lógica), necessárias para a formulação dos teoremas. (...) Uma teoria formal é ditas consistente se dentro dela é impossível demonstrar uma proposição e, ao mesmo tempo, a negação da proposição. Em outras palavras, se, numa teoria formal não pudermos ter uma proposição verdadeira ou falsa ao mesmo tempo, então ela é consistente. Note-se que a consistência se refere ao princípio da não contradição. (...) completude: uma teoria formal é completa se toda fórmula construída de acordo com as regras de formação da teoria é dicidível, ou seja, verdadeira ou falsa, a partir dos axiomas dessa teoria. Compara-se com o princípio do terceiro excluído. (...) Kurt Gödel, joga por terra, em última instância, o princípio do terceiro excluído (...) usa os recursos da lógica para demonstrar a impossibilidade do programa formalista: é das entranhas da lógica formal que nasce a contradição que a nega, filha rebelde que promete novos passos na dança do conhecimento. ([53], p. 44-46)

Os intuicionistas, também com raízes kantianas, tiveram como maior representante Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Essa corrente “encarrega a intuição resultante da introspecção de evidenciar a verdade das proposições matemáticas e não observação direta de objetos externos. (...) a matemática é uma atividade totalmente autônoma, autossuficiente.” ([41], p. 39). O projeto maior dos intuicionistas está na neutralização do princípio do terceiro excluído, aceitando a possibilidade de enunciados, que não sejam verdadeiros e nem falsos.

> Nas tentativas de buscar os fundamentos da matemática, os logicistas tropeçaram nos paradoxos, os formalistas demonstraram que é impossível não tropeçar neles, e os intuicionistas excluíram o terceiro excluído, apesar de, infelizmente, terem distanciado da realidade. Portanto essas três crises da matemática, evidenciadas no logicismo, formalismo e intuicionismo, são na verdade uma e só uma crise: a da lógica formal. (...) É a realidade da contradição na matemática que permite perceber a natureza matemática da realidade contraditória.([53], p. 48)

Em 1934, o inglês Alan Turing (1912-1954), trabalha na construção do multiplicador binário eletromecânico. Impactado com as ideias de John von Neumann, Turing se interessou pela matemática da física quântica, fortalecendo a crença de os pensamentos e ações não poderiam ser predeterminados, assim como os fenômenos subatômicos. Instruído pelo professor de Cambridge Max Newman, toma conhecimento dos debates de natureza epistemológica das bases da matemática, das ideias de Hilbert e Gödel. Nesse contexto seus trabalhos se desenvolvem no questionamento se “existe algum processo mecânico que possa ser usado para determinar se uma afirmação lógica específica é comprovável?” ([36], p. 56), a pergunta nada mais é que a tradução do problema de decisão de Hilbert, *Entscheidungsproblem.* Em 1936 Turing chega a conclusão que a resposta da pergunta é não, com a publicação do trabalho, *On Computable Numbers, With an Application to Entscheidungsproblem.* No mesmo ano e de forma independente o americano Alonzo Church, com a ideia de calculabilidade efetiva, baseado em seu conceito de cálculo lambda não tipado, também conclui equivalentemente o resultado de Turing. A resposta de Turing, foi baseada numa maquina imaginária, chamada de Máquina Lógica de Computação, que ficou conhecida por Máquina de Turing:

> Ela consistia em uma quantidade ilimitada de fita de papel contendo símbolos dentro de quadrados; no mais simples exemplo binário, esses símbolos podiam ser apenas 1 ou um espaço. A máquina seria capaz de ler os símbolos da fita e de desempenhar certas ações com base em uma ‘tabela de instruções” que lhe seria fornecida. (...) essa máquina se recebesse a tabela de instruções adequada, podia realizar qualquer tarefa matemática, não importando sua complexidade. (...) Qualquer número real que fosse definido por uma regra matemática podia ser calculado pela Máquina Lógica de Computação.(...)desde que o seu cálculo fosse

> definido por um conjunto finito de regras. (...) Turing foi em frente para demonstrar que também havia números não computáveis. Isso estava relacionado com o que ele chamava de “problema da parada”.(...) O fato do problema da parada ser insolúvel, ele demonstrou, que significava que o problema de decisão de Hilbert, o *Entscheidungsproblem*, era insolúvel. ([36], p. 56-57)

O modelo conceitual de Turing tinha caráter universal, compatíveis com as ideias de Ada Lovelace. Hoje se sabe que um polonês naturalizado nos EUA, Emil Leon Post (1897-1954), entrega em 7 de outubro de 1935, um artigo que foi publicado em 3 de setembro de 1936, um trabalho de nome *Finite Combinatory Processes – Formulation 1*, com resultados equivalentes de Alan Turing e Church, sendo 18 de maio de 1936 a publicação do artigo de Turing. Então praticamente, no período de menos de um ano, de forma independente, teríamos respostas equivalentes para o mesmo problema. Estudiosos dizem que apresentação de Turing era mais atraente e mais elegante, sem contar que a própria biografia, digna de cinematografia, ganha em 2014, as telas do cinema no filme *The Imitation Game*.

Em 1936, o engenheiro japonês Akira Nakashima (1906-1970), que trabalhava na *Nippon Electric Company, Limited - NEC*, foi pioneiro em mapear padrões operacionais, nos desenhos de circuitos de relés, utilizando simbologias e sinais de operadores matemáticos, muito semelhantes aos da álgebra booleana, representou a impedância da conexão de dois contatos, A e B, em série por $A + B$, e aquele em paralelo por $A \times B$. Ele também empregou o símbolo $=$ para representar a equivalência das duas funções de impedância. Nakashima não tinha conhecimento da lógica booleana.

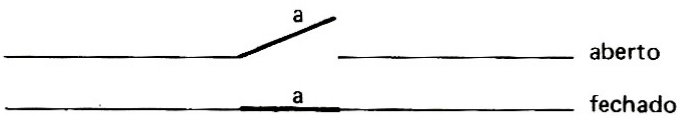
Em 1937, Claude Shannon (1916-2001), nos laboratórios da Bell, analisando os circuitos telefônicos, teve ideia parecida com a de Nakashima, associou circuitos com portas lógicas, valendo da álgebra booleana, concluiu que “É possível realizar operações matemáticas complexas usando circuito de relés” ([36], p. 60). Esse estudo que complementava com as ideias de Turing, levanta uma nova questão, a de que se a lógica está associada com nossa forma de raciocinar, e se o funcionamento da máquina poderia ser descrito por operações lógicas, então seria possível que uma máquina pudesse imitar nosso cérebro ou nossa forma de pensar.

Os relés ou simplesmente interruptores são dispositivos que ficam ligados em dados pontos de um circuito elétrico, com a função de ligar ou desligar o fluxo de corrente elétrica. Os interruptores serão indicados por letras minúsculas e com seguinte representação:

Figura 126 – Representação de um relé.

Os interruptores assumem dois estados: fechado (1) ou aberto (0). Quando fechado o fluxo da corrente passa pelo ponto, se estiver aberto, a corrente é interrompida no ponto.

Figura 127 – Estado de um relé.



Quando um interruptor a, for aberto quando a, estiver fechado e for fechado quando a, estiver aberto, chama-se o procedimento de complemento, inverso ou negação de a, e denotaremos por a'.

Na ocorrência de dois interruptores a e b, eles estarão ligados em paralelo ou em série. Se estiverem em paralelo, só haverá fluxo de corrente se pelo menos um dos interruptores estiver fechado, ou seja, apresentar estado 1. A ligação em paralelo de dois interruptores a e b é indicado por $a + b$.

Figura 128 – Relé em paralelo.

Pode-se verificar que: $0+0 = 0$; $0+1 = 1$; $1+0 = 1$; $1+1 = 1$. Também verifica-se que: $a + b = b + a$; $a + a' = 1$; $a + 0 = a$; $a + 1 = 1$.

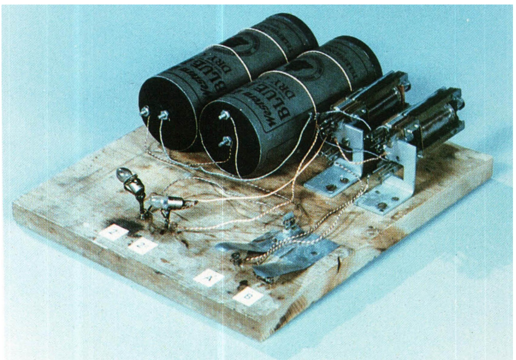
Com dois interruptores a e b, ligados em série, só passará corrente se ambos os interruptores estiverem fechados, isto é, se $a = b = 1$. A ligação de dois interruptores a e b em série será indicada por $a \cdot b$ ou ab.

Figura 129 – Relé em série.

Com interruptores em série teremos: $a \cdot a = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $1 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$. Verifica-que: $a \cdot b = b \cdot a$; $a \cdot a' = 0$; $a \cdot 0 = 0$; $a \cdot 1 = a$. Com essas ideias básicas aliadas com a lógica é possível identificar, calcular toda estrutura de um circuito lógico, estabelecidos sobre essa base inicial.

Em 1938, o matemático George Stibitz (1904-1995), também nos laboratórios da Bell, que trabalhava com otimização e melhoria em processos de cálculos, influenciado pela publicação de Shannon, na cozinha de sua casa, teve a ideia de pegar relés eletromagnéticos, lâmpadas e latas de tabaco, e juntou formando um circuito simples, que podia somar números binários. A lâmpada acesa seria o número 1 e a lâmpada apagada seria 0, a invenção foi batizada por *Modelo K*, pois foi feito na cozinha, que em inglês é *kitchen*. Stibitz, afirmava que com relés suficientes poderia construir uma máquina de calcular. Em 1939 o projeto foi materializado na *Calculadora de Números Complexos*, o equipamento era muito mais rápido do que os que tinham na época, mesmo não sendo programável, a ideia de circuito de relés, foi inovadora, para realizar operações binárias, processar informações com procedimentos lógicos.

Figura 130 – Modelo K.



FONTE: http://ds-wordpress.haverford.edu/bitbybit/bit-by-bit-contents/chapter-four/4-1-stibitz-calculators-at-bell-labs/ Acesso em: 25/07/2016.

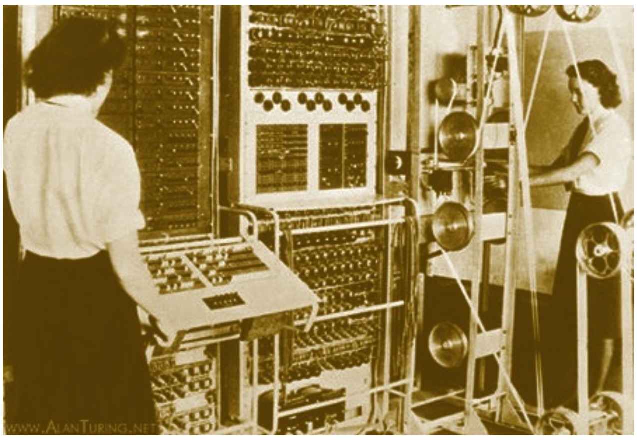
Em 1942, Jonh Vicent Atanasoff (1903-1995), com auxilio do aluno Clifford Berry (1918-1963), cria um computador eletrônico, com tambores mecânicos para armazenamento de memória, com o objetivo de resolver sistemas de equações lineares, com até 29 variáveis. O equipamento seria útil para cálculos de ajustes de curvas, problemas de vibração, análise de circuitos elétricos e estruturas elásticas. A máquina era do tamanho de uma mesa, composta por cerca de 300 válvulas termiônicas e necessitava de alguns ajustes e reparos e peças, portanto com funcionamento parcial. O projeto é pausado, pois Atanasoff é convocado para servir na Marinha. Vale ressaltar aqui, que em 1941, Atanasoff recebe uma visita do físico John Mauchly (1907-1980), com o qual futuramente travaria uma disputa judicial sobre as patentes da invenção do computador.

Figura 131 – Máquina de Atanasoff e Berry.

FONTE: http://jva.cs.iastate.edu/operation.php Acesso em: 25/07/2016.

Em 1943, na Inglaterra em guerra, um computador de válvulas para decifrar mensagens codificadas dos Alemães, entra em funcionamento, um computador completamente eletrônico e parcialmente programável. O projeto secreto tinha por objetivo desvendar o mistério da maquina *Enigma*, e reunia uma equipe de gênios e engenheiros, mas obteve pouco sucesso nos processos de decodificação. Turing inventa uma abordagem estatística que analisasse os dados nos textos cifrados, e convoca o engenheiro Tommy Flowers (1905-1998), que foi apresentado a John von Neumann (1903-1957), para construir as máquinas de nome *bomba*. A grande ideia de Flowers foi sugerir o uso de formas de armazenagens dos trechos codificados em memória eletrônica da maquina. Esse projeto exigia uma grande quantidade de válvulas. Sem outra opção viável, a maquina de nome *Colossus* é construída e bem sucedida em sua função. Outras versões com número maior de válvulas foram construídas, algumas 2400 válvulas, chegando ao número de oito unidades.

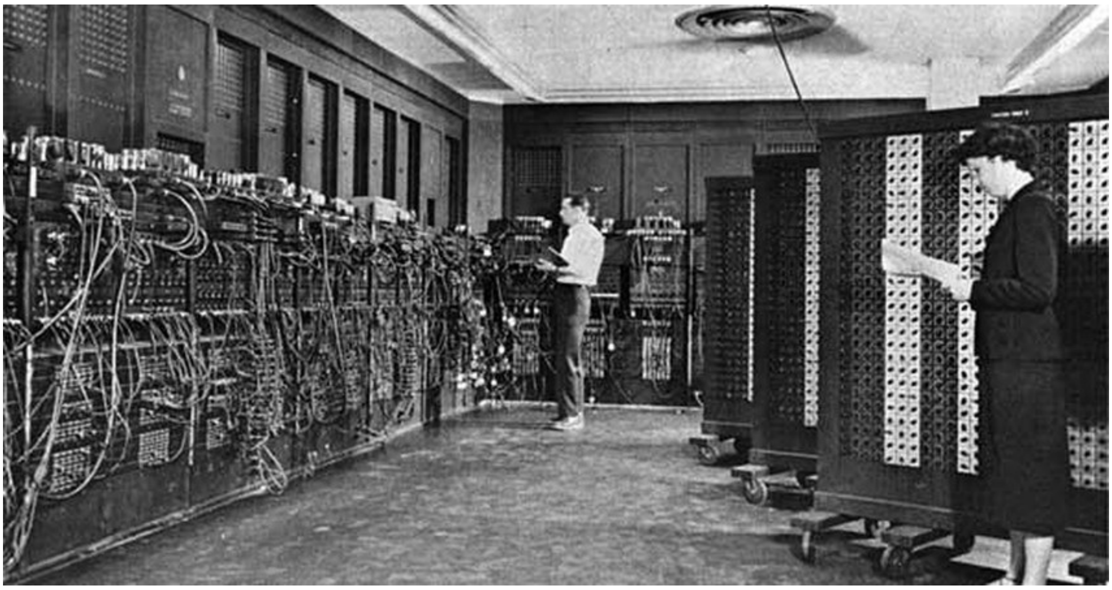
Figura 132 – Computador Colossus.



FONTE: http://www.colossus-computer.com/colossus1.html Acesso em: 25/07/2016.

Com os EUA também em guerra, e com problemas de falta de eficiência com artilharia, desde erro de alvos e desperdícios de munições, os militares desenvolviam estudos sobre balísticos, com dados compostos de diversas variáveis, como temperatura, umidade, velocidade do vento, altitude, tipos de munições, ângulos de disparo. Essas planilhas com dados eram computadas, por máquinas já existentes e mulheres com conhecimentos matemáticos, recrutadas por todo o país, trabalhando como verdadeiros computadores humanos, executando os laboriosos cálculos. Nesse contexto, em 1943, John Mauchly e o engenheiro John Adam Presper Eckert Jr.(1919-1995), enviam ao exército a proposta de construção de um equipamento de grande auxílio nos cálculos, podendo por exemplo, calcular a trajetória de um míssil em 100 segundos. Esse computador eletrônico, era digital, mas não operava com sistema binário, mas sim decimal. Só em 1945, que o computador ficou plenamente operacional, o equipamento ocupava 3 andares de um prédio, com cerca de 30 toneladas, e composto por 17 468 válvulas termiônicas. Projetado principalmente para resoluções de equações diferencias, por trás das trajetórias balísticas, seus idealizadores afirmavam que ele poderia ser programável e se tornar próximo a um computador de propósito geral. O computador foi chamado de, *Electronic Numerical Integrator and Computer*, o famoso *ENIAC*. Por ser aclamado como o primeiro computador do mundo, e devido as visitas de Mauchly a Atanasoff, segue-se uma batalha nos tribunais, sobre questões de patentes e invenção, com Atanasoff saindo vitorioso e cancelando as patentes de Mauchly.

Figura 133 – Computador ENIAC.



FONTE: http://www.techtudo.com.br/artigos/noticia/2011/02/primeiro-computador-do-mundo-faz-65-anos.html Acesso em: 25/07/2016.

Encontrar uma cronologia, bem ordenada e encadeada, que culmina no surgimento do computador é complexo. O computador surge com acumulo de ideias, do esforço coletivo, desenvolvidas em diversos contextos e motivações. A disputa em ser o primeiro, entre o *ENIAC*, *Colossus* e o computador de Atansoff, quem leva a melhor é o *ENIAC*. O procedimento é justamente sobre atribuições e peculiaridades que permitiram desenvolvimentos posteriores, que serviram de ponto de partida para os tipos de computadores que temos atualmente. Desses três, somente o *ENIAC*, teve simultaneamente os três requisitos primordiais do computador moderno: ser eletrônico, ser de propósito geral e programável.

Em 1945, o matemático americano de origem húngara John von Neumann (1903-1957), difunde o uso dos sistemas binários como sistema elementar de unidades de informação dos computadores eletrônicos.

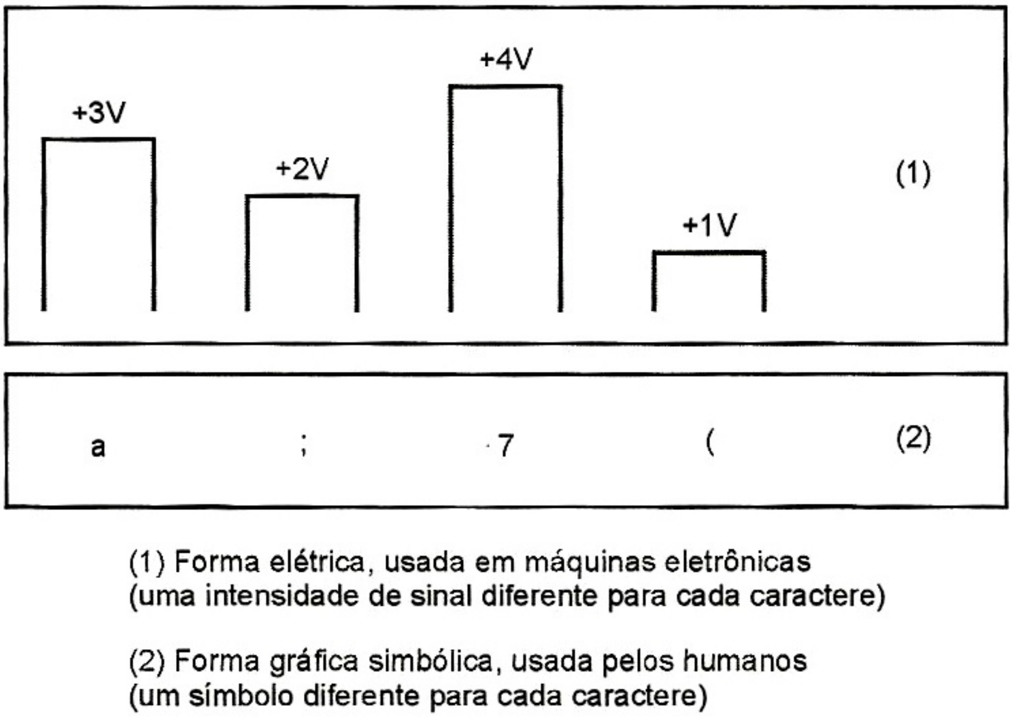
Em 1948, novamente Claude Shannon, publica uma teoria da matemática da comunicação, *The Mathematical Theory of Communication*. A publicação consolidava a ideia de que a informação poderia ser codificada em dígitos binários, os *bits*. Sons, imagens, textos, palavras, números, e toda sorte de informação. Atualmente Shannon é considerado como pai da teoria da informação.

O computador eletrônico, por muito tempo recebeu o nome de máquina de processamento eletrônico de dados, *PED*. Processamento, pois é capaz de coletar, manipular e fornecer resultados sistematicamente de informações que atendem a objetivos específicos. Eletrônico, devido aos circuitos e componentes eletrônicos e eletromecânicos. Dados, são as informações que entram na máquina para ser processadas, e o resultado final geralmente é chamado simplesmente de informação.

DADOS (entradas) $\rightarrow$ PROCESSAMENTO $\rightarrow$ RESULTADO: Informação (saída)

Os dados são inseridos através dos símbolos que conhecemos, onde cada símbolo é uma espécie de acionador de tensão elétrica. Cada símbolo diferente se tem valores de tensão diferentes.

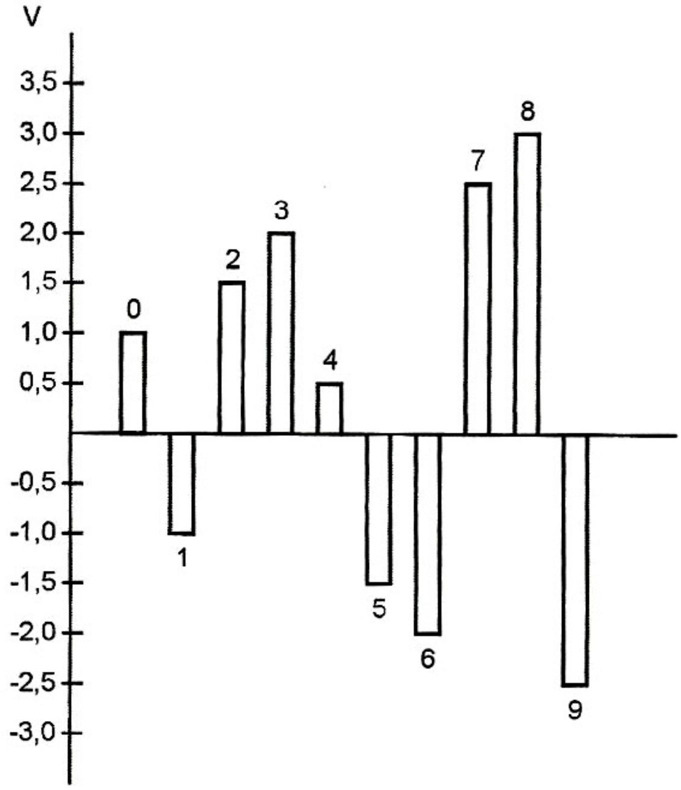
Figura 134 – Símbolos e valores de tensões.



FONTE: [43], p.5.

Cada símbolo é associado a uma combinação de dígitos, uma espécie de código numérico por isso recebe o nome de máquinas digitais. O *ENIAC* usou 10 dígitos para codificar os dados, portanto seriam necessários 10 níveis de tensão diferentes.

Figura 135 – Tensões dos 10 algarismos do sistema decimal.



FONTE: [43], p.7.

Esse processo por ter dez níveis tinha alguns incômodos, como aquecimento, rendimento, consumo de energia e quantidade de erros por interpretação de faixas de tensão ser aproximadas. Devido aos inconvenientes, foi adotado o sistema binário, que oferecia o melhor custo benefício, se integrava perfeitamente com a estrutura de circuitos elétricos e operações lógicas, e diminuiria os conflitos ou erros de interpretações de tensão. Cada dígito de um número ou informação representado no sistema binário, recebe o nome de bit abreviação de *binari digit*. Um conjunto de 4 bits chama-se de *nibble* e o de 8 *bits* de *bytes*.

15 DEFINIÇÃO DE BASE NUMÉRICA.

15.1 INTEIROS POSITIVOS EM BASES NATURAIS.

Nosso usual sistema de numeração é de base dez, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Assim o número 978.056 pode ser indicado do seguinte modo:

$$978056 = 9 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

O número 978.056, na base dez foi decomposto em parcelas de fatores contendo potências de dez, ou simplesmente num polinômio inteiro em 10 de grau 5.

Como exposto em *Elementos de Aritmética* [32], cada posicionamento ocupado pelo algarismo, recebe nome de *ordem*, da esquerda para direita, temos 6 assumindo a primeira ordem, o 5 ocupando a segunda ordem, o 0 ocupando a terceira ordem. Cada terna de *ordem*, recebe o nome de *classe*. Cada ordem dependendo da classe, recebe nomes especiais. Alguns desses nomes são:

$$Classe \quad da \quad Unidade \begin{cases} unidades & 1^{\text{a}} \text{ ordem} \\ dezenas & 2^{\text{a}} \text{ ordem} \\ centenas & 3^{\text{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

$$Classe \quad da \quad Milhar \begin{cases} unidades \quad de \quad milhar & 4^{\text{a}} \text{ ordem} \\ dezenas \quad de \quad milhar & 5^{\text{a}} \text{ ordem} \\ centenas \quad de \quad milhar & 6^{\text{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

$$Classe \quad da \quad Milhão \begin{cases} unidades \quad de \quad milhão & 7^{\text{a}} \text{ ordem} \\ dezenas \quad de \quad milhão & 8^{\text{a}} \text{ ordem} \\ centenas \quad de \quad milhão & 9^{\text{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

A formalização matemática da representação de um inteiro positivo n numa base b pode ser encontrada em *Teoria Elementar dos Números* [24], e veremos abaixo:

TEOREMA 1 (Algoritmo da divisão) - Se a e b são dois inteiros, com $b > 0$, então *existem e são únicos* os inteiros q e r que satisfaça as condições:

$$a = bq + r \text{ e } 0 \leq \text{r} < \text{b}$$

Demonstração:

EXISTÊNCIA: Seja S o conjunto de todos os inteiros não negativos ($\geq$0) que são da forma $a - bx$ com x$\in \mathbb{Z}$, isto é:

$$S = \{a - bx | x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}$$

Este conjunto S não é vazio ($S \neq \emptyset$), porque, sendo $b > 0$, temos $b \geq 1$ e, portanto, para $x = -|a|$, resulta:

$$a - bx = a + b|a| \geq a + |a| \geq 0$$

Assim sendo, pelo *Principio da boa ordenação*[1], existe o *elemento mínimor* de S tal que

$$r \geq 0 \quad e \quad r = a - ba \quad ou \quad a = bq + r, com \quad q \in \mathbb{Z}$$

Além disso, temos $r < b$, pois, se fosse $r \geq b$, ficaríamos:

$$0 \leq r - b = a - bq - b = a - b(q + 1) < r$$

isto é, r não seria *elemento mínimo* de S.

UNICIDADE: Sejam q, q', r e r' tais que:

$$a = bq + r \quad e \quad 0 \leq r < b \tag{15.1}$$

$$a = bq' + r' \quad e \quad 0 \leq r' < b \tag{15.2}$$

Subtraindo (15.1) e (15.2), vamos obter:

$$r - r' = b(q' - q)$$

Como $0 \leq r < b$ e $0 \leq r' < b$ então $0 \leq r - r' < b$. Assim :

$$0 \leq b(q' - q) < b$$

Sabendo que b>0, ficaremos com

$$0 \leq q - q' < 1$$

então $q - q' = 0 \rightarrow q = q'$ e $r = r'$.

TEOREMA 2 - Dado um inteiro qualquer $b \geq 0$, todo inteiro positivo n admite uma *única representação* da forma:

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

onde os a_i são tais que $0 \leq a_i < b$, $i = 0, 1, 2, ..., m$.

Demonstração: Pelo algoritmo da divisão aplicado nos inteiros n e b, temos:

$$n = bq_1 + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b \qquad (0)$$

[1] O Principio da Boa Ordenação afirma que todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento $m_0 \in X$ que é menor do que todos os demais elementos de X. ([39], p.30)

Novamente aplicando, o algoritmo da divisão ao quociente q_1 e ao inteiro b, temos:

$$q_1 = bq_2 + a_1, \quad 0 \leq a_1 < b \qquad (1)$$

Repetindo o processo, de aplicar o algoritmo da divisão aos quocientes obtidos q_i e ao inteiro b, temos:

$$q_2 = bq_3 + a_2, \quad 0 \leq a_2 < b \qquad (2)$$

$$q_3 = bq_4 + a_3, \quad 0 \leq a_3 < b \qquad (3)$$

e assim por diante.

Como $n > q_1 > q_2 > q_3 > ...$ e cada $q_i \geq 0$, esta sequencia decrescente dos quocientes q_i é *finita*, isto é, existe um índice m tal que:

$$q_{m-1} = bq_m + a_{m-1}, \quad 0 \leq a_{m-1} < b \qquad (m-1)$$

$$q_m = b \cdot 0 + a_m = a_m, \quad 0 \leq a_m < b \qquad (m)$$

Multiplicando por b ambos os membros de (1), por b^2 ambos os membros de (2), por b^3 ambos os membros de (3), ..., por b^{m-1} ambos os membros de (m-1), obtemos o conjunto de igualdades:

$$n = bq_1 + a_0, \quad 0 \leq a_0 < b$$

$$bq_1 = b^2 q_2 + a_1 b, \quad 0 \leq a_1 < b$$

$$b^2 q_2 = b^3 q_3 + a_2 b^2, \quad 0 \leq a_2 < b$$

$$b^3 q_3 = b^4 q_4 + a_3 b^3, \quad 0 \leq a_3 < b$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$b^{m-1} q_{m-1} = b^m a_m + a_{m-1} b^{m-1}, \quad 0 \leq a_{m-1} < b$$

Fazendo a soma ordenadamente de todas as m igualdades, ficaremos com:

$$n + (bq_1 + b^2 q_2 + ... + b^{m-1} q_{m-1}) = (bq_1 + b^2 q_2 + ... + b^{m-1} q_{m-1}) + a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_{m-1} b^{m-1} + a_m b_m$$

onde teremos:

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

Assim, dado um inteiro qualquer ($b \geq 2$), todo inteiro positivo n pode ser representado por um *polinômio inteiro* em b do grau m (porque $a_m \neq 0$), *ordenado segundo as potências decrescentes de* b, e cujos *coeficientes* a_i são inteiros que satisfazem às condições:

$$0 \leq a_i < br \quad (i = 0, 1, 2, ..., m), \quad \textit{sendo} \quad a_m \neq 0$$

O polinômio acima, pode ser representado de modo abreviado, pela notação:

$$n = (a_m a_{m-1} ... a_2 a_1 a_0)_b$$

em que os coeficientes a_i são indicados pela *ordem respectiva*, figurando o inteiro b como *índices.*

A unicidade desta representação é uma consequência imediata do Teorema 1. O inteiro b chama-se *base*, e geralmente é dito que um numero n está escrito no *sistema de base* b.

Segundo Anton Glaser ([30], p.121-122), em 1936, A. J. Kempener, diante de uma interrogação do aluno, se um número irracional poderia ser usado como base de um sistema de numeração, a reposta foi afirmativa e provou a unicidade para toda base real $b > 0$. O trabalho publicado é *'Abnormal System of Numeration', American Mathematical Monthly* 43 (December 1936): 610-17.

15.2 CONVERSÕES NUMÉRICAS ENTRE BASES.

15.2.1 **Sistema Decimal para Sistema Binário.**

Para fazer conversões de números naturais para bases binária, basta usar o processo de divisões sucessivas, até obter quociente zero.

Por exemplo, vamos passar $35 = (35)_{10}$ para base binária:

$$
\begin{array}{ccccccc}
35 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & & \\ \cline{2-2}
1 & 17 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & & \\ \cline{3-3}
 & 1 & 8 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & & \\ \cline{4-4}
 & & 0 & 4 & \multicolumn{1}{|c}{2} & & \\ \cline{5-5}
 & & & 0 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{2} & \\ \cline{6-6}
 & & & & 0 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{2} \\ \cline{7-7}
 & & & & & 1 & 0
\end{array}
$$

Tomando os restos na ordem do último para o primeiro, podemos escrever:

$$35 = (35)_{10} = (100011)_2$$

Podemos observar que $(100011)_2$ tem forma polinomial:

$$(100011)_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

Para conversão de um número binário para base 10, basta desenvolver na forma polinomial de potências de 2 e fazer os cálculos.

15.2.2 Sistema Decimal para Sistema Quaternário.

O procedimento é o mesmo, basta fazer divisões sucessivas com divisor 4, lembrando que no sistema de base 4, os algarismos são 0, 1, 2 e 3. Por exemplo, vamos converter, o número 481=$(481)_{10}$ para base quaternária:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
481 & \multicolumn{1}{|r}{4} & & & & \\ \cline{2-2}
1 & 120 & \multicolumn{1}{|r}{4} & & & \\ \cline{3-3}
 & 0 & 30 & \multicolumn{1}{|r}{4} & & \\ \cline{4-4}
 & & 2 & 7 & \multicolumn{1}{|r}{4} & \\ \cline{5-5}
 & & & 3 & 1 & \multicolumn{1}{|r}{4} \\ \cline{6-6}
 & & & & 1 & 0
\end{array}
$$

Tomando os restos das divisões, do último para o primeiro, teremos:

$$484 = (481)_{10} = (13201)_4$$

E na forma polinomial em potência do número 4:

$$(13201)_4 = 1 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 1$$

Para conversão na base dez, basta desenvolver os cálculos da forma polinomial.

15.2.3 Sistema Decimal para Sistema Hexadecimal.

No sistema hexadecimal, dispomos de 16 algarismos diferentes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F. Por exemplo, vamos converter o número 1727471 =$(1727471)_{10}$ para base hexadecimal:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
1727471 & \multicolumn{1}{|r}{16} & & & & & \\ \cline{2-2}
15(F) & 107966 & \multicolumn{1}{|r}{16} & & & & \\ \cline{3-3}
 & 14(E) & 6747 & \multicolumn{1}{|r}{16} & & & \\ \cline{4-4}
 & & 11(B) & 421 & \multicolumn{1}{|r}{16} & & \\ \cline{5-5}
 & & & 5 & 26 & \multicolumn{1}{|r}{16} & \\ \cline{6-6}
 & & & & 10(A) & 1 & \multicolumn{1}{|r}{16} \\ \cline{7-7}
 & & & & & 1 & 0
\end{array}
$$

Das divisões sucessivas $(1727471)_{10}$=$(1A5BEF)_{16}$. Um número hexadecimal para a base decimal, basta desenvolver o polinômio substituindo as letras pelo seu equivalente numérico:

$$(1A5BEF)_{16} = 1 \times 16^5 + 10 \times 16^4 + 5 \times 16^3 + 11 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 15$$

15.2.4 Número real e base binária.

A conversão de números naturais para uma dada base, não é um processo difícil, pelo método de divisões sucessivas é possível realizar a tarefa. Mas como fica os números negativos, os números racionais e os números irracionais? Já que o computador, faz todo o processamento em números binários, como fica a conversão desses valores?

Lembrando que cada algarismo no sistema binário, é um bit, algumas regras ou convenções podem ser estabelecidas, semelhante como a que usamos nas nossa operações numéricas. A primeira regra é a do sinal, e será indicado por um bit, colocado sempre à esquerda do número, como fazemos com nosso números convencionais. Sinal positivo: bit de sinal igual a 0. Sinal negativo: bit de sinal igual a 1. Exemplos:

$+13 = 01101 \rightsquigarrow$ o primeiro zero a esquerda é o bit de sinal, o número +13 nessa representação possui 5 bits.

$-13 = 11101 \rightsquigarrow$ o primeiro 1 a esquerda é o bit de sinal, o número -13 nessa representação possui 5 bits.

$+59 = 0111011 \rightsquigarrow$ o primeiro zero a esquerda é o bit de sinal, o número +53 nessa representação possui 7 bits.

$-59 = 1111011 \rightsquigarrow$ o primeiro 1 a esquerda é o bit de sinal, o número -59 nessa representação possui 7 bits.

O segundo problema é do uso da vírgula, o símbolo que separa a parte inteira da parte fracionária. Como esses números serão introduzidos em uma máquina, ela terá seu sistema de conversão dentro de certas regras pré definidas pelos idealizadores. Alguns códigos conhecidos no meio computacional são: ASCII, EBCDIC e Unicode. ASCII*(American Standard Code for Information Interchange)* pode codificar 256 símbolos, letras e caracteres, portanto com a modificação de idioma, a capacidade representativa pode não ser suficiente.O EBCDIC*(Extended Binary Coded Decimal Interchange Code)*. Como meio de universalizar as máquinas, foi criado o Unicode, com a colaboração de varias empresas e órgãos governamentais do munto inteiro. Tem versão Unicode com capacidade de representar mais de um milhão de símbolos. Por exemplo, o número $(+37,5)_{10}$ ficaria representado no código ASCII como:

$$+37,5_{10} = \underbrace{00101011}_{+} \quad \underbrace{00110011}_{3} \quad \underbrace{00110111}_{7} \quad 00101100 \quad \underbrace{00110101}_{5}$$

Geralmente os números com vírgula assumem dois modos de representação: Ponto fixo e ponto flutuante. Ponto fixo, é usada para números inteiros. Ponto flutuante para valores reais.

O terceiro problema é que o computador tem capacidade finita de representar certa quantidade de dados. Por exemplo, usualmente para realizarmos cálculos com π, não levamos em consideração todas as suas casas decimais após a vírgula. O mesmo acontece com $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, por exemplo. Assim devemos então inserir valores aproximados, e esse procedimento, dependendo do cálculo pode gerar erros e precisão. Quanto maior for a representação aproximada, menor será o erro e imprecisão.

O método do ponto flutuante utiliza da ideia que conhecemos como *notação científica*, e em computação é denominada por *ponto flutuante*. O objetivo é reduzir o máximo de algarismo empregados para representar números com enorme quantidade de algarismos. Por exemplo, o número +6bilhões em forma inteira de ponto fixo necessita de 11 símbolos:+6000000000. Por outro lado em notação científica é necessário 7 símbolos: $+5 \times 10^{+9}$ (ou 5 símbolos, pois sabendo que a base fixa seria 10, ela não seria contada).

Seja n um número qualquer numa base b esse número n pode ser escrito na *forma normalizada* se estiver representado como:

$$n = \pm \left(\frac{d_1}{b^1} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \ldots + \frac{d_t}{b^t} \right) \cdot b^{\pm e}$$

Onde:

b : é a base operacional;

d_i: dígitos ou algarismos da base b, onde $0 \leq d_i \leq (b-1)$;

$\pm e$: é o expoente de b, o valor de e sempre está associas a dois valore $I \leq e \leq S$, onde I e S, são respectivamente limite inferior e limite superior, para variação do expoente.

O termo $\pm \left(\frac{d_1}{b^1} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \ldots + \frac{d_t}{b^t} \right)$ representa a parte numérica contendo os dígitos significativos do número, e recebe o nome de mantissa, e t é o número de dígitos significativos, e em computação indica a precisão da máquina.

Por exemplo, os números $0,4385_{10}$ e 264.57_{10}, na forma normalizada, ficam:

$$0,4385_{10} = \left(\frac{4}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} \right) \cdot 10^0$$

$$264,57_{10} = 0,26457 \times 10^3 = \left(\frac{2}{10^1} + \frac{6}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} \right) \cdot 10^3$$

De forma semelhante, aplicaremos o processo de normalização na base binária, vejamos por exemplo a normalização de 17_{10} e 15_{10}:

$$\begin{aligned} 17_{10} = 10001_2 = 0,10001 \times 2^5 &= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) \cdot 2^5 \\ &= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) \cdot 2^{101} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
15_{10} = 1100_2 = 0,11 \times 2^4 &= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) \cdot 2^4 \\
&= \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4}\right) \cdot 2^{100}
\end{aligned}
$$

Para facilitar um pouco mais, podemos representar o sistema de números em pontos flutuante normalizado, na base b, com t dígitos significativos e com limites dos expoentes I e S usando a notação $F(b, t, I, S)$

$$\pm 0, d_1 d_2 ... d_t \times b^e$$

Com $d_1 \neq 0$ e $I \leq e \leq S$.

Vamos representar 25_{10}, numa máquina de calcular, com sistema de representação $F(2, 10, -15, 15)$. Temos:

$b = 2$, $t = 10$, $I = -15$ e $S = 15$ e $25_{10} = 11001_2 = 0,11001 \cdot 2^5 = 0,11001 \cdot 2^{101}$

Como $t = 10$ ficaremos:

$$\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}}\right) \cdot 2^{101}$$

O valor máximo do expoente é $15_{10} = 1111_2$, serão necessário 4 posições para o expoente:

$$\underbrace{1100100000}_{Mantissa} \quad \underbrace{0101}_{Expoente}$$

E finalmente acrescentado os bits de sinais, do expoente e da mantissa, finalmente:

$$\underbrace{0}_{SinaldaMantissa} \quad \underbrace{1100100000}_{Mantissa} \quad \underbrace{0}_{SinaldoExpoente} \quad \underbrace{0101}_{Expoente} = 0110010000010101$$

Números do sistemas decimal que está entre 0 e 1, pode assumir várias formas, por exemplo, se tivermos $a = 0,125$, $b = 0,333...$, $c = 0,1378927...$, o número r é uma decimal finita, enquanto b e c é uma decimal infinita. Se quisermos converter $a = 0,125$ para binário, então existe dígitos binários $d_1, d_2, ..., d_k ...$ tal que $(d_1 d_2 ... d_k ...)_2$ é a representação binária procurada. Assim podemos escrever:

$$0,125_{10} = \frac{d_1}{2^1} + \frac{d_2}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^k} + ...$$

Multiplicando ambos membros da igualdade por 2, ficaremos:

$$0,25_{10} = d_1 + \frac{d_2}{2^1} + \frac{d_3}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-1}} + ...$$

Daí tiramos que $d_1 = 0$, pois é a parte inteira, e que $0,25_{10} = \frac{d_2}{2^1} + \frac{d_3}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-1}} + ...$ pois é a parte fracionária. Multiplicando novamente ambos os membros da nova igualdade por 2:

$$0,25_{10} = \frac{d_2}{2^1} + \frac{d_3}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-1}} + ... \qquad \times 2$$

Vamos ficar com:

$$0,5_{10} = d_2 + \frac{d_3}{2^1} + \frac{d_4}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-2}} + ...$$

Daí extraímos $d_2 = 0$, pois é a parte inteira, e ficamos com a igualdade das partes fracionárias $0,5_{10} = \frac{d_3}{2^1} + \frac{d_4}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-2}} + ...$. Novamente multiplicando ambos membros por 2:

$$0,5_{10} = \frac{d_3}{2^1} + \frac{d_4}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-2}} + ... \qquad \times 2$$

Chegamos em :

$$1,0_{10} = d_3 + \frac{d_4}{2^1} + \frac{d_5}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-3}} + ... \qquad \times 2$$

Podemos observar que a parte inteira $d_3 = 1$ e que a parte fracionária é zero, $0 = \frac{d_4}{2^1} + \frac{d_5}{2^2} + ... + \frac{d_k}{2^{k-3}} + ...$ encerrando o processo. Então $0,125_{10} = 0,001_2$. O processo de conversão, de um número decimal entre 0 e 1 se deu utilizando multiplicações sucessivas pelo fator 2. Aplicando esse processo como ficaria a conversão de $3,8_{10}$ para base binária? Converteremos a parte inteira e com parte fracionária, multiplicaremos por 2 e tomando a parte inteira após cada produto. Assim, $3_{10} = 11_2$ e com a parte fracionária teremos:

$$\begin{aligned}
0,8 \times 2 &= \mathbf{1},6 \\
0,6 \times 2 &= \mathbf{1},2 \\
0,2 \times 2 &= \mathbf{0},4 \\
0,4 \times 2 &= \mathbf{0},8 \\
0,8 \times 2 &= \mathbf{1},6 \\
0,6 \times 2 &= \mathbf{1},2 \\
0,2 \times 2 &= ...
\end{aligned}$$

Podemos observar que ocorre repetições dos produtos, o que indica que o número no sistema binário tem representação infinita, que em algum momento será necessário alguma aproximação ou arredondamento. E assim $3,8_{10} = 11,11001100..._2$.

Em determinadas situações, como encontrada em Monteiro [43], para realizar corretamente as conversões de bases, é possível que no sistema $F(b,t,I,S)$ não venha especificado todos os valores. Então pode surgir outras convenções de representação, onde o formato será fornecido antecipadamente. Seja por exemplo o formato, onde são fornecidos 32 bits para representação, na base binária, no seguinte formato *SEM - Sinal do número, Expoente e Mantissa.*

$$\underbrace{S}_{1}\underbrace{E}_{1+6}\underbrace{M}_{24}$$

S - Sinal do número;
E - 1 bit para o sinal do expoente e 6 bits para magnitude;
M - Mantissa normalizada;

Vamos por exemplo, converter o número $-407,375_{10}$ para ponto flutuante no formato SEM. O sinal do número é negativo, o próximo passo é converter o número decimal para a base binária. Temos que $407_{10} = 110010111_2$ e com $0,375_{10}$ vamos realizar as multiplicações sucessivas por 2:

$$\begin{aligned} 0,375 \times 2 &= \mathbf{0},75 \\ 0,75 \times 2 &= \mathbf{1},5 \\ 0,5 \times 2 &= \mathbf{1},0 \end{aligned}$$

Como $0,375_{10} = 011_2$, e fazendo a junção ficaremos com $407,375_{10} = 110010111,011_2$, normalizando esse valor:

$110010111,011_2 = 110010111,011_2 \cdot 2^0 = 0,110010111011 \cdot 2^{+9(1001)}$

Com esses dados podemos determinar S, E e M:
S (sinal do número) = 1 (sinal negativo)
E (expoente) = **0**001001 (+9 = sinal positivo **0**, $9 = 1001_2$ e o completamento de zero à esquerda chegar a 7 bits);
M (mantissa ou fração) = 110010111011000000000000 (não é necessário inserir o valor 0,) como a mantissa é fracionária, o completamento de zeros é feio à direita do número, até chegar nos 24 bits.

Com todos os dados determinados, fazendo as junções de SEM, a conversão de 32 bits de $-407,375_{10}$ será:

1**0001001**110010111011000000000000

Nesse método podemos representar de modo *finito* todo número real. Finito, pois a máquina tem uma quantidade finita de alocações de armazenamento. Esse tipo de representação, pode levar a erros, devido a aproximações, truncamentos ou arredondamentos. Para sanar esses problemas, há métodos matemáticos, formas operacionais que contribui para amenizar ou acabar com problemas de imprecisões.

15.3 CURIOSIDADE DO SISTEMA TERNÁRIO.

Vamos supor que quiséssemos construir um odômetro, e tivéssemos material para confeccionar apenas 60 dígitos, que seriam usados nos indicadores do display ou mostrador. Esse odômetro deveria ter maior capacidade possível de representação numérica. Em que base numérica, permitiria uma construção mais otimizada, desse odômetro?

Figura 136 – Mostrador de um odômetro.

FONTE:
http://cristianoolira.blogspot.com.br/2010/08/como-funcionam-os-odometros.html
Acesso em: 29/07/2016.

No sistema de base 10, com 60 dígitos podemos montar 6 indicadores (IND), cada com os 10 algarismos do sistema decimal, podendo indicar $10^6 = 1.000.000$ números inteiros:

$$\underbrace{1^oIND}_{10} \quad \underbrace{2^oIND}_{10} \quad ...\underbrace{6^oIND}_{10} \rightarrow Capacidade \quad de \quad \underbrace{10 \times ...10 \times 10}_{10 fatores} = 10^6 = 1.000.000$$

No sistema binário, cada indicador apresentará 2 dígitos,com 60 dígitos disponíveis, então podemos colocar 30 indicadores, com capacidade de representar $2^{30} = 1.073.741.824$ números:

$$\underbrace{1^oIND}_{2} \quad \underbrace{2^oIND}_{2} \quad ... \quad \underbrace{30^oIND}_{2} \rightarrow Capacidade \quad de \quad \underbrace{2 \times ...2 \times 2}_{30 fatores} = 2^{30} = 1.073.741.824$$

Continuando com o mesmo processo, no sistema ternário, cada indicador apresentará 3 dígitos, e com 60 dígitos a disposição, poderemos compor 20 indicadores, com capacidade de representar $3^{20} = 3.486.784.401$ números:

$$\underbrace{1^{o}IND}_{3} \quad \underbrace{2^{o}IND}_{3} \quad ... \quad \underbrace{20^{o}IND}_{3} \rightarrow Capacidade \quad de \quad \underbrace{3 \times ...3 \times 3}_{20 fatores} = 3^{20} = 3.486.784.401$$

Fazendo as investigações para outras bases, que sejam divisoras de 60, para ajustar quantidades iguais de dígitos aos indicadores do mostrador, teremos:
Base 4 $\rightarrow$ 15 mostradores com 4 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $4^{15} = 1.073.741.824$;
Base 5 $\rightarrow$ 12 mostradores com 5 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $5^{12} = 244.140.625$;
Base 6 $\rightarrow$ 10 mostradores com 6 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $6^{10} = 60.466.176$;
Base 12 $\rightarrow$ 5 mostradores com 12 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $12^{5} = 248.832$;
Base 15 $\rightarrow$ 4 mostradores com 15 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $15^{4} = 50.625$;
Base 20 $\rightarrow$ 3 mostradores com 20 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $20^{3} = 8.000$;
Base 30 $\rightarrow$ 2 mostradores com 30 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $30^{2} = 900$;
Base 60 $\rightarrow$ 1 mostrador com 60 dígitos cada $\rightarrow$ Capacidade de $60^{1} = 60$.

De todas as bases usadas, a melhor opção foi a de base ternária. De fato, seja n o número de dígitos, e que x seja a base do sistema numérico, o número de indicadores será dado por $\frac{n}{x}$, e sendo y a capacidade numérica, então:

$$y = x^{\frac{n}{x}}$$

Seja $y(x) = (x)^{\frac{n}{x}}$, usando derivação, podemos investigar a existência de máximo em um ponto x_0, onde a derivada se anula nesse ponto.

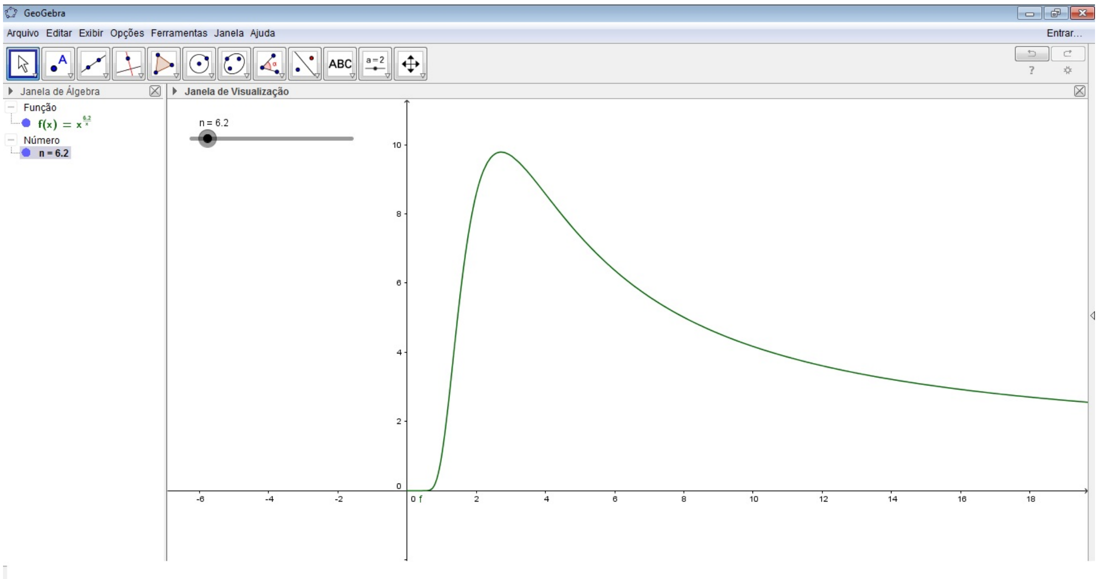
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-n}{x^2} \cdot (x)^{\frac{n}{x}} \cdot lnx + \frac{n}{x} \cdot (x)^{\frac{n}{x}-1} = n \cdot (x)^{\frac{n}{x}-2} \cdot (1 - lnx)$$

Fazendo $\frac{dy}{dx} = 0$ ficaremos com :

$$n \cdot (x)^{\frac{n}{x}-2} = 0 \quad e \quad (1 - lnx) = 0$$

Como $(1 - lnx) = 0 \Rightarrow lnx = 1 \Rightarrow x = e$. Analisando o sinal da derivada $\frac{dy}{dx}$, a esquerda de e, é positivo e a direita de e, é negativo, portando e é um ponto de máximo. Sabendo que o número de Euler é aproximadamente igual a 2,71828182, o natural mais próximo é 3, confirmando que a base 3 é maior capacidade representativa. Sabe-se que $n \neq 0$ e $(x)^{\frac{n}{x}-2} = 0$ não tem solução, pois não temos resultado de potência de números reis que resulta em zero. Plotando o gráfico de $y = x^{\frac{n}{x}}$ no *GeoGebra* teremos uma noção gráfica da função.

Figura 137 – Gráfico de $y = x^{\frac{n}{x}}$



FONTE: Software GeoGebra.

Este problema foi uma adaptação de um texto, proposto por Fomín [25]. Se na natureza é possível encontrar uma série de padrões envolvendo π e o número de ouro Φ, quem sabe não teremos um sistema de computação de base e?

16 SUGESTÕES DE APLICAÇÕES E TEMAS PARA INVESTIGAÇÕES.

16.1 ENSINO FUNDAMENTAL.

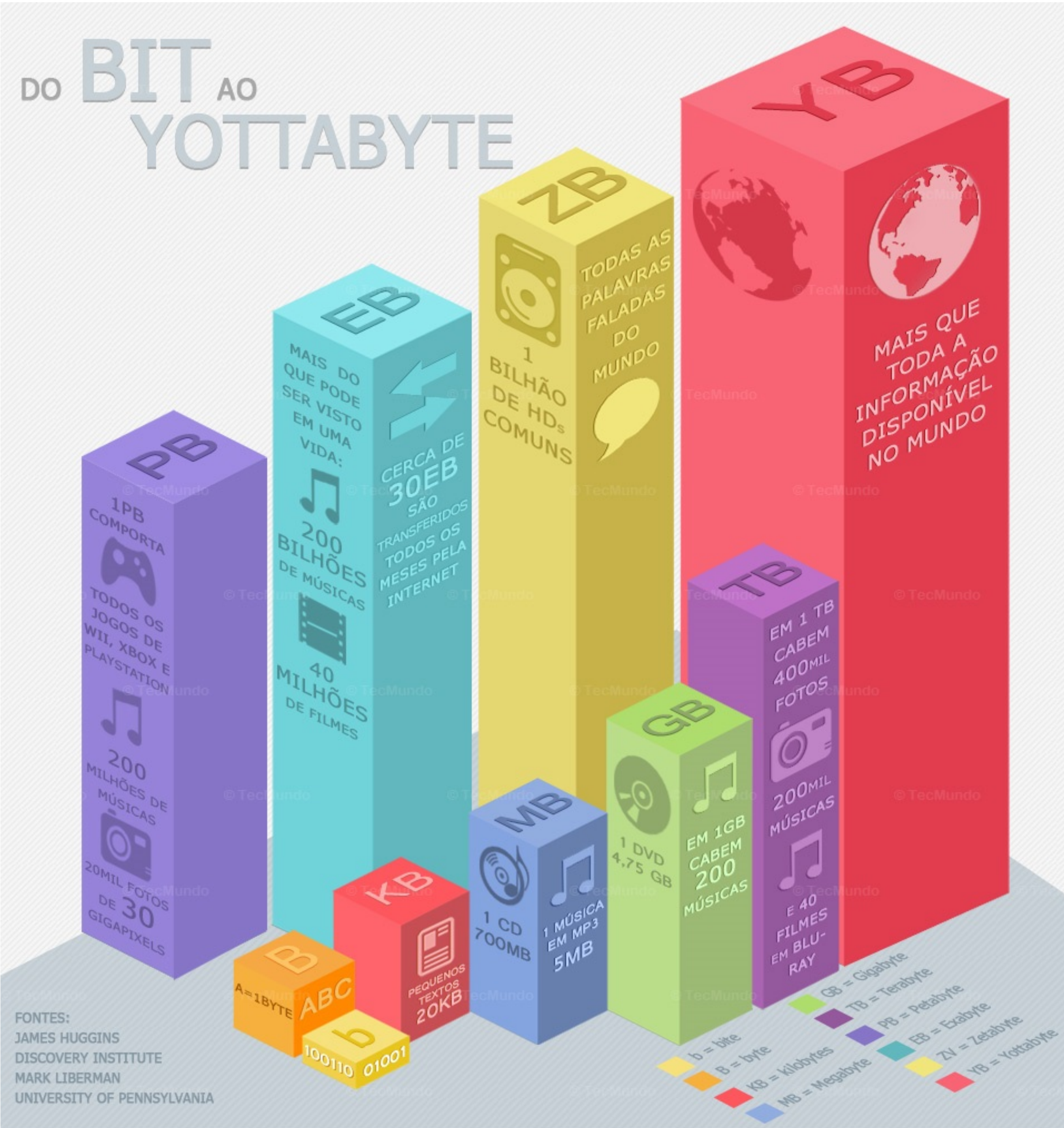
Atualmente sobre pressão das forças econômicas, novos indicadores são empregados para mensurar o potencial e o impacto da educação na prosperidade e desenvolvimento de uma nação. Um termo que ganha espaço na discussões de políticas educacionais é *numeracia* ou *numeramento*. O termo surgiu no Reino Unido em 1982, em um relatório sobre ensino de matemática, como parte de iniciativas de reformas no sistema educacional. Assim:

> a numeracia é entendida como uma competência que envolve compreensão do sistema de numeração, domínio de técnicas de cálculo e confiança e à vontade com os números e com medidas. A numeracia também envolve compreensão sobre o como a informação é recolhida e apresentada, bem como disposição e capacidade para resolver problemas numa variedade de contextos. ([55], p. 172)

Com objetivo de termos alunos, com capacidade de uso de matemática no cotidiano, o reconhecimento do sistema numérico e operacionalidade ganha destaque. É notório em nosso sistema educacional, uma grande quantidade de alunos com deficiência no uso dos números. Uma ferramente que vem sendo empregada, no auxilio das operações aritméticas, de influencia asiática, é o ábaco oriental *soroban*. Com poucas publicações nacionais sobre resultados efetivos do uso do *soroban*, o ábaco tem espaço de destaque em franquias de *ginástica cerebral*. Um trabalho de professores, foi relatado num pequeno livro *Soraban: Uma ferramenta para compreensão das quatro operações* [47]. O trabalho foi feito por meio de uma oficina, com um grupo de 16 alunos da 5ª série (atualmnte 6º ano do ensino fundamental). Aplicando teste antes e depois da intervenção do uso do *soroban*, exibiram dados estatísticos dos desempenhos, com melhorias de 41,5% no desempenho das tarefas. Os testes não foram conclusivos, pois não fizeram a comparação com um grupo controle, sem a intervenção do instrumento didático.

Outra aplicação é promover discussões sobre unidade de medida de informação. De forma cada vez mais democrática, os dispositivos eletrônicos com acesso a internet se faz presente na realidade dos alunos. Sejam *smartphones*, *tabletes*, *notebooks*, computadores de mesa, *pendrives*, câmeras digitais, cartões de memória,*CD*s, *DVD*s, *blu-ray*s, *smart TV*s, HD portátil e etc. É também cada vez mais comum o compartilhamento de músicas, imagens, vídeos, games, com esses equipamentos tornando objetos de desejo entre as crianças. Esses equipamentos motivam por exemplo, o estudo de unidades utilizadas para medir o tamanho de uma memória de armazenamento, velocidade de transferência de dados, tamanhos e qualidade de arquivos e telas do dispositivo. O que significa dizer que um cartão de memória tem *32 gigas*? Qual significado em dizer que um arquivo é descarregado em taxa de *150 kbps*? Qual o significado de uma foto possuir *16 MP*? Qual a vantagem de se ter um dispositivo com memória de *1 tera*? As perguntas na realidade seriam substituídas por atividade comparativas, de por exemplo, quantas canções ou imagens caberiam em um determinado dispositivo com dada capacidade, produzindo representações gráficas, maquetes, conduzidas por atividade de pesquisa e registros.

Figura 138 – Infográfico comparativo entre as medidas de informação.



FONTE: *http://www.tecmundo.com.br/infografico/10187-do-bit-ao-yottabyte-conheca-os-tamanhos-dos-arquivos-digitais-infografico-.htm*
Acesso em: 25/07/2016.

Pode-se também incentivar os registros por meio de planilhas ou esquemas, identificando regras padronizadas e usos populares das unidades.

Unidade	Símbolo	Valor Equivalente	Múltiplo
Bit	b*		
Byte	B*	8 bits	10^0
Kilobyte	KB	1.024 B	10^3
Megabyte	MB	1.024 KB	10^6
Gigabyte	GB	1.024 MB	10^9
Terabyte	TB	1.024 GB	10^{12}
Petabyte	PB	1.024 TB	10^{15}
Exabyte	EB	1.024 PB	10^{18}
Zettabyte	ZB	1.024 EB	10^{21}
Yottabyte	YB	1.024 ZB	10^{24}

* – O símbolo para byte no SI, é 'b' e para bit é 'bit'. Na tabela, encontra-se a versão popular, amplamente difundida das grandezas da informática.

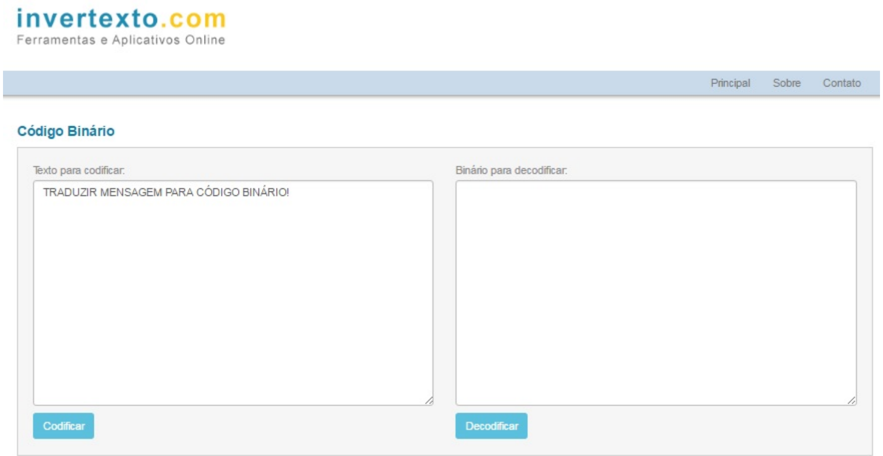
O uso de recursos audiovisuais, podem enriquecer os trabalhos, mostrando aplicabilidades dos conteúdos abordados. Um desses recursos, é o *Pixar in a box*, que mostra a matemática e ciência por trás das produções de desenhos animados. O projeto é uma parceria da empresa *Pixar* e do site *Khan Academy*.

Figura 139 – Pixar in a Box: Matemática e ciência na produção de desenhos animados.

FONTE: $https://pt.khanacademy.org/partner-content/computing-partners/pixar-latam/start-here-latam$ Acesso em: 25/07/2016.

Outro tema que pode despertar a curiosidade dos alunos é a troca de mensagens com frases codificadas em números binários. Os alunos escolheriam frases, e usariam uma página que codificaria, e depois com trocas de mensagens o receptor teria que decodificar, usando o mesmo recurso da codificação. O tema também seria bom para discutir sobre segurança de informação e privacidade nos meios virtuais. É possível encontrar páginas tradutoras de códigos, com uma simples pesquisa na internet.

Figura 140 – Página com tradutor de códigos binários.



FONTE: https://www.invertexto.com/codigo-binario Acesso em: 25/07/2016.

Se o objetivo for um tratamento mais matemático ou específico, desenvolvendo um trabalho que visa mostrar aspectos operatórios de números em outras bases numéricas, principalmente para treinamento de exames e olimpíadas, em *Círculos Matemáticos* ([26], p. 181-188) e *Iniciação Matemática* ([45], p. 104-106, encontraremos uma boa referência. Nesses indicações que necessitam de outras ideias que seriam trabalhadas previamente oferece exemplo de pesagens usando pesos binários, estudo do jogo de Nim, e exemplos que podem proporcionar uma discussão de como máquinas de pagamento automático dão troco, ou como são escolhidos os valores para confecção de cédulas de dinheiros e cunhagem de moedas.

16.2 ENSINO MÉDIO.

16.2.1 **Enem.**

No contexto do Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM, na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias, temos em:

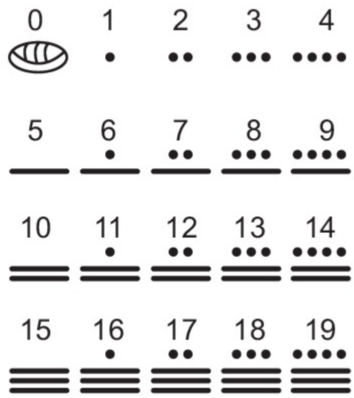
> Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais, podemos encontrar como habilidade requerida: H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais. Inclusive em algumas edições, houve questões contempladas nas avaliações. ([13], p. 46)

Esse material serve de fonte de apoio em questões contempladas na avaliação. Vejamos algumas exemplos:

Figura 141 – Questão 149 - Enem 2015 - 2ª Aplicação - Caderno Amarelo.

QUESTÃO 149

Os maias desenvolveram um sistema de numeração vigesimal que podia representar qualquer número inteiro, não negativo, com apenas três símbolos. Uma concha representava o zero, um ponto representava o número 1 e uma barrinha horizontal, o número 5. Até o número 19, os maias representavam os números como mostra a Figura 1:



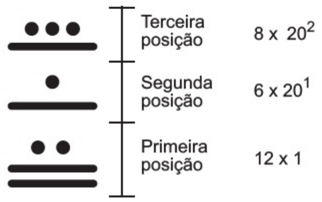


Figura 1 **Figura 2**

Números superiores a 19 são escritos na vertical, seguindo potências de 20 em notação posicional, como mostra a Figura 2.

Ou seja, o número que se encontra na primeira posição é multiplicado por $20^0 = 1$, o número que se encontra na segunda posição é multiplicado por $20^1 = 20$ e assim por diante. Os resultados obtidos em cada posição são somados para obter o número no sistema decimal.

Um arqueólogo achou o hieroglifo da Figura 3 em um sítio arqueológico:

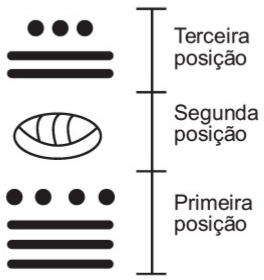


Figura 3

Disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

O número, no sistema decimal, que o hieroglifo da Figura 3 representa é igual a

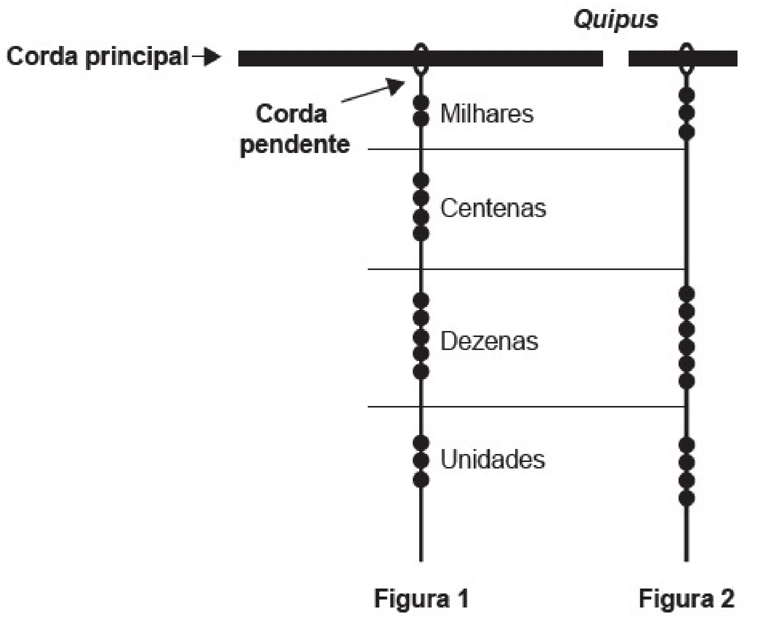
- **A** 279.
- **B** 539.
- **C** 2 619.
- **D** 5 219.
- **E** 7 613.

FONTE: *http : //ramonlamar.blogspot.com.br/2013/08/todas − as − provas − do − novo − enem − em − pdf.html* Acesso em: 29/07/2016.

Figura 142 – Questão 177 - Enem 2014 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo.

QUESTÃO 177

Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus*. O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o *quipus* representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.



Disponível em: www.culturaperuana.com.br. Acesso em: 13 dez. 2012.

O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é

- **A** 364.
- **B** 463.
- **C** 3 064.
- **D** 3 640.
- **E** 4 603.

FONTE:
http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos
Acesso em: 29/07/2016.

Figura 143 – Questão 176 - Enem 2014 - 3ª Aplicação - Caderno Cinza.

QUESTÃO 176

Os egípcios da Antiguidade criaram um sistema muito interessante para escrever números baseado em agrupamento.

O número 1 é representado pelo bastão |, o número 2 por dois bastões | | e assim por diante, até o número 9, representado por noves bastões em sequência | | | | | | | | |. Para o número 10, utiliza-se o símbolo 𓎆 e alguns outros números múltiplos de 10 estão descritos na tabela a seguir.

Símbolo Egípcio	Número na nossa notação
𓏺	1
𓎆	10
𓍢	100
𓆼	1 000
𓂭	10 000
𓆐	100 000
𓁨	1 000 000

Os números de 1 a 9 999 999 na numeração egípcia derivam dos símbolos da tabela, respeitando as devidas quantidades e posições (símbolos que representam números maiores são colocados à esquerda e de maneira decrescente, são colocados os demais símbolos à direita, até a soma deles chegar ao número desejado). Por exemplo, o número 321 é descrito por 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆|, pois 100+100+100+10+10+1 é igual a 321.

O número egípcio 𓁨 𓆐 𓆐 𓂭 𓂭 𓂭 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢| | equivale ao número

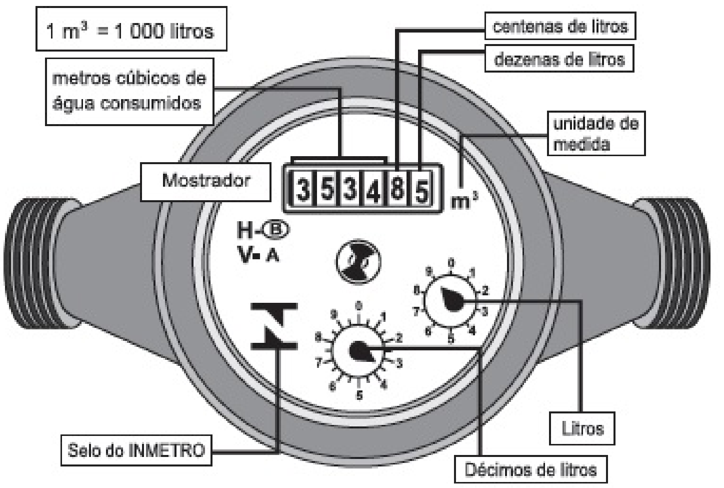
- **A** 12 372.
- **B** 1 230 072.
- **C** 1 203 702.
- **D** 1 230 702.
- **E** 1 237 200.

FONTE: *http : //ramonlamar.blogspot.com.br/2013/08/todas − as − provas − do − novo − enem − em − pdf.html* Acesso em: 29/07/2016.

Figura 144 – Questão 139 - Enem 2012 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo.

QUESTÃO 139

Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m³, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir.



Disponível em: www.aguasdearacoiaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a

- **A** 3 534,85.
- **B** 3 544,20.
- **C** 3 534 850,00.
- **D** 3 534 859,35.
- **E** 3 534 850,39.

FONTE:
http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos
Acesso em: 29/07/2016.

Figura 145 – Questão 157 - Enem 2012 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo.

QUESTÃO 157

João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 1 3 _ 9 8 2 0 7, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.

De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de

A centena.
B dezena de milhar.
C centena de milhar.
D milhão.
E centena de milhão.

FONTE:
http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos
Acesso em: 29/07/2016.

Figura 146 – Questão 150 - Enem 2012 - 2ª Aplicação - Caderno Cinza.

QUESTÃO 150

O sistema de numeração romana, hoje em desuso, já foi o principal sistema de numeração da Europa. Nos dias atuais, a numeração romana é usada no nosso cotidiano essencialmente para designar os séculos, mas já foi necessário fazer contas e descrever números bastante grandes nesse sistema de numeração. Para isto, os romanos colocavam um traço sobre o número para representar que esse número deveria ser multiplicado por 1 000. Por exemplo, o número $\overline{\text{X}}$ representa o número 10 × 1 000, ou seja, 10 000.

De acordo com essas informações, os números $\overline{\text{MCCV}}$ e $\overline{\text{XLIII}}$ são, respectivamente, iguais aW

A 1 205 000 e 43 000.
B 1 205 000 e 63 000.
C 1 205 000 e 493 000.
D 1 250 000 e 43 000.
E 1 250 000 e 63 000.

FONTE: *http://ramonlamar.blogspot.com.br/2013/08/todas-as-provas-do-novo-enem-em-pdf.html* Acesso em: 29/07/2016.

Figura 147 – Questão 137 - Enem 2011 - 1ª Aplicação - Caderno Amarelo.

QUESTÃO 137

O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:

Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

A) 2 614.
B) 3 624.
C) 2 715.
D) 3 725.
E) 4 162.

FONTE:
http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos
Acesso em: 29/07/2016.

16.2.2 OBMEP.

Esse material pode oferecer suporte complementar aos temas abordados na competição, que abrangem também alunos do ensino fundamental. Vejamos alguns exemplos contendo assuntos abordados nesse trabalho.

Figura 148 – Questão 15 - 1ª Fase 2007 - Nível 3

15. O *contrário* de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 é 52 e contrário de 79 é 97. Qual dos números abaixo **não é** a soma de um número de dois algarismos com seu contrário?

A) 44
B) 99
C) 121
D) 165
E) 181

FONTE: *http://www.obmep.org.br/provas.htm* Acesso em: 30/07/2016.

Figura 149 – Questão 2 - 2ª Fase 2010 - Nível 1

2. Cláudia inverteu as posições de dois algarismos vizinhos no número 682479 e obteve um número menor. Quais foram esses algarismos?

A) 6 e 8
B) 8 e 2
C) 2 e 4
D) 4 e 7
E) 7 e 9

FONTE: *http://www.obmep.org.br/provas.htm* Acesso em: 30/07/2016.

Figura 150 – Questão 11 - 1ª Fase 2013 - Nível 2

11. Um número de três algarismos tem as seguintes propriedades:

- quando trocamos o algarismo das unidades com o das dezenas, ele aumenta em 18 unidades;
- quando trocamos o algarismo das dezenas com o das centenas, ele aumenta em 180 unidades.

Quantas unidades aumentará esse número se trocarmos o algarismo das unidades com o das centenas?

A) 162
B) 198
C) 256
D) 360
E) 396

FONTE: *http://www.obmep.org.br/provas.htm* Acesso em: 30/07/2016.

Figura 151 – Questão 13 - 1ª Fase 2014 - Nível 2

13. Na conta indicada a seguir, as letras X, Y e Z representam algarismos distintos. Qual é o algarismo representado pela letra Z?

A) 1
B) 3
C) 5
D) 6
E) 8

$$\begin{array}{r} XXXX \\ YYYY \\ +\ ZZZZ \\ \hline YXXXZ \end{array}$$

FONTE: *http://www.obmep.org.br/provas.htm* Acesso em: 30/07/2016.

Figura 152 – Questão 1 - 2ª Fase 2014 - Nível 1

1. Joãozinho chama um número natural maior do que 100 de *aditivado* quando seu algarismo das unidades é igual à soma dos demais algarismos. Por exemplo, 224 é aditivado, pois $2+2=4$.

a) Escreva o número aditivado de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é 1.

b) Escreva todos os números aditivados de três algarismos cujo algarismo das unidades é 6.

c) Qual é o maior número aditivado sem algarismos repetidos?

FONTE: *http : //www.obmep.org.br/provas.htm* Acesso em: 30/07/2016.

16.2.3 Uso de recursos da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC).

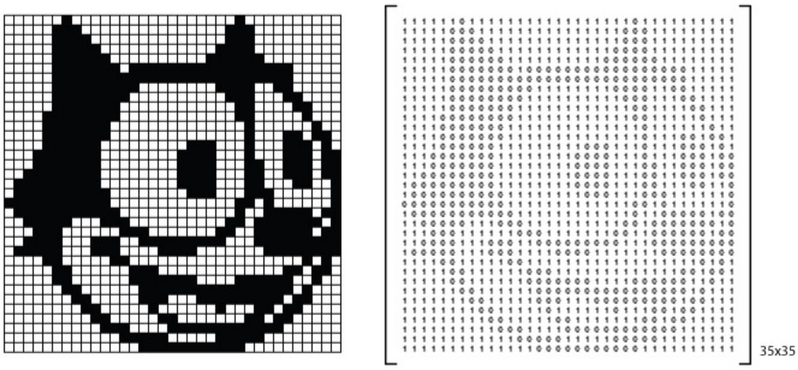
Na videoteca do MEC é possível encontrar a série *Bits e Bytes*, com primeiro episódio de título *Os números e a invenção do computador.* É um excelente recurso para ser trabalhado com alunos do ensino médio e para os anos finais do ensino fundamental.

Figura 153 – Séria Bits e Bytes.

FONTE: *http : //tvescola.mec.gov.br/tve/videoteca − series!loadSerie?idSerie* = 495 Acesso em: 31/07/2016.

Outra excelente sugestão é aliar Matrizes e Imagens digitais. No site da *UFF* podemos encontrar módulos de atividades com os seguintes temas : *Matrizes e imagens binárias, Matrizes e Imagens em Tons de Cinza, Matrizes e Imagens Coloridas, O Sistema RGB e o Cubo de Cores e Matrizes* e *Transições de Imagens.*

Figura 154 – Atividade de Matrizes e Imagens Digitais.



FONTE: http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix-br.html Acesso em: 31/07/2016.

Diante de toda evolução dos sistemas de numeração e suas influências em novos inventos e teorias, a pergunta é qual é o próximo passo? O que virá pela frente? No livro *Numerati* [5], o jornalista Stephen Baker explora de maneira simples algumas ideias, que são de reflexões urgentes. Diante de algum conteúdo, muitos alunos perguntam "para que serve?" e nesse mesmo contexto podemos responder com uma outra pergunta "a quem serve?" o que se estuda ou não se estuda:

> Diariamente, deixamos uma série de pistas de informações pessoais pelo simples fato de vivermos no mundo moderno. Clicamos em páginas da web, zapeamos os canais de TV, passamos por cabines de pedágio automáticas, compramos com cartões de créditos e utilizamos celulares. Empresas como Yahoo! e Google estão coletando em média 2500 detalhes sobre cada um de nós a cada mês.
> Quem está examinando esses dados? E o que estão fazendo com ele? (...)
> Uma nova elite matemática está descobrindo meios de dissecar cada ação nossa e prever, com uma precisão espantosa, nosso próximo passo. Sue objetivo? Manipular nosso comportamento - o que compramos, como votamos, quem namoramos - sem sequer percebemos.
> Neste grande e original esforço de reportagem e análise, Baker fornece uma apresentação viva de um mundo que estamos adentrando - e das pessoas que o controlam. Os *Numerati* se infiltram em todas as áreas da atividade humana, examinando-nos como trabalhadores, compradores, pacientes, eleitores, terroristas potenciais - até namorados. Estão vasculhando e-mails e registros telefônicos para calcular a contribuição de cada funcionário ao resultado da empresa. Estão analisando nossas compras para ver se estamos restritos a um orçamento, se estamos de dieta ou burlando a dieta. E estão se concentrando em nossos valores políticos para tentar atrair nosso voto numa eleição apertada.
> Esse é um dos empreendimentos mais ambiciosos do século XXI, com vasta implicações. Podemos nos ver definidos e enquadrados

> por fórmulas. Nossa privacidade pode evaporar... Mas os *Numerati* também poderão trabalhar em nosso benefício, usando métodos aperfeiçoados nos cassinos de Las Vegas para rastrear terroristas potenciais ou diagnosticar uma doença bem antes de sentirmos os sintomas. ([5], p. 0)

Em outros livros o termo *Numerati*, é substituidos por *Freakonomics* [38], ou *Super Crunchers* [4] . Entre a conspiração e a realidade, entre o fato e a ficção, são bons livros para reflexões em tempos atuais.

16.2.4 **Conclusão.**

Inicialmente é simples perceber que este trabalho não é conclusivo, no sentido de que conseguimos ligar os pontos e tecer uma história com encadeamento lógico, cronológico e encaixante, como peças de um quebra-cabeças. A natureza dos números e seus sistemas se revela de maneira complexa, presente de maneira sinérgica, relacionados a vários elementos e contextos. Os números estiveram nos astros, nas danças, na política, na economia, na guerra, nas palavras, nas máquinas, no tempo, na religião, no destino das vidas, na razão, etc... A matemática dos números contribui para o homem ampliar fronteiras geográficas, pensamentos e formas de se organizar coletivamente, com interações, como as comerciais ou por dominação, como movimentos de conquistas e colonizações.

O maior legado dos números e seus sistemas, foi que na sua contribuição para a desenvolvimento da matemática, também permitiu sua universalização, sendo atualmente uma linguagem comum e compreendida em quase todos os povos e nações. Como oxigênio que respiramos, invisível e imperceptível, assim é a natureza da matemática e suas ideias básicas: não percebemos e não notamos sua importância para nossa sobrevivência. É óbvio que de certa maneira conseguiremos sobreviver por grande tempo sem matemática, mas curiosamente nossa vida será de certa forma restrita ou precária, dentro da nossa atual realidade.

Em todos os casos, vimos que os sistemas numéricos serviram a uma forma de dominação ou organização dos grupos, povos ou civilizações. Até mesmo nos primórdios da computação artificial, as maiores motivações vieram principalmente dos campos de guerra. Diante dos cotidianos “para que serve?” dos alunos em nossas aulas, podemos introduzir “a quem serve?”. Nas nossas escolas estudávamos matemática, português, história, geografia, física, química, etc. Atualmente a abordagem final é, Matemática e suas *tecnologias*; Linguagem, Códigos e suas *Tecnologias*; Ciências Humanas e suas *tecnologias*; Ciências da Natureza e suas *tecnologias* e etc. O termo *tecnologia*, muito mais que *ensino técnico*, voltado para familiaridade e uso dos artefatos tecnológicos, demonstram na verdade a forte necessidade de ampliar a dimensão da concepção das *tecnologias*, com uma proposta de *educação tecnológica*. *Educação* é muito mais amplo que *ensino*, e que a *tecnologia* supera a materialidade de um simples uso de um *artefato*. A *educação* leva em consideração o contexto, a responsabilidade, a reflexão e o pensamento crítico, enaltecendo a competências e habilidades. O *ensino* só favorece a técnica por si só, pra um determinado fim, utilitarista, imediatista e pontual.

Esse trabalho, além de oferecer um material de apoio, contém propostas de cunho educacional: auxilia desde exames, olimpíadas e é propulsor de reflexões atuais dos assuntos tecnológicos e ligado a temas transversais, tais como ética, pluralidade cultural, trabalho e consumo. Conhecer o conhecimento pode contribuir para motivar e despertar o interesse pelos conteúdos ou simplesmente aumentar a percepção da importância e força das ideias matemáticas, por mais simples que elas sejam.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, M. C. *Origens da Matemática.* Curitiba: Progressiva, 2011.

[2] ALMEIDA, M. C. *O nascimento da Matemática.* São Paulo: Livraria da Física, 2013.

[3] ALMEIDA, M. C. As Mais Antigas Evidências Conhecidas do Emprego de Talhas Numéricas Associadas a Processos de Contagem. In: *XI Seminário Nacional de História da Matemática.* 2015. Disponível em *https : //www.researchgate.net/profile/Manoel_Almeida/publications*

Acesso em: 21/05/2016.

[4] AYRES, I. *Super Crunchers:* Por que pensar com números é a nova maneira de ser inteligente. São Paulo: Ediouro, 2008.

[5] BAKER, S. *Numerati:* Conheça os numerati - eles já conhecem você. São Paulo: Saraiva, 2009.

[6] BELLOS, A. *Alex no país dos números.* São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

[7] BENTLEY, P. *O livro dos números.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

[8] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA F. Q. *A matemática através dos tempos.* São Paulo: Blucher, 2010.

[9] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática.* São Paulo: Bluncher, 2012.

[10] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacional:* Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamenta. Brasília: MEC, 1998.

[11] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacional:* Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

[12] BRASIL. *Explorando o ensino da matemática.* Brasília: MEC, 2004.

[13] BRASIL. *Edital Enem 2016.* Brasília: MEC - INEP, 2016.

[14] CAJORI, F. *Uma história da Matemática.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[15] CAUTY, A.; HOPPAN J. Os dois zeros maias. *Scientific American.* Ed.Especial, n. 35, p. 10-13, 2ª ed.; 2001.

[16] CHILD, G. *Evolução Cultural do Homem.* Rio de Janeiro: Zahar, 1986.

[17] CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história.* São Paulo: Livraria da Física, 2012.

[18] DAGHLIAN, J. *Lógica e álgebra de Boole.* São Paulo: Atlas, 2012.

[19] D'AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[20] DANTZIG, T. *Número a linguagem da ciência.* Lisboa: Aster, 1970.

[21] DAVIS, H. T. *Computação.* São Paulo: Atual, 1992.

[22] DEVLIN, K. *O gene da matemática.* Rio de Janeiro: Record, 2010.

[23] EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Campinas: Unicamp, 2004.

[24] FILHO, E. A. *Teoria elementar dos números.* São Paulo : Nobel, 1985.

[25] FOMÍN, S. V. *Sistemas de numeracion.* Moscú: MIR, 1984.

[26] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos:* A experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[27] GALEANO, E. *As veias abertas da América Latina.* Porto Alegre: L&PM , 2015.

[28] GALVÃO, M.E.E.L. *Números:* dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008.

[29] GLADWELL, M. *Fora de série.* Rio de Janeiro: Sextante, 2008.

[30] GLASER, A. *History of Binary.* Tomash Publishers, 1971.

[31] GUNDLASH, B. H. *Números e numerais.* São Paulo: Atual, 1992.

[32] HEFEZ, A. *Elementos de aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[33] IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[34] IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos.* Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[35] IFRAH, G. *Os números:*a hitória de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 2010.

[36] ISAACSON, W. *Os inovadores.* São Paulo: Companhia das Letras, 2014.

[37] KATZ, V. J. *História da Matemática.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[38] LEVITT, S. D.; DUBNER, S. J. *Freakonomics:* O lado oculto e inesperado de tudo que nos afeta. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

[39] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[40] LOPES, F. J. A. Leibniz e a aritmética binária. *Revista Brasileira de História da Matemática.* v. 11, n. 22, p. 89-94, 2011. Disponível em $http : //www.rbhm.org.br/issues/RBHM\%20 - \%20vol.11, no22/5\%20 - \%20Fred.pdf$ Acesso em: 09/07/2016.

[41] MACHADO, N. J. *Matemática e realidade.* São Paulo: Cortez, 2009.

[42] MENDES, I. A. *Números.* São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[43] MONTEIRO, M. A. *Introdução à organização de computadores.* Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[44] NETO, A. F. Leibniz e a teologia natural dos chineses. *Nat. hum.,* São Paulo, v. 14, n. 1, p. 101-115, 2012. Disponível em $http : //pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script = sci_arttext\&pid = S1517 - 24302012000100006\&nrm = iso$

Acesso em: 09/07/2016.

[45] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática:* um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[46] PATERLINI, R. R. Aritmética dos números inteiros: Um texto para licenciados e professores de Matemática. São Carlos: Departamento de Matemática - UFSCar, 2013. Disponível em: *http : //www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/*

Acesso em 06/07/2016.

[47] PEIXOTO, J. L. B.; SANTANA E. R. S.; CAZORLA, I. M. *Soroban:* Uma ferramenta para compreensão das quatro operações. Itabuna: Via Litterarum, 2009.

[48] PICKOVER, C. A. *O livro da matemática.* Kerkdriel: Librero, 2011.

[49] ROQUE, T. *História da Matemática:* Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[50] SAUTOY, M. *Os mistérios dos números.* Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

[51] STEWART, I. *Em busca do infinito.* Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

[52] STEWART, I. *O fantástico mundo dos números.* Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

[53] TENÓRIO, R. *Computadores de Papel.* São Paulo: Cortez, 2003.

[54] VICENTINO, C. *História Geral.* São Paulo: Scipione, 1997.

[55] TENREIRO-VIEIRA, C.; VIEIRA R. M. Literacia e pensamento crítico: um referencial para educação em ciências e em matemática. *Revista Brasileira de Educação.* v. 18, n. 52, p. 163-188, 2013. Disponível em *http : //www.scielo.br/pdf/rbedu/v18n52/10.pdf*

Acesso em: 10/07/2016.

[56] WARBURTON, N. *Uma breve história da filosofia.* Porto Alegre: L&PM, 2013.