Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Carlos Augusto Ribeiro

Noções de Cálculo Diferencial: Uma proposta para o Ensino Médio

Juiz de Fora

2013

Carlos Augusto Ribeiro

Noções de Cálculo Diferencial: Uma proposta para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2013

Ribeiro, Carlos Augusto.

Noções de Cálculo Diferencial: Uma proposta para o Ensino Médio. / Carlos Augusto Ribeiro. - 2013.

45f. : 19il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Funções. 3. Derivada.
4. Exponenciais. I. Título.

CDU 51

Carlos Augusto Ribeiro

Noções de Cálculo Diferencial: Uma proposta para o Ensino Médio

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
(Orientador)
PROFMAT
UFJF

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
PROFMAT
UFJF

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
PROFMAT
UFSJ

Juiz de Fora, 16 de agosto de 2013.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, razão da minha existência, pelo amor, carinho, dedicação e por todos os esforços que garantiram os meus estudos (o maior patrimônio que uma mãe pode deixar para um filho).

À minha esposa, seu carinho, dedicação e compreensão tornaram essa jornada possível.

Aos meus avós (in memorian) pelas incontáveis recordações de amor, afeto e incentivo aos estudos que levarei por toda minha vida.

Ao Professor Alberto Hassen Raad, o maior professor da minha vida. Seus generosos elogios e incentivo me impulsionaram a superar minhas limitações.

Aos Professores Narciso e Djalma (in memorian) por terem acreditado no potencial de um jovem estudante de Matemática (meus primeiros empregadores).

Ao Professor Marco Aurélio França pelo incentivo dado a minha carreira.

Aos Professores Lorival de Souza Lima, Hiroshi, Sonia Eunice, Antonio Carlos(Naga) e Marcos Raad pelo referencial de companheirismo e profissionalismo.

Aos colegas da Turma 2011 do Profmat, em especial aos amigos Antônio Carlos Magalhães e Anderson Ferrari pelo companheirismo.

Ao coordenador do Programa de Mestrado Profissional de Matemática (Profmat) na UFJF, Professor Doutor José Barbosa, pelo empenho e dedicação que tornaram possível a implementação desse mestrado.

Ao meu orientador, Professor Doutor Sérgio Vasconcelos, pelas valiosas sugestões e contribuições que viabilizaram esse trabalho.

Aos membros da douta Comissão Examinadora, Professores Doutores Sandro Mazorche e Carlos Alberto Raposo, pelas enriquecedoras sugestões.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela implementação e coordenação do Mestrado Profissional (PROFMAT), que propiciou o aprimoramento de inúmeros professores de Matemática que não teriam condições de cursarem um mestrado acadêmico em função de suas diversas atribuições profissionais.

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos uma proposta para introduzir, já no 1º ano do Ensino Médio, a idéia de Taxa de Variação de uma Função tanto do ponto de vista algébrico como geométrico e caracterizar as funções elementares (afim, quadrática e exponencial) a partir de suas variabilidades (a forma como uma função cresce ou decresce). Nesse sentido, é muito importante uma certa conexão com a disciplina de Física, onde a Cinemática é um ambiente valioso para esse estudo. Finalmente, propomos um estudo intuitivo de Limite de Sequência o que permitirá uma abordagem mais consistente do importante número de Euler que aparece naturalmente em situações onde a variação de uma certa grandeza num certo instante é proporcional ao seu valor naquele instante.

Palavras-Chave: Funções. Derivada. Exponencial.

ABSTRACT

In this work we have presented a proposal to introduce, early in the first year of High School Education, the idea of the Rate of Variation of a Function either from the algebraic or geometric point of view and characterize the elementary functions (affine, quadratic and exponential) from their variabilities (the form as a function increase and decrease). In this sense, it is very important to have a certain connection with the discipline of Physics, where the kinematics is a rich environment for this study. To conclude, we proposed an intuitive study of Limit of Sequence, which will allow us a more consistent approach of the important number of Euler that appears naturally in situations where the variation of a certain grandeur in a specific moment is proportional to its value at that moment.
Key-words: Functions. Derivative. Exponential.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9

1 PRIMEIRAS NOÇÕES DE TAXA DE VARIAÇÃO 12

1.1 Introdução 12

1.2 Definição 13

1.3 Interpretação Geométrica da taxa de variação média 14

2 FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU (F.AFIM) 16

2.1 Taxa de Variação Média da Função Afim 16

2.2 Caracterização da Função Afim 17

3 NOÇÕES DE DERIVADA 18

3.1 Noção Intuitiva de Limite 20

3.2 Reta Tangente a uma curva qualquer 21

3.3 O Conceito de Derivada 24

3.4 Funções com derivadas iguais 25

3.5 Função Crescente e Função Decrescente 26

3.5.1 Função Crescente 26

3.5.2 Função Decrescente 27

3.6 Concavidade do gráfico de uma função 27

3.7 Extremos das funções (Valores Máximo e Mínimo) 28

3.8 Estudo da função quadrática via derivadas 29

4 A DERIVADA NA CINEMÁTICA 33

5 NOÇÕES DE SEQUÊNCIA 36

5.1 Sequências de números reais 36

5.2 Sequências Limitadas 37

5.3 Sequências Monótonas 37

5.4 Limite de uma sequência 38

5.5 Teorema da Convergência Monótona (Dedekind) 39

6 A FUNÇÃO EXPONENCIAL e^x 40

6.1 O Número de Euler (e) 40

6.2 A Irracionalidade do número e 41

6.3 Taxa de Variação das Funções Exponenciais 43

6.4 Aplicações da Função Exponencial 44

REFERÊNCIAS 46

INTRODUÇÃO

O baixo rendimento dos alunos de cálculo na maioria das universidades brasileiras bem como a necessidade de uma reformulação da Matemática no Ensino Médio nortearam este trabalho.Embora o Cálculo ainda faça parte da grade curricular do Ensino Médio (Limites e Derivadas), a maioria dos professores o deixam de lado. A justificativa dada geralmente é que há falta de espaço, pois os programas são muito extensos e o objetivo central é a preparação para o vestibular onde esses assuntos geralmente não são cobrados. Tal abandono contribui fortemente para o alto índice de reprovação na disciplina em muitos cursos superiores.

Um procedimento bastante comum em muitas instituições de curso superior é o de criar disciplinas voltadas para suprir deficiências apresentadas pelos alunos recém chegados do Ensino Médio. Contudo, isso geralmente não tem tido o efeito esperado. O que se observa é que o problema duplica, já que os alunos apresentam dificuldades para serem aprovados nessas disciplinas.

O intuito desse trabalho é mostrar que alguns conceitos matemáticos relacionados ao Cálculo, podem sim ter espaço no Ensino Médio, desde que adequadamente adaptados. Enfatizaremos basicamente a noção de variabilidade, para que a noção de Derivada seja intuitivamente construída. Assim, propomos inicialmente a caracterização das funções reais estudadas no Ensino Médio, especificamente as funções polinomiais do 1º e 2º graus e a função exponencial, destacando o estudo de suas variações. Nesse contexto, a função afim será caracterizada como a função em que acréscimos iguais na variável independente determinam acréscimos iguais na variável dependente. Na função quadrática destacaremos a taxa de variação média e a taxa de variação instantânea, ambiente propício para a noção de Derivada.Tal noção é complementada com o aspecto dinâmico da reta tangente. Também propomos um trabalho paralelo com o professor de física, através dos conceitos de velocidade e aceleração. Esse trabalho pode ser feito no primeiro ano do Ensino Médio mediante adequada abordagem.

É importante observar que a inserção da idéia de Derivada no estudo das Funções Afim e Quadrática já constitui um passo fundamental para tornar o ensino da Matemática mais atrativo e eficiente. Contudo, fica a cargo do leitor utilizar ou não os capítulos V e VI onde se aborda de maneira mais detalhada a Função Exponencial. Temos consciência que tal enfoque seria melhor aproveitado por alunos da 3ª série do Ensino Médio voltados para área de exatas e que já teriam noções de Progressões e Binõmio de Newton.

A função Exponencial e^x é abordada com um certo destaque para o número de Euler, fato que leva naturalmente a um estudo ainda que intuitivo de sequências e limite. Esse estudo deve ser feito preferencialmente na terceira série do Ensino Médio quando as noções de progressões e binômio de Newton já forem conhecidas.

No Capítulo I, a partir de um exemplo que relaciona a altura de uma determinada pessoa com sua idade, criamos um pano de fundo para introduzirmos a idéia de taxa de variação média de uma função e sua consequente definição. Finalmente completamos essa noção com uma interpretação geométrica (coeficiente angular de uma reta).

No Capítulo II, caracterizamos a Função Afim através de sua taxa de variação, destacando o coeficiente angular como elemento de sua lei de formação.

No Capítulo III, propomos inicialmente um trabalho com a forma canônica da função quadrática para extrair o gráfico desse tipo de função mediante translações.Em seguida sugerimos uma breve noção de Limite de uma função para o posterior estudo da reta tangente a uma curva. Gradativamente criamos o terreno para estabelecer a noção de derivada e sua posterior definição. Com as noções de Função Crescente e Decrescente, concavidade de um gráfico e extremos de uma função procuramos criar um estudo mais dinâmico da função quadrática e dar uma noção da importância da derivada na análise de uma função.

No Capítulo IV, fizemos um breve comentário da importância da conexão entre a Matemática e a Física onde o estudo da cinemática fornece um ambiente rico para o desenvolvimento da noção de derivada como uma taxa de variação.

No Capítulo V, fazemos um estudo intuitivo de Limite de uma sequência, iniciando com as definições de Sequência, Sequência Limitada e Sequência Monótona. Posteriormente estabelecemos a idéia de Limite de uma sequência, destacando o Teorema da Convergência Monótona.

No Capítulo VI, destaca-se a função exponencial e^x, destacando inicialmente o número e (número de Euler) a partir de uma questão da Matemática Financeira(juros contínuos). Com o estudo proposto no capítulo IV, criamos o alicerce para apresentar o número de Euler como limite de uma sequência e caracterizá-lo como número irracional. Finalmente propomos algumas aplicações das funções do tipo exponencial.

Acreditamos que uma postura como essa poderá contribuir para minimizar os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo ministrada geralmente nos primeiros períodos de cursos de Ciências Exatas.

1 PRIMEIRAS NOÇÕES DE TAXA DE VARIAÇÃO

Antes de iniciarmos esse capítulo esperamos que tenha sido apresentado aos alunos algumas noções e notações de conjuntos incluindo uma breve revisão dos diferentes tipos de números (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) bem como a noção de plano cartesiano e função. Sabemos que a idéia de função surge quando duas grandezas se relacionam entre si de modo que a cada valor x de uma delas corresponde um único valor y da outra.

Para um melhor aprofundamento do que será exposto a seguir, sugerimos [5], [6], [11] e [3].

1.1 Introdução

A tabela abaixo mostra a relação entre a altura de uma pessoa e sua idade em anos.

* Qual é a variação da altura dessa pessoa durante os 5 primeiros anos de sua vida ?

$$\text{Variação da altura} = 103 - 45 = 58.$$

* Qual é a variação da altura entre as idades de 5 e 15 anos?

$$\text{Variação da altura} = 162 - 103 = 59.$$

* Em qual dos dois períodos essa pessoa estava crescendo mais rápido?

Os números 58 e 59 não determinam quando a pessoa estava crescendo mais rapidamente. Para responder a questão usaremos a taxa de variação média:

$$\text{para os primeiros 5 anos} = \frac{103-45}{5-0} = 11,6cm/ano;$$
$$\text{para o intervalo entre 5 e 15 anos} = \frac{162-103}{15-5} = 5,9cm/ano.$$

Idade (anos)	Altura (cm)
Nascimento	45
1	68
2	80
3	88
4	95
5	103
6	108
7	115
8	120
9	126
10	133
11	138
12	145
13	152
14	157
15	162
16	166
17	170
18	172
19	174
20	175

Figura 1: Tabela altura por idade.

Como essa pessoa cresceu em média 11,6 cm por ano até a idade de 5 anos e 5,9 cm por ano entre os 5 e os 15 anos, ela cresceu mais rapidamente durante seus 5 primeiros anos de vida.

Observação: Se escrevermos y para indicar a altura dessa pessoa e x para indicar a idade, indicaremos por Δy e Δx a variação no valor de y e de x respectivamente.

1.2 Definição

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto ($I = (m, n)$ ou $(m, +\infty)$ ou $(-\infty, n)$ ou $\mathbb{R}$) e a função real $f : I \to \mathbb{R}$. Sendo $a, b \in I$ com $b > a$, denomina-se *Taxa de Variação Média* de f no intervalo $[a, b]$, o quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A Taxa de Variação Média indica a "rapidez"com que a função cresce ou decresce num dado intervalo.

Exercícios propostos:

1. Calcule a taxa de variação média da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

a) $f(x) = x^3$ no intervalo $[2,4]$.
b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ no intervalo $[-1,3]$.

2. Considere as funções reais com domínio real dadas por $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$. Calcule a taxa de variação média dessas funções nos intervalos $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$ e conclua que embora as três cresçam no intervalo $[0,5]$, elas crescem de forma diferente.

1.3 Interpretação Geométrica da taxa de variação média

A taxa de variação média de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ num intervalo $[a,b] \subset I$, pode ser interpretada geometricamente considerando-se no plano cartesiano a reta r que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$:

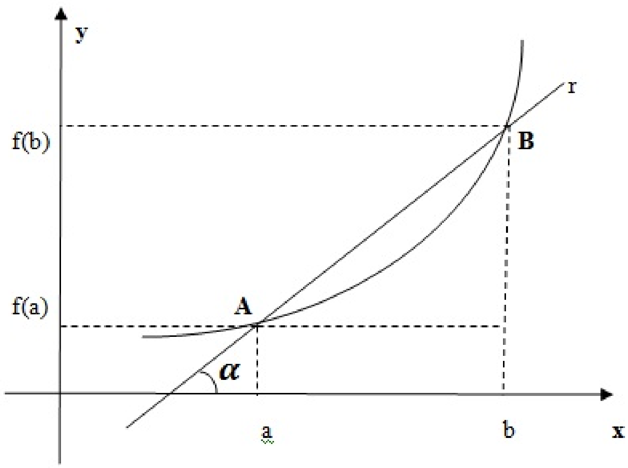

Figura 2: Reta secante

O ângulo α que a reta r forma com o semi-eixo positivo x é tal que: $\text{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (coeficiente angular ou declividade da reta que passa por A e B).

Exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.
a) Calcule a taxa de variação média de f no intervalo $[-2,0]$.
b) Esboce o gráfico de f e interprete o sinal da taxa de variação obtida no item a.

Solução:

a) $tvm = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{0-4}{2} = -2$

b)

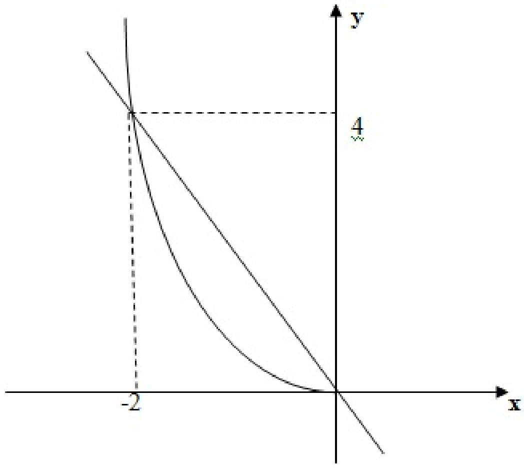

Figura 3: Gráfico de $f(x) = x^2$.

A taxa é negativa porque f é decrescente nesse intervalo, isto é, o coeficiente angular da reta tangente é negativo ($\alpha > 90°$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$)

2 *FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU (F.AFIM)*

Após a definição da função afim, isto é, função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$, e a inclusão de exemplos do cotidiano que podem ser modelados por essa função é importante mostrar que a taxa de variação desse tipo de função é constante, o que faz com que seu gráfico seja uma reta. Para um melhor aprofundamento do que será exposto a seguir, sugerimos [2], [1].

2.1 Taxa de Variação Média da Função Afim

Em uma padaria, a temperatura interna de um forno desligado era de $25°C$. A partir do momento em que o forno foi ligado, a temperatura aumenta 30° por minuto até atingir um valor máximo. Com base nessas informações, podemos concluir que a temperatura y (em graus Celsius) do forno é uma função do tempo x (em minutos) a partir do instante em que foi ligado ($x = 0$). Suponha que tal função seja dada por $y = 30x + 25$. Podemos construir a seguinte tabela:

Tempo (x)	0	1	2	3	4	5
Temperatura (y)	25	55	85	115	145	175

Figura 4: Tabela tempo-temperatura.

Observemos que a variação de y, (Δy) é proporcional à variação de x, (Δx):

* Quando x varia de 0 a 1, a variação correspondente de y é de 25 a 55, isto é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{55 - 25}{1 - 0} = 30.$$

* Quando x varia de 3 a 5, a variação correspondente de y é de 115 a 175, isto é,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{175 - 115}{5 - 3} = 30.$$

Tal proporcionalidade faz com que o gráfico seja uma reta.

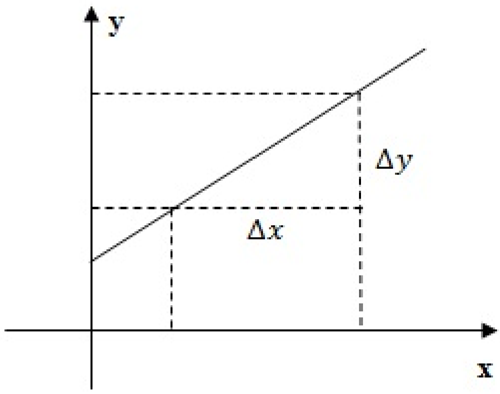

Figura 5: Gráfico da função afim.

2.2 Caracterização da Função Afim

Se f é uma função afim então $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante. De fato, sendo $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$, e x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, a taxa de variação média de f no intervalo $[x_1, x_2]$ é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Logo, a taxa de variação média de uma função afim é constante e igual ao coeficiente a.

Observação: Conforme vimos anteriormente a representa o coeficiente angular da reta que passa por $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ que, neste caso, coincide com o gráfico da função.

3 NOÇÕES DE DERIVADA

Concluído o estudo da função afim propomos que o capítulo sobre função quadrática seja restrito à definição, modelagem de problemas com tal função e o estudo do gráfico. É oportuno observar que a análise gráfica pode partir do caso mais simples da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$ e utilizando-se translações horizontais e verticais chegar ao caso geral da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Para um melhor aprofundamento do que será exposto a seguir, sugerimos: [1], [2], [5] e [6].

Exemplo:

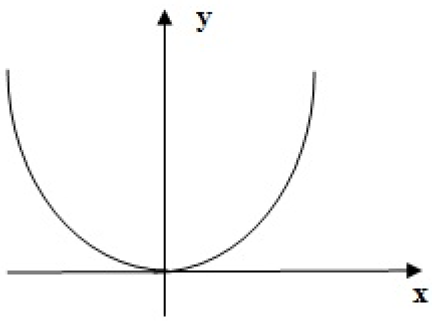

Figura 6: Função $y = x^2$.

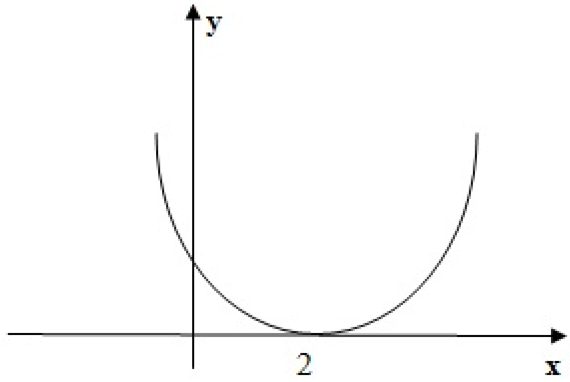

Figura 7: Função $y = (x-2)^2$.

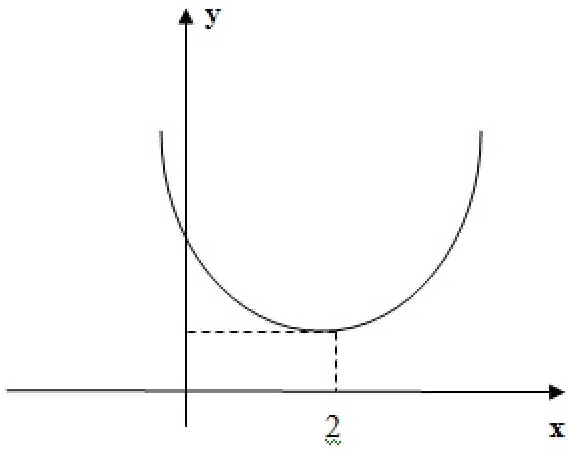

Figura 8: Função $y = x^2 - 4x + 5$ ou $y = (x-2)^2 + 1$.

O exemplo sugere que, para obtermos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, primeiramente devemos usar a técnica de completar o quadrado, como segue:

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Agora, fazemos o gráfico de $f(x) = ax^2$ e o transladamos de $\frac{b}{2a}$ unidades para a direita se $\frac{b}{2a} < 0$ ou para a esquerda se $\frac{b}{2a} > 0$. Em seguida, transladamos este último gráfico de $-\frac{\Delta}{4a}$ unidades para cima se $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ ou para baixo se $-\frac{\Delta}{4a} < 0$.

Feito esse trabalho, passamos a introduzir a idéia de reta tangente a uma curva.

3.1 Noção Intuitiva de Limite

Acompanhe o exemplo: considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ se } x \neq 2 \\ \\ 6 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

Como $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + a$ se $x \neq 2$, podemos escrever:
$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ se } x \neq 2 \\ 6 \text{ se } x = 2 \end{cases}$

Notemos que quando x se aproxima de 2, $f(x)$ se aproxima de 4, embora para $x = 2$ tenhamos $f(x) = 6$:

$f(1,9) = 3,9 \qquad f(1,99) = 3,99 \qquad f(1,999) = 3,999 \quad \ldots \quad f(1,99...9) = 3.99...9$

$f(2,1) = 4,1 \qquad f(2,01) = 4,01 \qquad f(2,001) = 4,001 \quad \ldots \quad f(2,00...01) = 4,00...01$

Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x "tende a 2" é 4 e simbolicamente escrevemos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

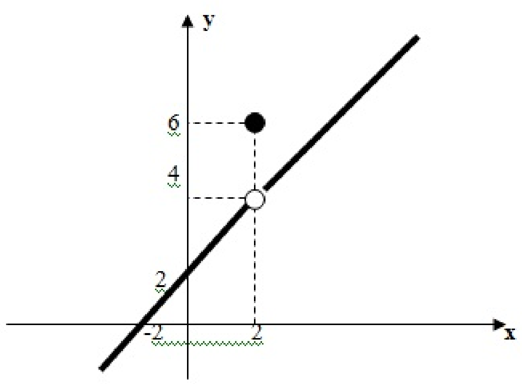

Figura 9: Limite de uma função.

Intuitivamente, o limite de uma função f quando x tende a a é igual ao número real L se, e somente se, os números reais $f(x)$ para os infinitos valores de x permanecerem próximos de L, sempre que x estiver muito próximo de a. Indicamos: $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Em outras palavras, podemos fazer com que a diferença $|f(x) - L|$ fique menor que qualquer número real positivo, desde que tomemos x suficientemente próximo de 2. No exemplo anterior, para que $|f(x) - 4| < 0,001$, basta tomarmos $1,999 < x < 2,001$. De fato:

$$|f(x) - 4| < 0,001 \Rightarrow |x + 2 - 4| < 0,001 \Rightarrow |x - 2| < 0,001$$

$$\Rightarrow -0,001 < x - 2 < 0,001 \Rightarrow 1,999 < x < 2,001.$$

De modo mais geral, dado arbitrariamente um número real positivo ϵ, $|f(x) - 4| < \epsilon$ sempre que $2-\epsilon < x < 2+\epsilon$. É importante observar que a expressão "x tende a a" $(x \to a)$ significa que x se aproxima de a por valores maiores que a ou por valores menores que a. Logo, quando calculamos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ não estamos calculando o valor que $f(x)$ possa ou não assumir em $x = a$.

* **Propriedade Importante:**

Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, quando x tende a a, $f(x)$ tende a L e $g(x)$ tende a M, isto é, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ então:

a) A função soma $f(x) + g(x)$ tende a $L + M$, isto é, $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L$.

b) A função produto $f(x) \cdot g(x)$ tende a $L \cdot M$, isto é, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.

c) A função quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tende para $\dfrac{L}{M}$, isto é, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.

*A demonstração de tais propriedades é feita num curso formal de limites.

Exemplo: Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$. Temos, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 9$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 8$ e $\lim\limits_{x\to 3}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to 3}[x^2+2^x] = 9+8 = 17$.

3.2 Reta Tangente a uma curva qualquer

Consideremos uma curva que corresponda ao gráfico de uma função f num intervalo de seu domínio. Seja $A(a, f(a))$ o ponto do gráfico de f, onde desejamos traçar a reta tangente à curva e $B(a + h, f(a + h))$ um outro ponto qualquer do gráfico. A reta que passa por A e B tem coeficiente angular: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (taxa de variação média no intervalo $[a, a + h]$) chamado de Razão incremental.

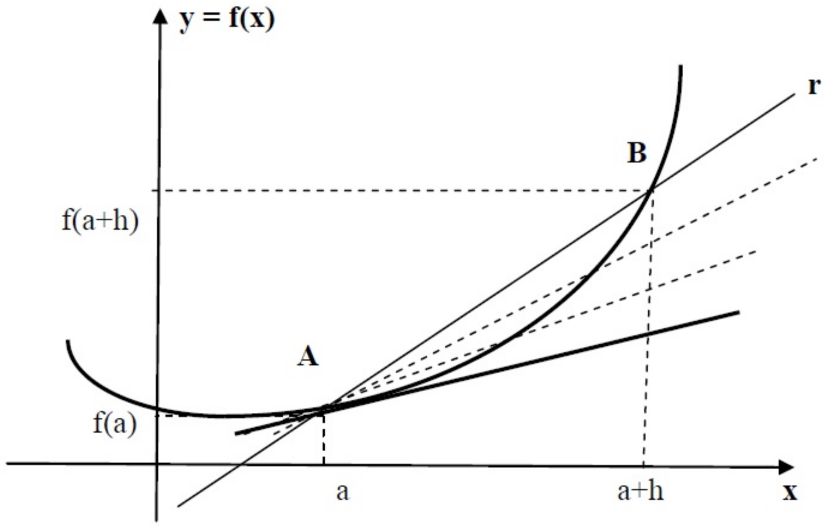

Figura 10: Aproximação por secantes.

Notemos que $f(a+h)-f(a)=\Delta y$ e $h=\Delta x$. Imaginemos agora que, fixado o ponto A, o ponto B aproxime de A, passando por sucessivas posições B_1, B_2, B_3 etc. Logo, a reta r assumirá as posições AB_1, AB_2, AB_3 etc e supondo que a razão incremental se aproxime de um determinado valor m, definimos a reta tangente à curva no ponto A como sendo aquela que passa por A e tem coeficiente angular m.

Observe que fazer B se aproximar de A equivale a fazer h se aproximar de zero. Dizemos que h tende a zero e escrevemos $h \to 0$. Os valores de h podem ser positivos ou negativos. Se imaginarmos h assumindo valores exclusivamente positivos, então o ponto B estará aproximando de A pela direita. Também podemos imaginar h assumindo valores exclusivamente negativos e, assim B aproximará de A pela esquerda.

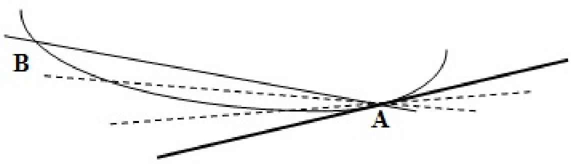

Figura 11: Reta tangente.

Se quando $h \to 0$, a razão incremental se aproxima de um valor finito m, dizemos que m é o limite da razão incremental com h tendendo a zero e escrevemos: $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. É importante destacar que h se aproxima de zero mas não se iguala a zero.

Observação: O processo descrito anteriormente equivale a analisar a taxa de variação média de f em intervalos cada vez menores e o número m nesse contexto é chamado de taxa de variação instantânea de f no ponto de abscissa $x = a$.

Exemplos:

1. Determinar a equação da reta tangente à parábola $y = f(x) = x^2$ no ponto de abscissa $x = 1$.

   Solução:

   1º Passo: determinar o ponto de abscissa $x = 1$, isto é, $f(1) = 1$ e portanto a reta é tangente à parábola no ponto $P(1, 1)$.

   2º Passo: determinar o coeficiente angular da reta tangente, isto é,

   $$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2 + h) = 2$$

   3º Passo: Obter a equação da reta (função afim), $y = ax + b$: Como $a = m = 2$ e $P(1, 1)$ pertence à reta temos: $2.1 + b = 1$ e daí $b = -1$ Portanto, a equação pedida é $y = 2x - 1$ ou $2x - y - 1 = 0$.

2. Determinar a equação da reta tangente à parábola $y = f(x) = x^2$ no ponto de abscissa $x = -1$.

   Solução:

   1º Passo: Ponto de tangencia $P(-1, f(-1))$, isto é, $P(-1, 1)$.

   2º Passo: Coeficiente angular da reta tangente: Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior,obtém-se $m = -2$.

   3º Passo: Equação da reta (função afim), $y = ax+b$: Como $a = m = -2$ e $P(-1, 1)$ pertence à reta temos: $(-2).(-1) + b = 1$ e daí $b = -1$. Portanto, a equação pedida é $y = -2x - 1$ ou $2x + y + 1 = 0$.

3. Determinar o coeficiente angular da reta tangente à parábola $y = f(x) = x^2$ num ponto genérico $x = a$.

   Solução:

   $$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a + h) = 2a.$$

   Portanto, o coeficiente angular da reta tangente é dado por $m = 2a$.

3.3 O Conceito de Derivada

Nos exemplos do item anterior observamos que o número m varia em função da abscissa $x = a$ do ponto em que se pretende traçar a reta tangente. Essa função é chamada de derivada da função f e é indicada por f'.

Em símbolos: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se esse limite existir.

Observação: Já que a representa um valor genérico de x, podemos simplesmente utilizar a própria letra x e escrevermos: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Exemplos:

1. Determinar a derivada da função $f(x) = x^2$, $f'(2)$ e $f'(-3)$.

   Solução:

   1º Passo: Calcular $f'(x)$:

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x.$$

   Logo, $f'(x) = 2x$.

   2º Passo: $f'(2) = 2.2 = 4$ e $f'(-3) = 2.(-3) = -6$.

2. a) Determine a derivada da função $f(x) = a.x$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e interprete o resultado.

   b) Determine a derivada da função $f(x) = b$ com $b \in \mathbb{R}$ e interprete o resultado.

   c) É fácil verificar (através da definição) que a derivada de uma soma de funções é a soma das derivadas. Com base nesse fato, e nos itens a e b, determine a derivada da função $f(x) = ax + b$ com $a \in \mathbb{R}^*$.

   Solução:

   a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{a(x+h) - ax}{h} = a$

   * O quociente $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pode ser interpretado como a taxa de variação média de f (tvm) no intervalo $[a, a+h]$ e como vimos no item 2.2, a taxa de variação média de uma função afim é constante e igual ao coeficiente a.

   b) $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{b - b}{h} = 0$

   *Como f é uma função constante, sua *tvm* é nula e geometricamente, como o gráfico de f é uma reta paralela ao eixo das abscissas, seu coeficiente angular é nulo.

   c) Sejam f_1 e f_2 duas funções quaisquer e f a função dada por $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Temos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[f_1(x+h)+f_2(x+h)]-[f_1(x)-f_2(x)]}{h}$$
$$= \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}.$$

Ao passar para o limite, usamos a propriedade de que o limite da soma é a soma dos limites e assim podemos concluir que: $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$.

Quanto a derivada da função $f(x) = ax + b$, fica fácil ver que, sendo $f_1(x) = ax$ e $f_2(x) = b$, temos $f'(x) = a + 0 = a$.

3. a) Sejam as funções f e g tais que $g(x) = k.f(x)$ com $k \in \mathbb{R}$. Mostre que $g'(x) = kf'(x)$.

   b) Com base nos resultados anteriores determine a derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   Solução:
   a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{kf(x+h)-kf(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} k.\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = kf'(x)$.
   b) Vimos no exemplo 1 que a derivada da função definida por x^2 é $2x$. Usando o resultado anterior, a derivada de ax^2 é portanto $2ax$ e pelo item c) do exemplo 2, sabemos que a derivada de $bx + c$ é igual a b. Finalmente podemos concluir que $f'(x) = 2ax + b$.

4. a) Usando a identidade $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (cubo da soma de dois termos) e a definição de derivada, determine a derivada da função $f(x) = x^3$.

   b) Determine a derivada da função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

   Solução:
   a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$.
   b) Usando o resultado do item a) do exemplo 3, a derivada de ax^3 é $3ax^2$. Já o item b) do exercício 3 nos permite concluir que a derivada de bx^2+cx+d é $2bx+c$. Finalmente, usando o item c) do exemplo 2, podemos concluir que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

3.4 Funções com derivadas iguais

Já vimos que a derivada de uma função constante é nula. Reciprocamente se a derivada de uma função f é nula em um certo intervalo, então a função é constante. Geometricamente, como $f'(x)$ representa o declive da reta tangente ao gráfico de f, se $f'(x) = 0$

em todo o intervalo, então esse gráfico só pode ser uma reta horizontal, ou seja, $f(x)$ é constante nesse intervalo.

Consideremos agora, duas funções f e g tais que $f'(x) = g'(x)$ em todo um intervalo de valores de x. Então a diferença $h(x) = f(x) - g(x)$ têm derivada zero, isto é, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Logo, $h(x)$ é uma função constante, isto é, $h(x) = f(x) - g(x) = k$ e daí, $f(x) = g(x) + k$, para todo x nesse intervalo.

Conclusão: Se duas funções têm a mesma derivada, então elas diferem por uma constante.

Exemplo: Encontre as funções mais gerais que têm como derivada a função $2x$.

Solução:

Observe que qualquer função do tipo $x^2 + k$ com $k \in \mathbb{R}$ é tal que sua derivada é igual a $2x$. Assim, funções como x^2, $x^2 + 1$, $x^2 - 5$, $x^2 + 10$ têm derivada igual a $2x$.

3.5 Função Crescente e Função Decrescente

3.5.1 Função Crescente

Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é crescente num determinado intervalo de seu domínio se $f(x)$ cresce à medida que x cresce. Formalmente, f é crescente em I se para quaisquer x_1 e $x_2 \in I$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

O gráfico de uma função crescente tem um aspecto ascendente no sentido positivo do eixo x.

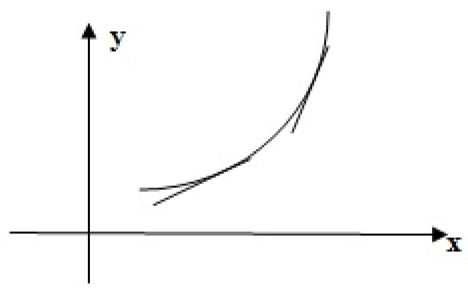

Figura 12: Função crescente.

Importante!

Observe que o fato do gráfico de f ser ascendente faz com que as retas tangentes tenham declividades positivas (ver figura), isto é, $f'(x) > 0$.

3.5.2 Função Decrescente

Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é decrescente num determinado intervalo de seu domínio se $f(x)$ decresce à medida que x cresce. Formalmente, f é decrescente em I se para quaisquer x_1 e $x_2 \in I$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

O gráfico de uma função decrescente tem um aspecto descendente no sentido positivo do eixo x.

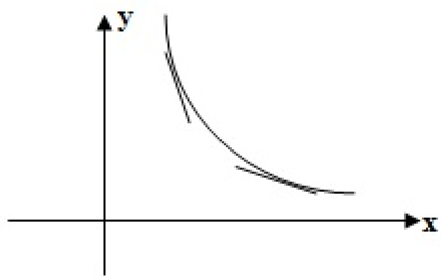

Figura 13: Função decrescente.

Importante!

Observe que o fato do gráfico de f ser descendente faz com que as retas tangentes tenham declividades negativas (ver figura), isto é, $f'(x) < 0$.

3.6 Concavidade do gráfico de uma função

A variação da derivada de uma função nos ajuda a determinar a concavidade de seu gráfico. Se a derivada for uma função crescente, significa que à medida que x cresce, a reta tangente ao gráfico de f vai girando no sentido anti-horário. Nesse caso, dizemos que o gráfico de f tem sua concavidade voltada para cima. Se a derivada é uma função decrescente, significa que à medida que x cresce, a reta tangente ao gráfico de f vai girando no sentido horário. Dizemos então, que o gráfico de f tem sua concavidade voltada para baixo.(ver figura).

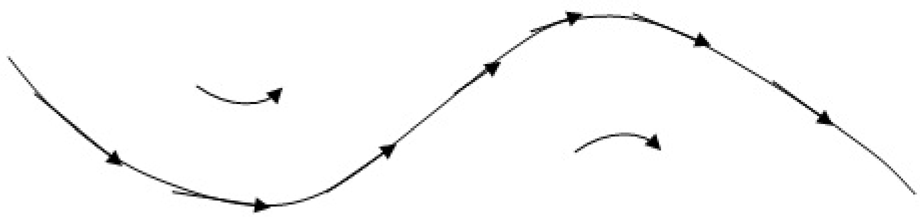

Figura 14: Concavidade.

3.7 Extremos das funções (Valores Máximo e Mínimo)

Definição : Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. O número $f(c)$ é chamado de valor máximo de f em I. Analogamente, f tem mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$ e o número $f(c)$ é chamado de valor mínimo de f em I.

3.6.2. Definição : Uma função f tem máximo local (ou relativo) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c (quando x estiver nas proximidades de c). Analogamente, f tem mínimo local (ou relativo) em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.

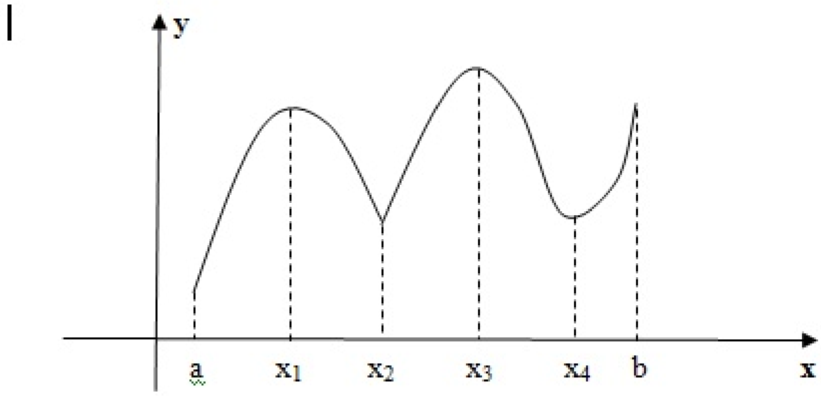

Figura 15: Máximos e mínimos.

A figura acima mostra o gráfico de uma função f com mínimo absoluto em a e máximo absoluto em x_3. No entanto, se restringirmos nossa atenção ao intervalo (a, x_2), veremos que $f(x_1)$ é o maior valor de f e é portanto um máximo local de f. Analogamente, $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são mínimos locais de f.

3.8 Estudo da função quadrática via derivadas

Consideremos inicialmente dois exemplos:

I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

* Derivada de f: $f'(x) = 4x - 3$.

* Sinal da derivada: $f'(x) < 0$ para $x < \frac{3}{4}$ e $f'(x) > 0$ para $x > \frac{3}{4}$. Logo f é decrescente para $x < \frac{3}{4}$ e crescente para $x > \frac{3}{4}$, isto é, $f(x) > f(\frac{3}{4})$ para todo $x < \frac{3}{4}$ e $f(x) > f(\frac{3}{4})$ para todo $x > \frac{3}{4}$.

* Outro aspecto importante é que f atinge um valor mínimo em $x = \frac{3}{4}$ pois $f(x) \geq f(\frac{3}{4})$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tal valor mínimo é dado por $f(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{8}$. Note que o valor mínimo ocorre num ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal ($f'(\frac{3}{4}) = 0$).

* Como f' é uma função crescente, decorre que o gráfico de f têm concavidade voltada para cima.

II) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 - x + 6$.

* Derivada de f: $f'(x) = -2x - 1$.

* Sinal da derivada: $f'(x) > 0$ para $x < -\frac{1}{2}$ e $f'(x) < 0$ para $x > -\frac{1}{2}$. Logo f é decrescente para $x > -\frac{1}{2}$ e crescente para $x < -\frac{1}{2}$, isto é, $f(x) < f(-\frac{1}{2})$ para todo $x > -\frac{1}{2}$ e $f(x) < f(-\frac{1}{2})$ para todo $x < -\frac{1}{2}$.

* f atinge um valor máximo em $x = -\frac{1}{2}$ pois $f(x) \leq f(-\frac{1}{2})$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde a tangente é horizontal ($f'(x) = 0$). Tal valor é dado por $f(-\frac{1}{2}) = 5/4$. Note que o valor máximo ocorre num ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é horizontal ($f'(-\frac{1}{2}) = 0$).

* Como f' é uma função decrescente, decorre que o gráfico de f têm concavidade voltada para baixo.

Observação: Os exemplos anteriores ilustram o fato de que a função atinge um valor extremo (máximo ou mínimo) quando a derivada se anula, isto é quando a reta tangente é horizontal.

Consideremos agora o caso geral da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuja derivada é como sabemos $f'(x) = 2ax + b$:

Se $a > 0$ podemos concluir que:

* Para $x < -\dfrac{b}{2a}$, $f'(x) < 0$ e f é decrescente.

* Para $x > -\dfrac{b}{2a}$, $f'(x) > 0$ e f é crescente.

* $f(-\dfrac{b}{2a})$ é o valor mínimo.

* O gráfico têm concavidade voltada para cima (f' é uma função crescente).

Se $a < 0$ podemos concluir que:

* Para $x < -\dfrac{b}{2a}$, $f'(x) > 0$ e f é crescente.

* Para $x > -\dfrac{b}{2a}$, $f'(x) < 0$ e f é decrescente.

* $f(-\dfrac{b}{2a})$ é o valor máximo.

* O gráfico têm concavidade voltada para baixo (f' é uma função decrescente).

Observação: O ponto de abscissa $x = -\dfrac{b}{2a}$ é o chamado Vértice da Parábola.

Exemplos Contextualizados:

1. Um fazendeiro quer construir um galinheiro de forma retangular. Dispondo de $60m$ de tela, ele decide aproveitar um muro como uma das laterais do galinheiro, conforme a figura abaixo. Obtenha uma expressão que relacione a área y do galinheiro com a medida x de um dos lados e determine o valor de x para que a área seja máxima.

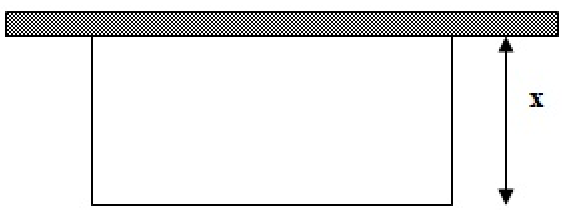

Figura 16: Galinheiro retangular.

Solução:

Como a largura do retângulo mede x, seu comprimento mede $60 - 2x$. Portanto a área y é dada por $y = x.(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$. Conforme visto anteriormente, como $a = -2 < 0$, tal função atinge um valor máximo que será obtido pela raiz de sua derivada, isto é, $-4x + 60 = 0$. Logo $x = 15m$.

2. Um ônibus de 40 lugares transporta diariamente turistas de um determinado hotel para um passeio ecológico pela cidade. Se todos os lugares estão ocupados, o preço de cada passagem é R$ 20,00. Caso contrário, para cada lugar vago será acrescida a importância de R$ 1,00 ao preço de cada passagem. Calcule o número de lugares vagos no ônibus, em cada viagem, para que a empresa obtenha faturamento máximo.

   Solução:

   Sendo x o número de lugares vagos e y o faturamento da empresa, temos:

   $$y = (40 - x).(20 + x) = -x^2 + 20x + 800.$$

   O valor de x para o qual y é máximo é tal que $-2x + 20 = 0$ (derivada nula), isto é, $x = 10$.

3. Uma rodovia Norte-Sul intercepta outra rodovia Leste-Oeste num ponto P. Um automóvel, viajando na direção Leste, passa em P às 10h00 à velocidade constante de $70km/h$. Nesse mesmo instante, outro automóvel encontra-se $200km$ ao norte de P, viajando na direção Sul a $90km/h$. Determine o instante em que os dois carros estarão mais próximos um do outro, e obtenha um valor aproximado da distância mínima entre os veículos.

   Solução:

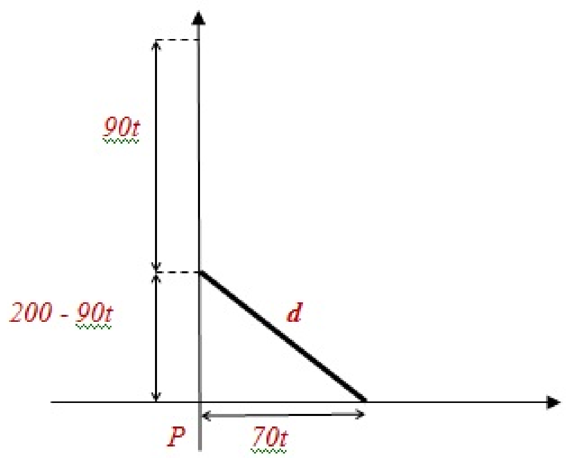

Figura 17: Rodovias.

Vamos representar as rodovias por dois eixos perpendiculares com P na origem. Se t representa o número de horas decorridas após $10h$, então o primeiro automóvel está a $(70t)km$ a leste de P e o segundo está a $(90t)km$ ao sul de sua posição às $10h$.

Logo, a distância d que os separa é tal que $d^2 = (200 - 90t)^2 + (70t)^2$, isto é, $d^2 = 12500t^2 - 36000t + 40000$.

Sendo $f(t) = d^2$, o valor mínimo de f (e consequentemente de d), ocorre quando $f'(t) = 0$, isto é:

$$25000t - 36000 = 0 \Rightarrow t = \frac{36}{25} \Rightarrow t = 1h\,26min\,24s.$$

4 A DERIVADA NA CINEMÁTICA

No capítulo anterior associamos a noção de derivada ao problema de traçar a reta tangente ao gráfico de uma função. Agora, voltaremos a destacar a questão da variação de uma função utilizando como exemplo a idéia de velocidade instantânea. Para um melhor aprofundamento do que será exposto a seguir, sugerimos: [1], [2] e [11].

Consideremos um objeto que se move numa trajetória qualquer. Seja s o espaço percorrido desde um instante inicial até um certo instante t. Temos então uma função $s(t)$. Dando ao tempo t um acréscimo Δt , o espaço s sofrerá um acréscimo correspondente Δs dado por: $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$.

A velocidade média v_m, nesse intervalo de tempo é dada por $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (taxa de variação média da função s de t a $t+\Delta t$). Se calcularmos v_m para intervalos de tempo cada vez menores ($\Delta t \to 0$) estaremos aproximando da velocidade do móvel no instante t. Assim, definimos a velocidade no instante t da seguinte forma: $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$.

Ora, a expressão acima é a derivada da função s no ponto de abscissa t. Em símbolos: $v(t) = s'(t)$.

Analogamente a aceleração média a_m no intervalo de tempo Δt é dada por $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ (taxa de variação média da função v de t a $t+\Delta t$). Assim, definimos a aceleração no instante t da seguinte forma: $\displaystyle a(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a(t) = v'(t)$.

Observações:

* No *Movimento Uniforme* (velocidade constante), sendo s_0 o espaço inicial ou valor de $s(t)$ para $t=0$,a distância percorrida após um tempo t é dada por $\Delta s = s - s_0$. Assim, $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s - s_0}{t} \Rightarrow s = s_0 + vt$ e note que $s'(t) = v$.

* No *Movimento Uniformemente Variado* (aceleração constante) sendo $v = v(t)$ a velocidade num instante t e v_0 a velocidade inicial (ou valor de $v(t)$ para $t=0$),temos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at$$

e note que $v'(t) = a$. A questão é, como obter a equação horária do movimento, isto é a expressão de $s(t)$?

Como $v(t) = s'(t)$, devemos ter $s'(t) = v_0 + at$, isto é, $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} + k$ onde k é uma constante qualquer. Mas, para $t = 0$, temos $s(0) = k$, isto é, $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2} + s_0$ (equação horária do movimento uniformemente variado, a qual é comumente escrita $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$).

* A Queda Livre dos Corpos e o Lançamento na Vertical são exemplos típicos de Movimento uniformemente variado. Em ambos, despreza-se a resistência do ar e considera-se a aceleração da gravidade constante e igual a aproximadamente $10m/s^2$ (variação de aproximadamente $36km/h$ a cada segundo).

Exemplos:

1. Um móvel obedecendo à função horária $s = 2t^2 - 3t$ (unidades SI). Determine o instante em que a velocidade atinge $37m/s$.

   Solução:

   Como $v(t) = s'(t) = 4t - 3$, devemos ter, $4t - 3 = 37$, isto é, $t = 10s$.

2. Um objeto é lançado verticalmente para cima a partir do solo, com, velocidade inicial de $30m/s$. Despreze a resistência do ar e considere a origem de espaços no solo com trajetória orientada para cima. Determine:

   a) o tempo de subida e a altura máxima atingida;

   b) o instante e a velocidade quando o objeto atinge o solo.

   Solução:

   a) Orientando a trajetória para cima, a aceleração será $-10m/s^2$ (aceleração da gravidade). Temos ainda, $s_0 = 0$ e $v_0 = 30m/s$.

   Como $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, temos $s(t) = 30t - 5t^2$ e $v(t) = s'(t) = 30 - 10t$.

   Para obtermos o valor máximo de $s(t)$, fazemos $s'(t) = 0$, isto é, $t = 3s$ (tempo de subida). Assim, a altura máxima é atingida quando $t = 3s$ e é dada por $s(3) = 30.3 - 3^2 = 81m$.

   b) Quando o objeto atinge o solo, temos $s(t) = 0$, isto é, $t = 0$ ou $t = 6$. Logo, o objeto atinge o solo no instante $t = 6s$ e sua velocidade é $v(6) = -30m/s$. Note que a velocidade de lançamento e de chegada ao solo têm o mesmo módulo e o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

3. Um corpo é lançado obliquamente com velocidade inicial v_0 numa direção que forma com a horizontal um ângulo α. Desprezando a resistência do ar, prove que sua trajetória é uma parábola.

   Solução:

   O movimento pode ser considerado como resultante de dois outros: um movimento horizontal uniforme representado pela equação $x = (v_0.\cos\alpha).t$; e um vertical uniformemente variado representado pela equação $y = (v_0.\text{sen}\alpha).t - \dfrac{gt^2}{2}$. Pela equação do movimento horizontal, temos $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$. Substituindo na equação do movimento vertical, obtemos $y = (\text{tg}\alpha)x - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Fazendo $\text{tg}\alpha = b$ e $\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} = a$, temos y $= bx - ax^2$ que é a equação de uma parábola que passa pela origem.

4. Um corpo se move em linha reta de tal forma que sua posição no instante t é dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$ (unidades SI).

   a) Determine a velocidade e a aceleração do corpo no instante t = 4s.

   b) Determine os instantes em que o corpo está estacionário.

   Solução:

   a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ e $a(t) = v'(t) = 6t - 12$. Logo, $v(4) = 3.4^2 - 12.4 + 9 = 9m/s$ e $a(4) = 6.4 - 12 = 12m/s^2$.

   b) Devemos ter $v(t) = 0$, isto é: $3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t = 1s$ ou $t = 3s$.

5 NOÇÕES DE SEQUÊNCIA

5.1 Sequências de números reais

Para um melhor aprofundamento do que será exposto a seguir, sugerimos: [7], [4] e [9].

Chama-se sequência de números reais a toda função real cujo domínio é o conjunto dos números naturais $I\!N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Vamos indicar uma sequência com o símbolo $(a_n)_n \in I\!N$ ou (a_n) ou $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Exemplos:

a) $a_n = 2n - 1$.

$(1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots)$ (sequência dos números ímpares positivos).

b) $a_n = 4 - 3n$.

$$(1, -2, -5, \ldots, 4-3n, \ldots)$$

c) $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots, a_n =?, \ldots)$ (sequência dos números primos positivos).

d) $a_n = (-2)^n$.

$$(-2, 4, -8, 16, -32, \ldots, (-2)^n, \ldots)$$

e) $a_n = \dfrac{1}{n}$.

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$$

f) $a_n = (-\dfrac{1}{2})^{(n-1)}$.

$$(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, (-2)^{(1-n)}, \ldots)$$

g) $a_1 = a_2 = 1$ e $a_n = a_{(n-1)} + a_{(n-2)}$.

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ (sequência de Fibonacci).

5.2 Sequências Limitadas

* Sequência Limitada Superiormente: Uma sequência $(a_n)_n \in I\!N$ é limitada superiormente quando existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq K$ para todo $n \in I\!N$.

Exemplos:

a) A sequência $(2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; \dots)$ é limitada superiormente pelo número 3, pois $a_n \leq 3$ para todo $n \in I\!N$.

b) A sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ é limitada superiormente pelo número 1, pois $\frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \in I\!N$.

* Sequência Limitada Inferiormente: Uma sequência $(a_n)_n \in I\!N$ é limitada inferiormente quando existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq K$ para todo $n \in I\!N$.

Exemplos:

a) A sequência $(2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots)$ é limitada inferiormente pelo número 2, pois $2^n \geq 2$ para todo $n \in I\!N$.

b) A sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ é limitada inferiormente pelo zero, pois $\frac{1}{n} \geq 0$ para todo $n \in I\!N$.

Observação: Se $(a_n)_n \in I\!N$ for limitada superiormente e inferiormente, dizemos simplesmente que é limitada e nesse caso existirá um número real K tal que $|a_n| \leq K$ para todo $\in I\!N$.

Exemplo: A sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ é limitada $(K = 1)$.

5.3 Sequências Monótonas

Uma sequência $(a_n)_n \in I\!N$ diz-se Monótona quando para todo $n \in I\!N$, $a_n \leq a_{(n+1)}$ (monótona não decrescente) ou $a_n \geq a_{(n+1)}$ (monótona não crescente). Em particular se $a_n < a_{(n+1)}$ para todo $n \in I\!N$, dizemos que a sequência é crescente e se $a_n > a_{(n+1)}$ para todo $n \in I\!N$, dizemos que é decrescente.

Exemplos:

a) A sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ é decrescente pois:

$$n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n > a_{(n+1)} \text{ para todo } n \in I\!N.$$

b) A sequência $(3, 6, 12, 24, \dots, 3.2^{(n-1)}, \dots)$ é crescente pois:

$$2^{(n-1)} < 2^n \Rightarrow 3.2^{(n-1)} < 3.2^n \Rightarrow a_n < a_{(n+1)}$$

c) A sequência $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots)$ é monótona não decrescente

Observação: A sequência $a_n = (-1)^n.n$ não é monótona. $(-1, 2, -3, 4, -5, \dots)$ sequência alternada ou oscilante.

5.4 Limite de uma sequência

Informalmente, dizemos que um número real L é o limite de uma sequência (a_n) quando os termos a_n da sequência vão se tornando cada vez mais próximos de L à medida que n aumenta indefinidamente ou "tende para infinito". Simbolicamente, escrevemos: $\lim a_n = L$ e dizemos que a sequência converge para L.

Exemplo: $lim\frac{1}{n} = 0$, pois à medida que n cresce, $a_n = \frac{1}{n}$ torna-se cada vez menor. Por exemplo, para $n = 1000$ temos $a_n = 0,001$, para $n = 10000$ temos $a_n = 0,0001$ e assim por diante.

Efetivamente, nenhum termo da sequência é igual a zero, mas pode se tornar tão próximo de zero quanto quisermos. Geometricamente, se representarmos os termos da sequência pelos seus pontos correspondentes na reta, observaremos que os termos da sequência vão se "aglomerando" em torno do ponto zero. Escolhendo sobre a reta qualquer intervalo I com centro no ponto zero e comprimento total 2ϵ (uma distância ϵ de cada lado do ponto zero), isto é, $(-\epsilon, \epsilon)$ sempre encontraremos a partir de um certo índice, todos os termos da sequência situados nesse intervalo. De fato, tomando por exemplo $\epsilon = \frac{1}{100}$, os termos a_n com $n > 100$ pertencerão a esse intervalo. Mais geralmente, dado $\epsilon > 0$, basta escolhermos n tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$, isto é, $n > \frac{1}{\epsilon}$, para obtermos termos da sequência que pertencerão ao intervalo.

Exemplos:

a) $\lim \frac{n}{n+1} = 1$

$$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$$

b) $\lim(\frac{1}{2})^n = 0$

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$$

c) A sequência dada por $a_n = 2^n$ isto é, $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ não tem limite pois seus termos crescem ilimitadamente. Dizemos, nesse caso que a sequência diverge.

5.5 Teorema da Convergência Monótona (Dedekind)

Toda sequência monótona e limitada de números reais possui limite (converge). Consideremos, sem perda de generalidade uma sequência (a_n) monótona crescente e limitada, isto é, os termos da sequência aumentam quando n cresce mas são todos menores que um certo número real K (cota superior). Intuitivamente, tal sequência deve tender para um certo limite L que será menor ou no máximo igual a K.

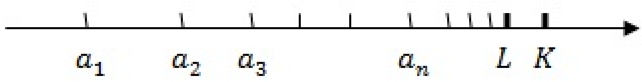

Figura 18: Sequência monótona.

Observação: Formalmente, seja m o menor número real tal que $a_n \leq m$ (conhecido como supremo) para todo $n \in I\!N$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in I\!N$ tal que $a_{n_0} > m - \epsilon$. Como a sequência (a_n) é crescente, segue que $n > n_0 \Rightarrow m - \epsilon < a_{n_0} < a_n < m + \epsilon \Rightarrow |a_n - m| < \epsilon$, isto é, $\lim a_n = m$. Em outras palavras, dado qualquer número positivo ϵ, é sempre possível encontrarmos termos da sequência cuja distância a m é menor que ϵ. À medida que tomamos ϵ cada vez menor, obtemos a_n cada vez mais próximos de m.

6 *A FUNÇÃO EXPONENCIAL* e^x

Após a tradicional abordagem da função exponencial (de base qualquer) e da função logarítmica é oportuno destacar o número e e a correspondente função e^x. Para um melhor aprofundamento do que será exposto a seguir, sugerimos: [7], [4], [8] e [10].

6.1 O Número de Euler (e)

Consideremos a seguinte questão: Qual é a lei segundo a qual cresce um capital quando o juro é acrescido ao capital continuamente?

Suponhamos que um capital C seja aplicado a taxa de 100% ao ano. No final de um ano o investidor receberá o montante de $2C$. Mas se o investidor resolver resgatar seu capital após 6 meses ele terá direito a metade dos juros, isto é, $C + \frac{C}{2} = C(1 + \frac{1}{2})$. Agora, se ele investir o capital $C(1 + \frac{1}{2})$ por mais um semestre ele receberá no final de um ano $C(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}C(1 + \frac{1}{2}) = C(1 + \frac{1}{2})^2$ ao invés de $2C$. Notemos que $C(1 + \frac{1}{2})^2 = 9\frac{C}{4} = 2,25C > 2C$.

Podemos supor ainda que o investidor resgate e reaplique seu capital mensalmente, isto é, a cada mês ele receberá (100/12)% de juros, e seu montante ao final do ano será $M = C(1 + \frac{1}{12})^{12} = 2,613C$. Generalizando, podemos imaginar que o capital foi resgatado e reinvestido um número n de iguais períodos de tempo durante o ano e portanto terá um montante de $C(1 + \frac{1}{n})^n$.

Observemos na tabela abaixo o valor dessa expressão para alguns valores de n.

Demonstra-se que, para n tendendo a infinito, os valores da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ tenderá a um número irracional 2,718281828... chamado Número de Euler e indicado pela letra e. Simbolicamente escrevemos $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

Número de períodos de tempo	Montante
n = 1	2C
n = 2 ...	2,25C
n = 12 ...	2,61303529C
n = 100 ...	2,704813829C
n = 360 ...	2,714516025C
n = 1000 ...	2,716923932C
n = 10000 ...	2,718145927C
n = 100000 ...	2,718268237C
n = 1000000	2,718280469C

Figura 19: Tabela aproximação do numero e.

6.2 A Irracionalidade do número e

Consideramos a sequência: $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Tal sequência é monótona crescente pois $a_n < a_{(n+1)}$ para todo n. Por outro lado, como $n! > 2^{(n-1)}$ para todo $n \geq 3$ então $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{(n-1)}}$ e segue que $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

Mas as parcelas do 2º membro da desigualdade anterior a partir da segunda formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ cuja soma é dada por:

$$\frac{1.((\frac{1}{2})^n - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = 2.\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Portanto, $2 < a_n < 1 + 2 = 3$. Como toda sequência monótona crescente e limitada tende para um limite quando $n \to \infty$, a_n converge para um limite que indicaremos por e, com $2 < e \leq 3$.

Consideremos agora a sequência $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Aplicando a fórmula do binômio de Newton, temos:

$$b_n = C_{n,0} + C_{n,1}).n^{-1} + C_{n,2}.n^{-2} + C_{n,3}.n^{-3} + \cdots + C_{n,n}.n^{-n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})\ldots(1 - \frac{n-1}{n}).$$

Como todas as expressões dentro dos parênteses são menores que 1, segue que $b_n < a_n$. Logo, $b_n < 3$ para todo $n \in I\!N$ e como $b_n < b_{n+1}$, a sequência $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é limitada e monotona crescente, isto é, converge para um limite que mostraremos ser igual a e. Em primeiro lugar, como $b_n < a_n$ para todo n, segue que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$, pois caso contrário, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, teríamos $0 < \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)$ e assim, $(b_n - a_n) > 0$ para todo n suficientemente grande. Por outro lado, seja $m < n$ um inteiro fixo. Então,

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdot + \frac{1}{m!}(1 - \frac{1}{n}) \ldots (1 - \frac{m-1}{n}).$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, obtemos $limbn \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}$ isto é, $\lim b_n \geq a_m$ para todo $m \in I\!N$. Daí segue que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq \lim\limits_{m\to\infty} a_m = e$. Conclusão: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$ com $2 < e \leq 3$.

Provaremos agora que e é um número irracional. Como $2 < e \leq 3$, mostremos inicialmente que $e \neq 3$. De fato, se fosse $e = 3$ teríamos:

$$3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Logo, temos $2 < e < 3$.

Suponhamos que e seja racional, isto é, $e = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Como o número e não pode ser inteiro pois $2 < e < 3$, temos $q \neq 1$. Agora, multiplicando ambos os membros da igualdade $e = 1 + 1/1! + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$. por $q!$ obtemos:

$$p(q-1)! = [q! + q! + 3.4 \ldots q + 4.5 \ldots q + \cdots + (q-1)q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

Ora, o primeiro membro é um número inteiro enquanto no segundo membro a expressão dentro dos colchetes é um número inteiro mas a soma após os colchetes não é um número inteiro. De fato, como $q \geq 2$, temos:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \cdots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3}.\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Assim, $0 < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{2}$ e conseqüentemente a soma

$$[q! + q! + 3.4 \cdots q + 4.5 \cdots q + \cdots + (q-1)q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

não é um número inteiro. Logo e não pode ser um número racional.

6.3 Taxa de Variação das Funções Exponenciais

Sabemos que a taxa de variação de f em relação a x dada por $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ indica a tendência da variação de f a partir do ponto x. No caso da função $f(x)=e^x$, temos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x.\left(\frac{e^h-1}{h}\right).$$

Mostremos que $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$.

Fazendo $e^h - 1 = \dfrac{1}{y}$, temos $h \to 0 \Leftrightarrow y \to \infty$ e $h = \ln(1+\dfrac{1}{y})$. Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(y\ln(1+\frac{1}{y})} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{y})^y} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Assim, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x$.

Generalizando para uma função do tipo $f(x) = ke^{\alpha x}$, a taxa de variação é dada por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ke^{\alpha(x+h)} - ke^{\alpha x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ke^{\alpha x}(e^{\alpha h}-1))}{h} = f(x).\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha h}-1}{h}.$$

Agora, fazendo $\alpha h = y$, temos $h \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$ e $h = \dfrac{y}{\alpha}$. Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha h}-1}{h} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{\frac{y}{\alpha}} = \alpha.\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = \alpha.1 = \alpha.$$

Assim, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha.f(x)$, isto é, $f'(x) = \alpha f(x)$ ou usando a notação de Leibniz $\dfrac{dy}{dx} = \alpha y$.

Conclusão: A taxa de variação de uma função do tipo exponencial é, em cada ponto x, proporcional ao seu valor naquele ponto e o coeficiente α é o fator de proporcionalidade.

Observação: Tal fato justifica a preferência de Matemáticos e Cientistas em escrever as funções do tipo exponenciais na forma $f(x) = ke^{\alpha x}$ já que esta expressão exibe explicitamente o valor inicial $k = f(0)$ bem como a taxa de crescimento de f expressa pelo coeficiente α.

6.4 Aplicações da Função Exponencial

1. Crescimento Populacional

Suponhamos que numa população P não haja imigração ou emigração. Nesse caso, a taxa à qual a população cresce é proporcional ao tamanho da população, pois quanto mais individuos houver na população maior será o poder reprodutivo. Assim, se a população tiver uma taxa de crescimento contínua de 1% por unidade de tempo, podemos escrever $P'(t) = 0,01P(t)$ onde $P(t)$ indica o número de indivíduos após um tempo t. Usando a notação de Leibniz: $\dfrac{dP}{dt} = 0,01P$.

Tal equação tem como solução geral $P = ke^{0,01t}$ e é fácil ver que $k = P(0)$ (população inicial).

2. Composição contínua de Juros

Anteriormente abordamos a composição contínua através da idéia de limite onde os juros eram somados em intervalos de tempo cada vez menores. Agora, vamos imaginar que os juros são calculados a uma taxa proporcional ao crédito no momento, isto é quanto maior o crédito mais depressa o crédito cresce. Para fixar as idéias, suponhamos que um investidor receba juros continuamente a uma taxa de 2% do crédito corrente, por ano. Sendo $S(t)$ o crédito na conta no tempo t, temos $S'(t) = 0,02S(t)$, isto é, $S(t) = ke^{0,02t}$ onde k representa o valor do depósito inicial.

3. Desintegração radioativa

Os átomos de uma substância radioativa, como o plutônio ou o urânio se desintegram naturalmente emitindo partículas e transformando-se em outras substâncias não radioativas. Essa desintegração se dá de modo que o número de átomos que se desintegram na unidade de tempo é proporcional ao número de átomos existentes a cada instante. Assim, a massa radioativa M é uma função do tempo t com derivada proporcional à própria massa M, isto é, $\dfrac{dM}{dt} = -\alpha M$ (o sinal negativo indica que a massa M diminui com o tempo). Tal equação tem como solução geral $M = ke^{-\alpha t}$.

Observações:

I) O tempo T necessário para que a massa fique reduzida à metade de seu valor original é chamado de meia vida da substância. A partir de T podemos calcular a taxa α: Sendo

M_0 a massa inicial, temos: $M_0^2 = M_0 e^{-\alpha T} \Leftrightarrow e^{\alpha} T = 2 \Leftrightarrow \alpha = ln2/T$.

II) O carbono 14, indicado por $C14$, é um isótopo radioativo do carbono. Os seres vivos absorvem e perdem $C14$ de modo que, em cada espécie, a taxa de $C14$ se mantém constante. Com a morte do ser vivo, a absorção acaba e o $C14$ nele existente continua a desintegrar-se. Tal fato é usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo de madeira. Com uma meia vida de 5570 anos, o $C14$ desintegra-se a uma taxa de $\alpha = \dfrac{\ln 2}{5570} = 0,000124$.

4. Quantidade de uma droga no corpo

Após cessar a administração de uma droga no corpo de um indivíduo, a taxa à qual a droga deixa o corpo é proporcional à quantidade da droga que permanece no corpo. Se Q representa a quantidade da droga remanescente, então $\dfrac{dQ}{dt} = -\alpha Q$ representa a taxa à qual a droga está sendo eliminada. Resolvendo a equação, obtemos $Q = Q_0 . e^{-\alpha t}$.

REFERÊNCIAS

[1] ÁVILA, Geraldo. *Introdução às Funções e à Derivada*. São Paulo: Atual, 1994.

[2] ÁVILA, Geraldo. *O ensino do Cálculo no 2º grau*. Revista do Professor de Matemática, nº18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992.

[3] BATSCHEIET, Edward. *Introdução à Matemática para Biocientista*. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

[4] COURANT, Richard e Robbins,Herbert. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

[5] FLEMMING, Diva Marília. *Cálculo A: Funções, Limite, derivadas, Integração*. 5ª edição, São Paulo: Pearson Makron Books, 1992.

[6] HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo. Um curso moderno e suas aplicações*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1990.

[7] LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítica* Vol. I. São Paulo: Harbra, 1982.

[8] LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[9] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*, Volume 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (CNPq), 1989.

[10] MAOR, Eli. *e: A história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2003.

[11] PAIVA, Manoel Rodrigues.*Matemática* 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.