UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

POS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FRANCISCO ALMEIDA BESSA JUNIOR

UMA ABORDAGEM DO INFINITO NO CAMINHO DA CARDINALIDADE: UM ESTUDO ENDEREÇADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

Juiz de Fora

2011

FRANCISCO ALMEIDA BESSA JUNIOR

UMA ABORDAGEM DO INFINITO NO CAMINHO DA CARDINALIDADE: UM ESTUDO ENDEREÇADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. Área de Concentração: Educação Matemática – Linha de Pesquisa: Ensino Aprendizagem da Matemática. Análise dos condicionantes da sala de aula e Intervenção Pedagógica em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares

Juiz de Fora

2011

FICHA CATALOGRÁFICA

Bessa Junior, Francisco de Almeida.
Uma abordagem do infinito no caminho da cardinalidade: um estudo endereçado aos professores de Matemática do ensino básico / Francisco de Almeida Bessa Junior. – 2011.
105f. : il.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

1. Formação de professores. 2. Aprendizagem. 3. Infinito. I. Título.

CDU 371.13/.14

FRANCISCO ALMEIDA BESSA JUNIOR

UMA ABORDAGEM DO INFINITO NO CAMINHO DA CARDINALIDADE: UM ESTUDO ENDEREÇADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. Área de Concentração: Educação Matemática – Linha de Pesquisa: Ensino Aprendizagem da Matemática. Análise dos condicionantes da sala de aula e Intervenção Pedagógica em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares

Aprovada em ____/____/____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares
Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Romelia Mara Alves Souto
Universidade Federal de São João del-Rey

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho
Universidade Federal de Juiz de Fora

À minha esposa, a meus filhos, meus professores e meus amigos, pelo apoio recebido durante a elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por estar presente em todas as etapas da minha vida, em particular esta, dando-me forças nos momentos difíceis da elaboração deste trabalho.

A meu Orientador, Professor Dr. Carlos Alberto Santana Soares, responsável direto pelos conhecimentos que adquiri ao longo destes pouco mais de dois anos, incansável nos momentos difíceis desta caminhada.

A minha família, Eliana, Rafaela e Felipe, que compreenderam o sacrifício imposto para realização desta pesquisa, estando sempre a meu lado nos momentos mais difíceis.

Aos amigos que conquistei durante esta jornada, em particular à professora Leila Rose Márie Batista da Silveira Maciel, que tanto me ajudaram a vencer os obstáculos que me foram impostos até a conclusão deste trabalho.

A mais alta perfeição de Deus está na possibilidade de criar um conjunto infinito, e Sua imensa bondade leva-O a criá-lo.

(GEORG CANTOR)

RESUMO

O infinito matemático, objeto altamente abstrato, é motivo de estudos, discussões, e por que não dizer temores? Desde Zenão, na Grécia antiga, até os livros didáticos do ensino básico nos dias de hoje, constitui um dos entes matemáticos mais importantes na compreensão de fenômenos que estejam ligados, de certa forma, à Matemática. Pretende-se, como principal objetivo deste trabalho, com olhar na cardinalidade dos conjuntos, tentar aproximar esse árido campo da Matemática, em uma linguagem mais simples que possa envolver professores dessa disciplina do ensino básico, não só para utilizar esses conceitos, adaptando-os aos respectivos conteúdos de cada série, mas também, principalmente, enriquecer o próprio conhecimento, pelo fato de a Análise Real, âncora de uma Matemática avançada, estar estruturada nos conceitos de limite que, obrigatoriamente, passam pelo infinito.

Palavras-chave: Infinito. Aprendizagem. Formação de professores. Conhecimento.

ABSTRACT

The extremely abstract object, matemathical infinite is the motivation for studies, discussions and why could not say fears? Since Zenon, in ancient Greece, until the recent books for basic teaching, the infinite is one of the most important mathematician entity in the comprehension of the phenomenon that is to a certain extent connected to Mathematics. The main object of this work is to try to convert his hard aspect of Mathematics in a simple language that could evolve teachers, not only to use these concepts in the classroom, adapting to each grade; but also and mainly to enrich their own knowledge. Taking into consideration that the Real Analysis, which is the base of an Advanced Math, is structured in the concepts of limits that goes through infinite.

Key-words: Infinite. Learning. Teachers' formation. Knowledge.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CTU	Colégio Técnico Universitário
ENEM	Exame Nacional de Ensino Médio
PUC	Pontifícia Universidade Católica
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No capítulo 1, busco esclarecer a motivação que me levou ao tema propriamente dito, tanto pelo fascínio do infinito e sua “presença” no ensino básico, quanto pela necessidade de aproximação de professores destas séries com uma Matemática mais sofisticada que justifique vários conteúdos ministrados ao longo do ensino básico. Procuro mostrar também minha experiência na educação durante mais de 30 anos, apresentando um testemunho da evolução dos processos educacionais nesse período, justificando minhas angústias com os resultados que testemunhei nesse mesmo período. Em seguida, apresento a metodologia, que, por não ter encontrado grande variedade de literatura envolvendo o tema endereçado a professores do ensino básico, apresenta situações bem peculiares como a referência para o resultado do trabalho, a partir de um grupo de pesquisa composto por um professor especialista, meu orientador, um outro professor de Matemática envolvido com o mesmo Mestrado em Educação Matemática com o tema “Números reais” e um professor de Matemática que lecionava Física até 3 anos atrás e que também está iniciando no Mestrado Profissional em Educação Matemática. Este último representou, no grupo de pesquisa onde apresentava meu texto, um termômetro para o grau de simplificação que consegui atingir, por não ter tido qualquer contato com o conteúdo Análise Real antes de o grupo de estudos ser formado. Por fim, apresento uma discussão acerca da capacitação que envolve os professores de todas as séries do ensino básico, bem como de professores dos cursos superiores.

O capítulo 2 é dedicado ao tema central deste estudo, “O infinito”, visto de várias esferas, desde seu histórico iniciado na Grécia antiga, a partir de paradoxos matemáticos, até a formalização de infinitos com “tamanhos diferentes”, que pude comprovar matematicamente, fechando o capítulo com considerações sobre a enigmática Hipótese do Contínuo, proposta por Cantor.

O capítulo é iniciado com uma especulação acerca do tema escolhido, quais motivações me alcançaram para aumentar meu interesse pelo assunto, como o infinito foi interpretado ao longo de toda a história da humanidade, qual foi o papel da Igreja nos caminhos de compreensão do infinito, enfim, houve uma tentativa de compreender como o infinito participou e participa do desenvolvimento da Matemática no decorrer do tempo.

Em seguida, houve preocupação em clarear como o infinito é apresentado nos livros didáticos ao longo do ensino básico, desde as primeiras séries do ensino fundamental, até os mais sofisticados textos de Análise Real.

Depois, busco apresentar a evolução do conceito de infinito ao longo dos tempos, em um breve relato, com o intuito de mostrar sua importância histórica no mundo da Matemática.

Continuando, procuro mostrar um pouco como a Educação Matemática é lida com esse conceito tão abstrato, principalmente por ser uma nova área de conhecimento com foco no processo de aprendizagem de Matemática.

Nesse ponto do trabalho, dou início ao estudo da Matemática propriamente dita, partindo dos primeiros conceitos de cardinalidade, abordando propriedades das funções, sobretudo a característica da relação entre os elementos de dois conjuntos envolvidos em uma função bijetora, que norteará o caminho desta pesquisa para análises de cardinalidade no infinito, representando um dos poucos meios para algum controle sobre este tema tão complexo que é o infinito. Também, abordo conjuntos finitos, infinitos, limitados e ilimitados, dedicando um bom espaço neste trabalho a conjuntos enumeráveis, com ênfase nos conjuntos que representam o eixo da Matemática nas primeiras séries do ensino básico. Desse modo, a partir dos conteúdos apresentados, foi possível encontrar condições de analisar o infinito com certo controle, mostrando que o menor infinito matemático é representado pelo conjunto dos números naturais e, ainda, que é possível identificar infinitos cada vez maiores, contrariando o pensamento comum à grande maioria da humanidade de que “infinito é infinito e pronto”. Finalizo este capítulo levantando um tema não concluído e bastante especulado e contraditório, levantado por Georg Cantor (apud OLIVEIRA, 2011), **A Hipótese do Contínuo**. O autor afirma não existir infinito entre o infinito natural e o infinito real e que, mesmo com o alto grau de sofisticação da Matemática, não compromete ainda seu desenvolvimento nos centros de pesquisa.

No capítulo 3, evidencio que, além das dificuldades naturais de uma Matemática mais sofisticada, mais abstrata, a própria formalização, com uma simbologia e formulário necessários à continuidade do desenvolvimento matemático, distanciou a maioria das pessoas dessa área de conhecimento tão importante nas outras áreas e por que não dizer na própria vida das pessoas. Esta realidade foi de grande importância em minha decisão de trabalhar um tema tão sofisticado, tentando apresentar uma linguagem mais simples, mais acessível.

O último capítulo, destinado às considerações finais desta dissertação, serviu como um desabafo e, ao mesmo tempo, um grande incentivo para continuar a pesquisar na direção de tentar aproximar um número maior de pessoas da riqueza de conteúdos que envolvem a Matemática.

1.2 A INSPIRAÇÃO

Mesmo que as leituras de textos envolvendo a Educação Matemática estimulem o professor a ler mais, estudar mais e mais, conhecer o que envolve essa recente área de pesquisa científica, o grande desafio da Educação Matemática está nas leituras que fazem nas salas de aula, com os alunos. A seguir, será apresentado um breve histórico dessas leituras.

Recorrente em sala de aula, não obstante o compromisso que um professor possa ter com o processo ensino-aprendizagem e com a formação de seus alunos, é a falta de interesse a principal causa da dificuldade em assimilar os conteúdos de Matemática, em razão de uma série de fatores internos e externos a essa área do conhecimento.

O não comprometimento com a disciplina pela grande maioria dos alunos é, provavelmente, o mais importante fator para as dificuldades enfrentadas pela Matemática no processo ensino-aprendizagem. Mas agrega-se a esse fator a formação do professor de Matemática para o ensino básico o qual precisa buscar capacitação para melhorar seu trabalho em sala de aula e buscar o interesse do aluno para o aprendizado da Matemática, incentivando-o, a todo momento, a aprender.

Cada vez mais os alunos se afastam dessa disciplina, com o discurso que aprender Matemática é para alunos “inteligentes”, e a maneira tão equivocada que a maioria vê a Matemática leva-nos a pelo menos uma constatação, que não é óbvia, mas que, fatalmente, esclarecerá um pouco mais: o grande fracasso do ensino da

Matemática é incontestável. Mas, vale lembrar que não é simplesmente o modelo pedagógico, a didática, o processo utilizado que representa o fracasso do ensino de Matemática nas salas de aula do ensino básico, pois há muitos outros fatores que concorrem para o fracasso.

Este relato, que é mais um desabafo, foi testemunhado em minha própria formação durante o curso de licenciatura para o ensino da Matemática. Quando realizei o curso, acreditava que a disciplina Análise Real viria a complementar minha formação matemática, sobretudo como ferramenta para justificar uma série de procedimentos matemáticos em minha futura prática docente, ao ministrar aulas para o ensino básico. Para minha surpresa e decepção, pelo fato de, no final do curso, ter menos conhecimento do que quando entrei na Universidade, a esperança ficou naquelas aulas áridas. Enfim, o curso se limitou ao formalismo de uma Matemática científica endereçada a especialistas e não ofereceu conhecimentos para serem repassados aos alunos no ensino básico.

Acreditando ser possível contribuir para melhorar esse desastrado processo, no qual ensinamos sempre criando formas alternativas de avaliação, transformando fracassos em pseudossucessos, tornando o processo ensino-aprendizagem um "câncer" endêmico que assusta alunos durante sua vida escolar. Desse modo, ingressei no Mestrado em Educação Matemática, na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) na esperança de minimizar a situação quanto ao desafio diário do ensino de Matemática.

Na tentativa de contribuir para o ensino dessa disciplina, busquei inspiração, principalmente, em minhas angústias e incertezas, que culminaram em decepção, e, para minimizar a situação, ou sair desse estado de desolamento para sempre, passei a concentrar minhas atenções para a Análise Real.

Essas angústias e incertezas vêm de experiências que, apesar de não representarem uma base científica de pesquisa, são muito ricas para o desenvolvimento deste trabalho não só pelo tempo de experiência, mas também, principalmente, por ter trabalhado em todos os segmentos de ensino, tanto na rede particular como na rede pública. Tive oportunidade de ter, ao longo dos anos de magistério, diferentes tipos de experiências com turmas diversas e em vários lugares: realizei oficinas de Matemática com ensino fundamental 1 e 2; ministrei aulas regulares com ensino fundamental 2, ensino médio e superior; trabalhei com ensino básico na rede municipal e ensino de jovens e adultos fora da faixa etária do ensino regular. Vivi, nesse período, experiências com algumas mudanças na estrutura do ensino as quais pouco representaram no processo ensino-aprendizagem dentro das escolas, por não terem sido discutidas com critério e vontade política de mudanças.

A preocupação com o professor é muito recente, pois, anos atrás, não se colocava a capacitação do professor como um dos fatores responsáveis pelo fracasso do ensino, lembrando que aqui estou me referindo ao ensino como um todo, envolvendo todas as áreas de conhecimento. A grande preocupação sempre foi o currículo, mas, com pouca participação dos professores, que, simplesmente, aguardavam, de um ano para outro, as mudanças nos livros didáticos.

Em meio a leituras, como já citado anteriormente, ao fracasso do ensino nas salas de aula, tenho convicção de que mudar é necessário e urgente. Vejo também que qualquer proposta de mudança precisa ter uma boa base teórica, até por envolver outras áreas de conhecimento, além da própria Matemática. Mas é fato concreto que também muitas outras pessoas, já há muito tempo, preocupam-se com o ensino dessa disciplina e realizam pesquisas dentro da Educação Matemática.

1.3 MINHA EXPERIÊNCIA

A inspiração que, baseada em angústias vividas ao longo de mais de 30 anos trabalhando com Matemática, em vários segmentos do ensino, estimulou-me a realizar este trabalho o qual foi concretizando, gradativamente, ao longo dos anos de experiência em que alternaram processos de seleção no ensino da Matemática, com claro objetivo de identificação dos “melhores alunos”, concentração dos processos pedagógicos nos livros didáticos e, principalmente, falta de investimento na capacitação de professores. Esses fatores, associados à falta de maturidade docente, dificultaram-me no sentido de ter uma visão crítica do que realmente acontecia no processo ensino-aprendizagem de Matemática.

Naturalmente, essas angústias não constituem reflexos exclusivos de minha experiência como professor. Na verdade, já se manifestavam em minha vida acadêmica, desde as séries iniciais do ensino básico. Cursei o primário, hoje equivalente ao ensino fundamental I, em uma instituição educandária, cujo foco pedagógico era a memorização, até mesmo em alguns conteúdos de Matemática. As aulas eram ministradas no período da manhã, sendo as tardes destinadas a uma espécie de “castigo” para os alunos que não conseguiam decorar o “ponto” proposto na aula anterior. Os professores tinham de repetir os conteúdos do mesmo modo que esses eram apresentados nos livros sem esquecerem, até mesmo, as vírgulas do texto em questão. Esses profissionais eram escravos dos livros didáticos, que norteavam todas as disciplinas do ensino básico. Naquela época, a 5ª série primária era uma opção da direção da escola, em função do desempenho do aluno na 4ª série. Eu, por ter muita dificuldade em memorização, fui obrigado a cursar a 5ª série para completar o curso primário.

Concluindo o primário, prestei exame de seleção em um colégio estadual, ingressando no curso ginasial, em um dos melhores colégios de Juiz de Fora daquela época. Cumpre ressaltar neste estudo que, no final da década de 1960, os colégios públicos estaduais tinham um ensino considerado forte tanto no que se refere à qualidade dos conteúdos ministrados quanto no quesito disciplina, época em que os professores eram muito respeitados. Os exames de seleção eram disputados, principalmente, por jovens das classes sociais mais altas.

Naquela época, uma característica marcante das escolas era o caráter seletivo imposto no ensino básico. O número de reprovações era muito alto e havia um agravante: nas escolas públicas, eram eliminados alunos reprovados em qualquer série.

Depois de um curso ginasial, feito com muita dificuldade, optei por seguir o curso técnico, o que na época era natural, pela facilidade de colocação de técnicos no mercado de trabalho. Prestei vestibular no Curso Técnico Universitário (CTU) da Universidade Federal de Juiz de Fora e ingressei no curso de Eletromecânica, que era equivalente ao científico, mas com uma formação técnica. Foi um período de muita decepção pelo fato de cursar, durante três anos, um curso técnico e não me sentir competente para assumir qualquer trabalho relativo ao curso. Assim que me formei, no técnico, prestei vestibular de Engenharia na UFJF e, assim, tive a oportunidade de trabalhar como professor paralelamente a esse curso superior.

Iniciei minha prática em sala de aula aos 20 anos de idade, no mesmo ano em que ingressei no curso de Engenharia Civil na UFJF, em 1976. Naquele período, década de 1970, eram fortes os cursos preparatórios, tanto para vestibulares de cursos superiores, quanto para cursos técnicos. Meu primeiro trabalho como professor foi em um curso preparatório para o vestibular do CTU. Na época, fui beneficiado por trabalhar na turma que reunia os melhores alunos de todo o curso, o que facilitou, de forma decisiva, o início de minha carreira como professor. É importante ressaltar que começava a trabalhar em sala de aula no momento em que o ensino tinha as características seletivas em seu momento mais forte ao longo de todo o tempo que trabalho na educação.

Sobre minha formação, ficou claro que iniciei a carreira de professor na mesma época em que iniciei o curso de Engenharia Civil, o que reforça a preocupação com profissionais da área e a falta de investimento em capacitação, haja vista que não era necessário ter uma formação em licenciatura para a prática docente, fato que ocorria com bastante frequência, tanto pela falta de profissionais disponíveis quanto pela facilidade em se conseguir autorização pelos órgãos responsáveis pela educação. Assim como eu, muitos profissionais da área de educação iniciaram a vida profissional com objetivo exclusivo de se manterem financeiramente durante o tempo em que estivessem cursando suas faculdades, quase sempre não ligadas à educação, como era o meu caso. Naturalmente, a escolha pelo trabalho na educação não era motivada por ideais, mas pela flexibilidade de poder trabalhar em horários que não comprometessem meu estudo no curso de Engenharia.

Entrei no processo, assim como muitos outros colegas que optaram pelo magistério para ter uma fonte de renda que se adaptava aos estudos, sem qualquer preparação pedagógica, carregando como bagagem apenas os conteúdos de Matemática do curso científico, hoje ensino médio, fato que, na época, qualificava-me a trabalhar em turmas de alunos que fossem prestar vestibulares. Era, no mínimo, curiosa a preferência nos “cursinhos” pelos estudantes que iriam prestar exame para os cursos de Engenharia, Medicina e Direito em detrimento de outros que optaram pelas licenciaturas. Como o objetivo da educação era, principalmente, os vestibulares, tínhamos um apelo muito forte no processo, no sentido de selecionarmos os melhores. Os “cursinhos” buscavam expoentes nas escolas públicas que, na época, apresentavam bons resultados em exames de seleção e direcionavam esses alunos com a finalidade de apresentar resultados nos cursos superiores, considerados mais importantes. Existia uma cultura competitiva tanto entre os “cursinhos” quanto entre os alunos de um mesmo “cursinho”, o que minimizava o desgaste de se trabalhar com cerca de 60 a 80 alunos em uma mesma turma, em função da disciplina obtida pela competitividade natural nesse segmento do ensino.

Com dois anos de trabalho em “cursinhos”, passei a ministrar aulas também nas turmas de ginasial, curso equivalente, hoje, ao ensino fundamental. Aqui, sim, começaram meus grandes problemas com a prática docente, gerando angústias, pela falta de preparo para trabalhar com crianças e pelo conteúdo ser tão árido, como era a Matemática. Muito caracterizada pelo formalismo e quase nenhum apelo para a contextualização ou mesmo por um caminho didático menos áspero, era bastante evidente a dificuldade dos alunos no processo ensino-aprendizagem. O pretenso privilégio por trabalhar com os “melhores” alunos do curso em uma nova sala especial não me preparou para a realidade que encontraria em uma sala de aula regular. A primeira instituição em que trabalhei foi o Colégio D. Pedro I, já extinto, em que a força dos programas curriculares me impediu de trabalhar inúmeros projetos que havia preparado para as turmas do 4º ano ginasial, equivalentes hoje à 8ª série e ao 9º ano do ensino fundamental. Um desses projetos era uma tentativa de resgatar a geometria, com uma proposta real de levantamento quantitativo para uma reforma do colégio, envolvendo as duas últimas séries do ginásio, motivado, principalmente, pelo tratamento que os livros didáticos, e, consequentemente, a maioria dos professores, davam à geometria – uma disciplina que era apresentada apenas no final do ano, no tempo que sobrasse, depois de vencido o programa de álgebra, conteúdo de muita força nas escolas daquela época.

A grande força, dentro da educação básica, no período em que iniciei como professor, vinha das editoras que chamavam para si toda e qualquer mudança anual dos conteúdos da Matemática. Os professores eram meros expectadores no processo e, a cada final de ano, a ansiedade por receber os “exemplares dos professores” que seriam utilizados no ano seguinte era grande, sobretudo para que houvesse a adaptação aos conteúdos nos novos livros em tempo hábil, para o início das aulas, no ano seguinte.

Com pouco tempo como professor, passei a trabalhar com todos os segmentos do ensino básico, tendo como referencial para exercer o magistério apenas os meus professores de Matemática, que considerava os melhores da época em que cursei o ensino básico. Não me era cobrado nem mesmo oferecido qualquer tipo de capacitação, visto que minha formação era de estudante de Engenharia, mas o livro didático era considerado o ponto alto da prática para o ensino de Matemática e, quando as editoras entregavam os novos exemplares aos professores, era quase um ritual, pois eram realizadas várias reuniões para que os professores “conhecessem” as mudanças previstas para o próximo ano.

Como já visto anteriormente, formei-me em Engenharia, em 1980, iniciei minha profissão de engenheiro concomitante com minhas “aulas” e não consegui distanciar do modelo do curso, assim como muitos colegas que trabalhavam comigo e também não tinham formação acadêmica em outra área. Durante cerca de 10 anos, trabalhei com afinco na construção civil, ergui algumas obras importantes em Juiz de Fora como toda a fundação da fábrica Mercedes Benz, os três únicos prédios dotados de elevador a leste do rio Paraibuna, entre outras que compõem hoje meu currículo de engenheiro. Vale lembrar, o que ocorreu naquele período foi que, com poucas aulas e muito trabalho na Engenharia, ficou bastante claro meu principal objetivo de vida dentro da educação: afastei-me das construções, não totalmente, mas de forma a me permitir assumir esta predileção pela sala de aula e pela Matemática, e, assim, fui buscar capacitação.

De forma um pouco desordenada por falta de orientação, fiz um curso de Especialização em Matemática, e, por lei, seria obrigado a me capacitar na licenciatura. Na época, surgiu uma possibilidade de fazer esta suplementação pedagógica em uma escola federal rural. Desse modo, com apenas dois períodos de férias, o curso forneceu aos alunos o “diploma” de professores. Na escola em que trabalhava, cerca de 8 professores buscaram essa formação, por também serem profissionais de outras áreas. Refleti muito e optei por fazer a licenciatura completa em uma escola superior de Juiz de Fora.

Assim, a partir desse curso de licenciatura, passei a compreender um pouco melhor que não estava bem preparado para trabalhar com alunos muito jovens, e compreender ainda melhor que o funcionamento da mente humana não é linear e não pode ser massificada como se todas as pessoas tivessem compreensão de forma proporcional ou na mesma velocidade.

Depois da formação em licenciatura plena, apesar dos conflitos internos acerca da educação, busquei desenvolver alguma melhoria para este processo tão complexo dentro da educação, ou seja, o ensino-aprendizagem da Matemática. Nesses mais de 30 anos de experiência como professor de Matemática em Juiz de

Fora, embora nunca tenha pretendido fazer uma pesquisa sobre educação ao longo desse período, afirmo que minha experiência no segmento foi bastante rica, em função, principalmente, de ter trabalhado com todos os segmentos, tanto na iniciativa privada quanto no setor público. Durante esse período, presenciei o enfraquecimento qualitativo do ensino público e o crescimento do ensino particular em todo o ensino básico, fato caracterizado pela diminuição de recursos públicos na educação. Durante muito tempo, trabalhei, exclusivamente, em escolas particulares, no ensino fundamental, no ensino médio e em cursinhos preparatórios para vestibulares. Enfim, posso afirmar que, nas escolas do setor privado, conheci vários projetos pedagógicos com formatos diferentes, mas sempre trazendo a mesma mensagem conteudista.

Mais recentemente, a partir do final da década de 1990, comecei a perceber algumas mudanças significativas no processo educacional, embora muito lentas, mas elas são de extrema importância, principalmente, no tocante à valorização do professor nas decisões pedagógicas nesse período. Além de experiências em escolas particulares, como as citadas anteriormente, comecei a trabalhar em escolas confessionais de Juiz de Fora, como o Colégio dos Santos Anjos e o Colégio Stella Matutina, onde tive experiências fascinantes com alunos de 6 a 10 anos do ensino fundamental I, que ficavam encantados com o processo de aprendizagem da Matemática. Esses colégios valorizam, principalmente, a formação humana dos alunos, quebrando, de certa forma, o foco exclusivo nos conteúdos programáticos que norteavam e norteiam a maioria das escolas de ensino básico.

Embora algumas mudanças tenham começado a acontecer na educação básica, a fim de melhorar o ensino, minhas angústias estavam longe de ser resolvidas. Passei, então, a buscar uma forma de aperfeiçoamento de minhas aulas por meio de projetos que atraíssem a atenção dos alunos, mudando um pouco o formato da aula tradicional.

Antes do ingresso no Mestrado profissional em Educação Matemática, elaborei um projeto intitulado “Humanização da Matemática”, cuja aplicação em sala de aula melhorou muito o aprendizado das turmas, em função de ser estruturado no ensino-aprendizagem dos alunos pelos próprios alunos. Alguns professores de outras disciplinas na escola em que trabalho passaram a utilizar, com sucesso, as orientações desse projeto, fato que me estimulou a formalizar um projeto de Mestrado que seria apresentado na área de educação.

Contudo, surgiu, nesse período, a possibilidade de um Mestrado na área de Educação Matemática. Então, imediatamente, passei a trabalhar para fazer parte desse projeto da Universidade Federal de Juiz de Fora. Evidencio que uma das disciplinas do curso que mais me chamou a atenção foi Análise Real, por ter sido a disciplina da minha graduação em licenciatura de que menos consegui tirar proveito, tanto pelo grau de abstração e complexidade, como pelo pouco tempo destinado na grade curricular de uma disciplina tão importante. Apesar de fazer parte da minha graduação, nem mesmo a importância desse conteúdo tanto como professor, na minha prática de sala de aula, quanto na minha própria formação matemática, consegui identificar dentro da graduação. Por conseguinte, afirmo que, a partir da disciplina no curso de Mestrado, ministrada pelo professor Dr. Carlos Alberto Santana Soares, que viria a ser, posteriormente, meu orientador desse curso de pós-graduação, é que me dei conta do quanto a Análise Real é importante para o professor de Matemática.

Passei a investir meus esforços no tema ”infinito”, por estar presente no estudo da Matemática do ensino básico e por representar o carro-chefe no estudo de uma Matemática mais abstrata.

Cumpre ressaltar que não houve qualquer tipo de pesquisa para as afirmações feitas neste pequeno relato, o que ocorreram, de fato, foram experiências pessoais ao longo de muitos anos trabalhando com educação, acompanhando as mais diversas mudanças nesses últimos 30 anos aproximadamente. Desse modo, sinto-me muito à vontade nos questionamentos colocados neste pequeno relato acerca de minha experiência, por ter tido a honra e a oportunidade de estar em todas as posições nesta cadeia que representa a educação, desde aluno em época bem distante, com outra realidade no processo educacional, passando por professor, coordenador, e hoje, no final dessa corrente, ocupo o cargo de Diretor Pedagógico do Colégio Stella Matutina, o que me dá respaldo para garantir que é possível fazer uma escola melhor e sem maiores custos, fato que tanto assombra os proprietários das escolas particulares. Hoje, o grupo de professores dessa Instituição desenvolve projetos, tanto internos quanto externos, em todas as áreas e, em particular, na área de Matemática, com uso de *data show*, projetos extraclasse, coroando com participação as Olimpíadas da Matemática, aberta à participação de todos os alunos do colégio, fazendo com que a leitura matemática dos alunos do colégio seja um pouco mais profunda em relação aos anos anteriores.

Espero, com este trabalho, contribuir, de alguma forma, para a melhoria do processo, sobretudo no que se refere ao professor. Vejo, com muito otimismo, o futuro da educação no país e no mundo, pois, hoje, existe vontade de enfrentamento da crise no processo ensino-aprendizagem, que já mostra significativas conquistas em todos os aspectos, mas de forma especial na formação de professores.

1.4 METODOLOGIA

A metodologia usada no desenvolvimento deste trabalho se mostrou, em princípio, no mínimo curiosa, mas, com o amadurecimento da ideia e os primeiros passos no conteúdo principal, o infinito, foi se estruturando com consistência e, mesmo sem uma pesquisa que a legitimasse, foi se caracterizando e autovalidando através de um grupo de pesquisas do qual fiz parte durante o desenvolvimento deste trabalho.

O primeiro obstáculo encontrado foi buscar a compreensão, com maior clareza possível, dos conteúdos que compõem a Análise Real. Para tanto, contei com as aulas da disciplina Análise Real, ministradas pelo meu Orientador, Professor Dr. Carlos Alberto Santana Soares, oferecida durante o Mestrado. Com o desenvolvimento das aulas e apoiado na literatura disponível, passei a aprofundar o conhecimento nos textos de Análise, utilizando livros didáticos, revistas, publicações e livros de história da Matemática, a fim de que me ajudassem a entender a evolução desse tema, fundamental para o meu trabalho. Até aqui, um procedimento natural para quem se propõe a estudar um tema específico de conteúdo em um curso de Mestrado.

O que considerei curioso na metodologia foi a forma como, a cada teorema, a cada demonstração, enfim, a cada tópico alcançado, a grande conquista estava na apresentação para o grupo de pesquisas e estudos, formado pelo professor da disciplina, meu orientador e os professores Willian José da Cruz e Hernando José Rocha Franco. O primeiro também foi aluno da disciplina Análise Real e também trabalhava um tema dessa disciplina, e o outro, professor Hernando, acabara de ingressar no Mestrado que cursávamos e se apresentou para o grupo de pesquisas, com argumentação de quem quer aprender essa disciplina, com a qual nunca teve contato em sua vida acadêmica, por ter-se formado em bacharelado de Física. Recentemente, esse professor fez um curso de capacitação, a fim de obter autorização para continuar lecionando Matemática e Física para o ensino básico.

Meu grande desafio, foco central deste trabalho, estaria a meu lado no grupo de pesquisas: um professor de Matemática do ensino básico, com graduação em Física e que nunca teve contato com a Análise Real. O grande desafio, então, seria tornar essa disciplina mais facilmente compreendida, tendo como referência o grupo de pesquisa, em particular, o professor Hernando, que se propôs a ser o foco principal da experiência.

Assim, a apresentação de meu trabalho, nesse grupo de estudos e pesquisas, foi a grande ferramenta na metodologia utilizada, por ser um teste objetivo para o texto a que me propus a desenvolver no Mestrado.

Acredito que essa experiência, no grupo em questão, tenha sido fundamental para a conclusão deste trabalho, principalmente pela preocupação de todo o grupo em manter um olhar crítico sobre cada tema desenvolvido, norteando um texto a limitar-se na compreensão simples de um grupo heterogêneo, que comporta desde um especialista altamente qualificado até um principiante com muita vontade de conhecer o assunto.

Foi extremamente importante a apresentação, no grupo, de cada tópico do trabalho, por estar, assim, testando todo o texto, durante o tempo de desenvolvimento.

Já em minha primeira apresentação, percebi o quanto seria árido o trabalho desenvolvido no grupo para falar de conjuntos numéricos. O marco zero seria falar dos números naturais, que são suporte para todos os conteúdos desta dissertação. Mas, o que pode ser dito acerca dos números naturais? A pergunta chega ao limite da ingenuidade, se formulada a crianças ou mesmo a adultos que não têm, no dia a dia, contato com a Matemática.

Sobre o conjunto dos números naturais, afirmo que é o conjunto de números que utilizamos para contagem de quantidades e que vão aumentando até o infinito, não existindo o último natural. Esta seria uma resposta suficiente para atender ao propósito da pergunta e que, sem qualquer rigor matemático, responde com clareza e de forma completa.

Mas, para um outro público que trabalha com Matemática mais sofisticada e profunda, ou mesmo para atender a certos conteúdos da Matemática, questiona-se:

os números naturais se constituem por um conjunto N, cujos elementos são chamados números naturais e por uma função injetiva s:N →N em que, para cada n Є N, temos um s(n), único, chamado sucessor de n? A função é satisfeita pelos três axiomas de Peano que serão apresentados a seguir:

P_1 : s : N – N é injetiva, ou seja, s(m) = s(n) -> m=n

P_2 : N – s(N) é um conjunto unitário, pois apenas o natural 1 (um) não é sucessor de um outro natural qualquer.

P_3 : (indução) se X $\subset$ N e, sendo 1 Є X, e ainda s(n) Є X, para todo n Є N; então X=N.

O fato concreto é que podemos apresentar afirmações que se equivalem de formas muito diferentes, sendo assim, o desafio de "democratizar" um texto tão importante na formação de professores é um estímulo que supera os muitos obstáculos que esta tarefa traz a esses profissionais.

Ficou claro que a metodologia é muito peculiar ao propósito deste trabalho, à medida que uma afirmação pode ser extremamente simples, mas, no rigor da Matemática, extremamente complexa e profunda para, ao final, dizer a mesma coisa.

1.5 OS SABERES MATEMÁTICOS

Ao ingressar no Mestrado profissional em Educação Matemática, tive acesso novamente à Análise Real, mas, abordada de uma forma mais acessível, e focando, além da visão científica, a visão pedagógica, capaz de justificar as bases da Matemática escolar. Foi a partir desse novo conhecimento que me dei conta do quanto poderia ter melhorado a forma de apresentar a Matemática em minha prática docente, tornando menos áspera a aprendizagem de meus alunos.

"Uma das questões recorrentes nos debates sobre a formação de professores através da licenciatura é a falta de articulação adequada entre a formação específica e a formação pedagógica tendo em vista a futura prática profissional na educação básica" (MOREIRA, 2005, p. 82). Nessa afirmação, no artigo publicado em 2005, Moreira coloca a questão que muito nos incomodou por tanto tempo na prática de sala de aula. Existe uma lacuna na formação do professor a qual pode justificar, em grande parte, o fracasso da Matemática nas escolas do ensino básico. Acreditamos que uma parte importante dessa lacuna está na formação dos professores tanto científica como pedagógica, limitando os professores pela falta de conteúdo e, principalmente, pela falta de argumentação pedagógica, a uma Matemática superficial, sem as devidas explicações, dificultando, de forma decisiva, a aprendizagem desde as primeiras séries do ensino básico até o término da 3ª série do ensino médio.

Cumpre ressaltar, quando afirmamos que a aprendizagem está sendo prejudicada desde as séries iniciais do ensino básico, lembramos que, nas primeiras noções de contagem, os alunos utilizam o conjunto infinito dos números naturais e, ao longo do ensino básico, o infinito aparece no estudo dos números reais, das funções. Isso se justifica pelo fato de, nessa faixa etária, os professores trabalharem com alunos em desenvolvimento e, consequentemente, com capacidade de abstração ainda em desenvolvimento, razão de as escolas necessitarem de professores capacitados em Análise Real, para que, em uma abordagem pedagógica, tenham recursos para facilitar a aprendizagem dos conteúdos que se apoiam nessa disciplina.

Cumpre evidenciar que é muito frustrante não ter a argumentação suficiente, para explicar, em uma linguagem mais concreta e simples, como funcionam os números reais entre os números 1 e 2, por exemplo, para um aluno do 9º ano do ensino fundamental.

Existem muitas pesquisas envolvendo a aprendizagem de Matemática diretamente para a contextualização, como os trabalhos de Ubiratan D'Ambrósio (1996), sobretudo na etnomatemática. São pesquisas importantíssimas nos processos pedagógicos, mas entendemos que, em outras áreas de conhecimento, a contextualização é natural, é real. O aluno fica mais estimulado para aprender noções sobre clima ou relevo de determinada região, ou como Getúlio Vargas chegou ao poder, ou mesmo na Física, tão questionada entre os alunos, cálculos de velocidade e forças, por mais abstratos que sejam, são reais. Na Matemática, por ser uma ferramenta que serve para outras áreas de conhecimento, e, somando-se o fato de ser muito árida, os conteúdos têm de ser desenvolvidos de forma direta e objetiva, não estimulando o interesse do aluno, principalmente na fase da adolescência.

Quando estudamos um tema como a Função quadrática ou a Função do 2º grau, temos de recorrer a contextualizações falsas como o chute de uma bola descrevendo uma parábola, ou mesmo a um tiro de canhão com a bola fazendo uma trajetória parabólica, enfim, situações simuladas utilizando outras áreas de conhecimento. Mas essa mesma função quadrática, quando utilizada na Física, toma outra visibilidade, por exemplo, no estudo dos movimentos uniformemente acelerados, por representar a fórmula de cálculo da aceleração.

Além da prática docente, é preciso se preocupar com o conhecimento matemático que um professor deve ter, pelo próprio conhecimento. Carine B. Loureiro (2010), em seu trabalho intitulado “A contribuição da análise matemática na formação de professores”, após ter entrevistado alguns professores e esses terem relatado que “em poucas situações tiveram a oportunidade de aprofundarem os seus estudos após terem concluído o curso de graduação”, assevera:

> Este fato [a falta de capacitação dos professores] nos remete novamente à importância de desenvolvermos uma sistemática de estudos individuais, onde o próprio profissional poderá ser o fomentador do seu conhecimento. Ao apresentar situações como o teorema de Pitágoras, que citamos acima, ou outras, como o teorema de Thales, a fórmula de Bháskara, o teorema de Briot-Ruffini, entre outras, o educador tenha claro de qual assunto está tratando e como se deu o desenvolvimento do mesmo dentro do campo da Matemática (LOUREIRO, 2010, p. 26).

Assim, diante das considerações apresentadas por Loureiro, podemos afirmar que a falta de conhecimento dos professores de escolas básicas públicas e particulares, sobre os conteúdos que trabalham em sala de aula, é de tal gravidade que alguns professores chegam a cometer o equívoco de acreditar que estão ensinando Matemática ao demonstrarem teoremas para os alunos, a partir de aplicações de teoremas ou mesmo de desenvolvimento de fórmulas. Se o professor não está preparado para ministrar aulas dos conteúdos referentes à sua prática docente, dificilmente estaria preparado para compreender uma Matemática mais avançada que lhe permitisse ter uma visão crítica da Matemática como processo educacional. No relato de Moreira (2003), em seu artigo “Por que análise matemática na licenciatura?”, 60% dos entrevistados, grupo constituído por professores e pesquisadores renomados das mais importantes instituições de ensino superior do Brasil, acreditam que o professor de Matemática precisa ter uma capacidade de pensar matematicamente, desenvolver o raciocínio lógico, o que só será possível pelo desenvolvimento de uma maturidade intelectual através da Matemática mais profunda e sofisticada, permitindo a esse professor uma melhor compreensão dos fenômenos naturais, principalmente os fenômenos físicos, e ainda aplicações da própria Matemática em outras áreas de conhecimento.

Ainda segundo Moreira e David (2003), no artigo: “Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores”, é preciso haver um equilíbrio que ele coloca como a questão da completariedade entre os saberes da formação do professor e de sua prática. No entendimento do autor, não se pode admitir uma formação de professores estruturada, exclusivamente, nos saberes científicos, de forma a conceber, na prática docente, um processo de didatização da Matemática científica. Nesse caso, a formação pedagógica não seria o suporte, tão necessário no processo ensino-aprendizagem.

Segundo Moreira e David (2003, p. 77-78):

> [...] o conhecimento trabalhado em qualquer processo de ensino é, em si mesmo, educativo. Isto pode parecer óbvio demais, mas a aceitação dessa hipótese implica na necessidade de uma análise muito cuidadosa das relações entre o tipo de conhecimento que se trabalha no processo de formação do professor e as formas com que o futuro professor vai “absorver” as lições da prática profissional ou as formas com que ele vai se envolver no processo de produção de saber da prática profissional. É nesse sentido que se coloca a questão da complementaridade entre os saberes da formação e os da prática. E é então que faz toda a diferença optar entre as formas de se conceber a matemática escolar. Se a pensamos de uma perspectiva técnica, como mera versão “didatizada” da matemática científica, o processo de formação do processo acaba se estruturando em torno desta última. A formação pedagógica se incumbiria somente de “fornecer o lubrificante” para o processo de ensino e a prática se tornaria apenas a instância de aplicação dos saberes da formação ou, no máximo, uma referência para a detecção de elementos que podem conduzir a um “desvio” do desempenho *ideal* do professor.

Não se pode conceber também que, em uma orientação diametralmente oposta, a concepção da Matemática trabalhada na escola seja resultado da prática escolar, em um processo de autossuficiência de produção de saberes matemáticos. Moreira e David (2003) concluem que, na formação de professores, deve haver um cuidado muito especial na análise das relações entre o tipo de conhecimento que se vai trabalhar e como o futuro professor vai absorver saberes da prática docente, para que se possa alcançar o objetivo maior de dar condições a esses professores de trabalhar a produção dos saberes matemáticos em suas salas de aula, produzindo, efetivamente, conhecimento.

2 INFINITO

2.1 TEMA ESCOLHIDO

A escolha do tema “infinito” para desenvolver este trabalho tem como principais motivações o fato de ser um tema muito abstrato, haja vista que não pode ser alcançado, não pode ser visto e, principalmente na Matemática, não configura um número, mas uma ideia. O infinito, ao longo da história da Matemática, vem gerando intermináveis debates entre grandes matemáticos, e, ainda, por ser um tema presente na prática docente de um professor de Matemática do ensino básico, desde as séries iniciais, com o conjunto infinito dos números naturais, até o encerramento do ensino médio, com o estudo das sequências, passando por números reais, teoria dos conjuntos, enfim, existe uma convivência com o tema “infinito” que, em algumas situações, pela própria abstração, chega a ser místico.

Além das motivações citadas, uma Matemática mais avançada para uma melhor capacitação dos professores passa, obrigatoriamente, pelo tema escolhido.

O conceito de infinito está diretamente ligado ao desenvolvimento das ciências em seus mais importantes paradigmas, como ferramenta para que possamos distingui-los. Desde a Grécia antiga, onde predominavam as ideias finitistas relacionadas a um mundo estático e que perduraram por um longo tempo na história da humanidade, até os tempos atuais, apesar do desenvolvimento e da predominância das ideias infinitistas. A partir do século XVIII, com a revolução científica, as polêmicas em torno do conceito de infinito são cada vez mais evidentes, sobretudo por influenciarem diretamente nossa percepção de mundo.

A palavra “infinito”, além de ser normalmente utilizada nos mais diversos contextos, refere-se às mais variadas coisas. De modo natural, quando nos referimos a quantidades incrivelmente grandes, na maioria das vezes, quando se trata das coisas da natureza, como o espaço, o céu e as estrelas, referências ao tempo, é quase um consenso universal que é "infinito", mas, particularmente no contexto matemático, não raro confundido com o filosófico e teológico, o "infinito" tem sido debatido por mais de dois mil anos. Apesar de o ser humano ser limitado e finito, vivendo no planeta Terra também finito, seria impossível a compreensão deste contexto finito, sem passar pela discussão do infinito.

Mas, a grande dúvida deverá continuar ainda por um longo tempo: o que quer dizer infinito? Pela variedade de especulações acerca desse conceito muito abstrato, como sem fim ou sem limite, imenso ou incalculável, além de outros conceitos, torna-se elementar concluir que se trata de um tema que necessita de muitos estudos tanto no tocante a seu conceito geral como no que se refere a seu conceito matemático. Aristóteles (384a.C. 322a.C.), no período pré-socrático, utilizou a palavra *apeiron*, com múltiplos significados como sem limites, incerto, absurdamente grande, caracterizando a injetividade como uma imperfeição (SAMPAIO, 2010).

A ideia do infinito teve sua origem na filosofia, podendo ser considerada antiga, simples e complexa ao mesmo tempo, sendo já bem aceita nos tempos atuais entre os matemáticos, ao contrário de outras épocas, quando foi negada por muitos matemáticos como Gaus e Cauchy, de vital importância na época por seus trabalhos publicados.

Ao longo dos tempos, a ideia do infinito impulsionou o desenvolvimento da Matemática. Suposições a respeito de divisões de grandezas como, por exemplo, admitir que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, tendo como boas referências o espaço e o tempo, ou se uma grandeza tem um menor "valor" indivisível, como o próprio tempo, foram os grandes desafios do pensamento grego por muito tempo. Um bom registro desses pensamentos aparece nos paradoxos do filósofo Zenão de Eléia (450 a.C.), que serão apresentados neste trabalho e comprovam a inquietação na Matemática pela inferência do "infinito" em toda a sua história desde a Grécia antiga.

De acordo com Sampaio (2010), Aristóteles foi quem buscou entender essa ideia através de dois eixos bem distintos acerca do infinito. Ele destaca, em uma de suas obras, dois tipos de infinitos muito bem caracterizados: o infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final, batizado de infinito potencial, e o infinito como totalidade completa, que recebeu nome de infinito atual, estudado e sistematizado por Cantor (1845-1918), com a Teoria dos conjuntos transfinitos (EVES, 2004).

O infinito como entidade completa, o chamado infinito atual, foi rejeitado por Aristóteles e outros matemáticos e filósofos da época, principalmente pelos paradoxos que viriam a atormentar os estudos de Matemática de época, como, por exemplo, ao se admitir conjuntos infinitos completos, haveria tantos números inteiros quanto números pares. Para São Tomás de Aquino, teólogo, considerar o infinito atual como um infinito pronto e acabado, representaria um desafio à natureza infinita e absoluta de Deus (EVES, 2004).

Um bom exemplo para diferenciar as estruturas dos infinitos originários dos estudos de Aristóteles é a dízima periódica 0,999... Imaginando que sempre é possível acrescentar mais um algarismo 9, estamos admitindo um processo que nunca termina, ou seja, o infinito potencial, mas, se aceitarmos que existe um valor final que represente esse número, ou seja, admitindo que 0,999 ... = 1, estamos considerando o infinito como um objeto, o infinito atual.

O primeiro matemático a fundamentar a noção do infinito atual foi Bernard Bolzano (1851), em sua obra *Paradoxos do infinito*, que defendeu a ideia do infinito atual, enfatizando que o conceito de equivalência entre dois conjuntos era aplicável tanto a conjuntos finitos quanto a conjuntos infinitos. Já no final do século XIX, Cantor desenvolve uma teoria fundamentada no infinito atual, a Teoria dos conjuntos dos números transfinitos (EVES, 2004).

A preocupação em apresentar esclarecimentos sobre o tema “infinito”, bem como sobre a bibliografia pesquisada, por si só se justifica, se levarmos em consideração que o tema “infinito” é hoje tão complexo quanto no tempo de Aristóteles. Conceitos e discussões matemáticas pouco acrescentam quando o infinito é confrontado com o mundo real, por isso torna-se um tema misterioso e abstrato. Já, no campo da Matemática, quando se depara com as maiores dificuldades de enfrentar o considerado verdadeiro infinito, o infinito atual, o cálculo dos infinitamente pequenos, foge ao nosso campo cognitivo pensar em quantidades entre "nada" e "qualquer coisa", que Bolzano (1991) tanto evocou em seus "paradoxos".

2.2 O INFINITO NOS LIVROS DIDÁTICOS

O “infinito” é um tema presente nos livros didáticos desde as primeiras séries do ensino básico. Como relatado anteriormente, trabalhamos em praticamente todas as séries desse ensino, inclusive séries iniciais de 1ª a 4ª série do ensino fundamental com oficinas. Sendo assim, sem nenhum compromisso com o rigor de uma pesquisa científica ou mesmo de uma análise formal, apresentamos uma análise pessoal dos livros do ensino básico que são mais utilizados nas escolas, aos quais tivemos acesso, ilustrada pela opinião de professores com quem trabalhamos ao longo desta experiência profissional. A análise, apesar de não ter um caráter científico, vai enriquecer o objetivo central deste trabalho. Na análise dos livros utilizados ao longo de todo o ensino básico, paralelamente a uma abordagem informal com professores de Matemática dessas séries, verificamos que, até o 4° ano do ensino fundamental, os livros didáticos tratam de números naturais sem abordar até onde esses números vão, como relatou uma professora de Matemática do 4° ano, fato constatado na análise realizada nos livros da coleção de Matemática da rede católica de educação, adotada no Colégio Stella Matutina, onde trabalho. Foi pesquisado também na coleção de Matemática *Vivência e construção*, de Luiz Roberto Dante (2006) e, na coleção *Matemática e realidade*, escrita por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado (2006), que mantêm a mesma linha de apresentar os números naturais como um conjunto infinito. Segundo relato de professoras, no 4° ano, já existe questionamento acerca da contagem e, fatalmente, elas são obrigadas a citar o infinito.

No 5° ano do ensino básico, considerada uma série muito importante no processo de abstração dos alunos, a maioria dos autores não citam o infinito, limitando-se a dizer que os números naturais atingem valores muito grandes, exceção apenas, segundo análise feita entre os mais utilizados, para o livro do 5° ano *Vivência e construção*, de Luiz Roberto Dante (2006), que antecipa, formalmente, o conjunto dos números naturais como um conjunto infinito, embora o autor se limite a apresentar o conteúdo sem maiores comentários. Nessa série, são introduzidos os conceitos de raciocínio lógico e os primeiros passos em análise combinatória. De acordo com relatos de professoras, é nessa série que há um questionamento mais incisivo dos alunos sobre a sequência dos números naturais, por lidarem muito com o processo de contagem.

No 6° ano do ensino fundamental, os alunos são apresentados, formalmente, ao conjunto infinito dos números naturais, como observado no livro do 6° ano da coleção *Matemática e realidade*, de Iezzi, Dolce e Machado (2006), cujos autores definem o conjunto infinito dos números naturais, abordam sucessor e já fazem referência à cardinalidade. Os autores definem, nesse livro, “finito” como algo que tem fim e “infinito”, o que não tem fim. No livro da 6ª série, da coleção *Tudo é Matemática*, de Dante (2004), o autor aborda, além dos números naturais, as várias sequências que podem ser subtraídas do conjunto dos números naturais como os pares, os ímpares, os quadrados perfeitos. Nessa obra, o conjunto dos números naturais é abordado do seguinte modo:

> Vamos retomar o estudo da sequência dos números naturais:
>
> 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...
>
> O primeiro dessa sequência é o zero, o sucessor de zero é o 1, o sucessor do 1 ´é 2 e assim por diante. Representa-se por sucessor de um número natural qualquer **n** por *n*+1.
> Como sempre encontramos o sucessor de um número natural, dizemos que a sequência dos números naturais é *infinita*.
> Considerando que **x** representa um número natural qualquer, represente em seu caderno os seguintes números naturais:
> a) o sucessor de **x**.
> b) o antecessor de **x**, para **x** ≠ 0.
> c) o sucessor do sucessor de **x.**
> d) o antecessor de **x** + 5
> e) o antecessor de **x** – 5 quando existir.
> f) o sucessor do antecessor de **x**, para **x** ≠ 0 (DANTE, 2004, p. 19).

Também é abordada a cardinalidade, e, nessa parte, o autor dá uma grande ênfase ao assunto. Em uma abordagem informal com professores da Matemática do 6° ano, é comum os alunos afirmarem que “infinito é o último número”, mostrando, assim, como se dá o primeiro contato formal dos alunos com o infinito em toda sua vida escolar.

Na 7ª série do ensino fundamental, são introduzidos os conceitos de números inteiros, já distinguindo inteiros positivos e inteiros negativos. O livro-texto utilizado para esta análise foi o da 7ª série da coleção *Tudo é Matemática*, de Dante (2004, p. 16, [grifo do autor]), que mostra números inteiros positivos e negativos através da reta numerada, apresentando contextos que justifiquem o sinal que afeta o número:

> Os números... -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ... são chamados números *inteiros*.
> Se os números naturais foram criados para contar, para que servem os números inteiros? Vamos descobrir?
> Um termômetro pode marcar 3 graus Celsius acima de zero ou 3 graus Celsius abaixo de zero.
> Para indicar essas situações, utilizam-se números com sinais.

> 3 ºC acima de zero: + 3 ºC ou 3 ºC (número positivo).
> 3 ºC abaixo de zero: – 3 ºC (número negativo).

Segundo professores que ministram aulas na 7ª série, o conjunto infinito dos números inteiros negativos, de certa forma, foge à capacidade de abstração dos alunos, principalmente quando são apresentadas as operações com esses números e quando são definidas as relações de ordem, maior ($\geq$) ou menor ($\leq$) com esses mesmos números negativos. A coleção que estamos utilizando como referência, de Dante (2004, p. 124, [grifos do autor]), aborda o assunto assim:

> *Onde está o erro*?
> Lígia resolveu uma inequação em seu caderno. Ao fazer a verificação, percebeu que algo estava errado. Veja:
> - 3x < - 6
> 3x< 6m
> X < -2 => Se X = 1, substituindo na inequação vai dar:
> -3 .1 < -6
> -3 < -6
> Mas -3 é *maior* que -6 !!!
>
> Lígia errou nos cálculos, pois não conhecia uma importante propriedade das desigualdades:
> Se a < b e **c** é um número negativo, então:
> a . c > b . c
> Veja um exemplo:
> 3< 5
> 3. (–2) > 5. (–2)
> –6 > –10

Os professores abordados convivem com um problema bastante delicado no 7° ano, ou seja, com a dúvida não rara entre os alunos: “o que significa menos infinito”. Ainda na análise do livro, é definido o conjunto dos números racionais, explorando frações, números decimais, porcentagem, probabilidade e, principalmente, além dos alunos conhecerem as dízimas periódicas, já trabalham com a identificação das frações que geram essas dízimas, através das equações algébricas, que também fazem parte do conteúdo dessa série.

Conforme Dante (2004, p. 84), ainda no livro da 7ª série da coleção *Tudo é Matemática*:

> “Eu sei que 0,6666... = 2/3, porque 2 : 3 = 0,666... Mas como posso saber que fração indica a dízima 0,777?
> x = 0,777...
> 10x = 7, 777...
> 10x = 7 + 0,777...
> 10x = 7 + x   –> 9x = 7   -> x = 7/9
> Então, 0,777... = 7/9”.

Esta operação de identificação da fração geratriz, segundo todos os professores consultados, não é um assunto a ser discutido no 7° ano. A operação utilizada na identificação, operações com números com infinitas casas decimais, não é compreendida pela maioria dos alunos, tornando, assim, o processo mecânico, sem a construção do conhecimento, refletindo de forma decisiva na 1ª série do ensino médio, quando o assunto volta a ser abordado no estudo dos conjuntos numéricos.

A maioria dos autores apresentam, em suas coleções, nos livros referentes ao 8° ano do ensino fundamental, uma boa revisão dos conjuntos numéricos desde os números naturais até o conjunto dos números racionais. E, no livro da 8ª série da coleção *Tudo é Matemática*, de Dante (2004), é apresentada a primeira noção de densidade de um conjunto. O autor define o conjunto dos números racionais como denso, pois sempre existe um racional entre dois racionais quaisquer. Ainda nos livros do 8° ano, aparecem os números irracionais e o conjunto dos números reais. Nos livros da 8ª série, a abordagem do infinito está limitada aos comentários dos professores em sala de aula, quando falam da densidade dos racionais e reais, garantindo a seus alunos infinitos números entre dois racionais ou dois reais quaisquer. Dante (2004, p. 15, [grifos do autor]), no livro da coleção *Tudo é Matemática*, da 8ª série, afirma:

> Você já sabe: entre dois números naturais nem sempre há um outro número natural. [...]
> Com os números inteiros ocorre o mesmo. [...]
> Agora veja o que ocorre com os números racionais:
> Entre dois números racionais, *sempre* existe um outro número racional.
> Esta é chamada propriedade da *densidade* dos números racionais.

Dizemos, por isso, que o conjunto dos números racionais é *denso*.

Os próprios professores aprovam o fato de os livros didáticos não dedicarem espaço a essa discussão, para que caiba ao professor analisar a possibilidade ou não de discutir o assunto no 8° ano. Além do livro do Dante, foram também analisados, para o 8° ano, o livro da coleção *Matemática ideias e desafios*, de Iracema Mori e Onaca (2006), e o livro do 8° ano da rede católica de educação.

No 9° ano, última série do ensino fundamental, foi analisado, além dos livros da coleção da rede católica de educação, o livro da coleção *Tudo é Matemática*, de Dante (2004, p. 169), em que a abordagem do infinito aparece no estudo das funções.

Por exemplo, o gráfico de y = 80x, dando a x qualquer valor real, fica assim:

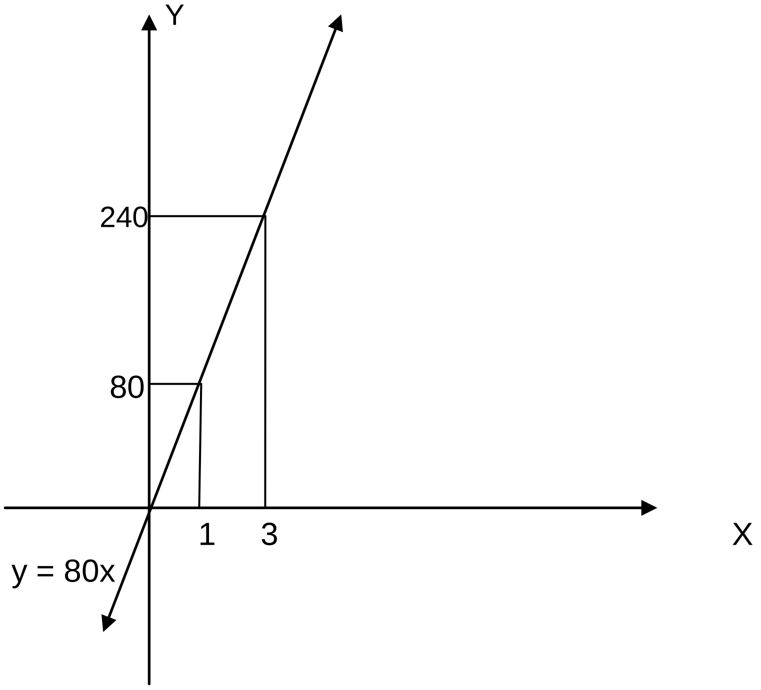


Gráfico 1: Função do 1º grau.
Fonte: O autor (2011).

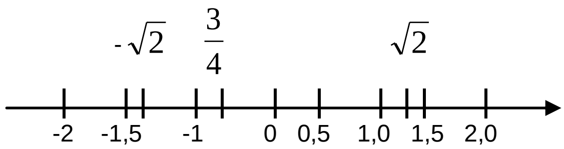
As construções gráficas das funções remetem ao infinito destas linhas, fato pouco explorado nas obras analisadas, assim como as propriedades de injetividade e sobrejetividade, que nem mesmo são citadas. Na opinião de professores, em relação aos gráficos, deveria haver maior atenção dos livros no aspecto das linhas serem infinitas.

Concluindo a análise da abordagem do infinito nos livros didáticos do ensino básico, encerramos o ensino fundamental, certos de que, apesar de a abordagem feita pelos autores não ser tão profunda, pois, basicamente, fazem-na pelos conjuntos numéricos, é decisiva para uma futura compreensão do tema infinito pelos alunos ao ingressarem no ensino médio.

Na análise do tema nos livros do ensino médio, a opção foi abordar o assunto, utilizando o volume único para as três séries, por ser hoje o mais usado nas escolas, em função de um custo mais baixo para os alunos. O livro analisado, nesse caso, é intitulado *Matemática contexto e aplicações*, de Dante (2008).

Na 1ª série do ensino médio, o tema "infinito" é formalmente apresentado no estudo dos conjuntos, que, além de definir intervalos reais, desenvolve as operações com os intervalos, fazendo com que os professores trabalhem bastante com a ideia de não enumerável e infinito. Além dessa abordagem, o estudo das funções é bem apresentada, dando ênfase à classificação das funções como injetivas, sobrejetivas e bijetivas, que parece não ser bem explorada, o que reflete no estudo de cardinalidade para aqueles que continuarão com Matemática no curso superior, mais especificamente em Análise Real. Os gráficos das funções, segundo Dante (2003, p. 23, [grifos do autor]), são bem explorados no aspecto da tendência ao infinito pelas linhas que as representam:

> Com o conjunto R dos números reais, a reta fica *completa*, ou seja, a cada ponto de reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.
> Por isso, dizemos que existe uma *correspondência biunívoca* entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim *a reta real*. A seguir colocamos apenas alguns números reais para exemplificar:



A primeira noção de limite é apresentada na 2ª série do ensino médio, quando os alunos estudam as sequências numéricas, em particular, as progressões aritmética e geométrica. O limite citado se refere à soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, quando o valor absoluto da razão é um número menor que 1:

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Sabemos que Sn = $\frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$.

Numa P.G. infinita, em que $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$, verifica-se que a expressão q^n aproxima-se de zero para **n** suficientemente grande. Em outras palavras, quando **n** tende a $+\infty$, q^n tende a zero.

Assim, de Sn = $\frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$, chegamos a:

$$\frac{a_1 (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{a_1}{q - 1} \text{ , } -1 < q < 1$$

Exemplo 1:

Vamos determinar o limite da soma da PG infinita $\frac{2}{9} + \frac{4}{27}$ ......

As parcelas formam uma PG infinita na qual

$a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2/9}{1/3} = \frac{2}{3}$. Como $\frac{2}{3} < 1$, podemos usar a fórmula $S = \frac{-a_1}{q - 1}$

$$S = \frac{1/3}{1 - 2/3} = \frac{1/3}{1/3} = 1 \text{ .}$$

Logo, o valor procurado é 1 (DANTE, 2003, p. 147-148).

A particularidade do ensino médio é a maneira como os professores são obrigados a trabalhar os assuntos das séries anteriores, pela interdependência dos conteúdos da Matemática. Por essa razão, intervalos infinitos, divisão por zero, sequências, enfim, assuntos que levam os professores ao tema “infinito” são, sistematicamente, abordados em sala de aula.

Na 3ª série do ensino médio, os conteúdos específicos não trazem maiores polêmicas acerca do infinito, mas essa série precede exames como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), vestibulares, enfim, provas que exigirão conhecimentos de todo o ensino médio, logo, na atualidade, em todas as escolas, os assuntos são revistos com maior profundidade em cada conteúdo, consequentemente, envolvendo o tema “infinito”. De um modo geral, foi apresentada aqui a forma como o infinito é abordado pelos livros didáticos das séries de todo o ensino básico, com principal objetivo de enriquecer e justificar a escolha do tema infinito, abordagem esta, como já foi esclarecido, sem a preocupação de oferecer dados científicos.

2.3 A EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE INFINITO

Neste estudo, não se pretende apresentar a história da Matemática ou mesmo de uma parte “infinitamente” pequena dela. O objetivo mais importante é cronometrar esta ideia matemática, desde seu berço aos tempos atuais de forma a nos situarmos no tempo e espaço quanto ao tema “infinito”. O tema, por sua importância e abstração, exige esta breve incursão histórica, sobretudo para entender como foram construídos os conceitos de infinito e de onde vieram essas ideias. Assim como a Matemática utilizada hoje, em diversos setores, o infinito teve berço na Grécia Antiga, quando, por volta do século VII a.C., os gregos começam a questionar a própria existência do homem e seu lugar no universo, procurando a razão, a verdade e, em meio a uma filosofia profunda, surge então o estudo da lógica, um assunto de capital importância no estudo do infinito que tentaremos abordar neste trabalho.

Os filósofos promovem a verdade através da Matemática e, pela primeira vez, em uma abordagem pelo conhecimento e não simplesmente por sua utilidade. Surge em Eléia aproximadamente dois séculos e meio depois, o filósofo Zenão, que, por meio de quatro paradoxos, trouxe o “Horror ao infinito”. Na época, os gregos se negavam às discussões sobre o infinito e o contínuo, sendo que Zenão mergulha na discussão, a partir dos passos gerados por duas concepções envolvendo o infinito. A concepção continuísta que considera o número, o espaço e a matéria como divisíveis ao infinito e a concepção baseada na existência de elementos primitivos indivisíveis, caracterizando a concepção do átomo (EVES, 2004).

O paradoxo de *Aquiles* e *Tartaruga* caracterizam bem o impasse que ocorre entre a não divisibilidade ao infinito do espaço e do tempo e a concepção continuísta. Zenão propõe uma corrida disputada entre Aquiles e uma tartaruga e, por ser desportista, oferece uma vantagem inicial para a tartaruga. Desse modo, é dada a largada: Aquiles percorre aquele espaço dado como vantagem e a tartaruga avança um pouco. Apesar de o espaço entre eles ter diminuído, a tartaruga mantém a vantagem. A corrida então se desenvolve repetindo-se esse processo, ou seja, Aquiles cobre a nova distância que os separa e a tartaruga avança mais um pouco e, assim, sucessivamente. Dessa forma, Aquiles jamais alcançará a tartaruga. O impasse gerado contrapõe a dificuldade em considerar infinitos espaços cada vez menores e a impossibilidade de conceber que a soma desses infinitos espaços possa ser finita (MONTEIRO, 2004).

No paradoxo da dicotomia, a argumentação é mais clara quando propõe que, para um móvel percorrer uma linha inteira, primeiro deve transpor metade dessa linha, e, em seguida, metade dessa metade e, assim, sucessivamente, até chegar ao infinito.

Com esses dois exemplos dos paradoxos de Zenão, é razoável imaginar o impacto causado entre os filósofos na Grécia antiga, pois, pela noção de infinito, Zenão tenta provar a inconsistência dos conceitos de múltiplos e divisores.

Mas é importante se registrar, neste estudo, que Pitágoras, cem anos antes de Zenão, já teria identificado os números irracionais, de vital importância na concepção de cardinalidade dos conjuntos infinitos. Segundo Boyer (2001), Zenão mostrou contradições entre grandezas infinitamente divisíveis e grandezas indivisíveis com seus paradoxos, causando muita preocupação entre os gregos, principalmente por conhecerem os irracionais descobertos pelos pitagóricos.

Platão e seus discípulos utilizavam o método criado por Eudoxo, chamado de método da exaustão, para calcular áreas e volumes, como fuga ao cálculo através de soma de infinitas parcelas, o que envolve valores infinitesimais, e, com isso, distancia a Grécia antiga do estudo do infinito (EVES, 2004). Essa passagem na história do infinito evidencia o nível de abstração que o infinito provocou e, pretendemos constatar neste estudo que provoca discussões e dúvidas até hoje no estudo da Matemática.

Por volta do ano de 350 a.C., Aristóteles veio estudar os paradoxos de Zenão e os intitulou por Aquiles, Seta, Dicotomia e Estádio, nomes que passaram a identificá-los como até hoje. As argumentações de Zenão levaram à discussão do infinito visto por dois horizontes: um conhecido por infinito Potencial, formalizado como uma construção da mente humana, necessária na resolução de problemas com grandezas infinitamente pequenas ou infinitamente grandes, de forma a caracterizar algo não alcançável, e o infinito atual, já admitindo a existência de uma entidade de dimensões não finitas, mas algo que, de fato, existe apesar de ser infinito, passível de uma formalização. A polêmica do infinito através dos tempos nos remete sempre a discussões, críticas, como na época de Aristóteles (1996, p. 71-88), que acreditava no infinito potencial, negava o infinito atual, como fica claro em suas colocações:

> Se é impossível que um lugar seja infinito e que todo o corpo ocupa um lugar, então é impossível que esse corpo seja infinito. (...) Pois bem, se o infinito não se pode quantificar – senão uma quantidade como de duas ou três coisas, pois isto é o que significa quantidade – assim também o que está num lugar é assim porque ocupa algum sítio: e isto para cima ou para baixo, ocupando uma das seis direcções, e cada uma destas apresenta um certo limite. Fica claro que na actualidade não existe um corpo infinito. (...) Tornando-se evidente que o infinito existe num sentido e noutro não. Pois bem, diz-se que é, por um lado, em potência e por outro em actualidade. (...) De maneira que existe um número infinito em potência e não actualidade.

Arquimedes de Siracusa foi outra personalidade da História que muito contribuiu no estudo do infinito. Seu trabalho, escrito por volta de 250 a.C., foi considerado um dos que mais contribuíram para o Cálculo Integral. Utilizou o método de exaustão para determinar o valor da área de um polígono regular aumentando o número de lados, aproximando-o da área de um círculo. Esse método, da exaustão, criado por Eudoxo, é fundamental no Cálculo, por ser hoje o caminho do limite com a utilização de somas de infinitas parcelas, o que não era considerado quando de sua criação (SAMPAIO, 2010).

Até então, apesar de negar o infinito, os gregos foram os primeiros a tomar consciência dos problemas relacionados com o conjunto infinito, permitindo, em seus trabalhos, o princípio dos estudos desse tema tão polêmico ao longo da história da Matemática.

Poucos registros são conhecidos sobre o tema “infinito” a partir do período citado e continuou assim, na Idade Média, apesar de já se ter constatado muita produção matemática naquele período, que foi aproximadamente de 476 a 1453, orientado pelas ideias de Platão e de Aristóteles. Aristóteles inspirou São Tomás de Aquino, que também negava o infinito atual (um objeto pré-existência de dimensões não finitas) e mesmo antes dele, Santo Agostinho, em sua obra *Cívitas Dei*, aceita a sequência dos números inteiros como um infinito atual, mas o infinito absoluto é uma dádiva de Deus (SAMPAIO, 2010).

Segundo Sampaio (2010), durante a Idade Média, marcada por alguns historiadores entre a queda de Roma em 476 e a queda de Constantinopla em 1453, há poucos registros acerca do desenvolvimento das ciências, particularmente da Matemática, prevalecendo o pensamento de Platão e Aristóteles, mas como já relatamos, foi uma época rica na produção de Matemática. Ao final da Idade Média, com a queda de Constantinopla, foram recuperadas obras acerca do pensamento grego, como o horror ao infinito, e levadas ao Ocidente. Esse pensamento, vindo da Grécia antiga, não chegou a contaminar os filósofos escolásticos os quais, alguns sábios gregos foram conduzidos para o Ocidente, levando com eles o pensamento grego, o horror ao infinito, bem caracterizado na Grécia antiga, fato que não contaminou os filósofos escolásticos, os quais, debruçados em estudos sobre o infinito, trouxeram à tona este, que era um grande problema da Matemática, trazendo como consequência o desenvolvimento do cálculo infinitesimal no século XVII. Durante a Idade Média, a Igreja teve um papel muito importante na sociedade, e alguns religiosos como São Tomás de Aquino e Santo Agostinho tiveram papel importante na discussão do infinito.

Santo Agostinho (1993, p. 83) afirma:

> Dizer que nem a ciência de Deus é capaz de compreender as coisas infinitas é o que lhes falta ao atrevimento, para precipitar-se na voragem de profunda impiedade, que afirma não conhecer Deus todos os números. E muito certo que são infinitos. Com efeito, seja qual for o número que pretendas formar, não apenas pode aumentar pela adição de uma unidade, mas também, por maior que seja e por mais prodigiosa que seja a quantidade que encerra em si a razão e ciência dos números, não somente pode ser duplicada, mas também multiplicada ao infinito. (...) Tal infinidade conjunta de todos os números é que escapa à ciência de Deus, que compreende certa quantidade de números e ignora os demais? Quem dirá, por mais louco que esteja?

O século XVII foi considerado século do gênio. De muita importância para os matemáticos, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, somas de infinitas parcelas, enfim, a Matemática avançou, principalmente, no tema deste trabalho, sendo estabelecida pela primeira vez a correspondência entre termos infinitos por Galileu Galilei (1638), em sua obra *Diálogos relativos a duas novas ciências*, quando relacionou (sistema um a um) o conjunto dos inteiros e o conjunto dos quadrados perfeitos, sem trazer à discussão a cardinalidade, mas afirmando que quantias infinitas não devem ser comparadas (maior que, menor que ou igual a), gerando um paradoxo com suas conclusões, de que nem o conjunto de inteiros é maior que o de quadrados nem o de quadrados é menor que o de inteiros (SAMPAIO, 2010).

Em 1655, no trabalho de Jonh Wallis, aparece pela primeira vez o símbolo "∞" para representar 1/0, introduzindo o estudo das séries infinitas que serviram de inspiração a Isaac Newton (1642-1727) ao escrever sua "Teoria das fluxões", em que os infinitesimais eram chamados "momentos de fluxões" (SAMPAIO, 2010). Paralelamente a Newton, aparece Leibniz, que introduziu a notação hoje usada de cálculos diferenciais e cálculos integrais. Foi ele quem fixou dx e dy com as diferenças menores possíveis. Os processos utilizados por Newton, a Teoria das fluxões, são bem próximos do que é feito hoje, mas a grande aceitação das comunidades matemáticas foi mesmo com as notações diferenciais de Leibniz (SAMPAIO, 2010).

No século XVIII, um dos maiores nomes de produção Matemática, Leonhard Euler (1707-1783), surge na cidade de Basiléia e revoluciona a produção de Matemática, tendo 560 trabalhos publicados em vida e muitos outros após sua morte. Muitos símbolos como e, π, i, f(x), entre outros, foram de sua responsabilidade, e, dentro do tema escolhido para esta dissertação, segundo Struik (1997 apud SAMPAIO, 2010, p. 9-10), "O grande prestígio de seus textos resolveu para sempre muitas questões controversas sobre a notação na álgebra e no cálculo infinitesimal". Euler mantinha correspondência frequente com D'Alambert, da França. Este acreditava que o cálculo tinha de fundamentar-se na ideia de limite substituindo quantidades infinitesimais. D'Alambert nunca aceitou o infinito atual por pensar sempre em grandezas geométricas, o que o remetia a um infinito potencial. Ainda no século XVIII, surgiu Lagrange, que viveu durante a Revolução Francesa e que rejeitou as teorias de limite de Newton e D'Alembert, dedicando-se ao cálculo pela álgebra (SAMPAIO, 2010).

A grande discussão do infinito se iniciaria, de fato, no século XIX. Até então, os matemáticos não haviam ainda aprofundado no tema e alguns deles evitavam, de alguma forma, esta discussão. A partir desse século, influenciados talvez pela Revolução Francesa, surgem matemáticos de mentes mais abertas, provocando uma revolução nas ciências, em particular na Matemática, que passa a ser uma ciência autônoma, independente de outras áreas de conhecimento. Assim, a partir daqui, a Matemática se subdivide em duas áreas de conhecimento: a de Matemática pura e a de Matemática aplicada, e os matemáticos começam a refletir sobre os fundamentos da Matemática e não só sobre os resultados obtidos através dela.

Vale lembrar que um dos propulsores desses estudos foi Augustin Cauchy (1789-1857), que buscou dar respostas através do cálculo a uma série de paradoxos que aterrorizavam a Matemática desde Zenão de Eléia. Foi ele quem fundamentou o cálculo utilizado hoje e, principalmente, o conceito de integral como limite de uma soma. Ainda nessa época, surge Karl Weierstrass (1815-1897), que, além dos trabalhos na Matemática, como professor, defendeu o rigor no estudo das séries infinitas (SAMPAIO, 2010).

Grandes matemáticos como Cauchy, Bolzano e Weierstrass desenvolveram, com rigor, os métodos de cálculo infinitesimal com base na noção de limite.

Bolzano (1991), nascido em Praga, defende o infinito atual em sua obra *Paradoxos do infinito*, mudando a história do infinito, e, em seus estudos, tenta estabelecer um critério de comparação entre conjuntos infinitos, fazendo sobressair a importância da cardinalidade nesses conjuntos infinitos, como se pode observar em seu próprio texto:

> Quando dois conjuntos são infinitos, pode haver uma relação tal que, por um lado é possível associar cada elemento do primeiro conjunto com algum elemento do segundo de tal forma que nenhum elemento dos dois conjuntos fique sem associação e também que nenhum dos elementos tenha mais que uma associação, e por outro lado é possível que um conjunto possa conter o outro como uma parte de si (BOLZANO, 1991, p. 64).

Bolzano, apesar de ter trabalhado, exaustivamente, o infinito, não conseguiu responder ao grande questionamento: o que é o infinito?

Na tentativa de responder a essa pergunta, Dedekind, inspirado em Eudoxo e na Teoria das proporções, construiu a teoria rigorosa sobre os irracionais, eliminando os “buracos” existentes na reta quando os pontos da reta estão associados aos números, criando os números reais e definindo o conjunto infinito. Cantor, também preocupado com a mesma pergunta sobre o infinito, criou a Teoria dos conjuntos que, nas palavras de Hilbert, grande matemático que em uma conferência formalizou 23 Problemas Matemáticos sem solução. Hilbert (apud SAMPAIO, 2010, p. 219), na conferência que deu a 4 de junho de 1925, afirmou: ”ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”. Assim, a partir das considerações apresentadas, temos um reflexo da importância da construção de Cantor para o universo da Matemática

Todos os matemáticos citados a partir do século XIX aprofundaram estudos sobre infinito, outros vêm substituindo, partindo dos estudos dos anteriores, e, na verdade, o infinito não só no passado, mas também hoje em dia, é um tema abstrato, haja vista que todos os seres humanos têm uma pré-concepção do infinito, conflitante com o que realmente representa para a Matemática e a continuidade do desenvolvimento dessa Matemática, pois, com certeza, ainda há muito a ser compreendido acerca desse tema.

2.4 CONCEITO DE INFINITO E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O grande desafio da Educação Matemática, cada vez mais presente no contexto educacional, é facilitar, contextualizar, melhorar o processo de ensino-aprendizagem, enfim, humanizar uma área de conhecimento que não tem tido sucesso nas salas de aula na forma em que, tradicionalmente, é apresentada. Seguindo essa orientação, este trabalho se caracteriza, sobretudo, por apresentar um tema bastante árido, de uma forma mais suave, mais compreensível, mais acessível, mesmo para quem não tem tanta afinidade com o estudo de Análise Real. Para tanto, com base na dissertação de Mestrado de Flávio Luiz Amadei (2005), intitulada *O infinito*: um obstáculo no estudo da Matemática, vamos tentar mostrar que, mesmo enfrentando extrema abstração desse tema, existem pesquisas envolvendo o infinito com as mais variadas abordagens possíveis. Amadei utilizou-se de três artigos que abrangem pesquisas em Educação Matemática para esclarecer como a Educação Matemática percebe o tema “infinito” no processo ensino-aprendizagem. O primeiro artigo usado por Amadei, de John Monaghan, intitulado "Ideias do infinito", descreve uma pesquisa realizada com jovens na iminência de ingressar nas universidades, normalmente com menos de 19 anos, sobre como percebem o infinito. O objetivo de Monaghan, segundo Amadei (2005) em sua dissertação, era obter um resultado não contaminado pelo que, tecnicamente, tem-se estabelecido sobre infinito como no cálculo de limite ou nos estudos de Cantor, mas, de qualquer forma, sabia ser impossível não haver alguma correlação com estudos já tradicionalmente conhecidos do infinito.

No trabalho de Amadei (2005), foram abordadas, em primeiro lugar, as armadilhas potenciais a que estão sujeitas pesquisas em Matemática envolvendo o tema “infinito”. Entre as possíveis armadilhas, talvez a mais importante delas seja a possibilidade de percepção do entendimento dos entrevistados do conceito de infinito, a fim de perceber como esses jovens interpretam processos que nunca acabam, tais como a subdivisão de um segmento de reta ou de sequências intermináveis de números como os naturais ou mesmo o fato de uma operação continuar indefinidamente. A principal causa dessa armadilha, segundo o artigo, é como abordar o jovem acerca desse conceito, se a vida é aparentemente finita, o que sugere a falta de referências para argumentação, levando esse jovem a responder sem que tenha muito sentido o que relatou ou acreditando entender, apresente uma resposta para que tenha certo significado, tornando o resultado de pesquisa muito perigoso, ou ainda a possibilidade de o jovem entender algo diferente do que o pesquisador pretende, e, não muito raro, o pesquisador não perceber essa interpretação errada do objeto da pesquisa. É fato que tais problemas não são exclusividade desse tipo de pesquisa, mas o tema se apresenta como agravante para equívocos de interpretação.

Um segundo problema, também considerado uma armadilha, é a forma como a maioria dos professores de Matemática se referem ao infinito, como contextualizam o tema em seus conteúdos em sala de aula. De acordo com o relato de Amadei (2005), professores de Matemática tratam do assunto naturalmente, quando citam séries que nunca terminam, mas que apresentam uma resposta exata, como no exemplo das progressões geométricas no ensino médio: a adição dos termos da sequência: 0,1 + 0,01 + 0,001 + ... que não para nunca, um valor definido. O que ocorre, de fato, nesses casos, é que os professores não se situam, como seus alunos, no tempo e no espaço, ao fazerem uma análise de forma tão simples. Para a maioria dos alunos, há um problema a ser superado: como adicionar infinitas parcelas sem considerar que é preciso um tempo infinito para efetuar esta operação? Segundo Monaghan (2001 apud AMADEI, 2005, p. 72): "Isto, no entanto é estranho e não devemos esquecer que é estranho. Isto não ocorre como no mundo real". O autor afirma que, fora da Matemática, é impossível continuar somando para sempre, pois morre-se antes. Segundo Monaghan, em um outro trabalho, nesse sentido, de Nunes (1970), existem fortes indícios de que a pesquisa caiu nessa armadilha. Ao formular a jovens entre 8 e 12 anos um problema que consiste em ir de um lado a outro de uma mesa, progredindo a cada etapa, a metade da distância que ainda falta até atingir o outro lado da mesa, e, no final, os alunos deveriam responder se o outro lado da mesa seria atingido algum dia. Apesar de Nunes tentar explorar um dos paradoxos de Zenão com jovens, por não conhecerem as complicações matemáticas, dificilmente perceberiam o paradoxo. Um resultado importante nessa pesquisa é a forma como crianças de diferentes idades usavam argumentos finitos e infinitos sobre o problema.

Nesse artigo, Monaghan (apud AMADEI, 2005) faz uma análise do trabalho de Jean Piaget, referente à natureza contraditória do infinito, questionando suas afirmações que crianças veem o infinito de uma forma hierárquica, em forma de estágios, e consistente. Suas críticas se baseiam no trabalho de Fishbein, e um grupo de colegas utilizaram referências teóricas posteriores a Jean Piaget, com base na natureza contraditória dos conceitos que os jovens têm quanto a limite e infinito. Neste estudo, o processo de intuição tem importante papel no trabalho de Fishbein, cuja principal hipótese por ele considerada é que nossa intuição do infinito é contraditória por contrastar com todos os nossos esquemas lógicos adaptados ao que é finito. Essas constatações, na pesquisa realizada, foram concluídas pelas respostas antagônicas obtidas no desenvolvimento do trabalho, variando entre raciocínios infinitistas e outros finitistas. Fishbein trabalhou com 470 indivíduos, entre 10 e 15 anos, e obteve uma série de outros resultados propostos por sua pesquisa.

Importa ressaltar que a proposta deste trabalho não inclui um estudo detalhado do infinito sob o olhar da Educação Matemática, mas achamos de grande importância o trabalho de Monaghan, que bem caracteriza a grande preocupação dessa nova área de conhecimento com as dificuldades no estudo da Matemática. A Educação Matemática, consolidada nos tempos atuais, já representa parte significativa na preocupação de professores de todas as séries, tanto do ensino básico quanto do ensino superior, com relação à aprendizagem dos conteúdos da Matemática.

Hoje, não é raro observar a grande preocupação de professores de Matemática com o fracasso de seus alunos, quando o fracasso atinge um número significativo em uma sala de aula, principalmente nas séries do ensino básico.

A Matemática permite melhor compreensão do que as atuais propostas e, com o avanço significativo, a Educação Matemática caminha ocupando as lacunas que a Matemática, por si só, não preenche e, neste trabalho, esta representa maior preocupação.

2.5 INFINITO: A FORMALIZAÇÃO

O infinito, tema motivador deste trabalho, aparece das mais variadas formas desde Zenão de Eléia, com seus paradoxos que criaram o horror ao infinito na antiga Grécia, até os estudos de Cantor, no final do século XIX, que tanto encantam na Matemática até os dias de hoje. O infinito aparece na ideia de Zenão, quando, em um de seus paradoxos, propõe que um segmento de reta pode ser dividido indefinidamente, ou quando se obtém o círculo como “estado resultante” de uma sequência de polígonos regulares quando o número de lados aumenta indefinidamente, segundo o artigo de Antônio Luis Mometti e da professora Drª. Janete Bolite Frant (2010), da Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo, intitulado “O infinito e as metáforas no ensino de Cálculo”, ou ainda quando lemos no livro didático do 7° ano do ensino fundamental, de Dante (2004), no estudo dos números racionais a igualdade 0,9999... = 1.

Além das formas aqui relacionadas identificando como o infinito se apresenta, é possível enumerar muitas outras. Particularmente, a melhor forma de se trabalhar com o infinito e ter um pouco mais de controle acerca de resultados são os processos de limites. A opção escolhida neste trabalho, para a abordagem do infinito, foi através da cardinalidade dos conjuntos e das séries infinitas que representam somas de infinitas parcelas. Esta opção foi motivada, principalmente, por ser o processo de contagem e os conjuntos numéricos por serem os conteúdos mais importantes e também mais explorados no ensino básico.

2.5.1 A cardinalidade na sua forma mais simples

Como este trabalho será norteado pela cardinalidade, será apresentada, neste subitem, a construção do conceito de cardinalidade em sua forma mais elementar, presente nas primeiras noções de contagem desenvolvidas com as crianças na educação infantil, a partir dos 5 anos, e nas séries iniciais do ensino fundamental. Com isso, poder-se-á ter maior clareza desse conceito na análise dos conjuntos finitos, facilitando, de forma decisiva, a introdução do conceito de cardinalidade dos conjuntos infinitos, que será apresentada mais à frente.

O primeiro contato das crianças com o conjunto N dos números naturais se dá de uma forma natural e gradativa, com a contagem de objetos de coleções finitas, apresentadas de forma lúdica, por meio de desenhos ou com os próprios objetos das coleções, para que o exercício da contagem seja estimulado, como se pode observar tanto no livro para educação infantil intitulado *Vai começar a brincadeira*, de Marília Centuriun e Arnaldo Rodrigues (2007), como no livro para a 1ª série do ensino fundamental, *Pensar e construir*, de Maria Inêz de Castro Cerullo, Maria Tomie Shirahise Sato e Regina Maria Chacur (2002).

Nos primeiros contatos, independente de a criança estar “contando” objetos mentalmente ou utilizando os cardinais que representam essas quantidades, todo processo de contagem sempre apresenta uma sequência de números naturais que vai do número natural 1 (um) até o natural “n”, que representa a quantidade total de objetos daquela coleção. Este número natural, que indica a quantidade de objetos de uma coleção, é traduzido como quantidade de elementos de um conjunto. Assim como nas séries iniciais, a enumeração dos elementos de um conjunto finito será feita utilizando-se uma sequência de naturais a partir do número natural 1 (um) até o natural “n”, que representará a cardinalidade do conjunto. Para essa enumeração, são utilizados subconjuntos finitos do conjunto dos números naturais que são representados por *gamma* índice n (Γ_n), onde $\Gamma_n = \{1,2,3...,n\}$.

Assim como nas séries iniciais em que são identificadas quantidades diferentes por cardinais diferentes, tem-se aqui, para m≠n, $\Gamma_m \neq \Gamma_n$, ou seja, não existirá correspondência biunívoca (um a um) entre os respectivos conjuntos gamma, evidenciando cardinalidades diferentes: card (Γ_m)=m e card (Γ_n)=n como m≠n, card (Γ_m)≠ card (.Γ_n).

Outra ferramenta de grande utilidade no estudo da cardinalidade é o estudo das funções, que permite afirmar que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se existir uma função de um conjunto no outro que seja bijetiva.

Para ilustrar a ideia, será analisado o conjunto dos dias da semana, cuja cardinalidade é 7, e o conjunto dos dedos de uma mão, cuja cardinalidade é 5, logo, não há possibilidade de haver uma relação biunívoca entre os elementos desses conjuntos, que teriam correspondência, respectivamente, com os conjuntos *gamma*: $\Gamma_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $\Gamma_5 = \{1,2,3,4,5\}$.

2.5.2 Injetividade e bijetividade

Para tratarmos do tema infinito, como já foi esclarecido, optamos por abordá-lo pelo aspecto da cardinalidade dos conjuntos. A cardinalidade, depois da primeira análise para conjuntos finitos, será abordada de forma mais rigorosa para conjuntos infinitos um pouco mais à frente. Informalmente, dizemos que é o “tamanho” de um conjunto, ou ainda, a quantidade de elementos desse conjunto. Nos conjuntos finitos, apesar de não ser tão simples, é razoável entender que uma contagem seria suficiente para esta medida do “tamanho” do conjunto, mas, nos conjuntos infinitos, a contagem fica prejudicada, obrigando-nos a utilizar outro procedimento. Vamos então buscar, nas funções, ferramentas para a medição do que chamamos, informalmente, de “tamanho” dos conjuntos infinitos. A partir das propriedades de injetividade e bijetividade das funções, será possível fazer uma análise completa sobre quantidade de elementos de conjuntos infinitos.

Revendo de forma sucinta a definição, uma função de um conjunto A em um conjunto B, representada por $f: A \rightarrow B$, significa uma relação entre os conjuntos, através de uma fórmula ou uma regra que, quando aplicada aos elementos do conjunto A, fornece correspondentes no conjunto B. Nessa relação, o conjunto A, conjunto de partida da função, é chamado domínio, enquanto que o conjunto de chegada, conjunto B, é chamado contradomínio da função. É através da regra f que associamos elementos do conjunto A com elementos do conjunto B. Vale lembrar que não são todas as relações entre conjuntos que vão caracterizar funções. Na verdade, uma relação entre dois conjuntos A e B é chamada de função, se, e somente se, todo elemento do conjunto A, domínio da função, tem um, e somente um, elemento correspondente no conjunto B, contradomínio dessa função.

A partir da definição de função, passamos a falar das ferramentas que as funções vão nos fornecer para entender a cardinalidade dos conjuntos. Se, em nossa prática docente, o professor tivesse a visão e sensibilidade da importância das funções no estudo de um ente matemático, tão complexo e abstrato como é o infinito, certamente, teria detalhado melhor as funções, principalmente quanto às propriedades de injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Ao definir funções, vimos que ao conjunto B, contradomínio da função, é permitido ter elementos que não têm correspondente no conjunto A, domínio da função, e ainda é permitido que um mesmo elemento do conjunto B tenha mais de um correspondente no conjunto A, domínio da função. Essa liberdade gerou uma forma de classificação das funções, que vai ser decisiva para o nosso propósito com conjuntos infinitos.

Assim, as funções são classificadas como injetoras ou injetivas, quando cada elemento do conjunto B (contradomínio) é correspondente a um, e somente um, elemento do conjunto A (domínio), e sobrejetora ou sobrejetiva, quando todo elemento do conjunto B (contradomínio) tiver pelo menos um correspondente no conjunto A (domínio). Se ocorrerem as duas situações simultaneamente, chamamos a função de bijetora ou bijetiva. Os livros didáticos que foram consultados apresentam esta definição sem a preocupação com a fomalização matemática, ilustrando com exemplos que passamos a mostrar a seguir.

Exemplo 1: Dados os conjuntos A = {1,2} e B = {2,3,4,5,6}, e a função f: $A \rightarrow B$, que associa cada elemento de A ao seu triplo em B, representa uma função injetiva, pois, a cada elemento de B, corresponde um único elemento em A como se segue: f(1) = 3 e f(2) = 6. Mas a função f não é sobrejetiva, pois existem elementos em B que não têm correspondente no conjunto A.

Exemplo 2: A função f: $R \rightarrow R$ chamada de função real e definida pela regra f(x) = x + 2 é bijetiva, visto que ela é, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva; cada elemento do contradomínio R tem como correspondente, no domínio R, um outro elemento, duas unidades menor que ele, que sempre existe e é único.

Exemplo 3: A função f: $R \rightarrow R$, definida pela regra f(x) = x^2 , é sobrejetiva, pois todo número real, positivo ou zero, é imagem de pelo menos um elemento de R pela função, ($x = \pm\sqrt{f(x)}$), mas não é injetiva, pois temos dois valores distintos de x para um mesmo valor de f(x), ou seja, para f(x) = 9, x pode ser +3 ou -3.

Exemplo 4: A função sucessora, f: $N \rightarrow N$ definida por f(n) = n + 1 é injetora, pois qualquer número natural, com exceção do primeiro, é sucessor de apenas outro natural pela própria característica básica do conjunto N de representar a contagem matemática. Assim, o número natural 2 é sucessor do 1, o 3 é sucessor do 2, o 4 é sucessor do 3, e assim por diante. Mas a função não é sobrejetora em função de o primeiro número natural, o que para este estudo será o número 1 (um), não ser sucessor de outro natural, descaracterizando a sobrejetividade, como mostra o Diagrama 1 a seguir:

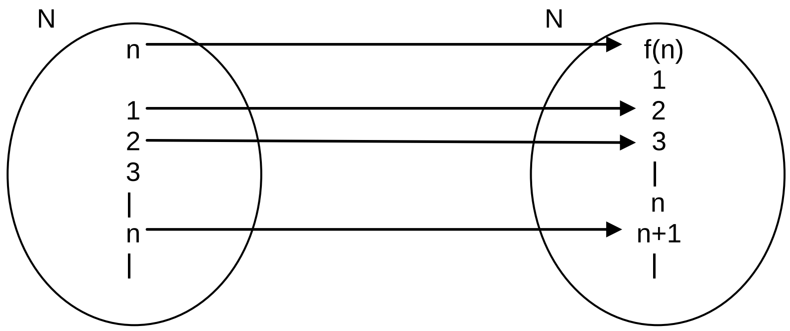


Diagrama 1: Função sucessora.
Fonte: O autor (2011).

Relembramos que os exemplos utilizados foram extraídos do livro didático do ensino médio intitulado *Matemática contexto e aplicações*, de Luis Roberto Dante (2003). Percebemos que o nível de exigência na 1ª série do ensino médio não requer muita abstração, por isso permite ao professor aprofundar no tema em função da assimilação da turma.

Traduzindo essas duas importantes propriedades das funções para uma linguagem matemática, com certo rigor, teremos a injetividade e a sobrejetividade.

Injetividade:

Uma função f: A → B chama-se injetiva quando, dados y e x quaisquer no conjunto A, temos que f(x)=f(y) somente se x=y. Podemos também enunciar pela negação se x≠y em A, então f(x)≠f(y), no conjunto B. Como foram utilizadas as duas notações, esclarecemos que f é a função e f(x) ou f(y) e representam valores que a função assume nos pontos x e y do domínio da função. O melhor exemplo dessa propriedade é a função comumente chamada de inclusão, que se caracteriza por relacionar elementos iguais de um conjunto em um outro que o contém, ou seja, A ⊂ B e i: A → B é a função que leva o elemento a Є A no elemento i(a)=a Є B, logo, obrigatoriamente, este é um bom exemplo de injetividade.

Sobrejetividade:

Uma função f: A → B é sobrejetiva quando, para todo y Є B, existe pelo menos um x Є A tal que f(x)=y.

Assim, dessas propriedades, podemos extrair ferramentas importantes para lidar com quantidades de elementos dos conjuntos infinitos.

2.5.3 Aprofundando no tema cardinalidade

Antes de nos aprofundarmos no tema infinito, vamos reafirmar algumas considerações envolvendo a cardinalidade dos conjuntos que, perdendo o rigor exigido pelo tema, informalmente, dizemos que é o "tamanho" de um conjunto, informação esta não tão importante para este estudo e, podemos assegurar, não é um assunto tão simples de ser estudado. Cumpre ressaltar, o que, de fato, estudaremos é a comparação entre os tamanhos de dois conjuntos, permitindo, a partir dessas informações, lidar com a cardinalidade dos conjuntos infinitos, ou seja, pretendemos comparar "infinitos".

Esta análise de cardinalidade por comparação está bem estruturada por Paul H. Halmos (2001), em sua obra *Teoria ingênua dos conjuntos*, mostrando que a contagem parece ser, em um primeiro momento, a maneira mais adequada para analisar o tamanho de um conjunto, mas não resiste a uma análise superficial para se mostrar ineficaz. Para a contagem, é natural que se proceda a ordenação de seus elementos e, como podemos ordenar os elementos de um conjunto de várias maneiras, o número ordinal resultante pode refletir em "tamanhos" diferentes para o mesmo conjunto.

Como já mencionado, faremos a comparação entre os tamanhos de dois conjuntos e, para tanto, utilizaremos o processo que chamamos EQUIVALÊNCIA, ou seja, uma correspondência um a um entre os elementos dos dois conjuntos, que definimos como uma bijeção entre os conjuntos X e Y. Podemos então escrever: Se X e Y têm uma correspondência um a um entre seus elementos, ou seja, se existe uma bijeção entre os conjuntos X e Y, então, X e Y são equivalentes, que representamos $X \approx Y$, ou ainda card(X) = card(Y).

Caso X e Y sejam tais que X é equivalente a um subconjunto de Y, dizemos que Y domina X, e representaremos X Y, ou card(X) ≤ card(Y).

A partir da noção apresentada por Paul H. Halmos sobre equivalência de conjuntos, vamos normatizar as notações que serão utilizadas, apresentando o conjunto N = {1,2,3,...} dos números naturais e os subconjuntos de N, finitos, que passamos a apresentar.

Fixado $n \in N$, Γ_n representará o conjunto de números naturais consecutivos que vão de "1" até "n", ou seja, $\Gamma_n = \{p \in N;\ 1 \leq p \leq n\} = \{1,2,3,...,n\}$, já apresentado aqui neste trabalho nas primeiras noções de cardinalidade e que passamos a formalizar com mais rigor. Definimos também a cardinalidade desses subconjuntos pelo número "n", sendo representada pela quantidade de elementos desses subconjuntos, e escrevemos: card (Γ_n) = n, onde se lê: cardinalidade de *gamma* n igual a n. Definimos card (ϕ) = 0, onde "ϕ" representa o conjunto vazio.

Definidos os subconjuntos Γ_n de N, passamos a analisar a cardinalidade dos conjuntos resultantes de operações com estes subconjuntos.

card (Γ_n) = n

Como Γ_n representa os naturais até n, $\Gamma_n = \{1,2, ..., n\}$, temos:

$\Gamma_n \cap \Gamma_m = \Gamma_i$ onde i = mínimo {m, n}

$\Gamma_n \cup \Gamma_m = \Gamma_i$ onde i = máximo {m, n}

Por tanto, segue que:

card ($\Gamma_n \cap \Gamma_m$) = mínimo {m,n}

card ($\Gamma_n \cup \Gamma_m$) = máximo {m,n}

Faremos, a seguir, uma análise mais rigorosa da cardinalidade de conjuntos finitos e infinitos, tomando sempre como referência o conjunto N dos números naturais e seus subconjuntos finitos que acabamos de definir.

2.5.4 Conjuntos finitos, infinitos, limitados e ilimitados

2.5.4.1 Conjuntos finitos

Começaremos com o seguinte teorema básico, mas de grande importância para nossos propósitos neste estudo.

Teorema 1: *"Sejam X um conjunto não vazio e os números naturais n e m. Suponhamos que existam funções f e g bijetoras entre X e Γ_n e entre X e Γ_m respectivamente, então n = m".*

Para demonstrar esse teorema, é preciso que esteja bastante claro o que ele nos diz. Por intuição e razoabilidade, a bijeção entre o conjunto X e um conjunto *gamma* significa a contagem dos elementos do conjunto X, pois, fazendo, por exemplo, na bijeção f: $\Gamma_n \rightarrow X$, a correspondência biunívoca entre os elementos dos dois conjuntos e colocando $f(1)=x_1$, $f(2)=x_2$, ..., $f(n)=x_n$, obtemos então a contagem dos “n” elementos do conjunto X. Da mesma forma, por ser a função g: $\Gamma_m \rightarrow X$ outra bijeção, temos a enumeração dos, agora, “m” elementos do conjunto X, bastando para isso fazermos $g(1) = x_1$, $g(2) = x_2$, ..., $g(m) = x_m$. Ora, se o conjunto X, finito, é o mesmo nas duas funções bijetoras, as relações só se verificam se m=n, que representa, de fato, a cardinalidade do conjunto X. Naturalmente que a Matemática, não permitindo ambiguidade, exige, a título de demonstração, fatos matemáticos que comprovem todas as afirmações que sejam feitas, descartando, desse modo, a intuição, a razoabilidade, ou mesmo, conjecturas acerca do óbvio.

Demonstração: Sendo assim, para demonstrar esse teorema, utilizaremos o resultado obtido quando tomamos um conjunto *gamma* índice n e um subconjunto seu como enunciado no lema abaixo.

Lema: *Seja* $X \subset \Gamma_n$. *Se existir uma bijeção f:* $\Gamma_n \rightarrow X$, *então* $X = \Gamma_n$

Para demonstrarmos esse lema, utilizaremos o processo de indução em n, que, recordando o caminho indicado pelo processo, devemos mostrar que a afirmação é válida para n = 1 e, supondo ser válida para um certo n fixado, devemos provar que vale para seu sucessor n + 1, garantindo, assim, ser válida para todo n Є N.

Para n = 1, é trivial que se $\Gamma_1 = \{1\}$ está em bijeção com X, então X = {1}.

Considerando válido para um n fixado, vamos então mostrar que vale para n + 1.

Consideremos a função f: $\Gamma_{n+1} \rightarrow X$ uma bijeção.

Fazendo x = f(n+1), e considerando que a função f está restrita a Γ_n, vamos tomar a bijeção f': $\Gamma_n \rightarrow X - \{x\}$, e teremos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $X - \{x\} \subset \Gamma_n$

Pela hipótese de indução, $X - \{x\} = \Gamma_n$ e x = n + 1

2ª possibilidade: $X - \{x\} \not\subset \Gamma_n$

Nesse caso, n+1 Є X – {x}, então, existe um p Є n+1 tal que f(p) = n + 1. Vamos então utilizar outra bijeção g: n+1 → X. Esta função g(x), além de garantir a bijeção de f(x), incluirá os elementos p e n + 1, ou seja, g(x) = f(x) para todo $x \neq p$ ou $x \neq n + 1$, e nestes pontos, temos g(p) = x e g(n+1) = n + 1.

Repetindo o processo, temos a bijeção da função g(x) restrita ao conjunto Γ_n, obrigando-nos a uma nova bijeção $g': \Gamma_n \rightarrow X - \{n+1\}$, por consequência $X - \{n+1\} = \Gamma_n$, completando, assim, o processo de indução.

Vamos utilizar, de forma esquemática, as duas possibilidades analisadas de modo a permitir uma melhor visualização dessas possibilidades:

1ª possibilidade: $X - \{x\} \subset \Gamma_n$

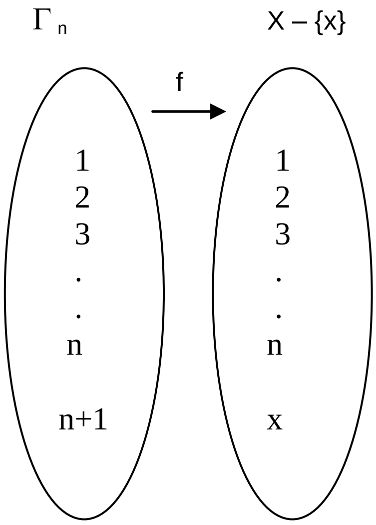


Diagrama 2: Bijeção da função.
Fonte: O autor (2011).

$X - \{x\} \subset \Gamma_n$ e $f: \Gamma_n \rightarrow X - \{x\}$ uma bijeção

Então

$X - \{x\} = n$, $x = n + 1$, logo $X = n+1$

2ª possibilidade: $X - \{x\} \not\subset \Gamma_n$

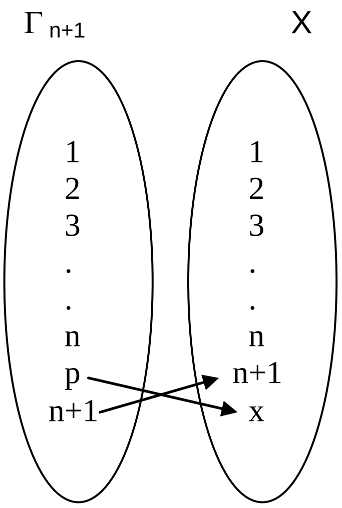


Diagrama 3: Bijeção da função.
Fonte: O autor (2011).

$g(x) = f(x)$ para $x \neq p$ e $x \neq n + 1$

$g(p) = x$ e $g(n+1) = n+1$Assim, sendo:

$X - \{n+1\} \subset \Gamma_n$ e $g': \Gamma_n \rightarrow X - \{n+1\}$ bijeção

Teremos:

$X - \{n+1\} = \Gamma_n$, logo, $X = \Gamma_{n+1}$

A partir dessa demonstração, podemos afirmar que:

Se existir uma bijeção f: $\Gamma_n \rightarrow \Gamma_m$, então n = m e ainda, havendo duas bijeções f: $\Gamma_n \rightarrow X$ e g: $\Gamma_m \rightarrow X$, devemos ter n = m, conforme enunciou o Teorema 1 apresentado anteriormente.

Fazendo $m \leq n$ e $X \subset \Gamma_n$ onde $X = \Gamma_m$, a demonstração se restringe ao resultado do Teorema 1 proposto.

O caminho tomado nessa demonstração não pode ser considerado de fácil compreensão, o que nos leva a fazer uma análise de resultado por uma ótica diferente que, certamente, contribuirá para uma melhor compreensão desse teorema.

Partindo da demonstração do teorema que diz:

Se $f: \Gamma_n \rightarrow X$ e $g: \Gamma_m \rightarrow X$ são bijeções, então $m = n$, vamos utilizar esses resultados e criamos a função composta $g^{-1} \circ f: \Gamma_n \rightarrow \Gamma_m$ que temos claramente $m = n$, como representado no Diagrama 4 abaixo:

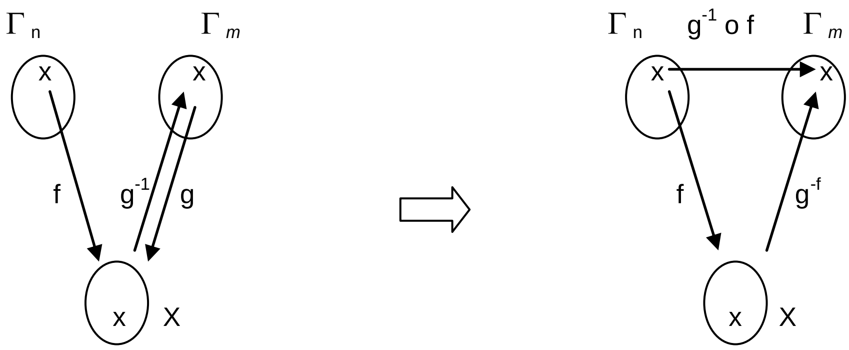


Diagrama 4: Função composta inversa.
Fonte: O autor (2011).

O teorema acima nos diz que, se X é um conjunto não vazio, existe, quando muito, um número natural n tal que X e Γ_n sejam equivalentes. Isso motiva a noção de conjuntos finitos no caso geral, qual seja:

Um conjunto X é finito quando é vazio, ou quando existe um n natural e uma bijeção (correspondência um a um entre os elementos) de Γ_n e X, f: $\Gamma_n \rightarrow X$ bijetora.

Nesse caso, afirmamos que o conjunto X tem n elementos e escrevemos card(X) = n.

Recorrente dessa definição, temos que o conjunto Γ_n tem n elementos e que se f: $X \rightarrow Y$ é uma bijeção, então um dos conjuntos é finito se, e somente se, o outro também é.

A bijeção f: $\Gamma_n \rightarrow X$ significa, de fato, a contagem dos elementos de X. Fazendo f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n, temos X = { x_1, x_2,..., x_n} como representação ordinária de um conjunto finito.

De um modo geral, considerando dois conjuntos X e Y finitos, podemos definir que se card(X) = card(Y), então os conjuntos X e Y têm o mesmo número de elementos. Esta ideia é suficiente quando se trata de conjuntos finitos.

Já definida a cardinalidade de um conjunto finito, representada pelo número de elementos deste conjunto e, considerando o resultado obtido no Teorema 1 que diz: Se $X \subset n$, caso exista uma bijeção f: $n \rightarrow X$, então $n = X$.

Podemos, a partir dessas constatações, enunciar um novo resultado:

Corolário: *“Não pode existir uma bijeção f: $X \rightarrow Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $Y \subset X$”.*

Com base em resultados já obtidos, se os conjuntos são finitos, uma bijeção entre eles nos leva a conjuntos com o mesmo número de elementos.

Se X e Y são finitos e f: X → Y é uma bijeção, pelo Teorema 1, temos:

Existe h: $\Gamma_n \rightarrow$ X uma bijeção e g: $\Gamma_m \rightarrow$ Y também uma bijeção.

Se f: X → Y é uma bijeção, então m = n. Mas, como Y é uma parte própria de X, finitos, certamente, m < n, logo, há uma contradição com o resultado do Teorema 1. Esquematicamente temos:

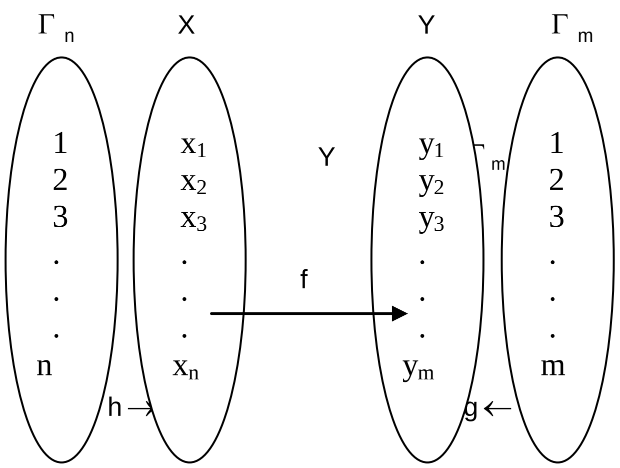


Diagrama 5: Bijeção entre conjuntos finitos.
Fonte: O autor (2011).

Se f, g e h são bijeções, temos que m = n.

Assim, podemos concluir:

Se X e Y são dois conjuntos finitos, vale que:

card (X) = card(Y) $\Leftrightarrow$ f: X → Y, uma bijeção.

A cardinalidade para conjuntos finitos é representada pela quantidade de elementos do conjunto, tornando simples a tarefa de identificação desta cardinalidade. Para conjuntos infinitos, não é possível quantificar estas cardinalidades, sendo assim, como detalharemos, neste trabalho, a análise da cardinalidade destes conjuntos será feita através da comparação das cardinalidades desses mesmos conjuntos infinitos, e, para nos auxiliar a “transitar’ no infinito, vamos definir o conjunto F(X,Y) que será fundamental na análise destas cardinalidades, por permitir obtermos infinitos cada vez “maiores’.

Definição: F(X, Y), conjunto de todas as funções de X em Y.

Ainda sobre conjuntos finitos, vamos demonstrar um resultado fundamental para este trabalho, que envolve dois conjuntos finitos e o conjunto F(X, Y), de todas as funções entre eles. Para melhor compreensão, utilizaremos exemplos ilustrativos para, a partir de então, analisar a cardinalidade deste novo conjunto, envolvendo todas as funções entre dois conjuntos:

Sejam, por exemplo, X = {1,2} e Y = {1,2,3}, as possíveis funções f: $X \to Y$, poderiam ser representadas pelos conjuntos f_1 = {(1,1),(2,1)}; f_2{(1,1),(2,2)}, f_3 = {(1,1),(2,3)}, f_4 = {(1,2),(2,1)}, f_5 = {(1,2),(2,2)}, f_6 = {(1,2),(2,3)}, f_7 = {(1,3),(2,1)}, f_8 = {(1,3),(2,2)} e f_9 = {(1,3),(2,3)}.

Assim, F(X, Y) = {f_1, f_2, f_3,... f_9}. O exemplo utilizado, antes mesmo de uma análise profunda, indica uma forma razoável que o conjunto F(X, Y) deverá ter cardinalidade maior que a de X e a de Y, como constatamos: card(X) = 2, card(Y) = 3 e card (F(x, y)) = 9.

Para clarear a ilustração, apresentamos um esquema que mostra a correspondência entre o elemento do domínio X e seu correspondente na imagem Y:

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
$1 \to 1$	$1 \to 1$	$1 \to 1$	$1 \to 2$	$1 \to 2$	$1 \to 2$	$1 \to 3$	$1 \to 3$	$1 \to 3$
$2 \to 1$	$2 \to 2$	$2 \to 3$	$2 \to 1$	$2 \to 2$	$2 \to 3$	$2 \to 1$	$2 \to 2$	$2 \to 3$

Tomando outros conjuntos X e Y, dados por X = {4,5,6} e Y = {7,8}, por exemplo, vamos relacionar os conjuntos de maneira a obter todas as possíveis funções de X em Y, de forma esquemática:

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
$4 \to 7$	$4 \to 8$	$4 \to 7$	$4 \to 7$	$4 \to 7$	$4 \to 8$	$4 \to 8$	$4 \to 8$
$5 \to 7$	$5 \to 8$	$5 \to 7$	$5 \to 8$	$5 \to 8$	$5 \to 7$	$5 \to 8$	$5 \to 7$
$6 \to 7$	$6 \to 8$	$6 \to 8$	$6 \to 8$	$6 \to 7$	$6 \to 7$	$6 \to 7$	$6 \to 8$

No exemplo, apresentamos todas as possíveis funções de X em Y e, como resultados sobre cardinalidade, temos:

card(X) = 3, card(Y) = 2 e card(F(X, Y)) = 8.

A partir das ilustrações, podemos enunciar:

***Teorema 2**: "Se X e Y são finitos com respectivamente m e n elementos, então o conjunto F(X,Y), de todas as funções f: X→Y é finito e possui n^m elementos".*

Para demonstrar o teorema, vamos utilizar um conteúdo muito importante apresentado na 3ª série do ensino médio, análise combinatória. No processo de contagem, esta operação é razoavelmente simples e será apresentada a seguir:

Se X tem "m" elementos e Y tem n elementos, cada elemento de X tem "n" possibilidades de relacionar em Y, logo teremos:

primeiro elemento → n possibilidades

segundo elemento → n possibilidades

terceiro elemento → n possibilidades → total n.n.n...n (m vezes)

total = n^m

"m" elementos → n possibilidades

Concluímos, então, que: card F(X,Y) = n^m, pelo princípio fundamental da contagem.

2.5.4.2 Conjuntos infinitos

Um conjunto X é chamado infinito quando não é finito, ou seja, não é vazio e não existe um n natural tal que X e Γ_n sejam equivalentes.

Um bom exemplo dessa definição é o próprio conjunto dos números naturais, que é infinito, pois, dada uma função f: $\Gamma_n \rightarrow$ N com n > 1, se tomarmos um valor p = f(1) + f(2) + f(3) +... +f(n), certamente, p > f(n) para todo n Є Γ_n, logo, p não pertence à imagem de f. Mas, como p$\in$N, podemos concluir que f não é sobrejetiva.

Outros exemplos de conjuntos infinitos são os conjuntos dos números inteiros, dos números inteiros positivos, dos números naturais pares, etc. Um subconjunto infinito importante de N é o conjunto dos números primos.

Estendendo a ideia a conjuntos infinitos, fica definido, de forma generalizada, que dois conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade, para indicar que existe uma bijeção f: X→Y. Para conjuntos infinitos, por não termos como identificar um número que represente a cardinalidade, como já foi citado aqui neste trabalho, a maneira encontrada para esta análise foi de comparar infinitos, determinando, assim, infinitos de mesmo 'tamanho" ou de "tamanhos" diferentes.

Falamos até aqui de conjuntos finitos e infinitos, o que tem relação exclusiva com a cardinalidade dos conjuntos. Vamos caracterizar agora o aspecto da limitação dos conjuntos. Um conjunto $X \subset N$ é chamado limitado, se existe um número $p \in N$ tal que $p \geq n$ para qualquer $n \in X$, o que, em uma linguagem mais simples, significa dizer que um subconjunto dos naturais é chamado limitado, se existir um número natural que é maior que todos os naturais desse conjunto.

Dizemos, ainda, que um conjunto $X \subset N$ chama-se ilimitado quando não é limitado, ou seja, dado qualquer número $p \in N$, existe algum $n \in X$ de tal forma que $n > p$. Os conjuntos X definidos desta forma são os subconjuntos infinitos do conjunto dos números naturais.

***Teorema* 3**: "Seja *$X \subset N$ não vazio. Dizer que X é finito é o mesmo que dizer que X é limitado".*

Demonstração: Esse teorema nos permite uma melhor compreensão da diferença entre finito e limitado ou infinito e ilimitado. Esta informação é de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho, principalmente quando deixamos de trabalhar com o conjunto dos números naturais, ao aprofundarmos em conjuntos não enumeráveis.

O teorema nos diz que para qualquer subconjunto finito A dos números naturais, existe algum elemento $s \in N$ que é maior que todos os elementos do subconjunto A.

Podemos enriquecer a ideia tomando o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ e verificando que, se somarmos os elementos do conjunto A, teremos um número que é maior do que todos os elementos ao conjunto A, ou seja, $1+2+3+4+5 = 15$ é maior que todos os elementos de A. A partir dessa ilustração, podemos demonstrar que um subconjunto finito de naturais sempre é um conjunto limitado.

Se existe um elemento $p \in X$ que é maior do que todos os outros elementos de X, é equivalente a dizer que $X \subset \Gamma_p$, logo, X é finito.

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ finito; se fizermos $s = x_1 + x_2 + ... x_n$, teremos $s > x$ para todo $x \in X$, logo X é limitado. Por outro lado, se X é limitado, ou seja, para todo

$x \in X$ existe um número natural n, tal que $n>x$, então, podemos afirmar que X é finito.

Este resultado, que permite lidar com finito e limitado significando a mesma situação, representa uma importante característica dos subconjuntos finitos de N. Assim, se X é um subconjunto não vazio de N, X será finito se, e somente se, for limitado.

2.5.5 Conjuntos enumeráveis infinitos

A noção de enumerabilidade está diretamente ligada ao conjunto dos números naturais. O primeiro contato com o conjunto dos naturais se dá pelos 3° e 4° ano do ensino básico no processo de contagem, sendo que, já no 4° ano, o conjunto é apresentado como infinito, mesmo que seja de uma forma extremamente informal.

Não considerando o rigor matemático, podemos dizer que a enumerabilidade é a característica de alguns conjuntos numéricos que permitem a "contagem" de seus elementos de uma forma consecutiva e sequencial, não permitindo que, entre dois "contados" consecutivos, exista algum outro elemento que não tenha sido computado. Apenas como ilustração introdutória, tomemos o conjunto finito de números naturais entre 1 e 5; {2,3,4} e façamos a contagem (enumeração) colocando o primeiro elemento igual a 2, o segundo igual a 3 e o terceiro igual a 4, de forma que todos os elementos do conjunto tenham sido relacionados. Da mesma forma, estendendo o raciocínio aos conjuntos infinitos, vamos "contar" os elementos do conjunto dos números naturais pares, fazendo o primeiro elemento igual a 2, o segundo igual a 4, o terceiro igual a 6 e assim por diante, de forma intuitiva por não ser possível contar um conjunto até o infinito. "Contar" os elementos de um conjunto, para caracterizá-lo como enumerável, significa que existe uma bijeção entre os elementos desse conjunto e o conjunto dos naturais que tomam nessa situação a função ordinal. Esta bijeção, já detalhada anteriormente neste trabalho, dá a medida da cardinalidade dos conjuntos infinitos, feita por comparação com a cardinalidade dos naturais, por não existir um número que represente a cardinalidade desses conjuntos. Assim, todos os conjuntos infinitos que formem uma bijeção com o conjunto dos números naturais têm a mesma cardinalidade que o conjunto dos números naturais. Com base nessa afirmação, vamos aproveitar o exemplo do conjunto dos números naturais pares que, por formarem uma bijeção com o conjunto dos números naturais, tem a mesma cardinalidade desse conjunto. É importante uma reflexão deste resultado envolvendo cardinalidade que, numa visão simplista, representa a quantidade de elementos de um conjunto. A reflexão solicitada é fundamentada no resultado obtido com o conjunto dos números naturais pares que, apesar de ser um subconjunto próprio dos números naturais, tem a mesma cardinalidade, negando a primeira ideia de cardinalidade como quantidade de elementos, que é válida para conjuntos finitos, mas que não resiste aos conjuntos infinitos, cuja cardinalidade se mostra mais complexa.

De um modo geral, a enumerabilidade não é tão simples como a do conjunto dos números naturais e seus subconjuntos, como é o caso, por exemplo, do conjunto dos números inteiros, que reúne todos os números naturais, mas inclui todos os simétricos dos naturais, ou seja, os números negativos. Este conjunto infinito também tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, e sua enumerabilidade é sustentada por uma bijeção com o conjunto dos números naturais, que pode ser apresentada, por exemplo, com uma bijeção entre os naturais ímpares com os números inteiros positivos (incluindo o zero), e outra bijeção entre os números naturais pares com os números inteiros negativos, o que garante a bijeção, consequentemente, a mesma cardinalidade entre inteiros e naturais, como apresentamos esquematicamente:

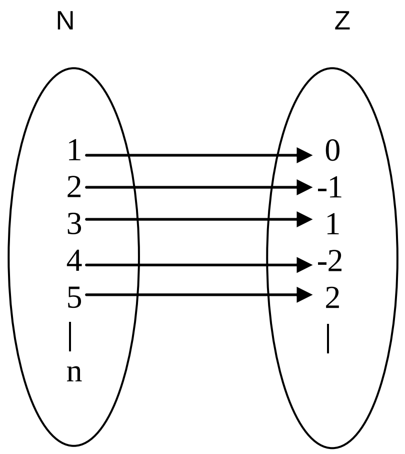


Diagrama 6: Enumerabilidade do conjunto dos números inteiros.
Fonte: O autor (2011).

Outro conjunto de extrema importância, sobretudo por sua participação ao longo do ensino básico, é o conjunto dos números racionais, que tanto podem ser representados na forma de frações como na forma de números decimais. Trata-se de um conjunto que apresenta muita dificuldade na compreensão de sua enumerabilidade, em função, principalmente, do que chamamos de densidade de um conjunto, que significa, em uma análise superficial, o grau de concentração dos elementos do conjunto. É bastante complexo perceber que sempre existe uma fração entre outras duas e, ao constatarmos este fato, estamos garantindo que existem infinitas frações entre duas quaisquer. Vamos tomar duas frações para clarear um pouco mais essa ideia. Consideremos, por exemplo, as frações $\frac{898}{900}$ e $\frac{899}{900}$, tomadas aleatoriamente, que também podem ser escritas na forma de números decimais, pelas dízimas 0,9977... e 0,9988... Evidentemente que não é trivial, mesmo para quem trabalha com frações como os adolescentes do ensino básico, perceber uma ou infinitas frações entre $\frac{898}{900}$ e $\frac{899}{900}$, escolhidas aleatoriamente e que diferem de $\frac{1}{900}$. Mas, da mesma forma, não é tão complexo identificar infinitos números decimais entre as dízimas 0,9977... e 0,9988..., que são representações decimal das frações sugeridas. Podemos, por exemplo, enumerar algumas como 0,9978, 0,99788, 0,997888, induzindo um processo sem fim de obtenção de números decimais entre as dízimas citadas e que, por definição, representam frações ou são representados por frações. Ora, se, entre as dízimas citadas, conseguimos identificar infinitos números decimais, é fato que existem infinitas frações entre as frações utilizadas no exemplo.

Generalizando a ideia apresentada sobre a densidade das frações, em que mostramos que existem infinitas frações entre duas frações quaisquer, vamos tomar as frações p_1 e p_2, positivas ($p_1 < p_2$) aleatoriamente, e mostrar que podemos identificar infinitas frações entre p_1 e p_2.

Vamos, em primeiro lugar, mostrar genericamente que a média entre duas frações está entre elas:

Sejam p_1 e p_2 duas frações com $p_1 < p_2$:

A média é maior que p_1

$p_1 < p_2 \rightarrow p_1 + p_1 < p_2 + p_1 \rightarrow (p_1 + p_1)/2 < (p_2 + p_1)/2 \rightarrow p < (p_1 + p_2)/2.$

A media é menor que p_2

$p_1 < p_2 \rightarrow p_1 + p_2 < p_2 + p_2 \rightarrow (p_1 + p_2)/2 < (p_2 + p_2)/2 \rightarrow (p_1 + p_2)/2 < p_2$

Logo: $p_1 < (p_1 + p_2)/2 < p_2$.

Assim, a média $M_1 = (p_1 + p_2)/2$ é a primeira fração que identificamos entre p_1 e p_2.

A segunda fração a ser relacionada é a média aritmética M_2 entre a fração p_1 e a média M_1, ou seja, $M_2 = (P_1 + M_1)/2$, e, já demonstrado, a média M_2 está entre p_1 e M_1.

A terceira fração a ser relacionada é a média aritmética M_3 entre p_1 e a média M_2, encontrada anteriormente, ou seja, $M_3 = (p_1 + M_2)/2$.

Podemos concluir que, a partir da rotina utilizada de encontrar a média aritmética entre as frações, em seguida a média entre a menor fração e a média já encontrada anteriormente e prosseguir, sucessivamente, vamos identificar infinitas frações entre p_1 e p_2. Assim temos:

$p_1 < ... < ... < M_n < M_{n-1} < ... < M_2 < M_1 < p_2$, onde p_1 e p_2 são as frações escolhidas aleatoriamente e, M_1, M_2, ..., M_n, ... são as médias (frações) encontradas na rotina que escolhemos.

É importante ressaltar que adotamos aqui a rotina de encontrar sucessivamente as médias entre a menor fração e as outras médias obtidas, mas, poderíamos ter usado outra rotina qualquer adequadamente escolhida, como foi feito no exemplo numérico.

A análise feita acerca das frações mostra, no máximo, o quanto é complexa a enumerabilidade dessas frações que, em um raciocínio bem simplista, é difícil perceber que existe uma bijeção com o conjunto dos números naturais, pela dificuldade que, com certeza, teremos no sentido de encontrar um modo de relacionar todas as frações, sem que alguma delas seja “esquecida”. Trataremos este conjunto com mais detalhes, em função de sua importância no ensino de Matemática do ensino básico, com reflexos no ensino superior. Assim, serão mostrados alguns resultados que nos permitam demonstrar a enumerabilidade do conjunto dos números racionais.

Esta apresentação de enumerabilidade dos conjuntos infinitos com a utilização de exemplos com conjuntos numéricos importantes, como o conjunto dos números naturais pares, o conjunto dos números inteiros, tem como objetivo, além de um melhor esclarecimento dessa propriedade, preparar para formalizarmos a definição de enumerabilidade, respeitando o rigor exigido dentro da análise matemática.

Definição: Um conjunto X é dito enumerável quando é finito ou quando podemos estabelecer uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais, em outras palavras, X e N são equivalentes.

Seja X um conjunto infinito *enumerável*, e seja f: $N \to X$ uma bijeção que leva cada número natural a um elemento de X. Se $x \in X$, podemos fazer $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, ... $f(n) = x_n$, ..., o que nos leva a $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots , x_n, \ldots\}$. A esta bijeção de N em X, chamamos uma enumeração (dos elementos) de X. Então podemos escrever: card(N) = card(X) se, e somente se, existe f: $N \to X$ bijetora.

Ilustrando a ideia de um conjunto infinito enumerável, utilizando o conjunto dos números naturais pares $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots 2n, \ldots\}$ com $n \in N$, definiremos uma bijeção envolvendo o conjunto dos números naturais pares:

f: $N \to P$; $f(n) = 2n$, mostrando que o conjunto dos números naturais pares é infinito e enumerável.

Analogamente, temos o conjunto dos números naturais ímpares também infinito e enumerável:

g: $N \to I$; $g(n) = 2n – 1$ define uma bijeção de N sobre o conjunto dos números naturais ímpares.

Outro conjunto infinito enumerável é o conjunto dos números inteiros. Para demonstrá-lo, basta tomarmos uma bijeção entre Z e N, f: $Z \to N$, definida por $f(n) = 2n$ quando $n \in Z_+^*$ é $f(n)= -2n+1$ quando $n \in Z_-$. Obtendo assim:

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(-1) = 3$

$f(2) = 4$

Os resultados obtidos mostram uma bijeção f: $Z \to N$, que nos permite a enumeração de Z pela inversa da função f, f^{-1}: $N \to Z$.

Teorema 4: *“Todo subconjunto X $\subset$ N é enumerável”.*

Se for finito, é enumerável como demonstrado anteriormente.

Se for infinito, utilizaremos o processo de indução para demonstrar uma bijeção f: N → X.

Colocamos f(1) = menor elemento de X e supondo que foram definidos f(1), f(2), ..., f(n), na ordem crescente, ou seja, f(1) < f(2) < f(3), ... < f(n), garante a injetividade da função f(x), pois, para $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.

Em seguida, vamos criar um conjunto B_n, eliminando do conjunto X todos os resultados obtidos pela função f(x), assim: B_x = X – {f(1), f(2), ..., f(n)}, o que nos garante que, para todo x Є B_n, f(n) < x.

Como o conjunto X é infinito, é certo que Bn ≠ , assim, podemos completar o processo fazendo f (n+1) = menor elemento de Bn.

Considere agora que a função f(x) será tomada para todo n Є N. Se existir algum x Є X – f(n), para todo n Є N, teríamos um conjunto infinito, {f(n), n Є N} $\subset$ N, limitado, o que é uma contradição, logo, está garantida a sobrejetividade da função f(x).

Corolário: “*Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável, ou: se f: X → Y é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável”.*

Demonstração:

Se o conjunto Y é enumerável, existe uma bijeção entre os elementos de Y e os números naturais:

F: N → Y é uma bijeção.

Como f: X → Y é injetiva, para xm ≠ xn, temos f(xn) ≠ f(xm), logo:

Existe uma bijeção g entre os conjuntos I_m (X) , conjunto imagem de X pela função f, e o próprio conjunto X.

g: I_m (X) → X bijeção.

Como I_m (X) $\subset$ Y é enumerável, e I_m (X) através da função g está em bijeção com o conjunto X, concluímos que X é enumerável.

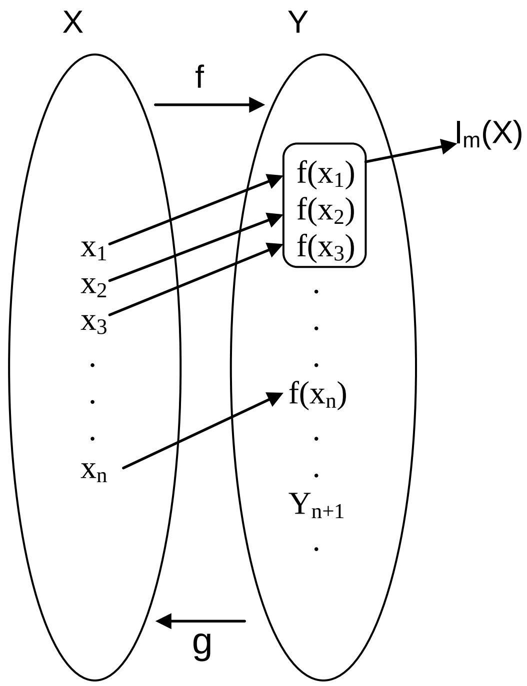


Diagrama 7: Função injetiva para garantir enumerabilidade.
Fonte: O autor (2011).

Teorema 5: *"Seja um conjunto X enumerável. Se f: X → Y é sobrejetiva, então Y é enumerável".*

Demonstração: Se o conjunto X é enumerável, existe uma função g bijetora entre seus elementos e os elementos do conjunto dos números naturais:

g: N → X é uma bijeção, consequentemente, existe uma função h bijetora entre os elementos do conjunto I_m (X), conjunto imagem dos elementos de X pela função f, e o conjunto dos números naturais: h: I_m (X) → N bijetora, logo, I_m (X) é enumerável.

Como a função f: X → Y é sobrejetora, temos que I_m (X) = Y. Sendo I_m (X) enumerável, logo, Y é enumerável.

I_m (X) é enumerável, logo, existe uma função h bijetiva entre seus elementos e os números naturais.

g: N → X é bijetora

h: N → I_m (X) é bijetora

Mas I_m (X) = Y, pois a função f: X→Y é sobrejetora, logo, o conjunto Y é enumerável como enuncia o Teorema 5.

Teorema 6: *“Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano X × Y é enumerável”.*

Pelos resultados anteriores, ou seja, pelo corolário do Teorema 4, no qual provamos que se uma função injetiva tem contradomínio enumerável então o domínio é enumerável, garantimos que, se X e Y são enumeráveis, existem funções injetivas p: N $\rightarrow$ X e q: N $\rightarrow$ X. Podemos, a partir dessas funções injetivas, concluir que a função g: X $\times$ Y $\rightarrow$ N $\times$ N, definida por g(X,Y) = (p(X), q(Y)), é injetiva. Senão vejamos, para $x_1 \neq x_2$, temos $p(x_1) \neq p(x_2)$ e para $y_1 \neq y_2$, temos $q(y_1) \neq q(y_2)$, pois as funções p e q são injetivas, assim, a função g é injetiva, e, basta garantirmos N $\times$ N enumerável que o mesmo corolário do Teorema 4 nos garantirá a enumerabilidade do produto cartesiano X $\times$Y. Para isto, definimos a função f: $N \times N \rightarrow N$ dada por f(m, n) = $2^m \times 3^n$ e, como o resultado desta decomposição $2^m . 3^n \in N$ é único, pois $2^{m1} . 3^{n1} = 2^{m2} . 3^{n2}$, se, e somente se, $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$, haja vista que nosso objeto é o conjunto dos números naturais, logo, a função f: $N \times N \rightarrow N$ é injetiva, o que garante uma bijeção de $N \times N$ sobre f($N \times N$) $\subset$ N.

Justificamos o objetivo principal em demonstrar esses teoremas aplicados a conjuntos enumeráveis, por ser a base de toda a Matemática o estudo dos conjuntos numéricos. Se bem caracterizados os conjuntos enumeráveis, teremos melhores condições de estudar os conjuntos não enumeráveis. Os conjuntos enumeráveis são estudados em todo o ensino fundamental, sendo cada vez mais profunda a abordagem deles pelos autores de livros didáticos.

Quando tratamos do infinito ou de conjuntos infinitos, existem muitos fatos, muitas conjecturas e muitas lendas, por se tratar de um tema bastante abstrato. À medida que se aprofunda no estudo do infinito, surgem algumas questões que, surpreendentemente, desafiam a capacidade de abstração do ser humano, devido a sua complexidade. Nessa linha de pensamento, podemos abrir uma discussão acerca da cardinalidade, quantidade de elementos dos conjuntos infinitos, que foi uma das grandes preocupações de Georg Cantor (1845-1918), que tanto contribuiu nessa área para a Matemática.

Utilizando a definição de enumerabilidade, criamos um paradoxo muito abstrato: um subconjunto próprio do conjunto dos números naturais tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Apesar de não ser tão óbvio, não é trivial que um conjunto, não contendo todos os elementos de um outro conjunto, do qual é subconjunto, tenha o mesmo número de elementos que este outro. Esta constatação nos permite perceber a complexidade do infinito. Mas, ao mesmo tempo, não podemos esperar que todos os conjuntos infinitos tenham a mesma cardinalidade, pensamento que prevaleceu até os estudos de Cantor (1894), que surpreendeu o mundo matemático quando demonstrou que a cardinalidade dos números reais é diferente da cardinalidade dos números naturais, como abordaremos mais à frente. Neste trabalho, seguiremos segundo as orientações dos trabalhos de Cantor, que considera enumerável todo conjunto de mesma cardinalidade que a do conjunto dos números naturais.

Voltando aos conjuntos enumeráveis, buscaremos esclarecer o Teorema 7, a seguir.

Teorema 7: *"Todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável"*

Demonstração: Antes de apresentarmos a demonstração desse teorema, vamos discuti-lo em exemplos numéricos para enriquecer o resultado do teorema, extremamente importante para o estudo de domínios e imagens das funções reais, principal conteúdo da Matemática estudada na primeira série do ensino médio.

Quando o teorema cita um conjunto infinito, sem qualquer outra informação, temos de trabalhar com a possibilidade de ser um conjunto enumerável, o que torna a análise trivial, pois é razoável retirar desse conjunto um subconjunto infinito que, naturalmente, será também enumerável. Para ilustrar, citamos o conjunto infinito enumerável do conjunto dos números naturais e seu subconjunto de números naturais pares, já utilizados neste trabalho. Mas, além desta, é preciso trabalhar também com a possibilidade de não ser um conjunto enumerável, exigindo do pesquisador uma análise mais profunda, principalmente pela complexidade dos conjuntos não enumeráveis. Vamos, para esse caso, utilizar um intervalo de números reais, muito comum no estudo de funções, que é infinito, representado pela quantidade de elementos, mas limitado por ter um menor e um maior elemento. Vamos, então, considerando o conjunto X = [0; 0,1], retirar deste conjunto X um conjunto infinito e enumerável como enuncia o Teorema 5. O primeiro elemento desse conjunto será a média entre as extremidades do intervalo; assim, o primeiro elemento é o número 0,05. Para o segundo elemento desse conjunto, criaremos um novo intervalo, subconjunto de X, que está limitado entre o zero e o primeiro elemento encontrado 0,05, isto é, [0; 0,05], e tomaremos o segundo elemento, que será a média entre as extremidades agora do novo intervalo que é 0,025, e assim sucessivamente, como o esquema abaixo demonstra.

1° intervalo: [0; 0,1]; 1° elemento: média = 0,05

2° intervalo: [0; 0,05]; 2° elemento: média = 0,025

3° intervalo: [0; 0,025]; 3° elemento: média = 0,0125

E assim por diante formando um conjunto infinito, pois os valores decrescem indefinidamente, nunca atingindo um valor final. Dessa forma, conseguimos extrair do conjunto X = [0; 0,1] um conjunto infinito e enumerável, {0,05; 0,025; 0,0125; ...}. Vale lembrar que existem outras maneiras de extrair do conjunto X um subconjunto infinito e enumerável, principalmente por existirem infinitos subconjuntos de X com esta característica.

A partir dessa discussão ilustrada pelo exemplo numérico, passamos então a uma demonstração formal, assumindo o rigor que a análise matemática exige em todas as demonstrações.

Basta definir uma função injetiva f: N→ X. Para definir esta função, devemos extrair do conjunto X elementos para criar a função f: N→ X, o que reduz a demonstração a garantir que os elementos de X utilizados na formação dessa função injetiva sejam distintos para naturais distintos no domínio. Passamos então à demonstração:

Vamos criar a função f: N→ X, injetiva, escolhendo, em cada subconjunto não vazio $A \subset X$, um elemento $x_a \in A$. Definimos então a função f por indução, processo este já apresentado anteriormente. Colocamos $f(1) = X_x$, ou seja, f(1) é o elemento inicialmente escolhido em “X”, considerando “X” um subconjunto do próprio conjunto X, e, supondo já definidos f(1),..., f(n), escrevemos $A_n = X - \{f(1),..., f(n)\}$. Como X é infinito, A_n não é vazio. Vamos colocar então $f(n+1) = x_{An}$, logo, f é injetiva. Se tomarmos dois números naturais distintos, $m \neq n$, e se, por exemplo, $m < n$, $f(m) \in \{f(1),..., f(n-1)\}$ e $f(n) \in X - \{f(1),..., f(n-1)\}$, ou seja, $f(m) \neq f(n)$, temos então que a imagem de f, é, portanto, um subconjunto infinito enumerável de X.

Esperamos ter conseguido clarear um pouco o que o teorema afirma quando diz “todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável”. É preciso ter convicção de que, para um conjunto ser infinito, não necessariamente é ilimitado, ou seja, quando tratamos dos números naturais, se o conjunto é infinito, também é ilimitado, como já definimos neste trabalho. Mas existem outros conjuntos que podem ser infinitos mesmo que exista uma limitação a seus valores. Um bom exemplo deste último caso é o conjunto de números racionais. Se tomarmos como exemplo apenas para ilustrar esta ideia, já que aprofundaremos nele um pouco mais à frente, tomemos o conjunto A = $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\}$, que representa os termos de uma sequência geométrica infinita, mas que tem seus valores entre 0 e 1, temos um conjunto infinito, mas limitado.

Corolário: "Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção f: X $\rightarrow$ Y, de X sobre uma parte própria Y $\subset$ X".

Pelo teorema, se X é infinito, contém um subconjunto infinito enumerável A = $\{a_1, a_2, ..., a_n, ..., ...\}$. Consideremos Y = $(X - A) \cup \{a_2, a_4, a_6, ..., a_{2n}, ...\}$, garantindo ser o conjunto Y uma parte própria de X. Vamos definir a bijeção da seguinte forma:

F: X $\rightarrow$ Y é uma bijeção, fazendo f(x) = x para x Є X – A e $f(a_n) = a_{2n}$ para a_n Є A.

Observando a bijeção, retiramos um subconjunto infinito de A, A – $\{a_1, a_3, ..., a_{2n-1}, ...\}$, garantindo que, sem estes elementos, o conjunto Y será, obrigatoriamente, uma parte própria do conjunto X, como o diagrama abaixo esclarece. Assim, para os conjuntos infinitos, podemos estabelecer uma bijeção entre seus elementos e uma dessas partes próprias, caracterizando conjuntos infinitos.

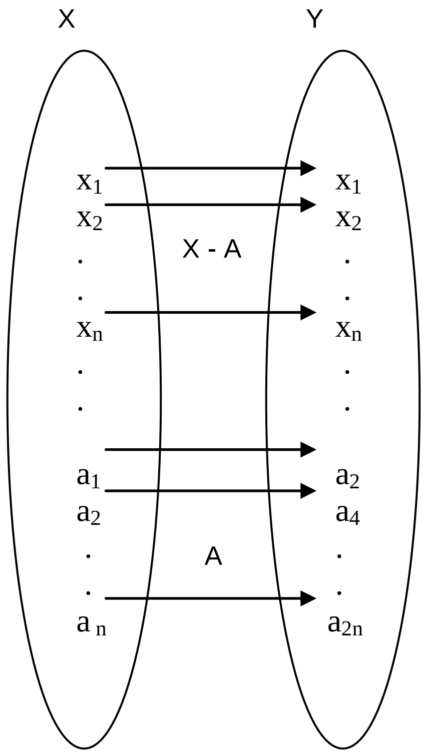


Diagrama 8: Bijeção entre um conjunto infinito e uma de suas partes próprias.
Fonte: O autor (2011).

Da mesma forma que o conjunto é infinito se, e somente se, existe uma bijeção sobre sua parte própria, um conjunto é finito se, e somente se, não admite uma bijeção sobre uma sua parte própria. Como já demonstrado com esses resultados obtidos, temos a caracterização de conjuntos finitos e de conjuntos infinitos, ou seja: “Um conjunto é finito quando não existe uma bijeção entre ele e qualquer de suas partes próprias (subconjuntos menores que ele) e é infinito quando existe uma bijeção entre ele e uma parte própria”.

Neste trabalho, o objeto principal, se é que podemos dizer desta forma, é o infinito e, depois das considerações envolvendo conjuntos enumeráveis, apresentaremos algumas análises envolvendo os conjuntos não enumeráveis. O principal exemplo de conjunto não enumerável é o conjunto R dos números reais, cuja demonstração não faz parte deste trabalho, mas que o leitor pode, em caso de interesse, buscar no trabalho de Willian José da Cruz (2011), intitulado *Os números reais*: um convite ao professor de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio, uma apresentação formal dos números reais com as devidas demonstrações. Segundo Cantor (apud COURANT, 2000), dado qualquer conjunto X, sempre existe um conjunto cujo número cardinal é maior que X. Como já esclarecemos anteriormente, em qualquer estudo sobre infinito, não é objetivo determinar a cardinalidade dos conjuntos infinitos, mas, sim, comparar cardinalidades desses conjuntos.

Podemos afirmar, para que dois conjuntos X e Y tenham a mesma cardinalidade, tem que existir uma bijeção f: $X \to Y$ envolvendo seus elementos. Assim, dois conjuntos finitos têm a mesma cardinalidade se, e somente se, possuem o mesmo número de elementos. Se um dos conjuntos for infinito enumerável, teremos a mesma cardinalidade se, e somente se, o outro também for infinito enumerável. Um conjunto X tem cardinalidade menor que Y se existir uma função injetiva f: $X \to Y$, mas não for possível f: $X \to Y$ sobrejetiva, ou seja, existirão elementos no conjunto Y que não possuem correspondentes no conjunto X, caracterizando um número maior de elementos no conjunto Y, pois, no conjunto X, todos os elementos têm que participar da função.

A partir daqui, buscaremos aprofundar no tema, introduzindo a ideia de "infinitos distintos".

Teorema 8: *"Sejam X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ... conjuntos enumeráveis. A reunião $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup ... \cup X_n \cup ... = X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável".*

O Teorema 8 diz que a reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, e representa o último resultado necessário para o caminho que escolhemos na demonstração de que o conjunto dos números racionais é enumerável.

Demonstração: Se os conjuntos X_1, X_2, ..., X_n são enumeráveis, existem bijeções entre os elementos do conjunto N e seus elementos.

$f_1: N \to X_1$

$f_2: N \to X_2$

. .

. .

$f_k: N \to X_k$

Vamos então definir uma função f:

Que leva o produto cartesiano NxN nos conjuntos X_m, definida da seguinte forma:

f: NxN $\rightarrow$ X, onde f(n,m) = f_n(m) que é sobrejetiva. Como o produto cartesiano NxN é enumerável, usando o resultado do Teorema 5, concluímos que X é enumerável. Assim, fica demonstrado que a reunião de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Voltamos agora ao conjunto dos números racionais, representados por frações ou números decimais, para enunciarmos sua enumeração através do corolário seguinte.

Corolário: *"O conjunto Q dos números racionais é enumerável".*

Vamos demonstrar este resultado utilizando apenas as frações positivas, e estendendo a ideia às negativas como fizemos com os números inteiros.

Tomemos a função f: NxN → X, definida por f(n,m) = f_n(m) para todo m Є N, em cada "n" dos subconjuntos X_n.

Assim, podemos relacionar todas as frações fazendo $f_n(m) = \frac{m}{n}$ em X_n, logo:

Se n = 3 → $f_3(m) = \frac{m}{3} \Rightarrow X_3 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, ... \right\}$

Se n = 7 → $f_7(m) = \frac{m}{7} \Rightarrow X_7 = \left\{ \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, ... \right\}$

Se n = 9 → $f_9(m) = \frac{m}{9} \Rightarrow X_9 = \left\{ \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, ... \right\}$

Como

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \cup X_2 \cup X_3, ..., X_n, ...,$ temos um conjunto enumerável reunindo todos os subconjuntos X_n, das funções cujos denominadores são iguais a n.

Dessa forma, ficou garantida a relação de todas as frações, sem que nenhuma delas seja "esquecida" e concluímos que representam um conjunto enumerável.

Existem outras formas de enumerar os números racionais e, nesta pesquisa, destacamos a forma utilizada por Cantor (apud COURANT, 2000, p. 95, [grifos do autor]) para apresentar essa enumerabilidade:

Uma das primeiras descobertas de Cantor em sua análise do infinito foi de que o conjunto dos *números racionais* (que contém o conjunto infinito de inteiros como um subconjunto e é portanto ele mesmo infinito) é equivalente ao *conjunto dos inteiros*. À primeira vista parece muito estranho que o conjunto denso dos números racionais deva estar no mesmo pé de igualdade que seu subconjunto dos inteiros, esparsamente espalhados. É verdade que não se pode dispor os números racionais positivos em ordem de tamanho (como se pode fazer com os inteiros), dizendo-se que a é o primeiro número racional, b o seguinte maior, e assim por diante, porque existem infinitos números racionais entre dois números dados, e portanto não existe qualquer "seguinte maior". Porém, como observou Cantor, desconsiderando-se a relação de ordem entre elementos sucessivos, é possível dispor todos os números racionais sucessivamente, r_1, r_2, r_3, r_4, ..., como os inteiros. Nesta sequência, haverá um primeiro número racional, um segundo, um terceiro, e assim por diante, e cada número racional aparecerá exatamente uma vez. Esta disposição de um conjunto de objetos em uma seqüência como a dos inteiros é chamada de denumeração (ou enumeração) do conjunto. Exibindo esta *denumeração*, Cantor demonstrou que o conjunto de números racionais é equivalente ao conjunto de inteiros, desde que a correspondência

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \ldots & r_n & \ldots \end{array}$$

fosse bijetora. Um modo de denumerar os números racionais será descrito a seguir.

Todo número racional pode ser escrito na forma a/b, onde a e b são inteiros, e todos estes números podem ser dispostos em um quadro, com a/b na a-ésima coluna e b-ésima linha. Por exemplo: 3/4 é encontrado na terceira coluna e quarta linha da tabela abaixo. Todos os números racionais positivos podem agora ser dispostos de acordo com o seguinte esquema: no quadro que acabamos de definir, traçamos uma poligonal contínua que atravessa todos os números. Começando em 1, caminhamos horizontalmente até a casa seguinte à direita, obtendo 2 como o segundo membro da sequência; depois, diagonalmente para baixo e para a esquerda até que a primeira coluna seja alcançada na posição ocupada por 1/2; em seguida, verticalmente para baixo uma casa até 1/3, diagonalmente para cima até alcançar a primeira linha novamente em 3, horizontalmente até 4, diagonalmente para baixo até 1\4, e assim por diante, conforme mostrado:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{7}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\
\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \frac{6}{6} & \frac{7}{6}
\end{array}$$

na figura. Acompanhando esta poligonal, chegamos a uma sequência, 1, 2, 1/2, 1/3, 2/2, 3, 4, 3/2, 1/4, 1/5, 2/4, 3/3, 4/2, 5, ... contendo os números racionais na ordem em que ocorrem ao longo da poligonal. Nesta sequência, podemos agora simplificar todos aqueles números a/b para os quais a e b têm um fator comum, de modo que cada número racional r apareça exatamente uma vez e em sua forma irredutível. Assim, obtemos uma sequência 1, 2, 1/2, 1/3, 3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 1/5, 5, ... que contém cada número racional positivo uma vez e somente uma. Isto demonstra que o conjunto de todos os números racionais positivos é enumerável. Tendo em vista o fato de que os números racionais estão em correspondência bijetora aos pontos racionais sobre a reta, provamos ao mesmo tempo que o conjunto de pontos racionais positivos sobre uma reta é enumerável.

Teorema 9: *(Cantor). "Sejam X um conjunto arbitrário e Y = {1,2} com dois elementos. Nenhuma função h: X → F(X,Y), do conjunto X no conjunto de todas as funções do conjunto X no conjunto Y, é sobrejetora".*

Como o teorema representa um caminho importante na análise da cardinalidade de conjuntos não enumeráveis, vamos tentar minimizar o grau de abstração, especificando um pouco mais os conjuntos para, posteriormente, generalizarmos. Vamos então subdividir em dois teoremas, um para o conjunto X finito e outro para o conjunto X infinito.

Teorema 9.1: *"Sejam X um conjunto finito e Y um conjunto com dois elementos. Nenhuma função h: X→F(X,Y) é sobrejetora".*

Vamos tomar o conjunto X, finito, com "n" elementos e o conjunto Y dado com dois elementos.

Temos então:

X tem n elementos

Y tem 2 elementos

F(X,Y) tem 2^n elementos.

Só precisamos provar que $2^n > n$ para todo $n \in N$. E, para isto, utilizaremos o processo de indução, já apresentado:

Fazemos para $n = 1 \rightarrow 2^1 > 1$, e supondo válido para n, vamos mostrar que vale para n + 1:

$2^n > n \rightarrow 2 \cdot 2^n > 2n \rightarrow 2^{n+1} > 2n = n + n > n + 1$ (n >1), logo, $2^{n+1} > n + 1$, o que prova para todo $n \in N$.

Ilustrando o teorema, vamos tomar como exemplo os conjuntos X = {3,4,5} e Y = {1,2}. Assim, o conjunto F(X,Y), que é formado de todas as possíveis funções do conjunto X no conjunto Y, possui 2^3 elementos como apresentamos:

F(X,Y) = {f_1, f_2 , f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8}, onde:

f_1 = {(3,1), (4,1), (5,1)}

f_2 = {(3,1), (4,1), (5,2)}

f_3 = {(3,1), (4,2), (5,2)}

f_4 = {(3,1), (4,2), (5,1)}

f_5 = {(3,2), (4,2), (5,2)}

f_6 = {(3,2), (4,1), (5,1)}

f_7 = {(3,2), (4,1), (5,2)}

f_8 = {(3,2), (4,2), (5,1)}

Neste ponto, é fundamental haver uma clareza em relação ao conjunto F(X,Y), de todas as funções do conjunto X no conjunto Y. É natural que apareçam dúvidas em relação ao conjunto em questão. Quem são os elementos deste conjunto? Quem são estas funções? Na verdade, não é nosso foco identificar estas funções, pois temos a garantia de que qualquer das possíveis funções com domínio em X e imagem em Y estão ali relacionadas. Voltando ao nosso exemplo que ilustra o teorema, é trivial que, tendo o conjunto F(X,Y) mais elementos que o conjunto X, nenhuma função h: X → F(X,Y) pode ser sobrejetora. Vamos tomar uma função h_1: X → F(X,Y) e constatar que sempre será possível obtermos uma outra função h_2: X → F(X,Y) com imagens diferentes.

Supondo h_1: X → F(X,Y), como o Diagrama 9 abaixo:

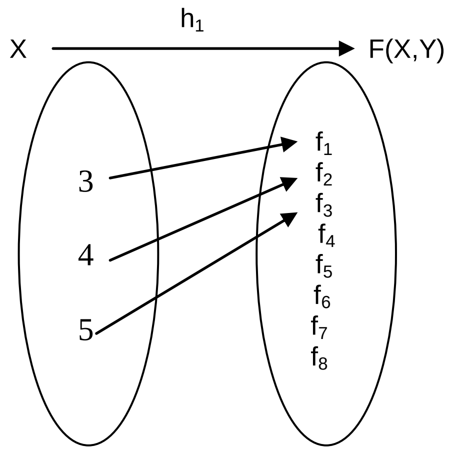


Diagrama 9: F(X,Y) não tem sobrejetividade com X.
Fonte: O autor (2011).

E a função h_2: X → F(X,Y), apresentada no seguinte Diagrama:

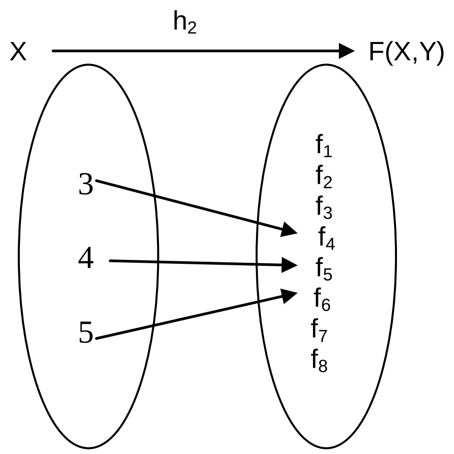


Diagrama 10: F(X,Y) não tem sobrejetividade com X.
Fonte: O autor (2011).

Os Diagramas 9 e 10 mostram que os conjuntos imagens $h_1(X)$ e $h_2(X)$ são distintos, logo, h: X → F(X,Y) não é sobrejetora.

Foi demonstrado e ilustrado com um exemplo numérico que, para um conjunto X finito e um conjunto Y com dois elementos, nenhuma função h: X → F(X,Y) é sobrejetora. Este resultado é muito importante na continuidade do desenvolvimento deste teorema, por caracterizar que o conjunto X possui menos elementos que o conjunto F(X,Y), garantindo que X tem menor cardinalidade que F(X,Y). (card(X) < card (F(X,Y)).

Passamos então ao ponto central do teorema, analisando as cardinalidades de X e de F(X,Y), mas com o conjunto X infinito.

Teorema 9.2: *"Sejam X um conjunto infinito, e Y um conjunto com dois elementos. Nenhuma função h: X→ F(X,Y) é sobrejetora".*

Neste ponto do trabalho, o "infinito" e a "cardinalidade" serão protagonistas de demonstrações muito ricas e abstratas do tema, pois Cantor criou um marco zero no estudo do infinito, ao demonstrar que existem infinitos de tamanhos diferentes. Passamos a demonstrar na segunda parte do Teorema 9, envolvendo o conjunto X, agora infinito e o conjunto F(X,Y), que reúne todas as funções do conjunto X no conjunto Y.

Mostramos, na primeira parte deste teorema, que nenhuma função H: X→ F(X,Y), para X finito e Y com dois elementos, é sobrejetiva. Esta afirmação, com base em resultados já obtidos neste trabalho, comprovamos que os conjuntos X e F(X,Y) tem cardinalidades diferentes, pois F(X,Y) possui mais elementos do que X. Para que dois conjuntos tenham a mesma cardinalidade, é necessário que exista uma bijeção entre os elementos desses dois conjuntos, logo, se nenhuma função H: X→ F(X,Y) é sobrejetora, X e F(X,Y) possuem cardinalidades diferentes. Vamos trabalhar demonstrando que esta afirmação é válida para o conjunto X infinito.

Demonstração:

Está claro que:

card(X) = card(Y) existe f: X→Y é bijetora

card(X) ≤ card(Y) existe f: X→Y é injetora

card(X) < card(Y) existe f: X→Y é injetora e não sobrejetora.

Seguindo a mesma linha desenvolvida na primeira parte do teorema 9, ou seja, o conjunto X finito com números naturais como elementos, vamos agora considerar o conjunto X igual ao conjunto de números naturais e, em seguida, ampliar a ideia para um conjunto X arbitrário. Esta opção de trabalhar com X enumerável, ou seja, X = N, além de enriquecer a ideia proposta, permite a apresentação de exemplos ilustrativos que facilitam a compreensão do teorema.

Vamos então tomar o conjunto F(N;{0,1}) para representar todas as funções com domínio no conjunto dos números naturais e imagem no conjunto {0,1}.

Em primeiro lugar, provaremos que existe uma função G: N → F(N, {0,1}) injetiva, que envolve os objetos que apresentamos abaixo:

Função: G: N → F(N, {0,1})

Domínio: N = {1,2,3, ..., n, ...} conjunto dos números naturais

Imagem: g(n) = g: N → {0,1} conjunto de todas as funções de N em {0,1} para cada n Є N.

Esquematicamente, temos:

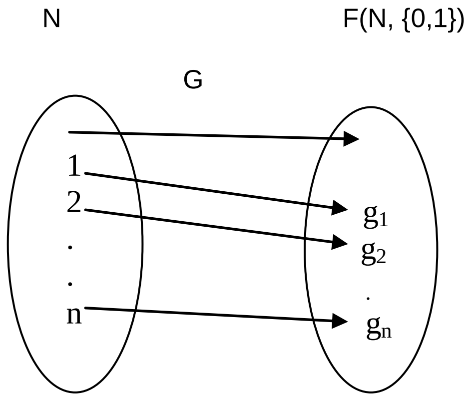


Diagrama 11: F(N, {0,1}) – injetiva.
Fonte: O autor (2011).

Em que cada imagem g_n está representando uma função com domínio nos números naturais, e que corresponde a cada n Є N do domínio da função G proposta inicialmente.

Para a compreensão desta demonstração, é imprescindível o entendimento destes objetos que utilizaremos, e como se comportam estas funções. Assim, temos:

G: N → F(N, {0,1}) representa a função a ser analisada.

g_n = G(n) Є F(N, {0,1} representa uma função com domínio em N e imagem em {0,1} e que será a imagem da função G para cada n Є N. Por exemplo, vamos criar uma função g, imagem da função G, no ponto n = 1 do domínio, arbitrariamente:

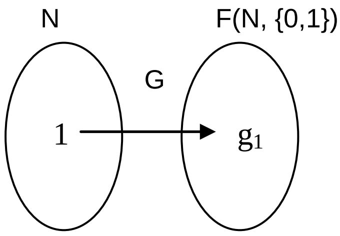


Diagrama 12: Especificidade da função G: N → F(N, {0,1}).
Fonte: O autor (2011).

Consideremos, por exemplo, g_1: N → {0,1}, definida por:

$$g_1(n) = \begin{cases} 1 \text{ para n par, ou seja, } g_1(2) = g_{1(4)} = \ldots g_1(2n) = 1 \\ 0 \text{ para n ímpar, ou seja, } g_1(1) = g_1(3) \ldots g_1(2n-1) = 0 \end{cases}$$

E assim teríamos:

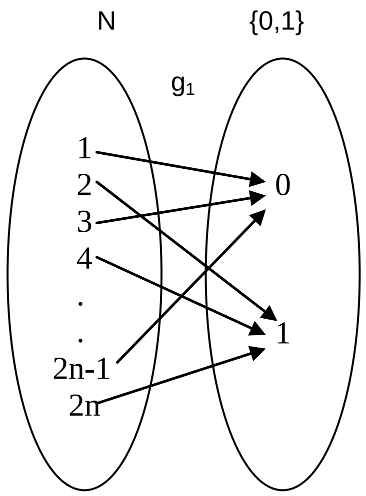


Diagrama 13: Especificidade da imagem da função G: N → F(N, {0,1}).
Fonte: O autor (2011).

Como o objetivo é definir uma função G: N→ F(N, {0,1}), injetiva, vamos definir esta função de forma que cada função imagem seja exclusiva para cada “n” natural do domínio. Assim, temos:

$g(n) = g_n$: N → {0,1}, definida por:

$$g_n(K) = \begin{cases} 1 \text{ para } n = k \\ 0 \text{ para } n \neq K \end{cases}$$

A propriedade acima garante a injetividade, pois, nos conjuntos imagens de g_n, apenas um n natural do domínio tem imagem em 1, enquanto todos os outros números naturais do domínio levam ao zero, garantindo imagens diferentes para números naturais diferentes no domínio da função G.

Analisando esquematicamente, temos:

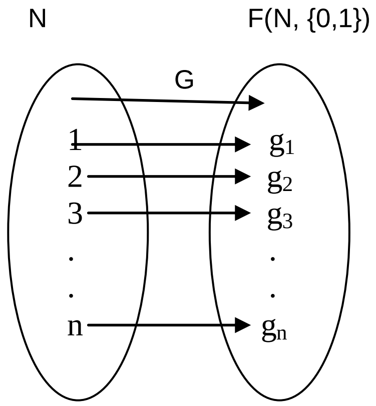


Diagrama 14: Injetividade da função G: N → F(N, {0,1}).
Fonte: O autor (2011).

E tomando dois pontos do domínio, podemos caracterizar a injetividade da função G:

Por exemplo, tomemos as imagens g_1 e g_2 como definido anteriormente:

$$g_1 = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1;\ g_1(1) = 1 \\ 0 \text{ se } n \neq 1;\ g_1(2) = g_1(3) = \ldots\ g_1(n) = 0 \end{cases}$$

$$g_2 = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 2;\ g_2(2) = 1 \\ 0 \text{ se } n \neq;\ g_2(1) = g_2(3) = \ldots = g_2(n) = 0 \end{cases}$$

Logo:

Existe G: N→ F(N; {0,1}) injetiva.

Considerando o resultado obtido, podemos afirmar, em principio, que o conjunto N tem o número de elementos menor ou igual ao conjunto F(N, {0,1}), ou seja, card(N) ≤ card (F(N, {0,1}).

Passamos então ao nosso próximo objetivo de demonstrar que nenhuma função G: N→ F (N, ({0,1}) é sobrejetora, o que vai caracterizar “tamanhos” de infinitos diferentes.

Tomemos a função G: N→ F (N, ({0,1}).

Consideremos G(1) Є F(N,{0,1}) imagem da função G, no ponto n = 1; logo:

G(1) = g_1 que representa a função g_1: N→ {0,1}.

Vamos produzir uma função Γ_n (*gamma* índice n), de tal forma que esta função seja um dos elementos do conjunto das funções F(N, {0,1}), mas que não pertença ao conjunto imagem da função G, que aqui chamamos de I_m (G). Assim:

$$\begin{cases} \Gamma_n \notin I_m(G) \\ \Gamma_n \in F(N, \{0,1\}) \end{cases}$$

Recordando o artifício utilizado para provar a injetividade de G, fizemos:

$$g_n(k) = \begin{cases} 1 \text{ para } n = k \\ 0 \text{ para } n \neq k \end{cases}$$

Podemos, então, inverter o resultado dessas imagens dentro do conjunto F(N, {0,1}), para todo n Є N, obtendo:

$$\Gamma_n = \begin{cases} 1 \text{ se } g_n(K) = 0 \ (n \neq K) \\ 0 \text{ se } g_n(K) = 1 \ (n = K) \end{cases}$$

Assim, para todo n Є N, $\Gamma_{(n)} \neq g_n = G(n)$, como podemos ilustrar tomando valores aleatórios para n.

Para n = 1:

$$\Gamma_1 = \begin{cases} 0 \text{ se } n = 1\text{; ou seja, } g(1) = 1 \\ 1 \text{ se } n \neq 1\text{; ou seja, } g_1(2) = g_1(3) = \ldots g_1(n) = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} 0 \text{ se } n = 2\text{; ou seja, } g_2(2) = 1 \\ 1 \text{ se } n \neq 2\text{; ou seja, } g_2(1) = g_2(3) = \ldots g_2(n) = 0 \end{cases}$$

.

$$\Gamma_n(n) = \begin{cases} 0 \text{ se } n = K\text{; em que } g_n(K) = 1 \\ 1 \text{ se } n \neq K\text{; em que } g_n(K) = 0 \end{cases}$$

Essa demonstração, enriquecida pelo exemplo numérico, prova que nenhuma função G: N→ F (N, ({0,1}) é sobrejetora e, como consequência, o conjunto F(N, {0,1}) possui mais elementos do que o conjunto N, permitindo a afirmação de que a cardinalidade de N é menor do que a cardinalidade de F(N, {0,1}), aparecendo, pela primeira vez neste trabalho, infinitos com "tamanhos" diferentes.

Vamos agora estender a ideia para atingir um conjunto X, arbitrário.

Em primeiro lugar, vamos provar que existe uma função G: X → F(X, {0,1}) injetiva.

Consideremos:

G: X → F(X, {0,1}) função a ser analisada.

G_x é o valor de G no ponto x Є X; que representa uma função de X em {0,1}.

Para obtermos uma função injetiva, temos que ter $G_x(x_1) \neq G_x(x_2)$ para todo $x_1 \neq x_2$. Assim, podemos fazer:

$$Gxn(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x = x_n \\ \\ 0 \text{ para } x \neq x_n \end{cases}$$

Onde x_n Є $X - \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$

Logo, por termos dois elementos no contradomínio da função G_x, para cada elemento x Є X, apenas um elemento x_n da função G_x possui como imagem o elemento 1, caracterizando imagens diferentes na função G para pontos diferentes no conjunto X. Analisando, esquematicamente, temos:

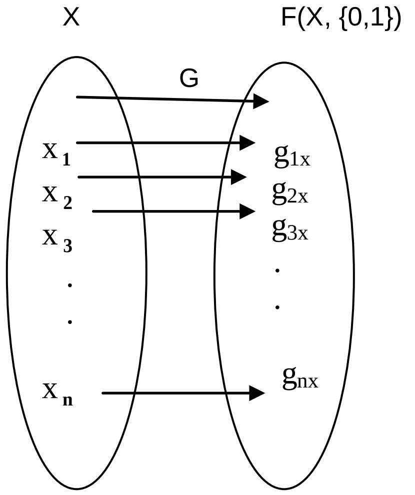


Diagrama 15: F(X, {0,1}) – injetiva.
Fonte: O autor (2011).

A injetividade da função G nos garante, em princípio, que o conjunto X tem cardinalidade menor ou igual ao conjunto F(X,{0,1}), ou seja, card(X) $\leq$ card F(X,{0,1}).

Vamos agora demonstrar que nenhuma função G: X $\rightarrow$ F(X,{0,1}) é sobrejetora.

Recordando, chamamos G_x a imagem da função G no ponto x Є X.

Como nosso objetivo é comprovar que não existe uma função G: X $\rightarrow$ F(X,{0,1}) sobrejetora, vamos tomar uma outra função H_x Є F(X,{0,1}) tal que $G_x \neq H_x$ para todo x Є X. Isto é feito escolhendo, para cada x Є X, um elemento $H_x(x)$, diferente de $G_x(x)$, como apresentamos:

$$Hxn(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } x = x_n \\ \\ 1 \text{ para } x \neq x_n \end{cases}$$

Onde x_n Є X – $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Demonstramos, então, o caso mais geral, garantindo que nenhuma função G: X $\rightarrow$ F(X,{0,1}) é sobrejetora e, consequentemente, o conjunto F(X,{0,1}) possui mais elementos do que o conjunto X, permitindo afirmar que a cardinalidade de F(X,{0,1}) é maior que a cardinalidade de X, o que implica, como já dissemos, o aparecimento de infinitos com "tamanhos diferentes".

Outro resultado importante que passamos a demonstrar é a relação de cardinalidade entre o conjunto dos números naturais N e o conjunto de suas partes, que reúne todos os subconjuntos de N, que representaremos por P(N).

Teorema 10: *"O conjunto P(N) das partes do conjunto dos números naturais tem cardinalidade maior que a cardinalidade do conjunto N dos números naturais".*

Para demonstrarmos esse teorema, vamos utilizar uma forma indireta, através da comparação entre a cardinalidade de P(N), conjunto das partes de N, e o conjunto F(N,{0,1}) de todas as funções do conjunto N no conjunto {0,1}, lembrando, que, por meio do Teorema 9, ficou comprovado ter cardinalidade maior que a cardinalidade de N.

Assim, o Teorema 10 será demonstrado com o objetivo de provar que *o conjunto das partes do conjunto N tem a mesma cardinalidade do conjunto F(N,{0,1}) de todas as funções de N em {0,1}*, consequentemente maior que a do conjunto dos números naturais N. O objetivo aqui é provar que existe a função H: P(N) → F(N,{0,1}) bijetora, o que garante que o conjunto P(N) tem cardinalidade maior que a de N, card (P(N)) > card (N).

Como utilizaremos os conjuntos P(N) e F(N,{0,1}), este último está bem caracterizado no Teorema 9. Agora passemos à caracterização dos elementos desses conjuntos, identificando, assim, a função H:P(N) → F(N,{0,1}:

Função: H:P(N) → F(N,{0,1})

Domínio da função: P(N), que representa o conjunto que reúne todos os subconjuntos de N.

Contradomínio da função: F(N, {0,1}), conjunto que reúne todas as funções de N em {0,1}.

Imagem da função: $I_m \in$ F(N,{0,1}) que representa o conjunto das funções de N em {0,1} que participam da função H. Cada elemento do conjunto imagem representa uma função.

Vamos agora dividir em duas partes esta demonstração, comprovando a injetividade da função H e, em seguida, a sobrejetividade, para garantir o que pretendemos:

H: P(N) → F(N, {0,1}) bijetiva.

Tomemos um conjunto X Є P(N), subconjunto de N, que representa um "ponto" no domínio da função H, cuja imagem é uma função h_x, representando um "elemento" do conjunto F(N, {0,1}).

Assim, temos:

$X \in P(N)$ e

$H(X) = h_x \in F(N, \{0,1\})$

$H_x: N \rightarrow \{0,1\}$

Esquematicamente, temos:

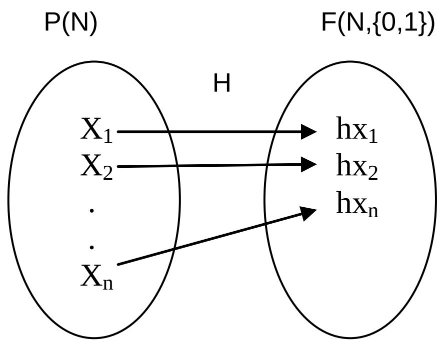


Diagrama 16: Bijetividade da função H:P(N) → F(N,{0,1}.
Fonte: O autor (2011).

Onde o conjunto $P(N) = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots\}$ reúne todos os subconjuntos do conjunto N dos números naturais.

O conjunto imagem da função H é composto de funções de N em {0,1}, assim, para que possamos ter imagens distintas para subconjuntos $X \in P(N)$ distintos, criaremos uma rotina de levar os naturais que pertençam ao subconjunto X, no elemento 1 do conjunto {0,1}, e todos os outros números naturais, que não forem elementos de X, no elemento 0 (zero) do conjunto {0,1}, garantindo assim que, para toda imagem h_x no conjunto F(N, {0,1}), vai existir um, e somente um, conjunto X_n correspondente no domínio P(N).

Supondo então $X_1 = \{1\}$, teremos:

$h_{\{1\}} = h_{\{1\}}(n) = \{(1,1), (2,0), (3,0), \ldots, (n,0) \ldots\}$

Supondo agora $X_2 = \{1,3\}$;

$h_{\{1,3\}} = h_{\{1,3\}}(n) = \{(1,1), (2,0), (3,1), (4,0), \ldots, (n,0), \ldots\}$

Podemos concluir esta primeira parte da demonstração, generalizando a seguinte ideia:

$$h_x = h_x(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n \in X \\ 0 \text{ se } n \notin X \end{cases}$$

Desse modo, fica demonstrada a injetividade da função H.

Em casos particulares, como o subconjunto vazio e o próprio conjunto dos naturais N, teremos as funções constantes:

$h\varnothing: N \to \{0,1\} \to h\varnothing\ (n) = 0$ para todo $n \in N h_n: N \to \{0,1\}$

$h_n(n) = 1$ para todo $n \in N$

Logo, H: P(N) → F(N, {0,1}) é claramente injetiva como queríamos mostrar.

Retomando, vamos para a segunda parte, que consiste em demonstrar a sobrejetividade na função H.

Consideramos uma função $\delta \in F(N, \{0,1\})$, imagem de um subconjunto X do domínio de H. Vamos utilizar o caminho inverso para garantir a sobrejetividade, assim:

$$H\delta_1^{-1}(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n \in \delta_1^{-1} \\ 0 \text{ se } n \notin \delta_1^{-1} \end{cases}$$

Ou

$$H\delta_1^{-1}(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } \delta(n) = 1 \\ 0 \text{ se } \delta(n) = 0 \end{cases}$$

Desse modo, fica assegurada a sobrejetividade da função H: P(N) $\rightarrow$ F(N,{0,1}), pois todos os elementos da imagem estarão no domínio da inversa proposta.

Se H é injetora e sobrejetora, provamos que existe H: P(N) $\rightarrow$ F(N, {0,1}) bijetora, logo:

card (P(N)) = card F (N, {0,1})

Utilizando esse resultado, ficou demonstrado que o conjunto dos números naturais possui menos elementos que o conjunto das partes do conjunto dos números naturais, ou seja:

card(N) < card P(N)

Da mesma forma que demonstramos o Teorema 9 em primeiro lugar para o conjunto N dos números naturais, principalmente pela riqueza de detalhes nos exemplos apresentados e, em seguida, para um conjunto X arbitrário, vamos demonstrar agora o Teorema 10 para um conjunto X arbitrário. Desse modo, o mesmo teorema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 10: *"O conjunto P(X) das partes de um conjunto arbitrário X tem cardinalidade maior que a cardinalidade do conjunto X".*

Para demonstrá-lo, seguiremos o mesmo roteiro quando utilizamos o conjunto dos números naturais. Segue-se, então, que nosso objetivo é provar que existe a função H: P(X) $\rightarrow$ F(X,{0,1}), bijetora.

Em primeiro lugar, vamos provar sua injetividade.

Tomemos um conjunto X_n Є P(X), subconjunto de X, que representa um "ponto" no domínio da função H, cuja imagem correspondente é uma função h_{xn}, representando um "elemento" do conjunto F(X,{0,1}).

Assim,

X_n Є P(X) e

$H(X_n) = h_{xn}$ Є F(X,{0,1})

Esquematicamente, temos:

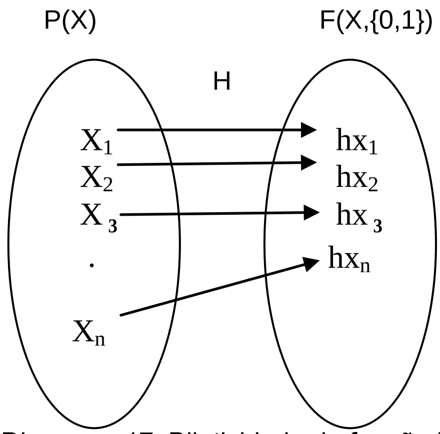


Diagrama 17: Bijetividade da função H:P(X) → F(X,{0,1})
Fonte: O autor (2011).

Onde P(X) = {X_1, X_2, X_3, ... X_n, ...} reúne todos os subconjuntos do conjunto X.

O conjunto imagem de H é composto de funções h_{xn} de X em {0,1}, assim, para que possamos ter imagens distintas para subconjuntos X_n Є P(X) distintos, criaremos uma rotina que leve todo x Є X_n, no elemento 1 do conjunto {0,1} pela função h_{xn}, e todos os outros elementos x Є (X - X_n), ou seja, elementos que não pertençam ao subconjunto X_n, levados ao elemento 0 (zero) do conjunto {0,1}, garantindo, assim, que, para toda imagem h_{xn} Є F(X,{0,1}), vai existir um, e somente um, conjunto X_n correspondente no domínio P(X).

Podemos simplificar da seguinte forma:

$$h_x = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in X_n \\ 0 \text{ se } x \notin X_n \end{cases}$$

Fica assim demonstrada a injetividade da função H.

A segunda parte dessa demonstração consiste em provar a sobrejetividade da função H.

Consideremos a função δ Є F(X,{0,1}), imagem de um subconjunto X do domínio da função H.

Vamos utilizar o caminho inverso para garantir a sobrejetividade do seguinte modo:

$$H\delta_1^{-1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \delta_1^{-1} \\ 0 \text{ se } x \notin \delta_1^{-1} \end{cases}$$

Ou

$$H\delta_1^{-1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } \delta(x) = 1 \\ 0 \text{ se } \delta(x) = 0 \end{cases}$$

Assim, fica assegurada a sobrejetividade da função H: P(X) → F(X,{0,1}), pois todos os elementos da imagem estarão no domínio da inversa proposta.

Se H é injetora e sobrejetora, provamos que existe H: P(X) → F(X, {0,1}) bijetora, logo:

card (P(X)) = card F (X, {0,1})

Utilizando esse resultado, ficou demonstrado que o conjunto dos números naturais tem menos elementos que o conjunto das partes do conjunto dos números naturais, ou seja:

card(X) < card P(X)

Fazendo uma reflexão, para solidificar os resultados que já concluímos neste trabalho, temos:

Dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal, se, e somente se, possuem o mesmo número de elementos, fato exaustivamente explorado ao longo deste estudo.

Também já demonstrado nesta pesquisa, dado um conjunto X infinito enumerável, ele terá a mesma cardinalidade de um outro conjunto Y, card(X) =

card(Y), se, e somente se, Y for infinito e enumerável. Fato comprovado por uma bijeção relacionando os conjuntos X e Y.

No Teorema 7, encontramos um resultado que impacta a análise de cardinalidade de conjuntos infinitos. O fato de não existir uma função de um conjunto X em um outro conjunto F(X,Y), de todas as funções de X em Y, que seja sobrejetiva, fica claro que o conjunto F(X,Y) possui mais elementos que o conjunto X, logo card(X) < card(F(X,Y)). Pela primeira vez, neste trabalho, estamos afirmando que um conjunto infinito possui menos elementos do que um outro conjunto infinito.

Surge uma nova ferramenta na análise da cardinalidade de conjuntos infinitos que, a seguir, enunciamos:

Dados dois conjuntos X e Y, podemos afirmar que card(X) < card(Y), se existir uma função injetiva f: X→ Y, mas não existir uma função f: X → Y, sobrejetiva.

Outra importante conclusão a partir do que já desenvolvemos neste estudo, referente à cardinalidade dos conjuntos infinitos, está explicitado no Teorema 7. Até este teorema, todos os conjuntos infinitos enumeráveis se caracterizam pela mesma cardinalidade. A partir do Teorema 7, é fato que a cardinalidade de um conjunto infinito enumerável representa a menor cardinalidade entre os conjuntos infinitos.

2.5.6 A Hipótese do Contínuo

A Hipótese do Contínuo é conjectura proposta por Georg Cantor (apud OLIVEIRA, 2011) e consiste no seguinte: **Não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números inteiros e menos elementos do que o conjunto dos números reais.**

Essa hipótese, pelas tentativas sem sucesso, não nos permite afirmar que é verdadeira nem que é falsa e, com a concordância da maioria dos matemáticos especialistas, não interfere na Matemática produzida até os dias de hoje. Podemos considerar essa hipótese verdadeira e trabalhar como tal ou, ao contrário, não aceitá-la como verdadeira e trabalhar da mesma forma, sem que os resultados sejam afetados.

Um dos maiores resultados de todos os tempos, demonstrado por Cantor, foi a constatação de que o conjunto dos números reais, também conhecido por contínuo real, representam um infinito “maior” que o infinito dos inteiros.

Segundo Cantor (apud OLIVEIRA, 2011), o conjunto das partes do conjunto N dos números naturais, P(N), tem cardinalidade maior que a cardinalidade de N e igual à cardinalidade dos números reais, R, ou conjunto de todos os pontos de uma linha reta. Com este raciocínio, ele afirma que qualquer conjunto “maior” que N deve ser pelo menos tão grande como o conjunto P(N), de todos os subconjuntos de N.

Para o desenvolvimento dessa hipótese, Cantor (apud OLIVEIRA, 2011) inicia o estudo com a análise da cardinalidade do conjunto dos números naturais, também conhecidos por números de contagem, constituindo o conjunto N = {0,1,2,3, ...}, cujo “tamanho”, representado por seu cardinal, aparece como a menor “dimensão” do infinito, dado por: card(N) = $\aleph_0$ (alefe zero). No desenvolvimento deste trabalho, mostramos que todos os conjuntos enumeráveis infinitos têm a cardinalidade do conjunto N dos números naturais, o que engloba os principais conjuntos numéricos apresentados no ensino básico. Assim, card(N) = card(Z) = card(Q) = $\aleph_0$.

Cantor contrariou o pensamento natural de que conjuntos infinitos têm o mesmo “tamanho” e provou que o conjunto dos números reais, R, também conhecido por contínuo real, conjunto de pontos de uma linha reta, é maior que o infinito dos naturais. Essa demonstração de Cantor é considerada um dos maiores resultados matemáticos da história.

O autor utilizou dois resultados que apresentamos neste trabalho, para provar que card(R) > $\aleph_0$, ou seja, que o infinito real é maior que o infinito natural. Em primeiro lugar, provou que o conjunto dos reais é pelo menos tão grande quanto o conjunto dos naturais. Esta tarefa foi relativamente fácil, visto que o conjunto N é subconjunto próprio de R, logo, deve ter pelo menos tantos elementos de R quanto de N. Em seguida, provou que não existe uma função sobrejetora de N sobre R, que também utilizamos em outra situação com objetivo de comparar infinitos.

Cantor (apud OLIVEIRA, 2011), com base no resultado da cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto finito, ou seja, se Γ_n, finito, tem card(Γ_n) = n, o conjunto das partes P(Γ_n) teria cardinalidade 2^n, card (P(Γ_n)) = 2^n estendeu o raciocínio ao que realmente queria demonstrar, ou seja, que R é um conjunto infinito de cardinal maior que o cardinal de N e o quanto maior que o cardinal de N representa esta cardinalidade. Segundo ele, o conjunto dos números reais é um conjunto infinito de elementos infinitos, visto que cada número real possui uma extensão decimal infinita, o que o levou a concluir que a cardinalidade de R é igual a $2^{\aleph_0}$, com base no resultado da cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto.

Podemos então enunciar o que representa o problema do contínuo de Cantor: saber se existe algum cardinal entre o cardinal de N (representado por $\aleph_0$) e o cardinal do conjunto R (representado por $2^{\aleph_0}$). Em suas conjecturas, Cantor (apud OLIVEIRA, 2011) afirmou que não existe um cardinal entre o cardinal de N e o de R. Esta conjectura ficou conhecida como **Hipótese do Contínuo**, que, contextualizando, representa uma discussão muito mais importante: descobrir quantos pontos tem uma reta.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No meio matemático, a formalização e simbologia enraizada, principalmente nos conteúdos mais abstratos, tornaram-se corriqueiras e naturais aos especialistas que "fazem" matemática, contudo vem dificultando a leitura para quem trabalha com o ensino médio em sala de aula e se distanciou dos objetos mais sofisticados da Matemática, mais particularmente dos conteúdos referentes ao infinito, foco desta pesquisa. O Apêndice 1 deste trabalho, intitulado “Simbologia, uma dificuldade matemática”, esclarece, de forma mais abrangente, o antagonismo entre a formalização e simbologismo para matemáticos especialistas que produzem Matemática e uma linguagem mais simples para os que trabalham com Matemática.

É fato que não podemos esquecer que foi a partir dessa formalização e transformação em linguagem simbólica que melhorou a qualidade e a velocidade com que esta Matemática mais sofisticada vem sendo desenvolvida e, sem prejuízo de uma ou de outra linha de trabalho, acreditamos que também é importante a preocupação com o acesso a esses conteúdos, de uma forma menos árida, ou mesmo de mais fácil compreensão. Temos convicção de que é possível tornar mais abrangente o acesso à Análise Real por pessoas que, de uma forma ou de outra, estão envolvidas com a Matemática. Torna-se necessário concordar com a realidade que já era óbvia para nós antes de iniciar este trabalho, mas, no desenvolvimento do tema, ao longo de dois anos, em contatos feitos com muitas pessoas envolvidas com a Matemática, sobretudo professores do ensino básico. Nesta caminhada, foi possível perceber o quanto essas pessoas estão distantes dos conteúdos de Análise. Esta afirmação não é fruto de nenhuma pesquisa científica para validá-la, mas estes dois anos trabalhando com o tema, discutindo nas mais diversas esferas em que a Matemática aparece, certificamo-nos de que raras são as pessoas que trabalham com Matemática, que têm facilidade ou, até mesmo, conhecimentos dos temas que envolvem a Análise Real.

Este trabalho foi inspirado, principalmente, em nossas angústias, apresentadas no início desta pesquisa, e não tivemos, em nenhum momento, a pretensão de apresentar um estudo formal e completo de infinito e de cardinalidade, haja vista que, apesar de ser um tema muito explorado nos livros de Análise Real, atinge graus de complexidade só decifráveis nos núcleos de matemáticos, contudo acreditamos ser possível transformar esse conteúdo em uma linguagem simples o bastante para um acesso mais fácil a uma quantidade maior de pessoas que lidam com a Matemática.

Temos consciência de que não apresentamos aqui conteúdos matemáticos tão sofisticados nem mesmo tão extensos, mas, com certeza, foram apresentadas partes importantes dessa Matemática sofisticada, procurando utilizar a linguagem mais simples possível em conteúdos que possam facilitar para um professor de ensino básico compreender conteúdos elementares relativos à Matemática como um todo, e que nunca são explicados fora dos contextos da Análise Real.

Escolhendo o tema "infinito" pelo caminho da cardinalidade, acreditamos ter suavizado temas como conjuntos infinitos e conjuntos ilimitados, a contagem ou enumeração das frações. Também foram utilizadas funções e suas características de injetividade, sobrejetividade e bijetividade, com o intuito de demonstrar teoremas que envolvam cardinalidade de conjuntos infinitos. Acreditamos que conseguimos aqui clarear um pouco a ideia de infinitos cada vez "maiores", sempre apoiados em textos que permitam, de certa forma, uma compreensão melhor do assunto.

Assim, a partir dos conteúdos trabalhados, pensamos ter facilitado as análises dos conjuntos numéricos, presentes em todo o ensino básico. O estudo das funções, no ensino médio, pode ser enriquecido com alguns teoremas apresentados aqui, até mesmo a afirmação que a diferença $\infty - \infty$ não é zero pode ser compreendida a partir de termos infinitos com "tamanhos" diferentes.

Apesar de trabalharmos com Matemática há mais de 30 anos, ao longo de nossa carreira profissional, e embora cursado graduação e pós-graduação em Matemática e, fato mais grave, apesar de, na graduação e na pós-graduação, termos tido a disciplina Análise Real, foi a primeira vez que tivemos acesso a fatos matemáticos decisivos para uma boa formação e, principalmente, para ter uma segurança no sentido de tratar de conteúdos, tais como infinitos cada vez "maiores", enumeração das frações e, até mesmo, assuntos polêmicos como considerar o conjunto dos números naturais como conjunto universo e demonstrar que o conjunto de suas partes (todos os subconjuntos dos naturais) ter mais elementos que N, apesar de ambos serem infinitos.

Acreditamos, na verdade, ter-nos introduzido em um processo que pode permitir um ramo de pesquisa envolvendo o processo ensino-aprendizagem de

Matemática, mais especificamente de aproximar pessoas não especialistas em Matemática de temas tão importantes dessa área de conhecimento.

Nestes dois anos de trabalho, em contato direto com a Educação Matemática, tivemos consciência da importância da Matemática como um caminho para todas as outras áreas de conhecimento, e da necessidade de permitir que um número maior de pessoas tenha facilidade na aproximação e compreensão da Matemática de um modo geral, principalmente a Matemática do ensino básico. Mas, para que isso, de fato, aconteça, é necessário que a preocupação com o ensino seja mais presente nas mais variadas instâncias que possam interferir nos processos educacionais, pois quanto mais pessoas trabalhando nesse sentido, mais rapidamente os resultados serão significativos nessa aproximação com a Matemática.

Pensamos que o caminho natural para uma mudança de paradigma em relação ao ensino da Matemática é uma mudança no pensamento de quem trabalha o ensino dessa disciplina em todos os seus segmentos. Estas pessoas, professores de Matemática, com certeza, terão mais facilidade e mais segurança ao trabalhar no ensino, à medida que vão enriquecendo seus conhecimentos em Matemática mais profunda e sofisticada, mas é necessário que sejam capazes de explicar a maioria das verdades que, pela falta de conhecimento, são consideradas óbvias, sem necessidade de uma demonstração.

Pelo trabalho desenvolvido nesta dissertação, sentimo-nos muito mais preparados para tratar de temas da Matemática do ensino básico, pelo enriquecimento obtido nos conteúdos e a visão matemática adquirida durante este período. Esperamos que outras pessoas que vierem a ler esta pesquisa também possam usufruir de resultados como este que obtivemos e se conscientizem da urgência em melhorar o ensino da Matemática de uma forma geral, minimizando os efeitos devastadores pelo falido processo de ensino-aprendizagem que vem sendo desenvolvido ao longo de tantos anos, discriminando e elitizando o ensino dessa disciplina no país.

Encerrando estas considerações finais, gostaríamos de destacar que, pela abordagem feita sobre o infinito, mesmo que de uma forma superficial, é possível avaliar o grau de abstração que o tema exige. Talvez, a disciplina Análise Real devesse ter outro tratamento e, principalmente, mais tempo, para ser trabalhada nas licenciaturas, de forma a permitir que os licenciandos tenham uma abordagem diferenciada e um tempo maior para a maturidade matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMADEI, Flávio Luiz. *O infinito*: um obstáculo no estudo da Matemática. 2005. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

ARISTÓTELES. *Física*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1996.

ÁVILA, Geraldo. *Introdução à análise matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1995.

BARTLE, Robert G. *Elementos de Análise Real*. Trad. Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

BERTOLUCCI, Cristina Cavalli. *Noções de infinito matemático em adolescentes e adultos*. 2009. 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

BOLZANO, Bernard. *Las paradojas del infinito*. México: Mathema, 1991.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Domingues. São Paulo: Blücher, 2001.

CALDER, Allan. O infinito: teste decisivo para o construtivismo. *Scientific American Brasil*, São Paulo, n. 48, p. 48-55. Edição Especial.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 3. ed. Lisboa: Gradativa, 2000.

CENTURIUN, Marília; RODRIGUES, Arnaldo. *Vai começar a brincadeira*. São Paulo**:** FTD, 2007.

CERULLO, Maria Inêz de Castro; SATO, Maria Tomie Shirahise; CHACUR, Regina Maria. *Pensar e construir*. São Paulo: Scipione, 2002.

COURANT, Richard. *O que é Matemática?*: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CRUZ, Willian José da. *Os números reais*: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. 2011. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

D’AMBRÓSIO, Ubiratran. *Etnomatemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto*. Matemática*: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2003.

______. *Tudo é Matemática*. 6ª série. São Paulo: Ática, 2004.

______. *Tudo é Matemática*. 7ª série. São Paulo: Ática, 2004.

______. *Tudo é Matemática*. 8ª série. São Paulo: Ática, 2004.

______. *Tudo é Matemática*. 9ª série. São Paulo: Ática, 2004.

______. *Vivência e construção.* São Paulo: Ática, 2006.

DEHORNOY, Patrick. A aritmética necessita do infinito? *Scientific American Brasil*, São Paulo, n. 48, p. 76-81, 2005. Edição Especial.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004,

HALMOS, Paul. *Teoria ingênua dos conjuntos.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2001. (Coleção Clássicos da Matemática).

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo; MACHADO, Antônio. *Matemática e realidade*. São Paulo: Atual, 2006.

LE GOFF, Jean-Pierre. Da perspectiva ao infinito geométrico. *Scientific American Brasil*, São Paulo, n. 48, p. 24-31. Edição Especial.

LIMA, Elon Lajes. *Curso de análise, volume 1.* Rio de Janeiro: Impa, 2009.

LOUREIRO, Carine B. *A contribuição da análise matemática na formação de professores*. Disponível em: <https://mail.google.com/mail/?ui=1&view=att&th=127d570a7468d45d&attid=0.1&disp=va>. Acesso em: 9 abr. 2010.

MARTÍNEZ, Javier de Lorenzo. A ciência do infinito. *Scientific American Brasil*, São Paulo, n. 48, p. 6-13, 2005. Edição Especial.

MOMETTI, Antonio Luis; FRANT, Janete Bolite. *O infinito e as metáforas no ensino de Cálculo*. Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/completos/10-02.pdf>. Acesso em: maio 2010.

MONTEIRO, Lúcia Cristina Silveira. O conceito de infinito e a percepção de movimento. VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Recife, 15 a 18 de julho de 2004. Universidade Federal de Pernambuco. *Anais...* Secretaria Municipal de Maceió, 2004.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti: Por que análise matemática na licenciatura? Revista *Zetetiké – Cempem – FE* – Unicamp, Campinas, v. 11, n. 19, p. 57-79, jan./jun. 2003.

______; SOARES, Maria Manuela Martins. *A formação dos professores de Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

______; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. *Revista Zetetiké – Cempem –* FE – Unicamp, Campinas, v. 11, n. 19, p. 57-79, jan./jun. 2003.

MORI, Iracema; ONACA, Dulce Satiko. Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 2006.

OLIVEIRA, J. Franco de. *A herança de Cantor e a Hipótese do Contínuo*. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Pl_FrancoOliveira_4888b83d0af7b.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2011.

REMÉNYI, Maria. A história do símbolo. *Scientific American Brasil*, São Paulo, n. 48, p. 32-33, 2005. Edição Especial.

SALANSKIS, Jean-Michel. A análise não-standard. *Scientific American Brasil*, São Paulo, n. 48, p. 42-47. Edição Especial.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. Infinito: uma história a contar. *Spectrum*. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/millenium34/16.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2010.

SANTO AGOSTINHO. *A cidade de Deus (contra os pagãos).* 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1999.

SANTOS, Vinício de Macedo. *O infinito*: concepções e consequências pedagógicas. 1995. 217 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

APÊNDICE 1

SIMBOLOGIA, UMA DIFICULDADE MATEMÁTICA

Reményi (2005, p. 33), em seus estudos, afirma que Wallis “sabia que o símbolo utilizado pelos romanos para o número 1000 (M) podia representar também ‘um número muito grande’”. A autora informa, ainda, que o matemático e filósofo holandês Bernhard Nieuwentijt (1654-1718) aproveitou o símbolo “m” para representar o infinito em seu trabalho intitulado *Analysis infinitorum*.

Mas, segundo a autora, o símbolo entrou na literatura matemática e filosófica no começo do século XVIII. O símbolo era “sempre relacionado ao conceito infinitamente pequeno, cuja legitimidade e significado estavam amparados pelo cálculo infinitesimal que nascia” (Ibid.). O símbolo “∞” tornou-se parte integrante da linguagem dos símbolos matemáticos a partir do trabalho de Leonhard Euler (1707-1783), o qual “adotou um ponto de vista formal e não admitiu legitimações metafísicas para as grandezas infinitamente pequenas” (Ibid.).

A literatura matemática utilizada antigamente, que, na maioria dos temas, trabalhava com uma linguagem natural da época, provavelmente, era não somente mais compreensível, como também mais acessível que a linguagem de hoje, pela transformação sofrida ao longo do tempo, abandonando a linguagem natural e adotando uma linguagem simbólica, criando, desse modo, muitas dificuldades para a leitura e compreensão dos conteúdos matemáticos, tanto de uma Matemática mais sofisticada, quanto em todos os segmentos do ensino.

Segundo Reményi (2005), doutora em Matemática e historiadora de Ciência em Heideibere, apesar do paradoxo, a moderna linguagem matemática, com seus símbolos e fórmulas, que acabam por fechar portas para aqueles que estão iniciando, é posta desta forma para maior clareza, permitindo que matemáticos sejam mais precisos na formulação de hipóteses e argumentações. A autora informa, ainda, que um dos matemáticos preocupados com essa formalização foi John Wallis (1616-1709), tendo sido ele, coincidentemente, o responsável pelo símbolo utilizado até hoje para representar o infinito, foco desta pesquisa. Foi Wallis um dos principais matemáticos no trabalho de formalização da álgebra.

A interferência dessa simbologia e formalização da Matemática dificultou a aprendizagem tanto para leigos, ou mesmo iniciantes, quanto para professores do ensino básico que se propõem a uma capacitação ou, simplesmente, querem aprofundar seus conhecimentos em Análise Real, considerada disciplina estratégica entre uma Matemática básica e uma mais sofisticada e profunda.

Esta nova linguagem matemática, ou seja, a linguagem simbólica, quando apresentada fora das comunidades matemáticas, ou são interpretadas com ingenuidade ou não são interpretadas corretamente, como nos casos dos exemplos que passamos a apresentar:

Se encontrarmos em Análise uma expressão da forma $k \leq x \leq k$, o significado é natural que $x = k$, e que provavelmente resultou de uma demonstração. Mas, fora do círculo de matemáticos, é uma sentença estranha e incomum de representar algum resultado de demonstração.

Se procurarmos algo mais sofisticado como o conjunto F (N; {0,1}), tão utilizado nas últimas demonstrações deste trabalho, na formalização do tema "infinito", é muito abstrato construir, mentalmente, estas infinitas funções de domínio em N e imagem no conjunto {0,1}, que reunidas formam o conjunto F(N, {0,1}). Como se não bastasse essa dificuldade, por si só o conjunto é apenas um dos objetos de uma linha de raciocínio para demonstrar que nenhuma função com domínio no conjunto dos números naturais e imagem refletida no conjunto F(N, {0,1}) é sobrejetiva.

Por experiências anteriores, visto que já tivemos contato com Análise na graduação, e, recentemente, no grupo de estudos de que participamos durante o desenvolvimento deste trabalho, temos a convicção do alto grau de abstração desta função de N em F(N, {0,1}), a ponto de bloquear estudos do tema pela não compreensão dessa função.

Com vistas a esta realidade, que contrasta a necessidade de maior produção de Matemática abstrata com a realidade em que cada vez mais pessoas se afastam desta Matemática avançada, surgiu esta ideia de falar do infinito no eixo da cardinalidade, mas em uma linguagem mais próxima possível da fala natural e corriqueira das pessoas.

Talvez, em uma linguagem menos simbólica e mais cotidiana, possamos alcançar mais pessoas na compreensão, não só dessa parte da Análise, mas também do máximo de conteúdos que cercam esta nobre área de conhecimento, ou seja, a Análise Real. Talvez este seja um caminho para permitir que mais pessoas possam usufruir da visão matemática do mundo, com olhar próximo dos grandes matemáticos.

Vale lembrar que não podemos creditar a maior responsabilidade pelas dificuldades das pessoas na compreensão do infinito, ao processo de formalização dos teoremas que temos de percorrer para a compreensão do tema, mas também é claro que uma “tradução” desses símbolos e fórmulas, com certeza, poderá minimizar a aridez desses conteúdos.

Acreditamos que a compreensão de um texto matemático apresenta maior ou menor dificuldade, independente de qual Matemática estamos nos referindo, em função da sofisticação e não dos símbolos utilizados para descrever este texto.