UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Cleber Abrahão de Souza

Teoria de Einstein-Cartan com Campos de Dirac, ação de Holst e Fluido de Spin

Juiz de Fora

2016

Cleber Abrahão de Souza

Teoria de Einstein-Cartan com Campos de Dirac, ação de Holst e Fluido de Spin

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme de Berredo-Peixoto

Juiz de Fora

2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a toda minha família.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente a Deus, que tem me concedido forças até aqui.

- Ao Professor e Orientador Guilherme de Berredo-Peixoto pela orientação no mestrado e doutorado, pelos esclarecimentos e pelo apoio, pela amizade e oportunidade de aprendizado que tive durante os últimos seis anos.

- Ao Professor Ilya Shapiro pela colaboração durante o mestrado e doutorado, pela contribuição em trabalho publicado durante o doutorado, pelos esclarecimentos e pela oportunidade que me foi dada de cursar disciplinas, por ele ministradas, as quais foram imprecindíveis para o meu desenvolvimento acadêmico.

- Ao Professor Laurent Freidel pela colaboração.

- Aos meus pais Luciene e Manoel, e à minha irmã Elaine Cristina (Nani), que me apoiaram incondicionalmente para a realização deste trabalho.

- Agradeço a todos os meus amigos da pós-graduação, pelas amizades que tive a oportunidade de fazer, pelo companheirismo e apoio de todos e pelos bons momentos que compartilhamos, dos quais me lembrarei sempre.

- Aos demais professores do departamento de Física da UFJF.

- Aos secretários do departamento de Física da UFJF, Sr. Domingos Lopes e Alan Abreu.

- Agradeço a UFJF pela estrutura oferecida.

- A CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro durante o Doutorado.

- A todos que me ajudaram e estiveram juntos durante a realização desse trabalho.

A única generalização cem por cento segura sobre a história é aquela que diz que enquanto houver raça humana haverá história.

Eric Hobsbawn

RESUMO

Apresentamos a teoria de Einstein-Cartan através da ação de Holst com campos de Dirac minimamente acoplados a curvatura e torção. Um termo de acoplamento quadri-fermiônico emerge naturalmente após usar a relação entre torção e matéria, conforme resultados obtidos previamente por Perez e Rovelli. O coeficiente desse acoplamento possui uma relação direta com o parâmetro de Barbero-Immirzi (BI), presente na ação de Holst. Investigamos soluções cosmológicas para o modelo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Mostramos que para o caso não massivo, a equação de estado descreve um fluido perfeito com $p = w\rho$, com $w = 1$. Para o caso massivo, é possível descrever uma fase inflacionária com $w = -1$ ou $w = 1$ para um Universo jovem. Estudamos também o acoplamento entre gravitação, férmions e torção com um fluido de spin (fluido de Weyssenhoff). Mostramos uma ação equivalente em termos da interação quadri-fermiônica, um termo apenas de interação entre o tensor de spin, mais um termo de interação entre férmions e o tensor de spin, todos eles em função do parâmetro (BI). O termo de interação entre o fluido de spin e a corrente fermiônica representa um novo ponto de partida para a descrição de soluções cosmológicas.

Palavras-chave: 1. Gravitação e Cosmologia. **2.** Campos de Dirac. **3.** Ação de Holst. **4.** Parâmetro de Barbero-Immirzi.

ABSTRACT

In this work we present the Einstein-Cartan theory by means of Holst action with Dirac fields description minimally coupled to curvature and torsion. The coupling term four-fermion emerges after using the relationship between the torsion and source of matter, previously calculated by Perez and Rovelli. The coupling constant is related to the Barbero-Immirzi (BI) parameter, which emerges from the Holst action. We investigate cosmological solutions in the standard Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) model. Whe show in the massless case that the equation of state describes a perfect fluid with $p = w\rho$, with $w = 1$. For the massive case, is possible to describe an inflationary phase with $w = 1$ for early universe. We study also the coupling between fermions and gravitation with torsion in the presence of spin fluid (Weyssenhoff fluid), and we show the equivalent action with four-fermion interaction, a term of self-interaction of the spin fluid and a interaction term between fermionic field and spin fluid. In all these cases, there is the dependence on BI parameter. The interaction term between the fermionic current and the spin tensor can be considered as a new starting framework for studing cosmological effects.

Keyword : 1. Gravitation and Cosmology. **2.** Dirac Fields. **3.** Holst action. **4.** Barbero-Immirzi Parameter.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A interação gravitacional é uma das forças fundamentais da natureza, tendo sido inicialmente formulada por Isaac Newton. A descrição completa desta interação foi publicada no trabalho intitulado *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"* em 1687, [1]. Durante os séculos subsequentes, a ciência e em particular a física sofreram grandes mudanças. Cerca de três séculos depois já estava claro que para uma determinada classe de sistema de referência, as leis da física tornavam-se invariantes sob transformações de coordenadas. Esses sistemas ficaram conhecidos como referenciais inerciais. Nesse caso, houve algumas dificuldades técnicas no que diz respeito a escolha de um conjunto de transformações que pudessem garantir a invariancia das leis físicas em diferentes referenciais inerciais, mas com a formulação da teoria da Relatividade Especial (RE) pelo físico alemão Albert Einstein em 1905, um novo conjunto adequado de transformações de coordenadas foi considerado, garantindo assim a invariância de Poincaré [2]. Em 1915 foi publicada a teoria da Relatividade Geral (RG), formulada por Albert Einstein, esta teoria se caracterizou como uma extensão da teoria da RE, em que descrevia a interação gravitacional de um modo radicalmente diferente.

Na teoria da RG o espaço e o tempo tornam-se dinâmicos e a interação gravitacional está relacionada com a estrutura geométrica do espaço-tempo, que por sua vez, é deformado devido à distribuição de matéria contida no mesmo. Desse modo, com a universalização da teoria de gravitação, foi possível obter uma descrição mais abrangente a respeito do Universo em grande escala e fundamentar as bases para o desenvolvimento da cosmologia moderna. Além disso, foi possível estudar problemas em astrofísica de um modo mais aprofundado em comparação à gravitação de Newton, onde podemos encontrar, por exemplo, a predição dos buracos negros.

Antes das análises das observações do astrônomo Edwin Hubble em 1929, acreditava-se que o Universo era estático, mas as conclusões das observações feitas de galáxias distantes revelaram não um Universo estático, mas apontavam para um Universo em evolução.

Nesta tese usamos a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FRLW), que é uma solução exata das equações de campo de Einstein, que descreve um Universo isotrópico e homogêneo, em expansão ou contração.

Com o desenvolvimento científico e tecnológico foi possível obter análises mais precisas em relação às condições do Universo, como por exemplo,podemos citar as medidas realizadas pelo satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*), as quais mostraram anisotropia na radiação cósmica de fundo em microondas. Em 1995, o telescópio CAT (*Cosmic Anisotropy Telescope*) realizou medidas da anisotropia da radiação em alta resolução e muitos experimentos melhores e mais sofisticados foram realizados nos anos que se seguiram, dentre os quais podemos citar o telescópio WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) e a missão espacial Planck.

As investigações das teorias de gravitação quântica são um dos elos que podem nos ajudar a compreender fenômenos físicos ocorridos nos primeiros instantes do Universo. Como já foi dito anteriormente, na teoria da RG o espaço-tempo é caracterizado por possuir curvatura, mas essa teoria pode ser generalizada ao considerarmos a parte antissimétrica da conexão afim, realizada por um objeto chamado tensor de torção. Essa estrutura foi introduzida pelo matemático francês Elie Cartan, e a teoria correspondente é chamada de teoria de Einstein-Cartan (EC), que descreve a interação gravitacional no espaço-tempo com torção. Uma revisão completa sobre os fundamentos da teoria de EC é apresentada em [3] e também segue-se o mesmo assunto nos trabalhos [4], [5], [6], [7] e [8]. Outras considerações com respeito a teoria de gravitação com torção são feitas em [9], [10], [11] e [12] .

Um dos primeiros trabalhos que abordaram a relação entre a teoria da Relatividade Geral (RG) com a teoria de Dirac foi publicado em 1929 por H. Weyl [13]. A partir da década de 1950 surgiram muitos trabalhos sobre esse assunto, cujo tema principal era a teoria de gravitação com spin e torção (veja por exemplo [14], [15] e [16]).

A relação entre férmions e torção se dá devido ao fato de que os férmions quando acoplados com gravitação se apresentam como fontes para o campo de torção, [17] e [18]. A teoria de EC é denominada também de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK) e tornou-se uma ferramenta importante para as investigações em cosmologia. Um estudo sobre as condições no Universo primordial é feito em [19]. Em [20] mostra-se que a interação spin-spin que emerge da teoria de Einstein-Cartan não evita a formação da singularidade inicial, em contraste com o resultado da maioria dos trabalhos com torção (veja por exemplo [21] ou o artigo de revisão [22]). Podemos conferir também um estudo sobre as soluções exatas das equações de Dirac para modelos de Universo em expansão em [23]. Em [24] é feita uma análise da transferência de energia entre matéria e campo gravitacional, e também é mostrado como os férmions podem ser responsáveis pelo regime acelerado no Universo jovem. Em [25] é considerado o acoplamento não mínimo entre o campo fermiônico e o campo gravitacional para estudar parâmetros de densidade e de desaceleração. Em [26] é proposto um mecanismo que explica o desequilíbrio matéria - antimatéria observado no Universo. Em [27], o acoplamento entre férmions e gravitação com torção é aplicado para investigar possíveis efeitos da constante cosmológica. De modo geral, podemos dizer que as principais motivações para o estudo de teorias de gravitação com torção, em cosmologia, repousam na possibilidade de descrever um cenário sem singularidade inicial ou inclusive um processo de expansão acelerada no Universo atual. No entanto, apesar de ser um estudo relevante e atraente, essas possibilidades ainda não foram confirmadas.

A partir da década de 1970 surgiram muitos trabalhos científicos que abordavam a teoria de gravitação de EC considerando uma distribuição de matéria macroscópica, na forma de um fluido com spin intrínseco. Isso porque a teoria de EC pode ser relacionada com o spin da matéria a partir do acoplamento entre teoria de gravitação com torção e campos de Dirac. Esse conteúdo de matéria é chamado de fluido de spin ou fluido de Weyssenhoff, [28] e [29]. Existe um número considerável de trabalhos que usam essa abordagem para investigações em cosmologia. Podemos citar, por exemplo, [30] onde é feita uma descrição de modelos cosmológicos não homogêneos, ou seja, em que a condição de homogeneidade e isotropia do Universo é violada. Em [31] a mesma formulação é usada para estudar singularidades em cosmologia.

O tensor energia-momento para um fluido perfeito usando a formulação de fluido de spin é deduzido a partir do princípio variacional em [32], [33] e [34]. Em [35] foi feita uma análise da dinâmica da lagrangiana obtida por Ray e Smalley. A contribuição do tensor energia-momento em função da densidade de spin é considerada como sendo uma componente dominante durante o período inflacionário do Universo em [21] e [36]. Outros modelos cosmológicos são investigados em [37] e [38]. Em [39] é apresentada uma formulação mais simplificada para o fluido de spin com a teoria de EC com o objetivo de investigar modelos cosmológicos com rotação, cisalhamento e expansão. Efeitos da torção no Universo primordial considerando o fluido de spin são investigados em [40].

Nesta tese estamos considerando a teoria de EC com o formalismo de Holst [43] juntamente com os campos de Dirac e fluido de spin para investigar aspectos em teoria de gravitação. No capítulo 2, apresentamos os principais aspectos matemáticos da teoria de EC e apresentamos como a RG pode ser generalizada a partir da assimetria da conexão afim, além de mostrar uma descrição dos campos de Dirac e do procedimento mínimo, pelo qual pode-se fazer o acoplamento entre férmions e gravitação. A motivação de nosso trabalho se encontra no fato de que Perez e Rovelli em [44] mostraram que uma teoria de gravitação acoplada minimamente com férmions e torção, com a ação de Holst, é equivalente a uma descrição da interação gravitacional com a ação de Eintein-Hilbert somada a um termo de interação quadrifermiônica. No capítulo 3, usaremos a formulação de Perez e Rovelli e apresentaremos o acoplamento entre férmions massivos e não massivos e gravitação juntamente com o formalismo de Holst aplicados ao modelo cosmológico FLRW, veja por exemplo, [45]. No capítulo 4, é apresentado o mesmo formalismo descrito no capítulo anterior, mas com a adição de um campo de matéria descrito pelo fluido de Weyssenhoff. Obtemos uma ação apenas em termos das fontes dos campos considerados. Finalmente, apresentamos as conclusões e algumas passagens matemáticas úteis são apresentadas nos apêndices.

2 TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

Em 1922, o matemático Élie Cartan introduziu o conceito de torção ao considerar a parte antissimétrica da conexão afim, lembrando que na teoria da RG a conexão afim é simétrica. Nesse contexto o tensor torção é uma quantidade geométrica do espaço-tempo que agora denomina-se como espaço de Riemann-Cartan.

2.1 ELEMENTOS DA TEORIA DE EINSTEIN-CARTAN

É importante lembrar que na teoria da Relatividade Geral (RG), as quantidades geométricas são construídas com a conexão afim de tal modo que $\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha} = \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\mu}$, ou seja, a conexão afim é simétrica nos índices μ e α e também obedece uma condição de metricidade $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$, ou seja

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}(g_{\beta\nu}) - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}(g_{\mu\beta}) = 0. \tag{2.1.1}$$

Através dessa escolha obtem-se uma solução para a conexão $\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}$ que é escrita em função da métrica $g_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$\Gamma^{\mu}{}_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\partial_{\rho} g_{\beta\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\beta\rho} - \partial_{\beta} g_{\rho\lambda} \right), \tag{2.1.2}$$

denominada como símbolos de Christoffel.

A teoria de EC apresenta-se como uma generalização da teoria da RG já que os objetos matemáticos são modificados pelo tensor torção. O tensor torção é definido como ,

$$T^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\beta\alpha}, \tag{2.1.3}$$

onde a conexão afim $\tilde{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ apresenta uma assimetria em relação aos índices α e β . Observamos que o tensor torção é antissimétrico nos dois últimos índices, $T^{\mu}{}_{\alpha\beta} = -T^{\mu}{}_{\beta\alpha}$. [1]

Analogamente ao espaço de Riemann, exige-se que a derivada covariante da métrica também seja nula no espaço de Riemann-Cartan, satisfazendo assim a condição de metricidade

$$\tilde{\nabla}_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0, \tag{2.1.4}$$

onde $\tilde{\nabla}_{\alpha}$ é a derivada covariante com torção. Podemos escrever mais explicitamente como

$$\tilde{\nabla}_{\alpha} g_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} g_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu} = 0. \tag{2.1.5}$$

2.1.1 Conexão afim no espaço-tempo com torção

É possível mostrar que a conexão afim no espaço-tempo com torção pode ser escrita em função da conexão afim pura mais um termo que descreve a torção. Ao considerarmos a permutação cíclica dos índices α, μ e ν em (2.1.5) obtemos um conjunto de três equações, e que após algumas manipulações podemos escrever

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu} = \\ = \; & \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\alpha} g_{\lambda\mu} \\ - \; & \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\alpha} g_{\lambda\mu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} g_{\lambda\alpha}, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

usando (2.1.3) e considerando

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} = 2\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \tag{2.1.7}$$

podemos reescrever (2.1.6) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) = \\ = \; & \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Big[T^{\lambda}{}_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu} + T^{\lambda}{}_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda} \\ + \; & \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} + T^{\lambda}{}_{\nu\mu} g_{\lambda\alpha} \Big], \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

após multiplicarmos ambos os lados da equação anterior por 1/2, é possível perceber que o lado esquerdo da equação acima representará a conexão afim no espaço-tempo riemanniano, ou seja,

[1] Para uma revisão, ver [22]

podemos escrever (2.1.8) como,

$$\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\beta}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Big(T_{\nu}{}^{\beta}{}_{\mu} - T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} - T^{\beta}{}_{\nu\mu}\Big), \tag{2.1.9}$$

reorganizando os termos, teremos,

$$\tilde{\Gamma}^{\beta}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu} + K^{\beta}{}_{\mu\nu}, \tag{2.1.10}$$

onde $K^{\beta}{}_{\mu\nu}$ é o tensor contorção definido como,

$$K^{\beta}{}_{\mu\nu} = 1/2(T^{\beta}{}_{\mu\nu} - T_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} - T_{\nu}{}^{\beta}{}_{\mu}), \tag{2.1.11}$$

de onde podemos mostrar que $K_{\beta\mu\nu} = -K_{\mu\beta\nu}$.

2.1.2 Tensor curvatura e escalar de curvatura no espaço-tempo com torção

Para expressar o tensor de curvatura no espaço com torção, consideraremos o comutador das derivadas covariante aplicado em um vetor

$$[\tilde{\nabla}_{\alpha}, \tilde{\nabla}_{\beta}]P^{\lambda} = T^{\tau}{}_{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_{\tau}P^{\lambda} + \tilde{R}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\beta}P^{\tau}, \tag{2.1.12}$$

vemos que o comutador no espaço com torção depende do tensor torção e do tensor de curvatura, onde $\tilde{R}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\beta}$ é tensor de curvatura no espaço com torção, que é escrito como

$$\tilde{R}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\tau\beta} - \partial_{\beta}\tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\tau\alpha} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\gamma\alpha}\tilde{\Gamma}^{\gamma}{}_{\tau\beta} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}{}_{\gamma\beta}\tilde{\Gamma}^{\gamma}{}_{\tau\alpha}. \tag{2.1.13}$$

Podemos facilmente substituir as conexões da formula acima pela relação (2.1.10) e obter como resultado o tensor de curvatura expresso em termos do tensor de Riemann e do tensor de contorção, ou seja,

$$\tilde{R}^{\lambda}{}_{\tau\alpha\beta} = R^{\lambda}{}_{\tau\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}K^{\lambda}{}_{\tau\beta} - \nabla_{\beta}K^{\lambda}{}_{\tau\alpha} + K^{\lambda}{}_{\gamma\alpha}K^{\gamma}{}_{\tau\beta} - K^{\lambda}{}_{\gamma\beta}K^{\gamma}{}_{\tau\alpha}. \tag{2.1.14}$$

De maneira análoga o tensor de Ricci pode ser escrito como

$$\tilde{R}_{\tau\beta} = R^{\alpha}{}_{\tau\alpha\beta} = R_{\tau\beta} + \nabla_{\lambda}K^{\lambda}{}_{\tau\beta} - \nabla_{\beta}K^{\lambda}{}_{\tau\lambda} + K^{\lambda}{}_{\gamma\lambda}K^{\gamma}{}_{\tau\beta} - K^{\lambda}{}_{\tau\gamma}K^{\gamma}{}_{\lambda\beta}. \tag{2.1.15}$$

Se fizermos a contração do tensor de Ricci, ou seja, $g^{\tau\beta}\tilde{R}_{\tau\beta}$, teremos como resultado o escalar de curvatura:

$$\tilde{R} = R + 2\nabla^{\lambda}K^{\tau}{}_{\lambda\tau} - K_{\tau\lambda}{}^{\lambda}K^{\tau\gamma}{}_{\gamma} + K_{\tau\gamma\lambda}K^{\tau\lambda\gamma}. \tag{2.1.16}$$

O tensor de torção pode ser escrito em termos de três componentes irredutíveis [22]:

$$T_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3}(T_\beta g_{\alpha\mu} - T_\mu g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{6}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}S^\nu + q_{\alpha\beta\mu}. \tag{2.1.17}$$

As três componentes irredutíveis são o traço do tensor torção, $T_\beta = T^\alpha{}_{\beta\alpha}$, o vetor axial ou pseudotraço, $S^\nu = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}T_{\alpha\beta\mu}$, e o tensor $q^\alpha{}_{\beta\gamma}$, o qual deve satisfazer duas condições: o traço deve ser nulo ($q^\alpha{}_{\beta\alpha} = 0$) e a contração dos três índices com o tensor de Levi-Civita deve ser nula também, ou seja, $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}q_{\alpha\beta\mu} = 0$.

Usando a expressão para a torção (2.1.17), podemos também escrever o tensor contorção (2.1.11) em termos das componentes irredutíveis T^α , S^α e $q_{\alpha\beta\gamma}$, ou seja,

$$K_{\beta\nu\alpha} = \frac{1}{3}\Big(T_\nu g_{\beta\alpha} - T_\beta g_{\nu\alpha}\Big) - \frac{1}{12}S^\gamma\varepsilon_{\beta\nu\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\Big(q_{\beta\nu\alpha} - q_{\nu\beta\alpha} - q_{\alpha\beta\nu}\Big). \tag{2.1.18}$$

Como consequência, o escalar de curvatura (2.1.16) será representado por

$$\tilde{R} = R - 2\nabla_\alpha T^\alpha - \frac{2}{3}T_\alpha T^\alpha + \frac{1}{24}S_\alpha S^\alpha + \frac{1}{2}q_{\alpha\beta\gamma}q^{\alpha\beta\gamma}. \tag{2.1.19}$$

2.2 OS ESPINORES DE DIRAC

O acoplamento entre a interação gravitacional e os férmions é um assunto muito importante em teorias de gravitação. Os férmions representam a classe de partículas constituidas de spin semi-inteiros. Em 1928, Paul Dirac formulou uma equação covariante sob transformações de Lorentz e que descreve de maneira satisfatória as partículas de spin 1/2. Esses campos são descritos pelos espinores de Dirac, os quais são uma representação de um grupo especial de Lorentz. Os campos de Dirac são descritos pela ação de Dirac (para mais detalhes veja [41] e [46]).

No espaço curvo, os campos de Dirac satisfazem os grupos das transformações de Lorentz e de transformações gerais de coordenadas. [2] O objeto matemático que será usado para descrever o nosso espaço serão os vetores $e^a{}_\mu$, denominados de tetrada ou *vierbeins* que servem como vetores de base para construção de vetores covariantes por difeomorfismo (transformações gerais de coordenadas) e covariantes de Lorentz. As tetradas possuem dois tipos de índices, um índice que corresponde às transformações gerais de coordenadas, denotado pelos índices gregos μ, e o outro índice que corresponde às transformações de Lorentz, denotado por índices latinos,

[2] Seção baseada em notas não publicadas do professor Ilya Shapiro.

como por exemplo, a, os índices variam de 1 a 4. As tetradas devem satisfazer a relação

$$e^{\mu}{}_{a}e^{a\nu} = g^{\mu\nu}. \tag{2.2.1}$$

Consideraremos os vetores de base $\overrightarrow{e}_a$ e $\overrightarrow{e}_\mu$ para representar a relação

$$\overrightarrow{e}_a = e^{\mu}{}_{a}\overrightarrow{e}_\mu, \tag{2.2.2}$$

usando essa representação, faremos a seguinte transformação de base

$$\overrightarrow{e}'_a = \Lambda^{b}{}_{a'}\overrightarrow{e}_b, \tag{2.2.3}$$

por outro lado, sabemos que

$$\overrightarrow{e}_a.\overrightarrow{e}_b = \eta_{ab}, \tag{2.2.4}$$

onde η_{ab} representa a métrica para o espaço plano. Usaremos a transformação (2.2.3) em (2.2.4) para obter

$$\overrightarrow{e}'_a.\overrightarrow{e}'_c = \Lambda^{b}{}_{a'}\overrightarrow{e}_b\Lambda^{d}{}_{c'}\overrightarrow{e}_d = \Lambda^{b}{}_{a'}\Lambda^{d}{}_{c'}\eta_{bd} = \eta_{a'c'} = \eta_{ac}. \tag{2.2.5}$$

Usaremos esse mesmo procedimento ao considerarmos a transformação de Lorentz infinitesimal

$$\Lambda^{a}{}_{b'} = \delta^{a}{}_{b'} + \omega^{a}{}_{b'}(x) \tag{2.2.6}$$

em que usaremos a relação (2.2.5) para expressar

$$\begin{aligned}[\delta^{a}{}_{b'} + \omega^{a}{}_{b'}(x)][\delta^{d}{}_{c'} + \omega^{d}{}_{c'}(x)]\eta_{ad} &= \\ = \eta_{bc} + \omega^{a}{}_{b'}\eta_{ac'} + \omega^{d}{}_{c'}\eta_{b'd} &= \eta_{bc}\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

onde naturalmente vemos que

$$\omega_{b'c'} + \omega_{c'b'} = 0, \tag{2.2.8}$$

ou seja, é possível notar que o objeto $\omega_{b'c'}$ é antissimétrico nos índices b' e c' .
Analisaremos a derivada covariante para um campo vetorial e obteremos uma relação para o objeto $\omega_{b'c'}$. Sabemos que dado um campo vetorial V^{μ} a derivada covariante para esse campo é dada por

$$\nabla_\lambda V^{\mu} = \partial_\lambda V^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\tau\lambda}V^{\tau} \tag{2.2.9}$$

onde os índices gregos se referem à transformações gerais de coordenadas. Por outro lado, ao considerarmos apenas as transformações de Lorentz, podemos escrever

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \omega^b{}_{ca} V^c, \tag{2.2.10}$$

onde os índices latinos a, b e c representam os índices associados a essas transformações em analogia aos índices gregos e às transformações gerais de coordenadas. Podemos usar as tetradas para mudar o índice de V^μ da seguinte maneira

$$\nabla_\lambda V^\mu = e^a{}_\lambda e^\mu{}_b \nabla_a V^b \tag{2.2.11}$$

usando a equação (2.2.10) no lado direito, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda V^\mu &= e^a{}_\lambda e^\mu{}_b (\partial_a V^b + \omega^b{}_{ca} V^c) \\ &= e^a{}_\lambda e^\mu{}_b \partial_a V^b + e^a{}_\lambda e^\mu{}_b \omega^b{}_{ca} V^c \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

podemos usar nessa expressão as seguintes transformações

$$V^b = e^b{}_\tau V^\tau \tag{2.2.13}$$

o que nos leva à equação

$$\nabla_\lambda V^\mu = e^a{}_\lambda e^\mu{}_b \partial_a (e^b{}_\tau V^\tau) + e^a{}_\lambda e^\mu{}_b \omega^b{}_{ca} (e^c{}_\tau V^\tau). \tag{2.2.14}$$

Considerando as derivadas de produto e reorganizando os termos da equação anterior, podemos escrever

$$\nabla_\lambda V^\mu = e^a{}_\lambda e^\mu{}_b (\partial_a e^b{}_\tau) V^\tau + e^a{}_\lambda e^\mu{}_b e^b{}_\tau \partial_a V^\tau + e^a{}_\lambda e^\mu{}_b \omega^b{}_{ca} e^c{}_\tau V^\tau \tag{2.2.15}$$

ou seja,

$$\nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + (e^\mu{}_b \partial_\lambda e^b{}_\tau + e^a{}_\lambda e^\mu{}_b e^c{}_\tau \omega^b{}_{ca}) V^\tau \tag{2.2.16}$$

ao compararmos a equação (2.2.16) com a equação (2.2.9), vemos que é possível escrever a conexão afim $\Gamma^\mu{}_{\tau\lambda}$ em função das tetradas e da conexão $\omega^b{}_{ca}$ da seguinte forma

$$\Gamma^\mu{}_{\tau\lambda} = e^\mu{}_b \partial_\lambda e^b{}_\tau + e^a{}_\lambda e^\mu{}_b e^c{}_\tau \omega^b{}_{ca}. \tag{2.2.17}$$

Por outro lado, também, é possível expressar a conexão $\omega^b{}_{ca}$ em função das tetradas e da conexão $\Gamma^\mu{}_{\tau\lambda}$. Para isso, basta multiplicarmos os dois lados de (2.2.17) por $e^d{}_\mu e^{\tau e}$ e reorganizar os termos de tal forma que podemos obter

$$\begin{aligned} e^d{}_\mu e^{\tau e} \Gamma^\mu{}_{\tau\lambda} &= e^d{}_\mu e^{\tau e} e^\mu{}_b \partial_\lambda e^b{}_\tau + e^d{}_\mu e^{\tau e} e^a{}_\lambda e^\mu{}_b e^c{}_\tau \omega^b{}_{ca} \\ &= e^{\tau e} \delta^d{}_b \partial_\lambda e^b{}_\tau + \delta^d{}_b \delta^{ce} \omega^b{}_{c\lambda}. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Logo, podemos escrever, renomeando os índices,

$$\omega^{ab}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\Big(e^{a}{}_{\nu}e^{\lambda b} - e^{b}{}_{\nu}e^{\lambda a}\Big)\Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\Big(e^{\lambda b}\partial_{\mu}e^{a}{}_{\lambda} - e^{\lambda a}\partial_{\mu}e^{b}{}_{\lambda}\Big), \tag{2.2.19}$$

já antissimetrizado em a e b devido à antissimetria de $\omega^{ab}{}_{\mu}$. Agora vamos derivar uma fórmula que representa a derivada covariante para a tetrada:

$$\begin{aligned} \nabla_{\nu}V^{\mu} &= e^{a}{}_{\nu}\nabla_{a}(V^{b}e^{\mu}{}_{b}) \\ &= e^{\mu}{}_{b}e^{a}{}_{\nu}\nabla_{a}V^{b} + V^{b}e^{a}{}_{\nu}\nabla_{a}e^{\mu}{}_{b} \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

onde $V^{\mu} = e^{\mu}{}_{b}V^{b}$ e $\nabla_{\nu} = e^{a}{}_{\nu}\nabla_{a}$. Usando a equação (2.2.10), podemos escrever

$$\nabla_{\nu}V^{\mu} = e^{a}{}_{\nu}e^{\mu}{}_{b}(\partial_{a}V^{b} + \omega^{b}{}_{ca}V^{c}) + V^{b}e^{a}{}_{\nu}\nabla_{a}e^{\mu}{}_{b}. \tag{2.2.21}$$

Ao fazermos as mesmas considerações para o termo $\partial_{\nu}V^{\mu}$, teremos

$$\partial_{\nu}V^{\mu} = e^{\mu}{}_{b}e^{a}{}_{\nu}\partial_{a}V^{b} + V^{b}e^{a}{}_{\nu}\partial_{a}e^{\mu}{}_{b}, \tag{2.2.22}$$

e ao substituirmos as equações (2.2.21) e (2.2.22) em (2.2.9), obteremos

$$e^{a}{}_{\nu}e^{b}{}_{\lambda}\nabla_{a}e^{\mu}{}_{b} = e^{a}{}_{\nu}e^{b}{}_{\lambda}\partial_{a}e^{\mu}{}_{b} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} - e^{a}{}_{\nu}e^{c}{}_{\lambda}e^{\mu}{}_{b}\omega^{b}{}_{ca}, \tag{2.2.23}$$

onde foi considerado $V^{b} = e^{b}{}_{\lambda}V^{\lambda}$. Ao multiplicarmos ambos os lados de (2.2.23) por $e^{\nu}{}_{d}e^{\lambda}{}_{e}$, teremos, após renomear os índices conforme $d \longrightarrow a$ e $e \longrightarrow b$,

$$\nabla_{d}e^{\mu}{}_{e} = \partial_{d}e^{\mu}{}_{e} + e^{\lambda}{}_{e}e^{\nu}{}_{d}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} - \omega^{b}{}_{e\nu}e^{\nu}{}_{d}e^{\mu}{}_{b}. \tag{2.2.24}$$

Multiplicando os dois lados por $e^{d}{}_{\tau}$, podemos escrever $\nabla_{\tau} = e^{a}{}_{\tau}\nabla_{a}$, logo

$$\nabla_{\tau}e^{\mu}{}_{e} = e^{a}{}_{\tau}\partial_{a}e^{\mu}{}_{e} + e^{\lambda}{}_{e}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\tau} - \omega^{cb}{}_{\tau}e^{\mu}{}_{e}, \tag{2.2.25}$$

que representa a derivada covariante para a tetrada.

2.2.1 Derivada Covariante de um espinor e conexão de spin

O campo de Dirac no espaço curvo é representado por quantidades com índices em relação às transformações gerais de coordenadas e também às transformações de Lorentz. É possível mostrar que a conexão que aparece na equação (2.2.19) é o mesmo objeto contido na derivada covariante para um campo espinorial. Considerando os campos de Dirac no espaço curvo, podemos escrever as matrizes de Dirac γ^{μ} em função das matrizes no espaço plano através da relação

$$\gamma_\mu = e^a{}_\mu \gamma_a. \tag{2.2.26}$$

A derivada covariante para os campos espinoriais são representadas pelas fórmulas

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} \sigma_{ab} \psi, \tag{2.2.27}$$

$$\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2} \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab}, \tag{2.2.28}$$

onde o objeto $\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}$ é a conexão de spin e σ_{ab} é dado por

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a). \tag{2.2.29}$$

O objetivo agora é encontrar uma relação entre a conexão de spin $\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}$ e a conexão $\omega^{ab}{}_\mu$ da equação (2.2.19). Dado um quadrivetor $\overline{\psi}\gamma^\alpha \psi$, podemos calcular sua derivada covariante usando a equação (2.2.9):

$$\nabla_\mu (\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi) = \partial_\mu V^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \tag{2.2.30}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &(\nabla_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi + \bar{\psi} (\nabla_\mu \gamma^\alpha) \psi + \bar{\psi} \gamma^\alpha (\nabla_\mu \psi) = \\ &(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi + \bar{\psi} (\partial_\mu \gamma^\alpha) \psi + \bar{\psi} \gamma^\alpha (\partial_\mu \psi) + \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi. \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Usando as equações (2.2.27) e (2.2.28), podemos escrever

$$\begin{aligned} &(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi + \bar{\psi} \gamma^\alpha \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\alpha \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} \sigma_{ab} \psi - \frac{i}{2} \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} \bar{\psi} \sigma_{ab} \gamma^\alpha \psi + \\ &\bar{\psi} (\nabla_\mu \gamma^\alpha) \psi = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\alpha \psi + \bar{\psi} (\partial_\mu \gamma^\alpha) \psi + \bar{\psi} \gamma^\alpha (\partial_\mu \psi) + \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi. \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Considerando a relação (2.2.29) e reorganizando os termos, teremos

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2} \bar{\psi} \widehat{\omega}_\mu{}^{ab} e^\alpha{}_a \Big[\gamma^c (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a) - (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a) \gamma^c \Big] \psi + \\ &\bar{\psi} (\nabla_\mu \gamma^\alpha) \psi = \bar{\psi} (\partial_\mu \gamma^\alpha) \psi + \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Ao desenvolvermos os termos relacionados com as matrizes γ_a, γ_b e γ_c, usaremos a seguinte propriedade :

$$\gamma^c \gamma_a \gamma_b = 2\delta^c{}_a \gamma_b - 2\delta^c{}_b \gamma_a + \gamma_a \gamma_b \gamma^c, \tag{2.2.34}$$

usando $\partial_\mu \gamma^\alpha = \gamma^a \partial_\mu e^\alpha{}_a$ e o fato de que $\partial_\mu e^\alpha{}_c = -e^{\alpha b} e^\lambda{}_c \partial_\mu e_{\lambda b}$, podemos escrever, depois de algumas manipulações,

$$\widehat{\omega}_\mu{}^{ab} = \frac{1}{2}(e^b{}_\nu e^{\lambda a}\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} - e^{\lambda a}\partial_\mu e^b{}_\lambda). \tag{2.2.35}$$

Ao analisar a expressão (2.2.35), vemos que a conexão de spin $\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}$ se relaciona com à conexão que aparece em (2.2.19). A conexão $\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}$ obedece à mesma condição de simetria apresentada em (2.2.19) e satisfaz

$$\widehat{\omega}_\mu{}^{ab} = \frac{1}{2}\omega^{ab}{}_\mu. \tag{2.2.36}$$

Considerando a antissimetria dos índices latinos, podemos fazer $\frac{1}{2}e^b{}_\nu e^{\lambda a} \longrightarrow \frac{1}{4}(e^b{}_\nu e^{\lambda a} - e^a{}_\nu e^{\lambda b})$, de modo que a expressão na sua forma final poderá ser representada por

$$\widehat{\omega}_\mu{}^{ab} = \frac{1}{4}(e^b{}_\nu e^{\lambda a} - e^a{}_\nu e^{\lambda b})\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} + \frac{1}{4}(e^{\lambda b}\partial_\mu e^a{}_\lambda - e^{\lambda a}\partial_\mu e^b{}_\lambda). \tag{2.2.37}$$

Ao considerarmos o comutador entre derivadas covariantes de um campo vetorial, obtemos o tensor de curvatura em função da conexão afim $\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}$. Realizaremos um procedimento análogo para obter o tensor de curvatura em função da conexão de spin $\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}$. Começaremos com a obtenção do comutador das derivadas covariantes para os espinores com o objetivo de calcular $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi$, dessa forma, teremos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = (\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)\psi, \tag{2.2.38}$$

o primeiro termo do lado direito de (2.2.38) pode ser expresso como

$$\nabla_\mu(\nabla_\nu)\psi = \partial_\mu(\nabla_\nu\psi) + \frac{i}{2}\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}(\nabla_\nu\psi) - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}(\nabla_\lambda\psi) \tag{2.2.39}$$

usando a equação (2.2.27), teremos

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\nabla_\nu)\psi &= \partial_\mu\partial_\nu\psi + \frac{i}{2}(\partial_\mu\widehat{\omega}_\nu{}^{ab})\sigma_{ab}\psi + \frac{i}{2}\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\sigma_{ab}(\partial_\mu\psi) + \\ &+ \frac{i}{2}\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}(\partial_\nu\psi) - \frac{1}{4}\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\widehat{\omega}_\nu{}^{cd}\sigma_{cd}\psi - \\ &- \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}(\partial_\lambda\psi) - \frac{i}{2}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\widehat{\omega}_\lambda{}^{ab}\sigma_{ab}\psi, \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

analogamente para o segundo termo $\nabla_\nu(\nabla_\mu)\psi$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_\nu(\nabla_\mu)\psi &= \partial_\nu\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}(\partial_\nu\widehat{\omega}_\mu{}^{ab})\sigma_{ab}\psi + \frac{i}{2}\widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}(\partial_\nu\psi) + \\ &+ \frac{i}{2}\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}(\partial_\mu\psi) - \frac{1}{4}\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\sigma_{ab}\widehat{\omega}_\mu{}^{cd}\sigma_{cd}\psi - \\ &- \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(\partial_\lambda\psi) - \frac{i}{2}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\widehat{\omega}_\lambda{}^{ab}\sigma_{ab}\psi, \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

ao substituirmos estas duas relações em (2.2.38), teremos como resultado

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu \widehat{\omega}_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\Big)\gamma_a\gamma_b\psi - \\ &- \frac{1}{4}\Big(\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\widehat{\omega}_\mu{}^{cd} - \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\widehat{\omega}_\nu{}^{cd}\Big)\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d\psi. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Na equação (2.2.42) podemos considerar o produto $\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d$ como sendo um objeto com duas contribuições, uma simétrica nos pares de índices (a,b) e (c,d), já a outra contibuição é antissimétrica nesses mesmos índices, ou seja,

$$\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = \frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d + \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b) + \frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d - \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b). \tag{2.2.43}$$

É possível notar que o resultado do produto $\frac{1}{4}\Big(\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\widehat{\omega}_\mu{}^{cd} - \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\widehat{\omega}_\nu{}^{cd}\Big).\frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d + \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b)$ é nulo, uma vez que se refere a um produto entre termos antissimétricos e simétricos nos mesmos índices. Já o segundo produto $\frac{1}{4}\Big(\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\widehat{\omega}_\mu{}^{cd} - \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\widehat{\omega}_\nu{}^{cd}\Big).\frac{1}{2}(\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d - \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b)$ é diferente de zero já que ambos os termos são antissimétricos. A equação (2.2.42) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu \widehat{\omega}_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\Big)\gamma_a\gamma_b\psi - \\ &- \frac{1}{4}\Big(\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\widehat{\omega}_\mu{}^{cd} - \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\widehat{\omega}_\nu{}^{cd}\Big)(\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d - \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b)\psi. \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Para o produto $\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d$, usaremos a seguinte expressão

$$\gamma_a\gamma_b\gamma_c\gamma_d = 2\eta_{bc}\gamma_a\gamma_d - 2\eta_{ac}\gamma_b\gamma_d + 2\eta_{bd}\gamma_c\gamma_a - 2\eta_{ad}\gamma_c\gamma_b + \gamma_c\gamma_d\gamma_a\gamma_b, \tag{2.2.45}$$

que substituida em (2.2.44) , fornece

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu \widehat{\omega}_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\Big)\gamma_a\gamma_b\psi - \frac{1}{4}(\widehat{\omega}_\nu{}^{ab}\widehat{\omega}_\mu{}^{cd} - \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\widehat{\omega}_\nu{}^{cd})(2\eta_{bc}\gamma_a\gamma_d - \\ &- 2\eta_{ac}\gamma_b\gamma_d + 2\eta_{bd}\gamma_c\gamma_a - 2\eta_{ad}\gamma_c\gamma_b)\psi, \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

e após algumas manipulações podemos escrever

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi &= -\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu \widehat{\omega}_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \widehat{\omega}_\mu{}^{ab}\Big)\gamma_a\gamma_b\psi - \\ &- \frac{1}{4}(\widehat{\omega}_\nu{}^{ac}\widehat{\omega}_{\mu c}{}^{b} - \widehat{\omega}_\mu{}^{ac}\widehat{\omega}_{\nu c}{}^{b})\gamma_a\gamma_b\psi. \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Agrupando os termos de (2.2.47) e usando a relação $\widehat{\omega}_\mu{}^{ab} = -\frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}$, teremos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \frac{1}{4}\Big(\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac}\omega_{\nu c}{}^{b} - \omega_\nu{}^{ac}\omega_{\mu c}{}^{b}\Big)\gamma_a\gamma_b\psi, \tag{2.2.48}$$

onde $R_{\mu\nu ab} = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ac}\omega_{\nu c}{}^{b} - \omega_\nu{}^{ac}\omega_{\mu c}{}^{b}$. Logo,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \frac{1}{4} R_{\mu\nu ab}\gamma^a \gamma^b \psi. \tag{2.2.49}$$

Podemos escrever as matrizes γ^a e γ^b com índices gregos a partir da representação $\gamma^a = e^a{}_\rho \gamma^\rho$ e $\gamma^b = e^b{}_\sigma \gamma^\sigma$, dessa forma, podemos reescrever o termo do lado direito da equação (2.2.49) da seguinte maneira

$$\frac{1}{4} R_{\mu\nu ab}\gamma^a \gamma^b \psi = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\rho \gamma^\sigma \psi, \tag{2.2.50}$$

A relação para a derivada covariante pode ser escrita de uma outra maneira em função do escalar de curvatura. Primeiramente, faremos a seguinte consideração $\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu \psi = \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi$, a quantidade $\gamma^\mu \gamma^\nu$ pode ser escrita em termos de uma contribuição simétrica e uma antissimétrica da seguinte forma

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \tag{2.2.51}$$

O termo $\nabla_\mu \nabla_\nu$ também pode ser escrito da seguinte maneira

$$\nabla_\mu \nabla_\nu = \frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) + \frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu), \tag{2.2.52}$$

logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu &= \left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)\right]. \\ &\quad \left[\frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) + \frac{1}{2}(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\right], \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

na equação anterior, os produtos $(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu).(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)$ e $(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu).(\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu)$ são nulos porque são construções de índices simétricos e antissimétricos. Após alguns cálculos, onde os operadores estão aplicados em ψ, podemos escrever

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\nabla_\mu \nabla_\nu \psi + \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^\mu \gamma^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)\psi. \end{aligned} \tag{2.2.54}$$

Sabemos que $g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu = \Box$, logo, a equação (2.2.54) pode ser escrita como

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \psi = \Box\psi + \frac{1}{8}\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma R_{\mu\nu\rho\sigma}\psi, \tag{2.2.55}$$

onde usamos o resultado (2.2.49) no segundo termo. Uma das propriedades de simetria do tensor de curvatura é expressa por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0. \tag{2.2.56}$$

A partir dessa propriedade, podemos escrever o segundo termo da equação (2.2.55) como sendo

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}, \tag{2.2.57}$$

usaremos a identidade $\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} = 2g^{\sigma\nu}$ para escrever $\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} = 2g^{\sigma\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}$. Logo, teremos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}\Big(2g^{\sigma\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\Big), \tag{2.2.58}$$

usando $\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} = 2g^{\sigma\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - 2g^{\mu\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}$, obteremos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}\Big(2g^{\sigma\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} + 2g^{\sigma\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - 2g^{\mu\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\Big) = -2R. \tag{2.2.59}$$

Ao substituirmos o resultado (2.2.59) em (2.2.55), obteremos a expressão

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\psi = \Big(\Box - \frac{1}{4}R\Big)\psi, \tag{2.2.60}$$

a qual representa uma identidade que pode ser usada numa série de aplicações sobre a matéria no espaço-tempo curvo, além da abordagem da matéria quantizada (veja por exemplo, [47]).

2.3 PROCEDIMENTO MÍNIMO

O acoplamento mínimo entre gravitação e férmions é um dos procedimentos usados quando se descreve a interação entre o campo fermiônico e o campo gravitacional. Sabemos que o campo de Dirac descreve partículas com spin 1/2, e a ação para o campo fermiônico não massivo no espaço plano é dada por

$$S_{1/2} = \frac{i}{2}\int d^4x\Big(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\Big). \tag{2.3.1}$$

O procedimento mínimo consiste em substituir as derivadas parciais ∂_{α} da equação acima pelas derivadas covariantes $\tilde{\nabla}_{\mu}$, a métrica $\eta_{\mu\nu}$ que descreve o espaço plano será substituida pela métrica $g_{\mu\nu}$ que descreve o espaço curvo e o elemento de volume d^4x será substituido por $d^4x\sqrt{-g}$, (veja por exemplo [42]). Desta feita, a ação (2.3.1) se transformará em

$$S_{1/2} = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\tilde{\nabla}_{\mu}\psi - \tilde{\nabla}_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\Big). \tag{2.3.2}$$

As matrizes de Dirac no espaço curvo são definidas por γ^{μ} são definidas por (2.2.26) e as tetradas satisfazem as relações (2.2.1) e (2.2.2). A derivada covariante no espaço-tempo com torção $\tilde{\nabla}_{\mu}$ é análoga às relações (2.2.27) e (2.2.28), e são dadas por

$$\tilde{\nabla}_{\mu}A^{a} = \partial_{\mu}A^{a} - \tilde{\omega}^{a}{}_{b\mu}A^{b}, \tag{2.3.3}$$

ou

$$\tilde{\nabla}_{\mu}A_{a} = \partial_{\mu}A_{a} + \tilde{\omega}^{b}{}_{a\mu}A_{b}. \tag{2.3.4}$$

Considerando os espinores de Dirac, temos

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + \frac{i}{2}\tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab}\sigma_{ab}\psi, \tag{2.3.5}$$

onde o objeto $\tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab}$ é a conexão de spin no espaço-tempo com torção, podendo ser escrita como

$$\tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab} = \omega_{\mu}{}^{ab} + \frac{1}{4}K^{\alpha}{}_{\lambda\mu}\Big(e^{\lambda a}e^{b}{}_{\alpha} - e^{\lambda b}e^{a}{}_{\alpha}\Big). \tag{2.3.6}$$

O objeto $\omega_{\mu}{}^{ab}$ é a conexão pura (sem torção) que está representada pela relação (2.2.35). Analogamente temos para a derivada $\tilde{\nabla}_{\mu}\bar{\psi}$, a seguinte expressão,

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\bar{\psi} = \partial_{\mu}\bar{\psi} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab}\sigma_{ab}. \tag{2.3.7}$$

Substituindo as relações (2.3.5), (2.3.6) e (2.3.7) em (2.3.2) teremos uma ação equivalente dada por

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \\ &+ \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}[\omega_{\mu}{}^{ab} + \frac{1}{4}K^{\alpha}{}_{\lambda\mu}(e^{\lambda a}e^{b}{}_{\alpha} - e^{\lambda b}e^{a}{}_{\alpha})]\sigma_{ab}\psi \\ &+ \frac{i}{2}[\omega_{\mu}{}^{ab} + \frac{1}{4}K^{\alpha}{}_{\lambda\mu}(e^{\lambda a}e^{b}{}_{\alpha} - e^{\lambda b}e^{a}{}_{\alpha})]\bar{\psi}\sigma_{ab}\gamma^{\mu}\psi\Big]. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Podemos agrupar os termos de dervidas parciais com os termos de conexão de spin sem torção ($\omega_{\mu}{}^{ab}$) e escrever termos de derivadas covariantes sem torção (∇_{μ}) de maneira que a ação pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &- \frac{1}{16}K^\alpha{}_{\lambda\mu}\bar{\psi}[\gamma^\mu(e^{\lambda a}e^b{}_\alpha - e^{\lambda b}e^a{}_\alpha)(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) \\ &+ (e^{\lambda a}e^b{}_\alpha - e^{\lambda b}e^a{}_\alpha)(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a)\gamma^\mu]\psi\Big]. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Nesta passagem consideramos também a quantidade $\sigma_{ab} = \gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a$. Após algumas manipulações algébricas envolvendo as matrizes de Dirac, temos

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &- \frac{1}{16}K^{\alpha\lambda\mu}\bar{\psi}(4\gamma_{[\lambda}\gamma_{\alpha]}\gamma_\mu + 4\gamma_\mu\gamma_{[\lambda}\gamma_{\alpha]})\psi\Big], \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

usaremos a identidade $\gamma_{[\lambda}\gamma_{\alpha]}\gamma_\mu = -i\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta}\gamma_5\gamma^\beta + 2\gamma_{[\lambda}g_{\alpha]\mu}$ no segundo termo da equação acima, obtendo assim

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &- \frac{1}{4}K^{\alpha\lambda\mu}\bar{\psi}(-i\varepsilon_{\lambda\alpha\mu\beta}\gamma_5\gamma^\beta + 2\gamma_{[\lambda}g_{\alpha]\mu} \\ &- i\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\gamma_5\gamma^\beta + 2g_{\mu[\lambda}\gamma_{\alpha]})\psi\Big], \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

os termos $2\gamma_{[\lambda}g_{\alpha]\mu}$ e $2g_{\mu[\lambda}\gamma_{\alpha]}$ se cancelam mutuamente e considerando também as propriedades de simetria do tensor de Levi-Civita, podemos escrever

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &- \frac{1}{4}K^{\alpha\lambda\mu}\bar{\psi}(-2i\varepsilon_{\mu\lambda\alpha\beta}\gamma_5\gamma^\beta)\psi\Big]. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Sabemos que o tensor contorção é dado por $K^{\alpha\lambda\mu} = 1/2(T^{\alpha\lambda\mu} - T^{\lambda\alpha\mu} - T^{\mu\alpha\lambda})$, com isso usaremos a definição de corrente axial $S_\nu = i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}T^{\alpha\beta\mu}$ [42], logo,

$$\begin{aligned} S_{1/2} &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &- \frac{i}{4}\bar{\psi}(-iS_\beta - iS_\beta + iS_\beta)\gamma_5\gamma^\beta\psi\Big], \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

faremos $\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \nabla_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - \bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi$, logo a ação final pode ser escrita como

$$S_{1/2} = i\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \frac{1}{8}S_\mu J^\mu\Big], \tag{2.3.14}$$

podemos notar que o vetor axial S_μ é acoplado com o campo fermiônico definido por $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$. Ao se acoplar minimamente, considerando a teoria de gravitação com férmions e torção, percebe-se que a corrente axial de férmions apresenta-se como fonte para o campo de torção.

3 CAMPOS DE DIRAC, TORÇÃO E PARÂMETRO DE BARBERO-IMMIRZI

Neste capítulo, nosso ponto de partida será a formulação obtida por Perez e Rovelli [44] para considerarmos algumas consequências para modelos cosmológicos. Vale a pena ressaltar que neste procedimento estamos considerando campos de Dirac massivos [45]. Por questões de simplicidade, mostraremos a obtenção de resultado de Perez e Rovelli na seção que segue.

3.1 AÇÃO DE HOLST

A ação de Holst se refere originalmente ao contexto de um formalismo de uma teoria de gravitação quântica não perturbativa [43]. Esta ação é constituida pela ação de Hilbert-Palatini (HP) mais o termo de Holst. No contexto deste trabalho estamos considerando o espaço-tempo com torção, e neste caso, no lugar da ação de HP, estamos considerando a ação de EC, sendo o termo de Holst tem um fator multiplicativo que é o parâmetro de Barbero-Immirzi (BI). Veremos que este parâmetro não só aparece nas equações de movimento como também é a constante de acoplamento da interação quadrifermiônica, quando acopla-se minimamente o campo gravitacional, campos de Dirac e torção. A ação que representa o campo gravitacional com torção mais o termo de Holst pode ser escrita como

$$S_H(g,\tilde{\omega}) = \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\tilde{R}+\frac{1}{2\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\Big], \qquad (3.1.1)$$

onde β é o parâmetro de Barbero-Immirzi (BI). Ao considerar a teoria de EC, mais o formalismo de Host e os campos de Dirac acoplado minimamente com o campo gravitacional e torção, teremos

$$S(g,\omega,\psi,\bar{\psi}) = S_H + \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\bar{\nabla}_{\mu}\psi - \bar{\nabla}_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\Big]. \qquad (3.1.2)$$

Veremos que essa estrutura considerada é equivalente à teoria de EH e mais um termo de interação quadrifermiônica em que a constante de acoplamento desta interação é função do parâmentro de BI [44]. Mostraremos de uma meneira bem simples como é possível obter esta equivalência. O tensor de curvatura no espaço tempo com torção $\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu}$ é representado pela relação dada em (2.1.14). Ao substituirmos o tensor contorção (2.1.18) em (2.1.14), podemos reescrever o termo $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu} = -\nabla_\mu S^\mu - \frac{2}{3}T^\mu S_\mu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}q^{\lambda\alpha\beta}q_\lambda{}^{\mu\nu} \tag{3.1.3}$$

(veja, por exemplo, [48]). É importante ressaltar que omitiremos $\nabla_\mu S^\mu = 0$ por dar origem a um termo de superfície , além disso, usaremos $q_{\alpha\beta\gamma} = 0$ pois a corrente J_μ não gera $q_{\alpha\beta\gamma}$ (veja por exemplo [49]). Usando as relações (2.1.19) e (3.1.3), escreveremos a ação de Holst (3.1.1) como

$$S = \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-R + \frac{2}{3}T_\alpha T^\alpha - \frac{1}{24}S_\alpha S^\alpha - \frac{1}{3\beta}T^\alpha S_\alpha\Big]. \tag{3.1.4}$$

Vimos que ao considerar o campo fermiônico minimamente acoplado com torção e gravitação temos como resultado a ação (2.3.8), na qual há no segundo termo uma quantidade chamada de quadrivetor corrente axial, definida por $J^\alpha = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\alpha\psi$. Dessa maneira, a ação total equivalente à ação de Holst mais o setor de Dirac é

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-R + \frac{2}{3}T_\alpha T^\alpha - \frac{1}{24}S_\alpha S^\alpha - \frac{1}{3\beta}T^\alpha S_\alpha\Big] \\ &+ \frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}S_\alpha J^\alpha + \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\Big]. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Neste momento, nosso objetivo é variar a ação acima em relação ao traço da torção e da corrente axial, dessa maneira encontraremos novas formas de representar T^α e S^α. De acordo com o princípio variacional e usando a equação (3.1.5) teremos,

$$\frac{\delta S}{\delta T_\lambda} = 0 \qquad e \qquad \frac{\delta S}{\delta S_\lambda} = 0. \tag{3.1.6}$$

Como o último termo de (3.1.5) é a ação de Dirac no espaço curvo sem torção, podemos perceber que não existe nenhuma contribuição quando aplicamos as relações (3.1.6), a partir dessas mesmas relações pode-se verificar que

$$T^\lambda = \frac{1}{4\beta}S^\lambda, \tag{3.1.7}$$

e

$$S^\lambda = \frac{3}{2}\kappa\theta J^\lambda. \tag{3.1.8}$$

Usando esta última relação em (3.1.7), teremos

$$T^{\lambda} = \frac{3}{8\beta}\kappa\theta J^{\lambda}, \tag{3.1.9}$$

onde $\theta \equiv \dfrac{\beta^2}{\beta^2+1}$.

Podemos notar que os objetos T^{λ} e S^{λ} estão representados em termos da fonte J^{λ}, agora seria conveniente escrever a ação total em termos da fonte J^{λ} também. Por isso, substituimos as equações (3.1.8) e (3.1.9) na ação (3.1.5) e obtemos,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-R + \frac{S^2}{24\beta^2} - \frac{S^2}{24} - \frac{S^2}{12\beta^2}\Big] \\ &+ \frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}S_{\alpha}J^{\alpha} + \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\Big], \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

ao substituimos S^{λ} e S^2, teremos como resultado,

$$S(g,\psi,\bar{\psi}) = \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-R + \frac{3}{32}\theta\kappa^2 J^2\Big] + S_D, \tag{3.1.11}$$

onde S_D é a ação de Dirac, $S_D = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\Big]$.

A equação (3.1.11) é o resultado apresentado por Perez e Rovelli em [44]. Com este procedimento foi possível mostrar a equivalência entre as ações (3.1.2) e (3.1.11). Observe que o termo de massa $m\bar{\psi}\psi$ poderia ser considerado sem alterar nemhum resultado. Nas próximas seções, investigaremos os campos de Dirac acoplados minimamente com o campo gravitacional lançando mão de todas as considerações que fizemos nesta seção e no capítulo anterior.

3.2 CAMPO FERMIÔNICO

Foi visto na seção anterior que a ação que representa a teoria de Einstein-Cartan acoplada minimamente com férmions massivos junto com o termo de Holst pode ser escrita em termos da interação quadrifermiônica na seguinte forma,

$$S(g,\omega,\psi,\bar{\psi}) = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{\kappa}R + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - m\bar{\psi}\psi + \theta J_{\mu}J^{\mu}\Big], \tag{3.2.1}$$

lembrando que $\kappa = 8\pi G$, e a constante θ é dada por

$$\theta = \frac{3\kappa}{32}\frac{\beta^2}{\beta^2+1}, \tag{3.2.2}$$

como foi visto no capítulo anterior, as correntes axiais J^μ e J_μ são definidas como

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi, \tag{3.2.3}$$

$$J_\mu = \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, \tag{3.2.4}$$

e $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.
Outra forma de acoplamento entre o campo de torção e os férmions será um acoplamento não-mínimo, podendo dar origem a outro tipo de constante de acoplamento, diferente de (3.2.2).(veja por exemplo [50],[51]).

Como vimos anteriormente, a inclusão do parâmetro de BI na ação (3.2.1) foi proposta por Perez e Rovelli [44]. Vamos considerar apenas os aspectos clássicos do campo de Dirac massivo no modelo cosmológico espacialmente plano FLRW na presença do parâmetro BI. Esse parâmetro é descrito por um termo presente na ação de Holst [43], e é introduzido sob a perspectiva da gravidade quântica não perturbativa e representa um novo parâmetro sem dimensão que vem de uma teoria mais fundamental.

A ação para o campo gravitacional com o termo de Holst pode ser representada da seguinte forma

$$S_H(g,\tilde{\omega}) = \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-R+\frac{1}{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}\Big], \tag{3.2.5}$$

Em RG sem torção, esse parâmetro não afeta a equação dinâmica porque $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ desaparece devido à simetria cíclica do tensor de Riemann, $R^{\alpha\beta\mu\nu}+R^{\alpha\nu\beta\mu}+R^{\alpha\mu\nu\beta}=0$.

O efeito do parâmetro BI pode ser estudado por diferentes procedimentos de acoplamento [44]. Em [50, 48], uma família de dois parâmetros não minimamente acoplados pode ser considerada separadamente. Em [51] está mostrado que o parâmetro BI não tem nenhum efeito se for absorvido dentro de parâmetros não mínimos. De acordo com [52], o parâmetro BI pode ter efeito dinâmico não trivial, mesmo sem o campo de Dirac, desde que seja tratado como um campo escalar.

As equações de Dirac são obtidas quando variamos a ação (3.2.1) com respeito aos campos de Dirac ψ e $\bar{\psi}$,

$$i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi = 2\theta J^\mu\Gamma_5\gamma_\mu\psi + m\psi, \tag{3.2.6}$$

$$i\nabla_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu = -2\theta J^\mu \bar{\psi}\Gamma_5\gamma_\mu + m\bar{\psi}, \tag{3.2.7}$$

onde $\Gamma_5 = i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, onde Γ_i de $i = 0,1,2,3$ são as matrizes de Dirac no espaço plano.

O objetivo agora é derivar as equações de campo de Einstein a partir da variação da ação (3.2.1) com os campos de Dirac massivos e com o termo de interação quadrifermiônica em relação a $g_{\alpha\beta}$. Consideremos a correção até primeira ordem para a ação (3.2.1), ou seja,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, & (3.2.8)\\ g'^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + ... & (3.2.9)\\ \sqrt{-g'} &= \sqrt{-g} + \frac{h}{2}\sqrt{-g} + ... & (3.2.10)\end{aligned}$$

onde $h = h^\mu{}_\mu$. Apenas as contribuições em primeira ordem em $h^{\mu\nu}$ serão mantidas. Podemos escrever as tetradas como

$$e'^{b\alpha} = e^{b\alpha} - \frac{1}{2}h^\alpha{}_\beta e^{b\beta}, \tag{3.2.11}$$

$$e'^a{}_\alpha = e^a{}_\alpha + \frac{1}{2}h_\alpha{}^\beta e^a{}_\beta, \tag{3.2.12}$$

e sabemos que $J'^\mu J'_\mu = J^\mu J_\mu$, o que significa que $\delta(J^\rho J_\rho)/\delta g^{\mu\nu} = 0$, e $J'^\mu J'_\mu$ tem contribuição nula em $h^{\alpha\beta}$. Considerando a parte cinética da ação de Dirac (3.2.1), temos

$$S_k = \int d^4x\sqrt{-g}L_k = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right). \tag{3.2.13}$$

Fazendo a expansão desta equação e considerando $\gamma'_\nu = \gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu\gamma_\rho$, temos

$$\begin{aligned} S_k \rightarrow S'_k &= \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big(1+\frac{1}{2}h\Big)\Big[\bar{\psi}\Big(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu\gamma_\rho\Big)\partial_\mu\psi(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\\ &+ \bar{\psi}\Big(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu\gamma_\rho\Big)\omega'^{ab}{}_\mu\sigma_{ab}\psi(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\\ &- \partial_\mu\bar{\psi}(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu\gamma_\rho)\psi(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\\ &+ \omega'^{ab}{}_\mu\bar{\psi}\sigma_{ab}(\gamma_\nu + \frac{1}{2}h^\rho{}_\nu\gamma_\rho)\psi(g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\Big], \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

ficando apenas com os termos de primeira ordem em $h^{\mu\nu}$. Podemos expressar a conexão de spin na forma

$$\omega'^{ab}{}_\mu = \omega^{ab}{}_\mu + \delta\omega^{ab}{}_\mu. \tag{3.2.15}$$

Substituindo em (3.2.14), temos

$$
\begin{aligned}
S'_k &= S_k + \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}L_k - \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi - \nabla_{(\nu}\bar{\psi}\gamma_{\mu)}\psi)\right\}h^{\mu\nu} \\
&+ \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\sigma_{ab}\psi + \bar{\psi}\sigma_{ab}\gamma^{\mu}\psi]\,\delta\omega^{ab}{}_{\mu}. \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

Ao fazermos a integração por partes de (3.2.16) é possível verificar que o produto entre $\delta\omega^{ab}{}_{\mu}$ e a soma $[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\sigma_{ab}\psi + \bar{\psi}\sigma_{ab}\gamma^{\mu}\psi]$ produzirá uma quantidade antissimétrica em μ e ν multiplicada por $h_{\mu\nu}$ que é um objeto simétrico nos dois índices. Isso significa que o termo como um todo será nulo (ver apêndice A). A equação de Einstein será expressa da seguinte maneira,

$$
R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{2}T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi\right) - \frac{1}{2}\kappa g_{\alpha\beta}L, \qquad (3.2.17)
$$

onde o termo $\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}$ significa $\frac{1}{2}(\gamma_{\alpha}\nabla_{\beta} + \gamma_{\beta}\nabla_{\alpha})$.

A lagrangiana L pode ser escrita como

$$
L = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right) + \theta J_{\mu}J^{\mu}, \qquad (3.2.18)
$$

agora, usando a equação (3.2.17), obtemos a equação

$$
G_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi\right) - \frac{\theta}{2}\kappa g_{\alpha\beta}J_{\mu}J^{\mu}, \qquad (3.2.19)
$$

que corresponde à seguinte equação para o tensor energia-momento :

$$
T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\left(\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi\right) - \frac{\theta}{2}g_{\alpha\beta}J_{\mu}J^{\mu}, \qquad (3.2.20)
$$

para a métrica de FLRW o lado esquerdo da equação (3.2.19) é nulo ($G_{\alpha\beta} = 0$) para $\alpha \neq \beta$.

Para calcular as derivadas covariantes para os espinores, usaremos as relações

$$
\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_{\mu}\sigma_{ab}\psi, \;\; \nabla_{\mu}\bar{\psi} = \partial_{\mu}\bar{\psi} - \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_{\mu}\bar{\psi}\sigma_{ab}, \qquad (3.2.21)
$$

onde a quantidade $\omega^{ab}{}_{\mu}$ é a conexão de spin, a qual já foi definida no capítulo 2. A quantidade σ_{ab} é escrita em termos das matrizes de Dirac no espaço de Minkowski. As tetradas para um espaço isotrópico e homogêneo podem ser definidas como

$$
\begin{cases}
\mathrm{e}^{o}{}_{b} = (a(\eta), 0, 0, 0), \\
\mathrm{e}^{1}{}_{b} = (0, a(\eta), 0, 0), \\
\mathrm{e}^{2}{}_{b} = (0, 0, a(\eta), 0), \\
\mathrm{e}^{3}{}_{b} = (0, 0, 0, a(\eta)).
\end{cases}
$$

As tetradas com os índices contravariantes são dadas na forma

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{11} \;=\; e^{22} \;=\; e^{33} \;=\; -1/a, \\ \mathrm{e}^{00} = e_0{}^0 = e_1{}^1 = e_2{}^2 = e_3{}^3 = 1/a. \end{cases}$$

Esta escolha para as tetradas implica que o elemento de linha, em função do tempo conforme $dt = a(\eta)d\eta$, pode ser expresso por

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2], \tag{3.2.22}$$

onde $a(\eta)$ é o fator de escala em função do tempo conforme.

Agora, calculemos as derivadas covariantes para os espinores usando as relações (3.2.21). As componentes não nulas das conexões (2.2.37) são dadas por

$$\omega^{01}{}_1 = \omega^{02}{}_2 = \omega^{03}{}_3 = \frac{a'}{2a}, \tag{3.2.23}$$

e

$$\omega^{10}{}_1 = \omega^{20}{}_2 = \omega^{30}{}_3 = -\frac{a'}{2a}, \tag{3.2.24}$$

onde $a' = da/d\eta$. Assim, as derivadas covariantes dos espinores para $\mu = 0$ são

$$\nabla_0\psi = \partial_0\psi + \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_0\sigma_{ab}\psi = \partial_0\psi. \tag{3.2.25}$$

E sabemos que as conexões $\omega^{ab}{}_0$ são nulas. Para μ = 1 temos

$$\nabla_1\psi = \partial_1\psi + \frac{i}{2}\omega^{ab}{}_1\sigma_{ab}\psi, \tag{3.2.26}$$

como os espinores só dependem do tempo, as derivadas ordinárias com relação aos índices espaciais são nulas, ou seja, $\partial_i\psi = 0$.

Podemos usar os resultados (3.2.23), (3.2.24) e escrever

$$\nabla_1\psi = -\frac{a'}{2a}\Gamma_0\Gamma_1\psi, \tag{3.2.27}$$

onde $\Gamma_i = e_\mu{}^i\gamma^\mu$ que são as matrizes de Dirac no espaço plano. Analogamente, para $\mu = 2$ e $\mu = 3$, temos:

$$\nabla_2\psi = -\frac{a'}{2a}\Gamma_0\Gamma_2\psi, \tag{3.2.28}$$

$$\nabla_3\psi = -\frac{a'}{2a}\Gamma_0\Gamma_3\psi. \tag{3.2.29}$$

De uma maneira mais geral podemos escrever

$$\nabla_i \psi = -\frac{a'}{2a}\Gamma_0 \Gamma_i \psi, \tag{3.2.30}$$

onde i = 1,2,3. Analogamente, para $\bar{\psi}$ obtemos

$$\nabla_0 \bar{\psi} = \partial_0 \bar{\psi}, \quad \nabla_i \bar{\psi} = \frac{a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_0 \Gamma_i. \tag{3.2.31}$$

Usaremos a relação $\nabla_\mu [\bar{\psi}\gamma^\mu \psi] = 0$, conhecida como lei de conservação da corrente. Lembramos que a derivada covariante tensorial de um objeto qualquer é dada por (2.2.9)

$$\nabla_\nu A^\alpha = \partial_\nu A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\kappa\nu} A^\kappa, \tag{3.2.32}$$

então, podemos escrever

$$0 = \nabla_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = \partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) + \Gamma^\mu_{\rho\mu} (\bar{\psi}\gamma^\rho \psi). \tag{3.2.33}$$

Faremos os cálculos para $\mu = 0,1,2,3$ uma vez que (3.2.33) pode ser escrita como

$$\nabla_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = \nabla_0 (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) + \nabla_1 (\bar{\psi}\gamma^1 \psi) + \nabla_2 (\bar{\psi}\gamma^2 \psi) + \nabla_3 (\bar{\psi}\gamma^3 \psi). \tag{3.2.34}$$

De acordo com a métrica (3.2.22), os símbolos de Christoffel não nulos são dados por

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^1_{01} = \Gamma^2_{02} = \Gamma^3_{03} = \frac{a'}{a}, \tag{3.2.35}$$

como já sabemos, $\partial_i (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi) = 0$ para i = 1, 2, 3. Substituindo esses resultados em (3.2.33) temos

$$\partial_0 (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) + \Gamma^0_{00} (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) + \Gamma^1_{01} (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) + \Gamma^2_{02} (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) + \Gamma^3_{03} (\bar{\psi}\gamma^0 \psi) = 0.$$

Então,

$$\frac{d}{d\eta}(\bar{\psi}\gamma^0 \psi) = -4\frac{a'}{a}(\bar{\psi}\gamma^0 \psi). \tag{3.2.36}$$

Substituindo $\gamma^0 = \frac{1}{a}\Gamma^0$ na (3.2.36) e usando a regra de Leibniz, temos

$$\frac{1}{a}\frac{d}{d\eta}(\bar{\psi}\Gamma^0 \psi) - \frac{a'}{a^2}(\bar{\psi}\Gamma^0 \psi) = -4\frac{a'}{a^2}(\bar{\psi}\Gamma^0 \psi),$$

logo, a equação na sua forma final será

$$(\bar{\psi}\Gamma^0 \psi)' = -\frac{3a'}{a}(\bar{\psi}\Gamma^0 \psi), \tag{3.2.37}$$

A equação (3.2.37) também pode ser obtida diretamente das equações de Dirac junto com os resultados (3.2.30) e (3.2.31). A equação (3.2.37) pode ser integrada e como resultado, podemos obter

$$V_0(\eta) = \frac{M^3}{a^3}, \tag{3.2.38}$$

onde a constante de integração M é uma escala de massa que nos fornece informação da dimensão do condensado de matéria do sistema. O quadrivetor corrente V_a é definido como sendo $V_a = \bar{\psi}\Gamma_a\psi$.

3.2.1 Equações de Campo

Investigaremos a relação entre os parâmetros de densidade e pressão com o parâmetro de Immirzi. Voltemos nas equações de campo (3.2.19) para calcular a componente temporal e a componente espacial. Podemos escrevê-las da seguinte forma

$$G_{00} = \frac{i}{2}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma_0\nabla_0\psi - \nabla_0\bar{\psi}\gamma_0\psi\right) - \frac{\theta}{2}\kappa a^2 J_\mu J^\mu \tag{3.2.39}$$

$$G_{ii} = \frac{i}{2}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma_i\nabla_i\psi - \nabla_i\bar{\psi}\gamma_i\psi\right) + \frac{\theta}{2}\kappa a^2 J^2, \quad i = 1,2,3. \tag{3.2.40}$$

nota-se que nesta equação não há soma de índices. Sabemos que $G^\mu{}_\mu = -R$. Calculamos o traço de $G_{\mu\nu}$ usando (3.2.39) e (3.2.40), obtemos então,

$$G^0{}_0 = \frac{i}{4}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma^0\nabla_0\psi - \nabla_0\bar{\psi}\gamma^0\psi\right) - \frac{\theta}{2}\kappa J^2 \tag{3.2.41}$$

$$G^i{}_i = \frac{i}{4}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma^i\nabla_i\psi - \nabla_i\bar{\psi}\gamma^i\psi\right) + \frac{\theta}{2}\kappa J^2, \tag{3.2.42}$$

aqui também não há soma de índices. Por outro lado, podemos obter as equações espaciais e temporais para o tensor energia-momento, com índices diferentes (fora da diagonal)

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_{(i}\nabla_{j)}\psi - \nabla_{(j}\bar{\psi}\gamma_{i)}\psi) + a^2\eta_{ij}\theta J^\mu J_\mu,\ i \neq j, & (3.2.43)\\ T_{0i} &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_{(0}\nabla_{i)}\psi - \nabla_{(0}\bar{\psi}\gamma_{i)}\psi). & (3.2.44) \end{aligned}$$

Também temos

$$T_{00} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma_{(0}\nabla_{0)}\psi - \nabla_{(0}\bar{\psi}\gamma_{0)}\psi) - a^2\theta J^\mu J_\mu. \tag{3.2.45}$$

O lado direito da equação (3.2.43) se anula identicamente, que é consistente com a condição $G_{ij} = 0$ para $i \neq j$, para a métrica diagonal de FLRW, como consequência, temos $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Para expressar essa condição de consistência temos que impor que a equação (3.2.44) também deve ser nula; podemos expressá-la da seguinte maneira:

$$\bar{\psi}\gamma_{(0}\nabla_{i)}\psi - \nabla_{(0}\bar{\psi}\gamma_{i)}\psi = 0, \tag{3.2.46}$$

usando as relações (3.2.30) e (3.2.31), podemos mostrar que

$$a\bar{\psi}\Gamma_i\partial_0\psi - \frac{a'}{2}\bar{\psi}\Gamma_i\psi - a\partial_0\bar{\psi}\Gamma_i\psi + \frac{a'}{2}\bar{\psi}\Gamma_i\psi = 0 \quad (i = 1,2,3), \tag{3.2.47}$$

e através desse resultado é possível escrever

$$\bar{\psi}\Gamma_i\psi' = \bar{\psi}'\Gamma_i\psi \quad (i = 1,2,3). \tag{3.2.48}$$

A equação (3.2.48) é uma condição necessária de consistência. Podemos supor uma solução do tipo $\psi = f(\eta)\chi$, em que o espinor de Dirac é escrito em termos de uma função real de η e de um espinor constante. Outra forma de escrever as equações de Dirac (3.2.6) e (3.2.7) é

$$\frac{i}{a}\Gamma_0\left(\psi' + \frac{3a'}{2a}\psi\right) = m\psi + 2\theta(\Gamma_5\Gamma_a\psi)J^a, \tag{3.2.49}$$

e

$$-\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\right)\Gamma_0 = m\bar{\psi} + 2\theta J^a(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_a), \tag{3.2.50}$$

onde multiplicamos (3.2.6) por Γ_0 pela esquerda e (3.2.7), também pelo mesmo fator pela direita. Podemos usar as equações (3.2.41) e (3.2.42) para obter $G^0{}_0 + \sum_{i=1}^{3} G^i{}_i = G^\mu{}_\mu$;

$$-R = \frac{i}{4}\kappa\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) + \theta\kappa J^2. \tag{3.2.51}$$

Usando as equações de Dirac (3.2.6) e (3.2.7), reescrevemos (3.2.51):

$$R = -2\theta\kappa J^2. \tag{3.2.52}$$

Por outro lado, usando a métrica (3.2.22), temos que $R = -6a''/a^3$, já que

$$G_{00} = \frac{3a'^2}{a^2}, \tag{3.2.53}$$

e

$$G_{ii} = -\frac{2a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}. \tag{3.2.54}$$

De acordo com (3.2.52), podemos escrever

$$\frac{6a''}{a} = 2\theta\kappa a^2 J^2. \tag{3.2.55}$$

Combinando as equações (3.2.39) e (3.2.40) com (3.2.53) e (3.2.54), teremos

$$\frac{3a'^2}{a^2} = \frac{\kappa}{2}a^2(\theta J^2 + mS) + \frac{i}{4}\kappa a(\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi), \quad (3.2.56)$$

$$-\frac{2a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} = \frac{\kappa}{2}a^2\theta J^2. \quad (3.2.57)$$

Direto da manipulação das equações (3.2.55), (3.2.56) e (3.2.57) seguem as seguintes relações:

$$\frac{i}{4}\kappa a(\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi) = 4\theta\kappa a^2 J^2, \quad (3.2.58)$$

$$\frac{3a'^2}{a^2} = \frac{7}{2}\theta\kappa a^2 J^2. \quad (3.2.59)$$

A equação (3.2.58) nos mostra que para o parâmetro θ diferente de zero, a quantidade $\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi$ não deve desaparecer. Por essa última condição, vemos que o ansatz $\psi = f(\eta)\chi$, onde χ é um espinor constante, é descartado. A equação (3.2.59) nos mostra que J^μ deve ser um vetor tipo-tempo, ou seja, $J^2 > 0$. A equação (3.2.55) pode ser expressa em termos da coordenada temporal com a ajuda de (3.2.59):

$$\frac{6\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{2}(4\theta J^2 + m\bar{\psi}\psi). \quad (3.2.60)$$

Essa relação indica uma típica contribuição oriunda da matéria ordinária (que não induz expansão acelerada). De fato podemos expressar o tensor EM na forma padrão para descrever um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (3.2.61)$$

e para nossa métrica, temos que a quadrivelocidade é da forma $u_\mu = (a,0,0,0)$. Calculamos a componente temporal de (3.2.61) na forma

$$T_{00} = \rho a^2 \quad (3.2.62)$$

$$T^\mu{}_\mu = \rho - 3p, \quad (3.2.63)$$

onde $T^\mu{}_\mu$ é o traço da equação (3.2.61) e $T_{ij} = pa^2\eta_{ij}$.

Podemos combinar estas equações com (3.2.59) para expressar ρ e p da seguinte forma

$$\rho = \theta J^2 + m\bar{\psi}\psi, \quad (3.2.64)$$

$$p = \theta J^2. \quad (3.2.65)$$

3.2.2 Equações de Movimento

Neste momento, faremos algumas definições, podemos chamar a quantidade $i\bar{\psi}\Gamma_5\psi$ de um pseudo escalar $P \equiv i\bar{\psi}\Gamma_5\psi$, escalar $S \equiv \bar{\psi}\psi$, o quadrivetor corrente $V_a \equiv \bar{\psi}\Gamma_a\psi$, a corrente axial $J_a \equiv \bar{\psi}\Gamma^5\Gamma_a\psi$, e por fim, o tensor de Lorentz $L_{ab} \equiv \frac{i}{2}\bar{\psi}[\Gamma_a,\Gamma_b]\psi$.

Agora partiremos da equação de Dirac (3.2.49) e como primeiro passo, vamos multiplicá-la por $\bar{\psi}\Gamma_0$:

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\psi\Big) = m\bar{\psi}\Gamma_0\psi + 2\theta(\bar{\psi}\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a\psi)J^a, \tag{3.2.66}$$

onde a matriz Γ_5 é dada por $\Gamma_5 = i\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ e o produto $\Gamma_0\Gamma_5 = i\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$, logo podemos escrever a seguinte relação : $\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a = i\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_a = -\eta_{a0}\Gamma_5 - i/2\varepsilon_{aij}\Gamma^i\Gamma^j$. Substituindo essa relação no lado direito de (3.2.66), teremos,

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\psi\Big) = mV_0 + 2\theta\Big(iJ_0P - \frac{1}{2}\varepsilon_{aij}L^{ij}J^a\Big). \tag{3.2.67}$$

Se tomarmos o complexo conjugado, teremos,

$$-\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\psi\Big) = mV_0 + 2\theta\Big(-iJ^0P - \frac{1}{2}\varepsilon_{aij}L^{ij}J^a\Big). \tag{3.2.68}$$

Considerando a parte imaginária de (3.2.67), temos a seguinte lei de conservação

$$\frac{1}{2a^4}(a^3S)' = 2\theta J_0P. \tag{3.2.69}$$

lembrando que para um dado número complexo z temos $Re[z] = 1/2(Im[z] - Im[\bar{z}])$, então consideraremos a parte real de (3.2.67) e teremos,

$$\frac{i}{2a}(\bar{\psi}\psi' - \bar{\psi}'\psi) = mV_0 - \theta\varepsilon_{aij}L^{ij}J^a. \tag{3.2.70}$$

considerando a definição do pseudoescalar feita anteriormente, vamos contrair a equação (3.2.49) com $\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_0$, assim obteremos

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\Gamma_5\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_5\psi\Big) = m\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_0\psi + 2\theta(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a\psi)J^a. \tag{3.2.71}$$

Levando em consideração que $\Gamma_5^2 = 1$ e $\bar{\psi}\Gamma_0\Gamma_a\psi = \bar{\psi}\eta_{0a}\psi - iL_{0a}$ o lado direito da equação (3.2.71) pode ser escrito como $mJ_0 - 2\theta(J_0S - iL_{0a}J^a)$, tomando a parte real da mesma equação, obtemos

$$\frac{1}{2a^4}(a^3P)' = mJ_0 - 2\theta J_0S. \tag{3.2.72}$$

Considerando agora as componentes do vetor axial, vamos contrair a equação (3.2.49) com

$\bar{\psi}\Gamma_5$ e obter como resultado

$$\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_0\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_0\psi\right) = m\bar{\psi}\Gamma_5\psi + 2\theta(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_5\Gamma_0\psi)J^a, \tag{3.2.73}$$

podemos notar que o lado direito da equação acima é equivalente a $-imP + 2\theta V_a J^a$; tomando então a parte imaginária da equação (3.2.73) teremos

$$\frac{1}{2a^4}(a^3 J_0)' = -mP. \tag{3.2.74}$$

Analogamente ao procedimento anterior, vamos considerar as componentes espaciais do vetor axial e contrair a equação (3.2.49) com $\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\Gamma_0$. Como resultado teremos

$$\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\psi\right) = m\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\Gamma_0\psi + 2\theta(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a\psi)J^a. \tag{3.2.75}$$

Consideraremos as seguintes relações com as matrizes de Dirac : $\Gamma_5\Gamma_i\Gamma_0 = -i/2\varepsilon_{ijk}\Gamma^j\Gamma^k$, e $\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_a = \eta_{0a}\Gamma_i - \eta_{ia}\Gamma_0 + i\varepsilon_{iab}\Gamma_5\Gamma^b$, dessa maneira a equação (3.2.75) pode ser reescrita como

$$\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_i\psi\right) = -\frac{1}{2}m\varepsilon_{ijk}L^{jk} + 2\theta\left(V_i J_0 - J_i V_0 + i\varepsilon_{iab}J^a J^b\right), \tag{3.2.76}$$

e tomando a parte imaginária da equação acima, teremos

$$\frac{1}{a}(a^3 J_i)' = 2\theta\varepsilon_{iab}J^a J^b = 0, \tag{3.2.77}$$

o que nos mostra que os componentes espaciais do vetor axial são conservados. A fim de considerarmos a componente temporal do vetor corrente V_a , vamos contrair a equação (3.2.49) com $\bar{\psi}$:

$$\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}\Gamma_0\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_0\psi\right) = m\bar{\psi}\psi + 2\theta\left(\bar{\psi}\Gamma_5\Gamma_a\psi\right)J^a, \tag{3.2.78}$$

é fácil ver que o lado direito da equação acima é real e equivalente a $mS + 2\theta J_a J^a$, então podemos escrever a equação (3.2.78) da seguite forma

$$\frac{1}{a^4}(a^3 V_0)' = 0, \tag{3.2.79}$$

então podemos obter

$$\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}\Gamma_0\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_0\psi\right) = mS + 2\theta J_a J^a. \tag{3.2.80}$$

Já para a componente espacial do vetor corrente, consideraremos $\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0$, ou seja,

$$\frac{i}{a}\left(\bar{\psi}\Gamma_i\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_i\psi\right) = m\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0\psi + 2\theta\left(\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a\psi\right)J^a. \tag{3.2.81}$$

Usaremos o fato de que $\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a = -\Gamma_i\Gamma_0\Gamma_a\Gamma_5 = -\eta_{0a}\Gamma_i\Gamma_5 + \eta_{ia}\Gamma_0\Gamma_5 - i\varepsilon_{aij}\Gamma^j$, de modo que a equação (3.2.81) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\Gamma_i\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_i\psi\Big) = -imL_{0i} - 2\theta i\varepsilon_{iaj}J^aV^j. \tag{3.2.82}$$

Sabendo que $\frac{i}{a}(\bar{\psi}\Gamma_i\psi' - \bar{\psi}'\Gamma_i\psi) = 0$, teremos

$$\frac{1}{2a^4}(a^3V_i)' = mL_{0i} + 2\theta\varepsilon_{iaj}J^aV^j. \tag{3.2.83}$$

A equação para as componentes espaço-temporais do tensor de Lorentz pode ser obtida pela multiplicação da equação (3.2.49) por $\bar{\psi}\Gamma_i$, ou seja,

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0\psi\Big) = m\bar{\psi}\Gamma_i\psi + 2\theta(\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_5\Gamma_a\psi)J^a, \tag{3.2.84}$$

se usarmos $\Gamma_i\Gamma_5\Gamma_a = -\eta_{ia}\Gamma_5 - i\varepsilon_{iab}\Gamma^0\Gamma^b + i/2\eta_{a0}\varepsilon_{ijk}\Gamma^j\Gamma^k$ no lado direito de (3.2.84), teremos

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_0\psi\Big) = mV_i + 2\theta\Big(iJ_iP - \varepsilon_{iab}L^{0b}J^a + 1/2\varepsilon_{ijk}L^{jk}J_0\Big), \tag{3.2.85}$$

agora podemos tomar a parte real da equação acima e obteremos como resultado:

$$\frac{1}{2a^4}(a^3L_{i0})' = mV_i + 2\theta\varepsilon_{iab}J^aL^{0b} + \theta J_0\varepsilon_{ijk}L^{jk}. \tag{3.2.86}$$

Neste momento consideraremos apenas as componentes espaciais do tensor de Lorentz, para isso vamos contrair a equação (3.2.49) por $\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0$:

$$\frac{i}{a}\Big(\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_j\psi' + \frac{3a'}{2a}\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_j\psi\Big) = m\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\psi + 2\theta\Big(\bar{\psi}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a\psi\Big)J^a, \tag{3.2.87}$$

podemos modificar o lado direito da equação acima se usarmos mais duas relações envolvendo as matrizes de Dirac, elas são : $\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0 = \eta_{ij}\Gamma_0 - i\varepsilon_{ijk}\Gamma_5\Gamma^k$ e também $\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_0\Gamma_5\Gamma_a = i/2(\eta_{ai}\varepsilon_{jbc} - \eta_{aj}\varepsilon_{ibc})\Gamma^b\Gamma^c - i\eta_{a0}\varepsilon_{ijk}\Gamma^0\Gamma^k + i\varepsilon_{ija} - \eta_{0a}\eta_{ij}\Gamma_5 - i/2\eta_{ij}\varepsilon_{akl}\Gamma^k\Gamma^l$, assim, podemos escrever,

$$\frac{1}{2a^4}(a^3L_{ij})' = 2\theta\Big(\frac{1}{2}J_i\varepsilon_{jab}L^{ab} - \frac{1}{2}J_j\varepsilon_{iab}L^{ab} - J_0\varepsilon_{ijk}L^{0k}\Big). \tag{3.2.88}$$

Por fim, vamos contrair a equação anterior com $\varepsilon^{ijk}/2$ e então teremos

$$\frac{1}{2a^4}(a^3L^k)' = 2\theta\Big(\varepsilon^{ijk}J_iL_j + J_0L^{0k}\Big). \tag{3.2.89}$$

Podemos agrupar três equações de movimento, em especial, para P, S e para a componente temporal do quadrivetor corrente J_0 . Essas equações são (3.2.69), (3.2.72) e (3.2.74):

$$\frac{1}{2a}(a^3S)' = 2a^3\theta J_0P. \tag{3.2.90}$$

$$\frac{1}{2a}(a^3P)' = a^3(mJ_0 - 2\theta J_0 S). \tag{3.2.91}$$

$$\frac{1}{2a}(a^3J_0)' = -a^3mP. \tag{3.2.92}$$

É possível perceber que a partir dessas equações , uma lei de conservação se estabelece,ou seja, a quantidade $a^6(S^2+J_0^2+P^2)$ é conservada. Além disso, podemos usar a lei de conservação da energia de um fluido perfeito

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \tag{3.2.93}$$

onde ρ e p são dados pelas equações (3.2.64) e (3.2.65), obtendo assim a equação da continuidade

$$[a^3(\theta J_0^2 + mS)]' + 3a'a^2\theta J_0^2 = 0. \tag{3.2.94}$$

As demais correntes satisfazem as relações (3.2.83), (3.2.86) e (3.2.89), agrupadas abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a^4}(a^3V_i)' &= mL_{0i} + 2\theta\varepsilon_{iaj}J^aV^j \\
\frac{1}{2a^4}(a^3L_{i0})' &= -mV_i + 2\theta\varepsilon_{iab}J^aL^{0b} - \theta J_0\varepsilon_{ijk}L^{jk} \\
\frac{1}{2a^4}(a^3L^i)' &= 2\theta\left(\varepsilon^{jki}J_jL_k - J_0L^{0i}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.95}$$

Também podemos obter, a partir destas equações, uma quantidade conservada, expressa na forma

$$a^6(V_iV^i + L^{0i}L_{0i} + L_iL^i). \tag{3.2.96}$$

3.2.3 Campo fermiônico não massivo

De acordo com (3.2.64) e (3.2.65), o parâmetro de Barbero-Immirzi junto com o campo de Dirac não massivo produz o efeito de um fluido perfeito caracterizado pela equação de estado $p = \rho$ que pode ser considerado um fluido rígido . As equações de densidade de energia e de pressão (3.2.65), dependem do parâmetro de BI, mas a razão não. A lei de conservação da energia de um fluido perfeito é dada por (3.2.93) onde p pode ser dado pela equação de estado $p = w\rho$. Dessa maneira, podemos resolver a equação (3.2.93) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \\
\ln\rho &= \ln a^{-3(1+w)} + C, \\
\rho &\sim a^{-3(1+w)}.
\end{aligned} \tag{3.2.97}$$

Para o fluido que estamos considerando, ou seja, $w = 1$ teremos como resultado $\rho \sim a^{-6}$. Podemos usar a equação de Friedmann para $k = 0$ e verificar de que maneira o fator de escala a irá depender do tempo t. Nesse caso temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \tag{3.2.98}$$

De (3.2.97) sabemos que $\rho = \rho_o(a/a_o)^{-6}$, substituindo este resultado na equação acima teremos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_o\left(\frac{a}{a_o}\right)^{-6}, \tag{3.2.99}$$

Finalmente, fazendo $a_o = 1$ e resolvendo a equação (3.2.99) para a teremos que $a \sim t^{1/3}$.

3.2.4 Campo fermiônico massivo

Para o caso massivo podemos distinguir dois regimes temporais distintos para a evolução do Universo, o primeiro, correspondendo a um tempo jovem, e o outro a um tempo tardio. De acordo com as equações de Dirac, temos as seguintes relações

$$J_0^2 + P^2 + S^2 = \frac{M^6}{a^6} \quad , \qquad J_i^2 = \frac{\tilde{M}^6}{a^6} \tag{3.2.100}$$

e como foi mencionado anteriormente, M e $\tilde{M}$ são escalas de massa que nos informam a dimensão do sistema de férmions. A equação acima nos mostra que o escalar S necessariamente diminui com a expansão do Universo. O regime temporal tardio é atingido quando o sistema está caracterizado por $a^3 \gg 2\theta/m$. É importante observar que nesse regime temos $2\theta S \ll m$, que significa que podemos desprezar o termo não linear da relação (3.2.91) e que as equações para a evolução de J_0 , S , P são dominadas pelo termo massivo e a influência da constante de acoplamento θ pode ser ignorada de maneira que podemos escrever as seguintes equações

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^3 S) \approx 0, \tag{3.2.101}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^3 J_0) \approx -2ma^3 P, \tag{3.2.102}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^3 P) \approx 2ma^3 J_0. \tag{3.2.103}$$

As quantidades J_0 , P e S que satisfazem as equações acima podem ser expressas como

$$J_0 = \frac{M_1}{a^3}cos[2m(t-t_0)] \ , \quad P = \frac{M_1}{a^3}sen[2m(t-t_0)] \ , \quad S = \frac{M_2}{a^3}, \tag{3.2.104}$$

onde M_1 e M_2 são as escalas de massa que descrevem o sistema de férmions e satisfazem a relação $M^6 = M_1^6 + M_2^6$. No regime temporal tardio, a evolução do sistema gera um tipo de fluido caracterizado por pressão nula, ou seja, $p = 0$ em que a densidade de energia é dominada pela componente escalar com $\rho \sim a^{-3}$ e como consequência $a \sim t^{2/3}$. Uma maneira para melhor entender esse resultado é observar o fato de que a densidade de energia $\rho = \theta J^2 + mS$, possui duas componentes, o escalar S que tem escala $S \sim a^{-3}$, já a componente caracterizada pela corrente J^2 tem escala $J^2 \sim a^{-6}$, ou seja, no decorrer do tempo a corrente J^2 diminui mais rápido do que o escalar S, então podemos dizer que num regime temporal tardio para a evolução do Universo a contribuição da energia é dominada pela componente escalar.

4 FORMALISMO DE HOLST COM FLUIDO DE SPIN

Vimos que a teoria de gravitação pode ser formulada a partir do princípio variacional, ou seja, a interação gravitacional pode ser descrita em termos de uma ação clássica conhecida como ação de Einstein-Hilbert. Nesta abordagem, usaremos a teoria de Einstein-Cartan (EC) para introduzir o tensor torção. Como vimos anteriormente, ele descreve uma outra propriedade do espaço-tempo além da curvatura. Por outro lado, sabemos também que na teoria de Einstein-Cartan a torção pode se acoplar com spin. De forma análoga ao capítulo anterior, usaremos o formalismo de Holst e consideraremos também o parâmetro de Barbero-Immirzi e mais uma distribuição de matéria na forma de um fluido com spin intrínseco (veja,por exemplo, [53]).

4.1 PROCEDIMENTO

Primeiramente, escrevemos a ação de EC junto com o termo de Holst como em (3.2.5):

$$S_H = \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\tilde{R}+\frac{1}{\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\Big], \tag{4.1.1}$$

onde o escalar de curvatura $\tilde{R}$ pode ser escrito de acordo com (2.1.19).

Como já sabemos o setor de Dirac minimamente acoplado nos fornecerá um termo de fonte proporcional a $S_\mu J^\mu$ mais a ação que descreve o campo fermiônico no espaço-tempo curvo sem torção,

$$S_D = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi-\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\Big]. \tag{4.1.2}$$

Além desses campos citados acima, vamos considerar também uma distribuição de matéria que descreve um fluido com spin, que chamamos de fluido de spin ou fluido de Weyssenhoff [39]. A lagrangiana L_{sf} que descreve o acoplamento do fluido de spin com a torção pode ser expressa da seguinte maneira,

$$L_{sf} = \alpha\Sigma^{\beta\nu}U^\alpha K_{\beta\nu\alpha}, \tag{4.1.3}$$

onde α é a constante de acoplamento e $\Sigma^{\beta\nu}$ é chamado de tensor de spin e possui antissimetria nos dois índices, ou seja, $\Sigma^{\beta\nu} = -\Sigma^{\nu\beta}$. Cada partícula do fluido possui uma quadrivelocidade U^{α}. O tensor $K_{\beta\nu\alpha}$ é chamado de tensor contorção (2.1.11) que foi definido na seção (2.1.1). Dessa maneira a ação que descreve o acoplamento entre o fluido de spin e a torção é dado por

$$S_{sf} = \alpha \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\Sigma^{\beta\nu}U^{\alpha}K_{\beta\nu\alpha}\Big). \tag{4.1.4}$$

O tensor de spin juntamente com a quadrivelocidade satisfazem a condição $\Sigma^{\beta\nu}U_{\nu} = 0$, conhecida como condição de Frenkel, [32],[33],[34] e [39].

Podemos começar nosso procedimento escrevendo a ação que vai descrever nosso sistema de acordo com os campos que foram apresentados, então a expressão para a ação pode ser dada por

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{k}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\tilde{R} + \frac{1}{\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\mu\lambda\alpha}K_{\lambda}{}^{\nu\beta} \\ &+ \alpha\kappa\Sigma^{\beta\nu}U^{\alpha}K_{\beta\nu\alpha} + 2\eta\kappa\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}K^{\lambda\rho\sigma}J^{\mu}\Big] + S_D + S_{fp}, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

usamos o fato que $S_{\mu}J^{\mu} = 2\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}K^{\lambda\rho\sigma}J^{\mu}$, adotamos também que $\eta = 1/8$, S_D é a ação (4.1.2) e S_{fp} é a ação que descreve a componente do fluido perfeito presente no fluido de spin. S_{fp} é portanto a parte cinética da ação do fluido de Weyssenhoff, de tal forma que o tensor momento-energia associado a S_{fp} é

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)U_{\mu}U_{\nu} - pg_{\mu\nu}. \tag{4.1.6}$$

Agora podemos aplicar o princípio variacional em (4.1.5) de tal forma que teremos

$$\frac{\delta S}{\delta K_{\gamma\eta\theta}} = 0. \tag{4.1.7}$$

Como vimos, o escalar de curvatura $\tilde{R}$ é dado por (2.1.19), e os termos de derivadas totais podem ser suprimidos, pois na integração da ação estes termos vão corresponder a integrais de superfície, de modo que

$$\int d^4x\sqrt{-g}\tilde{R} = \int d^4x\sqrt{-g}\Big(R + K^{\lambda}{}_{\gamma\lambda}K^{\gamma\tau}{}_{\tau} - K^{\lambda}{}_{\tau\gamma}K^{\gamma}{}_{\lambda}{}^{\tau}\Big). \tag{4.1.8}$$

Ao variarmos esta ação com relação à contorção $K_{\gamma\eta\theta}$, obtemos $\dfrac{\delta\tilde{R}}{\delta K_{\gamma\eta\theta}} = g^{\theta[\gamma}T^{\eta]} + T^{\theta\gamma\eta}$. Quanto ao termo de Holst, faremos as mesmas considerações que o procedimento anterior, podemos simplificar o tensor de Riemann-Cartan $\tilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta}$ e escrevê-lo como

$$\tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} + K^{\mu\lambda\alpha}K_{\lambda}{}^{\nu\beta} - K^{\mu\lambda\beta}K_{\lambda}{}^{\nu\alpha}, \tag{4.1.9}$$

onde desprezamos novamente os termos de derivadas totais, com isso teremos

$$\frac{\delta}{\delta K_{\gamma\eta\theta}}\Big(\frac{1}{2\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{R}^{\mu\nu\alpha\beta}\Big)=\frac{2}{\beta}\varepsilon^{[\gamma\nu\theta\beta}K^{\eta]}{}_{\nu\beta}. \tag{4.1.10}$$

Para a ação que descreve o acoplamento com o fluido de spin temos que $\dfrac{\delta S_{fs}}{\delta K_{\gamma\eta\theta}}=\alpha\Sigma^{\gamma\eta}U^{\theta}$. Para o termo $S_{\mu}J^{\mu}$ a variação com relação a contorção é nula. A partir desses resultados, podemos verificar que a equação dinâmica resultante da variação da ação total (4.1.5) com relação a $K_{\gamma\eta\theta}$ é dada por

$$2g^{\theta[\gamma}T^{\eta]}+T^{\theta\gamma\eta}-\frac{1}{2}\Sigma^{\gamma\eta}U^{\theta}+\frac{2}{\beta}\varepsilon^{[\gamma\nu\theta\beta}K^{\eta]}{}_{\nu\beta}=0. \tag{4.1.11}$$

O último termo da equação anterior pode ser expresso de maneira diferente, ao invés do tensor contorção podemos escrever o tensor torção através da relação (2.1.11), logo teremos

$$\varepsilon^{[\gamma\nu\theta\beta}K^{\eta]}{}_{\nu\beta}=\varepsilon^{\nu\theta\beta[\eta}T^{\gamma]}{}_{\nu\beta}. \tag{4.1.12}$$

Substituindo esta relação na equação dinâmica (4.1.11), podemos reescrevê-la como

$$2g^{\theta[\gamma}T^{\eta]}+T^{\theta\gamma\eta}-\frac{1}{2}\Sigma^{\gamma\eta}U^{\theta}+\frac{1}{\beta}\varepsilon^{[\gamma\nu\theta\beta}T^{\eta]}{}_{\nu\beta}=0. \tag{4.1.13}$$

O traço da torção T^{μ} pode ser obtido ao multiplicarmos a equação (4.1.13) por $g_{\theta\gamma}$. A corrente axial S^{μ} pode ser obtida quando multiplicamos (4.1.13) por $\varepsilon_{\theta\gamma\eta\sigma}$. Após estes procedimentos, podemos verificar que o traço T^{μ} e a corrente axial S^{μ} são dados por

$$T^{\mu}=\frac{S^{\mu}}{4\beta} \tag{4.1.14}$$

e

$$S^{\mu}=\frac{3}{2}\kappa\theta J^{\mu}+\frac{1}{2}\kappa\theta\varepsilon^{\rho\nu\alpha\mu}\Sigma_{\rho\nu}U_{\alpha}. \tag{4.1.15}$$

onde $\eta=1/8$ e $\theta=\dfrac{\beta^2}{\beta^2+1}$.

4.2 RESULTADOS

O objetivo agora é usar a equação (4.1.13) e escrever a torção em função das fontes apenas, mas para isso, devemos fazer algumas manipulações algébricas em (4.1.13) devido ao termo $\varepsilon^{[\gamma\nu\theta\beta}T^{\eta]}{}_{\nu\beta}$. Após alguns cálculos e lançando mão da equação (4.1.14), é possível verificar que o tensor torção pode ser escrito como

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\nu\gamma} &= -\frac{\alpha\theta\kappa}{4\beta}\left[\delta^{\mu}_{\nu}\varepsilon_{\gamma\rho\lambda\tau}\Sigma^{\rho\lambda}U^{\tau} - \delta^{\mu}_{\gamma}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\tau}\Sigma^{\rho\lambda}U^{\tau} + 2\varepsilon_{\nu\gamma\phi\tau}\Sigma^{\phi\tau}U^{\mu}\right] \\ &+ \frac{1}{\beta}\eta\kappa\theta\left[\delta^{\mu}_{\gamma}J_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}J_{\gamma}\right] + \alpha\kappa\theta\Sigma_{\gamma\nu}U^{\mu} + 2\theta\eta\kappa\varepsilon^{\mu}{}_{\phi\gamma\nu}J^{\phi}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Como vimos no capítulo 2 , o tensor torção, por outro lado, pode ser decomposto em função de três componentes irredutíveis, de acordo com (2.1.17) temos,

$$T^{\mu}{}_{\nu\gamma} = \frac{1}{3}\left(T_{\nu}\delta^{\mu}{}_{\gamma} - T_{\gamma}\delta^{\mu}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu}{}_{\nu\gamma\sigma}S^{\sigma} + q^{\mu}{}_{\nu\gamma}. \quad (4.2.2)$$

Até agora, encontramos uma expressão para o traço T^{μ} e para a corrente axial S^{μ} , de maneira análoga, podemos expressar o tensor $q^{\mu}{}_{\nu\gamma}$ em função das fontes dos campos. É possível verificar que quando substituimos (4.2.2) no lado esquerdo de (4.2.1) e usando os resultados (4.1.14) e (4.1.15), obtemos

$$\begin{aligned} q^{\mu}{}_{\nu\gamma} &= \frac{\alpha\kappa\theta}{6\beta}\left(\delta^{\mu}_{\gamma}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\tau}\Sigma^{\rho\lambda}U_{\tau} - \delta^{\mu}_{\nu}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\tau}\Sigma^{\rho\lambda}U_{\tau}\right) - \frac{\alpha\kappa\theta}{2\beta}\varepsilon_{\nu\gamma\rho\lambda}\Sigma^{\rho\lambda}U_{\mu} \\ &- \frac{\alpha\kappa\theta}{3}\left(\Sigma^{\mu}{}_{\gamma}U_{\nu} - \Sigma^{\mu}{}_{\nu}U_{\gamma}\right) - \frac{2\alpha\kappa\theta}{3}\Sigma_{\nu\gamma}U^{\mu}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

É fácil confirmar que a equação (4.2.3) satisfaz as duas condições para o tensor $q_{\mu\nu\gamma}$: $q^{\nu}{}_{\nu} = 0$ e $\varepsilon^{\mu\nu\gamma\sigma}q_{\mu\nu\gamma} = 0$, ver capítulo 2.

Uma vez que nós temos as quantidades T^{μ} , S^{μ} e $q^{\mu}{}_{\nu\gamma}$ em função das fontes, podemos escrever, também, a ação (4.1.5) em termos dessas quantidades, ou seja,

$$\begin{aligned} S &= S_D + S_{fp} + \frac{1}{k}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-R + \frac{2}{3}T^{\mu}T_{\mu} - \frac{1}{24}S^{\mu}S_{\mu} - \frac{1}{2}q^{\mu\nu\gamma}q_{\mu\nu\gamma}\right. \\ &- \left.\frac{1}{3\beta}T_{\mu}S^{\mu} + \frac{1}{4\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}q^{\lambda\alpha\beta}q_{\lambda}{}^{\mu\nu} + \alpha\Sigma^{\tau\nu}U^{\alpha}K_{\tau\nu\alpha} + \eta\kappa S_{\mu}J^{\mu}\right], \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Vale ressaltar que estamos considerando $q^{\alpha\beta\nu} \neq 0$, diferente da consideração feita no capítulo 3. Usando (4.2.3), calculamos as seguintes quantidades:

$$q^2 = \frac{2}{3}\Big(\frac{\beta^2-1}{\beta^2}\Big)\alpha^2\kappa^2\theta^2\Sigma_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}, \tag{4.2.5}$$

$$\frac{1}{4\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}q^{\lambda\alpha\beta}q_{\lambda}{}^{\mu\nu} = -\frac{2}{3}\frac{\alpha^2\kappa^2\theta^2}{\beta^2}\Sigma_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}. \tag{4.2.6}$$

Substituindo as equações (4.1.14), (4.1.15), (4.2.5) e (4.2.6) em (4.2.4), podemos obter o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} S = S_{EH}+S_D+S_{fp} \quad &+ \quad \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{\alpha^2\kappa\theta}{4}\Sigma^2 + \\ &+ \quad \alpha\eta\kappa\theta\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu}\Sigma^{\nu\alpha}U^{\beta}+6\eta^2\kappa\theta J^2\Big], \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

onde $\kappa = 16\pi G$, $\alpha = -1/2$, $\eta = 1/8$ e $U^2 = 1$, logo,

$$\begin{aligned} S(g,\tilde{\omega},\psi,\bar{\psi}) = S_{EH}+S_D+S_{fp} \quad &+ \quad \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\pi G\theta\Sigma^2 + \\ &+ \quad \pi G\theta\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu}\Sigma^{\nu\alpha}U^{\beta}+\frac{3}{2}\pi G\theta J^2\Big]. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Nesta expressão, se omitirmos S_D, teremos uma descrição de um sistema físico composto por um fluido de spin no espaço com torção e uma corrente axial externa J^{μ}, que pode ser interpretada à luz de teorias com quebra de simetria de Lorentz. Este problema foi abordado em [40], mas aqui consideramos também a influência do termo de Holst $1/2\beta\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$. Desse modo, a menos da constante θ, os resultados de [40] para modelos cosmológicos permanecem válidos, exceto pela ausência do termo de interação $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu}\Sigma^{\nu\alpha}U^{\beta}$, que pode ser justificado mediante a suposição de que J^{μ} é um valor do tipo tempo. Isto é claro porque U^{β} também é tipo tempo e $\varepsilon_{0\nu\alpha 0}\equiv 0$.

É digno de menção que o interessante termo $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu}\Sigma^{\nu\alpha}U^{\beta}$ não foi abordado na literatura. Por exemplo, em [21], apenas a ação de Einstein-Hilbert S_{EH}, além de S_{fp} e o termo $\int d^4x\sqrt{-g}\pi G\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$ são relevantes à abordagem no mesmo artigo. Neste contexto, os efeitos do fluido de spin podem ser estudados através de um fluido com tensor momento-energia efetivo

$$T_{\mu\nu} = (\rho+p-4\pi G\sigma^2)U_{\mu}U_{\nu}-(p-2\pi G\sigma^2)g_{\mu\nu}, \tag{4.2.9}$$

onde, $2\sigma^2 = <\Sigma_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}>$ e $<\Sigma^{\mu\nu}>=0$. A suposição $<\Sigma^{\mu\nu}>=0$ é natural na medida em que o valor médio $<\Sigma^{\mu\nu}>$ é tomado como uma quantidade macroscópica a partir do tensor de spin, este entendido como uma propriedade microscópica.

O aparecimento da interação entre J^{μ} e $\Sigma^{\mu\nu}$, através do termo de acoplamento $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{\mu}\Sigma^{\nu\alpha}U^{\beta}$, deve ser interpretado, na nossa opinião, como uma indicação de que , se tomarmos, por exemplo, $J_{\mu} = (0, J_0, 0, 0)$, haverá uma direção privilegiada e assim a suposição $< \Sigma^{\mu\nu} >= 0$ é drasticamente enfraquecida.

4.3 CONCLUSÕES

Neste trabalho, consideramos soluções cosmológicas para a teoria de gravitação na presença do campo fermiônico e termo de Holst. Mostramos que as soluções com o parâmetro de Barbero-Immirzi (BI) finito e não trivial são compatíveis com as soluções FLRW . Foi possível observar que as equações de estado com auto-interação da matéria fermiônica para férmions não massivos, não dependem do parâmetro BI e que também o efeito dos férmions livres foram desprezados. Apresentamos também as equações de Dirac, que contém o parâmetro de BI, após variar a ação de nosso sistema com relação aos campos, como foi mostrado em [44]. Apresentamos a equação de Einstein e o tensor energia-momento contendo os campos de Dirac e as equações de movimento para esses campos. A classe de soluções tais que as componentes espinoriais são expressas através de uma função real de η é descartada pelas relações de consistência.

Para o caso massivo, nós identificamos dois regimes diferentes. O primeiro regime corresponde a uma teoria não massiva identificada com um tempo jovem da evolução do Universo e que descreve um fluido perfeito ultrarígido com equação de estado caracterizada por $w = 1$.

As equações de estado para matéria do Universo devem ser tratadas como sendo únicas naquela época e os efeitos da gravidade quântica em loop ou da torção provavelmente não podem alterar, em princípio, o equilíbrio entre as taxas da expansão de férmions e radiação. Ao mesmo tempo as equações de estado total podem ser afetadas pelas manifestações mencionadas de uma nova física, incluindo a interação quadrifermiônica. O efeito da torção, subentendida no termo de Holst, na equação de estado para a matéria quente depende da existência da corrente axial e do parâmetro arbitrário θ definido em (3.2.2). Em princípio, as mesmas observações cosmológicas podem ser utilizadas para a obtenção de um limite superior para θ. A motivação dessas investigações consiste no fato de que na teoria do Big Bang o Universo primordial foi caracterizado por um estágio em que predominaram os efeitos descritos pela teoria de gravitação quântica em loop.

No último capítulo deste trabalho consideramos a teoria de EC juntamente com o formalismo de Holst. O tensor torção foi introduzido, também, através da lagrangiana do fluido de spin. A partir do príncipio variacional, obtivemos as equações para o traço da torção, para a corrente axial e para um terceiro componente do tensor torção, o tensor $q^{\alpha\beta\mu}$. Foi possível representar estas quantidades em termos das fontes e obter uma ação equivalente, apenas em função das fontes e do parâmetro de BI. Deve-se mencionar que o termo de interação entre a corrente fermiônica axial e o tensor densidade de spin do fluido pode ser visto como uma instância pela qual a corrente axial contribui ou não para a condição $< \Sigma^{\mu\nu} >= 0$. De qualquer modo, todas as conciderações relativas a limites observacionais impostos sobre, por exemplo, σ^2, são aplicados efetivamente sobre o σ^2.

APÊNDICE A – VARIAÇÃO DA CONEXÃO DE SPIN

No capítulo 3 foram obtidas as equações de campo a partir da variação da ação (3.2.1). Ao variarmos a ação de Dirac (3.2.13), consideramos a expansão da conexão de spin. Neste apêndice, mostraremos que o produto $[\overline{\psi}\gamma^\mu\sigma_{ab}\psi+\overline{\psi}\sigma_{ab}\gamma^\mu\psi]\delta\omega^{ab}{}_\mu$ é nulo na equação (3.2.16) devido as simetrias de $\delta\omega^{ab}{}_\mu$. Para verificarmos este resultado, nosso ponto de partida será a seguinte equação,

$$\omega_\mu{}^{ab} = e^a{}_\tau e^{\lambda b}\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} - e^{\lambda b}\partial_\mu e^a{}_\lambda. \tag{A.0.1}$$

considerando o conjunto de equações de (3.2.8) a (3.2.12) e as expressões

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big(\nabla_\alpha h^\lambda{}_\beta + \nabla_\beta h^\lambda{}_\alpha - \nabla^\lambda h_{\alpha\beta}\Big), \tag{A.0.2}$$

$$\delta\gamma^\mu = -\frac{1}{2}h^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \tag{A.0.3}$$

podemos substituí-las na expressão para a variação de (A.0.1) e obter

$$\begin{aligned}\delta\omega_\mu{}^{ab} &= -\frac{1}{2}h^\lambda{}_\rho\Big(e^a{}_\tau\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu e^a{}_\lambda\Big)e^{\rho b} + \frac{1}{2}h^\sigma{}_\tau e^a{}_\sigma e^{\lambda b}\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu}\\ &+ \frac{1}{2}e^a{}_\tau e^{\lambda b}\Big(\nabla_\lambda h^\tau{}_\mu + \nabla_\mu h^\tau{}_\lambda - \nabla^\tau h_{\mu\lambda}\Big)\\ &- \frac{1}{2}e^{\lambda b}h^\rho{}_\lambda\partial_\mu e^a{}_\rho - \frac{1}{2}e^{\lambda b}e^a{}_\rho\partial_\mu h^\rho{}_\lambda,\end{aligned} \tag{A.0.4}$$

ao agrupar os termos semelhantes, teremos

$$\begin{aligned}\delta\omega_\mu{}^{ab} &= \frac{1}{2}e^a{}_\tau e^{\lambda b}\Big(\nabla_\mu h^\tau{}_\lambda - \partial_\mu h^\tau{}_\lambda - \Gamma^\tau{}_{\mu\rho}h^\rho{}_\lambda + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}h^\tau{}_\rho\Big)\\ &+ \frac{1}{2}h^\lambda{}_\rho e^{\rho b}\Big(\partial_\mu e^a{}_\tau - \partial_\mu e^a{}_\lambda\Big) + \frac{1}{2}\Big(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\Big)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}\\ &= \frac{1}{2}\Big(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\Big)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}.\end{aligned} \tag{A.0.5}$$

Substituindo (A.0.5) no terceiro termo de (3.2.16), obteremos

$$\delta_\omega S = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{i}{8}\right)\left(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\right)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}e^{\mu c}\bar{\psi}\left(\gamma_c\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma_c\right)\psi, \qquad \text{(A.0.6)}$$

após realizarmos a integração por partes, obteremos

$$\delta_\omega S = \frac{i}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\tau}e^{\mu c}\left(e^{a\tau}e^{b\lambda} - e^{b\tau}e^{a\lambda}\right)\nabla_\lambda h_{\mu\tau}\left[\bar{\psi}\left(\gamma_c\sigma_{ab} + \sigma_{ab}\gamma_c\right)\psi\right], \qquad \text{(A.0.7)}$$

onde σ_{ab} é dado por (2.2.29). Fazendo uma mudança de índice $\tau \to \nu$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta_\omega S &= -\frac{1}{16}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}e^{\mu c}\left(e^{\nu a}e^{\lambda b} - e^{\nu b}e^{\lambda a}\right)\nabla_\lambda\left[\bar{\psi}\left(\gamma_c\gamma_a\gamma_b - \gamma_c\gamma_b\gamma_a\right.\right. \\ &+ \left.\left.\gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_b\gamma_a\gamma_c\right)\psi\right], \qquad \text{(A.0.8)} \end{aligned}$$

por simplificação, faremos $-e^{\nu b}e^{\lambda a} = e^{\nu a}e^{\lambda b}$, logo

$$\begin{aligned} \delta_\omega S &= -\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}e^{\mu c}e^{\nu a}e^{\lambda b}\nabla_\lambda\left[\bar{\psi}\left(\gamma_c\gamma_a\gamma_b - \gamma_c\gamma_b\gamma_a\right.\right. \\ &+ \left.\left.\gamma_a\gamma_b\gamma_c - \gamma_b\gamma_a\gamma_c\right)\psi\right], \qquad \text{(A.0.9)} \end{aligned}$$

usando a identidade $\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab}$ em (A.0.9), obtemos como resultado

$$\begin{aligned} \delta_\omega S &= -\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}e^{\mu c}e^{\nu a}e^{\lambda b}\nabla_\lambda\left[\bar{\psi}\left(\eta_{ac}\gamma_b - \eta_{ab}\gamma_c + \eta_{ac}\gamma_b\right.\right. \\ &+ \left.\left.\eta_{bc}\gamma_a - \eta_{ac}\gamma_b - \eta_{ac}\gamma_b\right)\psi\right] \\ &= -\frac{1}{8}\int d^4x\sqrt{-g}h_{\mu\nu}\nabla_\lambda\left[\bar{\psi}\left(g^{\lambda\mu}\gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu\right)\psi\right] = 0. \qquad \text{(A.0.10)} \end{aligned}$$

A equação (A.0.10) nos mostra que a quantidade $\delta_\omega S$ é nula, uma vez que ela envolve um produto de quantidades simétricas e antissimétricas nos índices μ e ν. Assim, foi possível mostrar que o termo $[\overline{\psi}\gamma^\mu\sigma_{ab}\psi + \overline{\psi}\sigma_{ab}\gamma^\mu\psi]\delta\omega^{ab}{}_\mu$ é nulo em (3.2.16).

APÊNDICE B – CONDIÇÃO DE CONSISTÊNCIA DA EQUAÇÃO (3.2.43)

Neste apêndice mostraremos que o resultado $T_{ij} = 0$ na seção (3.2.1) está relacionado a uma identidade. Sabemos que o tensor energia-momento com o campo de Dirac é dado na forma

$$T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\left[\bar{\psi}\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\psi - \nabla_{(\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha)}\psi\right] - \frac{\theta}{2}g_{\alpha\beta}J^{\mu}J_{\mu}. \tag{B.0.1}$$

Sabendo que $\alpha = 1$ e $\beta = 2$, teremos $g_{12} = 0$, então, podemos escrever

$$T_{12} = \frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma_1\nabla_2\psi + \frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma_2\nabla_1\psi, \tag{B.0.2}$$

ou usando as equações (3.2.43) e (3.2.44) teremos

$$\frac{i}{8}a^{'}\bar{\psi}[-\Gamma_1\Gamma_0\Gamma_2]\psi + \frac{i}{8}a^{'}\bar{\psi}[-\Gamma_2\Gamma_0\Gamma_1]\psi = T_{12}, \tag{B.0.3}$$

ou

$$-\frac{i}{8}a^{'}\bar{\psi}[\Gamma_1\Gamma_0\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_0\Gamma_1]\psi = T_{12}, \tag{B.0.4}$$

sabendo que $\Gamma_1\Gamma_0\Gamma_2 = -\Gamma_2\Gamma_0\Gamma_1$ temos naturalmente que

$$-\frac{i}{8}a^{'}\bar{\psi}[\Gamma_1\Gamma_0\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_0\Gamma_1]\psi = 0. \tag{B.0.5}$$

Logo, vemos que $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$, assim, mostramos que a equação (3.2.43) na seção (3.2.1) se anula identicamente.

APÊNDICE C – FORMA ALTERNATIVA DE DERIVAR AS EQUAÇÕES DINÂMICAS PARA AS COMPONENTES IRREDUTÍVEIS DO TENSOR TORÇÃO

Outra forma de obter as equações dinâmicas para as componentes irredutíveis T^{μ}, S^{μ} e $q^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ é escrever a ação (4.1.5) em função dessas componentes e em seguida fazer a variação, usando (4.1.5). A ação é dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{k}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[-\tilde{R}+\frac{1}{\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}K^{\mu\lambda\alpha}K_{\lambda}{}^{\nu\beta} \\ &+ \alpha\kappa\Sigma^{\beta\nu}U^{\alpha}K_{\beta\nu\alpha}+2\eta\kappa\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}K^{\lambda\rho\sigma}J^{\mu}\Big]+S_D+S_{fp}, \end{aligned} \tag{C.0.1}$$

onde o escalar de curvatura e o tensor contorção podem ser substituidos pelas relações (2.1.19), (2.1.18). Para o termo de Holst, podemos usar a expressão (3.1.3), desta forma a ação (C.0.1) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\Big(-R+\frac{2}{3}T_{\mu}T^{\mu}-\frac{1}{24}S_{\mu}S^{\mu}-\frac{1}{3\beta}T_{\mu}S^{\mu} \\ &+ \frac{1}{8}\kappa S^{\mu}J_{\mu}-\frac{1}{2}q_{\alpha\beta\mu}q^{\alpha\beta\mu}+\frac{1}{24}\kappa\varepsilon_{\beta\nu\alpha\gamma}\Sigma^{\beta\nu}u^{\alpha}S^{\gamma} \\ &+ \frac{1}{4\beta}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}q_{\sigma\mu\nu}q^{\sigma}{}_{\alpha\beta}+\frac{\alpha\kappa}{2}\Sigma^{\beta\nu}U^{\alpha}(q_{\beta\nu\alpha}-q_{\nu\beta\alpha}-q_{\alpha\beta\nu})\Big)+S_D+S_{fp}. \end{aligned} \tag{C.0.2}$$

Podemos perceber que a ação está escrita apenas em função das componentes irredutíveis do tensor torção. Variando esta expressão em relação a T^{μ}, S^{μ} e $q^{\gamma\theta\alpha}$, obtemos

$$T_{\mu}=\frac{1}{4\beta}S_{\mu}; \tag{C.0.3}$$

$$S_{\mu}=\frac{3}{2}\kappa\theta J_{\mu}+\frac{\kappa\theta}{2}\varepsilon_{\beta\nu\alpha\mu}\Sigma^{\beta\nu}U^{\alpha}; \tag{C.0.4}$$

e

$$\frac{\delta S}{\delta q^{\mu\nu\lambda}}=-q^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{2\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}q^{\mu}{}_{\sigma\tau}+\frac{\alpha\kappa}{2}(\Sigma^{\mu\nu}U^{\lambda}-\Sigma^{\mu\lambda}U^{\nu}-\Sigma^{\nu\lambda}U^{\mu}). \tag{C.0.5}$$

Ao realizarmos a variação da ação (C.0.1) com relação ao tensor $q^{\gamma\theta\alpha}$, devemos assegurar que este resultado, que chamaremos de $A^{\mu\nu\lambda}$, deva ser expresso de tal maneira que ele apresente o mesmo número de graus de liberdade do tensor $q^{\mu\nu\lambda}$, ou seja,

$$A^{\mu\nu\lambda}\longrightarrow A^{\mu\nu\lambda}-\frac{1}{3}\left(g^{\mu\lambda}A^{\nu}-g^{\mu\nu}A^{\lambda}\right)+\frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\overline{A}_{\sigma}, \tag{C.0.6}$$

onde $A^{\nu}=A^{\rho}{}_{\mu\rho}$ e $\overline{A}_{\sigma}=\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma}A^{\mu\alpha\beta}$. Usando a equação (C.0.5), podemos obter

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}A^{\mu\nu\lambda}=\frac{\alpha\kappa}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\Sigma^{\mu\nu}U^{\lambda}, \tag{C.0.7}$$

com auxílio do procedimento (C.0.6) reescrevemos (C.0.5) de forma a mostrar a expressão correta de $A^{\mu\nu\lambda}$:

$$\begin{aligned}A^{\mu\nu\lambda} &= -q^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{2\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}q^{\mu}{}_{\sigma\tau}+\frac{\alpha\kappa}{2}(\Sigma^{\mu\nu}U^{\lambda}-\Sigma^{\mu\lambda}U^{\nu}-\Sigma^{\nu\lambda}U^{\mu})\\ &+ \frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\alpha\kappa}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}\Sigma^{\alpha\beta}U^{\gamma},\end{aligned} \tag{C.0.8}$$

sabendo que

$$\frac{1}{6}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\alpha\kappa}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}\Sigma^{\alpha\beta}U^{\gamma}=-\frac{\alpha\kappa}{12}\left(2\Sigma^{\mu\nu}U^{\lambda}+2\Sigma^{\nu\lambda}U^{\mu}+2\Sigma^{\lambda\mu}U^{\nu}\right), \tag{C.0.9}$$

podemos escrever a equação corrigida para a componente $q^{\mu\nu\lambda}$:

$$-q^{\mu\nu\lambda}+\frac{1}{2\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}q^{\mu}{}_{\sigma\tau}+\frac{\alpha\kappa}{3}(\Sigma^{\mu\nu}U^{\lambda}-\Sigma^{\mu\lambda}U^{\nu}-2\Sigma^{\nu\lambda}U^{\mu})=0. \tag{C.0.10}$$

O objetivo agora é encontrar uma maneira de expressar a componente $q^{\mu\nu\lambda}$ apenas em função da fonte, para isso, multiplicaremos a equação (C.0.10) por $\varepsilon_{\alpha\rho\nu\lambda}$ e após alguns cálculos é possível obter

$$-\varepsilon_{\nu\lambda\alpha\rho}q^{\mu\alpha\rho}-\frac{2}{\beta}q^{\mu\nu\lambda}+\frac{2\alpha\kappa}{3}\left(\varepsilon_{\nu\lambda\alpha\rho}\Sigma^{\mu\alpha}U^{\rho}-\varepsilon_{\nu\lambda\alpha\rho}\Sigma^{\alpha\rho}U^{\mu}\right)=0. \tag{C.0.11}$$

Para extrair apenas o termo $q^{\mu\alpha\rho}$ da equação anterior, multiplicaremos (C.0.11) por um fator igual a $1/2\beta$ e somaremos esse resultado com a equação (C.0.10), desta feita podemos expressar a componente $q^{\mu\nu\lambda}$ em função da fonte da seguinte forma

$$q^{\mu\nu\lambda}=\frac{\alpha\kappa\theta}{3}\left(\Sigma^{\mu\nu}U^{\lambda}-\Sigma^{\mu\lambda}U^{\nu}-2\Sigma^{\nu\lambda}U^{\mu}+\frac{1}{\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\rho}\Sigma^{\mu}{}_{\alpha}U_{\rho}-\frac{1}{\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\rho}\Sigma_{\alpha\rho}U^{\mu}\right) \tag{C.0.12}$$

Observa-se que mesmo a equação dinâmica obtida para $q^{\mu\nu\lambda}$ sendo diferente daquela obtida no capítulo 4, ela obedece às mesmas condições que são exigidas para o tensor $q^{\mu\nu\lambda}$, ou seja, $q^{\mu}{}_{\mu} = 0$ e que $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\tau} q^{\mu\nu\lambda} = 0$, além da antissimetria diante desse fato podemos assumir que o procedimento mais seguro é aquele realizado na seção 4.2, uma vez que partimos do pressuposto que as componentes irredutíveis da torção não são necessariamente independentes.

REFERÊNCIAS

[1] I. S. Newton., “*Philosophiae naturalis principia mathematica*”, Londres, (1687).

[2] A.Einstein, H.A.Lorentz, H.Weyl e H.Minkoswki, *"The Priciple of Relativity"*, Mineola, Nova Iorque, Editora Dover, (1952) .

[3] F.W.Hehl, P.von der Heyde, G.D.Kerlick e J.M.Nester, *"General relativity with spin and torsion: Foudations and prospects"*, Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 393.

[4] F.W. Hehl, P.von der Heyde e G.D.Kerlick, *"General relativity with spin and torsion and its deviations from Einstein's theory"*, Phys. Rev. **D10** (1974) 1066.

[5] F.W. Hehl, *"Spin and Torsion in General Relativity: I. Foundations"*, Gen. Relat. Gravit. **4** (1973) 333 .

[6] W.Arkuszewski, W.Kopczynski, V.N.Ponomariev, *"On the linearized Einsten-Cartan theory"*, Ann. Inst. Henri Poincaré **21** (1974) 89.

[7] A. M. Trautman, *"Einstein-Cartan Theory"*, Encyclopedia of Mathematical Physics, Oxford: Elsevier **2** (2006) 189.

[8] S. Capozziello, G. Lambiase e C. Stornaiolo, *"Geometric classification of the torsion tensor of space-time"*, Annalen der Physik **10** (2001) 713 .

[9] G. de Berredo- Peixoto, J.A. Helayel-Neto, I.L.Shapiro, *"On the concistency of a Fermion-Torsion effective theory"*, JHEP **31** (2000) 31062299.

[10] A. S. Belyaev, I.L.Shapiro, *"The action for the (propagating) torsion and the limits on the torsion parameters for present experimental data"*, Phys. Lett. **B425** (1998) 246.

[11] J.A.Helayel-Neto, A. Penna-Firme e I.L. Shapiro, *"Conformal symmetry, anomaly and effective action for metric-scalar gravity with torsion"*, Phys. Lett. **B479** (2000) 411 .

[12] I.L.Buchbinder e I.L.Shapiro, *"On the renormalization of models of quantum field theory in an external gravitational field with torsion "*, Phys. Lett. **B151** (1985) 263.

[13] H.Weyl, *"Elektron und Gravitation. I"*, Zeitschrift fur Physik **56** (1929) 330.

[14] H.Weyl, *"A Remark on the Coupling of Gravitation and Electron"*, Phys. Rev. **77** (1950) 699.

[15] A.M. Trautman, *"On the structure of the Einstein- Cartan equations"*, Symp. Math. **12** (1973) 139.

[16] R.Penrose, *"Spinors and torsion in general relativity"*, Found. of Phys. **13** (1983) 325.

[17] T.W.B. Kibble, *"Lorentz Invariance and the gravitational field"*, J. Math. Phys. **2** (1961) 212.

[18] D.W. Sciama, *"On the analogy between charge and spin general relativity "*, In: (volume dedicated to L. Infeld) Recent Developments in General Relativity, Oxford: Pergamon Press and Warzawa: PWN (1962) 415.

[19] M.O.Ribas e G.M.Kremer, *"Fermions fields in Einstein-Cartan theory and the accelerated-decelerated transition in a primordial universe"*, Graviton and Cosmology **16** (2010) 173.

[20] G.D. Kerlick, *"Cosmology and particle pair production via gravitational spin-spin interaction in the Einstein-Cartan-Sciama-Kibble theory of gravity"*, Phys. Rev. **D12** (1975) 3004.

[21] M. Gasperini, *"Spin-dominated inflation in the Einstein-Cartan theory "*, Phys. Rev Lett. **56** (1986) 2873.

[22] I.L.Shapiro, *"Physical Aspects of the Space-Time Torsion"*, Phys. Rep. **357** (2002) 113.

[23] A. O. Barut e I. H. Duru, *"Exact solutions of the Dirac equation in spatially flat Robertson-Walker space-times"*, Phys. Rev. **D36** (1987) 3705.

[24] M.O.Ribas, F.P.Devecchi e G.M.Kremer, *"Fermions as sources of accelerated regimes in cosmology"*, Phys. Rev. **D72** (2005) 123502.

[25] M.O.Ribas, F.P.Devecchi e G.M.Kremer, *"Cosmological model with no-minimally coupled fermionic field"*, Europhys. Lett. **81** (2007) 19001.

[26] N. Poplawski, *"Matter-Antimatter asymmetry and dark matter from torsion"*, Phys. Rev. **D83** (2011) 084033 .

[27] N. Poplawski, *"Cosmological constant from quarks and torsion"*, Annalen der Physik **523** (2011) 291.

[28] J. Weyssenhoff e A.Raabe, *"Relativistic dynamics of spin fluids and spin particles"*, Acta Phys. Pol. **9** (1947) 7.

[29] R.Rits, M.Lavorgna, G.Platania e C. Stornaiolo, *"Charged spin fluid in the Einstein-Cartan theory"*, Phys. Rev. **D31** (1985) 1854.

[30] W. Kopczynski, *"A non-singular universe with torsion"*, Phys. Lett. **39A** (1972) 219 .

[31] A.M. Trautman, *"Spin and torsion may avert gravitational singularities"*, Natural Physical Science **242** (1973) 7.

[32] J.Ray, L.L.Smalley, *"Perfect fluids in the Einstein-Cartan theory"*, Phys. Rev. **D26** (1982) 2615.

[33] J.Ray, L.L.Smalley, *"Spinning fluids in the Einstein-Cartan theory"*, Phys. Rev. **D27** (1983) 1383.

[34] J.Ray, L.L.Smalley, *"Concistency relations for spinning matter in gravitational theories"*, Phys. Rev. **D34** (1986) 3268.

[35] W. Kopczynski, *"Lagrangian dynamics of particles and fluids with intrinsic spin in Einstein-Cartan space-time"*, Phys. Rev. **D34** (1986) 352.

[36] N. Poplawski , *"Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation "*, Phys. Lett. **B694** (2010) 181.

[37] M.M.Som, M.L.Bedran e E.P.Vasconcellos-Vaidya, *"Spin dynamics in general relativity "*, Phys. Lett. **A117** (1986) 169.

[38] M.M.Som, M.L.Bedran e E.P.Vasconcellos-Vaidya, *"Inhomogeneous cosmology with spinning fluid"*, IL Nuovo Cimento **102B** (1988) 573.

[39] Y.N.Obukhov e V.A.Korotky, *"The Weyssenhoff fluid in Einstein-Cartan theory"*, Class. Quantum Grav. **4** (1987) 1633.

[40] G. de Berredo-Peixoto e E.A. de Freitas, *"On the torsion effects of a relativistic spin fluid in early cosmology"*, Class. Quantum Grav. **26** (2009) 175015 .

[41] L.H.Ryder, *"Quantum Field Theory"*. (Cambridge University Press 1985, (1996)).

[42] I.L.Buchbinder , S.D.Odintsov and I.L.Shapiro, *"Effective Action in Quantum Gravity"* (IOP Publishing - Bristol, (1992)).

[43] S.Holst, *"Barbero's hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action"*, Phys. Rev. **D53** (1996) 5966 .

[44] A. Perez e C. Rovelli, *"Physical effects of the Immirzi parameter in loop quantum gravity"*, Phys. Rev. **D73** (2006) 044013 .

[45] G. de Berredo-Peixoto, L. Freidel, I.L. Shapiro and C.A. de Souza, *"Dirac fields, torsion and Barbero-Immirzi parameter in cosmology"*, JCAP**06** (2012) 017.

[46] M. Peskin, D.Schroeder, *"An introduction to Quantum Field Theory"*. (Westview Press, (1995)).

[47] G. de Berredo-Peixoto, *"A Note on the Heat Kernel method applied to Fermions"*, Mod.Phys.Lett.A,**16** (2001) 2463.

[48] S. Mercuri, *"Fermions in Asthekar-Barbero connections formalism for arbitrary values of the immirzi parameter"*, Phys. Rev. **D73** (2006) 084016 .

[49] I.L.Shapiro e P.M. Teixeira, *"Quantum Einstein-Cartan theory with the Holst term"*, Class. Quantum Grav. **31** (2014) 185002 .

[50] L.Freidel, D. Minic e T. Takeuchi, *"Quantum gravity, torsion, parity violation and all that"*, Phys. Rev. **D72** (2005) 104002.

[51] S. Alexandrov, *"Immirzi parameter and fermions with non-minimal coupling"*, Class. Quantum Grav. **25** (2008) 145012.

[52] V. Taveras e N. Yunes, *"Barbero-Immirzi parameter as a scalar field: K-inflation from loop quantum gravity?"*, Phys. Rev. **D78** (2008) 064070.

[53] G. de Berredo-Peixoto e C.A. de Souza, *"On the action for Weyssenhoff spin fluid and the Barbero-Immirzi parameter "*, (2015) arXiv: 1506.09071.