Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Thiago da Silva Adão

Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas

Juiz de Fora

2013

Thiago da Silva Adão

Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso

Juiz de Fora

2013

Adão, Thiago da Silva.

Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas / Thiago da Silva Adão. - 2013.
90. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Probabilidade.
I. Título.

CDU 51

Thiago da Silva Adão

Ensino de Probabilidade através de Jogos com Dados e Moedas

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso
(Orientador)
PROFMAT - UFJF

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
PROFMAT - UFJF

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira
UFSJ

Juiz de Fora, 17 de Agosto de 2013.

AGRADECIMENTOS

À Deus que me guardou durante esses anos de estudo.

À minha família que me apoiou e aceitou as horas que estive distante.

À Sofia, minha inspiração.

Aos meus professores e amigos de estudos pelo compartilhamento de seus conhecimentos e pelo companheirismo. Em especial ao professor Crocco pelo tempo e atenção.

À todas as pessoas que fizeram do Profmat uma realidade e assim estão contribuindo significativamente para o desenvolvimento da educação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esse trabalho é voltado para professores e alunos do ensino médio. O texto destaca a importância do conceito de probabilidade no dia a dia e no Enem. Através do uso de jogos como moedas e dados é proposta uma aula dinâmica para introdução ao estudo probabilidade. Nesse sentido foram desenvolvidos sete grupos de fichas com objetivo de motivar, conceituar, fixar o conceito e tratar das técnicas que chamaremos aqui de Contagem, Árvore de Probabilidades, Diagrama e Cadeias de Markov. Palavras-Chave: Matemática. Probabilidade.

ABSTRACT

This work is aimed at teachers and high school students. The text highlights the importance of the concept of probability in everyday life and in Enem. Through the use of games as coins and data is proposed for a class dynamic introduction to the study of probability. Accordingly we have developed seven groups of sheet in order to motivate, conceptualize, establish the concept and techniques that address the chamares here Counting, Probability Tree Diagram and Markov Chains.

Key-words:Mathematics. Probability.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Para que serve isso professor? Essa é uma pergunta clássica e, geralmente, contestatória dos alunos da educação básica para os professores de matemática. Alguns professores respondem "é para você passar de série"outros "é para você ser aprovado no vestibular"ou "para você ter mais conhecimentos". A primeira geralmente dada em colégios e a segunda em cursinho pré-vestibular. Este questionamento é pertinente e, sempre que possível, o pofessor deve estar atento e procurar responder de forma que o aluno perceba a importância do estudo do conceito e das suas propriedades.

É indiscutível a importância do estudo para o enriquecimento cultural do indivíduo. Entretanto, uma aula dinâmica pode tornar o processo de ensino aprendizagem mais atraente e significativo.

O objetivo desse trabalho é a elaboração de atividades usando jogos com dados e moedas para a introdução ao estudo de probabilidade. Nesse sentido, o texto traz dois tipos de fichas: do aluno e do professor. A primeira com proposta de atividades e a segunda com orientações sobre as aplicações das mesmas. Esta proposta torna o aluno parte ativa do processo ensino aprendizagem.

O trabalho começa destacando aspectos relevantes associados à presença do conceito na vida cotidiana e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O capítulo seguinte contém as fichas, que por sua vez conceituam probabilidade e trabalham as técnicas de Contagem,a Árvore de Probabilidade, o Diagrama e, associada ao Maxima, as Cadeias de Markov. Em seguida, discutimos as vantagens de cada técnica de resolução e resolvemos o problema do jogo motivador.

Para o entendimento desse trabalho é necessário o conhecimento de análise combinatória, porcentagem, operações básicas com números reais e multiplicação de matrizes. Abaixo duas representações importantes:

Combinação de n, p a p

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Permutação de n elementos, com repetição de $n_1, n_2, ...$

$$P_n^{n_1, n_2, ...} = \frac{n!}{n_1! n_2! ...}$$

1 A IMPORTÂNCIA DO CONCEITO DE PROBABILIDADE

Intuitivamente o conceito de probabilidade é utilizado no dia a dia. Muitas pessoas, por exemplo, têm o habito de olhar para o céu e, pelos tipos de nuvens, estimar se vai chover ou não.

Algumas doenças são influenciadas por fatores hereditários, outras têm suas chances de ocorrer baseadas em alguns genes. Um caso bastante divulgado na mídia foi o da atriz "Angelina, de 37 anos, que descobriu ter um 'defeito' no gene chamado BRCA1. Os médicos disseram que ela tinha 87% de chances de desenvolver um câncer de mama, e 50% de ter um câncer no ovário."[3]

Em um jogo de par ou impar com as duas mãos quem escolher par tem mais chances de ganhar. Pois são 61 resultados pares e 60 resultados ímpares.

Um bom exemplo do uso da probabilidade foi o utilizado na Mega-Sena. Os prêmios vêm sempre na casa dos milhões, entretanto ganhar não é algo fácil. Uma pessoa que faz uma aposta de 6 números gasta R$2,00 e tem 1 chance em 50.063.860 de ganhar o prémio máximo (sozinho ou não). Para aumentar suas chances para 1 em 238.399, a pessoa precisa aplicar R$420,00 e jogar 10 números. O maior valor possível em uma aposta é de R$ 10.010,00 para jogar em 15 números e ter 1 chance em 10.003. [8]

Aprender probabilidade permite o posicionamento mais adequado perante questões do cotidiano. Mas não apenas por isso, esse conceito é altamente recorrente em questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). (Criado em 1998, com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao final da educação básica. Em 2009 passou a ser a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior).[10]

> O exame é uma forma de avaliação da educação básica e também é "o principal meio para o estudante brasileiro conseguir uma vaga numa faculdade pública, por meio do Sisu (Sistema de Seleção Unificada) que é adotado por 85 universidades, ou uma bolsa de estudos numa faculdade privada, por meio do Prouni (Programa Universidade para Todos)."[2]

Abaixo uma questão retirado da prova do ENEM aplicada em 2012.

> José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.
>
> Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é
>
> a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
>
> b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
>
> c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
>
> d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
>
> e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

De acordo com levantamento da Revista Veja [9], 13 das 180 questões de matemática nas provas do ENEM de 2009 a 2012 envolviam o tema probabilidade. O que torna esse tema o sexto conteúdo mais cobrado na área de matemática.

Os Parâmetros Curriculáres Nacionais-Matemática também tratam desse conceito

> Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). [12]

2 DOS OBJETIVOS, ROTEIROS E FICHAS

2.1 Motivação

2.1.1 Objetivo:

- Despertar o interesse do aluno.

2.1.2 Roteiro:

- Os alunos formam duplas;

- Os alunos jogam e preenchem as fichas;

- O professor preenche sua ficha.

2.1.3 Ficha do aluno:

Vamos brincar?

Jogo 01: Moeda x Dado

i - Jogam duas pessoas, um escolhe moeda e o outro escolhe dado; Cada vez que a moeda e o dado são jogados simultaneamente para alto temos um turno;

ii - Se sair 4 caras ou 4 coroas, independente da ordem, a moeda ganha;

iii - Se sair um mesmo número 3 vezes em qualquer ordem, o dado ganha.

Esta atividade se divide em três etapas:

1 - Respondam as perguntas sobre o jogo;

2 - Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo;

3 - Verifique se as respostas dadas inicialmente estão de acordo com os dados anotados

na tabela.

a) Quem vai ganhar?

b) Qual o número mínimo de turnos pra acabar o jogo?

c) Qual o número máximo de turnos pra acabar o jogo?

d) É possível dar empate?

e) Quem tem mais chances de ganhar?

Turno	Face moeda	Face dado
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Turno	Face moeda	Face dado
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

2.1.4 Ficha do professor

Nesse momento o professor apenas coleta os dados necessários para o preenchimento da tabela abaixo:

Vitórias moeda	Vitórias dado	Empate	Menor qtd. turnos	Maior qtd. turnos

OBSERVAÇÃO: a resolução deste exercício é a ultima atividade.

2.2 Conceituação

2.2.1 Objetivos:

- Contextualizar historicamente o surgimento do estudo de probabilidade;

- Diferenciar favoritismo de previsão de vencedor;

- Levantar a discussão sobre a importância de posicionamento perante uma situação problema;

- Discutir e definir probabilidades e os conceitos associados.

2.2.2 Roteiro

- Os alunos especulam, respondem, jogam e anotam os resultados;

- O professor corrige.

2.2.3 Ficha do aluno:

Jogo 02:

i - Jogam 2 pessoas A e B;

ii - Cada vez que o dado é jogado para cima temos um turno;

iii - Se sair número primo, A ganha;

iv - Se sair número composto B ganha;

v - Se não sair número primo ou número composto dá empate.

Esta atividade se divide em três etapas:

1 - Respondam as três perguntas sobre o jogo;

2 - Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo;

3 - Verifique se as respostas dadas inicialmente estão de acordo com os dados escritos na tabela.

a) Quem vai ganhar?

b) Quem tem mais chances de ganhar?

c) Algum número pode representar as chances de vencer de cada jogador? Qual?

Partidas	A vence	B Vence	Empate
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

2.2.4 Ficha do proforessor

Jogo 02:

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada vez que o dado é lançado temos um turno;

iii. Se sair número primo, A ganha;

iv. Se sair número composto B ganha;

v. Se não sair número primo ou número composto dá empate.

a) Quem vai ganhar?

b) Quem tem mais chances de ganhar?

c) Algum número pode representar as chances de vencer de cada jogador? Qual?

SOLUÇÃO:

a) Quem vai ganhar?

Em alguns jogos o resultado é certo, ou seja, antes mesmo do início da partida já se sabe quem será o vencedor. Mas esse não é o caso do jogo de dados proposto, portanto não se pode afirma que será o vencedor. A outra pergunta surge naturalmente:

b) Quem tem mais chances de ganhar?

Várias pessoas, algumas delas com notável gosto por jogos, fizeram este questionamento ao longo da história. Um deles foi Girolamo Cardano (1501-1576), que intencionado em aumentar suas possibilidades de vitória escreveu, mas não publicou, "um pequeno manual de jogador intitulado *'Liber de ludo aleae'* (O livro dos jogos de azar)"[4].

> "Na parte técnica do livro (citado acima), Cardano discutiu equiprobabilidade, esperança (o momento correto da aposta a ser feita por um jogador que tem probabilidade p de ganhar a importância s), estabeleceu a lei $p_n = p^n$, que dá a probabilidade de que um evento de probabilidade p ocorrer independentemente n sucessivas vezes, achou tábuas de probabilidade para dados e usou a chamada lei dos grandes números (de modo rudimentar) - questões em que foi o pioneiro". [4]

Observe que no jogo 02 temos: três números primos (2, 3 e 5), dois números compostos (4 e 6) e o 1 que não é composto nem primo. Podemos apostar que Cardano escolheria ser o jogador A, que tem mais chances de ganhar, afinal entre os seis resultados possíveis três são favoráveis.

c) Algum número pode representar as chances de vencer de cada jogador? Qual?

A ideia de "chances"de ganhar é associada ao conceito matemático chamado de probabilidade.

As bases dessa teoria surgiram de um curioso episódio contado por DOMINGUES:

> "O cenário agora era a França, onde o requintado nobre francês Antoine Gambaud, o Chevalier de Méré, como Cardano um inveterado jogador estava às voltas com problemas como: 'Dois jogadores de igual habilidade resolvem interromper o jogo antes do término. Sendo conhecido o número de pontos de cada um até essa altura, em que proporção devem ser divididas as apostas?'. Apesar de possuir várias ideias aritméticas sobre o assunto, fruto de sua experiência e perspicácia, Gambaud decidiu recorrer ao grande matemático francês Blaise Pascal (1623-1662). Este se entusiasmou tanto com as questões que até iniciou correspondências a respeito com seu conterrâneo Pierre de Fermat, resultando desse episódio as bases da moderna teoria das probabilidades". [5]

Intuitivamente no jogo 2 podemos encontras as probabilidades, isto é, os números que representarão a chance de cada jogador ganhar. O total de resultados possíveis é 6, os favoráveis a A são 3, favoráveis à B são 2 e favorável ao empate é 1. Assim:

Probabilidade de A vencer é de 3 em 6, isto é, 3/6 ;

Probabilidade de B vencer é de 2 em 6, isto é, 2/6;

Probabilidade de empate é de 1 em 6, isto é, 1/6.

FORMALIZAÇÃO Abaixo definimos conceitos importantes:

Experimentos determinísticos: são aqueles, que realizados nas mesmas condições, produzem praticamente os mesmos resultados;

Experimentos aleatórios: são aqueles que repetidas sob mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes;

Espaço amostral: é o conjunto de todos os resultados possíveis, representaremos aqui por S;

Evento: qualquer subconjunto do espaço amostral;

Probabilidade: é uma função que associa a cada evento A um número P(A) de forma que:

- Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(S) = 1$;
- Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \phi$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Modelo equiprobabilístico: é um modelo em que cada evento unitário tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Probabilidade de um evento em modelo equiprobabilístico: é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento (#A) e o número de elementos do espaço amostral (#S), ou seja:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

De fato, o jogo 2 é um modelo equiprobabilístico pois as chances de ocorrer o 1 é 1/6, que é a mesma de sair 2, 3, 4, 5 ou 6. No jogo, podemos identificar dois elementos importantes: o espaço amostral S={1,2,3,4,5,6} e os três eventos, a saber, A={2,3,5}, B={4,6} e E={1}.

2.3 Fixando o conceito

2.3.1 Objetivo:

- Fixar o conceito de probabilidade;

- Discutir e definir o conceito de probabilidade do complementar e probabilidade do vazio;

- Discutir e conceituar probabilidade condicional.

2.3.2 Roteiro:

Jogo 03A:

- Os alunos jogam e anotam os resultados na tabela;

- O professor calcula as probabilidades como exemplo.

Jogo 03B:

- Os alunos jogam e anotam os resultados na tabela;

- Os alunos calculam as probabilidades;

- O professor corrige.

Jogo 03C:

- Os alunos jogam e anotam os resultados na tabela;

- Os alunos calculam as probabilidades dos itens "a", "b"e "c", depois o professor corrige;

- O professor faz o item "d"como exemplo;

- Os alunos fazem o item "e", depois o professor corrige.

2.3.3 Ficha do aluno:

Jogo 03A:

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número de 1 a 12;

iii. Um dado normal é lançado duas vezes e os resultados são somados.

iv. Ganha quem acertou o resultado da soma.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Soma	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de sair?

Calcule a probabilidade da soma dar:

a) 4

b) 9

c) 1

d) 7

e) 12

f) Um número diferente de 12

g) Um número diferente de 7

Jogo 03B

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número entre 1 e 36;

iii. Um dado normal é lançado para cima duas vezes e os resultados são multiplicados então temos uma partida.

iv. Ganha quem acertou o resultado do produto.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Produto	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de sair?

Calcule a probabilidade do produto ser:

a) 4

b) 1

c) 21

d) Múltiplo de 2 e de 3

e) Múltiplo de 4 ou de 5

Jogo 03C:

i. Jogam duas pessoas,

ii. Cada jogador escolhe um número de 2 a 6;

iii. Dois dados são jogados para cima e os resultados são somados;

iv. Ganha o jogo a pessoa que escolhe um divisor da soma.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Soma	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Responda as perguntas abaixo:

a) Por que o número 1 não faz parte das opções de escolha dos jogadores?

b) O jogo pode dar empate?

c) Qual a probabilidade de quem escolheu 5 ganhar?

d) Um jogador escolheu 3, qual a probabilidade dele ganhar se em um dos dados o resultado foi 4?

e) Um jogador escolheu 2, qual a probabilidade dele ganhar se em um dos dados o resultado foi 5?

2.3.4 Ficha do professor:

Jogo 03A: Soma dos dados

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número de 1 a 12;

iii. Um dado normal é lançado duas vezes e os resultados são somados.

iv. Ganha quem acertou o resultado da soma. Será que algum valor tem mais chances de sair? Calcule a probabilidade da soma dar:

a) 4

b) 9

c) 1

d) 7

e) 12

f) Um número diferente de 12

g) Um número diferente de 7

SOLUÇÃO: Vamos representar cada partida por pares ordenados (a,b), em que a e b são, respectivamente, os resultados do primeiro do segundo lançamentos. Assim, por exemplo, (3,2) é uma partida em que saiu 3 no primeiro lançamento e 2 no segundo.

Consequentemente o espaço amostral S terá os 36 elementos listados abaixo

$$S = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);$$

$$(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);$$

$$(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);$$

$$(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6);$$

$$(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);$$

$$(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\}$$

Uma maneira mais prática de é escrever $S = \{(a,b); a,b = 1,2,3,4,5 \text{ ou } 6\}$.

a) Soma 4 pode ser obtida de três elementos de S, (1,3);(3,1) e (2,2). Então o evento associado à soma 4 é o subconjunto $A = \{(1,3);(3,1);(2,2)\}$ que tem 3 elementos. Portanto, a probabilidade é:

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \cong 0,083$$

b) Seja B o evento associado à soma 9. Logo B terá 4 elementos: (3,6);(4,5);(5,4) e (6,3). Portanto:

$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 0,111$$

c) Seja C o evento associado à soma 1. O valor 1 nunca vai aparecer, pois o menor soma possível é obtido no evento (1,1), sendo assim, o evento ligado à soma 1 é o subconjunto vazio. Portanto:

$$P(B) = \frac{0}{36} = 0$$

FORMALIZAÇÃO: Nesse item aparece uma intuitiva e importante propriedade de probabilidade:

Se $A = \phi$ então $P(A) = 0$.

Em outra palavras, podemos dizer que se um resultado é impossível de se obter, sua probabilidade é zero.

d) Seja D o evento associado à soma 7. Logo $D = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$. Portanto:

$$P(D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \cong 0,167$$

e) Seja E o evento associado à soma 12. Logo E=(6,6). Portanto:

$$P(E) = \frac{1}{36} \cong 0,027$$

f) Seja F o evento associado à soma diferente de 12, observe que F é a negação do evento E. Assim a probabilidade de F é probabilidade do espaço amostral menos a probabilidade de E.

$$P(F) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \cong 0,972$$

FORMALIZAÇÃO: Nesse item aparece uma propriedade importante de probabilidade:

O conjunto que representa a negação de um evento A é chamado complementar de A e representaremos por A'. Consequentemente $P(A') = 1 - P(A)$.

g) Seja G o evento associado à soma diferente de 7. Com uso da propriedade vista no item anterior, chegamos a:

$$P(G) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cong 0,833$$

SUGESTÃO: Outra forma de resolver este exercício é listando os possíveis resultados como na tabela abaixo. Ela deixa claro quantas vezes cada resultado aparece. É fácil ver, por exemplo, que a soma 8 aparece 5 vezes e, portanto, tem probabilidade $5/36$ de ocorrer.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 1: Tabela de resultados possíveis.

Jogo 03B: Jogo do produto dos dados

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número entre 1 e 36;

iii. Um dado normal é lançado duas vezes e os resultados são multiplicados.

iv. Ganha quem acertou o resultado do produto.

Será que algum valor tem mais chances de sair?

Calcule a probabilidade do produto ser:

a) 4

b) 1

c) 21

d) Múltiplo de 2 e de 3.

e) Múltiplo de 4 ou de 5.

SOLUÇÃO:

O processo de escrever ou identificar detalhadamente o espaço amostral e o evento torna o cálculo da probabilidade mais trabalhoso. Por isso, sempre que não houver perda de sentido, nos preocuparemos apenas com o número de elementos desses conjuntos.

Vamos à tabela dos possíveis resultados.

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Figura 2: Tabela de resultados possíveis.

a) O resultado 4 aparece 3 vezes: 4x1, 2x2 e 1x4. Como no exercício anterior temos 36=6x6 possibilidade de pares de resultados. Portanto, a probabilidade é $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \cong 0,083$.

b) O resultado 1 aparece 1 vez. Portanto a probabilidade é $\frac{1}{36} \cong 0,028$.

c) O resultado 21=3x7, não aparece, portanto a probabilidade é $0/36 = 0$.

d) Para ser múltiplo de 2 e de 3 é necessário e suficiente que seja múltiplo de 6. Na tabela temos quatro múltiplos de 6: 6 (que aparece 4 vezes), 12 (que aparece que aparece 4 vezes), 18 (que aparece 2 vezes), 24 (que aparece 2 vezes), 30 (que aparece 2 vezes) e 36 (que aparece 1 vez). Portanto temos 4+4+2+2=12 casos favoráveis e, consequentemente, a probabilidade é $\frac{15}{36} = \frac{5}{12} \cong 0,417$.

e) São sete os múltiplos de 4: 4 (que aparece 3 vezes), 8 (que aparece 2 vezes), 12 (que aparece 4 vezes), 16 (que aparece 1 vez), 20 (que aparece 2 vezes), 24 (que aparece 2 vezes) e 36 (que aparece 1 vez). Logo há 3+2+4+1+2+2+1=15 casos favoráveis. Já os múltiplos de 5 são: 5 (que aparece 2 vezes), 10 (que aparece 2 vezes), 15 (que aparece 2), 20 (que aparece 2 vezes), 25 (que aparece 1 vez) e 30 (que aparece 2 vezes). Logo há 2+2+2+2+1+2=11 casos favoráveis. Na hora de determinar a quantidade total de casos favoráveis é preciso levar em consideração o fato do número que é múltiplo comum de 4 e 5 (a saber: 20), que aparece 2 vezes. Assim o total de casos favoráveis é 15+11-2=24. Logo a probabilidade é de $\frac{24}{36} \cong 0,667$.

FORMALIZAÇÃO:

Se A e B são dois eventos então $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

Jogo 03C: Jogo do dado, divide ou não divide (Soma):

i. Jogam duas pessoas,

ii. Cada jogador escolhe um número de 2 a 6;

iii. Dois dados são lançados e os resultados são somados;

iv. Ganha o jogo a pessoa que escolhe um divisor da soma.

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Responda as perguntas abaixo:

a) Por que o número 1 não faz parte das opções de escolha dos jogadores?

b) O jogo pode dar empate?

c) Qual é a probabilidade de quem escolheu 5 ganhar?

d) Um jogador escolheu 3, qual é a probabilidade dele ganhar se em um dos dados o resultado foi 4?

e) Um jogador escolheu 2, qual é a probabilidade dele ganhar se em um dos dados o resultado foi 5?

SOLUÇÃO:

a) O número 1 é divisor de qualquer número, assim quem escolhesse o 1 seria vencedor independente do resultado da soma. Por isso ele não faz parte das opções.

b) Sim. Suponhamos que um dos jogadores escolha o número 2 e outro o número 3, se o resultado da soma for 6, por exemplo, os dois jogadores acertaram o divisor e, portanto, o jogo empata.

c) A probabilidade de vitória depende dos possíveis resultados de soma. Por isso vamos usar novamente a tabela para a soma dos resultados da dois dados

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 3: Tabela de resultados possíveis.

Entre as somas há dois múltiplos de 5: 5 (que aparece 4 vezes) e 10 (que aparece 3 vezes). A probabilidade de quem escolheu 5 ganhar é a mesma de sair um múltiplo de 5, ou seja, $\frac{4+3}{36} = \frac{7}{36} \cong 0,194$.

d) As probabilidades calculadas até agora foram *a priori*, isto é, foram calculadas antes que a experiência se realizasse efetivamente. Por exemplo, a probabilidade *a priori* de um dado não viciado exibir um resultado primo é de $3/6$.

Suponhamos que alguém informe que o resultado após o lançamento do dado não foi 4, então a probabilidade de dar um número primo passa a ser $3/5$, pois o espaço amostral mudou. Esse é um exemplo de probabilidade *a posteriori* ou *probabilidade condicional.* Adaptado de [4]. Visto isso, vamos aos cálculos.

É certo que o número 4 apareceu em um dos lançamentos, os casos que isso acontece são 11, a saber:

5=4+1; 6=4+2; 7=4+3; 8=4+4; 9=4+5; 10=4+6; 5=1+4; 6=2+4; 7=3+4; 9=5+4; 10=6+4.

Mas apenas quatro delas (6=2+4;6=4+2;9=4+5 e 9=5+4) são múltiplos de 3. Portanto, a probabilidade é $\frac{4}{11} \cong 0,364$.

e) Análogo ao item anterior encontramos 11 casos em que o número 5 é uma das parcelas da soma. Destes cinco (6=5+2;8=5+3;10=5+5;6=1+5;8=3+5) são pares. Portanto, a probabilidade é $\frac{5}{11} \cong 0,455$.

2.4 Contagem

2.4.1 Objetivo:

- Desenvolver técnicas de resolução de problemas de probabilidade utilizando contagem.

2.4.2 Roteiro:

Jogo 04A:

- Os alunos jogam e anotam os resultados na tabela;

- O professor calcula as probabilidades dos itens a, b e c como exemplo;

- Os alunos fazem os itens d, e e f, depois o professor corrige.

Jogo 04B:

- Os alunos jogam e anotam os resultados na tabela;

- O professor calcula as probabilidades dos itens a e b como exemplo;

- Os alunos fazem os itens c, d e e, depois o professor corrige.

2.4.3 Ficha do aluno:

Jogo 4A: Quantas caras?

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número de 0 a 5;

iii. Cinco moedas são jogadas simultaneamente para o alto, então temos uma partida.

iv. Ganha o jogador que acertar o número de caras que sair na partida.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Resultado	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Qual a probabilidade de ganhar o jogador que escolheu:

a) 0? b) 1? c) 2? d) 3? e) 4? f) 5?

Jogo 4B: Quantos repetidos?

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um resultado: zero repetição, 1 par, 2 pares, 1 trinca ou 1 quadra;

iii. Quatro dados são jogados simultaneamente para o alto, então temos uma partida.

iv. Ganha o jogador que acertar o resultado da partida.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Resultado	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Qual a probabilidade de ganhar o jogador que escolheu:

a) 1 par?

b) 2 pares?

c) 1 trinca?

d) 1 quadra?

e) Zero repetição?

2.4.4 Ficha do professor:

Jogo 04A: Quantas caras?

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número de 0 a 5;

iii. Cinco moedas são lançadas simultaneamente.

iv. Ganha o jogador que acertar números de caras que sair.

Qual é a probabilidade de ganhar o jogador que escolheu:

a) 0? b) 1? c) 2? d) 3? e) 4? f) 5?

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

SOLUÇÃO:

É fácil ver que esse modelo é equiprobabilístico quando consideramos S={(a,b,c,d,e);a,b,c,d,e = cara ou coroa}. Assim, por exemplo, $\{(k, k, c, c, k)\}$ e $\{(c, c, c, c, c), (k, k, k, k, k)\}$, em que k é cara e c coroa, são eventos.

Para cada moeda temos 2 possibilidades de resultados (cara ou coroa), como são 5 moedas segue que o espaço amostral tem $2^5 = 32$ elementos. Existe apenas 1 combinação onde teremos zero caras (quando todos os resultados são coroas). Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{1}{32} \cong 0,031$$

b) Um resultado favorável é, por exemplo, kcccc. Podemos permutar os elementos desse resultado, assim teremos $P_5^4 = 5$ resultados favoráveis e a probabilidade será:

$$\frac{5}{32} \cong 0,156$$

c) Um resultado favorável é, por exemplo, kkccc. Podemos permutar os elementos desse resultado, assim teremos $P_5^{2,3} = 10$ resultados favoráveis e a probabilidade será:

$$\frac{10}{32} = \frac{5}{16} \cong 0,312$$

d) Um resultado favorável é, por exemplo, kkkcc. Podemos permutar os elementos desse resultado, assim teremos $P_5^{3,2}10$ resultados favoráveis e a probabilidade será:

$$\frac{10}{32} = \frac{5}{16} \cong 0,312$$

e) Um resultado favorável é, por exemplo, kkkkc. Podemos permutar os elementos desse resultado, assim teremos $P_5^4 = 5$ resultados favoráveis e a probabilidade será:

$$\frac{5}{32} \cong 0,156$$

f) Existe apenas 1 combinação onde teremos 5 caras. Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{1}{32} \cong 0,031$$

Podemos então concluir que quem escolher 2 ou 3 tem mais chances de ganhar.

Jogo 04B: Quantos repetidos? (Adaptado de [4].)

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um resultado: zero repetição, 1 par, 2 pares, 1 trinca ou 1 quadra;

iii. Quatro dados são lançados simultaneamente.

iv. Ganha o jogador que acertar o resultado.

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Qual é a probabilidade de ganhar o jogador que escolheu:

a) 1 par?

b) 2 pares?

c) 1 trinca?

d) 1 quadra?

e) Zero repetição?

SOLUÇÃO:

a) Cada dado tem 6 resultados possíveis, como são 4 dados lançados, o espaço amostral tem $6^4 = 1296$ possibilidades. Vamos ao evento: são $C_{6,1} = 6$ maneiras de formar o par e $C_{5,2} = 10$ maneiras de sair números distintos, que permutados geram $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot P_4^2 = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 720$. Portanto a probabilidade é:

$$\frac{720}{1296} = \frac{5}{9} \cong 0,556$$

b) São $C_{6,2} = 15$ modos de formar dois pares, que permutados geram $C_{6,2} \cdot P_4^{2,2} = 15 \cdot 6 = 90$. Assim a probabilidade é:

$$\frac{90}{1296} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \cong 0,069$$

Observação: um erro comum nesse tipo de exercício é contar dobrado, com o seguinte raciocínio: há 6 modos de escolher o primeiro par e 5 modos de escolher o segundo par, que permutados geram $6 \cdot 5 \cdot P_4^{2,2} = 30 \cdot 6 = 180$. O erro consiste no fato que este pensamento torna um par de 5 e um par de 2 diferente de um par de 2 e um par de 5.

c) São $C_{6,1} = 6$ formas de sair 3 repetidos e $C_{5,1} = 5$ formas de sair o número distinto, que permutados geram $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot P_4^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Assim a probabilidade é:

$$\frac{120}{1296} = \frac{5}{54} \cong 0,093$$

Observação: um erro que pode acontecer nesse tipo de questão é contar casos a menos com o seguinte raciocínio: há $C_{6,2}$ de "escolher"os dois números que irão aparecer, que permutando geram $C_{6,2} \cdot P_4^3 = 15 \cdot 4 = 60$. Neste caso o erro consiste em considerar como iguais os resultados (1,1,1,2) e (2,2,2,1).

Outra solução: há $C_{6,2}$ de "escolher"os dois números que irão aparecer e $C_{2,1}$ modos de escolher, entre os números que aparecem, qual formará trinca, permutando temos $C_{6,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^3 = 15 \cdot 2 \cdot 4 = 120$. Portanto a probabilidade é

$$\frac{120}{1296} = \frac{5}{54} \cong 0,093$$

d) Existem 6 quadras possíveis, assim a probabilidade é:

$$\frac{6}{1296} = \frac{1}{216} \cong 0,005$$

e) São $C_{6,4} = 15$ formas de escolher os 4 resultados distintos, que permutados geram $C_{6,4} \cdot P_4 = 15 \cdot 24 = 360$. Portanto a probabilidade é:

$$\frac{360}{1296} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \cong 0,278$$

2.5 Árvores de probabilidades

2.5.1 Objetivo:

- Discutir probabilidade em modelos não equiprobabilísticos;

- Desenvolver técnicas de resolução de problemas de probabilidade utilizando árvore de probabilidades.

2.5.2 Roteiro:

Jogo 05A:

- O professor calcula as probabilidades como exemplo (é importante destacar que os expoentes que aparecem estão associados a número de vezes que cada face saiu).

Jogo 05B:

- Os alunos calculam as probabilidades;

- O professor corrige.

Jogo 05C:

- Os alunos calculam as probabilidades;

- O professor corrige.

2.5.3 Ficha do aluno:

Nem sempre os modelos considerados são equiprobabilísticos. Veja os exemplos a seguir.

Jogo 05A: O jogo agora é teórico, ganha quem acertar mais perguntas.

Uma moeda é viciada de tal forma que sair cara é duas vezes mais provável que sair coroa. Responda:

a) Qual a probabilidade de cara ganhar em cada lançamento?

b) Qual a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3 no segundo lançamento?

c) Qual a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3 no terceiro lançamento?

d) Qual a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3?

e) Qual a probabilidade de coroa vencer uma melhor de 3?.

Jogo 05B: Sobre uma melhor de 5 com a moeda do exercício anterior, responda:

a) Qual a probabilidade de cara vencer no terceiro lançamento?

b) Qual a probabilidade de cara vencer no quarto lançamento?

c) Qual a probabilidade de cara vencer no quinto lançamento?

d) Qual a probabilidade de cara vencer o jogo?

Jogo 05C: Melhor de três no cara ou coroa, onde cara tem probabilidade p e coroa tem probabilidade q=1-p, qual a probabilidade de cara ganhar?

2.5.4 Ficha do professor:

Jogo 05A: O jogo é teórico. Ganha quem acertar mais perguntas.

Uma moeda é viciada de tal forma que sair cara é duas vezes mais provável que sair coroa. Responda:

a) Qual é a probabilidade de cara ganhar em cada lançamento?

b) Qual é a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3 no segundo lançamento?

c) Qual é a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3 no terceiro lançamento?

d) Qual é a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3?

e) Qual é a probabilidade de coroa vencer uma melhor de 3?.

SOLUÇÃO:

a) Da definição de probabilidade temos que a probabilidade de cara $P(K)$ mais a probabilidade de coroa $P(C)$ é igual a 1. Do enunciado temos: $P(K) = 2 \cdot P(C)$ Assim:

$$P(K) + P(C) = 2 \cdot P(C) + P(C) = 3 \cdot P(C) = 1$$

Logo, $P(C) = 1/3$ e $P(K) = 2/3$

Para responder as demais perguntas deste problema usaremos o recurso da árvore de possibilidades, que consiste em puxar um galho para cada resultado possível até que o jogo chegue ao fim. Veja a construção abaixo, onde K é cara e C coroa.

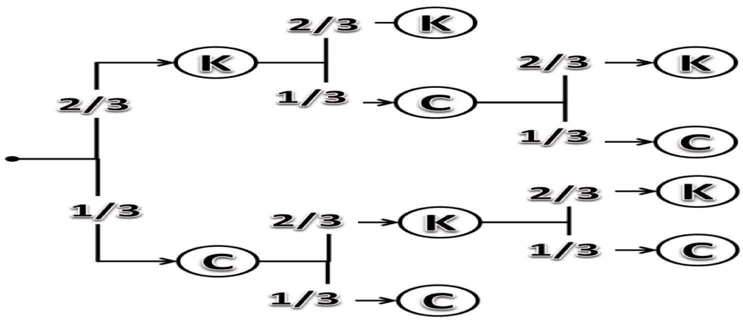

Figura 4: Árvore de possibilidades.

b) Temos apenas um galho que leva a vitória de cara no segundo lançamento, kk (duas vitórias seguidas de cara). Agora basta multiplicar as probabilidades que aparecem nesse galho:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cong 0,444$$

c) Temos dois galhos que levam a vitória de cara no terceiro lançamento, kck ou ckk. Para calcular a probabilidade desse caso multiplicamos as probabilidade de cada galho e depois somamos os resultados

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

d) Cara pode ganhar no segundo ou no terceiro lançamento com os seguintes caminhos: kk, kck ou ckk. Assim a probabilidade será a soma das probabilidades de cada galho:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{20}{27} \cong 0,741$$

e) Nesse caso os galhos são: cc, kcc ou ckc. Portanto a probabilidade é:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{7}{27} \cong 0,259$$

Observação: Os expoentes de 2/3 e 1/3 representam o número de vezes que, respectivamente, saiu cara e coroa em cada galho. Por exemplo: no galho em que cara vence no terceiro turno (kck e ckk) as probabilidades são, respectivamente, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ e $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Fique atento nas atividades seguintes porque esta propriedade pode ser útil.

Jogo 05B: Sobre uma melhor de 5 com a moeda do exercício anterior, responda:

a) Qual é a probabilidade de cara vencer no terceiro lançamento?

b) Qual é a probabilidade de cara vencer no quarto lançamento?

c) Qual é a probabilidade de cara vencer no quinto lançamento?

d) Qual é a probabilidade de cara vencer o jogo?

SOLUÇÃO:

Resolveremos pela árvore de probabilidades, que é uma construção trabalhosa por serem vários lançamentos.

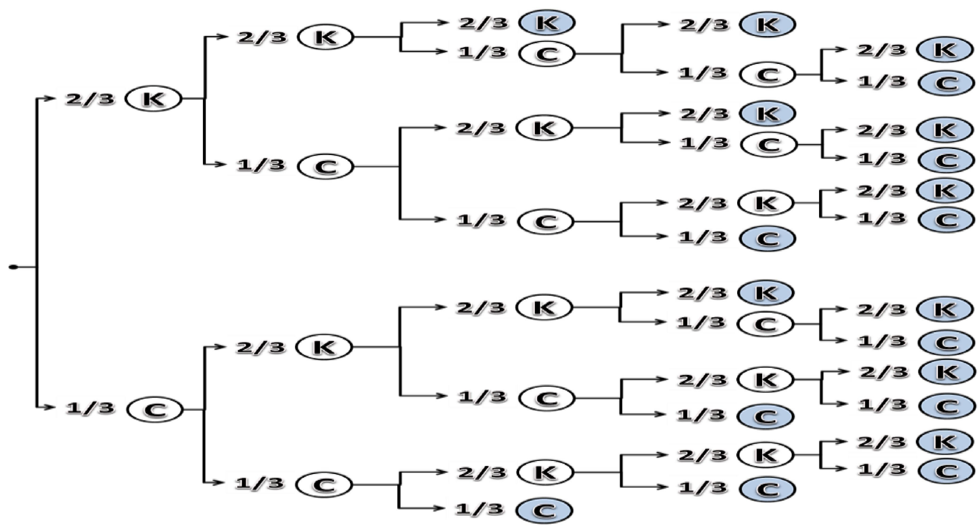

Figura 5: Árvore de possibilidades.

Os círculos com cinza no fundo representam o fim de jogo. Obviamente os círculos cinza com a letra k representam a vitória de cara, assim os galhos favoráveis e suas respectivas probabilidade são:

a) kkk -1 galho pra vencer no terceiro lançamento

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\cong 0,296$$

b) kkck, kckk e ckkk - 3 galhos pra vencer no quarto lançamento

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$$

$$3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{27}\cong 0,296$$

c) kkcck, kckck, kcckk, ckkck, ckckk, cckkk - 6 possibilidade de vitória no quinto lançamento

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{81}\cong 0,198$$

d) Portanto a probabilidade de cara vencer é:

$$\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}\cong 0,79$$

Jogo 05C: Mais um jogo teórico.

Melhor de três no cara ou coroa, onde cara tem probabilidade p e coroa tem probabilidade q=1-p, qual a probabilidade de cara ganhar?

SOLUÇÃO:

A árvore de possibilidades desse problema é bem simples de se construir.

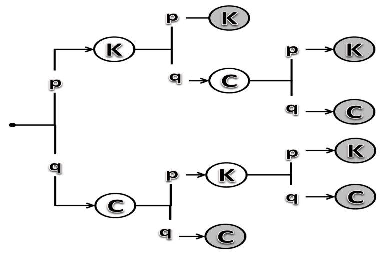

Figura 6: Árvore de possibilidades.

Os galhos que levam a vitória de cara são: kk, kck e ckk. Assim a probabilidade de cara ganhar no segundo lançamento é $p \cdot p = p^2$ e no terceiro lançamento é $p \cdot q \cdot p + q \cdot p \cdot p = 2p^2 \cdot q$. Portanto $p^2 + 2p^2 \cdot q$ representa as chances de cara vencer.

2.6 Diagrama

2.6.1 Objetivo:

- Desenvolver técnicas de resolução de problemas de probabilidade utilizando diagrama.

2.6.2 Roteiro:

Jogo 06A:

- O professor calcula as probabilidades como exemplo.

Jogo 06B:

- Os alunos calculam as probabilidades

- O professor corrige.

2.6.3 Ficha do aluno:

Jogo 06A: Melhor de sete no cara ou coroa, onde cara tem probabilidade p e coroa tem probabilidade q, qual a probabilidade de cara ganhar?

Jogo 06B: Jogo cara ou coroa com diferença de três, em que a probabilidade em cada lançamento de dar cara é p e coroa é q. O jogo acaba com vitória de cara se este abrir 3 pontos de vantagem, com vitória de coroa se este abrir 3 pontos de vantagem ou empatado se não for conseguida diferença de 3 em 10 lançamentos. Qual a probabilidade de cara vencer? E dar empate?

2.6.4 Ficha do professor:

Jogo 06A: Considere uma melhor de sete no cara ou coroa, em que cada lançamento tem probabilidade p de sair cara e probabilidade $q = 1 - p$ de sair coroa, quais as chances de cara ganhar?

SOLUÇÃO:

Este problema pode resolvido pela árvore de possibilidades, entretanto seria muito trabalhoso por isso faremos diferente.

Utilizaremos o procedimento que chamaremos de método do diagrama. Vamos lá: primeiro construiremos uma tabela onde anotaremos as quantidades de possibilidades de placar a cada lançamento.

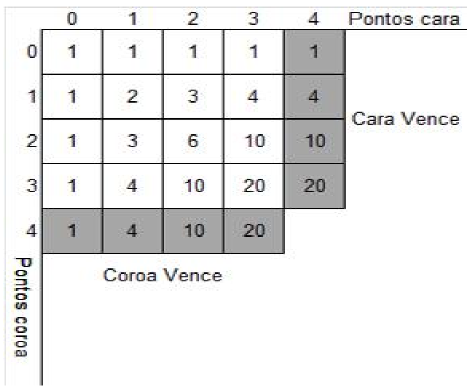

Figura 7: Diagramas de possibilidades.

Os significados dos valores dessa tabela não são difíceis de entender. Representaremos o placar por um par ordenado (k,c), onde k são os pontos de cara e c os pontos de coroa. As células cinzas são para placares de fim de jogo. Exemplificando, temos:

O valor 1 da coluna 1 e linha zero indica que existe 1 modo do jogo ficar (1,0), que é sair cara no primeiro lançamento.

O valor 1 da coluna 2 e linha zero indica que existe 1 modo do jogo ficar (2,0), que é sair cara nos dois primeiros lançamentos.

O valor 2 da coluna 1 e linha 1 indica que existe 2 modos do jogo ficar (1,1), que é sair cara no primeiro lançamento e depois coroa ou sair coroa no primeiro lançamento e cara no segundo.

O valor 3 da coluna 2 e linha 1 indica que existe 3 modos do jogo ficar (2,1), pois pode-se chegar a esse placar de dois modos: resultado anterior era (2,0) e coroa ganhou ou o resultado era (1,1) e cara ganhou. Como existe 1 maneira de chegar em (2,0) e 2 maneiras de chegar em (1,1), teremos 1+2=3 maneiras de chegar em (2,1).

O valor 10 do placar (3,2) origina-se das 4 possibilidades de chegar em (3,1) e depois coroa ganhar somadas com 6 possibilidades de chegar em (2,2) e cara ganhar.

O valor 10 do placar (4,2) origina-se dos 10 possibilidades do placar (3,2) seguidas de uma vitória de cara. De modo análogo, o valor 20 do placar (3,4) se origina das 20 possibilidades do placar (3,3) seguidas da vitória de coroa. Para saber quantos lançamentos foram feitos basta somar os pontos, por exemplo: até o placar (3,1) foram feitos 3+1=4 lançamentos e para o placar (3,4) foram feitos 3+4=7 lançamentos.

Agora, entendida a tabela, é possível calcular a probabilidade de qualquer placar. Vamos calcular, por exemplo, a probabilidade do placar (2,3): pela tabela existem 10 maneiras de chegar a esse placar e em cada uma delas, como observado na atividade 5.3, os expoentes da probabilidade de cara e de coroa serão os número de vezes que esses resultados saíram, ou seja, a probabilidade desse placar é $10p^2q^3$. Outro exemplo é $4p^3$ q que é a probabilidade do placar (3,1).

Cara pode ganhar o jogo com os placares de (4,0), (4,1), (4,2) ou (4,3), que tem as respectivas probabilidades de $1p^4, 4p^4q, 10p^4q^2$ e $20p^4q^3$. Somando as chances de cara, chega-se a:

$$p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^4q^3$$

Observação: este método nada mais é que uma adaptação do famoso triângulo de Pascal. Veja: ao tomar no diagrama a diagonal com que tem os valores 1, 3, 3 e 1, na verdade temos a quarta linha do triângulo $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Jogo 06B: Jogo cara ou coroa com 'diferença de três', em que a probabilidade em cada lançamento de dar cara é p e coroa é $q = 1 - q$. O jogo acaba com vitória de cara se este abrir 3 pontos de vantagem, com vitória de coroa se este abrir 3 pontos de vantagem ou empatado se não for conseguida diferença de 3 em 10 lançamentos. Qual a probabilidade de cara vencer? E dar empate? Adaptado de [11]

SOLUÇÃO:

Pelo método do diagrama.

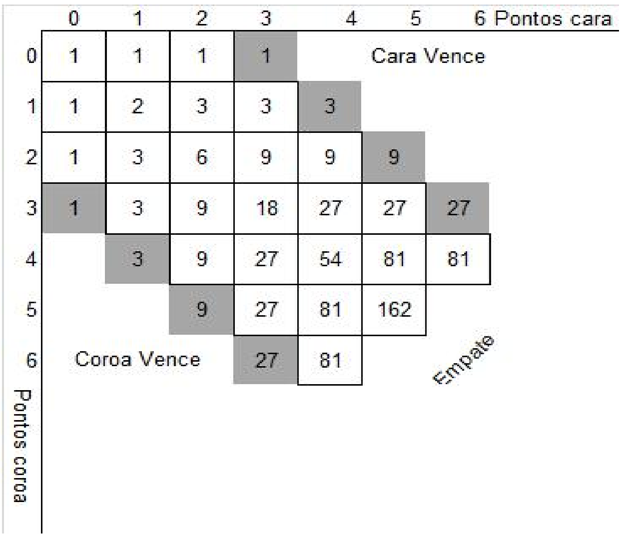

Figura 8: Diagrama de possibilidades.

Cara pode ganhar com os placares (3,0), (4,1), (5,2) ou (6,3), que tem as respectivas probabilidades $1p^3, 3p^4q, 9p^5q^2$ e $27p^6q^3$. Portanto $1p^3 + 3p^4q + 9p^5q^2 + 27p^6q^3$ representa as chances de cara vencer. Três resultados levam ao empate, (6,4), (5,5) e (4,6), que tem, respectivamente, as probabilidades de $81p^6q^4, 162p^5q^5e81p^4q^6$. Portanto $81p^6q^4 + 162p^5q^5 + 81p^4q^6$ representa as chances de empate.

2.7 Cadeias de Markov

2.7.1 Objetivo:

- Desenvolver técnicas de resolução de problemas de probabilidade utilizando cadeias de Markov;

- Mostrar a utilização de Sistemas de Computação Algébrica na resolução de problemas de probabilidade.

2.7.2 Roteiro:

Jogo 07A:

- O professor calcula as probabilidades como exemplo.

Jogo 07B:

- Os alunos calculam as probabilidades;

- O professor corrige.

Jogo 07C:

- Os alunos calculam as probabilidades;

- O professor corrige.

2.7.3 Ficha do aluno:

Jogo 07A: Sobre uma máquina de lançar moedas sabe-se que a face voltada para cima tem 70% de chances de ser o resultado após o lançamento e que, após ser jogada para cima, a moeda volta posição de lançamento. Em outras palavras, o resultado de um lançamento é face voltada para cima do seguinte (por exemplo: se o resultado do primeiro lançamento for cara, o segundo terá cara na face voltada pra cima).

Dessa vez o jogo funciona assim: o jogador fala o lançamento e o resultado que vai dar, por exemplo: cara no quinto lançamento.

a) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em cara no terceiro lançamento, se o jogo começar com a face coroa voltada para cima?

b)Com o jogo começando por cara, qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em cara no décimo lançamento? E no centésimo?

Jogo 07B: Sobre uma máquina de lançar dados não viciados sabe-se que a face voltada para cima tem 50% de chances de ser o resultado após o lançamento; as faces laterais têm as mesmas chances de ocorrer; a face inferior tem 20% de sair; que o jogo começa com 1 na face superior e que, após ser jogada para o alto, o dado volta posição de lançamento. Novamente o jogo consiste em se falar o lançamento e o resultado.

a) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em 2 no terceiro lançamento?

b) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em 3 no décimo lançamento?

c) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em 1 no centésimo lançamento?

d) Qual jogada tem mais chances de ganhar?

Jogo 07C: Uma moeda viciada de tal modo que, independente da face que esteja voltada pra cima na hora do lançamento, a probabilidade de sair cara é de 70%. Calcule:

a) Com o jogo começando por coroa, qual a probabilidade do resultado ser cara no terceiro lançamento?

b) Com o jogo começando por cara, qual a probabilidade do resultado ser cara no terceiro lançamento?

c) Qual a probabilidade do resultado ser cara no décimo lançamento?

d) Qual a probabilidade do resultado ser coroa no centésimo lançamento?

2.7.4 Ficha do professor:

Jogo 07A: Sobre uma máquina de lançar moedas sabe-se que a face voltada para cima no momento do lançamento tem 70% de chances de ser o resultado após o lançamento e que, após ser jogada para cima, a moeda volta posição de lançamento. Em outras palavras, o resultado de um lançamento é face voltada para cima no lançamento seguinte (por exemplo: se o resultado do primeiro lançamento for cara, o segundo terá cara na face voltada pra cima).

Dessa vez o jogo funciona assim: o jogador fala o lançamento e o resultado que vai dar, por exemplo: cara no quinto lançamento.

a) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em cara no terceiro lançamento, se o jogo começar com a face coroa voltada para cima?

b) Com o jogo começando por cara, qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em cara no décimo lançamento? E no centésimo?

SOLUÇÃO:

1º modo

Este problema poderia ser resolvido com o método da árvore de possibilidade ou do diagrama, mas o solucionaremos pela processo de Markov (também conhecido como cadeia de Markov). Que pode ser usado sempre que temos um número finito de resultados (ou estados) e que a probabilidade de um estado pode ser predita unicamente a partir do estado que o antecede.

Anton, Howard. "Álgebra Linear com Aplicações, 8 ed."Editora Bookman, 2001, página 391 trás a seguinte definição:

> "Denotamos por $1, 2, \ldots$,k os k estados possíveis de uma cadeia de Markov. A probabilidade de o sistema estar no estado i em qualquer observação se na observação anterior imediatamente precedente estava no estado j, é denotada por p_{ij} e é chamada probabilidade de transição do estado j ao estado i. A matriz $P = [p_{ij}]$ é chamada a matriz da transição da cadeia de Markov".

Temos dois estados possíveis, a saber 1-cara e 2-coroa. Assim teremos a matriz de transição:

$$\begin{array}{c c c}
 & \textbf{Estado precedente} & \\
 & \begin{array}{cc} \textbf{1} & \textbf{2} \end{array} & \\
\textbf{Novo Estado} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \textbf{1} \\ \textbf{2} \end{array}
\end{array}$$

Figura 9: Matriz de transição.

Pelo informado, a probabilidade de passar de cara para cara e de coroa para coroa é 70%, isto é, $p_{11} = p_{22} = 0,7$. Já as chances de mudar de face são $100\% - 70\% = 30\%$, assim $p_{12} = p_{21} = 0,3$. Pode-se então reescrever a matriz de transição com os devidos valores.

$$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

> "O *vetor-estado* de uma observação de uma cadeia de Markov com k estados é uma matriz coluna X cujo *i-ésimo* componente x_i é a probabilidade do sistema estar, naquela observação, no *i-ésimo* estado."Adaptado de [1].

O vetor estado dessa cadeia terá dois elementos, pois, como dito anteriormente, temos dois estados possíveis.

$$X_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Neste vetor, x_1 é a probabilidade de cara e x_2 é a probabilidade de coroa na observação n. Vamos denotar por X_0 o vetor-estado da posição inicial, assim $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, pois começarmos com coroa.

A probabilidade de obtermos cara após o primeiro lançamento é

$$p_{11} \cdot 0 + p_{12} \cdot 1 = 0,7 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 = 0,3$$

e a probabilidade de obtermos coroa após o primeiro lançamento é

$$p_{21} \cdot 0 + p_{22} \cdot 1 = 0,3 \cdot 0 + 0,7 \cdot 1 = 0,7$$

. Usando a notação de matricial temos:

$$X_1 = P \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 \\ 0,3 \cdot 0 + 0,7 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix}$$

Analogamente, para fazer a transição do vetor-estado X_1 para o vetor-estado X_2 basta multiplicar X_1 pela matriz de transição.

$$X_2 = P \cdot X_1 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,42 \\ 0,58 \end{bmatrix}$$

Finalmente chegamos as probabilidades do terceiro lançamento

$$X_3 = P \cdot X_2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,42 \\ 0,58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,468 \\ 0,532 \end{bmatrix}$$

Portanto, a probabilidade de sair cara no terceiro lançamento começando por coroa é

0,468.

E se pudéssemos fazer estes cálculos de maneira mais prática?

2º modo

Uma ferramenta poderosa para os matemáticos é o software gratuito Maxima (recomenda-se a leitura capítulo 5 da referência [6] que, segundo o autor, "tem atividades mais direcionadas à reflexão do próprio professor. De forma geral, as sugestões propostas neste capítulo tem objetivo de enriquecer o repertório de recursos didáticos do professor"). Esse programa é um sistema de computação algébrica (CAS, abreviação do termo em inglês *Computer Algebra Systems*), isto é, integra recursos numéricos, gráficos e simbólicos. Mas, como todo software, os CAS têm suas limitações o que torna indispensável o conhecimento matemático do programador.

No apendeice estão as linhas de comando, basta digitá-las pressionar SIFTH+ENTER após o ponto e vírgula que elas serão rodadas.

3º modo

Utilizando da cadeia de Markov e a propriedade associativa do produto de matrizes, podemos calcular as probabilidades do terceiro lançamento da seguinte forma:

$$X_3 = P \cdot X_2 = P \cdot P \cdot X_1 = P \cdot P \cdot P \cdot X_0 = P^3 \cdot X_0$$

É fácil perceber que $X_n = P^n \cdot X_0$ (a prova desta sentença fica como exercício para o leitor).

Usando o Maxima (ou uma calculadora comum e um pouco de paciência), chegamos a

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0,532 & 0,468 \\ 0,468 & 0,532 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0,532 & 0,468 \\ 0,468 & 0,532 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,468 \\ 0,532 \end{bmatrix}$$

b) Agora que já discutimos as cadeias de Markov e um pouco do Maxima, a resolução deste item fica mais rápida.

Para este item usaremos $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ o vetor-estado inicial, já que o jogo começa com cara.

$$Y_{10} = P^{10} \cdot Y_0 = \begin{bmatrix} 0,5000524288 & 0,4999475712 \\ 0,4999475712 & 0,5000524288 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5000524288 \\ 0,4999475712 \end{bmatrix}$$

$$Y_{100} = P^{100} \cdot Y_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Portanto, as probabilidade de cara vencer no décimo e no centésimo são, respectivamente, 0,4999475712 e 0,5. É importante destacar que o elemento $0,5$ da matriz Y_{100} é consequência da quantidade de casas decimais usadas (o Maxima permite que este cálculo seja feito com qualquer precisão desejada).

Jogo 07B: Sobre uma máquina de lançar dados não viciados sabe-se que a face voltada para cima tem 50% de chances de ser o resultado após o lançamento; as faces laterais têm as mesmas chances de ocorrer; a face inferior tem 20% de sair; que o jogo começa com 1 na face superior e que, após ser jogada para o alto, o dado volta posição de lançamento.

Novamente o jogo consiste em se falar o lançamento e o resultado.

a) Qual a probabilidade de vencer do jogador que aposta em 2 no terceiro lançamento?

b) Qual a probabilidade de vencer do jogador que aposta em 3 no décimo lançamento?

c) Qual a probabilidade de vencer do jogador que aposta em 1 no centésimo lançamento?

d) Qual jogada tem mais chances de ganhar?

SOLUÇÃO:

a) São 6 estados possíveis (os resultados 1, 2, 3, 4, 5 e 6), sendo assim a matriz P de transição terá os seguintes elementos: $p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_{44} = p_{55} = p_{66} = 0,5$, que representa a probabilidade do número da face superior se repetir.

Todo dado de seis números bem construído tem a propriedade de que as somas das faces opostas são iguais a 7. Quando o 1 estiver na face superior 6 estará na inferior e vice-versa, logo $p_{61} = p_{16} = 0,2$. Com o mesmo raciocínio obtemos $p_{52} = p_{25} = p_{43} =$

$p_{34} = 0,2$. Para as faces laterais temos que distribuir igualmente a probabilidade de 1-(0,5+0,2)=0,3. Assim, cada uma das quatro faces laterais tem 0,3/4=0,075 chances de ocorrer. Tomando o 1 na face superior, por exemplo, os números 2, 3, 4 e 5 estarão na lateral, então $p_{21} = p_{31} = p_{41} = p_{51} = 0,075$. Analogamente,

$$p_{12} = p_{32} = p_{42} = p_{62} = 0,075$$

$$p_{13} = p_{23} = p_{53} = p_{63} = 0,075$$

$$p_{14} = p_{24} = p_{54} = p_{64} = 0,075$$

$$p_{15} = p_{35} = p_{45} = p_{65} = 0,075$$

$$p_{26} = p_{36} = p_{46} = p_{56} = 0,075$$

Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.075 & 0.075 & 0.075 & 0.075 & 0.2 \\ 0.075 & 0.5 & 0.075 & 0.075 & 0.2 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & 0.5 & 0.2 & 0.075 & 0.075 \\ 0.075 & 0.075 & 0.2 & 0.5 & 0.075 & 0.075 \\ 0.075 & 0.2 & 0.075 & 0.075 & 0.5 & 0.075 \\ 0.2 & 0.075 & 0.075 & 0.075 & 0.075 & 0.5 \end{pmatrix}$$

O vetor-estado será

$$X_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Em que x_i representa a probabilidade da face superior ser o número i. Como o jogo começa com o 1 na face superior, o vetor estado inicial será

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos a calcular a probabilidade de 2 no terceiro lançamento

$$X_3 = P \cdot X_2 = P \cdot P \cdot X_1 = P \cdot P \cdot P \cdot X_0 = P^3 \cdot X_0$$

Com o auxilio do Wxmaxima obtemos

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.235625 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.208625 \\ 0.1389375 & 0.235625 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.208625 & 0.1389375 \\ 0.1389375 & 0.1389375 & 0.235625 & 0.208625 & 0.1389375 & 0.1389375 \\ 0.1389375 & 0.1389375 & 0.208625 & 0.235625 & 0.1389375 & 0.1389375 \\ 0.1389375 & 0.208625 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.235625 & 0.1389375 \\ 0.208625 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.1389375 & 0.235625 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0.235625 \\ 0.1389375 \\ 0.1389375 \\ 0.1389375 \\ 0.1389375 \\ 0.208625 \end{pmatrix}$$

Portanto a probabilidade de 2 no terceiro lançamento é 0,1389375.

b) Com a matriz de transição pronta, o processo fica mais rápido.

$$X_{10} = P^{10} \cdot X_0$$

Novamente com o auxilio do Wxmaxima

$$P^{10} \cong \begin{pmatrix} 0.16751 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16751 \\ 0.16624 & 0.16751 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16751 & 0.16624 \\ 0.16624 & 0.16624 & 0.16751 & 0.16751 & 0.16624 & 0.16624 \\ 0.16624 & 0.16624 & 0.16751 & 0.16751 & 0.16624 & 0.16624 \\ 0.16624 & 0.16751 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16751 & 0.16624 \\ 0.16751 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16624 & 0.16751 \end{pmatrix}$$

$$X_{10} \cong \begin{pmatrix} 0.16751 \\ 0.16624 \\ 0.16624 \\ 0.16624 \\ 0.16624 \\ 0.16751 \end{pmatrix}$$

Portanto a probabilidade de 3 no décimo lançamento é, aproximadamente, 0,16624.

c) Novamente usando as cadeias de Markov e o Maxima

$$X_{100} = P^{100} \cdot X_0$$

$$P^{100} \cong \begin{pmatrix} 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \\ 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 & 0.16667 \end{pmatrix}$$

$$X_{100} \cong \begin{pmatrix} 0.16667 \\ 0.16667 \\ 0.16667 \\ 0.16667 \\ 0.16667 \\ 0.16667 \end{pmatrix}$$

Portanto a probabilidade de 1 no centécimo lançamento é, aproximadamente, 0,16667.

d) Pelo visto até aqui, o jogador tem mais chance de ganhar se escolher 1 no primeiro lançamento, que teria 50% de chances. Veja como ficam os dois primeiros vetores-estado

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.075 \\ 0.075 \\ 0.075 \\ 0.075 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0.3125 \\ 0.11625 \\ 0.11625 \\ 0.11625 \\ 0.11625 \\ 0.2225 \end{pmatrix}$$

Observação: Em 07A, quantos maior o número de lançamentos, mais a probabilidade de sair cara ou coroa se aproximnam de 50% (assim como em 07B a probabilidade tende a $1/6 = 0,1666\ldots$). É importante destacar que esse modelo é diferente do caso de uma moeda viciada. Veja, como exemplo, a atividade a seguir:

Jogo 07C: Uma moeda viciada é tal que, independente da face que esteja voltada para cima na hora do lançamento, a probabilidade de sair cara é 70%. Calcule:

a) Com o jogo começando por coroa, qual a probabilidade do resultado ser cara no terceiro lançamento?

b) Com o jogo começando por cara, qual a probabilidade do resultado ser cara no terceiro lançamento?

c) Qual a probabilidade do resultado ser cara no décimo lançamento?

d) Qual a probabilidade do resultado ser coroa no centésimo lançamento?

SOLUÇÃO:

Se o resultado for cara (ou coroa) em um lançamento, a probabilidade de ser cara no lançamentos seguinte é de 70% e coroa é 30%.

São dois estados possíveis (1-cara e 2-cora). Logo a matriz de transição será do tipo 2x2.

$$p_{11} = p_{12} = 0,7$$

$$p_{21} = p_{22} = 0,3$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$$

a) Como o jogo começa por coroa $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo

$$X_1 = P \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = P \cdot X_1 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = P \cdot X_2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Portanto a probabilidade é 70%.

Outro modo:

$$X_3 = P^3 \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

b) Como o jogo começa por cara $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo

$$Y_3 = P^3 \cdot Y_0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Portanto a probabilidade é 70%, a mesma do jogo começando por coroa.

c) Observe que as potências da matriz de transição são todas iguais a ela mesma, ou seja, $P = P^2 = P^3 = ... = P^n$. Consequentemente, o vetor estado do primeiro lançamento será igual ao dos demais lançamentos. Algébricamente:

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = P \cdot X_0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = P \cdot Y_0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

Portanto, independente da face incial, a probabilidade de cara no décimo lançamento é 0,7.

Curiosidade: matriz que ao ser multiplicada por si mesma, resulta em si mesma, é chamada de *matriz indempotente*.

d) Com o mesmo raciocínio do item aterior, concluimos que a probabilidade de coroa no centésimo lançamento é 0,3.

2.8 Resolução Jogo 01

2.8.1 Objetivo:

- Verificar se houve mudança de posicionamento dos alunos em relação à tomada de decisões;

- Evidenciar e debater as vantagens de cada método de resolução de problemas de probabilidade apresentados;

- Mostrar a utilização dos métodos na resolução de um problema mais elaborado.

2.8.2 Roteiro:

- O professor pergunta se os alunos responderiam da mesma maneira as indagações do "Jogo 01";

- O professor discute com os alunos as vantagens e desvantagens de cada método de resolução;

- O professor corrige e verifica com os alunos se os dados coletados na ficha do professor do "jogo 01"batem com os cálculos.

2.8.3 Ficha do aluno:

A mesma de 2.1.3.

2.8.4 Ficha do professor:

Apresentamos cinco técnicas de resolução de problemas de probabilidade, a saber: básica (listar os caso favoráveis e totais e depois dividir - útil para espaços equiprobabilísticos, que foi o tipo mais cobrado nas provas do Enem analisadas), contagem, árvore de probabilidades, método do diagrama e cadeias de Markov. Cada uma delas tem suas vantagens.

A técnica básica e de contagem são extremamente práticas, a primeira quando temos uma quantidade tão pequena de elementos que podemos ou precisamos listá-los. E a segunda economiza tempo por não precisar listar os casos favoráveis, já que trata só da quantidade deles. Esse dois métodos pode ser aplicado a praticamente todos os problemas de probabilidade, mas seu uso mais comum é em problemas que tem apenas um repetição como, por exemplo, lançar 5 moedas; lançar 4 dados; lançar dois dados e observar o produto; etc.

Árvore de probabilidades é frequentemente associada a problemas em que um processo é repetido mais de uma vez com "acúmulo de pontos"(como exemplo temos: melhor de 3 no cara ou coroa; cara ou coroa com diferença de 3; lançar um dado várias vezes e observar a soma; jogo de tênis; jogo de vôlei; etc.). É um método, que pelo seu caráter visual, facilita o entendimento. Ele permite calcular a probabilidade em cada etapa do evento, saber quantidade de caminhos favoráveis e visualizar cada etapa desses caminhos. A desvantagem da árvore esta na sua construção que fica demasiadamente trabalhosa se o número de repetições do processo for muito grande.

Para problemas em que aparecem muitas repetições com acúmulo de pontos, o método do diagrama é bem eficaz. Ele permite o cálculo da quantidade de casos favoráveis em cada etapa e, não tão facilmente como a árvore, também permite a visualização do caminho percorrido.

Apesar de trabalhoso, o método das cadeias de Markov, é uma saída eficiente para problemas em que o processo é repetido várias vezes sem que haja "acúmulo de pontos"(por exemplo: observar a face da moeda no lançamento n; saber o número do dado no lançamento n; jogo monópole; etc.), pois nesses modelos teremos um número finito de estados. Sua eficiência fica potencializada quando associada a um software como o Maxima (para os exercícios que trabalhamos o Excel também poderia ser utilizado).

Esses métodos podem ser associados (ou utilizados problemas de tipos diferentes dos sugeridos) para resolver problemas mais complexos. Abaixo a resolução do problema apresentado no item 2.1.

Jogo 01: Moeda x Dado

i. Jogam duas pessoas, um escolhe moeda e o outro escolhe dado;

ii. Cada vez que a moeda e o dado são jogados simultaneamente para alto temos um turno;

iii. Se sair 4 caras ou 4 coroas independente da ordem, a moeda ganha;

iv. Se sair um mesmo número 3 vezes em qualquer ordem, o dado ganha.

Respondam as perguntas, depois joguem e anote os resultados pra ver se suas respostas se confirmam.

a) Quem vai ganhar?

b) Qual o número mínimo de turnos para acabar o jogo?

c) Qual o número máximo de turnos para acabar o jogo?

d) É possível dar empate?

e) Quem tem mais chances de ganhar?

SOLUÇÃO:

a) Como já discutido anteriormente, não é possível afirmar quem será o vencedor, pois o experimento é aleatório.

b) Se der cara (ou coroa) nos quatro turnos iniciais, a moeda vence. Mas há a possibilidade do jogo acabar se sair um mesmo número do dado nos três primeiros turnos, portanto o menor número de turnos é 3.

c) Suponhamos que cada número dado saiu em dois turnos, teremos então 12 turnos e, consequentemente, no 13º o jogo acabaria. Mas se cara sair em 3 turnos e coroa também sair em 3 turnos, teremos então 6 turnos e, consequentemente, o jogo acabaria no 7º turno, que é o número máximo de turnos.

d) Sim. Por exemplo, suponha no terceiro turno já terem saído o número 1 duas vezes e cara 3 vezes, se no quarto turno o resultado for cara na moeda e 1 no dado o jogo terminará em empate.

e) Agora vamos colocar em prática o que aprendemos até agora. A disputa propriamente dita começa no 3º turno e acaba no 7º turno, por isso faremos a análise individual apenas desse intervalo. Para cada turno temos 12 possibilidades, a saber:

$$k1, k2, k3, k4, k5, k6, c1, c2, c3, c4, c5, c6$$

Em que k e c representam respectivamente cara e coroa e os números são os da face superior dado. Assim k5 significa que o resultado do turno foi cara e 5.

Denotaremos por S_i, M_i, D_i e E_i, respectivamente, o espaços amostral, os casos favoráveis à vitória da moeda, os casos favoráveis à vitória do dado e o casos favoráveis ao empate no turno i.

Os turnos podem ter modelos favoráveis à vitória do dado, da moeda ou ao empate. Por exemplo, a sequência de resultados (k1,k3,c1,c3,k1) leva a vitória do dado porque a face 1 aparece três vezes. Esse exemplo é um modelo favorável ao dado em que temos uma trica e um par de números e, para as faces da moeda, temos um trinca e um par. O turno que merece destaque é ultimo, pois neste a face vencedora (da moeda, do dado ou dos dois em caso de empate) deve obrigatoriamente aparecer.

Há turnos em que o jogo não acaba. Por exemplo a sequência de resultados (k1,c2,k5,c3). Nesse modelo, não temos um trinca de números nem uma quadra de faces da moeda.

O calculo de cada probabilidade esta divido nas seguintes fases:

1. Cálculo da quantidade de elementos do espaço amostral;

2. Cálculo da quantidade de eventos favoráveis ao dado;

    (a) Esgotamento e divisão dos casos favoráveis. Começando sempre por um exemplo seguido de uma descrição desse modelo e, por fim, determinando a quantidade de eventos dele.

    (b) Soma dos resultados de cada caso favorável e exibição da probabilidade de dado vencer.

3. Cálculo da quantidade de eventos favoráveis á moeda;

    (a) Esgotamento e divisão dos casos favoráveis. Começando sempre por um exemplo seguido de uma descrição desse modelo e, por fim, determinando a quantidade de eventos dele.

    (b) Soma dos resultados de cada caso favorável e exibição da probabilidade de moeda vencer.

4. Cálculo da quantidade de eventos favoráveis ao empate;

    (a) Esgotamento e divisão dos casos favoráveis. Começando sempre por um exemplo seguido de uma descrição desse modelo e, por fim, determinando a quantidade de eventos dele.

    (b) Soma dos resultados de cada caso favorável e exibição da probabilidade de empate.

5. Resumo dos resultados encontrados

Agora aos cálculos:

3º turno: $\#S_3 = 12^3$

O caso abaixo esgota todas as possibilidades de vitória do dado.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,c1,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e que para os resultados da moeda não há restrição.

Há $C_{6,1}$ possibilidades para trinca e cada elemento dessa trinca pode estar acompanhado de cara ou coroa de 2^3 formas. Assim, $\#D_3 = 2^3 \cdot C_{6,1} = 8 \cdot 6 = 48$. Não existe possibilidade de empate nem de vitória da moeda, portanto as probabilidades são:

$$P(D_3) = \frac{48}{12^3} = \frac{1}{36} = 0,02778$$

$$P(M_3) = P(E_3) = 0$$

4º turno: $\#S_4 = 12^4 = 20.736$

Os dois casos abaixo esgota todas as possibilidades de vitória do dado.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,k1,c2,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e um número distinto e para as faces da moeda temos uma trica e um resultado distinto.

Vamos por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para trinca da moeda;

Permutamos os três primeiros números;

Permutamos as quatro faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{2,1} \cdot P_3^2 \cdot P_4^3 = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 720$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,c1,c2,k1). Observe que para os números temos uma trinca e um número distinto e para as faces da moeda temos dois pares.

Vamos por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,2}$ possibilidades para os pares da moeda;

Permutamos os três primeiros números;

Permutamos as quatro faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{2,2} \cdot P_3^2 \cdot P_4^{2,2} = 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 = 540$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(D_4) = \frac{720 + 540}{12^4} = \frac{1.260}{20.736} = \frac{35}{576} = 0,06076$$

Os três casos abaixo esgota todas as possibilidades de vitória do dado.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,k2). Observe que para o dado temos dois pares e as faces da moeda são todas iguais.Vamos por etapas:

$C_{6,2}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{2,1}$ possibilidades para as faces da moeda;

Permutamos os quatro números;

Permutamos as três primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^{2,2} \cdot P_3^3 = 15 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 = 80$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,k3). Observe que para o dado temos um par e dois números distintos e as faces da moeda são todas iguais.Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{5,2}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as faces da moeda;

Permutamos os quatro números;

Permutamos as três primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^2 \cdot P_3^3 = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 1 = 1.440$ casos no modelo do exemplo.

Caso 3: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k2,k3,k4). Observe que para o dado temos quatro números distintos e as faces da moeda são todas iguais. Por etapas:

$C_{6,4}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as faces da moeda;

Permutamos os quatro números;

Permutamos as três primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,4} \cdot C_{2,1} \cdot P_4 \cdot P_3^3 = 15 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 1 = 720$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(M_4) = \frac{80 + 1.440 + 720}{12^4} = \frac{2.340}{20.736} = \frac{65}{576} = 0,11285$$

O caso listado abaixo esgotam todas as possibilidades de empate.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e um número distinto e as faces da moeda são todas iguais. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para as faces da moeda;

Permutamos os três primeiros números;

Permutamos as três primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{2,1} \cdot P_3^2 \cdot P_3^3 = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 180$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(E_4) = \frac{180}{12^4} = \frac{180}{20.736} = \frac{5}{576} = 0,00868$$

Resumindo os resultados para o 4º turno

$$P(D_4) = \frac{1260}{20.736} = \frac{35}{576} = 0,06076$$

$$P(M_4) = \frac{2.340}{20.736} = \frac{65}{576} = 0,11285$$
$$P(E_4) = \frac{180}{20.736} = \frac{5}{576} = 0,00868$$

5º turno: $\#S_5 = 12^5 = 248.832$

Os dois casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de vitória do dado.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,c1,k2,k2,c1). Observe que temos uma trinca e um par de números e para as faces da moeda temos uma trica e um par.Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{2,1}$ possibilidades para trinca da moeda;

Permutamos os quatro primeiros números;

Permutamos as cinco faces de moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^{2,2} \cdot P_5^{3,2} = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10 = 3.600$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,c1,k2,k3,c1). Observe que para os números temos uma trinca e dois números distintos e para as faces da moeda temos uma trica e um par. Vamos por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para trinca de números;

$C_{5,2}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para trinca da moeda;

Permutamos os quatro primeiros números;

Permutamos as cinco faces de moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^{2} \cdot P_5^{3,2} = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 10 = 14.400$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(D_5) = \frac{3.600 + 14.400}{12^5} = \frac{18.000}{248.832} = \frac{125}{1728} = 0,07234$$

Os três casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de vitória da moeda.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c2,k3). Observe que para o dado temos dois pares um número distinto e as faces da moeda são quatro de um tipo e uma de outro. Por etapas:

$C_{6,2}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{4,1}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os cinco números;

Permutamos as quatro primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,2} \cdot C_{4,1} \cdot C_{2,1} \cdot P_5^{2,2} \cdot P_4^3 = 15 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 4 = 14.400$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c3,k4). Observe que para o dado temos um par e três números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e uma de outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{5,2}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os cinco números;

Permutamos as quatro primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,4} \cdot C_{2,1} \cdot P_5^2 \cdot P_4^3 = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 4 = 28.800$ casos no modelo do exemplo.

Caso 3: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k2,k3,c4,k5). Observe que temos cinco números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e uma de outro. Por etapas:

$C_{6,5}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os cinco números;

Permutamos as quatro primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,5} \cdot C_{2,1} \cdot P_5 \cdot P_4^3 = 6 \cdot 2 \cdot 120 \cdot 4 = 5.760$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(M_5) = \frac{14.400 + 28.800 + 5.760}{12^5} = \frac{48.960}{248.832} = \frac{85}{432} \cong 0,19676$$

Os dois casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de empate.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c2,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e um par de números e as faces da moeda são quatro iguais e uma distinta. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os quatro primeiros números;

Permutamos as quatro primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^{2,2} \cdot P_4^3 = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 = 1.440$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c3,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e dois números distintos e as faces da moeda são quatro iguais e uma distinta.Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,2}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os quatro primeiros números;

Permutamos as quatro primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_4^2 \cdot P_4^3 = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 4 = 5.760$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(E_5) = \frac{1.440 + 5.760}{12^5} = \frac{7.200}{248.832} = \frac{25}{864} \cong 0,02894$$

Resumindo os resultados para o 5º turno

$$P(D_5) = \frac{18.000}{248.832} = \frac{125}{1728} \cong 0,07234$$

$$P(M_5) = \frac{48.960}{248.832} = \frac{85}{432} \cong 0,19676$$

$$P(E_5) = \frac{7.200}{248.832} = \frac{25}{864} \cong 0,02894$$

6º turno: $\#S_6 = 12^6 = 2.985.984$

Os dois casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de vitória do dado.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,k1,k2,c2,c3,c1). Observe que para os números temos uma trinca, um par e um número distinto e para as faces da moeda temos duas trincas. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{4,1}$ possibilidades para os números distintos;

1 possibilidade para as faces das moedas;

Permutamos os cinco primeiros números;

Permutamos as seis faces de moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{4,1} \cdot 1 \cdot P_5^{2,2} \cdot P_6^{3,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 30 \cdot 20 = 72.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável ao dado é (k1,k1,k2,c3,c4,c1). Observe que para os números temos uma trinca e três números distintos e para as faces da moeda temos duas trincas. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para trinca de números;

$C_{5,3}$ possibilidades para os números distintos;

1 possibilidade para as faces das moedas;

Permutamos os cinco primeiros números;

Permutamos as seis faces de moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,3} \cdot 1 \cdot P_5^2 \cdot P_6^{3,3} = 6 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 60 \cdot 20 = 72.000$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(D_6) = \frac{72.000 + 72.000}{12^6} = \frac{144.000}{2.985.984} = \frac{125}{2.592} \cong 0,04823$$

Os quatro casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de vitória da moeda.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c2,c3,k3). Observe que para os números temos três pares e as faces da moeda são quatro de um tipo e duas do outro. Por etapas:

$C_{6,3}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os seis números;

Permutamos as cinco primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,3} \cdot C_{2,1} \cdot P_6^{2,2,2} \cdot P_5^{3,2} = 20 \cdot 2 \cdot 90 \cdot 10 = 36.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c2,c3,k4). Observe que para o dado temos dois pares e dois números distintos e as faces da moeda quatro de um tipo e duas do outro. Por etapas:

$C_{6,2}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{4,2}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os seis números;

Permutamos as cinco primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_6^{2,2} \cdot P_5^{3,2} = 15 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 180 \cdot 10 = 324.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 3: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c3,c4,k5). Observe que para o dado temos um par e quatro números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e duas do outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{5,4}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os seis números;

Permutamos as cinco primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,4} \cdot C_{2,1} \cdot P_6^2 \cdot P_5^{3,2} = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 360 \cdot 10 = 216.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 4: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k2,k3,c4,c5,k6). Observe que para o dado temos seis números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e duas do outro. Por etapas:

$C_{6,6}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os seis números;

Permutamos as cinco primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,6} \cdot C_{2,1} \cdot P_6 \cdot P_5^{3,2} = 1 \cdot 2 \cdot 720 \cdot 10 = 14.400$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(M_6) = \frac{36.000 + 324.000 + 216.000 + 14.400}{12^6} = \frac{590.400}{2.985.984} = \frac{1025}{5184} \cong 0,19772$$

Os dois casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de empate.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c2,c3,k1). Observe que para o dado temos uma trinca, um par e um número distinto e as faces da moeda são quatro de um tipo e duas do outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{4,1}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os cinco primeiros números;

Permutamos as cinco primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{2,1} \cdot P_5^{2,2} \cdot P_5^{3,2} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 10 = 72.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c3,c4,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e três números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e duas do outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,3}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os cinco primeiros números;

Permutamos as cinco primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,1} \cdot P_5^{2} \cdot P_5^{3,2} = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 10 = 72.000$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(E_6) = \frac{72.000 + 72.000}{12^6} = \frac{144.000}{2.985.984} = \frac{125}{2.592} \cong 0,04823$$

$$P(D_6) = \frac{144.000}{2.985.984} = \frac{125}{2.592} \cong 0,04823$$
$$P(M_6) = \frac{590.400}{2.985.984} = \frac{1025}{5184} \cong 0,19772$$
$$P(E_6) = \frac{144.000}{2.985.984} = \frac{125}{2.592} \cong 0,04822$$

7º turno: $\#S_7 = 12^7 = 35.831.808$

Nesse turno teremos obrigatoriamente quatro faces iguais na moeda, portanto não a possibilidade de vitória do dado. Assim,

$$P(D_7) = 0$$

Os três casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de vitória da moeda.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c2,c3,c3,k4). Observe que para o dado temos três pares e um número distinto e as faces da moeda são quatro de um tipo e três de outro. Por etapas:

$C_{6,3}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{3,1}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os sete números;

Permutamos as seis primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,3} \cdot C_{3,1} C_{2,1} \cdot P_7^{2,2,2} \cdot P_6^{3,3} = 20 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 630 \cdot 20 = 1.512.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c2,c3,c4,k5). Observe que para o dado temos dois pares e três números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e três de outro. Por etapas:

$C_{6,2}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{4,3}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os sete números;

Permutamos as seis primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,2} \cdot C_{4,3} \cdot C_{2,1} \cdot P_7^{2,2} \cdot P_6^{3,3} = 15 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1260 \cdot 20 = 3.024.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 3: Outro exemplo de resultado favorável à moeda é (k1,k1,k2,c3,c4,c5,k6). Observe que para o dado temos um par e 5 números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e três de outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para o par de números;

$C_{5,5}$ possibilidades para o número distinto;

$C_{2,1}$ possibilidades para as face vencedora da moeda;

Permutamos os sete números;

Permutamos as seis primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,5} \cdot C_{2,1} \cdot P_7^2 \cdot P_6^{3,3} = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2520 \cdot 20 = 604.800$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(M_7) = \frac{1.512.000 + 3.024.000 + 604.800}{12^7} = \frac{5.140.800}{35.831.808} = \frac{2.975}{20.736} \cong 0,14347$$

Os três casos listados abaixo esgotam todas as possibilidades de empate.

Caso 1: Um exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c2,c3,c3,k1). Observe que para o dado temos uma trinca e dois pares e as faces da moeda são quatro de um tipo e três de outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,2}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os seis primeiros números;

Permutamos as seis primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_6^{2,2,2} \cdot P_6^{3,3} = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 90 \cdot 20 = 108.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 2: Outro exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c2,c3,c4,k1). Observe que para o dado temos uma trinca, um par e dois números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e três de outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,1}$ possibilidades para os pares de números;

$C_{4,2}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os seis primeiros números;

Permutamos as seis primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,1} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,1} \cdot P_6^{2,2} \cdot P_6^{3,3} = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 180 \cdot 20 = 1.296.000$ casos no modelo do exemplo.

Caso 3: Outro exemplo de resultado favorável ao empate é (k1,k1,k2,c3,c4,c5,k1).

Observe que para o dado temos uma trinca e quatro números distintos e as faces da moeda são quatro de um tipo e três de outro. Por etapas:

$C_{6,1}$ possibilidades para a trinca de números;

$C_{5,4}$ possibilidades para os números distintos;

$C_{2,1}$ possibilidades para a face vencedora da moeda;

Permutamos os seis primeiros números;

Permutamos as seis primeiras faces da moeda.

Assim temos $C_{6,1} \cdot C_{5,4} \cdot C_{2,1} \cdot P_6^2 \cdot P_6^{3,3} = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 360 \cdot 20 = 432.000$ casos no modelo do exemplo.

Portanto,

$$P(E_7) = \frac{216.000 + 1.296.000 + 432.000}{12^7} = \frac{1.944.000}{35.831.808} = \frac{125}{2304} \cong 0,05425$$

Resumindo os resultados do 7º turno temos

$$P(D_7) = 0$$

$$P(M_7) = \frac{5.140.800}{35.831.808} = \frac{2.975}{20.736} \cong 0,14347$$

$$P(E_7) = \frac{1.944.000}{35.831.808} = \frac{125}{2304} \cong 0,05425$$

A tabela abaixo é um resumo dos resultados obtidos.

Turno	Dado	Moeda	Empate	Soma
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	**0,02778**	0	0	0,02778
4	0,06076	0,11285	0,00868	0,18229
5	0,07234	0,19676	0,02894	0,29803
6	0,04823	0,19772	0,04823	0,29417
7	0	0,14347	0,05425	0,19772
Soma	0,20910	0,65080	0,14009	1

Figura 10: Probabilidades jogo 01.

Na coluna da direita tem-se a soma das probabilidades do dado, da moeda e do empate em cada turno. Por ela é possível concluir que o jogo tem mais chances de acabar no quinto turno (probabilidade de 0,29803).

Na vertical da tabela tem-se a probabilidade turno a turno e em baixo a soma dessas. Portanto, quem tem mais chances de ganhar é moeda com probabilidade de 0,65080, que é superior as chances do dado (0,20910) e do empate (0,1400).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho foi aplicado em uma turma de preparatório para Enem e Vestibulares em geral. Os alunos mostraram-se muitos receptivos a proposta de atividade. Ao aplicar as fichas, percebi que os educandos desenvolveram as atividades aprendendo enquanto se divertiam. Também ficou claro, que apesar de já terem estudado o assunto, não percebiam sua importância.

Probabilidade é muito cobrada no Exame Nacional do Ensino Médio e amplamente utilizada no estudo de doenças, em inferências sobre o clima e na teoria de jogos. Entender esse conceito ajuda a tomar decisões sobre coisas do cotidiano, aumento as chances de sucesso no Enem e, consequentemente, de ingresso em uma boa universidade.

Esse texto é uma proposta de aula dinâmica, que faz do aluno parte ativa do processo de construção do conhecimento. Ele permite que o educando aprenda ludicamente e visualize a importância do estudo de probabilidade. Através dessa atividade o aprendizado pode ser mais prazeroso e consistente.

REFERÊNCIAS

[1] ANTON, Howard. *Álgebra Linear com Aplicações*, 8 ed. Editora Bookman, 2001.

[2] BASTOS, Maria D, organizadora. *Pré-vestibular Social: Caderno de Orientação Acadêmica*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ. 2013.

[3] *Com receio de câncer, Angelina Jolie faz cirurgia para retirar os seios.* Disponível em: http://g1.globo.com/pop-arte/cinema/noticia/2013/05/com-receio-de-cancer-angelina-jolie-retira-os-seios.html. Acessado em: 25 de julho de 2013.

[4] DOMINGUES, Hygino. Cardano: *O Intelectual Jogador.* In: Hazzan, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 5, Atual Editora, 7ª Edição. 2004. Página 56.

[5] DOMINGUES, Hygino. Cardano: *Pascal e a Teoria das Probabilidades*. In: Hazzan, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 5, Atual Editora, 7ª Edição. 2004. Página 83.

[6] GIRALDO, Victor (UFRJ). CAETANO, Paulo (UFSCar). MATTOS, Francisco (UERJ / CP2). *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. 2012. (material ma36)

[7] LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 2, 6ª ed. Editora SBM, 2006.

[8] *Mega-sena - Probabilidades*. Disponível em: http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/megasena/probabilidades.asp. Acessado em: 25 de julho de 2013.

[9] *Raio-x do Enem: os conteúdos mais cobrados desde 2009*. Disponível em: http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/raio-x-do-enem-os-conteudos-mais-cobrados-desde-2009. Data de acesso: 18 de julho de 2013.

[10] *Sobre o Enem*. Disponível em http://inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem. Acessado em 23 de julho de 2013.

[11] STEWART, Ian. *Jogos, Conjuntos e Matemática*. Editora Gradiva. 1984.

[12] *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

APÊNDICE A – CÓDIGOS MAXIMA

A.1 Jogo 07A - item a, 1° modo

O comando abaixo cria a matriz de transição 2x2 outra forma P:matrix([0.7,0.3][0.3,0.7])

```
-->     P: matrix([0.7,0.3],[0.3,0.7]);
```

O comando abaixo cria o vetor-estado da posição inicial com o jogo começando com coroa.

```
-->     X0:matrix([0],[1]);
```

Abaixo temos a matriz de transição multiplicando a matriz do vetor-estado inicial, assim obtemos a probabilidade de resultados para o 1º lançamento.

```
-->     X1:P.X0;
```

Abaixo o vetor-estado 2º lançamento.

```
-->     X2:P.X1;
```

Abaixo o vetor-estado 3º lançamento.

```
-->     X3:P.X2;
```

Abaixo os vetores-estado 4º ao 15º lançamento.

```
-->    X4:P.X3;
       X5:P.X4;
       X6:P.X5;
       X7:P.X6;
       X8:P.X7;
       X9:P.X8;
       X10:P.X9;
       X11:P.X10;
       X12:P.X11;
       X13:P.X12;
       X14:P.X13;
       X15:P.X14;
```

Observe que quanto mais vezes a moeda é lançada, mais a probabilidade de cada resultado se aproxima de 50%. Será que isso sempre acontecerá?

A.2 Jogo 07A - item a, 3° modo

De maneira análoga ao intem anterior, abaixo criamos a matriz de transição e o vetor-posição inicial começando por coroa.

```
-->    P: matrix([0.7,0.3],[0.3,0.7]);
       X0:matrix([0],[1]);
```

Abaixo a matriz de transição elevada ao cubo.

```
-->    P3:P^^3;
```

Abaixo o cálculo do vetor-posição X3 através da multiplicação de P3 com X0

```
-->    X3:P3.X0;
```

A.3 Jogo 07A - item b

De maneira análoga ao intem anterior, abaixo criamos a matriz de transição e o vetor-posição inicial começando por cara.

```
-->    P: matrix([0.7,0.3],[0.3,0.7]);
       Y0:matrix([1],[0]);
```

Abaixo os comandos para determinar as probabilidades do 10º lançamento

```
-->    Y10:(P^^10).Y0;
```

Abaixo os comandos para determinar as probabilidades do 100º lançamento

```
-->    Y100:(P^^100).Y0;
```

A.4 Jogo 07B

Criando a matriz de transição e o vetor-estado inicial. Observe que p_{ii} é a probabilidade de repetir a face superior, $p_{ij} = 0.2$ se i+j=7 e nos demais casos $p_{ij} = 0.075$.

```
-->    P:matrix(
           [0.5,0.075,0.075,0.075,0.075,0.2],
           [0.075,0.5,0.075,0.075,0.2,0.075],
           [0.075,0.075,0.5,0.2,0.075,0.075],
           [0.075,0.075,0.2,0.5,0.075,0.075],
           [0.075,0.2,0.075,0.075,0.5,0.075],
           [0.2,0.075,0.075,0.075,0.075,0.5]
       );

       X0:matrix([1],[0],[0],[0],[0],[0]);
```

a) Qual a probabilidade de vencer do jogador que aposta em 2 no terceiro lançamento?

```
-->    P3:P^^3;
       X3:P3.X0;
```

b) Qual a probabilidade de vencer do jogador que aposta em 3 no décimo lançamento?

```
-->    P10:P^^10;
       X10:P10.X0;
```

c) Qual a probabilidade de vencer do jogador que aposta em 1 no centésimo lançamento?

```
-->     P100:P^^100;
        X100:P100.X0;
```

d) Qual jogada tem mais chances de ganhar?

```
-->     X1:P.X0;
        X2:(P^^2).X0;
```

A.5 Jogo 07C

Criando a matriz de transição. Observe que $p_{11} = p_{12} = 0,7$, pois esta é a probailidade de sair cara e que $p_{21} = p_{22} = 0,3$, pois esta é a probailidade de sair coroa.

```
-->     P:matrix([0.7,0.7],[0.3,0.3]);
```

a) Qual a probabilidade do resultado ser coroa no terceiro lançamento? Criando o vetor inicial para cara, e repetindo o processo de Markov até o terceiro lançamento.

```
-->     X0:matrix([0],[1]);
        X1: P.X0;
        X2: P.X1;
        X3: P.X2;
```

Outro modo: Resolução usando a pontência da Matriz de transição.

```
-->     P3:P^^3;
        X3:P3.X0;
```

b) Com jogo começando por cara qual a probabilidade do resultado ser coroa no terceiro lançamento? Criando o verto-estado inicial e resolvendo

```
-->     Y0:matrix([1],[0]);
        Y1: P.Y0;
        Y2: P.Y1;
        Y3: P.Y2;
```

Outro modo: Resolução usando a pontência da Matriz de transição.

```
-->    P3:P^^3;
       Y3:P3.Y0;
```

c) Qual a probabilidade do resultado ser cara no décimo lançamento? E no centésimo lançamento?

```
-->    P10:P^^10;
       X10:P10.X0;
       Y10:P10.Y0;
```

d) Qual jogada tem mais chances de ganhar?

```
-->    P100:P^^10;
       X100:P100.X0;
       Y100:P100.Y0;
```

ANEXO A – FICHA DOS ALUNOS

Jogo 01: Moeda x Dado

i - Jogam duas pessoas, um escolhe moeda e o outro escolhe dado; Cada vez que a moeda e o dado são jogados simultaneamente para alto temos um turno;

ii - Se sair 4 caras ou 4 coroas, independente da ordem, a moeda ganha;

iii - Se sair um mesmo número 3 vezes em qualquer ordem, o dado ganha.

Esta atividade se divide em três etapas:

1 - Respondam as perguntas sobre o jogo;

2 - Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo;

3 - Verifique se as respostas dadas inicialmente estão de acordo com os dados anotados na tabela.

a) Quem vai ganhar?

b) Qual o número mínimo de turnos pra acabar o jogo?

c) Qual o número máximo de turnos pra acabar o jogo?

d) É possível dar empate?

e) Quem tem mais chances de ganhar?

Turno	Face moeda	Face dado
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Turno	Face moeda	Face dado
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

Jogo 02:

i - Jogam 2 pessoas A e B;

ii - Cada vez que o dado é jogado para cima temos um turno;

iii - Se sair número primo, A ganha;

iv - Se sair número composto B ganha;

v - Se não sair número primo ou número composto dá empate.

Esta atividade se divide em três etapas:

1 - Respondam as três perguntas sobre o jogo;

2 - Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo;

3 - Verifique se as respostas dadas inicialmente estão de acordo com os dados escritos na tabela.

a) Quem vai ganhar?

b) Quem tem mais chances de ganhar?

c) Algum número pode representar as chances de vencer de cada jogador? Qual?

Partidas	A vence	B Vence	Empate
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Jogo 03A:

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número de 1 a 12;

iii. Um dado normal é lançado duas vezes e os resultados são somados.

iv. Ganha quem acertou o resultado da soma.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Soma	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de sair?

Calcule a probabilidade da soma dar:

a) 4   b) 9   c) 1   d) 7   e) 12

f) Um número diferente de 12   g) Um número diferente de 7

Jogo 03B

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número entre 1 e 36;

iii. Um dado normal é lançado para cima duas vezes e os resultados são multiplicados então temos uma partida.

iv. Ganha quem acertou o resultado do produto.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Produto	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de sair?

Calcule a probabilidade do produto ser:

a) 4   b) 1   c) 21   d) Múltiplo de 2 e de 3   e) Múltiplo de 4 ou de 5

Jogo 03C:

i. Jogam duas pessoas,

ii. Cada jogador escolhe um número de 2 a 6;

iii. Dois dados são jogados para cima e os resultados são somados;

iv. Ganha o jogo a pessoa que escolhe um divisor da soma.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Soma	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Responda as perguntas abaixo:

a) Por que o número 1 não faz parte das opções de escolha dos jogadores?

b) O jogo pode dar empate?

c) Qual a probabilidade de quem escolheu 5 ganhar?

d) Um jogador escolheu 3, qual a probabilidade dele ganhar se em um dos dados o resultado foi 4?

e) Um jogador escolheu 2, qual a probabilidade dele ganhar se em um dos dados o resultado foi 5?

Jogo 4A: Quantas caras?

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um número de 0 a 5;

iii. Cinco moedas são jogadas simultaneamente para o alto, então temos uma partida.

iv. Ganha o jogador que acertar o número de caras que sair na partida.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Resultado	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Qual a probabilidade de ganhar o jogador que escolheu:

a) 0? b) 1? c) 2? d) 3? e) 4? f) 5?

Jogo 4B: Quantos repetidos?

i. Jogam 2 pessoas A e B;

ii. Cada jogador escolhe um resultado: zero repetição, 1 par, 2 pares, 1 trinca ou 1 quadra;

iii. Quatro dados são jogados simultaneamente para o alto, então temos uma partida.

iv. Ganha o jogador que acertar o resultado da partida.

Joguem e anotem os resultados na tabela abaixo:

Partida	Aposta A	Aposta B	Resultado	Vencedor
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Será que algum valor tem mais chances de ganhar?

Qual a probabilidade de ganhar o jogador que escolheu:

a) 1 par? b) 2 pares? c) 1 trinca? d) 1 quadra? e) Zero repetição?

Nem sempre os modelos considerados são equiprobabilísticos. Veja os exemplos a seguir.

Jogo 05A: O jogo agora é teórico, ganha quem acertar mais perguntas.

Uma moeda é viciada de tal forma que sair cara é duas vezes mais provável que sair coroa. Responda:

a) Qual a probabilidade de cara ganhar em cada lançamento?

b) Qual a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3 no segundo lançamento?

c) Qual a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3 no terceiro lançamento?

d) Qual a probabilidade de cara vencer uma melhor de 3?

e) Qual a probabilidade de coroa vencer uma melhor de 3?.

Jogo 05B: Sobre uma melhor de 5 com a moeda do exercício anterior, responda:

a) Qual a probabilidade de cara vencer no terceiro lançamento?

b) Qual a probabilidade de cara vencer no quarto lançamento?

c) Qual a probabilidade de cara vencer no quinto lançamento?

d) Qual a probabilidade de cara vencer o jogo?

Jogo 05C: Melhor de três no cara ou coroa, onde cara tem probabilidade p e coroa tem probabilidade q=1-p, qual a probabilidade de cara ganhar?

Jogo 06A: Melhor de sete no cara ou coroa, onde cara tem probabilidade p e coroa tem probabilidade q, qual a probabilidade de cara ganhar?

Jogo 06B: Jogo cara ou coroa com diferença de três, em que a probabilidade em cada lançamento de dar cara é p e coroa é q. O jogo acaba com vitória de cara se este abrir 3 pontos de vantagem, com vitória de coroa se este abrir 3 pontos de vantagem ou empatado se não for conseguida diferença de 3 em 10 lançamentos. Qual a probabilidade de cara vencer? E dar empate?

Jogo 07A: Sobre uma máquina de lançar moedas sabe-se que a face voltada para cima tem 70% de chances de ser o resultado após o lançamento e que, após ser jogada para cima, a moeda volta posição de lançamento. Em outras palavras, o resultado de um lançamento é face voltada para cima do seguinte (por exemplo: se o resultado do primeiro lançamento for cara, o segundo terá cara na face voltada pra cima).

Dessa vez o jogo funciona assim: o jogador fala o lançamento e o resultado que vai dar, por exemplo: cara no quinto lançamento.

a) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em cara no terceiro lançamento, se o jogo começar com a face coroa voltada para cima?

b)Com o jogo começando por cara, qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em cara no décimo lançamento? E no centésimo?

Jogo 07B: Sobre uma máquina de lançar dados não viciados sabe-se que a face voltada para cima tem 50% de chances de ser o resultado após o lançamento; as faces laterais têm as mesmas chances de ocorrer; a face inferior tem 20% de sair; que o jogo começa com 1 na face superior e que, após ser jogada para o alto, o dado volta posição de lançamento. Novamente o jogo consiste em se falar o lançamento e o resultado.

a) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em 2 no terceiro lançamento?

b) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em 3 no décimo lançamento?

c) Qual a probabilidade de vencer o jogador que aposta em 1 no centésimo lançamento?

d) Qual jogada tem mais chances de ganhar?

Jogo 07C: Uma moeda viciada de tal modo que, independente da face que esteja voltada pra cima na hora do lançamento, a probabilidade de sair cara é de 70%. Calcule:

a) Com o jogo começando por coroa, qual a probabilidade do resultado ser cara no terceiro lançamento?

b) Com o jogo começando por cara, qual a probabilidade do resultado ser cara no terceiro lançamento?

c) Qual a probabilidade do resultado ser cara no décimo lançamento?

d) Qual a probabilidade do resultado ser coroa no centésimo lançamento?