Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

**Thiago Moralles de Abreu**

# Modelos cosmológicos com gás relativístico reduzido e com constantes gravitacional e cosmológica variáveis

Juiz de Fora

2016

**Thiago Moralles de Abreu**

**Modelos cosmológicos com gás relativístico reduzido e com constantes gravitacional e cosmológica variáveis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Cosmologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Abreu, Thiago Moralles de.
Modelos cosmológicos com gás relativístico reduzido e com constantes gravitacional e cosmológica variáveis / Thiago Moralles de Abreu. – 2016.
54 f.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

1. Relatividade Geral. 2. Modelos cosmológicos. 3. Perturbações cosmológicas lineares. I. Shapiro, Ilya Lvovich. II. Título.

**Thiago Moralles de Abreu**

**Modelos cosmológicos com gás relativístico reduzido e com constantes gravitacional e cosmológica variáveis**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Cosmologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em: 24 de junho de 2016

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Professor Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Dra. Ena Erandy Ramírez Pérez
Universidade Federal de Juiz de Fora

**AGRADECIMENTOS**

A meu Deus por tudo que foi comigo e como foi.

À minha família inteira, em especial a estes: ao meu pai Paulo Geraldo de Abreu *(in memoriam)* pelo seu amor, empenho, estímulos e educação, coisas que guardo vivas carinhosamente na memória; a meu irmão Thomas Moralles de Abreu, pelos conselhos valiosos e sua grande preocupação para comigo; e principalmente a minha mãe, Maria Aparecida Moralles Pereira, por tudo isso e por sua ternura, paciência, conselho, fortaleza, dedicação e sacrifício, sem os quais não teria trilhado nem metade deste caminho.

À minha noiva, Ágnes de Souza Nascimento, por dividirmos tempo, experiências, conversas, dificuldades e conquistas dentro e fora da Universidade.

Ao meu orientador Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro pelos anos de iniciação científica, discussões e esclarecimentos e pelo apontamento de sugestões ímpares a esta dissertação.

Ao meu colega João Vitor Frossard pela leitura prévia deste trabalho e suas úteis sugestões de melhorias, principalmente gramaticais.

À banca avaliadora da pré-defesa, composta pelo meu orientador e professores Dr. Gil de Oliveira Neto e Dr. Wilson de Souza Melo, pelas observações e recomendações.

À banca examinadora, composta pelo meu orientador e por Prof. Dr. Júlio César Fabris, Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto e Dra. Ena Erandy Ramírez Pérez, pela leitura da dissertação e sugestões de aprimoramento.

A todos os colegas e professores que tive a oportunidade de conhecer e que agregaram a meu espírito experiências, conhecimentos e amizade.

À Universidade Federal de Juiz de Fora, da qual me orgulho de ter realizado minha formação.

## RESUMO

Na presente dissertação é apresentada uma revisão detalhada de modelos cosmológicos, incluindo a dinâmica de perturbações cosmológicas lineares para dois modelos que desempenham interesse do ponto de vista de possíveis aplicações. Todo material discutido é oriundo da literatura recente e não se apresenta elementos originais. Entretanto, o conhecimento desses modelos abre uma possibilidade de extensões que estão agora sob discussão e desenvolvimento. De início é feita uma sucinta exposição do Modelo Cosmológico Padrão, que pode ser associado com o modelo FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Este último descreve um Universo em expansão marcado pela homogeneidade e isotropia em grande escala. Após isso discute-se o modelo com fluido cósmico composto por gás relativístico reduzido, mais conhecido pela sigla RRG, do inglês "reduced relativistic gas". A equação de estado do modelo RRG tem uma correspondência bem próxima ao modelo de gás de partículas massivas com energias cinéticas relativísticas. Considera-se ainda as perturbações cosmológicas em torno do modelo RRG de fundo plano, homogêneo e isotrópico. Por fim, segue-se a discussão sobre a possibilidade de incluir perturbações na constante gravitacional $G$ e na constante cosmológica $\Lambda$, no ramo do modelo motivado por correções semiclássicas.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral. Modelos Cosmológicos. Perturbações Cosmológicas Lineares.

**ABSTRACT**

In this thesis we present a detailed review of some cosmological models, including the theory of linear cosmological perturbations for two distinct models which represent certain interest from the point of view of possible applications. All presented material comes from the recent literature and does not include original elements. However, the knowledge of these models opens a possibility of extensions which are now under discussion and development. At first it is presented a brief review of the Standard Cosmological Model, which can be associated with FLRW model (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). The latter describes an expanding Universe marked by homogeneity and isotropy on a large scale. After that we discuss the model composite by a cosmic fluid described by reduced relativistic gas, better known by the acronym RRG (reduced relativistic gas). The equation of state of the RRG model has a very close match to the model of gas of massive particles with relativistic kinetic energies. We consider the cosmological perturbations around the background of flat, homogeneous and isotropic RRG-based model. After that follows the discussion of the possibility of including perturbations of the gravitational constant $G$ and the cosmological constant $\Lambda$ within the model motivated by semiclassical corrections.

**Keywords:** General Relativity. Cosmological Models. Linear Cosmological Perturbations.

## SUMÁRIO

# 1 Introdução

Há cerca de 100 anos Albert Einstein propôs uma revolucionária teoria: a Relatividade Geral. Nela buscava ele estender os resultados da Relatividade Restrita a sistemas de referência não-inerciais e campos gravitacionais fortes e para isso lançou mão de geometria não-euclideana. Na inovadora teoria de gravitação relativística que dela surge, um campo gravitacional é visto como uma distorção da métrica do espaço-tempo, onde o tensor energia-momentum da matéria tem papel de fonte para as equações dinâmicas. Desde os seus primeiros testes até hoje, é a teoria mais bem sucedida em descrever as interações gravitacionais no nível macroscópico. A Relatividade Geral permite explicar fenômenos não explicáveis pela gravitação newtoniana, como o desvio da luz ao passar próxima de corpos massivos, o desvio no valor periélio da órbita de Mercúrio e as ondas gravitacionais (que foram detectadas recentemente nos experimentos LIGO/VIRGO [2], sendo ainda capaz de descrever convenientemente interações gravitacionais fortes, como aquelas presentes na fase final de colapso gravitacional (criação de buracos negros), estrelas de nêutrons e pulsares. Além disso, a Relatividade Geral abriu caminho para uma nova era em Cosmologia, que culminou na construção do Modelo Cosmológico Padrão, chamado de Modelo ΛCDM, uma parametrização do modelo Big Bang em concordância com os dados observacionais. O modelo assume que o meio cósmico é composto não só de matéria bariônica (a que é formada por átomos), mas também de matéria escura fria (em inglês CDM, de Cold Dark Matter), isto é, matéria escura não relativística, e constante cosmológica ($\Lambda$), esta última responsável pelo fenômeno observado de expansão acelerada do Universo. Como um modelo do tipo Big Bang Quente, prevê um Universo em expansão, marcado pela homogeneidade e isotropia espacial em grande escala, que surge de um ponto extremamente denso e quente num passado remoto. É tido como um modelo do tipo FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker), visto que sua dinâmica é descrita pelas equações de Friedmann-Lemaître e sua geometria pela métrica de Robertson-Walker.

Nesse sentido, a formação de estruturas no Universo em grande escala, como galáxias, aglomerados de galáxias, vazios, anisotropias na radiação cósmica de fundo em micro-ondas, é estudada através da teoria das perturbações cosmológicas [8, 19], que busca entender como se deu a evolução do Universo desde as épocas primordiais até culminar na forma como o conhecemos hoje, bem como de que maneira as estruturas hoje presentes podem evoluir. Para tanto, considera-se pequenas flutuações em grandezas cosmológicas importantes em torno do modelo de fundo FLRW e calcula-se sua evolução e dinâmica, sendo o crescimento dessas flutuações compreendidas como oriundas de instabilidade gravitacional. No caso em que se faz uso apenas de variações de primeira ordem tem-se a teoria de perturbações cosmológicas lineares, que será aqui desenvolvida para dois casos interessantes.

Como dito, o Modelo Cosmológico Padrão inclui constante cosmológica e matéria escura, ambas as quais contribuem para o balanço de energia total do Universo em acordo com dados observacionais. No entanto, além dele podem ser encontrados na literatura muitos outros modelos. Uma parte deles está relacionada com efeitos quânticos de vácuo, e outros simplesmente assumem uma forma *ad hoc* de equação do estado (ou algo equivalente) para a energia escura que vem a substituir a constante cosmológica, ou mesmo modelos alternativos que o fazem para a matéria escura. Na presente dissertação será apresentada uma revisão de dois modelos. Um deles é ligado à constante cosmológica variável devido a efeitos quânticos de vácuo e outro é um modelo simples modelo do gás relativístico reduzido, que procura dar uma descrição simplificada para matéria escura morna (em inglês, warm dark matter) ou levar em conta a interação de matéria bariônica com radiação.

O presente trabalho se estrutura da seguinte forma: Primeiramente se apresenta brevemente o Modelo Cosmológico Padrão, dando-se atenção ao princípio cosmológico, à evidência de suavidade na distribuição de matéria em grande escala, ao arcabouço da Relatividade Geral, à expansão do Universo, às equações de campo de Einstein, a métrica de Robertson-Walker, à equação de Friedmann-Lemaître, à constante cosmológica, à equação de fluido e de estado, aos modelos cosmológicos simples e aos principais parâmetros cosmológicos, bem como à respectiva distribuição do conteúdo do Universo, fornecida pelas observações astronômicas, que parametriza o modelo [5, 7, 15, 18, 20, 21, 25, 32, 33].

Após isso é explanado o modelo do gás relativístico reduzido, também chamado modelo RRG (do inglês "reduced relativistic gas"), desde a dedução da sua equação de estado, passando pelas equações da evolução da densidade e do parâmetro de Hubble, até o desenvolvimento das equações de primeira ordem em perturbação oriundas das equações de Einstein e das leis de conservação covariantes do tensor energia-momentum [6, 13, 11].

Mais adiante, se aborda o caso de constante gravitacional G e constante cosmológica $\Lambda$ variáveis no tempo, construindo-se um novo tensor energia-momentum generalizado, contendo a densidade $\rho_\Lambda$ de energia de vácuo, que ao ser inserido às equações de Einstein levam a novas leis de conservação mais gerais que as leis de conservação covariantes do tensor energia-momentum ordinário, resultante das identidades de Bianchi. São depois deduzidas também as equações de ordem zero e um para o modelo, encontrando-se a redução delas ao se assumir a validade da autoconservação covariante de matéria. Ainda se analisa o caso particular de matéria dominante e perturbações adiabáticas na constante cosmológica, e se mostra ainda independe do número de onda. Por fim, se demonstra as equações de evolução do contraste de densidade em função do parâmetro de redshift e em termos de parâmetros de densidade instantâneos [14, 28, 29]. Por fim são tecidas algumas considerações finais sobre o trabalho.

## 2 Modelo cosmológico padrão

O *Modelo Cosmológico Padrão* representa a melhor descrição, até o momento, do Universo observável. Também conhecido como *Modelo* $\Lambda CDM$, trata-se de uma parametrização do modelo Big Bang em concordância com os dados observacionais. Sua aceitação massiva pela comunidade científica veio com a descoberta, em 1998, da expansão acelerada do Universo. O modelo assume que o meio cósmico é composto não só de matéria bariônica (a que é formada por átomos), mas também de matéria escura fria (em inglês CDM, de Cold Dark Matter) e constante cosmológica ($\Lambda$), esta última responsável pelo fenômeno de expansão acelerada. Como um modelo do tipo Big Bang Quente, prevê um Universo em expansão, marcado pela homogeneidade e isotropia espacial em grande escala, que surge de um ponto extremamente denso e quente num passado remoto.

Os modelos do tipo Big Bang são conhecidos por estarem fundamentados no princípio cosmológico, na teoria da Relatividade Geral e na descrição do Universo como um fluido perfeito. Ver-se-á, individualmente, cada um desses pontos. Em primeiro lugar, o *princípio cosmológico* afirma que para escalas suficientemente grandes o Universo apresenta o mesmo aspecto em todos os lugares, independente do observador e da posição ocupada por ele no Universo. Para ser mais preciso, o princípio cosmológico demanda que o Universo em grande escala seja *homogêneo* e *isotrópico*, isto é, que ele tenha o mesmo aspecto, respectivamente, em todos os pontos e em todas as direções.

É óbvio de uma simples observação astronômica que o Universo não é homogêneo e isotrópico em escalas pequenas, cosmologicamente falando. Pode-se distinguir nele estrelas, galáxias, aglomerados globulares, nebulosas, aglomerados de galáxias, superaglomerados de galáxias e espaços vazios. Entretanto, para escalas extremamente grandes, de centenas de megaparsecs (1 megaparsec equivale a $3,086\ \times 10^{19}\ km$), se constata que o Universo deixa de apresentar as irregularidades e inomogeneidades de escalas menores e passa a obedecer ao princípio cosmológico. Diz-se que há uma *suavidade* da distribuição de matéria em grande escala. Observações desse tipo foram coletados pelas inspeções realizadas pelos projetos *2dF Galaxy Redshift Survey* [4] e *Sloan Digital Sky Survey* [1]. Elas mostram que o princípio cosmológico é uma boa aproximação para regiões da ordem do tamanho de milhões de galáxias.

O princípio cosmológico se mostra profundamente poderoso na construção de modelos cosmológicos quando é incorporado no arcabouço da *Relatividade Geral*, a teoria que fornece a mais bem sucedida descrição das interações gravitacionais no âmbito macroscópico. Esta teoria preserva a noção de espaço-tempo e o uso de coordenadas quadridimensionais e formalismo tensorial, provenientes da *Relatividade Restrita*, mas inova ao conceber o campo gravitacional como uma distorção do espaço-tempo. Neste caso, desempenha um importante papel o tensor métrica, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, que determina todas as propriedades geométricas do espaço-tempo curvilíneo (não euclideano) que surge ao se considerar a relatividade em referenciais não inerciais e, consequentemente, as propriedades do campo gravitacional em voga.

Na Relatividade Geral, há dois postulados fundamentais:

- O *princípio da relatividade*, que afirma que as leis da natureza são as mesmas em todos os referenciais;
- O *princípio da equivalência*, que declara que o campo gravitacional é *localmente equivalente* a um referencial não inercial.

Desse modo, o campo gravitacional passa a ser descrito pela métrica e como consequência o *elemento de linha* ds entre dois pontos vizinhos no espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.1}$$

onde aqui se está adotando a *notação de Einstein*: índices repetidos indicam soma sobre os índices. Mantém-se essa convenção em todo o texto.

A aplicação do princípio cosmológico à Relatividade Geral exige que a parte espacial da métrica tenha *curvatura constante*, visto que do contrário não haveria isotropia espacial. É possível mostrar por meio de cálculos relativamente simples que a parte espacial do elemento de linha se escreve como

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right), \tag{2.2}$$

em que $K$ indica a característica da sessão espacial no caso de universo homogêneo e isotrópico, podendo assumir os valores $-1, 0, 1$, que correspondem, respectivamente, a geometria hiperbólica, plana e esférica. Deve-se esclarecer que na expressão anterior se usou coordenadas esféricas para fins de simplificação.

Das observações de *desvio para o vermelho* do espectro de luz proveniente de galáxias distantes (redshift cosmológico), verifica-se um afastamento das galáxias umas das outras, sendo o movimento predominantemente suave, com as velocidades relativas proporcionais à correspondente distância intergalática. Este movimento dominante é expresso quantitativamente por meio de uma relação linear conhecida como *Lei de Hubble*, em homenagem ao astronomo Edwin Hubble, primeiro a observar o fenômeno em 1929. Não obstante, as galáxias possuem também movimentos peculiares, o que resulta, na prática, em pequenos desvios da Lei de Hubble para galáxias próximas de aglomerados ou mesmo galáxias próximas umas das outras. À parte desses movimentos particulares, o comportamento dominante indica que nosso Universo está se expandindo, isto é, aumentando suas dimensões com o tempo.

Ao se inserir na métrica acima, equação (2.1), um *"fator de escala"*, $a(t)$, e incluí-la na expressão para ds, chega-se ao elemento de linha da *métrica de Robertson-Walker*

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left( d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right], \tag{2.3}$$

onde aqui se utiliza o sistema de unidades naturais, no qual $c = 1$. Tal escolha é mantida em todo o trabalho.

Tendo em vista o entendimento do fenômeno de redshift cosmológico, pode-se interpretar o fator de escala como relacionado à expansão do Universo, de tal forma que $\dot{a}(t) > 0$, visto que o espaço aumenta com o tempo. Além disso, observações recentes (1998) de supernovas distantes mostraram que o Universo está se expandindo aceleradamente, isto é, $\ddot{a}(t) > 0$ [22, 24].

As equações fundamentais em Relatividade Geral são as *equações de campo de Einstein*, assim chamadas porque descrevem as propriedades e comportamento do campo gravitacional. Uma das formas de se deduzi-la é construindo uma ação do campo gravitacional através da especificação de um funcional da métrica e suas derivadas e somá-la à ação dos campos de matéria expressa pela definição dinâmica do *tensor energia-momentum*. Variando-se a ação total, chamada de *ação de Einstein-Hilbert*, obtém-se as equações de Einstein, quais sejam:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

em que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é conhecido como *tensor de Einstein*, sendo $R_{\mu\nu}$ e $R$, respectivamente, o *tensor de Ricci* e o *escalar de curvatura* (ou escalar de Ricci), provenientes de contrações do *tensor de curvatura* (ou tensor de Riemann-Christofell), $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, com a métrica, ou seja, entidades puramente geométricas.

Por outro lado, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum. A constante que aparece multiplicando o tensor $T_{\mu\nu}$ é obtida ao se comparar as equações de campo para o limite newtoniano de campos gravitacionais fracos e velocidades muito menores que a velocidade da luz no vácuo, sendo, portanto, $G$ a conhecida *constante gravitacional de Newton*. Escritas dessa forma, as equações de campo de Einstein reproduzem as equações newtonianas para a gravitação no limite não relativístico.

Deve-se enfatizar que, enquanto o tensor de Einstein desempenha o papel da curvatura do espaço-tempo, o tensor energia-momentum expressa a distribuição de matéria dentro dele. Sendo assim, a gravidade é concebida não como uma força no sentido usual, mas como um efeito da curvatura do espaço-tempo; esta, por sua vez, é produzida pela matéria nele contida.

Sobre os entidades geométricas presentes nas equações de campo de Einstein cabe um aparte: O tensor de curvatura de Riemann é um ente matemático que expressa a curvatura do espaço-tempo na teoria de Einstein. Isto porque em Relatividade Geral, o espaço-tempo é descrito por uma variedade pseudoriemanniana, isto é, um espaço topológico diferenciável localmente euclideano dotado de um tensor métrica não necessariamente positivamente definido. Em forma explícita se escreve como

$$R^{\gamma}{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^{\gamma}{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\gamma}{}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\tau}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}{}_{\lambda\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\tau\mu}. \tag{2.5}$$

As quantidades $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ são conhecidas como *símbolos de Christoffel* e são imprescindíveis ao se considerar grandezas no espaço-tempo curvo. O acréscimo de símbolos de Christoffel nas grandezas físicas tem a finalidade de manter o caráter tensorial delas, fazendo a transição do espaço-tempo plano da Relatividade Especial para o espaço-tempo curvo da Relatividade Geral. Ou seja, os símbolos generalizam as quantidades para coordenadas curvilíneas. Em termos mais rigorosos devem ser chamados de símbolos de Christoffel de segundo tipo ou ainda conexões afins ou mesmo coeficientes de conexão. Sob uma mudança de coordenadas $x^i \to x'^j$ os símbolos de Christoffel se transformam como

$$\Gamma'^{i}{}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}}\Gamma^l_{mn} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}. \tag{2.6}$$

Os outros tensores de curvatura são dados por

$$R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Finalmente, o tensor de curvatura obedece ainda à identidade de Bianchi, dada por

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} = 0. \tag{2.9}$$

Como se pode ver, as equações de campo de Einstein são ao todo dezesseis equações, decorrentes dos diferentes valores atribuíveis aos dois índices dos tensores $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$. A simetria do tensor de Einstein segue diretamente da simetria do tensor energia-momentum, resultando na diminuição do conjunto de equações para dez. Simetrias na métrica podem reduzir ainda mais o número de equações de Einstein independentes, como é o caso da métrica de Robertson-Walker, equação (2.3), para a qual há apenas duas componentes independentes do tensor de Einstein, a saber

$$G_{tt} = \frac{3}{a^2}\left(K + \dot{a}^2\right), \tag{2.10}$$

$$G_{rr} = G_{\theta\theta} = G_{\phi\phi} = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2}\left(K + \dot{a}^2\right), \tag{2.11}$$

que podem ser facilmente encontradas ao se calcular os tensores de curvatura para a métrica em questão.

Resta, afinal, encontrar o tensor de energia-momentum correspondente ao conteúdo material do Universo. Nos modelos Big Bang considera-se o Universo em grande escala como um fluido perfeito. Um tal fluido é desprovido de estresse de cisalhamento, pressões anisotrópicas e viscosidade, sendo caracterizado apenas pela sua quadrivelocidade $u^\mu(x)$ e suas densidade própria $\rho(x)$ e correspondente pressão isotrópica $p(x)$. Esta abordagem na prática toma os aglomerados de galáxias como partículas do fluido e concorda com o princípio cosmológico. Sendo assim, a expressão do tensor energia-momentum para o fluido perfeito é

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\mu}. \tag{2.12}$$

De modo que no referencial comovente, isto é, no referencial de um observador movendo-se com a expansão do Universo, tem-se

$$T_{\mu\nu} = diag\,(\rho, -p, -p, -p)\,. \tag{2.13}$$

Introduzindo (2.13) em (2.10) e (2.11) tem-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2.14}$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi Gp,, \tag{2.15}$$

onde a primeira das equações é conhecida como *equação de Friedmann*. Do uso de (2.14) e (2.15) pode-se extrair a *equação de aceleração*, também conhecida como *equação de Raychaudhuri*:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right). \tag{2.16}$$

Da lei de conservação covariante do tensor energia-momentum,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{2.17}$$

vem que

$$\nabla_\mu T^\mu_t = \partial_\mu T^\mu_t + \Gamma^\mu_{\mu\nu} T^\nu_t - \Gamma^\nu_{\mu t} T^\mu_\nu = 0, \tag{2.18}$$

onde se pode notar que a generalização da derivada parcial de um tensor para coordenadas curvilíneas, chamada de *derivada covariante*, consiste da derivada parcial do tensor acrescida de contrações convenientes dele com símbolos de Christoffel.

Os símbolos de Christofell relevantes para a equação acima podem ser calculados pela fórmula

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\tau}(\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}), \tag{2.19}$$

que relaciona essas quantidades com a métrica. De modo que se obtém

$$\Gamma^t_{tt} = 0; \quad \Gamma^r_{tr} = \Gamma^\theta_{t\theta} = \Gamma^\phi_{t\phi} = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{2.20}$$

Portanto, usando que $T^\mu_\nu = diag\,(\rho, -p, -p, -p)$, chega-se de (2.18) a

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + p\right) = 0, \tag{2.21}$$

que é conhecida como *equação de fluido* e fornece a evolução da densidade de matéria-energia com o tempo. Contudo, para resolver esta equação é necessário especificar a relação entre a pressão e a densidade, isto é, apontar uma *equação de estado* $p = p(\rho)$ apropriada para o fluido universal.

Como se vê, as equações de campo de Einstein preveem um Universo *dinâmico.* Entretanto, na época de Einstein, ele e outros acreditavam em um Universo *estático.* Numa tentativa de "corrigir" essa discrepância Einstein inseriu (1917) uma constante cosmológica $\Lambda$ às equações de campo, resultando em

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.22}$$

Neste caso, o papel da constante cosmológica então era trazer de volta a descrição de um Universo estático, o que vinha através da adoção de um sinal negativo para ela. Porém, observações realizadas pelo astrônomo Edwin Hubble (1929) deram evidências muito convincentes da expansão do Universo, o que levou a um abandono temporário da constante cosmológica. Ironicamente, em tempos mais recentes (década de 90), observações indicaram a presença de uma espécie de energia de vácuo no Universo, fazendo com que a constante cosmológica voltasse em peso aos cenários científicos, agora com outro papel. Isto ocorre porque é possível inserir uma constante cosmológica positiva pequena nas equações, obtendo-se a energia de vácuo, e ainda se ter um modelo de Universo dinâmico. Para isso, a densidade de energia de vácuo do Universo é definida em termos da constante cosmológica como

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{2.23}$$

A pressão efetiva $p_\Lambda$ correspondente à constante cosmológica é obtida fazendo-se

$$\begin{aligned} \rho &\to \rho + \rho_\Lambda, \\ p &\to p + p_\Lambda, \end{aligned}$$

o que ao ser inserido na equação de fluido, o que leva a

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \tag{2.24}$$

Com a introdução da constante cosmológica, a equação de Friedmann assume a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.25}$$

ficando conhecida como *equação de Friedmann-Lemaître.* Daí decorre o termo *modelos Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (modelos FLRW) para os modelos de Universo homogêneo e isotrópico com expansão e constante cosmológica, ou seja, aqueles com dinâmica descrita pela equação de Friedmann-Lemaître e com métrica de Robertson-Walker.

Consequentemente, a equação de aceleração se torna

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.26}$$

Este último caso é extremamente importante, visto que a constante cosmológica positiva suficientemente grande poderia explicar a expansão acelerada do Universo, conforme é atestada por observações. Isto porque $\Lambda$ atua contribuindo à aceleração $\ddot{a}$ e superando a atração gravitacional expressa no primeiro termo do membro direito da equação acima.

A fim de compreender como se processa a evolução do Universo e da densidade de matéria-energia é útil considerar alguns modelos simples, cada qual supondo um conteúdo material específico a preencher o Universo. Serão estudados apenas modelos com $K = 0$ para fins de exemplificação (Na prática, as observações astronômicas atuais indicam um valor nulo para K, o que justifica atentar para tais modelos). Seguem, então, os mesmos:

1. Universo preenchido por matéria e sem constante cosmológica:

   Neste caso, chama-se por "matéria" a abreviação de "matéria não relativística" e designa todo tipo de material com pressão negligenciável, isto é, com equação de estado $p = 0$. Outras terminologias comuns são "poeira" e "matéria fria" (cold matter). Resulta, então, da equação de Friedmann (2.14) e da equação de fluido (2.21), que

   $$a(t) \;\alpha\; t^{2/3} \quad \text{e} \quad \rho_m(t) \;\alpha\; a^{-3} \;\alpha\; t^{-2}, \tag{2.27}$$

   onde se tomou uma correspondente solução em potência de t.

2. Universo preenchido por radiação e sem constante cosmológica:

   Aqui "radiação" inclui não apenas partículas de luz, isto é, radiação eletromagnética, mas também partículas com velocidades relativísticas, como neutrinos. Outras nomenclaturas utilizadas são "matéria relativística" ou "matéria quente" (hot matter). Neste caso, a equação de estado que detêm é $p = \rho/3$. Assim,

   $$a(t) \;\alpha\; t^{1/2} \quad \text{e} \quad \rho_r(t) \;\alpha\; a^{-4} \;\alpha\; t^{-2}. \tag{2.28}$$

3. Universo preenchido por matéria e radiação:

   Neste caso a densidade de fluido é dada pela soma de ambos os fluidos

   $$\rho = \rho_m + \rho_r. \tag{2.29}$$

   Então, caso a radiação seja o termo dominante, tem-se

   $$a(t) \;\alpha\; t^{1/2}; \quad \rho_m \;\alpha\; t^{-3/2}; \quad \rho_r \;\alpha\; t^{-2}. \tag{2.30}$$

   Por outro lado, caso a matéria domine, resulta

   $$a(t) \;\alpha\; t^{2/3}; \quad \rho_m \;\alpha\; t^{-2}; \quad \rho_r \;\alpha\; t^{-8/3}. \tag{2.31}$$

4. Universo desprovido de conteúdo (matéria ou radiação) com constante cosmológica positiva:
$$a(t) \ \alpha \ e^{\sqrt{\Lambda/3}t}, \tag{2.32}$$
solução este conhecida como *universo de De Sitter*.

Por fim, cabe discorrer sobre alguns parâmetros que compõe o Modelo Cosmológico Padrão, os quais variam com o tempo, mas têm seus valores atuais fixados através de observações. São os valores atuais dos parâmetros cosmológicos que caracterizam o comportamento presente do Universo e sua composição. Dentre eles, tem-se:

1. Parâmetro de Hubble (ou taxa de expansão do Universo)

   O *parâmetro de Hubble* é definido em termos do fator de escala como
$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{2.33}$$
   Por outro lado, em termos do parâmetro de redshift z, dado por
$$1 + z = \frac{a_0}{a}, \tag{2.34}$$
   ele se escreve como
$$H(t) = -(1+z)^{-1}\dot{z}. \tag{2.35}$$
   O valor atual do parâmetro de Hubble é conhecido como *constante de Hubble*, $H_0$, e recentes estimativas [16] lhe fornecem os valores
$$H_0 = 72 - 74 \ kms^{-1}Mpc^{-1}, \tag{2.36}$$
   com erros típicos de $2 - 3 \ kms^{-1}Mpc^{-1}$, através de medições de tamanho e luminosidade de objetos astrofísicos individuais, e
$$H_0 = 67 - 68 \ kms^{-1}Mpc^{-1}, \tag{2.37}$$
   com erros típicos de $2-3 \ kms^{-1}Mpc^{-1}$, por meio de medidas provenientes do satélite Planck, que faz uso principalmente da análise do espectro de radiação cósmica de fundo em micro-ondas.

   Em termos do parâmetro de Hubble, a equação de Friedmann-Lemaître se escreve como
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \tag{2.38}$$
   E da mesma forma, notando que $H^2 + \dot{H} = \ddot{a}/a$ , a equação de Raychaudhuri com constante cosmológica (equação de aceleração) assume a forma
$$H^2 + \dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.39}$$

2. Parâmetro de densidade

O parâmetro de densidade dá a razão entre os diversos elementos constituintes do balanço total de energia universal em relação à densidade crítica. Para um dado valor de H, a densidade crítica $\rho_c(t)$ nada mais é do que o valor exigido para a densidade do conteúdo presente no Universo para que este tenha geometria plana $(K = 0)$ e seja desprovido de energia de vácuo $(\Lambda = 0)$. Da equação de Friedmann, equação (2.14), obtém-se

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.40}$$

Então, o *parâmetro de densidade* para a matéria, $\Omega_m$, é definido em termos da densidade crítica como sendo

$$\Omega_m(t) = \frac{\rho_m}{\rho_c}, \tag{2.41}$$

e representa a densidade do conteúdo material do Universo em relação à densidade crítica. De posse desses parâmetros, pode-se reescrever a equação de Friedmann-Lemaítre, equação (2.38), da seguinte maneira:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c\Omega_m - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.42}$$

Disto segue que

$$1 = \Omega_m - \frac{K}{a^2H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{2.43}$$

A partir daí se pode definir outros parâmetros de densidade, como o parâmetro de densidade de curvatura,

$$\Omega_K = -\frac{K}{a^2H^2}, \tag{2.44}$$

e o parâmetro de densidade de constante cosmológica,

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{2.45}$$

E portanto,

$$\Omega = 1, \quad onde \quad \Omega = \Omega_m + \Omega_K + \Omega_\Lambda. \tag{2.46}$$

Decorre, então, as seguintes condições geométricas:

- Universo aberto (geometria hiperbólica) :

$$0 < \Omega_m + \Omega_\Lambda < 1. \tag{2.47}$$

- Universo plano:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1. \tag{2.48}$$

- Universo fechado (geometria esférica):

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1. \tag{2.49}$$

Quanto à densidade de matéria-energia no Universo, cabe dizer que diversas observações astronômicas apontam que a maior parte dela provém de uma forma de matéria diferente da *matéria bariônica* (a que é formada por átomos, que são constituídos de prótons, nêutrons e elétrons), que não emite luz e só interage gravitacionalmente, sendo chamada pelos cientistas de *matéria escura*. De modo que:

$$\Omega_m = \Omega_{m_b} + \Omega_{m_e}, \tag{2.50}$$

onde $\Omega_{m_b}$ e $\Omega_{m_e}$ são, respectivamente, os parâmetros de densidade de matéria bariônica e matéria escura. As estimativas mais recentes para a distribuição de densidade do Universo no tempo presente podem ser vistas em [3] e [23]. Aproximando para duas casas decimais, elas são dadas por:

$$\Omega_{m_b} \approx 0,05; \quad \Omega_{m_e} \approx 0,26; \quad \Omega_\Lambda \approx 0,69; \quad \Omega_K \approx 0; \tag{2.51}$$

e são elas que parametrizam o Modelo Cosmológico Padrão. Tais estimativas indicam que o Universo observável possui geometria plana e apenas cerca de 5% dele é composto de matéria bariônica, estando os outros 95% distribuídos em duas formas exóticas: 26% em matéria escura e 69% em energia escura.

3. Parâmetro de desaceleração

O *parâmetro de desaceleração* $q(t)$ é uma quantidade adimensional que ilustra a intensidade da desaceleração do Universo. Medidas observacionais atuais mostram que seu valor no presente é negativo ($q_0 < 0$), o que significa que nosso Universo se expande aceleradamente. A definição formal desse parâmetro é

$$q(t) = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}. \tag{2.52}$$

O valor do parâmetro no tempo presente pode ser obtido da expansão do fator de escala em torno do tempo presente, $t_0$:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}\,(t_0)\,(t - t_0)^2 + ..., \tag{2.53}$$

que dividida por $a(t_0)$ resulta em

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0\,(t - t_0) - \frac{q_0}{2}H_0^2(t - t_0)^2 + ... \quad . \tag{2.54}$$

A quantia identificada como $q_0$ no termo de segunda ordem em $t$ na expansão é o parâmetro de desaceleração atual

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}\frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}, \tag{2.55}$$

muito útil na quantificação da expansão universal em observações cosmológicas.

O Modelo Cosmológico Padrão possui diversos outros conceitos e desdobramentos. Porém, tais pormenores não serão aqui desenvolvidos, visto não terem relevância direta com o conteúdo a ser explanado nos capítulos que se seguem. Entretanto, podem os mesmos serem encontrados em diversos livros-textos da Relatividade Geral e Cosmologia (dos quais se pode citar, por exemplo, [5, 7, 15, 18, 20, 21, 25, 32, 33]). O seguinte excerto, extraído da literatura, é muito animador e atesta o sucesso do Modelo Cosmológico Padrão:

*"Cinco peças de forte evidência em seu favor se sobressaem - a expansão do Universo, a idade predita do Universo, a existência e forma térmica da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, as abundâncias relativas de elementos leves preditas pela nucleossíntese cósmica, e a capacidade de prever as estruturas observadas na distribuição de galáxias e na radiação cósmica de fundo em micro-ondas."*[18]

Não obstante os muitos avanços e acertos do Modelo $\Lambda CDM$, é justo também destacar que o mesmo possui algumas dificuldades, às quais alimentam a busca por modelos mais abrangentes ou mesmo alternativos. Os inconvenientes mais óbvios são a introdução de duas componentes exóticas - a matéria escura e a energia escura - ainda não suficientemente bem compreendidas. Há, ainda, outros entraves que podem ser encontrados na literatura especializada. Dando seguimento ao que foi proposto, os próximos capítulos apresentam dois modelos distintos ao modelo padrão.

# 3 Modelo cosmológico com gás relativístico reduzido

A *teoria de perturbações cosmológicas* é um assunto vasto, com bases física e matemática bem consolidadas. Entretanto, não serão aqui expostos os pormenores que a fundamentam ou seus imediatos desdobramentos teóricos. Tão somente será explanado o mínimo necessário para as aplicações a serem desenvolvidas, a saber perturbações no modelo do gás relativístico reduzido (neste capítulo) e em modelos com parâmetros G e $\Lambda$ variáveis (no capítulo seguinte). De qualquer modo, uma excelente apresentação da teoria pode ser vista na revisão publicada por Ruth Durrer no capítulo 2 do volume 653 de Lecture Notes on Physics [8].

## 3.1 Introdução ao modelo do gás relativístico reduzido em Cosmologia

O modelo do gás relativístico reduzido é também conhecido pela sigla RRG, do inglês *Reduced Relativistic Gas*, e trata-se de um modelo para a descrição do comportamento de partículas massivas cuja abordagem mescla teoria cinética dos gases com relatividade especial. O modelo postula que todas as partículas do gás tenham a mesma energia cinética relativística, servindo como uma boa aproximação à distribuição canônica de Jüttner [17]. Em Cosmologia costuma-se utilizá-lo para a caracterização do comportamento da matéria escura, uma vez assumido que ela se porte como um gás de partículas massivas fracamente interagentes. O conteúdo a ser desenvolvido neste capítulo pode ser encontrado de forma concisa nas referências [6, 11, 13]. Aqui, entretanto, a discussão será concentrada especificamente nas equações dinâmicas do modelo lá apresentadas, só que reveladas de uma forma mais detalhada, expondo os caminhos matemáticos que se deve trilhar para obtê-las.

A demonstração da equação de estado do modelo do gás relativístico reduzido é bem simples. Para encontrá-la deve-se considerar um gás de partículas com velocidades relativísticas dentro de um recipiente e buscar uma expressão para a pressão exercida por ele sobre as paredes do recipiente. Como há conservação de energia cinética do gás, isso significa que as colisões são perfeitamente elásticas.

Considere, então, uma caixa de lados $a, b, c$. Uma partícula que colida contra a parede terá sua componente da velocidade perpendicular à parede invertida. Estabelecendo-se um sistema de eixos de maneira que $x$ seja o eixo perpendicular ao plano $bc$ no sentido para fora da caixa, ter-se-á como resultado de uma colisão da partícula com o plano uma mudança $v_x \to -v_x$. Sendo a massa dessa partícula m e sua velocidade total v, o seu momento relativístico $\tilde{p}_x$ varia conforme

$$\Delta\tilde{p}_x = \frac{m(-v_x)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{2mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.1}$$

em que $\beta = v/c$.

Pela conservação de momento, o momento transferido à parede se escreve como

$$\Delta p_x = \frac{2mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.2}$$

E o intervalo de tempo médio entre duas colisões no plano $bc$ é

$$\Delta t_x = \frac{2a}{v_x}. \tag{3.3}$$

De tal modo que a força exercida pela partícula contra a parede é dada por

$$F_x = \frac{mv_x^2}{a\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.4}$$

E segue que a pressão sobre o plano $bc$ é então

$$p = \frac{F_x}{bc} = \frac{mv_x^2}{abc\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mv_x^2}{V\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3.5}$$

onde $V = abc$ é o volume da caixa.

Esta expressão se restringe a apenas uma direção de colisão e deve-se, por isso, estendê-la a outras direções. Utilizando-se da isotropia das velocidades, tem-se

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{1}{3}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{3}v^2. \tag{3.6}$$

Logo, vem que

$$p = \frac{1}{3V}\frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.7}$$

Considerando que a partícula tenha energia $\epsilon$, vem

$$\epsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.8}$$

De modo que

$$\beta^2 = 1 - \left(\frac{mc^2}{\epsilon}\right)^2, \tag{3.9}$$

de maneira a se obter

$$p = \frac{\epsilon}{3V}\frac{v^2}{c^2} = \frac{\epsilon}{3V}\beta^2 = \frac{1}{3}\frac{\epsilon}{V}\left[1 - \left(\frac{mc^2}{\epsilon}\right)^2\right]. \tag{3.10}$$

Para um gás de N partículas, a pressão correspondente é

$$p = \frac{1}{3}\frac{N\epsilon}{V}\left[1 - \left(\frac{mc^2}{\epsilon}\right)^2\right]. \tag{3.11}$$

A densidade de energia do gás é, evidentemente,

$$\rho = n\epsilon \quad \text{em que} \quad n = \frac{N}{V}. \tag{3.12}$$

Assim, a expressão para a pressão do gás pode ser escrita como

$$p = \frac{\rho}{3}\left[1 - \left(\frac{mc^2}{\epsilon}\right)^2\right]. \tag{3.13}$$

Dado que a energia de repouso de uma partícula de massa m é $\epsilon_r = mc^2$, sucede que a densidade de energia de repouso será

$$\rho_r = n\epsilon_r = nmc^2. \tag{3.14}$$

A razão $\rho_r/\rho$, então, fornece

$$\frac{\rho_r}{\rho} = \frac{nmc^2}{n\epsilon} = \frac{mc^2}{\epsilon}. \tag{3.15}$$

Portanto, uma forma útil de apresentar a equação de estado do gás relativístico reduzido é

$$p = \frac{\rho}{3}\left[1 - \frac{\rho_r^2}{\rho^2}\right]. \tag{3.16}$$

É notório que o modelo RRG fornece uma equação de estado não estacionária do tipo $p = w(\rho)\rho$, ao invés de uma relação linear $p = w\rho$, com $w$ constante. Além disso, a equação interpola entre os casos de matéria ($p = 0$) e radiação ($p = \rho/3$), visto que para $\rho \approx \rho_r$ (partículas não relativísticas), a equação (3.16) se converte em $p \approx 0$ e para $\rho >> \rho_r$ (partículas ultra relativísticas) se converte em $p = \rho/3$.

Denotando por $\rho^0$ a densidade de energia do gás relativístico reduzido em $a = a_0$ e por $\rho_r^0$ a densidade de energia de repouso também em $a = a_0$, pode-se buscar uma solução RRG da equação de fluido, equação (2.21), em função de $\rho^0$ e $\rho_r^0$. De fato a construção de um modelo cosmológico de gás relativístico reduzido começa por encontrar a evolução da densidade de energia do gás através da aplicação da equação de estado (3.16) à equação de fluido. Expressando a equação de fluido, equação (2.21), na seguinte forma

$$\frac{d\rho}{\rho + p} = -3\frac{da}{a}, \tag{3.17}$$

e inserindo-se nela a expressão de p conforme (3.16), pode-se encontrar a evolução da densidade do gás relativístico reduzido, que, em função do parâmetro de redshift $z = -1 + a_0/a$ e da densidade de matéria atual $\Omega_m^0 = \rho^0/\rho_c^0$, é dada por

$$\rho(z) = \frac{\rho_c^0\Omega_m^0}{\sqrt{1+b^2}}(1+z)^3\sqrt{1+b^2(1+z)^2}, \tag{3.18}$$

onde se usou a definição útil

$$b = \frac{\rho_r^0}{\rho^0}. \tag{3.19}$$

Note que o parâmetro $\Omega_m^0$ do gás relativístico reduzido pode estar modelando a matéria escura, a matéria bariônica ou a soma delas. Seu uso depende de onde se aplicará o modelo. No que se segue será considerado o modelo composto

$$\Omega_m^0 = \Omega_{m_b}^0 + \Omega_{m_e}^0. \tag{3.20}$$

A dinâmica de evolução do parâmetro de Hubble para um meio cósmico preenchido com gás relativístico reduzido decorre da equação de Friedmann-Lemaître, equação (2.38), com densidade de matéria dada pela expressão (3.18). Assim,

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho(z) + \rho_\Lambda\right] - \frac{K}{{a_0}^2}. \tag{3.21}$$

Valendo-se de que $-K/{a_0}^2 = H_0^2\Omega_K^0$, é possível apresentar a equação acima como

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho(z) + \rho_\Lambda\right] + H_0^2\Omega_K^0(1+z)^2. \tag{3.22}$$

Substituindo-se a expressão de $\rho(z)$, equação (3.18), na equação acima e expressando $\rho_\Lambda$ em termos de $\Omega_\Lambda^0$, vem

$$H^2 = H_0^2\left[\Omega_K^0(1+z)^2 + \frac{\Omega_m^0}{\sqrt{1+b^2}}(1+z)^3\sqrt{1+b^2\,(1+z)^2} + \Omega_\Lambda^0\right]. \tag{3.23}$$

Para entender o comportamento quantitativo e qualitativo de algumas soluções cosmológicas da equação acima, bem como a descrição gráfica do modelo cosmológico com gás relativístico reduzido, é proveitoso consultar [6]. Por ora serão apresentados apenas aspectos relevantes para a descrição de perturbações cósmicas no modelo.

## 3.2 Dinâmica de perturbações no modelo do gás relativístico reduzido

Considere simultaneamente perturbações na métrica, na densidade de energia e na quadrivelocidade em coordenadas comoventes, tais que:

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad \rho \to \rho + \delta\rho \quad , \quad U^\alpha \to U^\alpha + \delta U^\alpha. \tag{3.24}$$

Aqui a métrica de fundo, $g_{\mu\nu}$ é a métrica de Robertson-Walker plana, $g_{\mu\nu} = diag\,(1, -a^2(t)\delta_{ij})$.

Por outro lado, identificando a razão

$$r = r(z) = \frac{\rho_r^2(z)}{\rho^2(z)}, \tag{3.25}$$

a perturbação na pressão será dada por

$$\delta p = \frac{\delta\rho\,(1-r)}{3}. \tag{3.26}$$

A componente tempo-tempo da equação de Einstein, equação tal (2.4), para a métrica de fundo fornece

$$\begin{aligned} R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R &= 8\pi G T_{tt}, \\ \Rightarrow \quad R_{tt} &= 8\pi G T_{tt} + \frac{1}{2}R. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para encontrar R, pode-se contrair a equação de campo de Einstein com a métrica de fundo $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R &= 8\pi G g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}, \\ \Rightarrow \quad R - \frac{1}{2}4R &= 8\pi G T^{\mu}_{\mu}, \\ \Rightarrow \quad R &= -8\pi G T, \end{aligned} \tag{3.28}$$

em que $T = T^{\mu}_{\mu}$ é o traço de $T_{\mu\nu}$.

Substituindo-se a equação (3.28) em (3.27) chega-se a

$$R_{tt} = 8\pi G\left(T_{tt} - \frac{1}{2}T\right). \tag{3.29}$$

Já se sabe, do capítulo anterior, equação (2.13), que no referencial comóvel

$$T_{tt} = \rho + \rho_{\Lambda}, \tag{3.30}$$

onde a densidade de constante cosmológica $\rho_{\Lambda}$ aparece por se estar considerando um tensor $T_{\mu\nu}$ mais geral na equação de Einstein, dado por

$$T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} + \rho_{\Lambda}g_{\mu\nu}. \tag{3.31}$$

De modo que o tensor de reduz à matriz diagonal

$$T_{\mu\nu} = diag\left(\rho + \rho_{\Lambda}, p + p_{\Lambda}, p + p_{\Lambda}, p + p_{\Lambda}\right). \tag{3.32}$$

Com isso, o traço de $T_{\mu\nu}$ se apresenta como

$$T = \left(\rho + \rho_{\Lambda}\right) - 3\left(p + p_{\Lambda}\right). \tag{3.33}$$

Daí, a inserção das equações (3.30) e (3.33) em (3.29) leva à equação

$$R_{tt} = 4\pi G\left(\rho + 3p + \rho_{\Lambda} + 3p_{\Lambda}\right). \tag{3.34}$$

Tomando-se a variação de $R_{tt}$, tem-se

$$\delta R_{tt} = 4\pi G\left(\delta\rho + 3\delta p\right), \tag{3.35}$$

uma vez que $\rho_\Lambda$ e $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ são constantes.

Utilizando-se a equação de estado do modelo RRG na forma dada por (3.26), a variação acima se expressa como

$$\delta R_{tt} = 4\pi G\delta\rho\left(2 - r\right). \tag{3.36}$$

Agora é preciso encontrar a quantidade geométrica $\delta R_{tt}$. Para isso, pode-se utilizar a equação de Palatini contraída

$$\delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\mu \delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \nabla_\beta \delta\Gamma^\mu_{\alpha\mu}, \tag{3.37}$$

uma vez calculadas as correspondentes variações dos símbolos de Christoffel:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau}\left(\nabla_\alpha h_{\beta\tau} + \nabla_\beta h_{\alpha\tau} - \nabla_\tau h_{\alpha\beta}\right). \tag{3.38}$$

Como a derivação covariante de um tensor é dada pela sua derivação ordinária acrescida de combinações do mesmo com os símbolos de Christoffel é necessário obter tais símbolos, dados por

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau}\left(\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}\right). \tag{3.39}$$

Cálculos diretos para a métrica de fundo de Robertson-Walker plana $g_{\mu\nu} = diag\left(1, -a^2(t)\delta_{ij}\right)$ mostram que os únicos símbolos não nulos são

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{ij} &= a\dot{a}\delta_{ij} = a^2 H\delta_{ij}, \\ \Gamma^k_{ti} &= \frac{a\dot{a}}{a^2}\delta^k_i = H\delta^k_i, \end{aligned} \tag{3.40}$$

sendo que se utilizou $g^{\mu\nu} = diag\left(1, -\frac{1}{a^2(t)}\delta^{ij}\right)$.

Ao efetuar a perturbação $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ da métrica, pode-se escolher um calibre conveniente. Neste caso, será considerado o *calibre síncrono*, no qual

$$h_{tt} = h_{ti} = 0. \tag{3.41}$$

Nesse calibre, as variações dos símbolos de Christoffel não nulas são

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^t_{ij} &= -\frac{1}{2}\dot{h}_{ij} + Hh_{ij}, \\ \delta\Gamma^k_{ti} &= -\frac{1}{2a^2}\delta^{kl}\left(\dot{h}_{il} - 2Hh_{il}\right), \\ \delta\Gamma^k_{ij} &= -\frac{1}{2a^2}\delta^{kl}\left(\partial_i h_{jl} + \partial_j h_{il} - \partial_l h_{ij}\right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Desdobramentos não nulos dessas fórmulas são obtidos por repetição de índices, tal que

$$\delta\Gamma^{i}_{ti} = -\frac{1}{2a^2}\left(\dot{h}_{ii} - 2Hh_{ii}\right) \quad , \quad \delta\Gamma^{k}_{ik} = -\frac{1}{2a^2}\partial_i h_{kk}. \tag{3.43}$$

Tendo já os valores necessários de $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ e $\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ para a métrica de fundo e referencial síncrono, pode-se empreender o cálculo de $\delta R_{tt}$, começando pela fórmula de Palatini contraída:

$$\begin{aligned}
\delta R_{tt} &= \nabla_\mu \delta\Gamma^{\mu}_{tt} - \nabla_t \delta\Gamma^{\mu}_{t\mu} \\
&= \nabla_t \left[\frac{1}{2a^2}\left(\dot{h}_{ii} - 2Hh_{ii}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\partial_t\left(\frac{\dot{h}_{ii}}{a^2}\right) + \frac{1}{2a^2}H\dot{h}_{ii} + \frac{1}{2a^2}H\dot{h}_{ii} \\
&- \partial_t\left(\frac{H}{a^2}h_{ii}\right) - \frac{H^2}{a^2}h_{ii} - \frac{H^2}{a^2}h_{ii},
\end{aligned}$$

o que permite escrever

$$\delta R_{tt} = \frac{1}{2}\partial_t\left[\frac{1}{a^2}\left(\dot{h}_{ii} - 2Hh_{ii}\right)\right] + H\left[\frac{1}{a^2}\left(\dot{h}_{ii} - 2Hh_{ii}\right)\right]. \tag{3.44}$$

Agora observando que

$$\partial_t\left(\frac{h_{ii}}{a^2}\right) = \frac{\dot{h}_{ii}}{a^2} - 2\frac{\dot{a}}{a^3}h_{ii} = \frac{1}{a^2}\left(\dot{h}_{ii} - 2Hh_{ii}\right). \tag{3.45}$$

segue que uma notação útil de ser introduzida é, portanto,

$$\hat{h} = \partial_t\left(\frac{h_{ii}}{a^2}\right). \tag{3.46}$$

Com isso, pode-se reescrever $\delta R_{tt}$ numa forma mais compacta, a saber

$$\delta R_{tt} = \frac{1}{2}\dot{\hat{h}} + H\hat{h}. \tag{3.47}$$

Igualando a equação (3.36), que advém do cálculo do tensor energia-momentum e da aplicação da equação de estado do modelo RRG, com a equação (3.47), oriunda de considerações geométricas de curvatura, obtém-se a primeira equação da dinâmica perturbativa:

$$\dot{\hat{h}} + 2H\hat{h} = 8\pi G\delta\rho\left(2 - r\right). \tag{3.48}$$

Para deixar a equação acima em função de z, convém notar que

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{d}{da} = Ha\frac{d}{da} = -\left(1+z\right)H\frac{d}{dz}. \tag{3.49}$$

Levando isso em conta pode-se escrever a primeira equação de perturbação como

$$\hat{h}' - \frac{2\hat{h}}{(1+z)} = -\frac{8\pi G}{H\left(1+z\right)}\delta\rho\left(2 - r\right), \tag{3.50}$$

onde se utiliza o sinal de apóstrofo (ou sobrescrito "linha") para representar a derivação em relação ao parâmetro de redshift.

Pode-se manipular a expressão acima para colocá-la numa forma mais interessante. Para isso, considere a equação de aceleração (2.39) como

$$\begin{aligned}\dot{H} + H^2 &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p - 2\rho_\Lambda\right), \\ &= -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho\left(2 - r\right) - 2\rho_\Lambda\right],\end{aligned} \tag{3.51}$$

onde na segunda linha se utilizou a equação de estado do modelo RRG na forma $p = \rho\left(1 - r\right)/3$.

Substituindo a equação (3.22) para $H^2$ em (3.51) e isolando $\rho(z)$ chega-se à expressão

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left[-2\dot{H} - 2H_0^2\Omega_K^0(1+z)^2\right]\frac{1}{4-r}. \tag{3.52}$$

Por outro lado, denotando $\rho_t = \rho(z) + \rho_\Lambda$ na equação (3.22), encontra-se

$$\rho_t = \frac{3}{8\pi G}\left[H^2 - H_0^2\Omega_K^0(1+z)^2\right]. \tag{3.53}$$

A razão entre as densidades será uma função $f_1(z)$ tal que

$$f_1(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_t(z)} = \frac{1}{4-r}\frac{\left[-2\dot{H} - 2H_0^2\Omega_K^0(1+z)^2\right]}{\left[H^2 - H_0^2\Omega_K^0(1+z)^2\right]}. \tag{3.54}$$

Utilizando-se a regra da cadeia dada por (3.49) vem que $\dot{H} = -\left(1+z\right)HH'$. Então, uma vez que $(H^2)' = 2HH'$, chega-se a

$$f_1(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_t(z)} = \frac{\left(1+z\right)\left(H^2\right)' - 2\Omega_K^0 H_0^2(1+z)^2}{\left[H^2 - \Omega_K^0 H_0^2(1+z)^2\right]\left(4-r\right)}. \tag{3.55}$$

Agora, definindo uma função $g(z)$ tal que

$$g(z) = \frac{\left(1+z\right)H}{3\left[H^2 - \Omega_K^0 H_0^2(1+z)^2\right]}, \tag{3.56}$$

a razão entre $f_1$ e $g$ usando, (3.55) e (3.56), é

$$\frac{f_1(z)}{g(z)} = \frac{3\left[H^2 - \Omega_K^0 H_0^2(1+z)^2\right]}{\left(1+z\right)H\left(4-r\right)}. \tag{3.57}$$

Usando a expressão obtida acima para $\rho$, equação (3.52), surge que

$$\frac{f_1(z)}{g(z)} = \frac{8\pi G}{H\left(1+z\right)}\rho. \tag{3.58}$$

Este resultado, ao ser inserido na equação de perturbação, equação (3.50), leva a uma expressão mais elegante para a *primeira equação de perturbação* do modelo do gás relativístico reduzido

$$\hat{h}' - \frac{2\hat{h}}{(1+z)} = -\frac{f_1(2-r)}{g}\delta, \tag{3.59}$$

onde se introduziu a notação $\delta = \delta\rho/\rho$, que é conhecida por *contraste de densidade.*

Outras equações de perturbação podem ser encontradas realizando-se a variação da lei de conservação covariante do tensor energia-momentum $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_\nu\right) = 0$, o que é perfeitamente equivalente a variar o tensor de Einstein, $\delta\left(\nabla_\mu G^\mu_\nu\right) = 0$. A variação é dada explicitamente por

$$\begin{aligned}
\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_\nu\right) &= \delta\left(\partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}T^\mu_\alpha\right) \\
&= \partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\delta T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\delta T^\mu_\alpha \\
&+ \delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^\alpha_\nu - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}T^\mu_\alpha \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Note que a variação da lei de conservação do tensor energia-momentum exige que se conheça não só os valores previamente calculados de $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ e $\delta\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, os quais dependem da métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ e sua perturbação $h_{\mu\nu}$, mas também de valores $T^\mu_\nu$ e $\delta T^\mu_\nu$ que dependerão ainda da quadrivelocidade $U^\alpha$ e sua perturbação $\delta U^\alpha$.

A expressão do tensor energia-momentum do fluido perfeito que se está procurando é

$$T^\mu_\nu = \left(\rho_t + p_t\right)U^\mu U_\nu - p_t\delta^\mu_\nu, \tag{3.61}$$

em que $\rho_t = \rho + \rho_\Lambda$ e $p_t = p + p_\Lambda$.

No referencial comóvel tem-se $U^t = U_t = 1$ e $U^i = U_i = 0$, o que leva aos seguintes valores não nulos de $T^\mu_\nu$:

$$T^t_t = \rho_t, \quad T^i_l = -p_t\delta^i_j. \tag{3.62}$$

Por outro lado, uma vez que se está considerando um observador movendo-se com a expansão do Universo (observador comóvel), tem-se $\delta U^t = 0$; e então

$$\begin{aligned}
&\delta T^t_t = \delta\rho, \quad \delta T^i_t = \left(\rho_t + p_t\right)\delta U^i, \\
&\delta T^t_j = \left(\rho_t + p_t\right)\delta U_j, \quad \delta T^i_j = -\delta p\delta^i_j.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Utilizando-se das notações $w = \rho_t + p_t$ e $\theta = \nabla_i\left(\delta U^i\right) = \partial_i\left(\delta U^i\right)$, serão realizados os cálculos, termo a termo, da variação da lei de conservação do tensor energia-momentum.

De início, para a componente $\nu = t$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu\left(\delta T^\mu_t\right) + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\left(\delta T^\alpha_t\right) - \Gamma^\alpha_{\mu t}\left(\delta T^\mu_\alpha\right) \\
&+ \delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^\alpha_t - \delta\Gamma^\alpha_{\mu t}T^\mu_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(\delta T^\mu_t\right) &= \partial_t\left(\delta T^t_t\right) + \partial_i\left(\delta T^i_t\right),\\ &= \partial_t\delta\rho + \partial_i\left(w\delta U^i\right),\\ &= \delta\dot{\rho} + w\theta.\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\mu\alpha}\delta T^\alpha_t &= \Gamma^\mu_{\mu t}\delta T^t_t + \Gamma^\mu_{\mu j}\delta T^j_t,\\ &= \Gamma^k_{kt}\delta T^t_t + \Gamma^k_{kj}\delta T^j_t,\\ &= H\delta^k_k T^t_t + 0,\\ &= 3H\delta\rho,\end{aligned} \tag{3.66}$$

visto que $\delta^k_k = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 3$.

$$\begin{aligned}-\Gamma^\alpha_{\mu t}\delta T^\mu_\alpha &= -\Gamma^t_{\mu t}\delta T^\mu_t - \Gamma^i_{\mu t}\delta T^\mu_i,\\ &= -\Gamma^i_{jt}\delta T^j_i,\\ &= -\left(H\delta^i_j\right)\left(-\delta p\delta^j_i\right),\\ &= 3H\delta p.\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^\alpha_t &= \delta\Gamma^\mu_{\mu t}T^t_t + \delta\Gamma^\mu_{\mu k}T^k_t,\\ &= \delta\Gamma^k_{kt}\rho_t,\\ &= -\frac{1}{2}\hat{h}\rho_t.\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}-\delta\Gamma^\alpha_{\mu t}T^\mu_\alpha &= -\delta\Gamma^t_{\mu t}T^\mu_t - \delta\Gamma^k_{\mu t}T^\mu_k,\\ &= -\delta\Gamma^k_{lt}T^l_k,\\ &= -\delta\Gamma^k_{lt}\left(-p_t\delta^l_k\right),\\ &= -\frac{1}{2}\hat{h}p_t.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Somando os termos dados pelas equações (3.65) até (3.69) e igualando a zero, vem

$$\delta\dot{\rho} + w\theta + 3H\delta w - \frac{1}{2}\hat{h}w = 0. \tag{3.70}$$

Divindo-se a equação acima por $\rho$ e levando em conta que

$$\dot{\delta} = \dot{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)} = \frac{\delta\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho}\delta, \tag{3.71}$$

encontra-se

$$\dot{\delta} + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\delta + \frac{w}{\rho}\theta + 3H\frac{\delta w}{\rho} - \frac{1}{2}\hat{h}\frac{w}{\rho} = 0. \tag{3.72}$$

Uma vez que $w = \rho_t + p_t = \rho + p$, então, pode-se reescrever a equação de estado do gás relativístico reduzido como

$$w = \frac{\rho}{3}\left(4 - r\right), \tag{3.73}$$

que substituída em (3.72) fornece

$$\dot{\delta} + \frac{1}{3}\left(4 - r\right)\left(\theta - \frac{1}{2}\hat{h}\right) + H\left(4 - r + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\frac{1}{H}\right)\delta = 0. \tag{3.74}$$

Passando-se da derivada temporal à derivada em relação a z, conforme a equação (3.49), obtém-se

$$\delta' - \frac{4 - r}{3H\left(1 + z\right)}\left(\theta - \frac{1}{2}\hat{h}\right) - \frac{1}{\left(1 + z\right)}\left[4 - r - \left(1 + z\right)\frac{\rho'}{\rho}\right]\delta = 0. \tag{3.75}$$

Por fim, definindo-se uma nova variável $v = f_1\theta$, a equação de perturbação originária da variação da lei de conservação covariante de $T_{\mu\nu}$ para $\nu = t$ torna-se, enfim

$$\delta' - \frac{1}{\left(1 + z\right)}\left[4 - r - \frac{\left(1 + z\right)\rho'}{\rho}\right]\delta + \frac{4 - r}{3H\left(1 + z\right)}\left(\frac{\hat{h}}{2} - \frac{v}{f_1}\right) = 0, \tag{3.76}$$

que é a *segunda equação de perturbação* do modelo.

Agora, procedendo analogamente para a componente $\nu = i$ da variação $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_\nu\right)$, tem-se

$$\partial_\mu\left(\delta T^\mu_i\right) + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\delta T^\alpha_i - \Gamma^\alpha_{\mu i}\delta T^\mu_\alpha + \delta\Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^\alpha_i - \delta\Gamma^\alpha_{\mu i}T^\mu_\alpha = 0. \tag{3.77}$$

O cálculo de cada componente acima fornece

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(\delta T^\mu_i\right) &= \partial_t\left(\delta T^t_i\right) + \partial_j\left(\delta T^j_i\right), \\
&= \partial_t\left(w\delta U^i\right) + \partial_j\left(-\delta p\delta^j_i\right), \\
&= \dot{w}\delta U_i + w\partial_t\left(\delta U_i\right) - \partial_i\left(\delta p\right), \\
&= \dot{w}\delta U^i g_i i + w\partial_t\left(\delta U^i g_i i\right) - \partial_i\left(\delta p\right), \\
&= -a^2\dot{w}\delta U^i - 2wa\dot{a}\delta U^i - a^2 w\partial_t\left(\delta U^i\right) - \partial_i\left(\delta p\right).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu_{\mu\alpha}\left(\delta T^\alpha_i\right) &= \Gamma^\mu_{\mu t}\delta T^t_i + \Gamma^\mu_{\mu j}\delta T^j_i, \\
&= \Gamma^k_{kt}\delta T^t_i + \Gamma^k_{kj}\delta T^j_i, \\
&= 3H\left(w\delta U_i\right), \\
&= -3a^2 H w\delta U^i.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$
\begin{aligned}
-\Gamma^{\alpha}_{\mu i}\delta T^{\mu}_{\alpha} &= -\Gamma^{t}_{\mu i}\delta T^{\mu}_{t} - \Gamma^{k}_{\mu i}\delta T^{\mu}_{k}, \\
&= -\Gamma^{t}_{li}\delta T^{l}_{t} - \Gamma^{k}_{ti}\delta T^{t}_{k}, \\
&= -a^2 H\delta_{li} w\delta U^i - H\delta^k_i w\delta U^k g_{kk}, \\
&= -a^2 Hw\delta U^i + a^2 Hw\delta U^i, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.80}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha}T^{\alpha}_{i} &= \delta T^{\mu}_{\mu t}T^{t}_{i} + \delta T^{\mu}_{\mu k}T^{k}_{i}, \\
&= \delta T^{l}_{lk}T^{l}_{i}, \\
&= -\frac{1}{2a^2}\partial_k h_{ll}\left(-p_t\delta^l_i\right), \\
&= \frac{1}{2a^2}\partial_k h_{ii} p_t.
\end{aligned} \tag{3.81}
$$

$$
\begin{aligned}
-\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu i}T^{\mu}_{\alpha} &= -\delta\Gamma^{t}_{\mu i}T^{\mu}_{t} - \delta\Gamma^{k}_{\mu i}T^{\mu}_{k}, \\
&= -\delta\Gamma^{k}_{li}T^{l}_{k}, \\
&= -\delta\Gamma^{k}_{li}\left(-p_t\delta^l_k\right), \\
&= \delta\Gamma^{k}_{ki}p_t, \\
&= -\frac{1}{2a^2}\partial_i h_{kk} p_t.
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

Somando-se os termos das equações (3.78) até (3.82) e igualando a zero, vem

$$
-a^2\dot{w}\delta U^i - 2wa\dot{a}\delta U^i - a^2 w\partial_t\left(\delta U^i\right) - \partial_i\left(\delta p\right) - 3a^2 Hw\delta U^i = 0. \tag{3.83}
$$

Dividindo-se a equação por $a^2$ e levando em conta que $H = \dot{a}/a$, encontra-se

$$
\dot{w}\delta U^i + 5Hw\delta U^i + w\delta\dot{U}^i - \partial^i\left(\delta p\right) = 0, \tag{3.84}
$$

onde se usou que $\partial_i = g_{ii}\partial^i = -a^2\partial^i$.

Dividindo-se ainda a equação por $\rho$ e aplicando a ela a derivada espacial $\partial_i$, pode-se reescrevê-la como

$$
\frac{\dot{w}}{\rho}\theta + 5\frac{w}{\rho}H\theta + \frac{w}{\rho}\dot{\theta} - \partial_i\partial^i\left(\frac{\delta p}{\rho}\right) = 0. \tag{3.85}
$$

O último membro do lado esquerdo da equação pode ser desenvolvido como

$$
\begin{aligned}
-\partial_i\partial^i\left(\frac{\delta p}{\rho}\right) &= \frac{1}{a^2}\partial_i\partial_i\left(\frac{\delta p}{\rho}\right) = \frac{1}{a^2}\partial_i\partial_i\frac{1}{\rho}\left[\frac{\delta\rho}{3}\left(1-r\right)\right] \\
&= \frac{1}{3a^2}\left(1-r\right)\partial_i\partial_i\delta.
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

Inserindo-se este desenvolvimento na equação (3.85) e multiplicando-a por $\rho/w$ é possível expressá-la como

$$
\dot{\theta} + \left(\frac{\dot{w}}{w} + 5H\right)\theta + \frac{1}{a^2}\frac{(1-r)}{3w}\partial_i\partial_i\rho\delta = 0. \tag{3.87}
$$

O uso da expansão de Fourier no termo $\delta$ conduz a

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_i\delta\left(\mathbf{x},z\right) &= \int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\delta\left(\mathbf{k},z\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
&= \int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\delta\left(\mathbf{k},z\right)\partial_i\partial_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
&= -k^2\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\delta\left(\mathbf{k},z\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\
&= -k^2\delta\left(\mathbf{x},z\right), \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

onde $k=|\mathbf{k}|$ é o número de onda.

Com isso, a equação de perturbação fica

$$\dot{\theta}+\left(\frac{\dot{w}}{w}+5H\right)\theta-\frac{k^2}{a^2}\frac{1-r}{3w}\rho\delta=0. \qquad (3.89)$$

Passando-se para a dependência em $z$ através do uso da equação (3.49) consegue-se

$$\theta'+\frac{w'}{w}\theta-\frac{5}{1+z}\theta+\frac{1}{H\left(1+z\right)}\frac{k^2}{a^2}\frac{1-r}{3w}\rho\delta=0. \qquad (3.90)$$

A derivada $w'$ pode ser obtida da expressão (3.73) levando-se em consideração que $r=r(z)$, de forma que

$$w'=\frac{\rho'}{3}\left(4-r\right)-\frac{\rho}{3}r,' \qquad (3.91)$$

ao ser inserida na equação fornece

$$\theta'+\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{r'}{4-r}-\frac{5}{1+z}\right)\theta+\left(1+z\right)\frac{k^2}{H}\frac{1-r}{4-r}\delta=0, \qquad (3.92)$$

onde se usou que $a=a_0/\left(1+z\right)$ e $a_0=1$.

Expressando-se $\theta$ em função da variável $v=f_1\theta$, a equação de perturbação originária da variação da lei de conservação covariante de $T_{\mu\nu}$ para $\nu=i$ torna-se, enfim

$$\begin{aligned}
v'+\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{r'}{4-r}-\frac{5}{1+z}-\frac{f_1'}{f_1}\right)v \\
+\frac{k^2\left(1+z\right)f_1}{H}\frac{1-r}{4-r}\delta=0. \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

que é a terceira equação de perturbação do modelo.

Com isso, a dinâmica de perturbações para o modelo do gás relativístico reduzido se resume às três equações (3.59), (3.76) e (3.93), oriundas, respectivamente das perturbações $\delta R_{tt}$, $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_t\right)$ e $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_i\right)$.

Aqui termina a discussão sobre o modelo RRG. Para conhecer mais aspectos interessantes, como a escolha de condições iniciais para as equações através do uso de funções de transferência, a comparação do modelo com dados do 2dF Galaxy Redshift Survey e uso do parâmetro de densidade atuais provindos do WMAP, além da determinação de um limite superior para o parâmetro b em (3.19), a saber de $b \leq 3 \times 10^{-5} \approx 4 \times 10^{-5}$, e o significado físico dessa restrição como sendo um limite para a velocidade média das partículas relativísticas de matéria escura do tempo presente do Universo na forma $v \leq v_0 \approx 10 - 12\ km/s$, dentre outras discussões interessantes, deve-se consultar [11] e também [12] Para estudar a dinâmica da interação fóton-bárion através do modelo RRG com bárions e matéria escura descritos como um gás de partículas massivas relativísticas e comparação com o modelo padrão, deve-se ler [13].

As equações dinâmicas aqui apresentadas podem ser facilmente generalizadas para outros modelos, inclusive com constante cosmológica variável, o que representaria um problema novo. A intenção deste autor é buscar desenvolver essa generalização em trabalhos futuros.

# 4 Modelos cosmológicos com G e $\Lambda$ variáveis

É mais do que natural pensar que as constantes de gravidade $G$ e cosmológica $\Lambda$ sejam estáticas, afinal, como os próprios nomes indicam, elas são constantes. Pensar nelas como variáveis dinâmicas pode, à primeira vista, soar estranho. Desde séculos cientistas fazem experiências para determinar o valor de $G$ e nada nelas aponta para uma possível evolução dela com o tempo. Além disso, medições astronômicas das mais diversas sugerem um valor aparentemente fixo de $\Lambda$. Soma-se a isso o fato de que a suavidade da distribuição de matéria em grande escala apoia o uso do princípio cosmológico na descrição da métrica universal. E a métrica homogênea e isotrópica geral de Robertson-Walker não permite a existência de gradientes espaciais em $\Lambda$.

Contudo, apesar de todas essas aparentes objeções, nada impede que as constantes $G$ e $\Lambda$ possuam uma dependência temporal ainda não detectada, isto é, que dependam de alguma forma com o tempo cósmico $t$, de modo que $G = G(t)$ e $\Lambda = \Lambda(t)$, ou seja, $G = G(z)$ e $\Lambda = \Lambda(z)$, em termos do parâmetro de redshift. Na prática essa hipótese - que não fere o princípio cosmológico - pode representar uma dependência dessas "constantes- ou melhor dizendo, parâmetros - com a escala de energia típica do Universo, que pode ser exprimida por uma relação com o parâmetro de Hubble $H$.

É importante destacar que o assunto a ser desenvolvido neste capítulo não é original. Ele pode ser encontrado sucintamente nas referências [14, 28, 29]. Entretanto, aqui será dado um enfoque mais direcionado à dinâmica do modelo, conjuntamente com os detalhes técnicos e algébricos omitidos nos respectivos artigos citados.

Dito isto, prosseguir-se-á, na seção que segue, à discussão de modelos com $G$ e $\Lambda$ dinâmicos e suas equações principais.

## 4.1 Modelos cosmológicos com $G$ e $\Lambda$ variáveis

É sabido que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ satisfaz à *identidade de Bianchi*, a qual, após contrações de índices, pode ser posta na forma de uma lei de conservação covariante, dada por

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \tag{4.1}$$

Por outro lado, as equações de campo de Einstein com constante cosmológica podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu}, \tag{4.2}$$

isto é, especificando-se um novo tensor energia-momentum generalizado $\tilde{T}_{\mu\nu}$, que abarca o tensor energia-momentum ordinário $T_{\mu\nu}$ junto com uma contribuição referente ao termo de constante cosmológica, dado por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \rho_\Lambda g_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

em que $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$, equação (2.23), é a densidade de constante cosmológica, também chamada de densidade de energia de vácuo.

Sendo assim, a identidade de Bianchi, equação (4.1), conduz naturalmente a

$$\nabla_\mu \left( G\tilde{T}_{\mu\nu} \right) = 0. \tag{4.4}$$

O próximo passo na identificação de modelos com parâmetros $G$ e $\Lambda$ variáveis é desenvolver explicitamente a expressão acima, o que leva a

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \left[ G \left( T^\mu_\nu + \delta^\mu_\nu \rho_\Lambda \right) \right] + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \left[ G \left( T^\lambda_\nu + \delta^\lambda_\nu \rho_\Lambda \right) \right] - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \left[ G \left( T^\mu_\lambda + \delta^\mu_\lambda \rho_\Lambda \right) \right] \\
&= \partial_0 \left[ G \left( T^0_\nu + \delta^0_\nu \rho_\Lambda \right) \right] + \partial_i \left[ G \left( T^i_\nu + \delta^i_\nu \rho_\Lambda \right) \right] \\
&+ \Gamma^0_{0\lambda} \left[ G \left( T^\lambda_\nu + \delta^\lambda_\nu \rho_\Lambda \right) \right] + \Gamma^i_{i\lambda} \left[ G \left( T^\lambda_\nu + \delta^\lambda_\nu \rho_\Lambda \right) \right] \\
&- \Gamma^\lambda_{0\nu} \left[ G \left( T^0_\lambda + \delta^0_\lambda \rho_\Lambda \right) \right] - \Gamma^\lambda_{i\nu} \left[ G \left( T^i_\lambda + \delta^i_\nu \rho_\Lambda \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde se mudou a notação dos índices das componentes de $\mu = t,\ i$ para $\mu = 0,\ i$ com $i = 1,\ 2,\ 3$.

Para continuar deve-se lembrar os símbolos de Christoffel para a métrica de fundo de Robertson-Walker plana e o tensor energia-momentum do fluido perfeito no referencial comóvel, cujas componentes, já vistas nas equações (3.40) e (2.13) são dadas por

$$\Gamma^0_{ij} = a^2 H \delta_{ij} \quad , \quad \Gamma^j_{0i} = H\delta^j_i, \tag{4.6}$$

$$T^0_0 = \rho_m \quad , \quad T^j_i = -p_m \delta^j_i, \tag{4.7}$$

onde se utilizou a notação $\rho_m$ e $p_m$ para indicar, respectivamente, a densidade de matéria/radiação e a pressão de matéria/radiação.

Inserindo esses valores à equação (4.5) decorre que

$$\frac{d}{dt} \left[ G \left( \rho_m + \rho_\Lambda \right) \right] + H\delta^i_i G \left( \rho_m + \rho_\Lambda \right) - H\delta^i_i G \left( -p_m - p_\Lambda \right) = 0. \tag{4.8}$$

Daí resulta uma nova lei de conservação, dada por

$$\frac{d}{dt} \left[ G \left( \rho_m + \rho_\Lambda \right) \right] + 3GH \left( \rho_m + p_m \right) = 0. \tag{4.9}$$

É digno de nota que a equação acima permite transferências de energia entre as variáveis $\rho_m$ e $\rho_\Lambda$ caso $\dot{\rho}_\Lambda \neq 0$, ou ainda que $G$ contribua no saldo de energia, caso $\dot{G} \neq 0$.

Numa forma explícita a lei de conservação toma a forma

$$\dot{G} \left( \rho_m + \rho_\Lambda \right) + G \left[ \dot{\rho}_m + 3H \left( \rho_m + p_m \right) \right] + G\dot{\rho}_\Lambda = 0. \tag{4.10}$$

Convém agora analisar casos particulares dessa equação, dados a seguir:

1. $G$ e $\rho_\Lambda$ são ambos constantes:

   Neste caso o modelo se reduz à lei de conservação para matéria/radiação já conhecida do modelo cosmológico padrão

$$\dot{\rho}_m + 3H\left(\rho_m + p_m\right) = 0. \tag{4.11}$$

2. $G$ constante e $\rho_\Lambda$ variável:

   Tem-se, então, uma nova lei de conservação que combina contribuições de matéria/radiação com energia de vácuo

$$\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_m + 3H\left(\rho_m + p_m\right) = 0. \tag{4.12}$$

   Note que, uma vez que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, segue que a lei acima pode ser expressa como

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + p\right) = 0, \tag{4.13}$$

   em que $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$. Além disso, caso a equação (4.11) se verifique, então resulta de (4.12) que

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_\Lambda \text{ é constante no tempo.} \tag{4.14}$$

3. $G$ variável e $\rho_\Lambda$ constante:

   Neste caso ocorre uma lei de conservação para $G$, a saber

$$\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\left[\dot{\rho}_m + 3H\left(\rho_m + p_m\right)\right] = 0, \tag{4.15}$$

   que no caso de (4.11) ser verificada leva a

$$\dot{G} = 0 \quad \Rightarrow \quad G \text{ é constante no tempo.} \tag{4.16}$$

4. $G$ e $\rho_\Lambda$ variáveis sem troca de energia entre matéria e vácuo:

   Não havendo troca de energia entre matéria e vácuo, a lei de conservação (4.11) da cosmologia padrão continua valendo independentemente, de modo a se obter uma lei de evolução para $G$ e $\rho_\Lambda$, dada por

$$\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\dot{\rho}_\Lambda = 0. \tag{4.17}$$

Nos modelos expressos pelas equações (4.11) e (4.17) a matéria se auto-conserva, evoluindo por si só na forma da solução da equação (4.11). Esta solução é facil de se obter. Para isso, considere a definição

$$\omega_m = \frac{p_m}{\rho_m}, \tag{4.18}$$

que nada mais é do que o parâmetro da equação de estado que assume o valor 0 para o caso de matéria não relativística e 1/3 para matéria relativística. Ao ser posta em (4.11) esta definição faz com que se possa escrever

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m\left(1+\omega_m\right) = 0. \tag{4.19}$$

Considerando que $H = \dot{a}/a$, pode-se expressar a equação acima na forma diferencial

$$\frac{d\rho_m}{\rho_m} + 3\left(1+\omega_m\right)\frac{da}{a} = 0, \tag{4.20}$$

cuja integração, levando-se em conta o parâmetro z, leva a

$$\rho_m(a) = \rho_m^0 a^{-3(1+\omega_m)} = \rho_m^0\left(1+z\right)^{3(1+\omega_m)}, \tag{4.21}$$

em que $\rho_m^0$ é a densidade de matéria/radiação no tempo $t_0$ presente e $a_0 = a(t_0) = 1$.

Na seção seguinte serão discutidas as perturbações cosmológicas em modelos com $G$ e $\rho_\Lambda$ variáveis assumida a lei de conservação (4.11) para matéria/radiação, isto é, modelos com evolução dada por (4.17).

## 4.2 Dinâmica de perturbação em modelos com $G$ e $\Lambda$ variáveis sem troca de energia entre matéria e vácuo

Para efetuar a análise de perturbações cosmológicas no modelo com $G$ e $\Lambda$ variáveis, deve-se perturbar as equações de Einstein com constante cosmológica (4.2) na forma de uma variação do tensor de Einstein, $\delta G_{\mu\nu}$, e de uma variação da identidade de Bianchi, $\delta\left(\nabla_\mu G^{\mu\nu}\right) = 0$. Além disso, para o caso em estudo, onde inexiste troca de energia entre matéria e vácuo, será preciso considerar a variação da lei de conservação covariante do tensor energia-momentum. Para esse intento será necessário realizar não só perturbações na métrica e na densidade de matéria/radiaçao, como também na densidade de energia de vácuo e na constante gravitacional.

A métrica de fundo (métrica não perturbada) utilizada é a métrica de Robertson-Walker homogênea e isotrópica plana

$$g_{\mu\nu} = diag\left(1, -a^2(t)\delta_{ij}\right). \tag{4.22}$$

A fim de prosseguir com a perturbação das equações de Einstein considere a contração da equação (4.2) com $g^{\mu\nu}$. Ela conduz a

$$-R = 8\pi G\tilde{T}, \tag{4.23}$$

em que $\tilde{T} = \tilde{T}^\mu_\mu$ é o traço do tensor energia-momentum generalizado, dado por (4.3).

Agora, usando este resultado nas equações de campo, (4.2) depois de isolar $R_{\mu\nu}$, vem

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= 8\pi G\left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{1}{8\pi G}R\right) \\ &= 8\pi G\left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{T}\right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

O tensor energia-momentum pode ser escrito em função da quadrivelocidade do fluido cosmológico como

$$T_{\mu}^{\nu} = (\rho + p)\, U_{\mu}U^{\nu} - p\delta_{\mu}^{\nu}, \tag{4.25}$$

em que

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda, \tag{4.26}$$

$$p = p_m + p_\Lambda = \omega_m\rho_m - \rho_\Lambda, \tag{4.27}$$

e se utilizou o fato de que

$$\omega_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1. \tag{4.28}$$

Para implementar as perturbações faz-se o mesmo procedimento do capítulo 3, agora incluindo perturbações em $\rho_\Lambda$ e $G$, ou seja,

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{4.29}$$

$$\rho_m \to \rho_m + \delta\rho_m, \tag{4.30}$$

$$\rho_\Lambda \to \rho_\Lambda + \delta\rho_\Lambda, \tag{4.31}$$

$$p_m \to p_m + \delta p_m, \tag{4.32}$$

$$p_\Lambda \to p_\Lambda + \delta p_\Lambda, \tag{4.33}$$

$$U^\mu \to U^\mu + \delta U^\mu, \tag{4.34}$$

$$G \to G + \delta G. \tag{4.35}$$

Como foi feito no capítulo anterior, será escolhido o calibre síncrono para se estudar as perturbações da matéria. Ele é dado pela propriedade

$$h_{00} = h_{0i} = 0. \tag{4.36}$$

A única diferença da dinâmica de perturbações aqui realizada para a do modelo padrão é que se inclui as perturbações $\delta\rho_\Lambda$ (e consequentemente $\delta p_\Lambda$) e $\delta G$.

Uma vez que se está considerando o observador comóvel, tem-se

$$\delta U^\mu = \left(0, \delta U^i\right). \tag{4.37}$$

A dinâmica de perturbação do modelo com $G$ e $\rho_\Lambda$ variáveis resultará da variação em primeira ordem tanto da componente tempo-tempo das equações de Einstein, (2.4), quanto das componentes da identidade de Bianchi, (4.1). A mudança em relação ao modelo padrão é que agora não se perturba simplesmente o tensor energia-momentum $T^{\mu\nu}$, mas o tensor geral $\tilde{T}_{\mu\nu}$, bem como a constante $G$, de modo que

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left[8\pi G\left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{T}\right)\right], \tag{4.38}$$

e ainda

$$\delta\left[\nabla_\mu\left(G\tilde{T}^{\mu\nu}\right)\right] = 0. \tag{4.39}$$

Antes disso, é útil considerar a dinâmica não perturbada para este modelo, isto é, as equações resultantes de $R_{00}$ e $\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$, também chamadas de equações de ordem zero. Segue então

$$\begin{aligned} R_{00} &= 8\pi G\left(\tilde{T}_{00} - \frac{1}{2}g_{00}\tilde{T}\right) \\ &= 8\pi G\left(\rho - \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}p\delta^i_i\right) \\ &= 4\pi G\left(\rho + 3p\right), \end{aligned} \tag{4.40}$$

visto que $\delta^i_i = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 3$.

Por outro lado, uma vez que

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \tag{4.41}$$

decorre que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right), \tag{4.42}$$

fórmula esta análoga à equação de aceleração para o fluido de matéria/radiação, equação (2.16), como seria de se esperar.

Levando em conta que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, pode-se reescrevê-la como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_m + 3p_m - 2\rho_\Lambda\right). \tag{4.43}$$

Da identidade de Bianchi $\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$ para $\nu = 0$, tem-se

$$\nabla_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_0\right) = \partial_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_0\right) + G\left[\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_0 - \Gamma^\sigma_{\mu 0}\tilde{T}^\mu_0\right] = 0, \tag{4.44}$$

que ao ser desenvolvida produz

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_0\right) &= \partial_0\left[G\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right)\right] + G\left[3H\tilde{T}^0_0 - 3H\tilde{T}^i_i\right] \\ &= \dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\left(\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda\right) + 3GH\left[\rho_m + \rho_\Lambda + \left(p_m + p_\Lambda\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.45}$$

E assim,

$$\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\left(\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda\right) + 3GH\rho_m\left(1+\omega_m\right) = 0. \tag{4.46}$$

É digno de nota que, ao se assumir a validade da lei de conservação $\nabla_\mu T^\mu_0 = 0$, isto é (4.11), procedimento este necessário para o caso em que não há troca de energia entre matéria e vácuo, a equação acima fica

$$\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\dot{\rho}_\Lambda = 0, \tag{4.47}$$

isto é, a equação se reduz à equação (4.17).

De forma análoga, para a identidade de Bianchi $\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0$ com $\nu = i$, obtém-se

$$\nabla_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_i\right) = \partial_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_i\right) + G\left[\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_i - \Gamma^\sigma_{\mu i}\tilde{T}^\sigma_\sigma\right] = 0. \tag{4.48}$$

Contudo, o desenvolvimento da expressão acima não leva a uma equação de ordem zero, mas uma identidade trivial. Pelo que não se explicitará a expressão acima.

Tendo-se apresentado a dinâmica não perturbada do modelo (equações de ordem zero), partir-se-á para as equações de primeira ordem oriundas das variações provenientes das perturbações que vão da equação (4.29) até a equação (4.35). No caso de perturbação da componente tempo-tempo das equações de Einstein, se terá, da equação (4.24),

$$\begin{aligned}
\delta R_{00} &= 8\pi\delta\left[G\left(\tilde{T}_{00} - \frac{1}{2}\tilde{T}\right)\right] \\
&= 8\pi\delta\left[G\left(\rho - \frac{1}{2}\rho + \frac{3}{2}p\right)\right] \\
&= 4\pi\delta\left[G\left(\rho + 3p\right)\right] \\
&= 4\pi\left[G\left(\delta\rho + 3\delta p\right) + \delta G\left(\rho + 3p\right)\right].
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Por outro lado, usando o resultado já deduzido no capítulo 3 para $\delta R_{00}$, equação (3.47), tem-se que

$$\dot{\hat{h}} + 2H\hat{h} = 8\pi\left[G\left(\delta\rho + 3\delta p\right) + \delta G\left(\rho + 3p\right)\right], \tag{4.50}$$

em que $\hat{h} = \partial_t\left(h_{kk}/a^2\right)$.

Desenvolvendo-se a equação em termos das variáves de matéria e vácuo, chega-se à *primeira equação de perturbação* do modelo:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{h}} + 2H\hat{h} = 8\pi\{&G\left[\left(1+3\omega_m\right)\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda + 3\delta p_\Lambda\right] \\
&+ \delta G\left[\left(1+3\omega_m\right)\rho_m - 2\rho_\Lambda\right]\}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

O próximo passo é computar a variação $\delta\left(\nabla_\mu G^\mu_\nu\right) = 0$ da identidade de Bianchi para $\nu = 0$. Tem-se, então,

$$\begin{aligned}\delta\left[\nabla_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_0\right)\right] &= \delta\left[\partial_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_0\right)\right] + \delta G\left[\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_0 - \Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\tilde{T}^\mu_\sigma\right] \\ &+ G\left[\delta\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_0 + \Gamma^\mu_{\sigma\mu}\delta\tilde{T}^0_0 - \delta\Gamma^\sigma_{\mu 0}\tilde{T}^\mu_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu 0}\delta\tilde{T}^\mu_\sigma\right] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Levando em conta os valores obtidos já no capítulo 3 para os símbolos de Christoffel e suas variações, bem como os valores de $\tilde{T}^\mu_\nu$, procede que

$$\begin{aligned}&\delta\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + \dot{G}\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right) + \delta G\left(\dot{\tilde{T}}^0_0\right) + G\delta\left(\tilde{T}^i_0\right) \\ &+ \delta G\partial_i\tilde{T}^i_0 + G\partial_i\left(\delta\tilde{T}^i_0\right) + \delta G\left[3H\left(\rho_m + \rho_\Lambda + p_m + p_\Lambda\right)\right] \\ &+ G\left[-\frac{1}{2}\hat{h}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + 3H\delta\tilde{T}^0_0 - \frac{1}{2}\hat{h}\left(p_m + p_\Lambda\right) - 3H\delta\tilde{T}^i_i\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.53}$$

As variações do tensor energia-momentum $\tilde{T}_{\mu\nu}$ são dadas por

$$\begin{aligned}\delta\tilde{T}^0_0 &= \delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda, \\ \delta\tilde{T}^i_0 &= \left(\rho_m + p_m\right)\delta U^i, \\ \delta\tilde{T}^i_i &= -\delta\left(p_m + p_\Lambda\right) = -\left(\delta p_m + \delta p_\Lambda\right). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Logo $\partial_i\delta\tilde{T}^i_0 = \left(\rho_m + p_m\right)\partial_i\delta U^i = \left(\rho_m + p_m\right)\theta$, usando a notação já introduzida no capítulo anterior,

$$\theta = \nabla_\mu\delta U^\mu = \partial_0\delta U^0 + \partial_i\delta U^i = \nabla_i\delta U^i, \tag{4.55}$$

visto que $\delta U^0 = 0$ para observadores comóveis ao fluido.

Com isso, encontra-se

$$\begin{aligned}&\delta\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + \dot{G}\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right) + G\left(\rho_m + p_m\right)\theta \\ &+\delta G\left[3H\left(\rho_m + p_m\right)\right] + \delta G\left(\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda\right) + G\left(\delta\dot{\rho}_m + \delta\dot{\rho}_\Lambda\right) \\ &+G\left[-\frac{1}{2}\hat{h}\left(\rho_m + p_m\right) + 3H\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right) + 3H\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Portanto, a equação de primeira ordem em perturbação da identidade de Bianchi, $\delta\left(\nabla_\mu G^\mu_\nu\right) = 0$ para $\nu = 0$ é, para o caso geral, dada por

$$\begin{aligned}&G\left\{\delta\dot{\rho}_m + \delta\dot{\rho}_\Lambda + \rho_m\left(1 + \omega_m\right)\left(\theta - \hat{h}/2\right) + \right. \\ &\left. + 3H\left[\left(1 + \omega_m\right)\delta\rho_m + \left(\delta\rho_\Lambda + \delta p_\Lambda\right)\right]\right\} + \\ &+ \dot{G}\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right) + \left[\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda + 3H\left(1 + \omega_m\right)\rho_m\right]\delta G + \\ &+ \left(\rho_m + \rho_\Lambda\right)\delta\dot{G} = 0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Já se viu nos capítulos prévios que a lei de conservação de matéria $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, na componente $\nu = 0$, conduz à equação (2.21) para a equação $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ não perturbada, e à equação (3.70) para a equação $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_0\right) = 0$ em primeira ordem de perturbação. Para o modelo sem troca de energia entre matéria e vácuo, esta última equação é de muita importância, visto que decorre da autoconservação do tensor energia-momentum. Usando as notações deste capítulo, ela pode ser posta na forma

$$\delta\dot{\rho}_m + \rho_m\left(1+\omega_m\right)\left(\theta - \frac{\hat{h}}{2}\right) + 3H\left(1+\omega_m\right)\delta\rho_m = 0, \tag{4.58}$$

constituindo-se a *segunda equação de perturbação* do modelo.

Agora, assumindo-se a validade da lei de conservação de matéria na forma (4.11) e (4.58), isto é, ordem zero e ordem primeira, respectivamente, pode-se reescrever a equação (4.57) numa forma mais compacta, a saber

$$\begin{aligned} &G\left[\delta\dot{\rho}_\Lambda + 3H\left(\delta\rho_\Lambda + \delta p_\Lambda\right)\right] + \dot{G}\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right) + \dot{\rho}_\Lambda\delta G \\ &+ \left(\rho_m + \rho_\Lambda\right)\delta\dot{G} = 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

sendo então esta a *terceira equação de perturbação* do modelo.

O procedimento seguinte é realizar a variação $\delta\left(\nabla_\mu G^\mu_\nu\right) = 0$ da identidade de Bianchi para $\nu = i$. De modo que

$$\begin{aligned} &\delta\left[\nabla_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_i\right)\right] = \delta\left[\partial_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_i\right)\right] + \delta G\left[\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_i - \Gamma^\sigma_{\mu i}\tilde{T}^\mu_\sigma\right] \\ &+ G\left[\delta\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_i + \Gamma^\mu_{\sigma\mu}\delta\tilde{T}^\sigma_i - \delta\Gamma^\sigma_{\mu i}\tilde{T}^\mu_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu i}\delta\tilde{T}^\mu_\sigma\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Desenvolvendo-se cada termo separadamente e usando a definição

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\left(p_m + p_\Lambda\right)}{\rho_m + \rho_\Lambda}, \tag{4.61}$$

obtém-se para o primeiro termo

$$\begin{aligned} \delta\left[\partial_\mu\left(G\tilde{T}^\mu_i\right)\right] &= \partial_0\left[G\delta\tilde{T}^0_i + \delta G\tilde{T}^0_i\right] + \partial_j\left[G\delta\tilde{T}^j_i + \delta G\tilde{T}^j_i\right] \\ &= \partial_0\left[G\rho\left(1+\omega\right)\delta U_i\right] + \partial_j\left[G\left(-\delta p\delta^j_i\right) + \delta G\left(-p\delta^j_i\right)\right] \\ &= -a^2\partial_i\left[G\rho\left(1+\omega\right)\delta U^i\right] - G\partial_i\left(\delta p\right) - p\partial_i\left(\delta G\right), \end{aligned} \tag{4.62}$$

onde se usou que $\delta U_i = g_{ii}\delta U^i = -a^2\delta U^i$.

Para o segundo termo tem-se

$$\delta G\left[\Gamma^\mu_{\sigma\mu}\tilde{T}^\sigma_i - \Gamma^\sigma_{\mu i}\tilde{T}^\mu_\sigma\right] = 0, \tag{4.63}$$

ou seja, este termo não produz nenhuma contribuição à equação total de perturbação.

Por fim, para o terceiro termo vem

$$
\begin{aligned}
& G\left[\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}\tilde{T}^{\sigma}_{i}+\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}\delta\tilde{T}^{\sigma}_{i}-\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu i}\tilde{T}^{\mu}_{\sigma}-\Gamma^{\sigma}_{\mu i}\delta\tilde{T}^{\mu}_{\sigma}\right] \\
&= G\left[\delta\Gamma^{j}_{kj}\left(-p\delta^{k}_{i}\right)+3H\rho\left(1+\omega\right)\delta U_i-H\delta^{j}_{i}\rho\left(1+\omega\right)\delta U_j-a^2H\delta_{ij}\rho\left(1+\omega\right)\delta U^j\right] \\
&= G\rho\left(1+\omega\right)\left[3H\delta U_i-H\delta U_i-a^2H\delta U^i\right] \\
&= G\rho\left(1+\omega\right)\left[-3a^2H-a^2H-a^2H\right]\delta U^i \\
&= -5a^2HG\rho\left(1+\omega\right)\delta U^i \\
&= -5a\dot{a}G\rho\left(1+\omega\right)\delta U^i. \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

Daí, usando as equações (4.62), (4.63) e (4.64) a equação (4.60) torna-se

$$a^2\partial_t\left[G\rho\left(1+\omega\right)\delta U^i\right]+5a\dot{a}G\rho\left(1+\omega\right)\delta U^i+G\partial_i\left(\delta p\right)+p\partial_i\left(\delta G\right)=0. \qquad (4.65)$$

Dividindo a equação de ambos os lados por $a^2$ e aplicando-se o operador $\partial_i$, vem

$$\left(1+\omega\right)\left[\partial_t\left(G\rho\partial_i\delta U^i\right)+5HG\rho\partial_i\delta U^i\right]+\frac{1}{a^2}\left[G\partial_i\partial_i\left(\delta p\right)+p\partial_i\partial_i\left(\delta G\right)\right]=0. \qquad (4.66)$$

Desenvolvendo a expressão acima e utilizando o resultado (3.88) em $\partial_i\partial_i\left(\delta p\right)$ e $\partial_i\partial_i\left(\delta G\right)$, chega-se a

$$\left(1+\omega\right)\left[\dot{G}\rho\theta+G\left(\dot{\rho}\theta+\rho\dot{\theta}+5H\rho\theta\right)\right]-\frac{k^2}{a^2}\left[G\delta p+\omega\rho\delta G\right]=0, \qquad (4.67)$$

onde k é o número de onda.

O termo $(1+\omega)$ pode ser apresentado numa forma mais conveniente, considerando que

$$
\begin{aligned}
\left(1+\omega\right) &= 1+\frac{p_m+p_\Lambda}{\rho_m+\rho_\Lambda}=\frac{\rho_m+\rho_\Lambda+p_m+p_\Lambda}{\rho_m+\rho_\Lambda} \\
&= \frac{\rho_m\left(1+\omega_m\right)}{\rho_m+\rho_\Lambda}, \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

visto que $\omega_\Lambda=-1$.

De modo semelhante, para $\omega$ se tem

$$\omega=\frac{p_m+p_\Lambda}{\rho_m+\rho_\Lambda}=\frac{\omega_m\rho_m+\omega_\Lambda\rho_\Lambda}{\rho_m+\rho_\Lambda}=\frac{\omega_m\rho_m-\rho_\Lambda}{\rho_m+\rho_\Lambda}. \qquad (4.69)$$

Substituindo-se as equações (4.68) e (4.69) em (4.67) vem em decorrência

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\omega\right)\left[\dot{G}\rho_m\theta+G\frac{\dot{\rho}_m+\dot{\rho}_\Lambda}{\rho_m+\rho_\Lambda}\rho_m\theta+G\rho_m\dot{\theta}+5GH\rho_m\theta\right] \\
&-\frac{k^2}{a^2}\left[G\left(\delta p_\Lambda+\omega_m\delta\rho_m\right)+\left(\omega_m\rho_m-\rho_\Lambda\right)\delta G\right]=0. \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

Além disso, visto que $\rho_\Lambda/\rho_m = \dot{\rho}_\Lambda/\dot{\rho}_m$, o termo

$$\frac{\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda}{\rho_m + \rho_\Lambda}\rho_m = \frac{\dot{\rho}_m \left(1 + \frac{\dot{\rho}_\Lambda}{\dot{\rho}_m}\right)}{\rho_m \left(1 + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_m}\right)}\rho_m = \dot{\rho}_m, \tag{4.71}$$

a equação (4.70) torna-se

$$\begin{aligned}(1+\omega_m)\left[\dot{G}\rho_m\theta + G\left(\dot{\rho}_m\theta + \rho_m\dot{\theta} + 5H\rho_m\theta\right)\right] \\ - \frac{k^2}{a^2}\left[G\left(\delta p_\Lambda + \omega_m\delta\rho_m\right) + \left(\omega_m\rho_m - \rho_\Lambda\right)\delta G\right] = 0.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Desenvolvendo-se a equação $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_i\right) = 0$ para o tensor de matéria/radiação ordinário (que é o que se fez da equação (3.77) até (3.89) no capítulo anterior) ter-se-á a *quarta equação de perturbação*:

$$(1+\omega_m)\left[\dot{\rho}_m\theta + \rho_m\dot{\theta} + 5H\rho_m\theta\right] = \frac{k^2}{a^2}\omega_m\delta\rho_m, \tag{4.73}$$

que são os termos envolvendo matéria que aparecem multiplicando G na equação (4.72).

Assumindo-se a validade da conservação de matéria, uma vez que neste modelo não há troca de energia entre vácuo e matéria, pode-se usar (4.73) para simplificar a expressão (4.72), de modo a se obter finalmente a *quinta equação de perturbação*:

$$(1+\omega_m)\dot{G}\rho_m\theta = \frac{k^2}{a^2}\left[G\delta p_\Lambda + \left(\omega_m\rho_m - \rho_\Lambda\right)\delta G\right]. \tag{4.74}$$

Com isso, as equações de primeira ordem em perturbação desde modelo cinco, esclarecidas a seguir:

De $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_0\right) = 0$ se obtém a equação (4.58),
De $\delta\left(\nabla_\mu T^\mu_i\right) = 0$ se obtém a equação (4.73),
De $\delta R_{00}$ se obtém a equação (4.51),
De $\delta\left(\nabla_\mu G^\mu_0\right)$ se obtém a equação (4.59),
De $\delta\left(\nabla_\mu G^\mu_i\right)$ se obtém a equação (4.74).

Um modelo decorrente particularmente interessante é o de matéria dominante ($\omega_m = 0$) e perturbação adiabática para a constante cosmológica ($\delta p_\Lambda = -\delta\rho_\Lambda$). Para este caso as expressões de primeira ordem sofrem mudanças, de maneira que as equações (4.58), (4.73), (4.51), (4.59) e (4.74) se tornam, respectivamente,

$$\delta\dot{\rho}_m + \rho_m\left(\theta - \frac{\hat{h}}{2}\right) + 3H\delta\rho_m = 0, \tag{4.75}$$

$$\delta\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + \delta G\dot{\rho}_\Lambda + \dot{G}\left(\delta\rho_m + \delta\rho_\Lambda\right) + G\delta\dot{\rho}_\Lambda = 0, \tag{4.76}$$

$$\dot{\hat{h}} + 2H\hat{h} = 8\pi\left(\rho_m - 2\rho_\Lambda\right) + 8\pi G\left(\delta\rho_m - 2\delta\rho_\Lambda\right), \tag{4.77}$$

$$\theta\left(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m\right) + \rho_m\dot{\theta} + 2H\theta\rho_m = 0, \tag{4.78}$$

$$k^2\left[G\delta\rho_\Lambda + \rho_\Lambda\delta G\right] + a^2\rho_m\dot{G}\theta = 0. \tag{4.79}$$

Além disso, usando a equação de conservação, equação (4.11), pode-se reescrever (4.78) como

$$\dot{\theta} + 2H\theta = 0. \tag{4.80}$$

Pode-se transformar a dependência com o tempo na equação acima por uma dependência com o fator de escala, notando que

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt}\frac{d}{da} = aH\frac{d}{da}. \tag{4.81}$$

Então, a equação (4.80) se torna

$$aH\frac{d\theta}{da} + 2H\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta' + 2\frac{H}{a}\theta = 0, \tag{4.82}$$

onde se representou a derivação em relação ao fator de escala pelo sobrescrito "linha".

Segue, então, que a solução de (4.82) é uma função decrescente com o fator de escala, dada por

$$\theta = \theta_0 a^{-2}, \tag{4.83}$$

em que $\theta_0 = \theta(a_0)$ e $a_0 = a(t_0)$.

Inserindo-se esta solução na equação (4.79) vem que

$$k^2\left[G\delta\rho_\Lambda + \rho_\Lambda\delta G\right] + \theta_0\rho_m\dot{G} = 0. \tag{4.84}$$

Uma vez que se está considerando perturbações lineares, o termo $\theta_0\rho_m\dot{G}$ é bem pequeno e pode ser desprezado. Assim, o termo $k^2$ se desacopla da equação (4.84), refletindo uma importante propriedade dos modelos com $G$ e $\Lambda$ variáveis com conservação de matéria dada por (4.11): que as equações de perturbação não dependem do número de onda $k$.

Com isso em mente, pode-se tomar $\theta(a) = 0$ para todo valor de $a$ nas equações de perturbação. Realizando-se tal procedimento na equação (4.79), ela se reduz a

$$G\delta\rho_\Lambda + \rho_\Lambda\delta G = 0. \tag{4.85}$$

E assim, pode-se concluir que

$$\delta_\Lambda \equiv \frac{\delta\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -\frac{\delta G}{G}. \tag{4.86}$$

Por outro lado, diferenciando-se a equação (4.85) em relação ao tempo, tem-se

$$\dot{G}\delta\rho_\Lambda + G\delta\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_\Lambda\delta G + \rho_\Lambda\delta\dot{G} = 0. \tag{4.87}$$

Utilizando-se este resultado na equação (4.76) resulta que

$$\delta\dot{G}\rho_m + \dot{G}\delta\rho_m = 0. \tag{4.88}$$

Com isso se conclui a relação

$$\delta_m \equiv \frac{\delta\rho_m}{\rho_m} = -\frac{\delta\dot{G}}{\dot{G}} = -\frac{(\delta G)'}{G'}. \tag{4.89}$$

Agora, inserindo-se $\theta = 0$ na equação (4.75), pode-se desenvolvê-la como

$$\begin{aligned} \delta\dot{\rho}_m + \rho_m \left(-\frac{\hat{h}}{2}\right) + 3H\delta\rho_m = 0 \\ \Rightarrow \quad \hat{h} = 2\left(\frac{\delta\dot{\rho}_m}{\rho_m} + 3H\frac{\delta\rho_m}{\rho_m}\right). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Além disso,

$$\dot{\delta}_m = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\rho_m}{\rho_m}\right) = \frac{\delta\dot{\rho}_m}{\rho_m} - \frac{\dot{\rho}_m}{\rho_m}\delta_m, \tag{4.91}$$

o que faz com que se tenha

$$\hat{h} = 2\dot{\delta}_m + 2\frac{\delta_m}{\rho_m}\left(\dot{\rho}_m + 3H\rho_m\right). \tag{4.92}$$

Levando-se em conta que no regime dominado por matéria ($\omega_m = 0$) a equação de conservação de matéria é

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \tag{4.93}$$

a equação (4.92) torna-se

$$\hat{h} = 2\dot{\delta}_m. \tag{4.94}$$

Usando a regra da cadeia, equação (4.81), encontra-se que

$$\hat{h} = 2aH\delta_m', \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{h}} &= \frac{d}{dt}\left(2aH\delta_m'\right) = 2aH\left(aH\delta_m'\right)' \\ &= 2aH\left[H\delta_m' + aH'\delta_m' + aH\delta_m''\right] \\ &= 2(aH)^2\left[\delta_m'' + \left(\frac{1}{a} + \frac{H'}{H}\right)\delta_m'\right]. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Como consequência, a equação de perturbação (4.77) pode ser desenvolvida assim:

$$\begin{aligned} 2(aH)^2\left[\delta_m'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{H'}{H}\delta_m'\right)\right] &= 8\pi G\left[\frac{(\rho_m - 2\rho_\Lambda)}{G}\delta G + (\delta\rho_m - 2\delta\rho_\Lambda)\right] \\ \Rightarrow \left[\delta_m'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{H'}{H}\delta_m'\right)\right] &= \frac{3}{2a^2}\frac{8\pi G}{3H^2}\rho_m\left[\frac{\rho_m - 2\rho_\Lambda}{\rho_m}\frac{\delta G}{G} + \frac{\delta\rho_m - 2\delta\rho_\Lambda}{\rho_m}\right] \\ \Rightarrow \left[\delta_m'' + A(a)\delta_m'\right] &= B(a)\left[\frac{\delta G}{G} - \frac{2\rho_\Lambda}{\rho_m}\frac{\delta G}{G} + \delta_m + \frac{2\rho_\Lambda}{\rho_m}\frac{\delta G}{G}\right], \end{aligned} \tag{4.97}$$

onde na última linha se utilizou (4.86) e as seguintes definições:

$$A(a) = \frac{3}{a} + \frac{H'(a)}{H(a)}, \tag{4.98}$$

$$B(a) = \frac{3}{2a^2}\tilde{\Omega}_m(a), \tag{4.99}$$

$$\tilde{\Omega}_m(a) = \frac{\rho_m(a)}{\rho_c(a)} = \frac{8\pi G}{3H^2(a)}\rho_m(a). \tag{4.100}$$

Daí se chega à equação de perturbação

$$\delta_m'' + A(a)\delta_m' = B(a)\left(\delta_m + \frac{\delta G}{G}\right). \tag{4.101}$$

Nota-se que $\tilde{\Omega}(a)$ é um parâmetro de densidade instantâneo, visto que $a = a(t)$. Do mesmo modo, definindo-se o parâmetro correspondente para a constante cosmológica,

$$\tilde{\Omega}_\Lambda(a) = \frac{\rho_\Lambda(a)}{\rho_c(a)}, \tag{4.102}$$

a equação de Friedmann-Lemaître fornece

$$\tilde{\Omega}_m(z) + \tilde{\Omega}_\Lambda(z) = 1. \tag{4.103}$$

Da equação (4.86) se vê que $\delta G \to 0 \Rightarrow \delta\rho_\Lambda \to 0$, o que seria o caso de perturbações negligenciáveis em $G$ e $\rho_\Lambda$.

Isolando-se $\delta G/G$ na equação (4.101) vem que

$$\frac{\delta G}{G} = \frac{\delta_m'' + A\delta_m'}{B} - \delta_m, \tag{4.104}$$

o que diferenciada em relação ao fator de escala leva a

$$\left(\frac{\delta G}{G}\right)' = \frac{\delta G'}{G} - \frac{G'}{G}\frac{\delta G}{G} = \frac{\delta G'}{G} - \frac{G'}{G}\left(\frac{\delta_m'' + A\delta_m'}{B} - \delta_m\right), \tag{4.105}$$

onde se utilizou a própria equação (4.104) na última igualdade.

Através do uso de (4.89), a equação (4.105) se transforma em

$$\left(\frac{\delta G}{G}\right)' = -\frac{G'}{GB}\left(\delta_m'' + A\delta_m'\right). \tag{4.106}$$

A última equação de perturbação do modelo pode ser obtida diferenciando-se a equação (4.101) em relação a fator de escala, do que resulta que

$$\delta_m''' + A'\delta_m' + A\delta_m'' = B'\left(\delta_m + \frac{\delta G}{G}\right) + B\delta_m' + B\left(\frac{\delta G}{G}\right)'. \tag{4.107}$$

Substituindo-se (4.104) e (4.106) na equação, obtém-se

$$\delta_m''' + \left(A - \frac{B'}{B} + \frac{G'}{G}\right)\delta_m'' + \left[A' - B + A\left(\frac{G'}{G} - \frac{B'}{B}\right)\right]\delta_m' = 0. \tag{4.108}$$

Da definição de $\tilde{\Omega}_m$, equação (4.100) vem

$$\frac{\tilde{\Omega}_m'}{\tilde{\Omega}_m} = \frac{G'}{G} - 2\frac{H'}{H} - \frac{3}{a}. \tag{4.109}$$

A equação de Friedmann, ao ser diferenciada, produz

$$\begin{aligned} 2HH' &= \frac{8\pi}{3}\left[G'\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\left(\rho_m' + \rho_\Lambda'\right)\right] \\ &= \frac{8\pi}{3}G\rho_m' + \frac{1}{aH}\frac{8\pi}{3}\left[\dot{G}\left(\rho_m + \rho_\Lambda\right) + G\dot{\rho}_\Lambda\right] \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho_m', \end{aligned} \tag{4.110}$$

onde se fez uso da equação (4.17), que rege o modelo com G e $\Lambda$ variáveis e sem intercâmbio de energia entre vácuo e matéria.

Pela equação de conservação de matéria para $\omega_m = 0$ (equação (4.93)), tem-se

$$aH\rho_m' + 3H\rho_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_m' = -\frac{3}{a}\rho_m. \tag{4.111}$$

De modo que (4.110) se torna

$$2HH' = -\frac{8\pi G}{a}\rho_m. \tag{4.112}$$

Assim, de (4.112) e (4.100) resulta a equação

$$\frac{H'}{H} = -\frac{3}{2a}\tilde{\Omega}_m. \tag{4.113}$$

Pode-se utilizar a relação acima para reescrever os termos $A$, $A'$, $B$, $B'$ e $G'/G$ em função de $\tilde{\Omega}_m$ e $\tilde{\Omega}_m'$. Procedendo assim, vem

$$A = \frac{3}{a} - \frac{3}{2a}\tilde{\Omega}_m, \tag{4.114}$$

$$A' = \frac{3}{2a^2}\left(-2 + \tilde{\Omega}_m - a\tilde{\Omega}_m'\right), \tag{4.115}$$

$$B = \frac{3}{2a^2}\tilde{\Omega}_m, \tag{4.116}$$

$$B' = \frac{3}{2a^2}\tilde{\Omega}_m\left(\frac{\tilde{\Omega}_m'}{\tilde{\Omega}_m} - \frac{2}{a}\right), \tag{4.117}$$

$$\frac{G'}{G} = \frac{\tilde{\Omega}_m'}{\tilde{\Omega}_m} - \frac{3}{a}\tilde{\Omega}_m + \frac{3}{a}. \tag{4.118}$$

Substituindo os valores encontrados de (4.114) até (4.118) na equação (4.107), obtém-se uma equação diferencial de terceira ordem em função de $\tilde{\Omega}_m$ para o modelo com $G$ e $\rho_\Lambda$ variáveis e matéria autoconservada, a saber

$$\delta_m''' + \frac{1}{2}\left(16 - 9\tilde{\Omega}_m\right)\frac{\delta_m''}{a} + \frac{3}{2}\left(8 - 11\tilde{\Omega}_m + 3\tilde{\Omega}_m^2 - a\tilde{\Omega}_m'\right)\frac{\delta_m'}{a^2} = 0. \tag{4.119}$$

A equação (4.119) é de grande importância, pois pode ser utilizada para todos os modelos do tipo (4.10) para descrever as perturbações cosmológicas. Para se conhecer aplicações dela ou informações adicionais sobre a dinâmica dos parâmetros $\Lambda$ e $G$, incluindo discussão a nível quântico via grupo de renormalização, pode-se consultar os artigos [9, 10, 14, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Por aqui serão tecidas apenas considerações gerais sobre essa última abordagem.

A dependência de $\rho_\Lambda$ e $G$ com o tempo cósmico $t$ pode ser estudada de diversas formas. Uma delas, através de considerações de teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo, é especialmente considerada nos artigos citados. A abordagem consiste em parametrizar a dependência no tempo cósmico através de um parâmetro de escala $\mu$. A evolução de $\rho_\Lambda$ e $G$ com a escala é realizada por meio da introdução de equações do grupo de renormalização. Assim, tem-se

$$\frac{d\rho_\Lambda}{d\ln\mu} = \sum_n A_n \mu^{2n}, \tag{4.120}$$

$$\frac{d}{d\ln\mu}\left(\frac{1}{G}\right) = \sum_n B_n \mu^{2n}, \tag{4.121}$$

onde $\mu$ é a escala de energia associada ao grupo de renormalização. Assim, a densidade de energia de vácuo e a constante de gravidade tornam-se parâmetros *running*, isto é, parâmetros dependentes da escala de energia que se esteja levando em consideração.

Por outro lado, na forma integrada as equação se tornam

$$\rho_\Lambda(\mu) = \sum_n C_n \mu^{2n}, \tag{4.122}$$

$$\frac{1}{G(\mu)} = \sum_n D_n \mu^{2n}. \tag{4.123}$$

Os coeficientes $A_n$, $B_n$, $C_n$ e $D_n$ são encontrados de somas envolvendo contribuições de campos de diferentes massas $M_i$.

Considerando o parâmetro $\mu$ como da ordem de grandeza da energia e do momentum dos grávitons da métrica de fundo FLRW, pode-se tomar $\mu \simeq H$, o que leva a uma dependência das constantes com a escala na forma de relações $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda(H)$ e $G = G(H)$. Além disso, devido à identidade de Bianchi, tais relações são vinculadas uma à outra conforme especificado na relação (4.17) que rege o modelo, de tal modo que ela se torna

$$\left[(\rho_m + \rho_\Lambda(\mu))\frac{dG(\mu)}{d\mu} + G(\mu)\frac{d\rho_\Lambda(\mu)}{d\mu}\right]\frac{d\mu}{dt} = 0. \tag{4.124}$$

Assim, conhecendo-se uma das expansões, (4.120) ou (4.121), a outra pode ser encontrada da identidade de Bianchi.

Para a dinâmica do termo de constante cosmológica $\rho_\Lambda$ pode-se considerar, por exemplo, modelos com evolução dada em série de potências do parâmetro de Hubble, de modo a se ter

$$\rho_\Lambda = n_0 + n_1 H + n_2 H^2 + ..., \tag{4.125}$$

em que os termos $n_i$, com $i = 0, 1, 2, ...$, são coeficientes.

Uma vez que os termos de potência maior que 2 são irrelevantes para perturbações lineares e levando em conta que a covariância geral da ação efetiva em teoria quântica de campos exige que se tenha apenas termos pares na taxa de expansão, segue que um modo possível de descrever a função $\rho_\Lambda$ é por meio de modelos na forma da equação dinâmica

$$\rho_\Lambda = n_0 + n_2 H^2, \tag{4.126}$$

expressão esta utilizada em algumas descrições ligando a evolução da constante cosmológica ao grupo de renormalização.

Um modo elegante de apresentar a equação acima consiste em se reescrever os coeficientes $n_0$ e $n_2$ como, respectivamente, $n_0 = \rho_\Lambda^0 - 3\nu M_P^2 H_0^2/(8\pi)$ e $n_2 = 3\nu M_P^2/(8\pi)$, onde $\nu$ é um parâmetro adimensional que define a intensidade dos efeitos quânticos e $\rho_\Lambda^0 = \rho_\Lambda(H_0)$. De forma que a dinâmica da constante cosmológica se torna

$$\rho_\Lambda(H) = \rho_\Lambda^0 + \frac{3\nu}{8\pi} M_P^2 (H^2 - H_0^2), \tag{4.127}$$

com $G_0 = 1/M_P^2$, onde $M_P$ é a massa de Planck. Seguindo essa notação, a densidade de constante cosmológica no tempo presente $\rho_\Lambda^0$ que aparece na equação é dada explicitamente por

$$\rho_\Lambda^0 \equiv \frac{3}{8\pi} \Omega_\Lambda^0 H_0^2 M_P^2. \tag{4.128}$$

As referências supracitadas adotam uma forma suave de desacoplamento para constante cosmológica conforme [26], de modo a resultar na seguinte equação do grupo de renormalização para a densidade de constante cosmológica:

$$\frac{d\rho_\Lambda}{d\ln\mu} = \frac{1}{(4\pi)^2} \sigma \mu^2 M^2, \tag{4.129}$$

onde $\sigma = \pm 1$, dependendo de que tipo de partículas dominam nas energias mais altas ($\sigma = -1$ para férmions e $\sigma = 1$ para bósons) e $M$ é um parâmetro de massa efetiva, dado por

$$M \equiv \mid \sum_i c_i M_i^2 \mid^{1/2}, \tag{4.130}$$

isto é, a massa média das partículas pesadas, em escalas de energia mais altas, causadoras do running da constante cosmológica por meio de efeitos quânticos. Os coeficientes $c_i's$ representam as multiplicidades das partículas envolvidas.

Assumindo $n_0 \neq 0$, pode-se mostrar que a função $G(H)$ varia logaritmicamente com o parâmetro $H$ segundo a equação

$$G(H) = G_0 \left[1 + \nu \ln(H^2/H_0^2)\right]^{-1}, \tag{4.131}$$

o que representa uma variação muito suave com $H$.

# 5 Considerações finais

Neste trabalho foram discutidos em detalhes aspectos relevantes da solução cosmologica de fundo e da teoria de perturbações cosmológicas lineares para dois modelos distintos, desenvolvidos originalmente nos trabalhos [6, 9, 10, 11, 13, 14, 28, 29]. Por razões didáticas, de início foram apresentados sucintamente aspectos importantes do Modelo Cosmológico Padrão, os quais seriam úteis para as considerações seguintes, não só por fornecer um modelo de fundo, em torno do qual se dariam as perturbações, mas por indicar as principais equações a serem variadas em primeira ordem.

Depois disso, foi apresentado o desenvolvimento das equações de perturbação para o modelo do gás relativístico reduzido (modelo RRG), que considera o fluido cósmico como um gás de partículas massivas fracamente interagentes com energias cinéticas relativísticas iguais. O modelo serve como uma boa aproximação à distribuição canônica relativística de Juttner [17]. No ramo do modelo RRG foram deduzidas três equações importantes, advindas das variações, em primeira ordem, do tensor de Einstein e da lei de conservação covariante do tensor energia-momentum.

Por último, se discutiu a possibilidade de que as constantes gravitacional $G$ e cosmológica $\Lambda$ sejam dependentes da escala de energia típica do Universo (parametrizada pela constante do Hubble $H$) e eventualmente do tempo, após o que se passou para a dedução dos modelos oriundos da identidade de Bianchi. No caso mais geral deles, que é o de $G$ e $\rho_\Lambda$ variáveis, se realizou a dedução das equações de perturbação em primeira ordem, bem como as equações de ordem zero, para o caso de matéria autoconservada pela lei covariante do tensor energia-momentum ordinário, modelo este sem troca de energia entre matéria e vácuo. Viu-se ainda como tais equações se comportam no regime de matéria dominante e com perturbações adiabáticas na densidade de vácuo e como na prática independem do número de onda. Quase ao final, se pode escrever uma lei de evolução do contraste de densidade com o parâmetro de redshift e dependente de um parâmetro de densidade instantâneo. E por fim se apresentou brevemente algumas considerações sobre a abordagem do grupo de renormalização para a constante cosmológica.

Uma continuação natural deste trabalho de revisão da literatura existente será a seguinte. Para trabalhos futuros pode ser útil considerar a combinação dos dois modelos apresentados. Por exemplo, seria interessante construir um modelo com parâmetro $\Lambda$ variável e matéria escura que se aquece devido à energia de vácuo, ou ainda um modelo com ambos $\Lambda$ e $G$ variáveis e matéria escura adiabática, no qual esta se resfria conforme o ritmo de expansão ditado pelas mudanças naquelas "constantes"ou ainda aplicar o modelo com $G$ e $\Lambda$ variáveis ao período inflacionário. São perspectivas novas passíveis de serem elaboradas seguindo o *modus operandi* adotado por este trabalho e que poderão resultar em trabalhos originais.

# REFERÊNCIAS


[1] ABAZAJIAN, K. N. et al. The seventh data release of the sloan digital sky survey. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 182, n. 2, p. 543, 2009.

[2] ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.

[3] ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *arXiv preprint arXiv:1502.02114*, 2015.

[4] COLE, S. et al. The 2df galaxy redshift survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 362, n. 2, p. 505–534, 2005.

[5] COLES, P.; LUCCHIN, F. *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*. John Wiley & Sons, 2003.

[6] DE BERREDO-PEIXOTO, G.; SHAPIRO, I. L.; SOBREIRA, F. Simple cosmological model with relativistic gas. *Modern Physics Letters A*, v. 20, n. 35, p. 2723–2734, 2005.

[7] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. Clarendon Press, 1992.

[8] DURRER, R. 2 Cosmological Perturbation Theory. In *The Physics of the Early Universe*, pages 31–69. Springer, 2005.

[9] ESPAÑA-BONET, C. et al. Testing the running of the cosmological constant with type Ia supernovae at high z. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2004, n 02, p. 006, 2004.

[10] FABRIS, J. C.; SHAPIRO, I. L.; SOLÀ, J. Density perturbations for a running cosmological constant. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2007, n. 02, p. 016, 2007.

[11] FABRIS, J. C.; SHAPIRO, I. L.; SOBREIRA, F. DM particles: how warm they can be? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2009, n. 02, p. 001, 2009.

[12] FABRIS, J. C.; SHAPIRO, I. L.; VELASQUEZ-TORIBIO, A. M. Testing dark matter warmness and quantity via the reduced relativistic gas model. *Physical Review D*, v. 85, n. 2, p. 023506, 2012.

[13] FABRIS, J. C. et al. Interacting photon–baryon fluid, warm dark matter, and the first acoustic peak. *The European Physical Journal C*, v. 74, n. 7, p.1–8, 2014.

[14] GRANDE, J. et al. Cosmic perturbations with running G and $\Lambda$. *Classical and Quantum Gravity*, 27(10):105004, 2010.

[15] GRØN, Ø.; HERVIK, S. *Einstein's general theory of relativity: with modern applications in cosmology*. Springer Science & Business Media, 2007.

[16] JACKSON, N. The Hubble Constant. *Living Rev. Relativity*, v. 18, 2015.

[17] JÜTTNER, F. Die Dynamik eines bewegten Gases in der Relativtheorie. *Annalen der Physik*, v. 340, n.6, p.145-161, 1911.

[18] LIDDLE, A. R An introduction to modern cosmology. John Wiley & Sons, 2003.

[19] LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. *The primordial density perturbation.* Cambridge University Press, Cam, 2008.

[20] PEACOCK, J. A. *Cosmological physics.* Cambridge university press, 1999.

[21] PEEBLES, P. J. E. *Principles of physical cosmology.* Princeton University Press, 1993.

[22] PERLMUTTER, S. et al. Measurements of $\Omega$ and $\Lambda$ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.

[23] PLANCK COLLABORATION et al. *Planck 2015 results XIII. Cosmological parameters.* arXiv preprint arXiv:1502.01589, 2015.

[24] RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.

[25] ROOS, M. *Introduction to cosmology.* John Wiley & Sons, 2015.

[26] SHAPIRO, I. L.; SOLÀ, J. The scaling evolution of the cosmological constant. *Journal of High Energy Physics*, v. 2002, n. 02, p. 006, 2002.

[27] SHAPIRO, I. L. et al. Variable cosmological constant as a Planck scale effect. *Physics Letters B*, v. 574, n. 3, p. 149–155, 2003.

[28] SHAPIRO, I. L.; SOLÀ, J. A Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker cosmological model with running Lambda. *arXiv preprint astro-ph/0401015*, 2004.

[29] SHAPIRO, I. L.; SOLÀ, J.; STEFANCIĆ, H. Running G and $\Lambda$ at low energies from physics at MX: possible cosmological and astrophysical implications. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005(01):012, 2005.

[30] SHAPIRO, I. L. Effective action of vacuum: the semiclassical approach. *Classical and Quantum Gravity*, v.25, n.10, p. 103001, 2008.

[31] SHAPIRO, I. L.; SOLÀ, J. On the possible running of the cosmological "constant". *Physics Letters B*, v. 682, n. 1, p. 105–113, 2009.

[32] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 1. New York Wiley, 1972.

[33] WEINBERG, S. *Cosmology.* Oxford University Press, 2008.