Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT

Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella

Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio

Juiz de Fora

2016

Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella

Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração Ensino de Matemática , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Canella, Cristiane Moura da Silva Bronsato .

Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio / Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella. – 2016.

166 f. : il.

Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, 2016.

1. Equação quadrática. 2.Função quadrática. 3. Parábola. I. Miyagaki, Olimpio Hiroshi. Título.

Cristiane Moura da Silva Bronsato Canella

Funções quadráticas e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração Ensino de Matemática , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
Universidade Federal de São João Del-Rei

Dedico este trabalho a Deus, à Nossa Senhora e à minha família, pelo apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

Primeiro a Deus, pela oportunidade de me tornar um profissional melhor, através do curso nessa instituição de excelência irrefutável, devido aos profissionais que nela trabalham, que apesar de seus inegáveis talentos, desfrutam de grande humanidade. À minha família, pelo apoio nas horas difíceis, pela compreensão e confiança. Ao meu orientador, professor Olímpio Hiroshi Miyagaki, pelo apoio, confiança e direcionamento, que com maestria desempenhou importante papel no meu trabalho. Ao corpo docente do curso, especialmente aos professores Luís Fernando Crocco Afonso, José Barbosa Gomes, Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, Nelson Dantas Louza Júnior, Rogério Casagrande, Eduard Toon e novamente ao professor Olimpio H. Miyagaki, aos quais agradeço pela oportunidade do compartilhamento de seus grandes saberes. Finalmente aos colegas de curso, pela amizade que ficará para sempre.

"Fale-me, e eu esquecerei. Ensine-me, e eu poderei lembrar. Envolva-me, e eu aprenderei. "

Benjamin Franklin

RESUMO

Este trabalho sobre funções quadráticas, destina-se a colaborar de forma contextualizada, com o estudo da função quadrática, desde sua parte histórica, passando pela equação quadrática, inequações quadráticas, sua representação gráfica, sua caracterização, contextualização através de problemas, resgatando a construção da parábola com régua e compasso e de forma atual, utilizando o GeoGebra. Mostramos também a utilização da propriedade refletora da parábola em diversas situações, bem como uma explicação geométrica para o fato. Espera-se que seja um instrumento colaborativo na construção do conhecimento e que seja principalmente, de fácil entendimento.

Palavras-chave: Equação quadrática. Função quadrática. Parábola.

ABSTRACT

This work about quadratic functions is intended to collaborate in context with the study of the quadratic function from its historical part, passing by quadratic equation, quadratic inequalities, its graphic representation, its characterization, contextualization through problems, rescuing construction the parabola with ruler and compass, and current form using GeoGebra. Also we show the use of the reflective parabola property in several situations, as well as, a geometric explanation for the fact. It is expected to be a collaborative tool in the construction of knowledge and it is especially easy to understand.

Key-words: Quadratic equation. Quadratic functions. Parabola.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo.
cap.	Capítulo.
d.C.	Depois de Cristo.
m	Metro.
m^2	Metro quadrado.
p.	Página.
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais.
PA	Progressão aritmética.
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
RJ	Rio de Janeiro.
sec.	Século.
u.a.	Unidades de área.
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\in$	Pertence.
Δ	Delta.
$f(x)$	Função de x.
f	Função.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
Δa_n	Variação de a_n.
a_n	Enésimo termo a.
a_{n+1}	Termo posterior ao enésimo termo.
$h(t)$	Função h.
x_v	x do vértice.
y_v	y do vértice.
$d_{P,F}$	Distância do ponto P ao ponto F.
Im	Imagem da função.
$\bigcap$	Interseção.
$d_{P,d'}$	Distância do ponto P à reta ponto d'.
xoy	Plano cartesiano xoy.
$x'o'y'$	Plano cartesiano alternativo $x'o'y'$.
oy	Eixo oy.
P_n	Enésimo ponto P.
P'_n	Enésimo ponto P'.
$\triangle FPM$	Triângulo FPM.
$P\hat{D}M$	Ângulo $P\hat{D}M$.
$F\hat{P}M$	Ângulo $F\hat{P}M$.

$\overleftrightarrow{FA}$	Reta $\overleftrightarrow{FA}$.
$\overleftrightarrow{FE}$	Reta $\overleftrightarrow{FE}$.
$\overrightarrow{FA}$	Segmento $\overrightarrow{FA}$.
$\overrightarrow{FE}$	Segmento de reta $\overrightarrow{FE}$.
$\overrightarrow{FD}$	Segmento de reta $\overrightarrow{FD}$.
d_1'	Reta d_1'.
$\|$	Paralela.
$\equiv$	Congruente.
P_1	Ponto P_1
$\mathcal{P}$	Parábola $\mathcal{P}$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> "Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais."(P.C.N. Ensino Médio(p.40))[4]

.

Este trabalho visa contribuir para a construção do conhecimento sobre funções quadráticas a nível de ensino médio: um assunto muito conhecido, muitas vezes não trabalhado de forma contextualizada, situação provavelmente causada essa, pelo pouco tempo dedicado ao estudo de matemática em muitas escolas, horário esse pré determinado pelos sistemas de educação, também causado pela falta do profissional ou pelos problemas relativos causados pela alfabetização falha, ou seja: não interpretam o que leem, além de muitos outros motivos prováveis, como a falta de interesse pelo estudo, etc., os quais não pertencem ao foco desse trabalho. Devido sua grande importância no desenvolvimento do conhecimento matemático do indivíduo, da capacidade investigativa, da consciência, crítica, o que favorece seu desenvolvimento como cidadão, para que fosse feita mais uma contribuição nesse sentido, o tema função quadrática foi escolhido, pois ainda segundo os P.C.N. Ensino Médio (p.44)[4]:

> Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

É uma tentativa então, para os discentes, de uma contribuição significativa para o preenchimento das possíveis lacunas que possam existir sobre esse conceito, ou um auxiliar de fácil entendimento para os que ainda não tiveram esse conceito trabalhado. Para os docentes: uma leitura agradável, simples, de forma a ratificar seus conhecimentos, também uma fonte de pesquisa a mais. Para o público em geral, uma leitura de fácil entendimento e elucidativa, de uma forma ampla.

Analisado para discentes, espera-se contribuir de forma significativa na construção gradativa do conhecimento, sempre dando preferência à abordagem contextualizada. Note também que a resolução de problemas no ensino de funções quadráticas, no primeiro ano do ensino médio, leva o aluno ao estímulo na maioria das vezes adequado, através das atividades que o conduzem à aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos (os quais sejam trabalhados e observados, de forma intuitiva, antes de conceituados).

Note que torna-se primordial, que as habilidades básicas devem ter sido previamente desenvolvidas,para que o aluno consiga se valer de ferramentas básicas necessárias para construir a habilidade em questão (resolução de problemas, dentro de funções quadráticas, nesse trabalho em particular, por exemplo). Desenvolver conceitos, habilidades, competências matemáticas e algoritmos através da construção significativa do conhecimento é importante.

Para o planejamento de boas situações de aprendizagem, precisamos além de conhecer o processo de aquisição do conhecimento, também as didáticas específicas de diversas áreas, uma vez que as disciplinas se organizam de formas diferentes em função da própria natureza dos conteúdos. Faz-se necessário, um aprofundamento nos conceitos específicos das áreas do conhecimento, sabendo-se que não há um único caminho que possa ser considerado o melhor. Assim, a proposta de trabalho com a resolução de problemas dentro de funções quadráticas, no ensino médio, é um caminho possível no ensino da matemática.

> "De fato, não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja: exercícios de aplicação ou fixação. Pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. "(P.C.N. Ensino Médio, p.43)[4]

O desenvolvimento do conceito de função quadrática, por meio da contextualização do conhecimento através da resolução de problemas matemáticos no Ensino Médio, dos alunos, será potencializada quando houver problemas que instiguem seus pensamentos, fazendo-os perceber que pelo menos uma solução é possível.

Para tal, o professor deve fomentar suas curiosidades, auxiliando-os na construção e desenvolvimento de habilidades e competências, resolvendo atividades, criando situações propícias, mediando e orientando-o nesse processo de forma significativa.

> Além das conexões internas à própria matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e

> estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, do comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano como de outras áreas do conhecimento, como Física, Geografia ou Economia. Cabe portanto ao ensino de matemática, garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas, sejam de matemática ou de outras áreas, incentivar o aluno a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções, para construir um modelo para interpretação e investigação em matemática (P.C.N. Ensino médio, p.43 a 44)[4]

Este trabalho usa da história da matemática, como veículo motivador e instrutivo, pela parte teórica, exemplos o mais detalhados possíveis, pelas aplicações práticas das funções quadráticas. Trabalha equações e funções quadráticas, desde sua caracterização até a contextualização e representação gráfica, chegando à parábola como cônica, não se esquecendo de introduzir o conceito tecnológico, plotando a função quadrática no software livre GeoGebra, para fixação e ratificação de conhecimentos, além de resgatar o uso da régua e compasso na construção da parábola. Espera-se que seja de fácil entendimento.

2 UM PROBLEMA MUITO, MAS MUITO ANTIGO.

Não há como se falar na contextualização de conteúdos matemáticos sem se lembrar das funções, principalmente das quadráticas. Sua importância é destacada no P.C.N. de matemática do ensino médio em :

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas de modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.(p.121)[4]

Não teríamos como tocar no assunto funções quadráticas, sem recorrermos à história da matemática, para pelos menos tentarmos formar vínculos de conhecimento, ratificando-os e dando a importância merecida, já que de acordo com os P.C.N. de matemática[4] (livro 3, p. 15):

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica, social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.

O estudo, utilização e manipulação da função quadrática é antiga, com origem na civilização babilônica (antiga região da Mesopotâmia, hoje Iraque, localizada entre os rios Tigre e Eufrates), com equações encontradas há 4000 anos atrás, segundo Boyer[3] (p.23) nos tabletes da Babilônia antiga, em textos cuneiformes. Segundo Eves[8] (p.31), eles usavam tabletes de argila, pois papiro era um artefato difícil de se conseguir, que depois de usado pelos escribas eram cozidos para endurecer. Aliás, um escriba era uma pessoa que estudava sua língua e matemática por dez anos e na maioria das vezes eram filhos de nobres, comerciantes. Esse estudo começava cedo. Era importante estudar matemática! Depois de estudarem por dez anos, eles podiam ensinar matemática ou trabalhar com ela como contadores, ou ensinando, por exemplo. Nos tabletes tinham tabuadas resolvidas, contas, como uma escola de hoje. E para os escribas também era importante estudar matemática, porque era sua única chance de ascensão social, se a pessoa assim desejava (às vezes filhos de lavradores estudavam para serem escribas).

Figura 1 – Tablete Plimpton 322-[26]-vide também Boyer[3], p.27

Esses povos usavam a base hexadecimal, mas contavam em grupos de dez para números menores que sessenta. Não havia um simbolo para o zero. Inicialmente em seu lugar era deixado um espaço vazio, dentre outros detalhes. Existem tabletes de mais de 5000 anos atrás, usados por escribas em Uruk e provavelmente anterior aos hieroglifos (Boyer[3], p.19).

Já os problemas que hoje seriam denominados por "equações quadráticas"(Boyer, p.23)[3], remontam nos tabletes de aproximadamente 4000 anos atrás. O estudo das funções quadráticas tem origem na resolução da equação do segundo grau. Quando se encontram os números que satisfazem a equação do segundo grau dentro do universo considerado, chamamos esses valores de raízes ou zeros da equação, por outro lado, se não existem esses valores no universo considerado, dizemos que a equação não tem zeros ou raízes dentro desse universo específico. O mesmo raciocínio vale para funções. As equações quadráticas começam segundo pesquisas históricas, com os tabletes da babilônia, passam pela inspiração geométrica de Euclides (séc.III a.C.) e pela inspiração aritmética de Diofanto (século III d.C.), passando por Brahmagupta (que aceitava zero como raiz, por exemplo), Al-Khwarizmi (que não incluía zero nem numero negativo como raiz), Bháskara (que continua a obra de Brahmagupta, por exemplo), dentre tantos outros. Mas as equações quadráticas, não tinham esse desenvolvimento de notação algébrica como é hoje: ela passou da retórica (verbal), pela sincopada (abreviação das palavras, introduzida por Diofanto, usado inclusive por Brahmagupta, segundo Baumgart[2], p.32) até chegar à forma que usamos hoje: a simbólica, que segundo Guelli[11](p.39) foi com "... o jurista francês François Viète (1540-1603) que começaram a ser dados os primeiros passos para a criação da álgebra puramente simbólica".

Figura 2 – Diofanto[22]

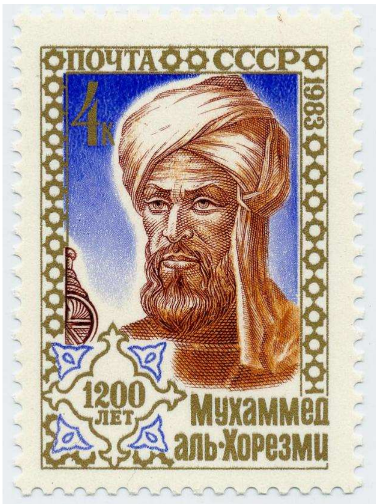


Figura 3 – Al-Khwarizmi[1]

Figura 4 – Francois Viète[7]

Até os tempos modernos não se conhecia uma maneira de se resolver as equações com p, q positivos, do tipo $x^2 + px + q = 0$, motivo pelo qual só se dividiam as equações do quadráticas nos tipos:

- $x^2 + px = q$ (quadrado e raiz igual a um número);
- $x^2 = px + q$ (quadrado igual a raiz mais número);
- $x^2 + q = px$ (quadrado mais número igual a raiz).

Al-Khwarizmi, árabe e matemático, resolvia, no século $IXd.C.$ (780-850 d.C.), problemas com equações quadráticas de forma clara e sistemática, anteriormente a Bháskara $(1114 - 1185$ d.C.), que resolveu equações quadráticas, em dois de suas obras (XXI d.C.): Lilavati e Vija-Ganita. A resolução de problemas com equações quadráticas, é encontrada nos registros babilônicos, nos egípcios e nos gregos. No entanto, um nome ficou fortemente ligado à resolução de equações quadráticas - Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi: sua importância é impressionante. Trabalhou na biblioteca de Bagdad, denominada de Casa da Ciência ou Casa da Sabedoria, traduziu para o árabe obras matemáticas provindas sobretudo da Grécia e da Índia, provavelmente, por exemplo, de Diofanto (falecido por volta de 250 d.C.) e de Brahmagupta (falecido por volta de 650 d.C.), que difundiu o conceito do zero e definiu de forma coerente, regras para a aritmética com zero e com os números negativos que são parecidas ao nosso entendimento atual, dentre outros feitos, como resolução de equações quadráticas. Um dos maiores feitos de Al-Khwarizmi, foi a criação de uma obra sobre o sistema numérico hindu (de tradução latina "*De numerum indorum*- A arte hindu de calcular, baseado numa provável tradução árabe de um livro de autoria de Brahmagupta além de se basear também em traduções árabes de obras gregas ligadas à matemática), conhecido hoje em dia, por sistema de numeração decimal indo-arábico, obra essa inegavelmente necessária à divulgação e aceitação do nosso sistema numérico atual, e provavelmente por isso, sua origem tenha sido, equivocadamente, atribuída aos árabes, pois leitores da versão latina do livro atribuíam esse feito a ele, apesar do próprio Al-Khwarizmi afirmar ser de origem hindu. É interessante saber que o seu nome é, provavelmente, a raiz da palavra algarismo e algoritmo ("algorismi- latim = algoritmo-“arte de calcular de uma maneira particular”). Também algumas das expressões por si utilizadas derivaram em palavras como álgebra, palavra árabe que fazia parte do titulo de um de seus livros ("*Al-Kitab al-muhta-sar fy hisab al-jabr w'almuqabalah*") traduzido como Ciência da restauração e redução, onde ele resolve de forma sistemática e clara as equações quadráticas, dentre outras coisas.

No entanto, apesar de sua enorme contribuição histórica, iremos nos ater, única e exclusivamente, na sua contribuição na resolução de equações quadráticas. Em seu livro, na introdução de sua álgebra, diz que foi encorajado pelo califa Mamum, a "compor uma breve obra sobre cálculos, restringindo-a ao que os homens constantemente necessitam em casos de herança, legados, partições, processos legais e comércio e em todas as suas transações uns com os outros ou onde se trata de medir terras e escavar canais".(Guelli[11],p.28). E como o Corão, no que diz respeito à heranças, prescreve uma certa lei onde a repartição é feita de acordo com o sexo e a idade dos herdeiros, onde se é necessário saber calcular quantidades e proporções que obrigam à resolução de equações quadráticas, parece segundo esse fato, talvez o tenha estimulado ao estudo das equações quadráticas.

Al-Khwarizmi, desenvolveu formas algébricas de soluções de equações, sem sincopação, números negativos ou zero, onde ele usa "raízes, números e quadrados", sendo estes procedimentos algébricos vinculados a representações geométricas que explicavam o raciocínio. Vamos agora observar cada tipo de equação do 2º grau estudada por Al-Khwarizmi, como por exemplo as do livro da Restauração e do Balanceamento (ou redução), livro de matemática escrito por Al-Khwarizmi aproximadamente no ano de 830.

O método de Al-Khwarizmi para resolução de equações lineares e quadráticas constava em primeiro reduzir a equação para uma de seis formas padrão (onde "b"e "c"são positivos, pois para os árabes, não existiam quantidades negativas, o que fazia não ter sentido $ax^2 + bx + c = 0$, pois tem como uma soma dar zero, se não existe número negativo e se nem todos são zeros). Devemos também nos lembrar que ele não usava a sincopação (abreviação de palavras).

É importante saber que a raiz igual a zero não era reconhecida, que as equações tinham raízes somente positivas e que ele chamava atenção em seu livro, para o que hoje chamamos de discriminante, $\Delta = b^2 - 4.ac$, com $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c, reais e $a \neq 0$, que também não podia ser negativo. Al-Khwarizmi trabalhava interpretando geometricamente $x^2 + px$ (p positivo), como sendo uma figura plana em forma de cruz, constituída por um quadrado de lado x, e por quatro retângulos de lados $\frac{p}{4}$ e x. Note que para completar o quadrado, faltam os quatros quadrados lado $\frac{p}{4}$ e portanto, de área $\frac{p^2}{16}$, como mostra a figura abaixo.

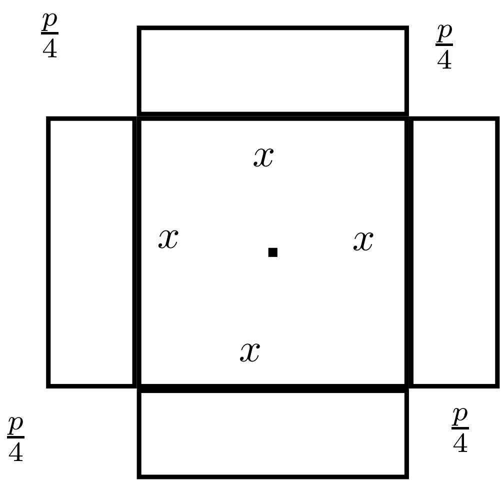


Figura 5 – Visualização da interpretação geométrica de Al-Khwarizmi.

Assim, se somarmos $\frac{p^2}{4}$ ao lado esquerdo da equação $x^2 + px = q$, obteremos um quadrado perfeito de área igual a $(x + \frac{p}{2})^2$. Ou seja:

$$(\tfrac{p}{2} + x)^2 = x^2 + px + \tfrac{p^2}{4} \Rightarrow (\tfrac{p}{2} + x)^2 = q + \tfrac{p^2}{4}$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{-p}{2} \pm \sqrt{q + \tfrac{p^2}{4}}.$$

Um exemplo onde ele resolve em seu livro (cap IV-"*A*l-Jabr") é a equação quadrática $x^2 + 10x = 39$. Vamos aqui ilustrar a clareza de seu desenvolvimento :

- Construía um quadrado de lado x, com quatro retângulos de área $\frac{10x}{4} = \frac{5x}{2}$.

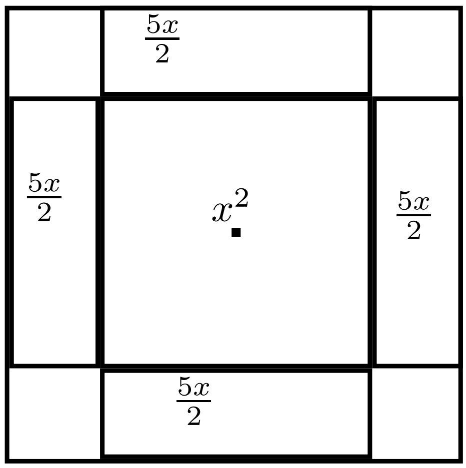


Figura 6 – Interpretação geométrica de $x^2 + 10x = 39$.

- Completava a figura de forma a se obter um quadrado. Nesse caso particular, serão quatro quadrados de área $\frac{25}{4}$ unidades, como é fácil ver. Desta forma, obtinha a área do quadrado maior, nesse caso 64 unidades de área ($39 + 4.\frac{25}{4} = 39 + 25 = 64$) e seu respectivo lado nesse caso, 8 unidades.

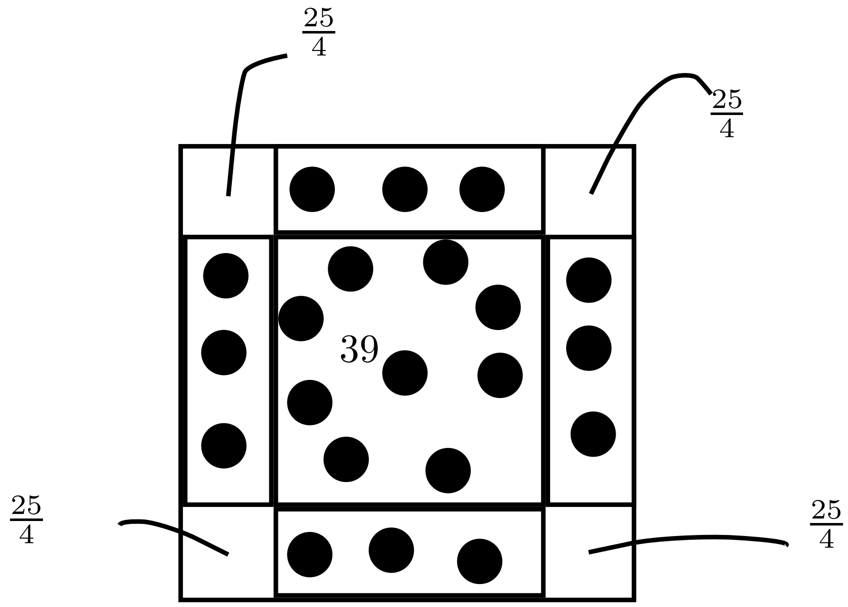


Figura 7 – Completando o quadrado em $x^2 + 10x = 39$

- Mas o quadrado foi completado com quatro pequenos quadrados de área $\frac{24}{4} = 25$ unidades de área, onde cada um corresponde a um quadrado de lado $\frac{5}{2}$ unidades. O que mostra na verdade, sabendo que o quadrado tem lado 8:

$$\tfrac{5}{2} + x + \tfrac{5}{2} = 8 \Rightarrow x = 3.$$

A descoberta de que um trinômio do segundo grau tem por imagem uma parábola, remonta à Antiguidade. Foi do matemático grego Menaechmus (375-325 a.C), a primeira referência de se obter a parábola, seccionando um cone circular reto por um plano não paralelo à base, mas sim a uma de suas geratrizes (em um de seus trabalhos, esboçou a curva $y^2 = 2ax$, por exemplo). Seja a geratriz do cone reto, que forma com a base do cone o ângulo α. Seja também o plano que corta o cone, formando com a base do cone o ângulo β. Quando o ângulo β é igual a α e essa interseção for não vazia ou diferente de um ponto, a interseção será uma parábola.

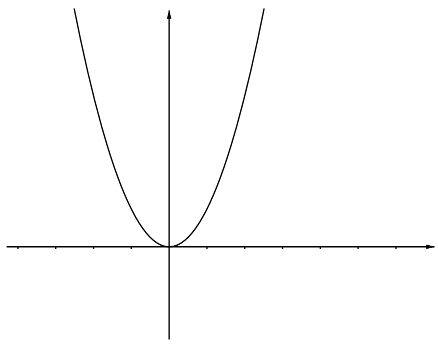


Figura 10 – Parábola no eixo.

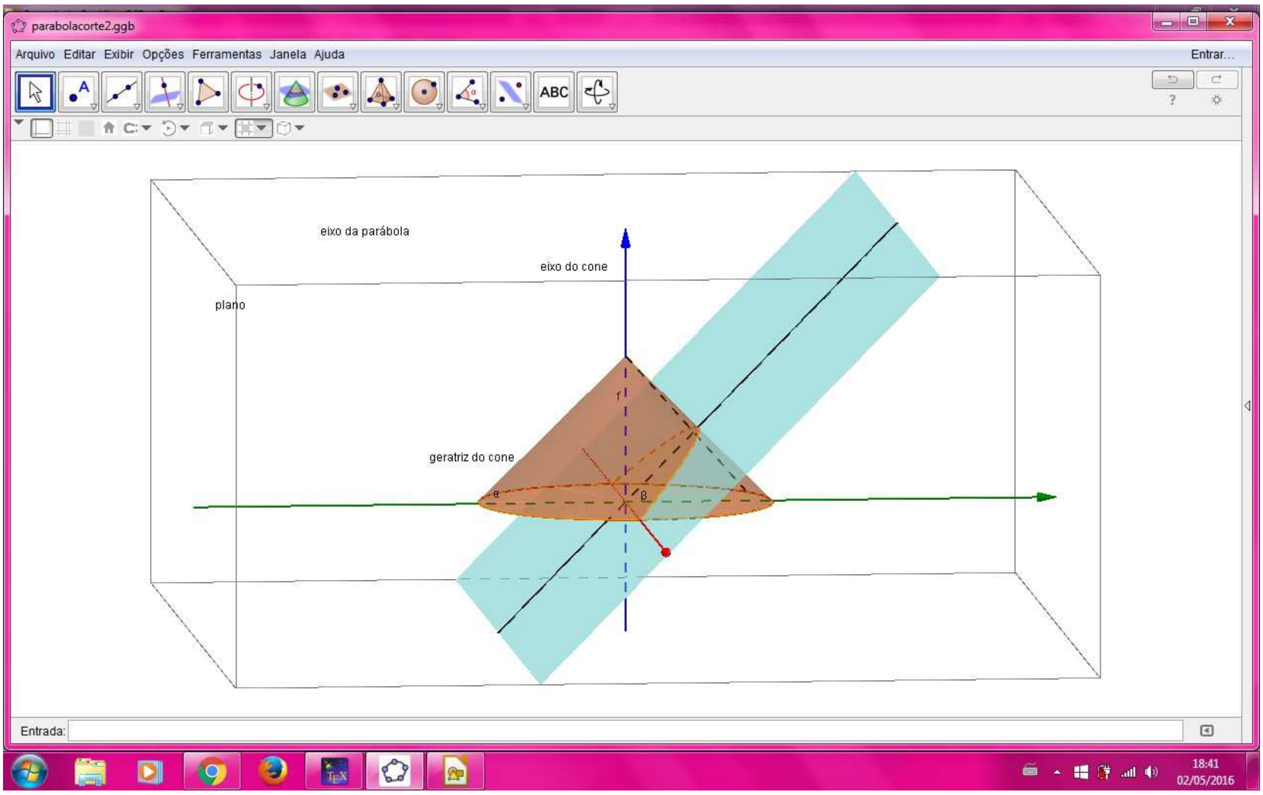


Figura 8 – Visão tridimensional no GeoGebra, do corte no cone que origina a parábola.

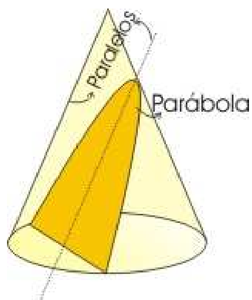


Figura 9 – Exemplo de corte no cone reto que resulta na parábola.[5]

Bháskara, ficou muito famoso por preencher algumas lacunas do trabalho de Brahmagupta. Por exemplo, em seu livro "Lilavati"(bela), nome de sua filha, que segundo a lenda, por seu pai confiar muito em suas previsões astrológicas, não se casou por uma pérola que caiu dentro do relógio de água e tendo passado a hora propícia ao casório, ficou solteira...Para amenizar a tristeza da moça, ele daria seu nome a um de seus livros. Livro este onde ele resolve, inclusive, várias equações quadráticas determinadas e indeterminadas. Mas Bháskara descobriu a fórmula de Bháskhara? É fato que na sua é poca, nem existiam fórmulas, mas regras.

O conceito de função aplicado a muitas outras áreas do conhecimento, como Física, Química e Biologia, são tão comuns aos alunos do ensino médio, de forma que não há como menosprezar sua utilização na atualidade. Dentre os diversos tipos de função que são abordados no ensino médio, esse trabalho irá abordar a função quadrática (também conhecida como função do segundo grau) de forma contextualizada, aplicada também em outras áreas do conhecimento.

Devemos nos lembrar que aqui pressupomos o fato de que os conceitos de função, plotar pontos no plano cartesiano e a habilidade de completar quadrados já foram desenvolvidas, além de alguns conhecimentos de geometria e o cálculo da distância de dois pontos pelo Teorema de Pitágoras.

Para início de trabalho, iremos abordar o trinômio que define a função quadrática, como por exemplo, a questão de achar dois números inteiros e positivos, conhecendo-se sua soma e seu produto, encontrado em textos cuneiformes. Note que chamando a soma de s e o produto de p, seja um dos números x e o outro será $s - x$ e seu produto p será dado por:

$$p = x(s - x) = -x^2 + sx \Rightarrow x^2 - sx + p = 0.$$

Ou seja, os números procurados são as raízes da equação do segundo grau:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

De acordo com Boyer[3], até pouco tempo, não se sabia resolver uma equação do segundo grau da forma $x^2+px+q=0$, $p, q > 0$, pois isso implicaria nas duas raízes negativas. Desse modo, só havia três tipos de equação do segundo grau e todas elas "encontradas em textos cuneiformes, escritos pelos babilônicos, há quase 4000 anos"(Matemática do Ensino médio[12], volume 1, p.137).

São elas:

$x^2 + px = q$;

$x^2 = px + q$;

$x^2 + q = px$.

Como estamos trabalhando com a equação do segundo grau, devemos notar que nem sempre o termo que acompanha o x é o 1.

Definição 2.0.1. *A equação do segundo grau é do tipo:* $ax^2 + bx + c = 0$*, com* a*,* b *e* c *reais, onde é suficiente e necessário que* $a \neq 0$*, pois do contrário, não seria uma função do segundo grau, mas do tipo* $bx + c = 0$*, que é uma equação do primeiro grau em* x*, se* $b \neq 0$*.*

Para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ fique parecida com a dos textos cuneiformes, vamos proceder da seguinte maneira:

$$ax^2 + bx + c = 0 \div a \Rightarrow x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a} = 0$$

Comparando com $x^2 - sx + p = 0$, temos:

$$-s = \tfrac{b}{a} \Rightarrow s = -\tfrac{b}{a} \text{ e } p = \tfrac{c}{a},$$

Note que o problema original continua a existir, só que a gora, devemos descobrir dois números x' e $x"$, tais que:

$$x' + x" = -\tfrac{b}{a} \text{ e } x'.x" = \tfrac{c}{a}.$$

É fundamental que seja estimulada inicialmente a capacidade de encontrar por tentativa e erro, as raízes reais da equação do segundo grau, de forma intuitiva, para que se formem vínculos concretos de "sentido"em sua fundamentação teórica, fato esse que irá favorecer seu progresso no processo da construção do conhecimento, que deverá ser de forma gradativa, de acordo com níveis crescentes de dificuldade. Agora, faremos alguns exemplos de equações quadráticas.

Para que a equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c $\in \mathbb{R}$, seja completa, é necessário e suficiente que além de $a \neq 0$, tenhamos $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Da mesma forma se algum dos coeficientes, seja b ou c ou os dois, for zero, ela será dita incompleta.

Exemplo 2.0.1. *Determine 2 números* α *e* $\beta \in \mathbb{N}$*, cuja soma é 5 e cujo produto é 6. De forma intuitiva, temos:*

Soma 5	Produto dos números anteriores
1 e 4	4 (Não é 6.)
2 e 3	6 (Serve!)

Pela tabela, observamos que a solução para o problema proposto são os números 2 *e* 3*. Agora, como seria a equação que descreveria esse problema? Resolvendo:*

Queremos descobrir dois pares de números naturais, cuja soma é 5 *e cujo produto é* 6*. Sejam* α *e* β *esses números, portanto:*

$$\alpha + \beta = 5 \Rightarrow \alpha = 5 - \beta$$

De $\alpha.\beta = 6$*, temos que:*

$\beta(5 - \beta) = 6 \Rightarrow \beta^2 - 5\beta + 6 = 0$ *(que é uma equação do segundo grau em* β*)*

Comparando com $ax^2 + bx + c$*, temos* $a = 1$*,* $b = -5$*,* $c = 6$*. O que mostra que a equação quadrática que descreve o problema em questão é:* $\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$*, com* β *pertencente ao conjunto dos números naturais. Encontrando as raízes dessa equação, encontraremos a solução previamente encontrada na tabela:* 2 *e* 3*.*

É primordial na resolução de problemas, que o aluno domine a passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática, além da capacidade de leitura e interpretação desenvolvidas: habilidades essas que já deverão ter sido antes do ingresso no Ensino Médio, ou pelo menos é o que se espera. Nesse trabalho, consideraremos essas habilidades já trabalhadas.

Exemplo 2.0.2. *Encontre dois números inteiros, cuja soma é* -7 *e cujo produto é* -30 *.*

Nesse caso particular, é mais fácil analisar a partir do produto, pois não foi limitado pelo fato de serem números positivos. De forma intuitiva, por tentativo e erro, construímos a tabela:

Pela tabela, observamos que a solução do problema proposto são os números 3 e -10. Mas como seria a equação que descreve matematicamente o problema? Resolvendo:

Sejam α *e* β *os dois números procurados. Temos que a soma será dada por:*

Números inteiros cujo produto dá - 30	Soma dos números anteriores
-5 e 6	1 (Não é)
5 e -6	-1 (Não é)
-3 e 10	7 (Não é)
3 e -10	-7 (Serve!)
-1 e 30	29 (Não é)
1 e -30	-29 (Não é)

$$\alpha + \beta = -7 \ e \ \alpha.\beta = -30.$$

De:

$$\alpha + \beta = -7 \Rightarrow \alpha = -7 - \beta$$

Já em:

$$\alpha.\beta = -30 \Rightarrow (-7 - \beta).\beta = -30 \Rightarrow \beta^2 + 7\beta - 30 = 0.$$

Isto quer dizer que a equação que descreve o problema é:

$$\beta^2 + 7\beta - 30 = 0$$

Onde β pertence ao conjunto dos números inteiros e a as raízes dessa equação são 3 *e* -10*, como observado na tabela anterior.*

Apesar de parecer mais rápido e até mais simples, resolver a equação do segundo grau por tentativa e erro, funciona até que bem e é rápido para números naturais e inteiros, quando estas raízes existem, ou seja: se é possível fatorar a equação quadrática. O problema é que quando vamos resolver uma equação do segundo grau qualquer, os alunos devem estar cientes de que não é possível resolver todas assim. Existem raízes de equações do segundo grau fracionárias, irracionais, reais, etc., dependendo do universo considerado e equações que não possuem raízes dentro do universo considerado.

2.1 A FORMA CANÔNICA DO TRINÔMIO: COMPLETANDO O QUADRADO.

Dizemos que uma fórmula está na forma canônica quando ela está escrita na sua forma mais simples, ou que expõe alguma informação de grande importância.

Inicialmente, vamos usar um caso particular, para melhor visualizar de forma geométrica o que é "completar o quadrado".

Observe a expressão quadrática: $x^2 + 6x + 5$. Se vincularmos a expressão a uma área equivalente, tipo um quadrado de medida x unidades de lado e quatro retângulos de medida x e $1,5$ unidades, ordenando de forma conveniente, conseguimos visualizar uma figura onde faltam apenas 4 quadrados de medida de lado $1,5$ (área $2,25u.a.$) para completar o quadrado. Note que no caso particular $x^2 + 6x + 5$, basta somar e subtrair 9 $(4.2,25 = 9)$, para completar o quadrado:

$$x^2 + 6x + 5 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - 9 + 5$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 - 4 \text{ (onde a expressão está na forma canônica).}$$

Considere o trinômio: $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a, b, c números reais. Queremos que ele fique com o coeficiente de x^2 igual a 1. Para tal, dividiremos por a:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Como:

$$(ax^2 + bx) \div a = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x) + c = 0.$$

Nosso intuito é encontrar um quadrado da soma ou subtração dentro dessa expressão. Para tal, somando e subtraindo $\frac{b^2}{4a^2}$ dentro do parênteses, já que $a \neq 0$, temos:

$$a(x^2 + \tfrac{b}{a}x) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{b^2}{4a^2}) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - a(\tfrac{b^2}{4a^2}) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 = a(\tfrac{b^2}{4a^2}) - c$$

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 = (\tfrac{b^2}{4a} - c)$$

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a}.$$

Note então que temos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a},\ a \neq 0.$$

Isto quer dizer que:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a}$$

$$\Rightarrow^{*1} (x + \tfrac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\tfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$*1$: Chama-se Δ, o discriminante, que fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, com $a \neq 0$, só fará sentido se $\Delta \geq 0$ (para que se tenha raiz real). O caso contrário, $\Delta < 0$, significa que a equação não possui solução real, pois $(x + \frac{b}{2a})^2$ nunca pode ser um número negativo. Isso decorre do fato de que a^2 é sempre um número positivo, temos que $4a^2$ também é um número positivo, o que nos limita então a nos preocupar o sinal de $b^2 - 4ac$, que nunca poderá ser negativo, pois se acontecesse tornaria $\Delta < 0$, e seria, de fato, um absurdo, pois:

$$(x + \tfrac{b}{2a})^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Temos ainda, a forma canônica de se escrever a equação quadrática. :

$$ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2-4ac}{4a},\ a \neq 0.$$

Chamando $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$, temos outra forma de se escrever a equação quadrática na forma canônica:

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow (x - m)^2 + k,\ a \neq 0.$$

Para colocarmos a equação quadrática na forma fatorada, vamos nos lembrar que: chamando r_1 a primeira raiz e de r_2 a segunda raiz, observamos que a soma das raízes é dada por $S= r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ e produto por $P= r_1.r_2 = \frac{c}{a}$.

De $ax^2 + bx + c = 0$, se dividirmos tudo por a, com $a \neq 0$, $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$. Note que substituindo as raízes, temos:

$$a[x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1.r_2)] = 0$$

$$\Rightarrow a[x^2 - xr_1 - xr_2 + r_1.r_2] = 0$$

$$\Rightarrow a[x(x - r_1) - r_2(x - r_1)] = 0$$

$$\Rightarrow a[(x - r_1)(x - r_2)] = 0$$

(que é a forma fatorada do trinômio do segundo grau).

Note que se a equação não tiver raízes reais, não é possível colocá-la na forma fatorada.

Exercício 1 Coloque na forma canônica as equações quadráticas abaixo, com $x \in \mathbb{R}$:

a) $3x^2 = 0$;

b) $-4x^2 = 0$;

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

d) $x^2 + 4x + 5 = 0$;

e) $x^2 - 8x + 12 = 0$;

f) $-x^2 + 9 = 0$.

Exercício 2 Escreva as equações abaixo na forma fatorada, se possível, com $x \in \mathbb{R}$:

a) $3x^2 = 0$;

b) $-4x^2 = 0$;

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

d) $x^2 + 4x + 5 = 0$;

e) $x^2 - 8x + 12 = 0$.

2.1.0.1 **Existência ou não de raízes reais.**

Resolvendo a equação do segundo grau dentro do conjunto dos reais, podemos encontrar três tipos de situações:

- A equação tem raízes reais e elas são diferentes;
- A equação tem raízes reais e elas são iguais (uma raiz de multiplicidade 2);
- A equação não possui raízes reais.

Analisando as três situações, vemos que o que determina esse tipo de ocorrência, é o valor de Δ. Desta forma, analisaremos o valor de Δ nas três situações: $\Delta > 0, \Delta < 0$, e $\Delta = 0$.

1. Supondo $\Delta > 0$, $a \neq 0$: $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais. Chamando-as de x' e x" respectivamente, temos então duas raízes reais e diferentes:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Supondo $\Delta = 0$, $a \neq 0$, temos então duas raízes reais e iguais (um número real- uma raiz real de multiplicidade 2).

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x' = x"$$

.

3. Supondo $\Delta < 0$, $a \neq 0$, com $ax^2 + bx + c = 0$ e com a, b e c reais, como não existe raiz real de número negativo, a equação não tem raiz real.

Exemplo 2.1.1. *Resolveremos então agora o exemplo* 2.0.1*, de outra forma, agora usando o método de completar quadrados:*

Queremos descobrir dois pares de números naturais, cuja soma é 5 e cujo produto é 6. Para tal, vamos nos lembrar que no exemplo estávamos ordenando o pensamento da seguinte forma. Sejam α e β esses números:

$$\alpha + \beta = 5 \Rightarrow \alpha = 5 - \beta.$$

De:

$$\alpha.\beta = 6 \Rightarrow \beta(5-\beta) = 6 \Rightarrow \beta^2 - 5\beta + 6 = 0.$$

Note que acima temos uma equação do segundo grau e comparando com $ax^2 + bx + c$*, temos* $a = 1$*,* $b = -5$*,* $c = 6$*. O que mostra a equação quadrática que descreve o problema em questão:* $\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$*, com* β *pertencente ao conjunto dos números naturais. Encontrando as raízes dessa equação, encontraremos a solução previamente encontrada na tabela.*

De: $\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$*, completando o quadrado e comparando a expressão com* $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$*, descobrimos u, o número que devemos elevar ao quadrado para que quando o somarmos e subtrairmos na expressão, completaremos o quadrado:* $-2u\beta = -5\beta$*, temos que* $u = \frac{5}{2}$ *e elevando ao quadrado, temos o número que devemos somar e subtrair para completar o quadrado, ou seja: somando e subtraindo* $\frac{25}{4}$*, temos:*

$$(\beta - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} + 6 = 0 \Rightarrow (\beta - \tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{25}{4} - 6 \Rightarrow (\beta - \tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\beta - \tfrac{5}{2}) = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}} \Rightarrow (\beta - \tfrac{5}{2}) = \pm\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} = 3 \text{ ou } \beta = \tfrac{-1}{2} + \tfrac{5}{2} = 2.$$

.

Logo, as raízes da equação são 2 *e* 3*.*

Exemplo 2.1.2. *(Dante[6], p.112)O retângulo áureo ou de ouro dos gregos é um retângulo (figura 2) especial em que valem as relações entre o comprimento c e a largura l:*

$$\tfrac{c}{l} = \tfrac{l}{c-l}.$$

A proporção áurea pode ser observada na natureza, nas obras de arte, nas construções. Por exemplo, o templo grego Partenon (figura 1[24]), templo representativo do século de Péricles, em homenagem à Deusa grega Athenas, tem suas medidas da fachada baseadas na proporção áurea, o que revela uma preocupação em se ter uma obra bela e harmoniosa.

Fonte: http://f.i.uol.com.br/folha/ciencia/images/15345816.jpeg

Figura 11 – Partenon Grego.

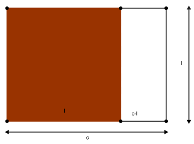


Figura 12 – Retângulo áureo.

Se considerarmos $c = 1$ *(um), a proporção será:*

$$\frac{1}{l} = \frac{l}{1-l} \Rightarrow l^2 + l - 1 = 0.$$

O inverso da raiz positiva desse número é chamado número de ouro. Qual é esse número?

Para resolvermos esse problema, devemos então encontrar as raízes da equação quadrática:

$$l^2 + l - 1 = 0.$$

Para isso, completando o quadrado, devemos somar e subtrair $\frac{1}{4}$ *do primeiro membro:*

$$l^2 + l - 1 = 0$$

$$\Rightarrow l^2 + l + \frac{1}{4}\frac{-1}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (l + \tfrac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow (l + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow (l + \tfrac{1}{2}) = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$\Rightarrow l = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow l = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

.

Consideraremos apenas a raiz positiva. Mas essa ainda não é a resposta, pois queremos o inverso dessa raiz. Desse modo devemos resolver:

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} =^{*3} \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$*3$*: Racionalizando, ou seja: multiplicando numerador e denominador por* $\sqrt{5}+1$.

Exemplo 2.1.3. *(Temas e problemas elementares[13] p.38- resolução adaptada.) Meu vizinho, com* 20 *m de cerca, construiu um cercado retangular, de* $32\ m^2$ *de área, utilizando seu muro como um dos lados. Quanto medem os lados desse retângulo?*

Observamos que se trata de um retângulo:

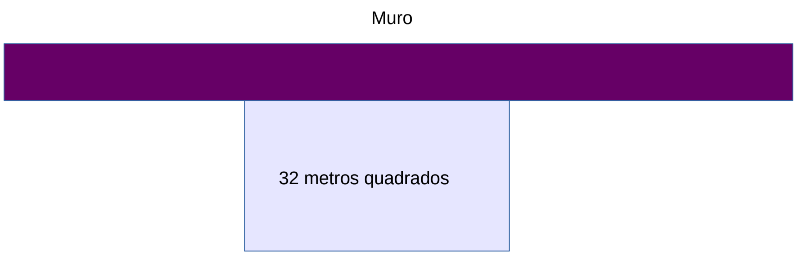


Figura 13 – Visualização do problema: o muro e o cercado.

Chamando de x *o comprimento e de* y *a largura do terreno, é fácil ver que a área* A *será dada por* $A = x.y$*, temos também que o comprimento total da cerca, como são dois lados medindo* y *e apenas um medindo* x*, pois há um muro paralelo a esse lado e não será necessário colocar cerca nesse local, será dado por:*

$$2y + x = 20 \Rightarrow x = 20 - 2y.$$

De:

$$A = x.y.$$

Temos que:

$$A(y) = (20 - 2y).y$$

Após aplicarmos a propriedade distributiva da multiplicação, fica :

$$A(y) = -2y^2 + 20y.$$

Mas a área foi dada no enunciado, que tem o valor de $32m^2$*, isto quer dizer que:*

$$-2y^2 + 20y = A(y) = 32 \Rightarrow 2y^2 - 20y + 32 = 0 \textit{ (:2)}$$

$$\Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0.$$

Para completar o quadrado, devemos somar e subtrair 25 do primeiro membro:

$$y^2 - 10y + 25 - 25 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 5)^2 = 9.$$

$$\Rightarrow (y - 5) = \pm 3 \Rightarrow y - 5 = 3 \textit{ ou } y - 5 = -3$$

$$\Rightarrow y = 8 \textit{ ou } y = 2.$$

Encontramos então duas soluções: devemos analisar a validade das duas:

Na situação 1*, verificamos que o valor está correto:*

$$y = 2m,\ x = 20 - 2y$$

Como $x = 16m$*, temos que:*

$$A = x.y = 16.2 = 32m$$

Situação 2:

$$y = 8 \Rightarrow x = 20 - 2y = 20 - 2.8 = 20 - 16 = 4$$

$$\Rightarrow a = x.y = 4.8 = 32m.$$

E o valor também está correto. Logo os valores das dimensões do retângulo são $4m$ *de comprimento e* $8m$ *de largura ou* $16m$ *de largura e* $2m$ *e de comprimento: os dois satisfazem as condições de ter área de* $32m^2$ *e gastar* $20m$ *de cerca.*

É importante ressaltar que problemas com mais de uma solução envolvem a análise mais criteriosa da situação, o que leva a desenvolver em você, leitor, o senso crítico, importante para seu desenvolvimento integral. Note também que esse problema prático recai numa equação do segundo grau, quando buscamos uma expressão para a área.

Agora, faremos alguns exercícios sobre o assunto.

Exercício 3 (Guelli[11], p.7) Na Índia antiga um passatempo popular dos brâmanes (tipo de casta), era uma competição pública com quebra-cabeças matemáticos, os sutras (ditos populares, em formas de versos). Desafio você a resolver esse!

```
Alegravam-se os macacos
divididos em dois bandos:
sua oitava parte ao quadrado
no bosque brincava.

Com alegres gritos, doze
gritando no campo estão.
Sabes quantos macacos há
na manada no total?
```

Exercício 4 (Exercício-Oscar Guelli, p.5-suplemento de trabalho-adaptado[11]) No *Al-jabr*, Al-Khwarizmi interpreta geometricamente através do cálculo de áreas de figuras planas, equações quadráticas. Observe um exemplo:

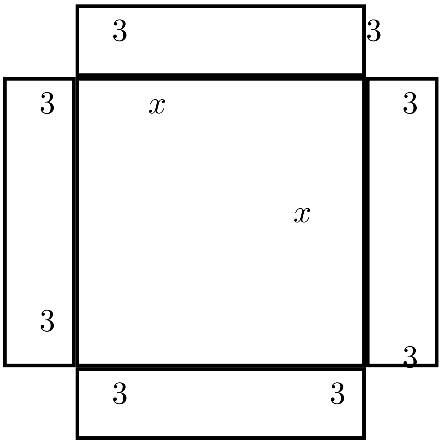


Figura 14 – Interpretação geométrica da equação quadrática do exercício.

Essa figura tem área 64 u.a.. Para Al-Khwarizmi essa figura representava uma equação quadrática. Qual seria? Use seu método de resolução (complete o quadrado) e descubra a raiz positiva dessa equação.

Exercício 5 (CefetQ-2005) O custo das fotos da turma EM-383 de uma escola, foi de 400 reais e deveria ser dividido em partes iguais por todos os alunos da turma. No entanto, 5 alunos deixaram de pagar a sua parte. Por conta disso, cada um dos demais teve de pagar 4 reais a mais. Determine o número total de alunos na turma.

Exercício 6 (EPCAR-2001) Os números x, tais que o inverso de seu quadrado é igual ao inverso de sua soma com 2, constituem um subconjunto de cujos elementos somados equivalem a:

a) 0

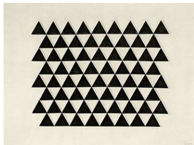
b) 3

c) 2

d) 1

3 A FUNÇÃO QUADRÁTICA OU DO SEGUNDO GRAU

Observe a obra de Luiz Sacilotto:



Fonte: http://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/4749-modernismos-no-brasil-foto-88846

[25]

Figura 15 – Azulejo de Luiz Sacilotto. Concreção 5629 Esmalte sintético sem alumínio, 60 x $80cm, 1956$

Note que a matemática está presente em todos os lugares, inclusive na obra de artistas. Note também que essa obra, em particular, foi feita a partir de triângulos equiláteros (de mesma medida de lado). Podemos visualizar na obra diferentes triângulos equiláteros: observe uma das sequências possíveis, formada em ordem crescente de medida de lado, figuras formadas por triângulos de mesma área (uma unidade de área), observando-se a obra em questão de Luiz Sacilotto:

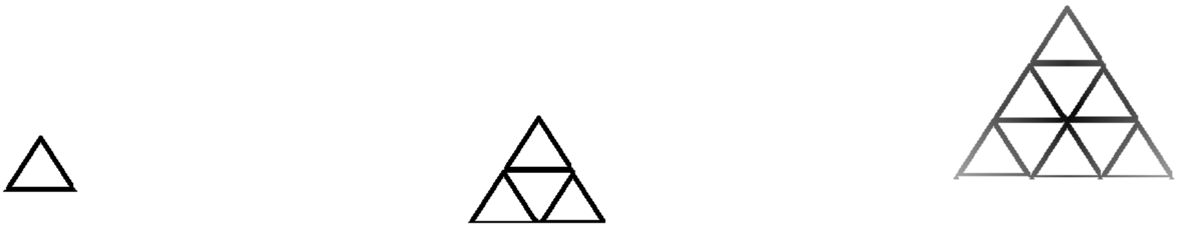


Figura 16 – Triângulos em série.

a)Desenhe a próxima figura da sequência acima e resolva as questões a seguir :

b)Complete a tabela:

Posição	Número de triângulos com uma unidade de área
1	1
2	4
3	9
4	...
...	...
n	...

c) Considerando a figura 1 como uma unidade de área, qual a área da figura 4? Da figura 6 dessa sequência? E a área da figura 9?

d)Qual a expressão que indica a área da figura em função da posição que a ela ocupa na sequência?

e)Qual a posição da figura que tem 196 unidades de área?

Voltando ao problema, vamos seguir a ordem dos questionamentos feitos:

a)Desenhando a figura pedida:

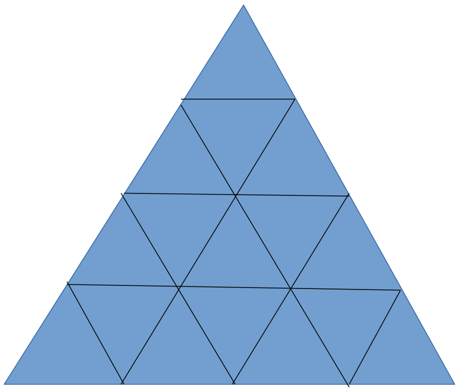


Figura 17 – Triângulo da posição 4.

No item b completaremos a tabela, para uma melhor visualização do problema:

Posição	número de triângulos com uma unidade de área
1	$1 = 1^2$
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$
4	16 (aumentou em 7 triângulos)
5	25 (aumentou em 9 triângulos)
6	36 (aumentou em 11 triângulos)
...	...
9	81 (aumentou em 17 triângulos)
...	...
n	n^2

c)Observando a tabela é fácil ver que a posição^2 = área da figura, em triângulos de uma unidade de área. Na tabela, também já respondemos à questão d.

À medida em que aumentamos a posição, aumentarmos os triângulos de uma unidade de área e por consequência a área.

O aumento de uma posição para outra, não é um valor constante:

Posição5	número de triângulos com uma unidade de área
1	1
2	4 (aumentou em 3 triângulos)
3	9 (aumentou em 5 triângulos)
4	16 (aumentou em 7 triângulos)
5	25 (aumentou em 9 triângulos)
...	...
n	n^2

Note que a cada triângulo há um aumento padrão, sempre aumentando 2 a mais que a cota anterior de aumento, a partir da primeira figura.

Note também, que a área é representada por quadrados perfeitos: é a (número da posição)^2. Como o quociente entre a área e a posição não é constante, ($\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3} ... \neq \frac{n^2}{n}$), não são grandezas diretamente proporcionais.

De posse da informação de que a área está relacionada com a posição, é possível encontrar a posição de qualquer triângulo equilátero, sabendo sua área em unidades de área, pré-determinadas no exercício, na sequência apresentada acima e do mesmo modo, podemos encontrar a área de qualquer triângulo da sequência sabendo sua posição. Podemos então resolver o item e, onde se quer saber a posição da figura da sequência com 196 $u.a.$.

Isso significa que:

$$n^2 = 196 \Rightarrow n = \pm\sqrt{196}$$

$$\Rightarrow n = \pm 14 \Rightarrow n = 14$$

(descartamos o -14 porque não existe posição -14).

Fazendo posição: x e área: $f(x)$, temos a função $f(x) = x^2$, que é uma função quadrática e apesar da $função f(x) = x^2$ estar bem definida para $n \in \mathbb{R}$, não faz sentido $n = -14$, pois trata-se de posição em uma sequência, onde o primeiro termo é 1, de modo que o domínio dessa função é $[1, \infty[$, e a imagem é $[1, \infty[$. Mas afinal, o que caracteriza uma função quadrática?

3.1 A CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA OU DO SEGUNDO GRAU.

Definição 3.1.1. *"Uma $função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.", segundo Lima[12] (2003, p.114) ."*

São exemplos de funções quadráticas:

1.$f(x) = 5x^2 - 6x + 4$, sendo $a = 5$, $b = -6$ e $c = 4$;

2.$f(x) = x^2 + 9$, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = 9$;

3.$f(x) = -x^2 + x$, com $a = -1$, $b = 1$ e $c = 0$.

A caracterização é o modo que pode definir se o modelo matemático na suposta situação, é o que deve ser usado. Nesse caso em particular, da função quadrática.

Podemos então definir assim:

Definição 3.1.2. *"Função quadrática é toda $função$ contínua, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que transforma uma progressão aritmética de primeira ordem, não constante, não degenerada:*

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$$

Em uma progressão aritmética de segunda ordem, não degenerada, onde:

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n), ...$$

Sendo essa função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Vamos voltar ao exemplo utilizado acima, onde retiramos figuras da ilustração do quadro de Luiz Sacilotto, citado acima, que ajudará a exemplificara situação:

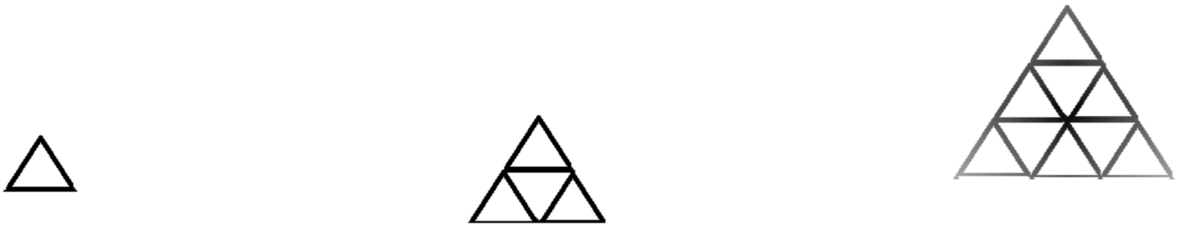


Figura 18 – Triângulos em série.

Veja a tabela que ilustra a sequência ($n \in \mathbb{N}$):

Posição	número de triângulos com uma unidade de área
1	1
2	4 (aumentou em 3 triângulos)
3	9 (aumentou em 5 triângulos)
4	16 (aumentou em 7 triângulos)
5	25 (aumentou em 9 triângulos)
6	36 (aumentou em 11 triângulos)
...	...
9	81 (aumentou em 17 triângulos)
...	...
n	n^2

Analisando o exemplo acima, observamos que temos uma P.A. (progressão aritmética) crescente, de primeiro termo 1 de razão 1, nas posições dada por:

$$x_n = n, n \in \mathbb{N}, 1 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...$$

Que seria assim:

$$1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...$$

Se aplicarmos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, que é uma função contínua nos reais e quadrática, à sequência acima, teremos:

$$a_1 = f(x_1) = 1,\ a_2 = f(x_2) = 4,\ a_3 = f(x_3) = 9,...,\ a_n = f(x_n) = n^2,....$$

Note que não é uma progressão aritmética de primeira ordem, muito menos constante, mas examinando a sequência formada pelas diferenças sucessivas(Δa_n), onde $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 3$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 5$$

$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = 7$$

$$... = ... - ... = ...$$

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 1$$

Que é uma progressão aritmética de razão 2, primeiro termo 3, não constante. Isso nos mostra que a sequência:

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, ..., a_n = n^2, ...$$

é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois:

Definição 3.1.3. *"Uma P.A de segunda ordem é uma sequência (a_n), na qual as diferenças*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

entre cada termo e o termo anterior formam uma P.A. de primeira ordem não estacionária. "[15](Matemática discreta, p. 42)".

Note ainda que $f(x) = x^2$ transforma a sequência

$$(x_n) = n,\ n \in \mathbb{N}$$

numa P.A. não degenerada de segunda ordem e de fato:

$$f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é uma função quadrática real.

Mas o que a P.A. de segunda ordem não degenerada tem a ver com a função quadrática? .

Definição 3.1.4. *"Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão de ordem p e reciprocamente, se (a_n) é uma P.A. de ordem p, então (a_n) é um polinômio de grau p em n."*

Faça $n = x$ e $p = 2$ e teremos a justificativa para $*^1$.

Exercício 7 Observe outra obra de Sacilotto:

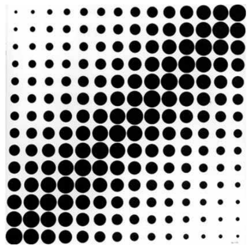


Figura 19 – Concreção 8079 -Sacilotto, 1980

Dela retiramos as seguintes figuras e montamos a sequência:

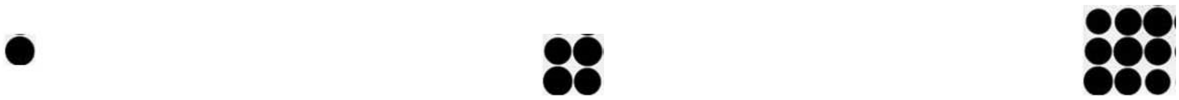


Figura 20 – Sequência das bolinhas em série da obra de Sacilotto 8079, retiradas a partir do canto esquerdo inferior da obra.

Observe o padrão desenhado e desenhe a próxima figura da sequência. Depois resolva as questões:

a) Quantas bolas formam a figura 1? E a figura 2? E a figura 3 dessa sequência?

b) Quantas bolas terá a figura 5 dessa sequência?

c) Qual a expressão que indica o número de bolinhas da figurada posição que ela ocupa na sequência?

d) Qual a posição da figura que tem 2500 bolinhas na sequência?

e) Usando as definições dadas no início da seção, justifique através de resultados de forma simples, que essa é uma função quadrática, segundo as definições dadas.

3.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: OTIMIZAÇÃO.

Um problema de otimização é aquele onde se propõe a determinar os valores extremos da função em questão, ou seja, em um dado intervalo, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir. Problemas desse tipo são comuns em nossa vida cotidiana, aparecem por exemplo quando tentamos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, a altura máxima de um foguete que cuja trajetória é parabólica, etc.. O conhecimento das principais propriedades e características das funções quadráticas pode nos ajudar a resolver problemas do cotidiano e reais. Mais especificamente, estudaremos problemas envolvendo máximos e mínimos de funções quadráticas aplicadas no ensino médio.

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 3.2.1. *(Manoel Paiva, adaptado[18]) Sabe-se, que sob certo ângulo de lançamento, a altura h atingida por uma pedra, em metros, em função do tempo t, em décimos de segundos, é dada por $h(t) = \frac{-t^2}{60} + t$. Observe sua trajetória:*

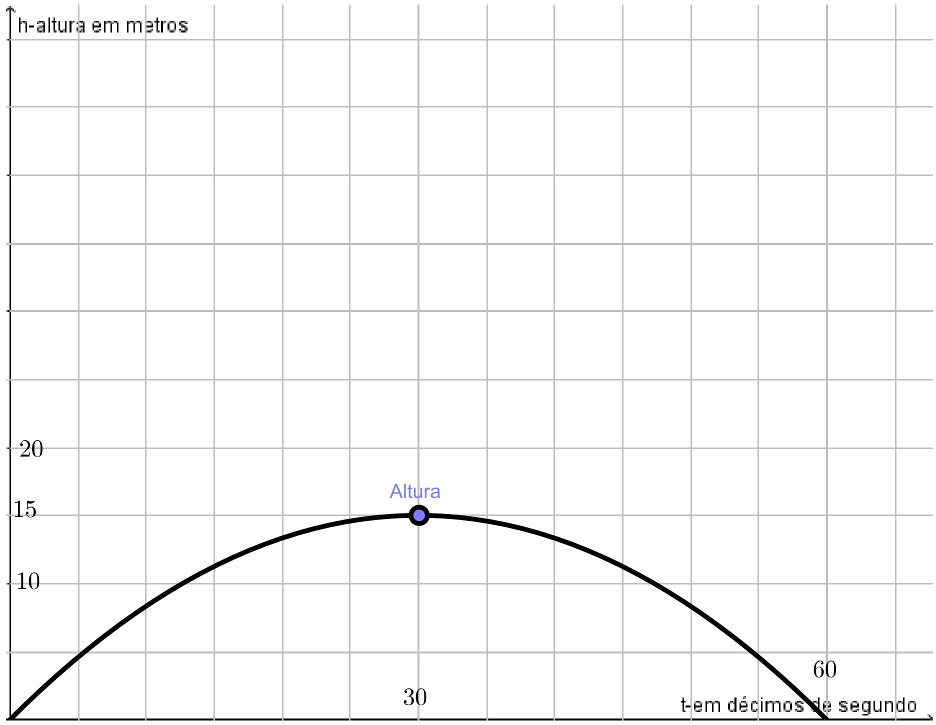


Figura 21 – Trajetória

Observe e responda:

- *Qual é a altura máxima atingida pela pedra em relação ao plano horizontal de onde foi lançada? Quanto tempo após o lançamento, a pedra levou até atingir o solo? Quanto tempo a pedra levou, após o lançamento, até atingir a altura máxima?*

Após observar o gráfico da trajetória parabólica, diga-se de passagem, é fácil responder aos questionamentos propostos, sendo necessário nesse caso, apenas a habilidade de interpretar gráficos, o que nos leva a então responder:

- *A altura máxima atingida pela pedra é de* 15 *metros. A pedra levou* 60 *décimos de segundos, após ser lançada para atingir o solo. A pedra levou apenas* 30 *décimos de segundo até atingir a altura máxima, após ser lançada.*

Nesse caso, nem mesmo precisamos desenvolver a função, mas é claro que nem sempre é assim, "tão de graça". Na verdade, esse problema apenas nos deu uma visão inicial de como seria a finalização do problema após encontrar os pontos notáveis da parábola, analisar a função. Na verdade, ele contribui para a familiarização inicial de um problema de otimização de função quadrática, para uma motivação inicial positiva, até mesmo para aqueles com quase nenhuma ou nenhuma "simpatia com a matemática", pois é muito importante uma primeira visualização, mesmo que intuitiva, do conceito. Lembrando do conceito de raízes da função, é possível encontrar quanto tempo a pedra levou após o lançamento até atingir o solo, nesse caso 60 décimos de segundo. Analisando o gráfico e ressaltando a simetria da parábola em relação a seu eixo, que nesse caso particular é a reta vertical, paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto médio entre $O(0,0)$ e $Q(60,0)$, $x = 30$, metade do caminho entre o tempo da queda e do lançamento, é possível encontrar a altura máxima e essa seria outra forma de se resolver o problema.

Definição 3.2.1. *Dado $t \in \mathbb{R}$, dizemos que $f(t)$ é o valor máximo de f, se$f(x) \leq f(t)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que $f(t)$ é o valor mínimo, se $f(x) \geq f(t)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Da forma canônica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ a,\ b \text{ e } c \in \mathbb{R},$$

temos:

$$f(x) = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{4ac - b^2}{4a},$$

observamos que $\frac{4ac-b^2}{4a}$ é uma constante (não depende de x) e que a parcela que varia de acordo com x, é :

$$a(x + \tfrac{b}{2a})^2.$$

Como $a \neq 0$, por definição, e $(x + \frac{b}{2a})^2$ é uma quantidade maior ou igual a zero, isto quer dizer que teremos duas situações prováveis: $a > 0$ ou $a < 0$:

Situação 1:

$$a > 0\text{:} \Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 \geq 0.$$

Somando a ambos os membros $\frac{4ac-b^2}{4a}$, temos:

$$a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a} \geq \tfrac{4ac-b^2}{4a}.$$

Mas:

$$f(x) = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \tfrac{4ac-b^2}{4a}.$$

Já que:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow f(x) \geq -\tfrac{\Delta}{4a}.$$

Isto quer dizer que a função é limitada inferiormente por $-\frac{\Delta}{4a} = y_v$. Ou seja: o valor mínimo da função y_v é atingido quando $a > 0$. Portanto:

$$f(x) \geq y_v, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De onde se observa que f atinge seu valor mínimo, quando:

$$f(x) = y_v \Rightarrow a(x - x_v)^2 = 0 \Rightarrow x = x_v$$

.

Ou seja, o valor da abscissa que minimiza a função é $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Situação 2: $a < 0$. Note que:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow f(x) \leq -\tfrac{\Delta}{4a}.$$

Isto quer dizer que a função é limitada superiormente por $-\frac{\Delta}{4a}$. Ou seja: o valor máximo da função é $\frac{-\Delta}{4a}$, que chamaremos de y_v. Note ainda que:

$$f(x) \leq y_v, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De onde se observa que f atinge seu valor máximo quando:

$$f(x) = y_v \Rightarrow a(x - x_v)^2 = 0 \Rightarrow x = x_v$$

Ou seja: o valor da abscissa que maximiza a função é o $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Note que, por definição de função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, b e $c \in \mathbb{R}$ atinge seu ponto máximo ou mínimo dependendo exclusivamente do sinal de a: $a < 0 \Rightarrow$ função possui máximo (limitada superiormente) e $a > 0 \Rightarrow$ função possui mínimo (limitada inferiormente). De qualquer forma, temos que o vértice da parábola que representa a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, b e $c \in \mathbb{R}$ é:

$$V = (-\tfrac{b}{2a}, -\tfrac{\Delta}{4a}).$$

Exemplo de máximo em uma função f qualquer, no intervalo considerado (contínuo, com extremidades em azul-$D(f)$):

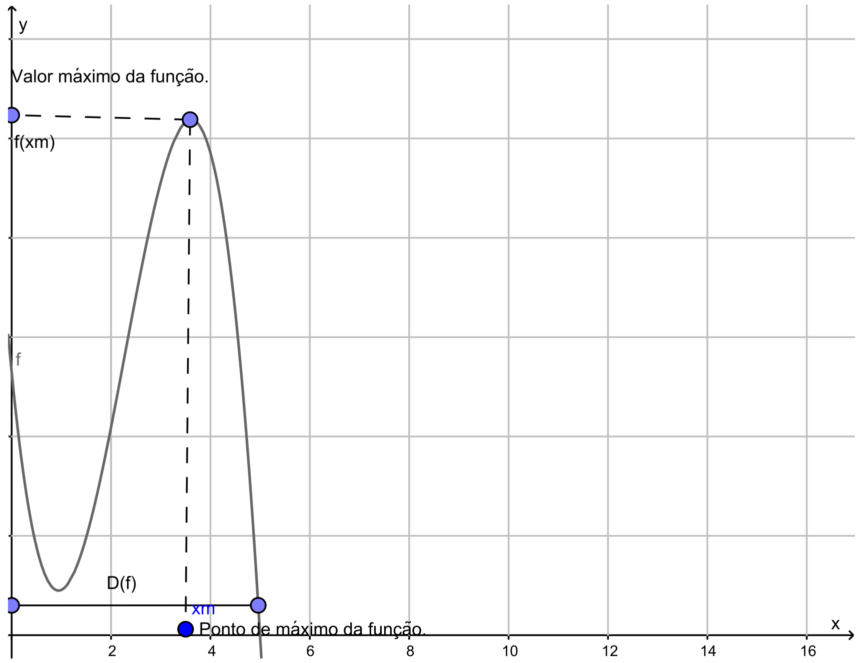


Figura 22 – Máximo de uma função - exemplo

De fato, voltando ao exemplo 3.3.1 (aquele, do lançamento da pedra...), e usando o conhecimento adquirido, poderíamos ter resolvido todo o exercício, sem a visualização da trajetória, apenas a função dada, seria suficiente, o que na verdade é o que acontece na maioria das vezes. Recorde que a função dada no exemplo era:

$$h(t) = \frac{-t^2}{60} + t,$$

onde se compararmos a $f(x) = ax^2 + bx + c$, observamos que $a = -\frac{1}{60}$, $b = 1$ e $c = 0$.

Como a é negativo, temos um ponto de máximo na função, pois a função é limitada superiormente, mas não é inferiormente. A concavidade da parábola que representa essa função, será voltada para baixo. Isto quer dizer que a altura será máxima e para encontrá-la, basta encontrar as coordenadas do vértice (ponto de otimização da função) da parábola.

De:

$$\Delta = (1)^2 - 4(-\frac{1}{60})(0) = 1 \text{ e } V(x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

$$\Rightarrow x_v = \frac{-1}{2.\dfrac{-1}{60}} = 30 \text{ décimos de segundo e}$$

$$y_v = \frac{-1}{4.\frac{-1}{60}} = 15m,$$

como havíamos mostrado anteriormente.

O conceito de otimização também é muito utilizado em questões financeiras, quando por exemplo, gostaríamos de maximizar os lucros de uma empresa, a receita de uma viagem comercial. Vejamos agora duas formas de se trabalhar esse conceito de forma contextualizada:

Exemplo 3.2.2. *(Manoel Paiva[18]-adaptado) Uma agência de turismo fretou um ônibus de 40 poltronas para uma viagem. Cada passageiro pagará* 20 *reais mais uma taxa de* 2 *por poltrona que não for ocupada.*

a) *Qual é a receita máxima que a agência pode arrecadar com essa viagem?*

b) *Qual deve ser o número de passageiros para que a receita seja máxima?*

Vamos começar modelando o problema, analisando-o devagar. Chamando de d as poltronas desocupadas e de O, a ocupação do ônibus (lotação), temos que número de poltronas ocupadas, será dado por:

$$\Rightarrow O = 40 - d.$$

Como não há passageiros negativos e não podemos ter mais que 40 deles, devemos limitar d:

$$0 \leq d \leq 40 \ (d \in \mathbb{N}).$$

.

Temos então, que o valor total arrecadado, ou receita (R) = ocupação . preço por poltrona, e cada passageiro irá pagar $(20 + 2.d)$ *reais. Passando da linguagem corrente para a matemática, temos que:*

$$R(d) = (40 - d)(20 + 2d),$$

onde aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, fica:

$$R = 800 + 80d - 20d - 2d^2 = 800 + 60d - 2d^2,$$

que é uma função quadrática! E o conceito de otimização já foi apresentado, então devemos nos lembrar que basta encontrar o valor máximo dessa função e de fato, se compararmos com $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, be $c \in \mathbb{R}$, temos que $a = -2 < 0$, o que mostra que a função tem ponto máximo. Note ainda que $b = 60$ e $c = 800$. Vamos então, encontrar o máximo dessa função, y_v, para responder ao item a. De:

$$\Delta = (60)^2 - 4(-2)(800) = 3600 + 6400 = 10000$$

$$\Rightarrow R_{máxima} = -\tfrac{\Delta}{4a} = -\tfrac{10000}{4(-2)} = 1250 \ \textit{reais.}$$

O que quer dizer que a receita máxima que a agência pode arrecadar com essa viagem é de 1250 *reais* .

Para responder ao item b, vamos encontrar o ponto do domínio que maximiza a função. Para isso temos duas opções: substituir o valor de y_v na função ou calcular o $x_v = -\frac{b}{2a}$. Quando $R = 1250$, o número de passageiros será encontrado substituindo-o na função dada:

$$-2d^2 + 60d + 800 = 1250 \Rightarrow 2d^2 - 60d - 450 = 0$$

$$\Rightarrow d^2 - 30d - 225 = 0 \Rightarrow (d - 15)^2 = 0 \ \textit{(colocando na forma canônica)}$$

$$\Rightarrow d = 15 \ \textit{e} \ O = 25.$$

Note que poderíamos também resolver o x_v, resolvendo a função com a fórmula resolutiva ou da forma que acharmos conveniente, desde que o raciocínio esteja correto, pois a melhor forma é aquela que nos parece mais simples naquele momento de resolver o exercício.

Exercício 8-Manoel Paiva[18] Um aluno resolveu o exercício, conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Encontre o erro e refaça a resolução, corrigindo-a.

<u>Atividade</u> O departamento de uma indústria de motores para piscina estimou que o custo unitário de produção, C, em reais, de um tipo de motor decresce em função do número x de unidades fabricadas por dia, de acordo com a função $C(x) = 10x^2 - 410x + 4500$, com $x > 0$. Qual é o custo unitário mínimo pra a produção desse tipo de motor?

Resolução O custo unitário mínimo, em reais, é o valor da ordenada y_v, do vértice da parábola que representa a função C: $y_v = -\Delta/4a = 11900/40 \Rightarrow y_v = 297{,}50$. Logo, o custo unitário mínimo de produção é 297,50 reais.

Exercício 9 Determine k e p, para que $(1, 2)$ seja o ponto de otimização da parábola de equação:

$$y = x^2 - kx + p.$$

Classifique-o como de ponto de máximo ou ponto de mínimo.

Exercício 10 De todos os retângulos de perímetro 60 cm, determine o de área máxima.

Exercício 11 Sejam os pares de números reais cuja a soma é 16, determine aquele cujo produto é máximo.

Exercício 12 Suponha que a potência elétrica de um gerador seja expressa por $P = 2i - i^2$ (Watts). Calcule a intensidade da corrente elétrica necessária para se obter a potência máxima do gerador.

3.3 O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA: A PARÁBOLA.

O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a, b, e $c \in \mathbb{R}$, é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo oy. Sua forma, como já citamos anteriormente, provém de:

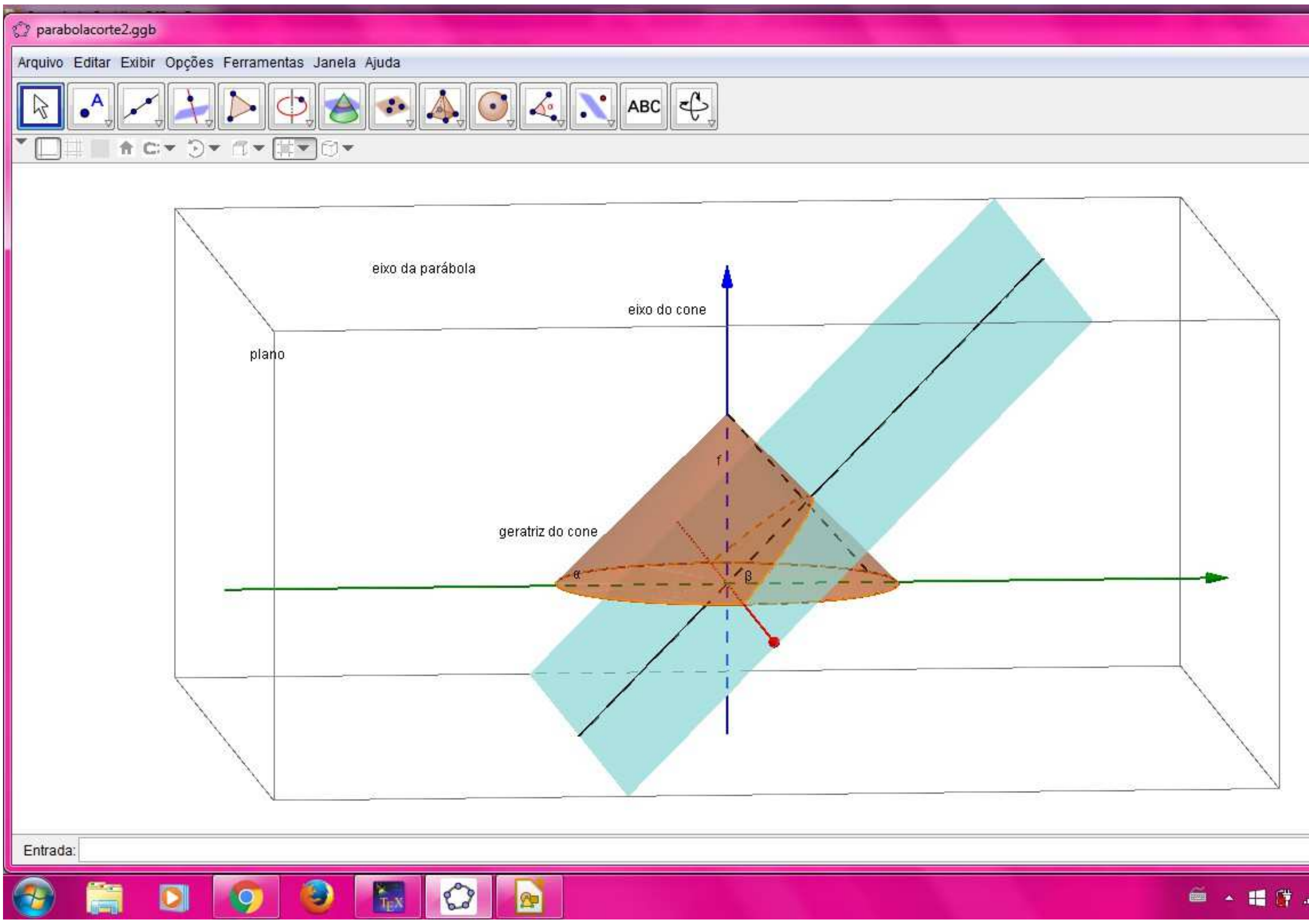


Figura 23 – Visão tridimensional no GeoGebra, de um exemplo de corte no cone, que origina a parábola.

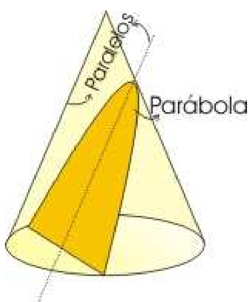


Figura 24 – Exemplo de corte no cone reto que resulta na parábola.[5]

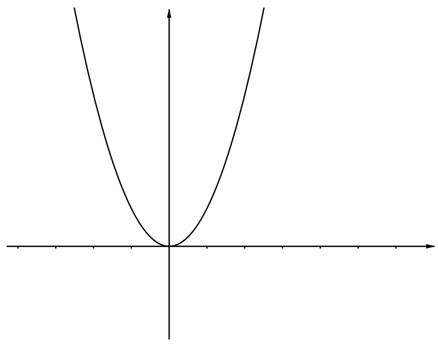


Figura 25 – Parábola no eixo.

Para esboçarmos o gráfico da parábola, basta atribuirmos valores reais a x, pertencentes ao domínio da função e substituindo-os, encontraremos a representação gráfica da função quadrática, que pode ser desde um arco de parábola, até uma parábola limitada apenas inferiormente ou superiormente.

Vamos então construir o esboço do gráfico de duas funções:

Exemplo 3.3.1. *Observe a função quadrática, contínua e real:*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ dada\ por\ g(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Atribuiremos valores para x pertencentes ao domínio (nesse caso particular, como o domínio é o conjunto dos reais, qualquer valor real serve) e aí encontraremos substituindo na função, os respectivos valores que deveremos marcar no eixo das ordenadas (Oy). *Faremos uma tabela para melhor visualização:*

x	y
0	$(0)^2 - 5(0) + 6 = 6$
1	$(1)^2 - 5(1) + 6 = 2$
2	$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$
3	$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0$
4	$(4)^2 - 5(4) + 6 = 2$

Temos então observando a tabela: 5 pontos, os quais denominaremos: $A(3,0)$, $B(2,0)$, $C(0,6)$, $D(4,2)$, $E(1,2)$. *Plotando no plano cartesiano os pontos, ligando-os e de posse do conhecimento que a função é contínua, temos:*

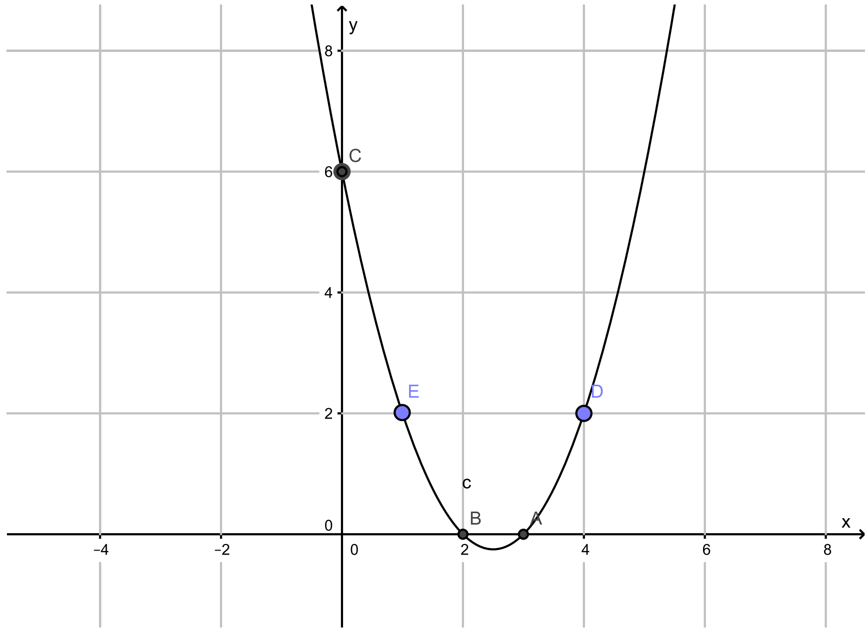


Figura 26 – Função $g(x)$.

Exemplo 3.3.2. *Vamos agora esboçar o gráfico da função* $h(x) = -x^2 - 1$, *contínua, com* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Faremos primeiro a tabela com valores reais para* x, *escolhidos de forma aleatória, dentro do conjunto dos números reais:*

x	y
-2	$-(-2)^2 - 1 = -5$
-1	$-(-1)^2 - 1 = -2$
0	$-(0)^2 - 1 = -1$
1	$-(1)^2 - 1 = -2$
2	$-(2)^2 - 1 = -5$

Temos então observando a tabela: 5 pontos, os quais denominaremos: $A'(0, -1)$, $B'(1, -2)$, $C'(-1, -2)$, $D'(-2, -5)$, $E'(2, 5)$. *Plotando-os no plano cartesiano e ligando-os, pois a função* h *é contínua, temos:*

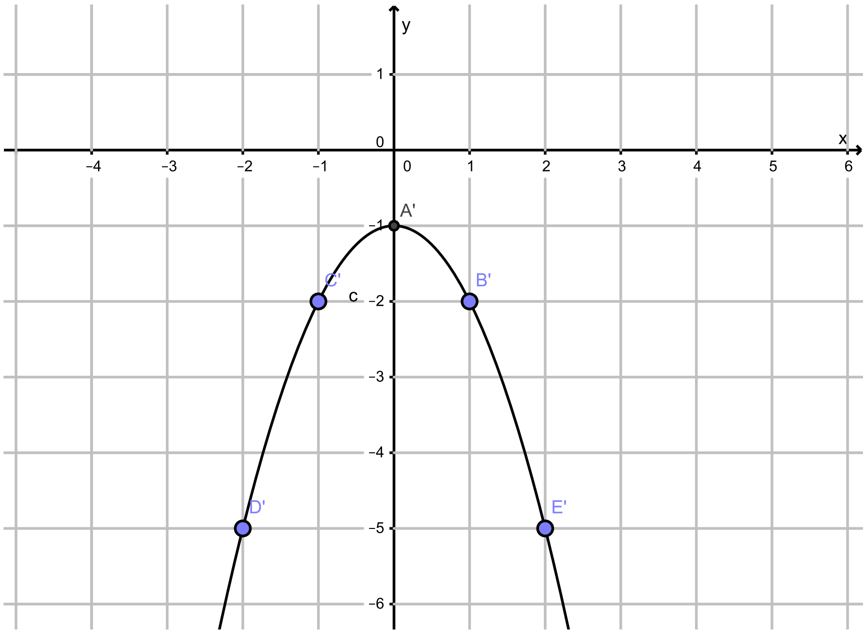


Figura 27 – *Função* $h(x)$

Exercício 13 O movimento de um projétil lançado verticalmente para cima, é descrito por:

$$y = -50x^2 + 250x \text{ , com } x,\, y \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Onde y é a altura em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. Qual a altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar?

Exercício14 (UFRJ-2007)[14] Se um cabo suporta um peso homogêneo muito maior que seu próprio peso, ele toma a forma de uma parábola. As torres $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ de uma ponte pênsil medem 200 m e são perpendiculares à pista de rolamento $\overline{DC}$, que mede 1000 metros. O cabo de sustentação preso às torres nos pontos A e B tem a forma de uma parábola vértice no ponto médio de $\overline{DC}$, conforme a figura a seguir:

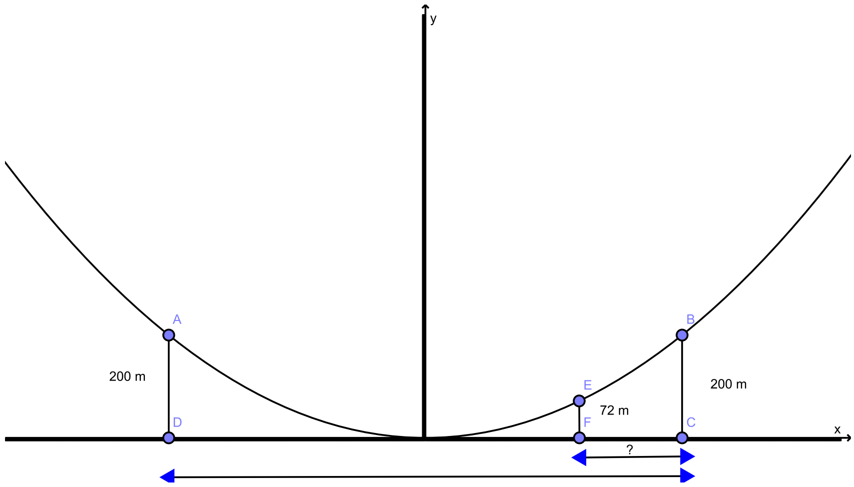


Figura 28 – Esquema da ponte pênsil.

a) Determine em relação ao sistema Oxy a equação da parábola de vértice O (ponto médio de $\overline{DC}$), que passa pelos pontos A e B.

b)Se o cabo de aço $\overline{EF}$ de 72 m de comprimento é preso ao cabo de sustentação no ponto E é perpendicular à pista de rolamento no ponto F (conforme mostra a figura), calcule a medida de $\overline{FC}$.

3.3.1 Pontos notáveis da parábola.

De:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, \text{ e } c \in \mathbb{R},$$

São os pontos da parábola, que auxiliam na análise da função e na construção da sua representação. São eles: o vértice (ponto de otimização da função, que pode mostrar o máximo da função, se $a < 0$, ou o valor do domínio que mostra o mínimo da função, quando $a > 0$), as raízes (pontos do domínio que anulam a função, ou seja: que cortam o eixo das abscissas - Ox) e c, o valor da imagem onde o a parábola corta o eixo das ordenadas (Oy) .

Voltando ao exemplo 3.2.2, de sorte que facilmente identificamos os pontos notáveis de $h(x)$:

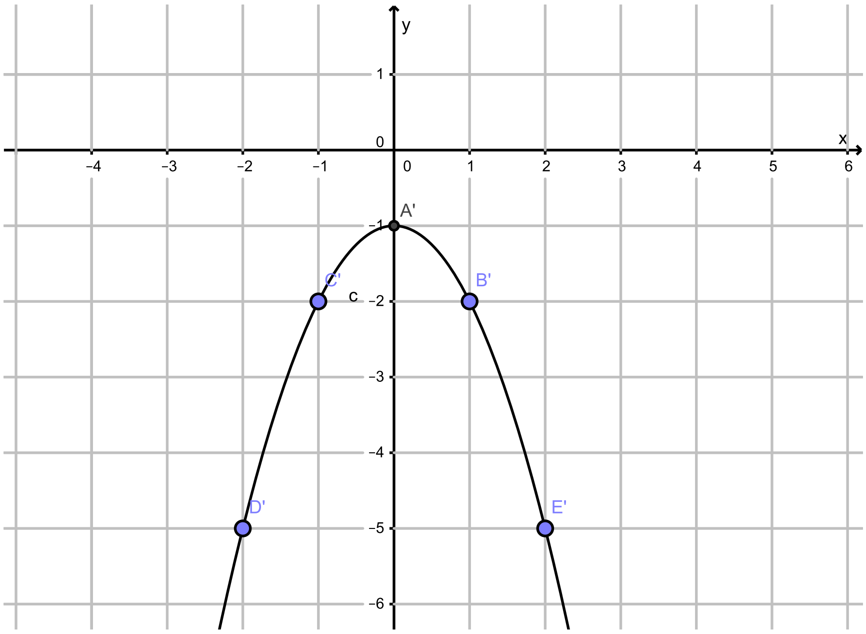


Figura 29 – *Função* $h(x)$.

Raízes: note que a função não corta o eixo das abscissas, o que mostra que a função não em raiz real. De fato, fazendo $h(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 1 = 0 \Rightarrow -x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = -1$, e não existe x real que satisfaça essa igualdade.

O vértice da função fica evidente no esboço dela: o ponto de maior valor da função (ponto máximo), que é $A'(0, -1)$ coincide com o ponto do domínio igual a *zero*.

Voltando também, só que agora ao exemplo 3.2.1, notamos que os pontos notáveis da parábola em questão são:

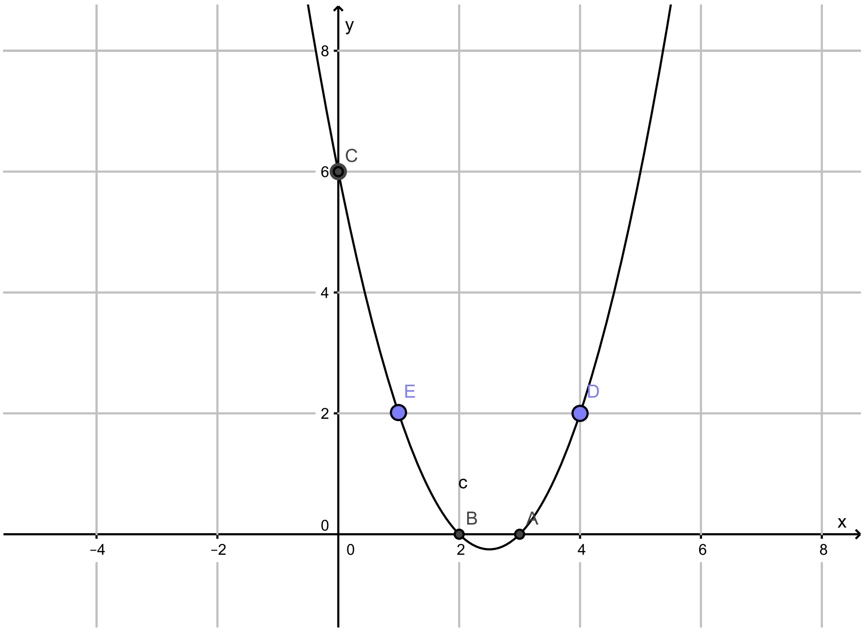


Figura 30 – Função $g(x)$.

- As raízes: pontos do domínio da função onde ela se anula: $A(3,0)$ e $B(2,0)$ (onde a parábola "corta"o eixo das abscissas).
- Ponto do domínio da função onde a coordenada dele é zero: $C(0,6)$.
- O ponto de otimização da função - menor valor, nesse caso, (ponto mínimo), que é $V(\frac{5}{2}, \frac{-1}{4})$.

3.3.2 Gráfico da função quadrática: melhorando o conceito.

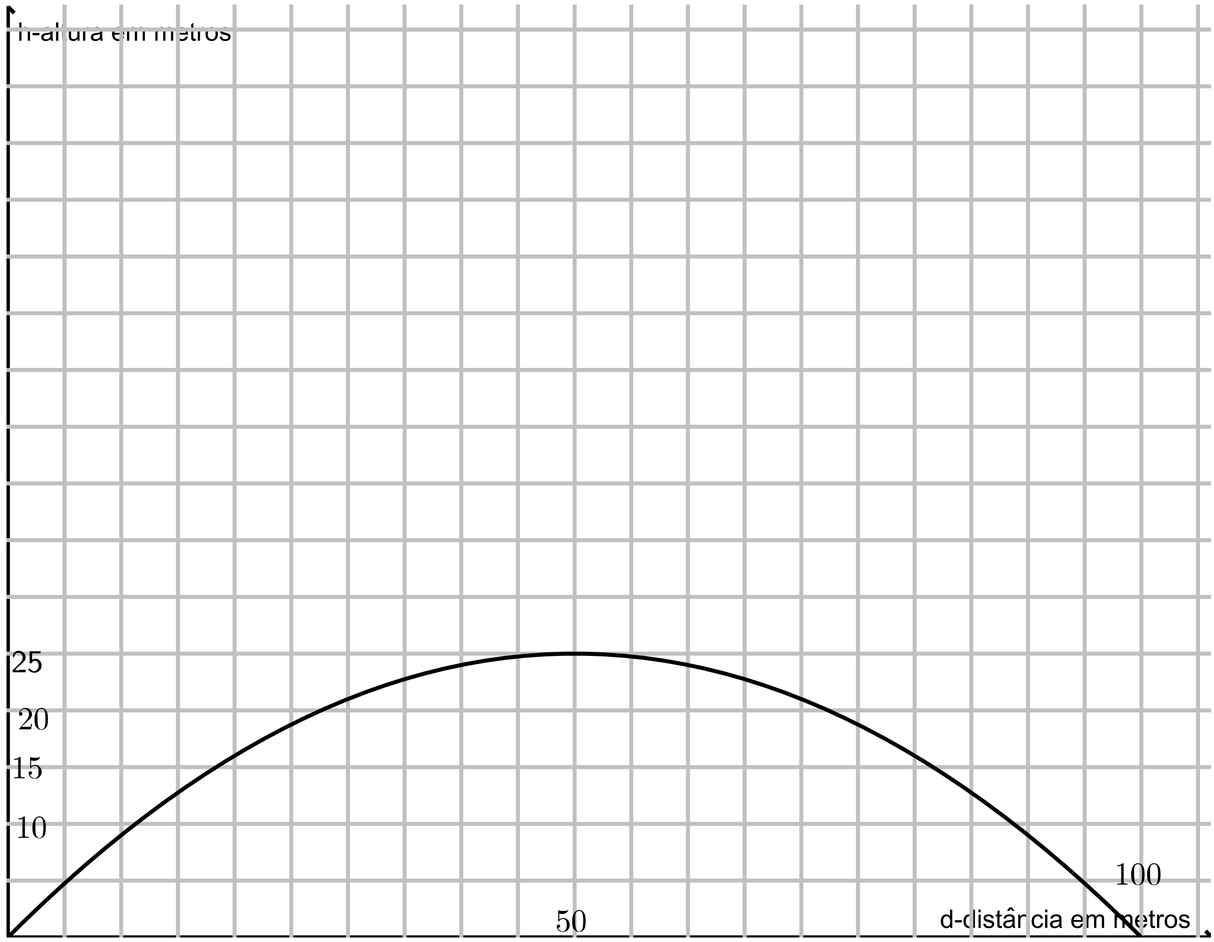


Figura 31 – Trajetória da pedra.

Observe no gráfico que a trajetória foi orientada a partir da origem. É fácil ver que a pedra caiu a $100m$ de onde foi lançada. Temos os pares $(0, 0)$, $(50, 25)$, $(100, 0)$, que pertencem à parábola P. Como já vimos, essa trajetória é chamada de parabólica, e de fato uma curva chamada parábola. Para construir o conceito de parábola, devemos saber que a representação gráfica da função quadrática é uma parábola e vice-versa, sua abertura é chamada de concavidade. Note que não há proporcionalidade direta com os pontos da parábola citados. Mas o questionamento importante é: se não temos a função, como encontrá-la? Vamos analisar a seguinte situação: se os pontos pertencem à parábola, eles satisfazem a função que dá origem a ela, então basta substituir alguns dos pontos, um de cada vez, formando um sistema. Como a função que dá origem à parábola é a quadrática, que é do tipo:

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ a,\ b,\ c \text{ reais}.$$

Substituímos :

$$ax^2 + bx + c = y \ (0,0) \Rightarrow c = 0$$

Substituindo $c = 0$ e o par ordenado $(50, 25)$, temos:

$$50^2 a + 50b = 25 \Rightarrow 50a + b = 0,5$$

$$\Rightarrow 100a + 2b = 1$$

E em: $ax^2 + bx = y$, o par ordenado$(100, 0)$ e $c = 0$:

$$100^2 a + 100b = 0 \Rightarrow 100a + b = 0.$$

Queremos descobrir o valor de a e b. Resolvendo o sistema, encontramos $b = 1$ e $a = \frac{-1}{100}$, o que nos mostra:

$$\Rightarrow f(x) = y = -\frac{1}{100}x^2 + x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Do tópico anterior, temos que supondo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a > 0$ em $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$, ponto mínimo da parábola implica que a concavidade é voltada para cima. E supondo $a < 0$ em $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$, ponto máximo da parábola implica que a concavidade é voltada para baixo. É fácil ver também que fazendo $x = 0$, temos:

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c \Rightarrow f(0) = c \Rightarrow (0, c) \in \text{à parábola}.$$

Isto quer dizer que a parábola corta o eixo y em c (outro ponto notável). O valor de b com a, irá determinar o eixo de simetria da parábola, pois:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a},$$

é a reta de simetria da parábola

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

3.3.2.1 Raízes da função quadrática.

Chamam-se raízes da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, os números reais x, onde $f(x) = 0$. A quantidade de raízes reais de uma função, depende do valor de Δ, o discriminante e já vimos que seu valor é:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Podemos ter duas raízes reais e iguais (consideramos uma raiz real e igual, por ser o mesmo valor real), duas raízes reais e diferentes, ou nenhuma raiz real, isso tudo depende exclusivamente de Δ, como já vimos anteriormente.

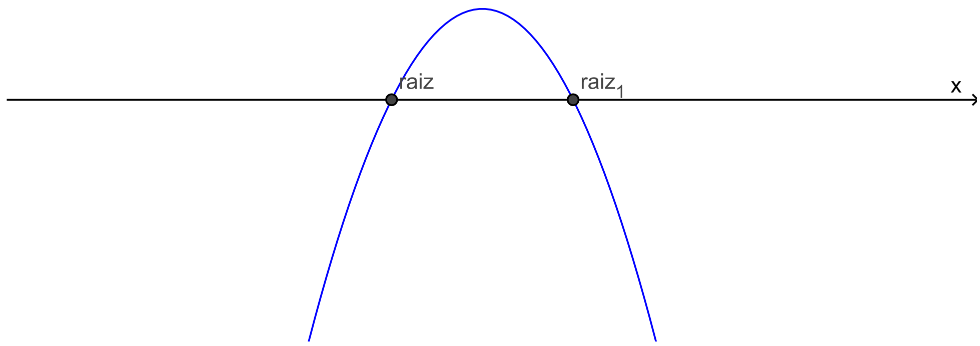


Figura 32 – Com $a < 0$, $\Delta > 0$: duas raízes reais e diferentes, concavidade da parábola voltada para baixo.

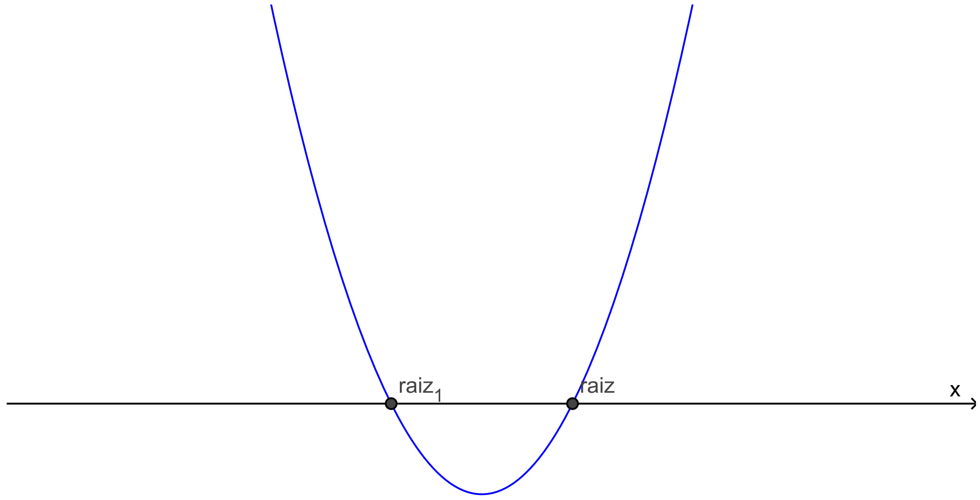


Figura 33 – Com $a > 0$, $\Delta > 0$: duas raízes reais e diferentes, concavidade da parábola voltada para cima.

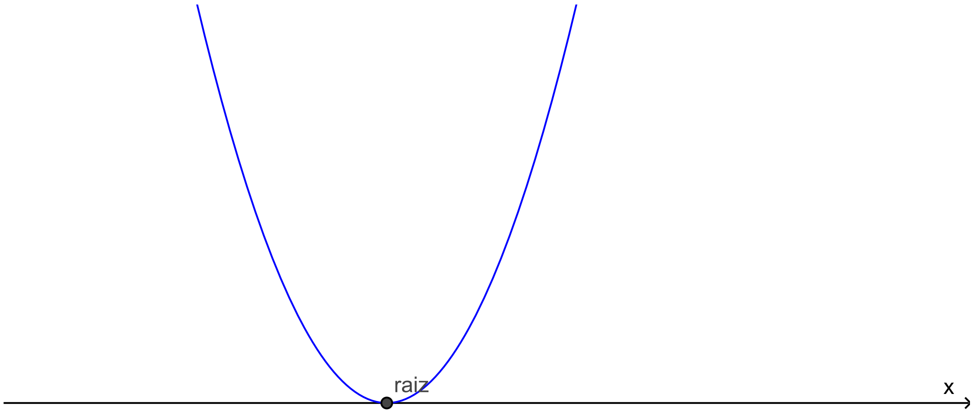


Figura 34 – Com $a > 0$, $\Delta = 0$: uma raiz real de multiplicidade 2 e concavidade da parábola voltada para cima.

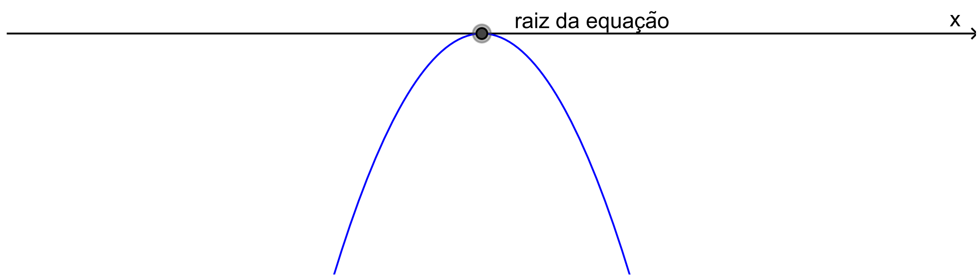


Figura 35 – Com $a < 0$, $\Delta = 0$: uma raiz real de multiplicidade 2, concavidade da parábola voltada para baixo.

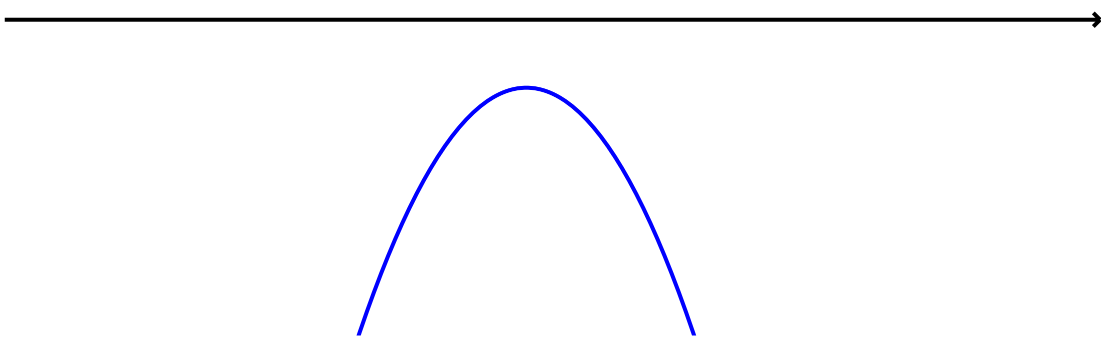


Figura 36 – Com $a < 0$, $\Delta < 0$: sem raízes reais, concavidade da parábola voltada para baixo.

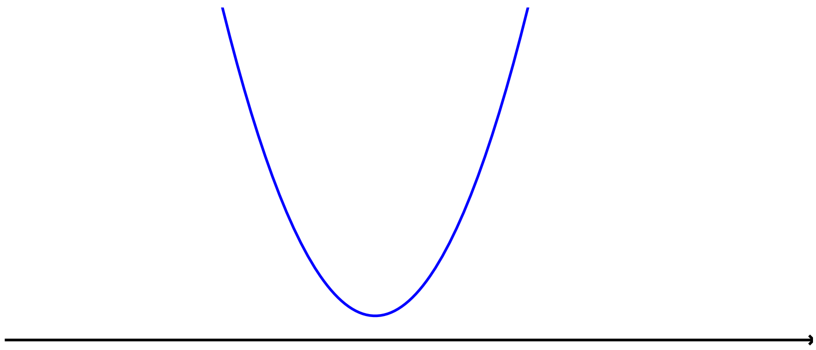


Figura 37 – Com $a > 0$, $\Delta < 0$: sem raiz real, concavidade voltada para cima.

Vimos também que o vértice da parábola que representa a função:

$$V(x_v, y_v) = (-\tfrac{b}{2a}, -\tfrac{\Delta}{4a}).$$

Não podemos esquecer que como $a \neq 0$, por definição, temos duas possibilidades para a: $a > 0$ e $a < 0$. Quando $a > 0$, a função é limitada inferiormente, mas não superiormente, o que nos leva à sua imagem $Im(f) = [y_v, +\infty[$. Falta salientar que quando $a < 0$, a função é limitada superiormente, (mas não inferiormente) o que nos leva à sua imagem $Im(f) =]-\infty, y_v]$.

Praticamente, pode-se esboçar o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, observando o sinal do coeficiente a, tendo c e o vértice da função.

Exercício 15 Esboce as funções abaixo, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontrando a imagem das funções:

a) $y = 3x^2$;

b) $y = -4x^2$;

c) $y = x^2 + 4x + 3$;

d) $y = -x^2 + 4x + 5$;

e) $y = x^2 - 8x + 12$.

Exercício 16 Observe o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$.

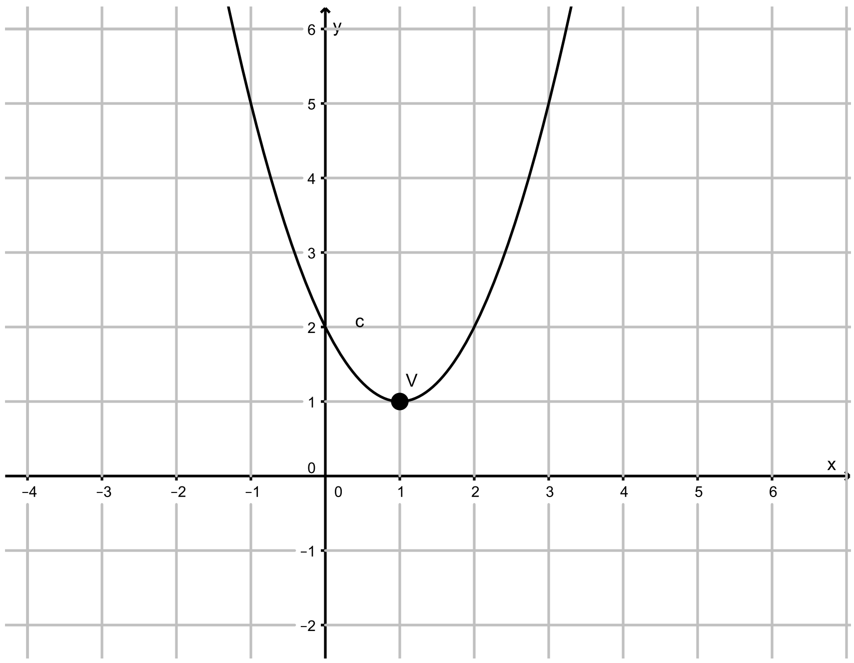


Figura 38 – Gráfico da função dada.

a) Calcule o valor de a, b e c.

b) Encontre o valor de $f(5)$.

c) Encontre a imagem da função.

3.3.3 **Estudo do sinal da função quadrática.**

Considere $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$. É fácil ver que podemos ter três situações, analisando a função quadrática contínua acima:

1. $f(x) = 0 \Rightarrow$ raízes (pontos do domínio onde f se anula, ou seja: onde o gráfico da função corta o eixo x).

2. $f(x) < 0 \Rightarrow$ pontos do domínio onde temos valores de $y < 0/f(x) = y$.

3. $f(x) > 0 \Rightarrow$ pontos do domínio onde temos valores de $y > 0/f(x) = y$.

Funções cujos gráficos são curvas contínuas só podem trocar de sinal em um intervalo, se houver um ponto nele onde a função se anule, isto é: se no intervalo existir uma raiz da equação $f(x) = 0$. Geometricamente, esta afirmação significa que uma curva contínua só pode passar da parte do plano localizada acima do eixo x, onde $y > 0$ (primeiro e segundo quadrantes), para a parte de baixo, onde $y < 0$ (terceiro e quarto quadrantes) ou vice-versa, se cortar em algum ponto dentro deste intervalo o eixo ox.

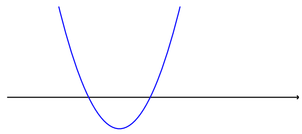


Figura 39 – Com $a > 0$, $\Delta > 0$: duas raízes reais e diferentes, concavidade da parábola voltada para cima.

Seja $\alpha < \beta$. Neste exemplo acima, a função f cujo gráfico é contínuo, troca de sinal no intervalo $[\alpha', \beta']$, com α', $\beta' \in \mathbb{R}$, α, $\beta \in (\alpha', \beta')$. Ou seja, a função f cujo gráfico é contínuo, troca de sinal no intervalo $[\alpha', \beta']$, onde $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ e $f(x) < 0$, para $\alpha < x < \beta$, onde α e β são as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $f(x) > 0$, para $x < \alpha$ ou $x > \beta$.

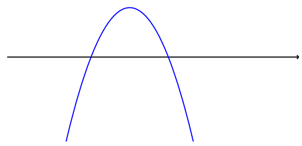


Figura 40 – Com $a < 0$, $\Delta > 0$: duas raízes reais e concavidade da parábola voltada para baixo.

Já neste outro, exemplo acima, a função f, cujo gráfico é contínuo, troca de sinal no intervalo $[\alpha', \beta']$, com α', $\beta' \in \mathbb{R}$, α, $\beta \in (\alpha', \beta')$, onde $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ e $f(x) > 0$, para $\alpha < x < \beta$, onde α e β são as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $f(x) < 0$, para $x < \alpha$ ou $x > \beta$.

Na figura abaixo, observamos que y será sempre negativo, pois a equação quadrática em questão não tem raiz real. Isto quer dizer que $f(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

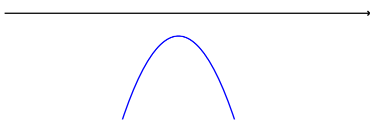


Figura 41 – Com $a < 0$, $\Delta < 0$: sem raízes reais, concavidade da parábola voltada para baixo.

Por outro lado, na figura abaixo, observamos que y será sempre positivo, pois a equação quadrática em questão não tem raiz real. Isto quer dizer que $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

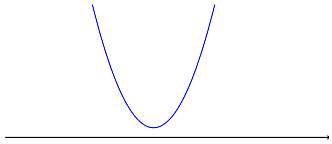


Figura 42 – $a > 0$, $\Delta < 0$: sem raiz real, concavidade voltada para cima.

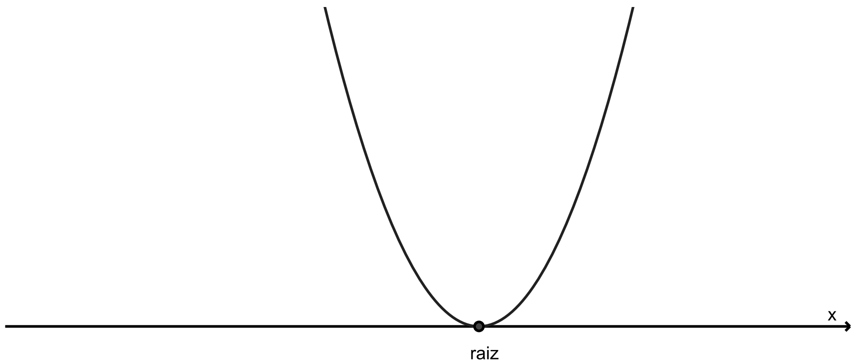


Figura 43 – Com $a > 0$, $\Delta = 0$: uma raiz real, concavidade da parábola voltada para cima.

Já na figura acima, temos que a função será sempre não negativa, o que nos diz: $f(x) > 0$, para x diferente da raiz da equação quadrática.

Já na figura abaixo, temos que a função será sempre não positiva, o que nos diz: $f(x) < 0$, para x diferente da raiz da equação quadrática.

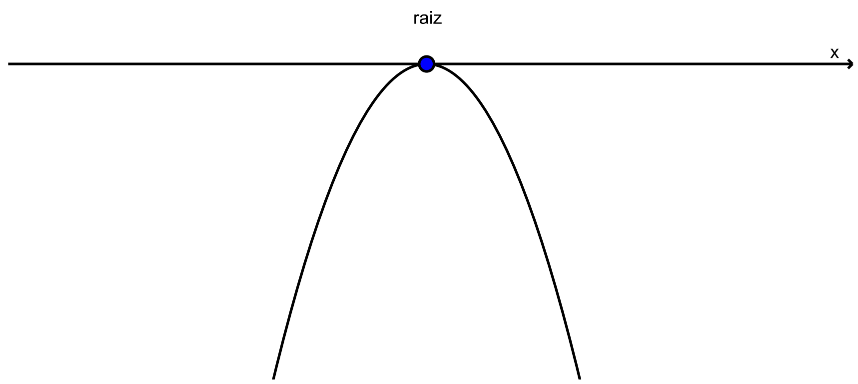


Figura 44 – Com $a < 0$, $\Delta = 0$: uma raiz real, concavidade da parábola voltada para baixo.

Exercício 17 Faça o estudo do sinal das funções abaixo, com $função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em cada caso:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = x^2 + 9$

d) $f(x) = -x^2 - 9$

4 INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Uma inequação do segundo grau é uma inequação que pode ser reduzida à forma (com a, b, c $\in \mathbb{R}$, $a \neq 0$):

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ ou}$$

$$ax^2 + bx + c \neq 0.$$

Note que resolver a inequação quadrática como se fosse uma equação quadrática, é necessário para a resolução de qualquer inequação do segundo grau.

(Retirado Projeto pré-calculo-UFRJ-adaptado [20]) Para melhor visualizar a situação, apresentaremos um problema, onde uma associação de moradores resolveu promover um evento para arrecadação de fundos e para isso, precisa arrumar uma área retangular, delimitada por duas paredes pintadas com uma cor neutra e dois painéis móveis com o tema da festa. Veja o exemplo abaixo.

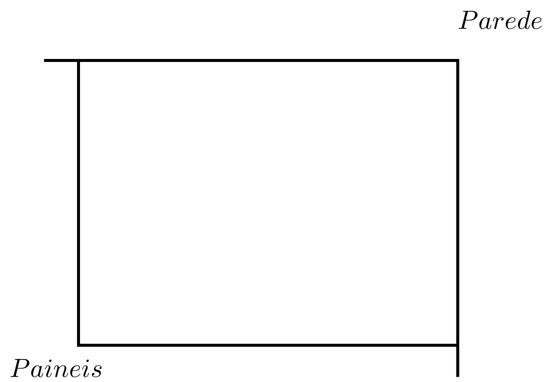


Figura 45 – Salão da associação.

Exemplo 4.0.1. *Uma associação de moradores precisa de* $2m^2$ *de espaço por pessoa e espera* 250 *pessoas para um evento. O salão de uma igreja que é alugado para eventos, dispõe de* 60 *metros de painéis móveis, que podem ser decorados com o tema da festa. A sala é bastante grande para arrumá-los em qualquer forma retangular, juntamente com* *duas paredes, de forma pré-escolhida. A associação quer garantir espaço suficiente para o evento. Seja l a largura do espaço a ser usado e c o comprimento do espaço a ser usado.*

a) *Explique porque é necessário resolver a desigualdade:*

$$60l - l^2 \geqslant 500,$$

para calcular a largura do espaço a ser alugado de modo a satisfazer as necessidades da associação.

b) *Resolva a desigualdade e sabendo que o preço do aluguel é diretamente proporcional a área a ser usada, determine os possíveis arranjos dos painéis de modo a satisfazer as necessidades da associação, pagando-se o menor aluguel possível.*

Resolução

a) *Seja c o comprimento do espaço a ser alugado. Então, a sua área A será dada por*

$$A = c.l.$$

Como o comprimento total dos painéis é de $60m$, temos que:

$$c + l = 60$$

E portanto :

$$c = 60 - l.$$

Logo a área do espaço a ser alugado pode ser expressa como:

$$A(l) = l(60 - l) = 60l - l^2.$$

Para garantir espaço para todos é necessário que o espaço a ser usado tenha uma área de pelo menos $500m^2$. (Esse número foi calculado multiplicando-se o número máximo de pessoas esperadas pelo espaço mínimo necessário a cada uma delas). Em linguagem matemática isto quer dizer:

$$A \geq 500.$$

Assim, como:

$$A(l) = 60l - l^2 \textit{(item anterior)},$$

para calcular a largura do espaço a ser alugado de modo a satisfazer as necessidades da escola basta resolver a desigualdade:

$$60l - l^2 \geqslant 500,$$

isto é, basta calcular os valores de l que satisfazem a desigualdade.

b) *Para resolver a desigualdade*

$$60l - l^2 \geqslant 500$$

é preciso primeiro, resolver a equação:

$$60l - l^2 = 500.$$

As raízes desta equação são 10 *e* 50*. Essas raízes dividem a reta em três intervalos* $(-\infty, 10)$*,* $(10, 50)$ *e* $(50, \infty)$*. Repare agora que a função que determina a área é uma parábola e seu gráfico é uma curva contínua, dentro do domínio considerado.*

Funções cujos gráficos são curvas contínuas só podem trocar de sinal em um intervalo, se houver um ponto no intervalo onde a função se anule, isto é, se no intervalo existir uma raiz da equação $f(x) = 0$. Geometricamente, esta afirmação significa que uma curva contínua só pode passar da parte do plano localizada acima do eixo ox, onde $y > 0$, (primeiro e segundo quadrantes) para a parte de baixo, onde $y < 0$, (terceiro e quarto quadrantes), ou vice-versa, se cortar, em algum ponto, dentro deste intervalo, o eixo dos x. Neste exemplo, a função f, cujo gráfico é contínuo, troca de sinal no intervalo (a, b) e supondo $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Então, necessariamente existe um ponto c', no intervalo (a, b), tal que $f(c') = 0$, isto é: onde o gráfico da função corta o eixo ox.

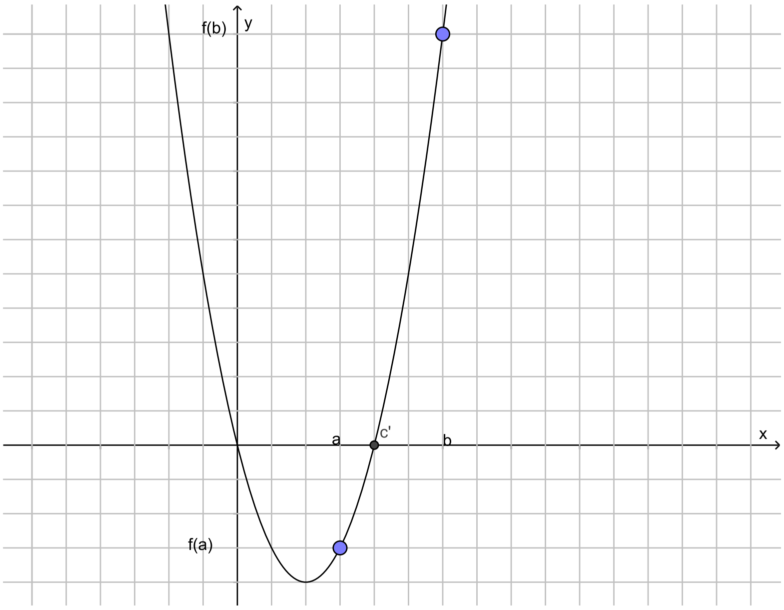


Figura 46 – $f(c') = 0$

Dessa maneira, como as únicas raízes da equação são 10 *e* 50*, a função corta o eixo* x *nestes pontos e não pode trocar de sinal nos intervalos:* $(-\infty, 10)$, $(10, 50)$ *e* $(50, \infty)$ *e além disso, como o coeficiente do termo quadrático é negativo, esta parábola tem a concavidade voltada para baixo: portanto a função assumirá valores positivos no intervalo* $(10, 50)$ *e negativos nos outros dois.*

Assim, fazendo $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, com:*

$$g(l) = 60l - l^2 - 500,$$

l *real e positivo, a função será positiva para valores de* l *entre* 10 *e* 50 *sendo igual a zero nestes pontos. Todos os valores do intervalo* $[10, 50]$*, portanto satisfazem a desigualdade. Para satisfazer as condições de espaço e pagar a menor taxa de aluguel possível dos painéis, a área da região a ser arrendada deverá ser igual a* $500\ m^2$ *e poderemos usar painéis móveis medindo* $10\ m.$ *para a largura do salão e* $50\ m.$ *para o comprimento ou vice-versa. O resultado seria diferente se o coeficiente do termo quadrático fosse positivo.*

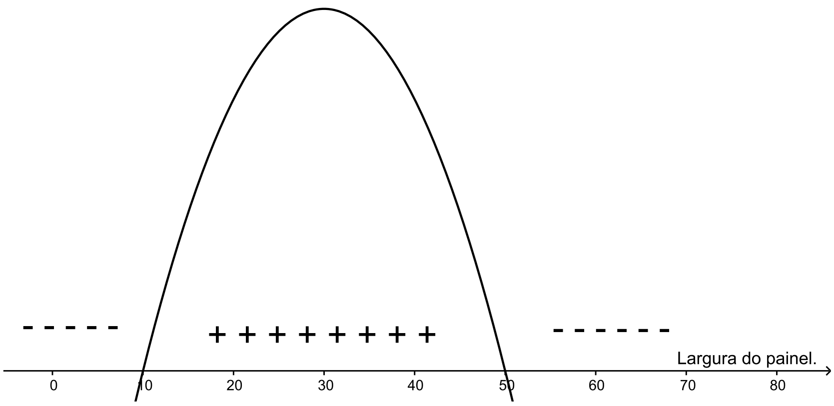


Figura 47 – Estudo do sinal de g.

Vamos agora, melhorar o conceito: supondo que fôssemos resolver a inequação quadrática:

$$ax^2 + bx + c > 0,\ a \neq 0.$$

Inicialmente acham-se os zeros da inequação, resolvendo-a como uma equação quadrática. Note que continua valendo como anteriormente visto:

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b^2-4ac}{4a}), a \neq 0,$$

que é a forma canônica da equação quadrática.

Caso 1: $\Delta > 0$: Isto quer dizer que a inequação tem raiz real.

- $a > 0$:

$$a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b^2-4ac}{4a}) > 0.$$

Como $a > 0$, vamos dividir por a, ambos os membros da desigualdade e teremos:

$$a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b^2-4ac}{4a^2})] > 0,$$

E como $\Delta > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})] = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\Delta}{4a^2})] =$$

$$= a[(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2)] = ^{(*3)}$$

$$\Rightarrow a[(x+\frac{b}{2a}) - (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})][(x+\frac{b}{2a}) + (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})]$$

$$= a[(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})] =$$

$$=a[x - (\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})][x - (\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})] = 0.$$

(*3): fatorando a diferença de quadrados.

E como:

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

que são as raízes da equação quadrática, com $\alpha < \beta$ e quando $\Delta > 0$, fica:

$$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0.$$

Lembrando que pra essa multiplicação ser positiva, como $a > 0$, ou ambos os fatores que sobraram são positivos, ou ambos são negativos: no primeiro caso, se ambos são positivos, temos que isso quer dizer que:

$$x > \alpha \text{ e } x > \beta\text{: mas } \alpha < \beta \Rightarrow x > \beta.$$

.

No segundo caso, se forem ambos negativos, temos:

$$x < \alpha,\ x < \beta,\text{ com } \alpha < \beta \Rightarrow x < \alpha.$$

.

O que nos mostra que o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x < \alpha \text{ ou } x > \beta\}.$$

Faça $ax^2 + bx + c \geq 0$ e a única coisa que irá mudar é que o intervalo agora será fechado, onde a solução será:

$$S = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq \alpha \text{ ou } x \geq \beta\}.$$

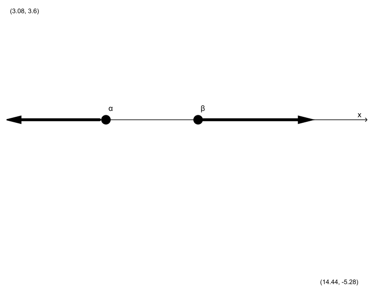


Figura 48 – Solução de $ax^2 + bx + c \geq 0$, com $a > 0$

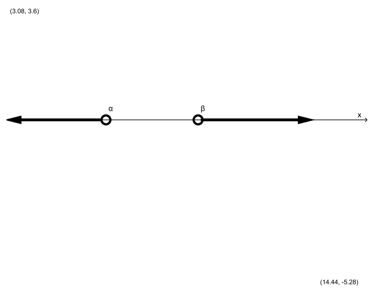


Figura 49 – Solução de $ax^2 + bx + c > 0$, com $a > 0$.

- $a < 0$: Como $a < 0$, já tendo dividido por $\frac{1}{a}$ ambos os membros da desigualdade, já que a é diferente de zero e colocando o a em evidência, também baseando-se nas manipulações algébricas do caso $a > 0$:

$$a[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b^2-4ac}{4a^2})] > 0.$$

.

E como $\Delta > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Rightarrow a(x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b^2-4ac}{4a^2})$$

$$= a[x - (\tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})][x - (\tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})] =$$

$$= a(x - \alpha)(x - \beta) > 0.$$

Lembrando $a < 0$, temos que pra essa multiplicação ser positiva, os fatores que sobraram são um positivo e o outro negativo, já que $a < 0$ por hipótese. No primeiro caso se $(x - \alpha)$ é positivo, implica em $x > \alpha$. De $(x - \beta)$ negativo, temos que:

$$x < \beta, \text{ com } \alpha < \beta \Rightarrow \alpha < x < \beta.$$

O que nos mostra que o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; \alpha < x < \beta\}.$$

No caso de $(x - \alpha)$ ser negativo e $(x - \beta)$, positivo, teríamos:

$$x < \alpha \text{ ou } x > \beta \Rightarrow -x > -\alpha$$

$$x - x > \beta - \alpha \Rightarrow \alpha > \beta \text{ (que seria um absurdo, pois supomos no início } \alpha < \beta).$$

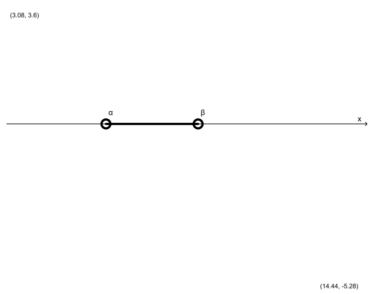


Figura 50 – $S = \{x \in \mathbb{R}; \alpha < x < \beta\}$

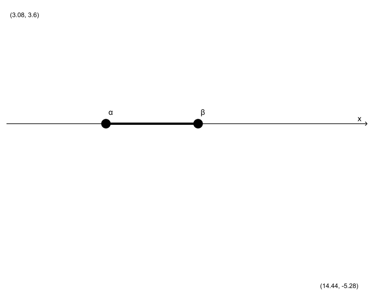


Figura 51 – $S = \{x \in \mathbb{R};\ \alpha \leq x \leq \beta\}$.

Caso 2: $\Delta = 0$ Nesse caso, temos apenas uma raiz real de multiplicidade 2. Considerando $a > 0$, temos:

$$a(x + \tfrac{b}{2a})^2 > 0$$

Que é válida para qualquer

$$x \neq \frac{-b}{2a}, \text{ se } a > 0.$$

Note que $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre uma quantidade não negativa.

Considerando $a < 0$, temos:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 < 0.$$

O que nos diz que a inequação não tem solução, nunca será positiva.

Caso 3: $\Delta < 0$: Nesse caso não temos raiz real.

- Considerando $a > 0$:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 \ \frac{-\Delta}{4a} > 0.$$

Que é valida para qualquer x, pois se $a > 0$, e como $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre uma quantidade não negativa, com $\Delta < 0$, temos que $-\Delta$ será uma quantidade positiva e todos os valores de x reais valem para solução de $ax^2 + bx + c > 0$. Análogo para

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

- Considerando $a < 0$. De:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 \ \frac{-\Delta}{4a} > 0.$$

Temos que:

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 < 0 \Rightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 \ \frac{-\Delta}{4a}.$$

Nunca será positiva com $a < 0$ e como $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre uma quantidade não negativa, com $\Delta < 0$, temos que $-\Delta$ será uma quantidade positiva e $\frac{-\Delta}{4a}$ será uma quantidade negativa. Note que nenhum valor real de x vale para solução de

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Análogo para:

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Na verdade, torna-se mais prático encontrar as raízes da equação do segundo grau correspondente à inequação quadrática, analisar sua concavidade e na reta real onde a função é positiva, negativa ou igual a zero, como fizemos no início.

Exercício 18 Deseja-se construir uma galpão, de formato retangular. O terreno onde o galpão será construído, tem $180m$ de perímetro. Calcule as dimensões do galpão, sabendo que sua área deve ser menor que 1125 m^2.

Exercício 19 A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora h de um dia, pela expressão

$$t(h) = -h^2 + 22h - 96,$$

em um dia especifico. Responda:

a) Em quais horários a temperatura é $0^\circ C$?

b) Em que período(s) do dia a temperatura é positiva? E negativa?

c) Em que período(s) do dia a temperatura é crescente? E decrescente?

d) Em que horário a temperatura é máxima? Qual é a temperatura máxima?

Exercício 20 O saldo S em reais e o tempo t em dias, de uma conta bancária é dado por

$$S(t) = t^2 - 18t.$$

Determine:

a) Em que dias o saldo é zero;

b) Em que período o saldo é negativo;

c) Em que período o saldo é positivo;

d) Em que dia o saldo é mínimo;

e) Qual é o saldo mínimo, em reais.

Exercício 21 Em que condições, a função quadrática e real está definida:

$$y = (k^2 - 4)x^2 - kx - 1?$$

Exercício 22 A função:

$$R(d) = -d^2 + 20d - 84,$$

com d em dias, descreve a receita de uma padaria, tudo entre os dias 1 e 30 de um certo mês. E $D(d) = 9d + 49$, com R-receita em reais, L-lucro em reais, D-despesa também em reais. Houve momento onde o lucro da empresa foi nulo? E houve momento onde o lucro da empresa foi positivo? Houve prejuízo?

Exercício 23 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + mx + m + 3$$

é positiva, para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

Exercício 24 Resolva o sistema em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ -x^2 + 5x - 6 > 0 \end{cases}$$

Exercício 25 Seja a parábola que representa a função real:

$$f(x) = x^2 + kx - 16.$$

a) Encontre a interseção da função com o eixo ox, para os quais

$$k = -6.$$

5 A PARÁBOLA

A parábola é uma cônica. Cônica vem do grego *konikós*, que significa forma de cone. Apolônio de Perga (século III a.C.), matemático e astrônomo, foi quem deu a essas seções cônicas o nome de parábola, elipse e hipérbole, apesar de que já tivessem estudado elas antes, seu estudo foi o mais criterioso. Ele estudou suas propriedades. Sabe-se que elas foram descobertas como curvas planas obtidas cortando-se uma superfície cônica circular de duas folhas, de vértice V (interseção das retas g e e) mudando-se a posição do plano de corte.

Sabemos que superfície cônica circular reta de duas folhas é obtida pela revolução de uma reta, que chamaremos de g em torno de outra, que chamaremos de e que é concorrente a ela. Seja α o ângulo de cada geratriz do cone reto com sua base e β o ângulo que o plano que corta o cone faz com a base do cone. A interseção pode ser:

1. Um ponto.

2. Uma reta.

3. Um par de retas.

4. Se $\beta = 90°$ em relação ao eixo, então temos uma **circunferência**. Veja abaixo um exemplo de corte no cone que resulta numa circunferência.

5. Quando ocorre $\beta < \alpha$ e o plano que corta não passa por V, temos neste caso uma **elipse**. Veja abaixo um caso particular de corte onde a interseção do e resulta numa elipse:

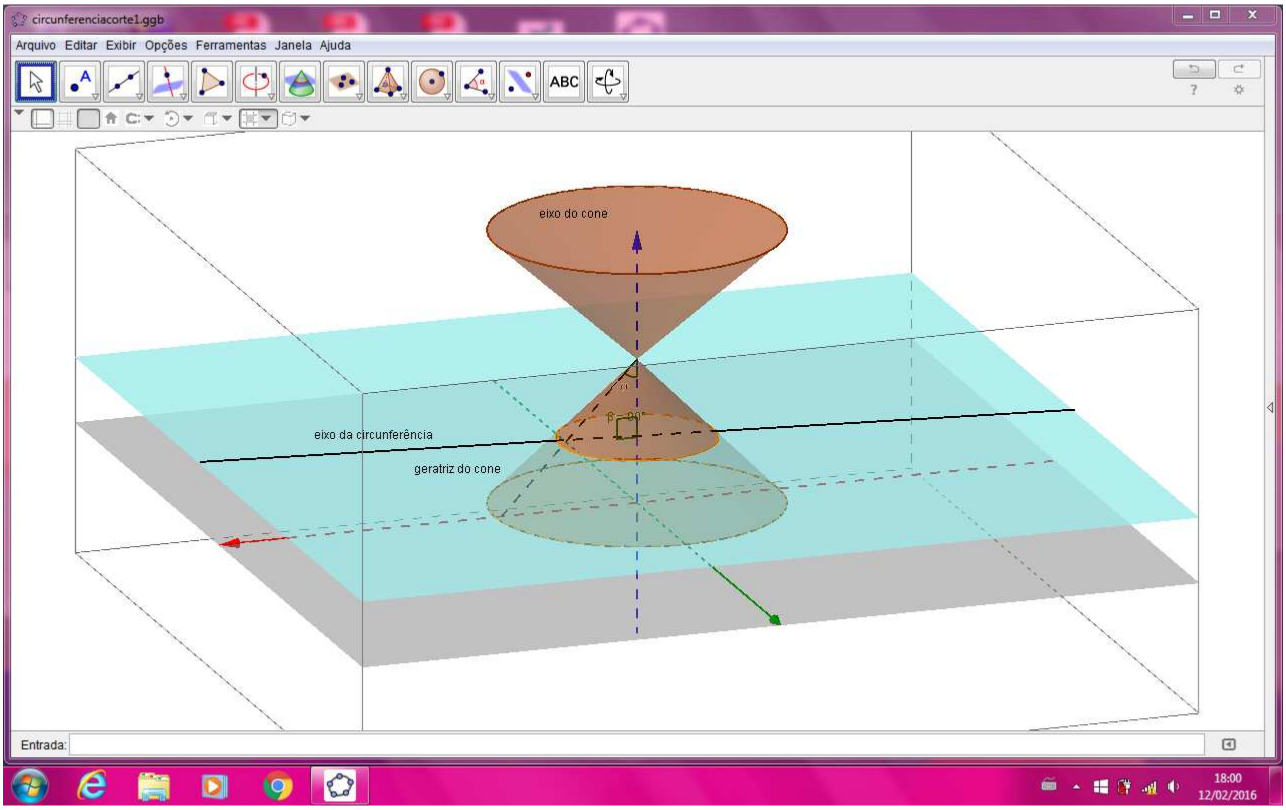


Figura 52 – Exemplo de corte no cone circular reto, que resulta na circunferência.

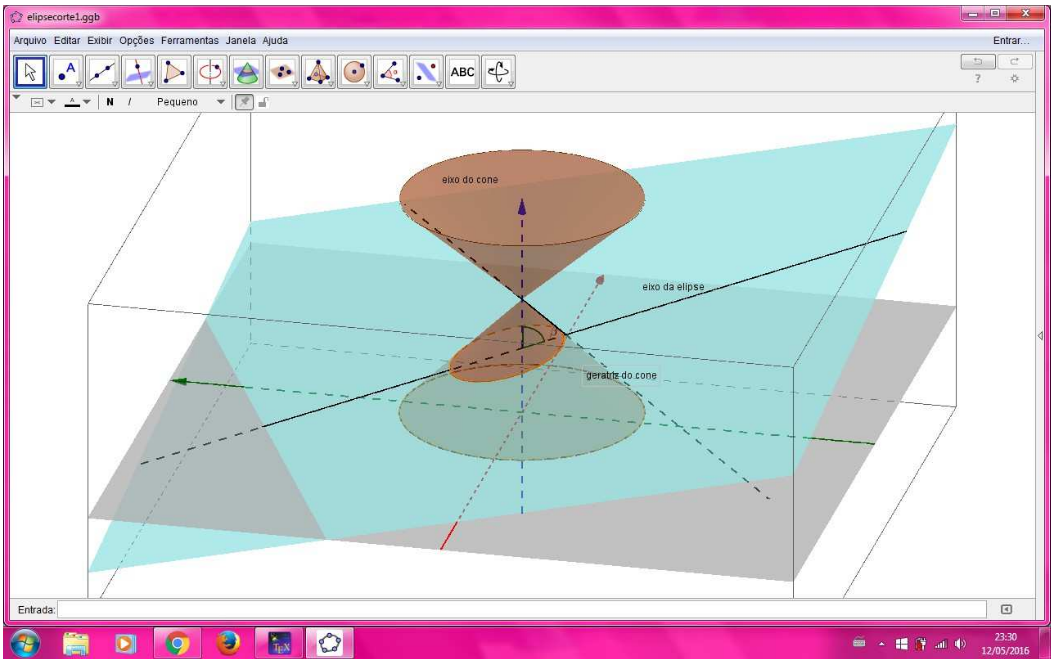


Figura 53 – Exemplo de corte no cone circular reto, que resulta na elipse.

6. O plano de corte não passa por V e $\beta > \alpha$: o plano que corta intersecta as duas folhas da superfície cônica e temos neste caso uma **hipérbole**.

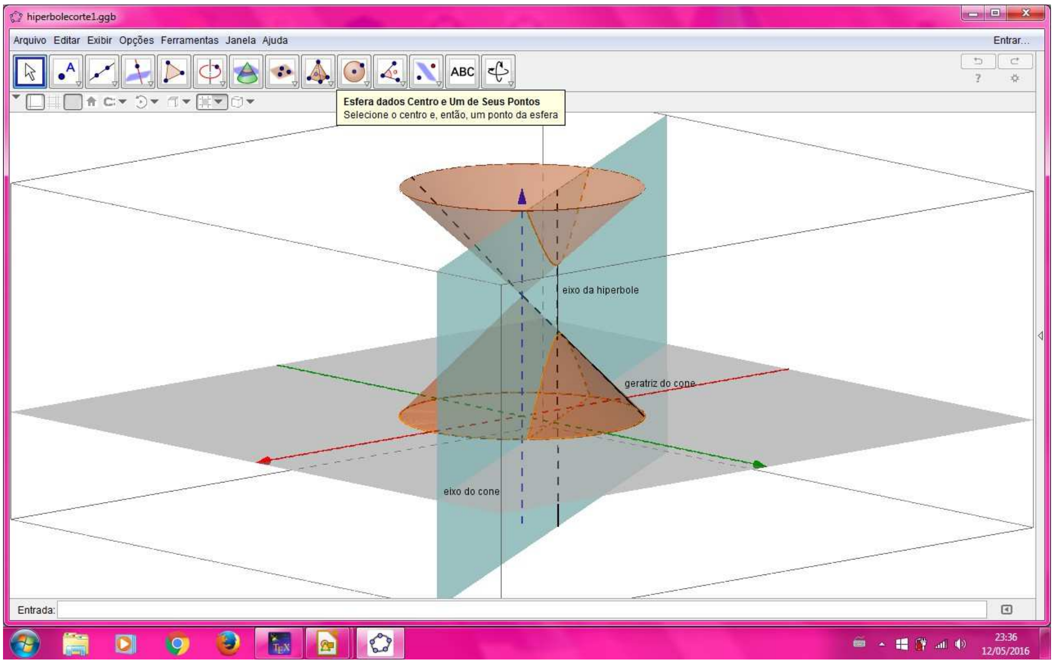


Figura 54 – Exemplo de corte na superfície cônica de duas folhas, com base perpendicular ao eixo, que resulta na hipérbole.

7. Por outro lado, se $\beta = \alpha$ (o plano de corte é paralelo à uma geratriz da superfície cônica), temos a **parábola**, que é a representação gráfica da função do segundo grau. Veja abaixo um exemplo de corte que resulta na parábola:

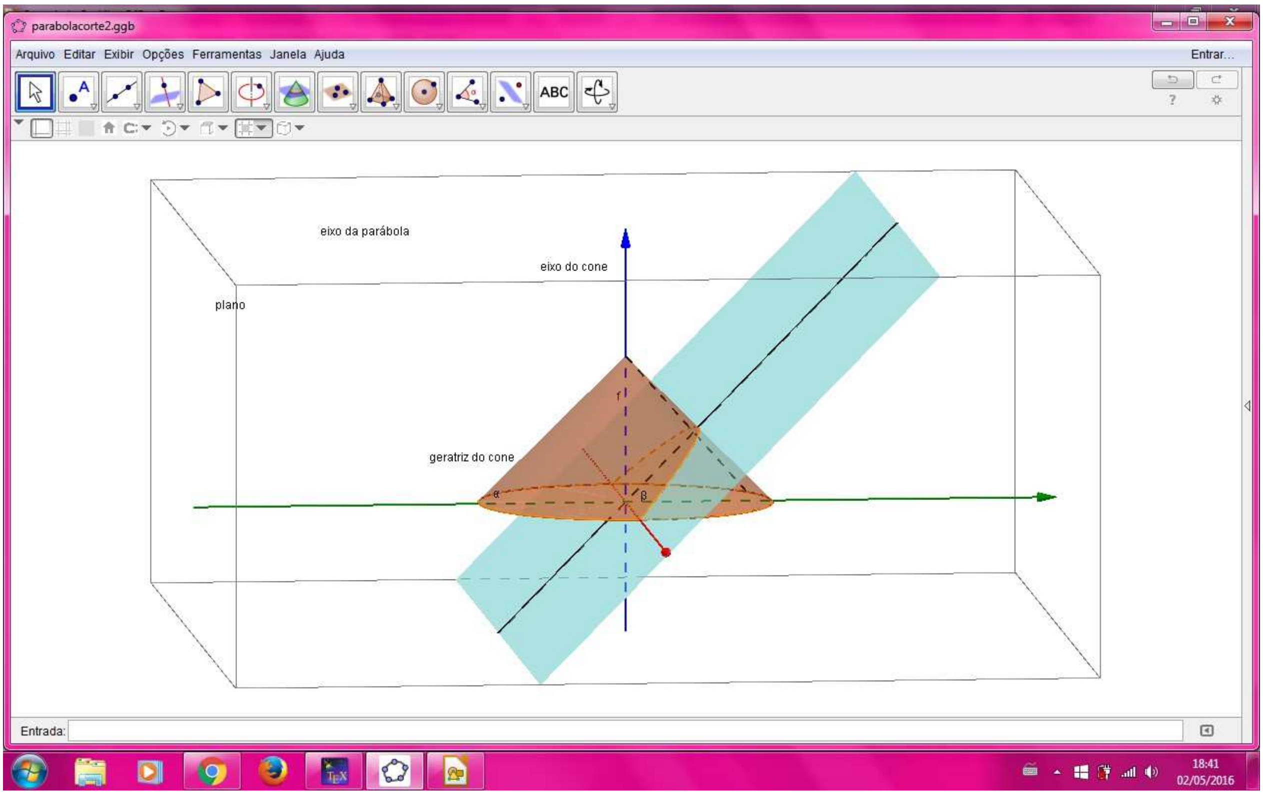


Figura 55 – Exemplo de corte no cone circular reto, que resulta na parábola.

Galileu Galilei em 1632 descreveu a trajetória de projéteis lançados como parabólicas, mostrando a utilidade real do seu estudo, apesar de na época, seu trabalho (de Apolônio de Perga) ter sido criticado: afirmavam não ter utilidade prática real.

Da equação $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, com $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, onde exatamente A ou B é nulo, temos a parábola. Nesse trabalho entraremos parábola como cônica quase que exclusivamente para enfatizar a representação da função quadrática, para uma melhor compreensão dela.

Definição 5.0.1. *Seja $P(x,y)$, $P \in \mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathbb{R}$, onde P é um ponto genérico, F (chamado de o foco da parábola), uma reta d', chamada de diretriz da parábola. Parábola*

$$\mathscr{P}$$

é um tipo de cônica onde todos os pontos possuem a propriedade: $\mathscr{P} : d_{P,F} = d_{P,d'}$.

São também elementos da parábola:

- Temos a reta focal f que é perpendicular a d', a reta diretriz onde $F \in f$.
- O ponto médio entre a $f \cap d'$ e o foco F, é o vértice V da parábola.
- A abertura da parábola é chamada concavidade: ela pode ser para cima, para baixo, para direita, para esquerda, etc.
- A distância de F até d é chamado parâmetro da parábola. A ele é dado o nome de $2p$. Isto quer dizer que:

$$2p = d_{F,d'} \Rightarrow p = \frac{d_{F,d'}}{2} = d_{F,V} = d_{V,d'}$$

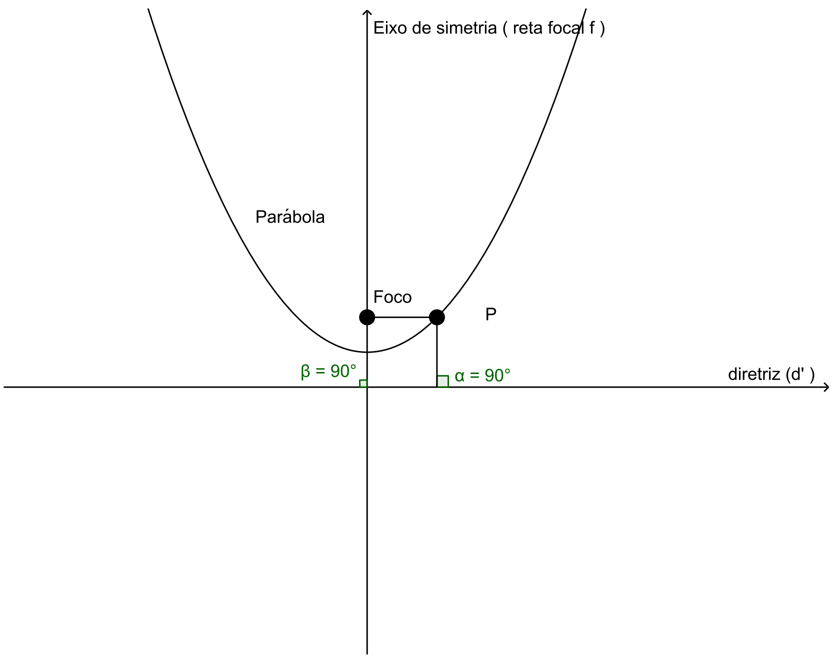


Figura 56 – A parábola.

Qualquer parábola é simétrica em relação ao eixo focal. Esta é uma propriedade importante da parábola $\mathcal{P}$.

.

Vamos explicar isso, mas será necessário o conhecimento de congruência de triângulos.

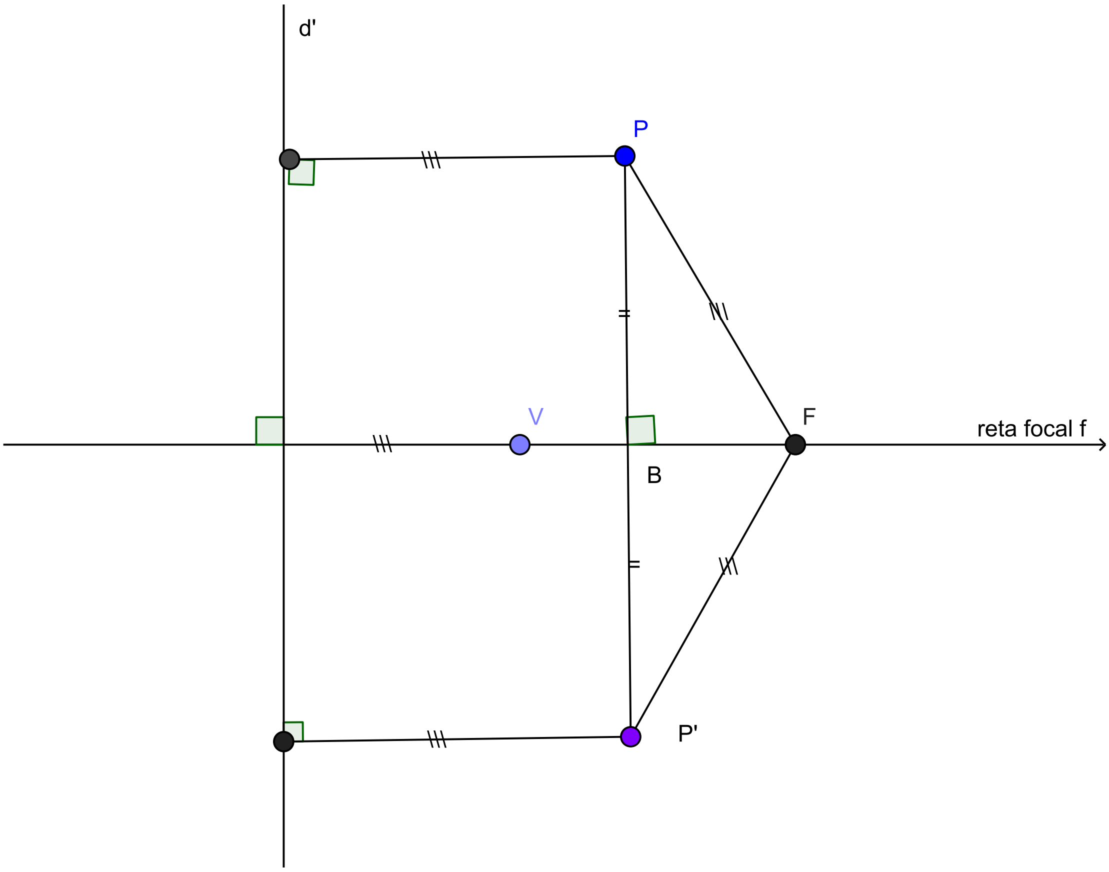


Figura 57 – Simetria em relação à reta focal.

Suponha P (ponto genérico), V, $P \in \mathcal{P}$.

Se $P = V$, P é seu próprio simétrico. Considere $P \neq V$.

Por construção, seja P' o simétrico de P em relação à reta focal f, perpendicular a d'. Seja também D o pé da perpendicular baixada de P em d' e D' o pé da perpendicular baixada em d' de P'. Seja ainda $B = \overleftrightarrow{PP'} \cap f$. Por definição de simétrico em relação a uma reta, nesse caso f, temos que $\overline{PB} \equiv \overline{BP'}$, ou seja:

$$B \text{ é ponto médio de } \overline{PP'} \text{ e}$$

***1:** $\overline{PP'} \perp f \Rightarrow \widehat{PBF} \equiv \widehat{P'BF} = 90^0$.

Note que:

***2:** $\overline{FB}$ é lado comum de ΔPBF e $\Delta P'BF$.

Por definição de parábola, de P pertencente a ela, temos que:

$$d_{P,F} = d_{P,d'}.$$

***3:** $\overline{PB} \equiv \overline{BP'}$.

Por 1, 2 e 3, temos pelo caso lado-lado-lado (LAL) de congruência de triângulos:

$$\Delta PBF \equiv \Delta P'BF.$$

E como B é ponto médio, $\Delta PFP'$ é isósceles e $\overleftrightarrow{FB}$ é a mediatriz do triângulo, temos que:

$$\widehat{PBF} \equiv \widehat{P'BF}.$$

.

Isto quer dizer que por $d_{P,F} = d_{P',F}$, particularmente por *1 e por:

$$\overleftrightarrow{PP'} \parallel d' \Rightarrow d_{P',F} = d_{F,P} = d_{P,d'} = d_{P',d'}$$

$$\Rightarrow d_{P',F} = d_{P',d'} \text{ (por transitividade).}$$

Além do acima, também por definição de parábola: $P' \in \mathcal{P}$,

que é simétrico a P, em relação à reta focal f.

Nesse trabalho, estudaremos o caso $y = ax^2 + bx + c$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, onde a parábola tem concavidade voltada para cima ou para baixo e o que nos dá essa informação, é o coeficiente a.

Vamos analisar os casos onde a parábola tem eixo de simetria (reta focal) coincidente com o eixo oy ou paralelo a ele. Vamos considerar um novo desenho, uma nova reta diretriz, chamando-a também de d', para analisar de outra forma:

- Caso 1: Reta focal f coincide com eixo Oy, $a > 0$, $V(0, 0)$. Nesse caso, a função quadrática é do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$, a real. Como $d_{F,V} = d_{V,d'} = p$, temos que o foco é $F = (0, p)$, a reta diretriz é do tipo $y = -p$ e o ponto genérico $P(x, ax^2)$ pertence à parábola.

A parábola com reta focal coincidente com eixo oy, reta diretriz d' paralela ao eixo ox, com foco acima da diretriz d', com parâmetro $2p$ e $V(0,0)$. Onde $2p = d_{F,d'}$, o foco da parábola é $F(0,p)$ e a reta diretriz $d' : y = -p$. Seja B a perpendicular baixada de P sobre $d' \Rightarrow B = (x, -p)$:

$$d_{P,F} = d_{P,d'}.$$

Calcular $d_{P,d'}$ equivale a encontrar a distância entre P e B, com $P(x,y)$:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2} \Leftrightarrow x^2 = 4py$$

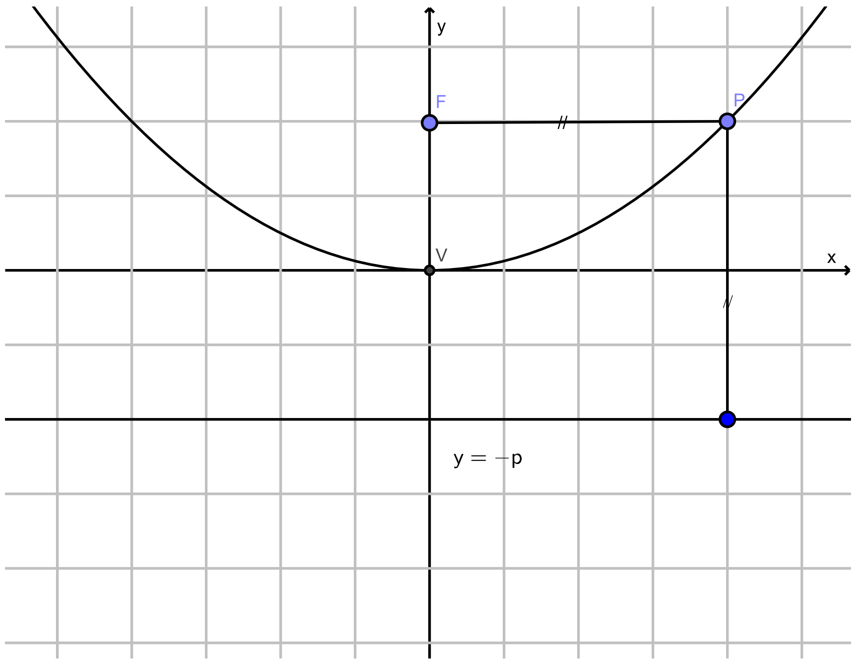


Figura 58 – Parábola de vértice $V(0,0)$, foco $F(0,p)$.

- Caso 2: Reta focal f coincide com eixo Oy, $a < 0$, $V(0,0)$:

Nesse caso, a função quadrática é do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$, a real. Como $d_{F,V} = d_{V,d'} = p$, temos que: o foco $F = (0, -p)$, a reta diretriz é do tipo $y = p$ e o ponto genérico $P(x, ax^2)$ pertence à parábola.

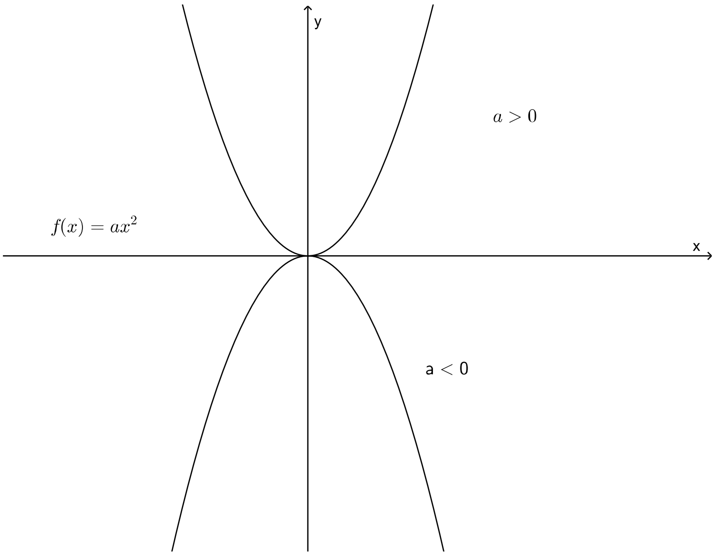


Figura 59 – Parâmetro a.

Parábola com reta focal coincidente com eixo oy, reta diretriz d' paralela ao eixo ox, com foco abaixo da reta diretriz d', $V(0,0)$. Nesse caso, como o parâmetro é $2p$, onde $2p = d_{F,d'}$, o foco da parábola é $F(0,-p)$ e a reta diretriz $d' : y = p$, $P(x,y)$. Fazendo pela definição:

$$d_{P,F} = d_{P,d'} \text{ e } y = p,$$

onde B é a perpendicular baixada de P sobre $d' \Rightarrow B = (x,p)$:

$$d_{P,F} = d_{P,d'}$$

Calcular $d_{P,d'}$ equivale a encontrar a distância entre PeB:

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2} \Leftrightarrow x^2 = -4py.$$

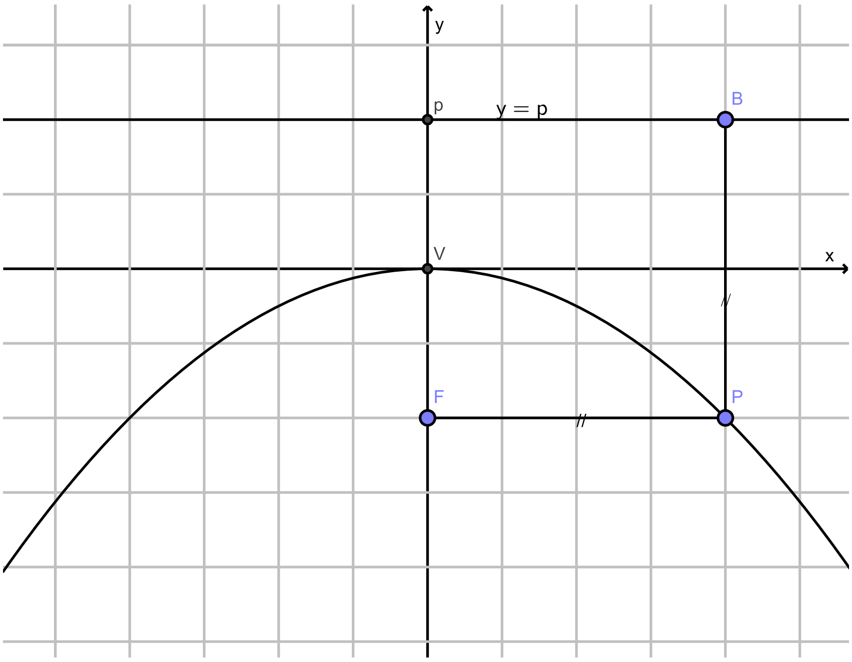


Figura 60 – Parábola de vértice $V(0,0)$, foco $F(0,-p)$.

Agora, para continuarmos nosso estudo, vamos precisar do conceito de translação de eixos:

5.0.0.1 **Translação de eixos**

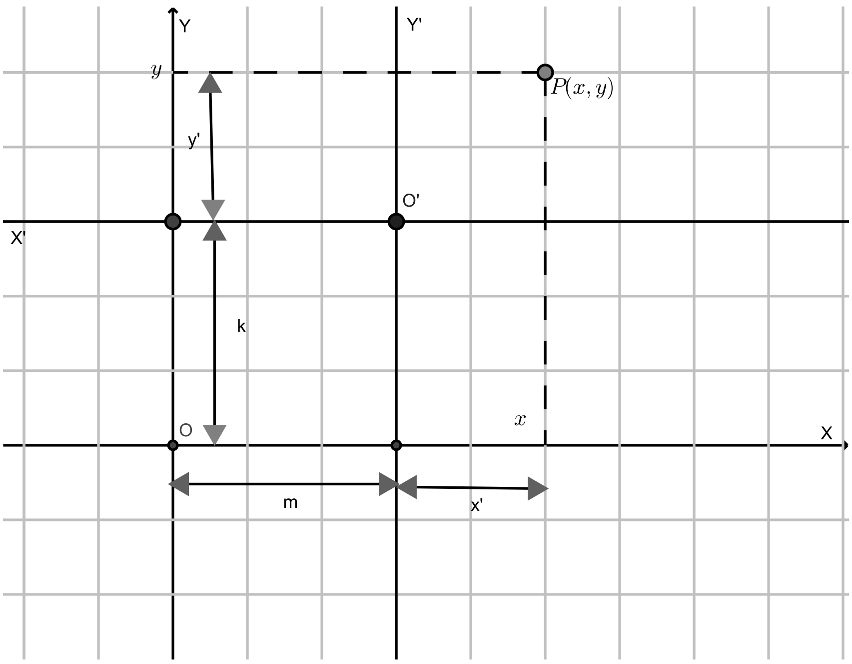


Figura 61 – Novo eixo $x'o'y'$.

Temos então que:

$$x = m + x' \Rightarrow x' = x - m \text{ e } y = k + y' \Rightarrow y' = y - k.$$

Ou seja: se no novo sistema a parábola é do tipo $y' = ax'^2$, isto quer dizer que nele o foco $F'(0,p), V'(0,0)$ e $d' : y' = -p$. Passando para o antigo sistema xoy, temos que :

$$F'(0,p) \Rightarrow F(m, k+p), \text{ pois } 0 = x - m \Rightarrow x = m \text{ e } p = y - k \Rightarrow y = k + p.$$

E ainda mais: de $y' = ax'^2$, com:

$$x' = x - m \text{ e } y' = y - k$$

temos que:

$$y' = ax'^2 \Rightarrow y - k = a(x-m)^2 \Rightarrow y = a(x-m)^2 + k,$$

que é a forma canônica da função quadrática, onde $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = \frac{-\Delta}{4a}$. De qualquer forma, se olharmos o gráfico da parábola, localizando seu deslocamento vertical e horizontal, conseguimos visualizar sua função geradora e se colocarmos a parábola na forma canônica, conseguimos visualizar sua representação geométrica, nos valendo da translação de eixos.

Nos esboços abaixo, considere f a função original, quadrática e genérica,

$$f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R},$$

a função originada da translação de $f(x)$, em cada caso abaixo.

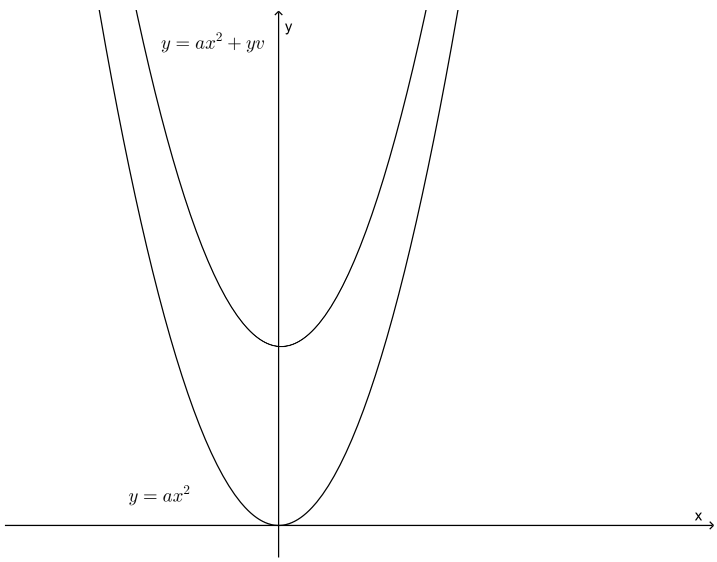


Figura 62 – Translação para cima, da parábola: abaixo $y = ax^2$, acima a parábola transladada.

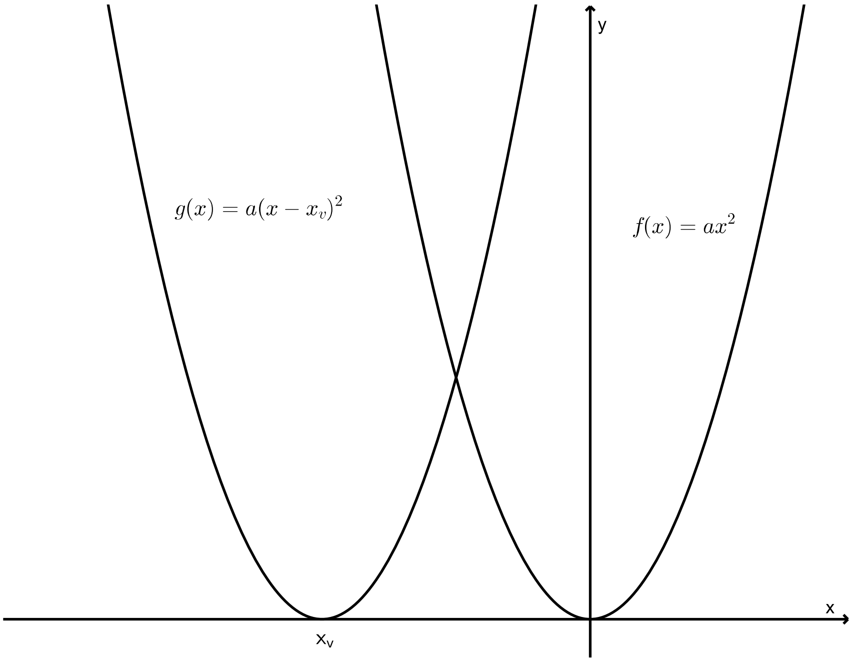


Figura 63 – Translação horizontal para esquerda da parábola.

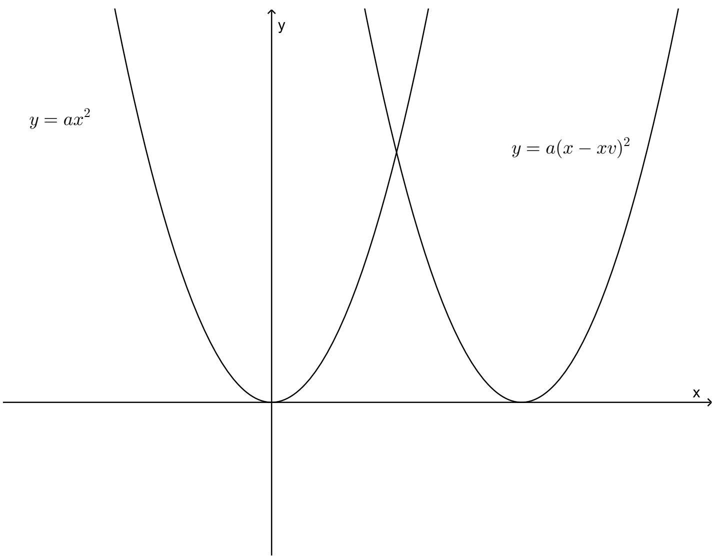


Figura 64 – Translação para direita da parábola: à esquerda $y = ax^2$, à direita a parábola transladada.

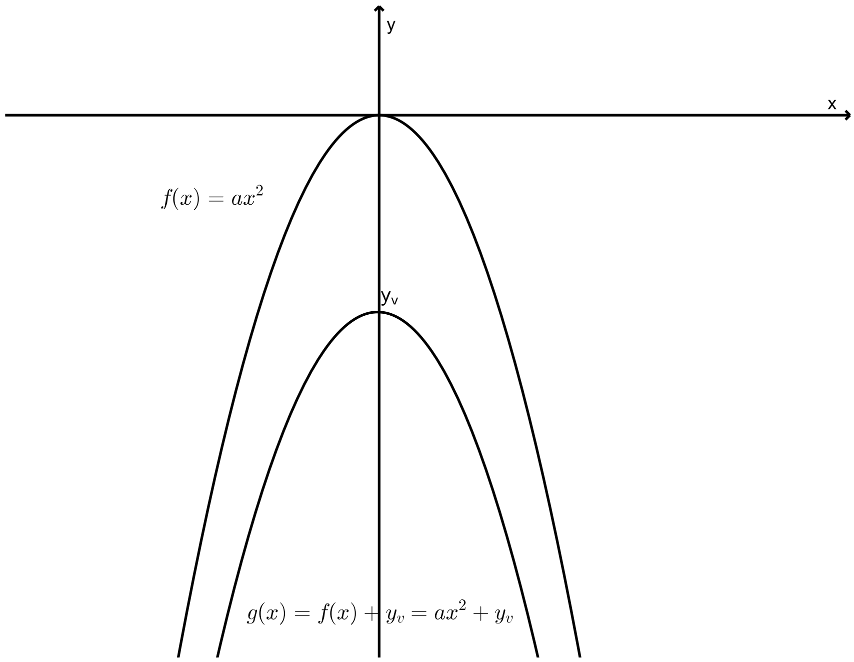


Figura 65 – Translação vertical para baixo.

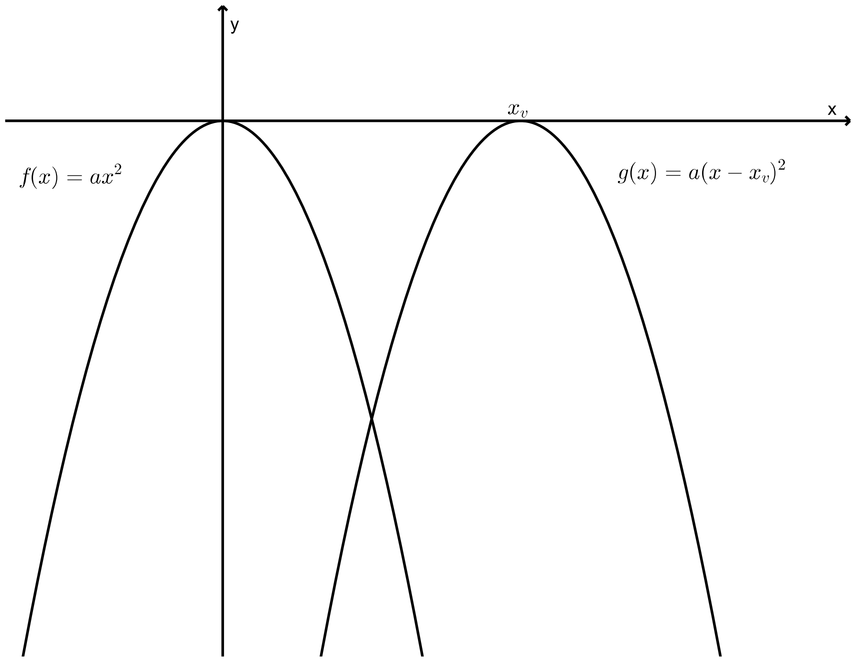


Figura 66 – Translação horizontal da parábola com $a < 0$.

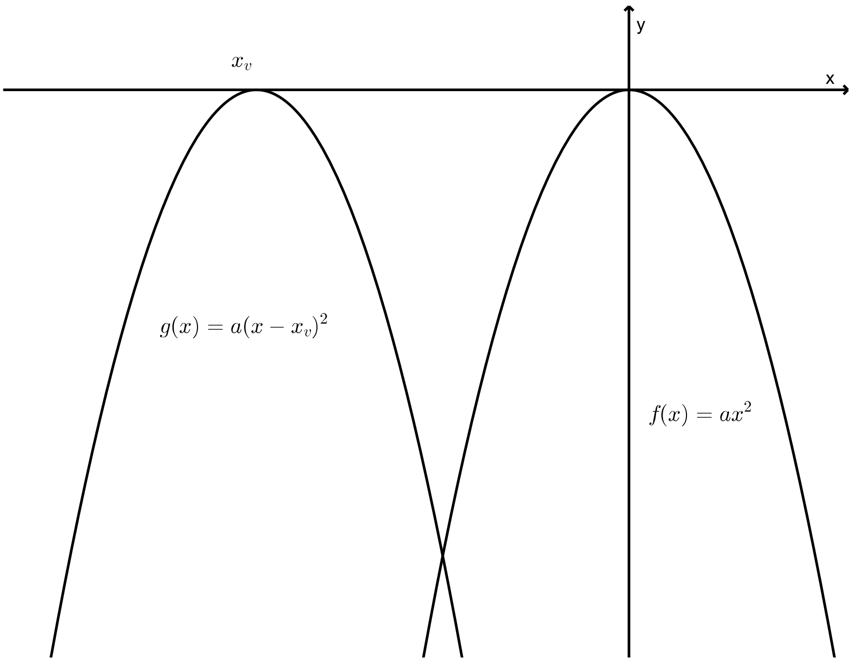


Figura 67 – Translação horizontal de parábola com $a < 0$, para esquerda do eixo xoy.

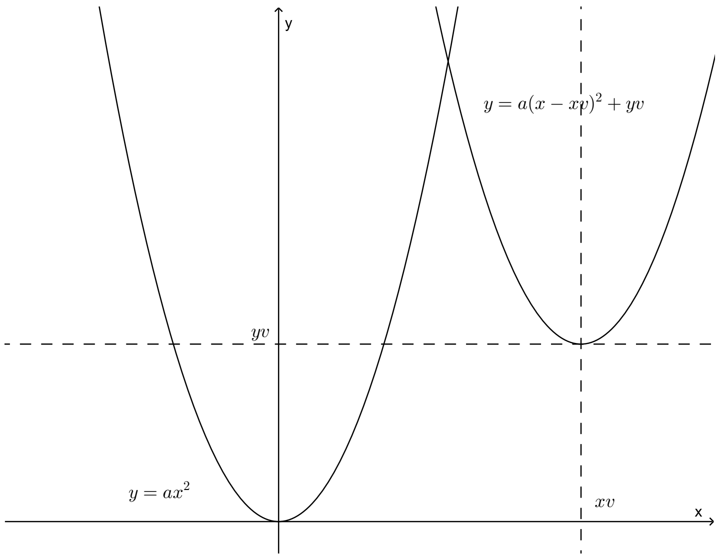


Figura 68 – Translação horizontal e vertical de parábola com $a > 0$, para direita do eixo xoy.

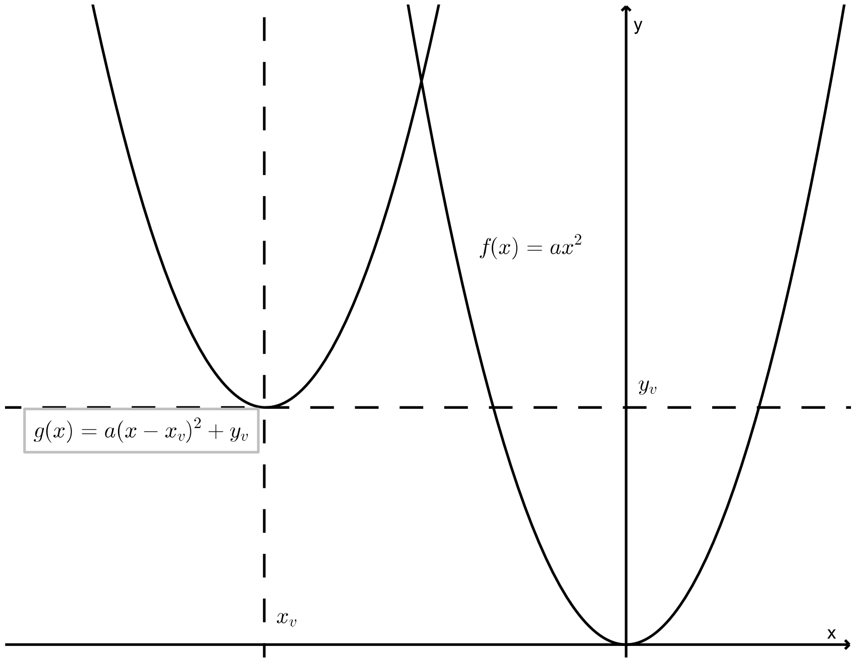


Figura 69 – Translação horizontal e vertical de parábola com $a > 0$, para esquerda do eixo xoy: à esquerda $y = ax^2$, à direita a parábola transladada.

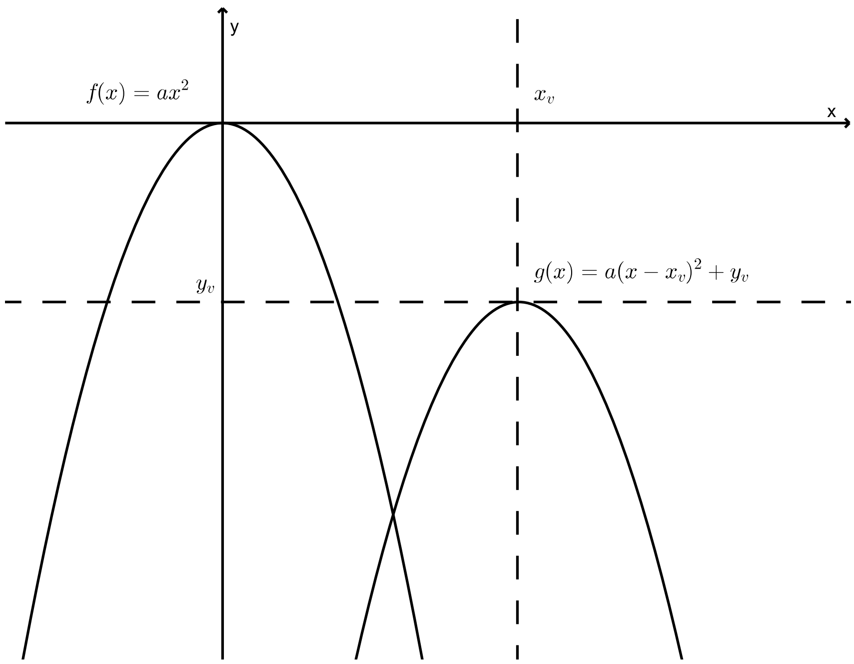


Figura 70 – Translação horizontal e vertical de parábola com $a < 0$, para a direita do eixo xoy.

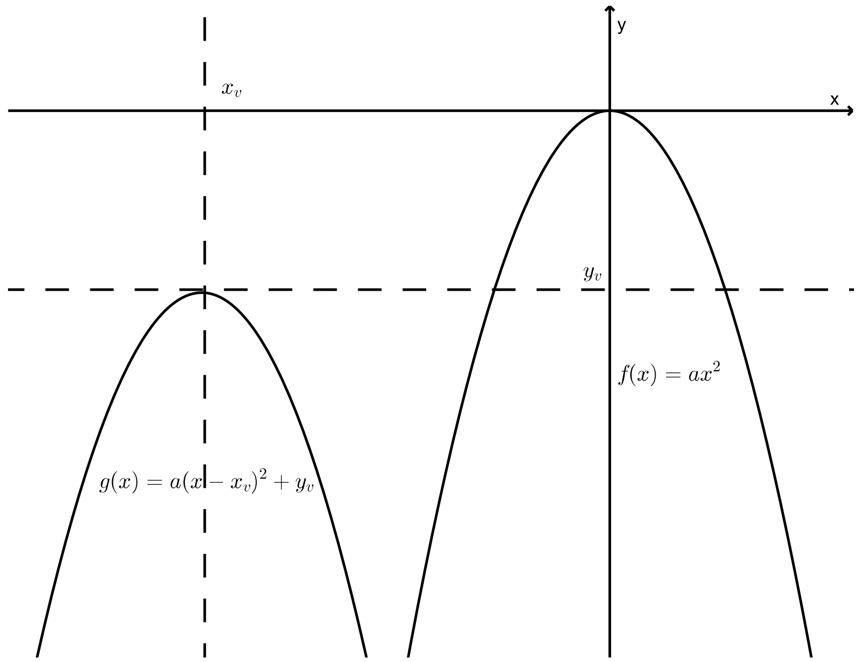


Figura 71 – Translação horizontal e vertical de parábola com $a < 0$, para esquerda do eixo xoy.

Mas afinal, quem é p? De $y = ax^2$, com $a \neq 0$, a real. Como

$$d_{F,V} = d_{V,d'} = p,$$

temos que: o foco $F = (0, p)$, a reta diretriz é do tipo $y = -p$ e o ponto genérico $P(x, ax^2)$ pertence à parábola $a \neq 0$, a real. Como:

$$d_{F,V} = d_{V,d'} = p,$$

Usando a definição, como $P = (x, ax^2)$, o pé da perpendicular baixada de P sobre $y = -p$ é $P' = (x, -p)$, temos que isso equivale a calcular:

$$d_{F,P} = d_{P,P'}, \text{ com foco } F = (0, p):$$

$$\sqrt{(0 - x)^2 + (p - ax^2)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (ax^2 + p)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$x^2 + (p - ax^2)^2 = (ax^2 + p)^2 \Rightarrow x^2 + a^2x^4 - 2apx^2 + p^2 = a^2x^4 + 2apx^2 + p^2,$$

ou seja:

$$x^2 - 4apx^2 = 0 \Rightarrow x^2(1 - 4ap) = 0 \Rightarrow 1 - 4ap = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{4a} \text{ ou } x = 0.$$

Se $x = 0$, P é o vértice, P' é a interseção da reta focal com d' e a condição está satisfeita. Por outro lado, se $p = \frac{1}{4a}$, $F(0, \frac{1}{4a})$ e P é o outro ponto da parábola em questão, diferente do vértice.

De posse dessas informações, vamos visualizar de uma outra forma a construção da parábola: com régua e compasso e outra forma com dobradura. Você vai precisar ter os conceitos de ponto médio, reta paralela e perpendicular desenvolvidos.

- Com régua e compasso[21, p.117]:

1. Trace uma reta d' em um papel e nela, marque um ponto, que não pertence a essa reta. Vamos chamar esse ponto de F: ele será o foco da nossa parábola. Trace uma reta $\overleftrightarrow{FA}$, perpendicular a d', passando por F. Chamaremos de A, a interseção de $\overleftrightarrow{FA}$ com d.
2. O ponto médio de $\overline{FA}$ é o vértice V, da parábola (por definição de parábola, a distância do foco F, ao vértice V é igual a distância do vértice à reta d', chamada de diretriz da parábola.
3. Trace uma reta d'_1 paralela à reta d', com o compasso, fixe a distância k_1 entre d' e d'_1. Coloque a ponta seca do compasso em F, traçando uma circunferência de raio k_1 e na intersecção da reta d'_1 com essa circunferência marcaremos P_1 e P'_1.

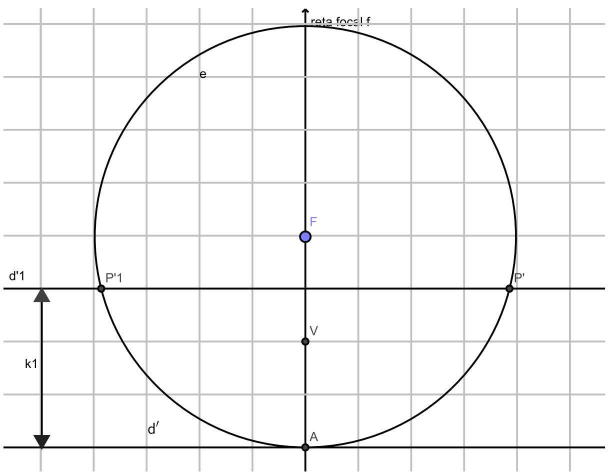


Figura 72 – Construindo a parábola, passo 1.

4. Trace agora, quantas retas quiser, paralelas a d', sejam elas

$$d'_1, d'_2, d'_3, ...$$

Repetindo o mesmo procedimento, desde que todas as retas sejam no mesmo lado da reta que foi marcado F, marcando os P_n e P'_n, com $n \in \mathbb{N}$. Note que a circunferência e tem raio k_1, a circunferência h tem raio k_2 e a circunferência g tem raio k_3 e assim por diante.

5. Ligue agora, V aos P_n, com n crescente, também V aos P'_n, também em ordem crescente de n .

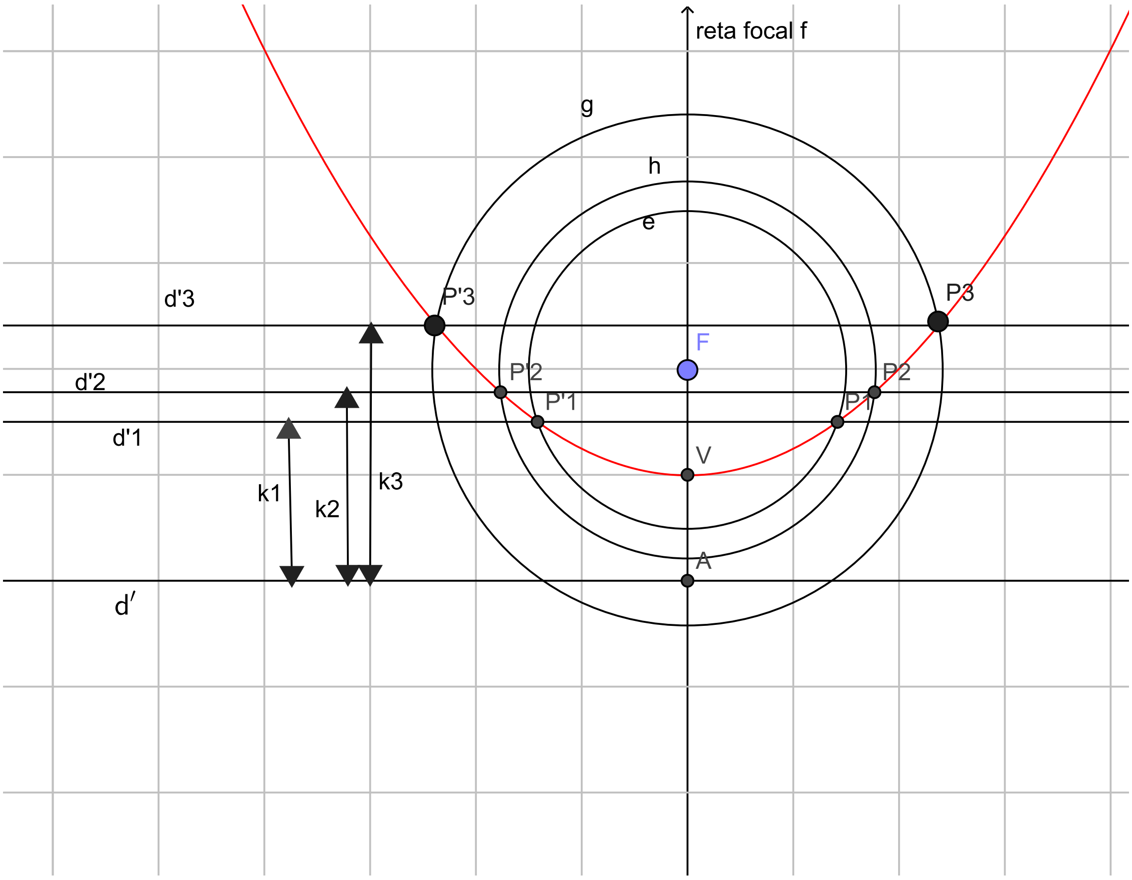


Figura 73 – A parábola, com régua e compasso.

6. Sua parábola apareceu! Por definição de parábola, também, a distância do foco a qualquer ponto pertencente à parábola, é igual à distância desse mesmo ponto até à reta d', chamada de reta diretriz.

- Através de dobraduras[19]:

1. Trace uma reta d' em um papel (ele deve ter transparência) e acima dela marque um ponto, que não pertencerá a essa reta. Vamos chamar esse ponto de F: ele será o foco da nossa parábola. Trace uma reta $\overleftrightarrow{FE}$, perpendicular a d', passando por F. Chamaremos de E, a interseção de $\overleftrightarrow{FE}$ com d'.

2. O ponto médio de $\overline{FE}$ é o vértice V, da parábola (por definição, a distância do foco F ao vértice V, é igual a distância do vértice à reta d', chamada de diretriz) .

Figura 74 – Passos 1 e 2[19].

Marque um ponto na reta d'. Chamaremos esse ponto de A.

3. Faça A coincidir com F, por sobreposição. Dobre o papel, marcando bem a dobra.

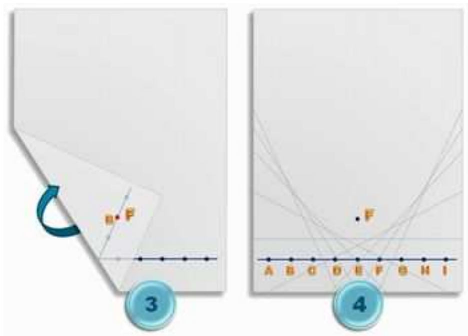


Figura 75 – Passos 3 e 4[19]

4. Faça isso várias vezes, escolhendo os vários pontos que marcamos sobre d' que pertencem à reta d', fazendo-os coincidirem com F, um de cada vez, dobrando o papel e marcando bem sempre. Lembre-se que os pontos sobre d' devem ser marcados tanto à direita de E quanto à esquerda de E. Note que as marcas das dobras parecem tangenciar uma curva, que nesse caso, é a parábola.
5. Una essas marcas das dobras com uma curva contínua e teremos a parábola.

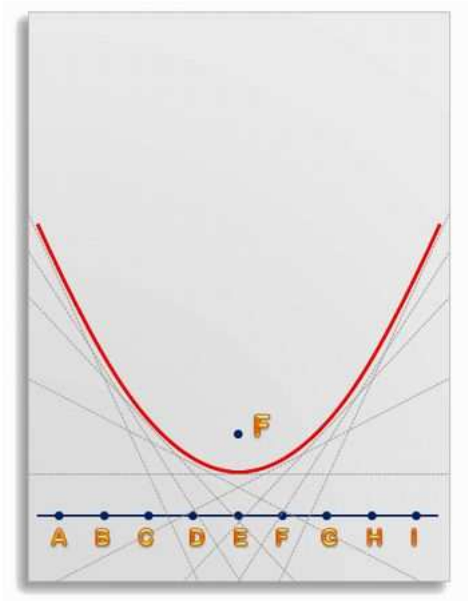


Figura 76 – A parábola[19].

Exercício 26 Agora, utilizando o conhecimento que você construiu sobre a parábola, observe os gráficos e indique a função que dá origem à parábola, em cada caso.

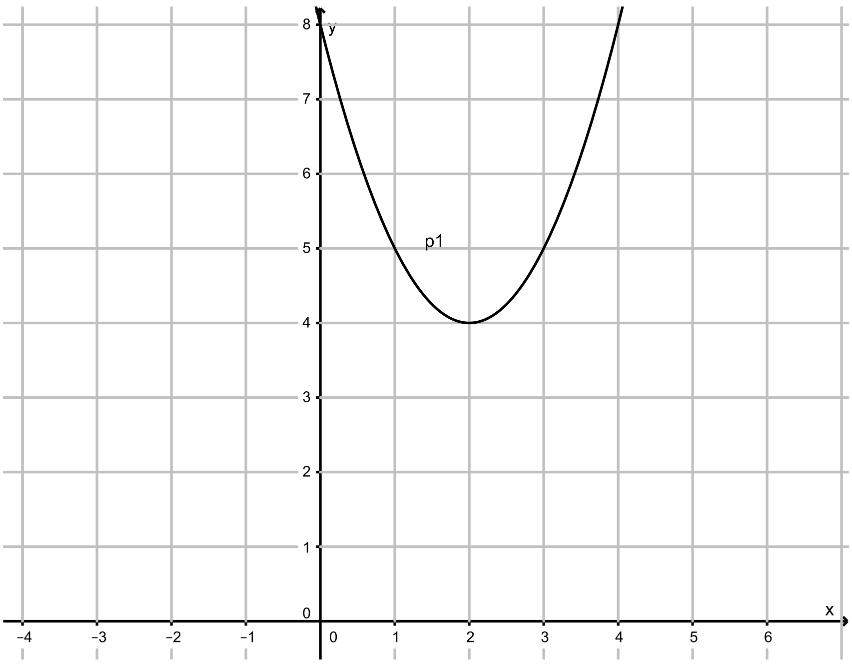


Figura 77 – Parábola 1.

a)

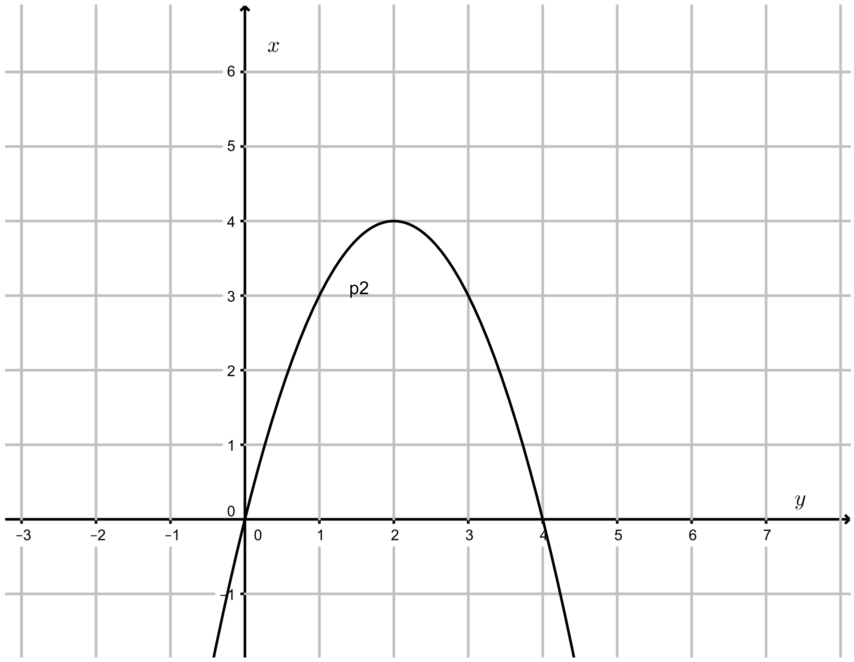


Figura 78 – Parábola 2.

b)

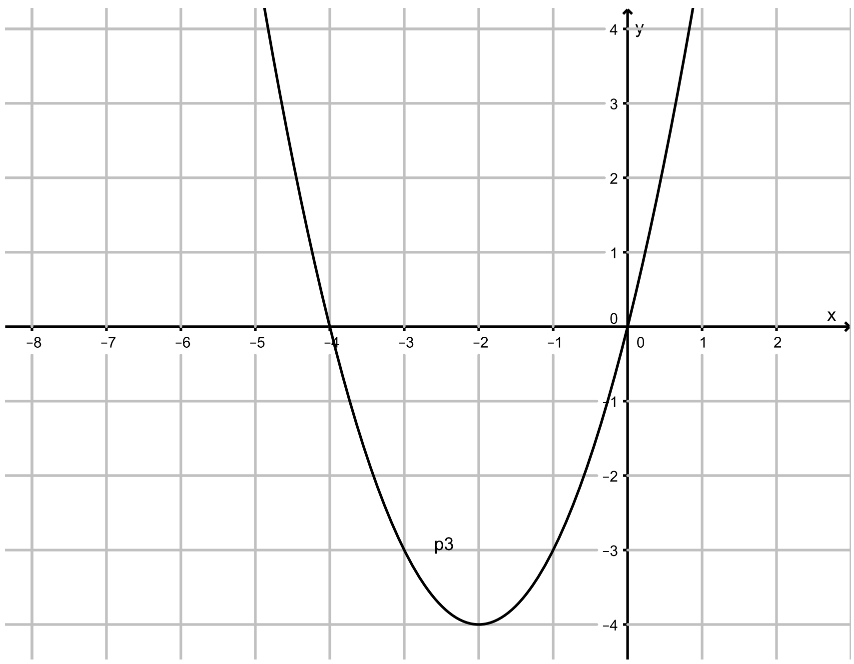


Figura 79 – Parábola 3.

c)

6 O PARABOLOIDE

Você já deve ter visto uma antena parabólica. Ela na verdade é um paraboloide circular, uma superfície obtida pela revolução de uma parábola em seu próprio eixo (reta focal).

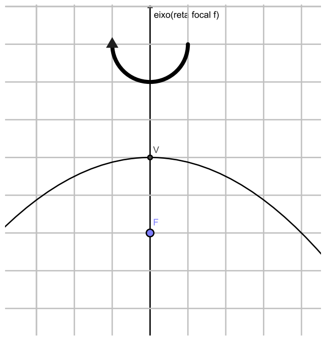


Figura 80 – Rotação da parábola em torno da reta focal f.

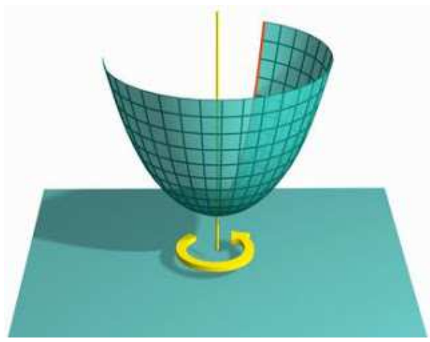


Figura 81 – Paraboloide de revolução, também conhecido como paraboloide circular[19]

Usamos instrumentos parabólicos para potencializar algo que queremos, como ondas de rádio, luz, concentrando-os em um único ponto: o foco da parábola. Para tal, a superfície deve ter a propriedade de "direcionar"todos os raios recebidos (ou sinais, por exemplo) para um único ponto.

Talvez, uma das mais famosas aplicações do paraboloide circular, seja a história dos espelhos de Arquimedes. Conta a lenda que Arquimedes, durante o cerco a Siracusa em 214 a.C, que usando os fenômenos da reflexão que haviam sido descritos por Aristófanes e Aristóteles, utilizou um espelho côncavo, com o objetivo de coibir a invasão do exército romano, (um paraboloide circular), que na época teria sido feito de cobre. Dessa forma, Arquimedes, utilizando este artefato, concentrou os raios do Sol sobre os barcos romanos, incendiando-os à distância. Estes espelhos ganharam o nome de "espelho ardente". Mitos ou verdades à parte, a história fascina a todos, muitos estudantes, engenheiros e estudiosos, que através dos tempos vem tentando recriar a experiência de Arquimedes. Ela concentrava toda a radiação proveniente do Sol, que devido a enorme distância do Sol à Terra chegam paralelos.

O artefato, segundo a lenda, era constituído de vários pequenos espelhos planos quadrados, que podiam ser direcionados de forma a convergir para um ponto, como um espelho parabólico ou uma lente convergente, do tipo usado em fogões solares, como o que acendeu a tocha olímpica na olimpíada de 2016 e em vários lugares do Brasil para cozinhar, só que em maior escala capaz de reduzir a cinzas um navio que estivesse à distância de um tiro de flecha (100 a 150 m).[10]

Ainda hoje utilizamos a propriedade refletora da parábola, nas usinas solares térmicas, onde utilizam placas para a captação de energia do Sol. Um exemplo disso é a Gemasolar, na Espanha, usina formada por espelhos, que juntos tem forma de paraboloide circular de revolução: captam a radiação solar armazenando-o em um receptor localizado no foco, que contém sais fundidos, onde ele é aquecido. A partir daí o funcionamento é parecido com as demais usinas termelétricas: o vapor do sal toca a turbina de um gerador, depois o sal que esfriou volta para ser aquecido (no foco das parábolas que geram o paraboloide). Essa energia é transformada em energia elétrica.

Figura 82 – Usina solar Gemasolar[23].

O mesmo princípio refletor da parábola explica o funcionamento das antenas parabólicas receptoras, como as de televisão em casa, que captam ondas eletromagnéticas e as refletem para um receptor que fica no foco, e as transforma em sinais elétricos, enviando-as para um decodificador, que por sua vez transforma os sinais elétricos em imagem e som para a televisão. Existem também palcos construídos dentro de uma concha acústica parabólica. Assim, o som produzido, que se propaga em todas as direções, ao invés de preencher todo o palco, é potencializado utilizando o princípio refletor da parábola.

Figura 83 – Concha acústica de Rio das Ostras, R.J., Brasil.

Figura 84 – Disco solar parabólico.

Agora mostraremos um argumento para explicar essa propriedade refletora da parábola. Você vai precisar de conhecimentos de geometria.

Seja a parábola $\mathcal{P}$.

Considere $P \in$ a essa parábola de foco F, reta diretriz d' e como P pertence à parábola, por definição,

$$d_{F,P} = d_{P,D},$$

Note que $\overline{PD} \perp d'$, também por definição de parábola. Seja b, com $M \in b \bigcap \overline{FD}$, a bissetriz de $F\hat{P}D$. Isso quer dizer que:

$$F\hat{P}M \equiv M\hat{P}D.$$

Usando o caso de congruência lado-ângulo-lado (L-A-L) pois $\overline{PM}$ é um lado comum aos triângulos $\triangle FPMe \triangle \ PMD$, além disso temos um triângulo isósceles por construção e definição de parábola, por isso:

$$\overline{FP} \equiv \overline{PD}.$$

E b, além de ser bissetriz é a mediatriz de $\overline{FD}$ (por definição de triângulo isósceles) $F\hat{P}M \equiv M\hat{P}D$ e pelo caso Lado-Ângulo-Lado $\triangle FPM \equiv \triangle PMD$.

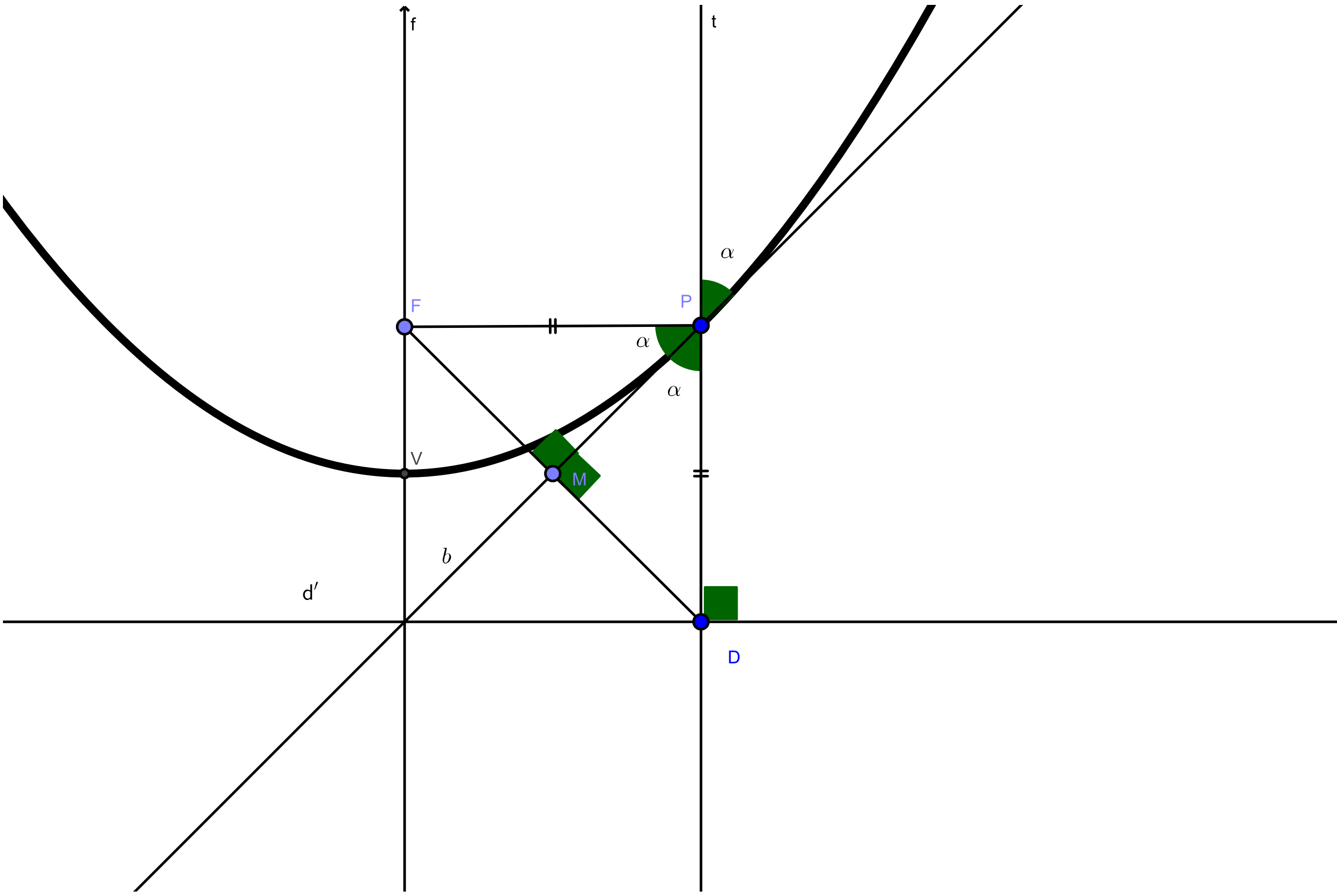


Figura 85 – Ângulo de incidência e reflexão na parábola.

Seja t, a reta que passa por P e D, note que t é perpendicular a d' (por definição de distância) e como f também é perpendicular a d', temos que $t \parallel f$ e o ângulo entre b e $\overline{PD}$ é oposto pelo vértice com α, que por definição de oposto pelo vértice, também mede α. Faça t um raio incidente em P, paralelo a f e temos que o ângulo de incidência α é igual ao ângulo de reflexão e como vemos, todo raio que incidir paralelamente a f, passará pelo foco F, que justifica a propriedade refletora da parábola. Na figura abaixo, suponha f paralelo a t e paralelo a u, um outro raio que incide paralelo à reta focal da parábola, como exemplo para melhor visualização .

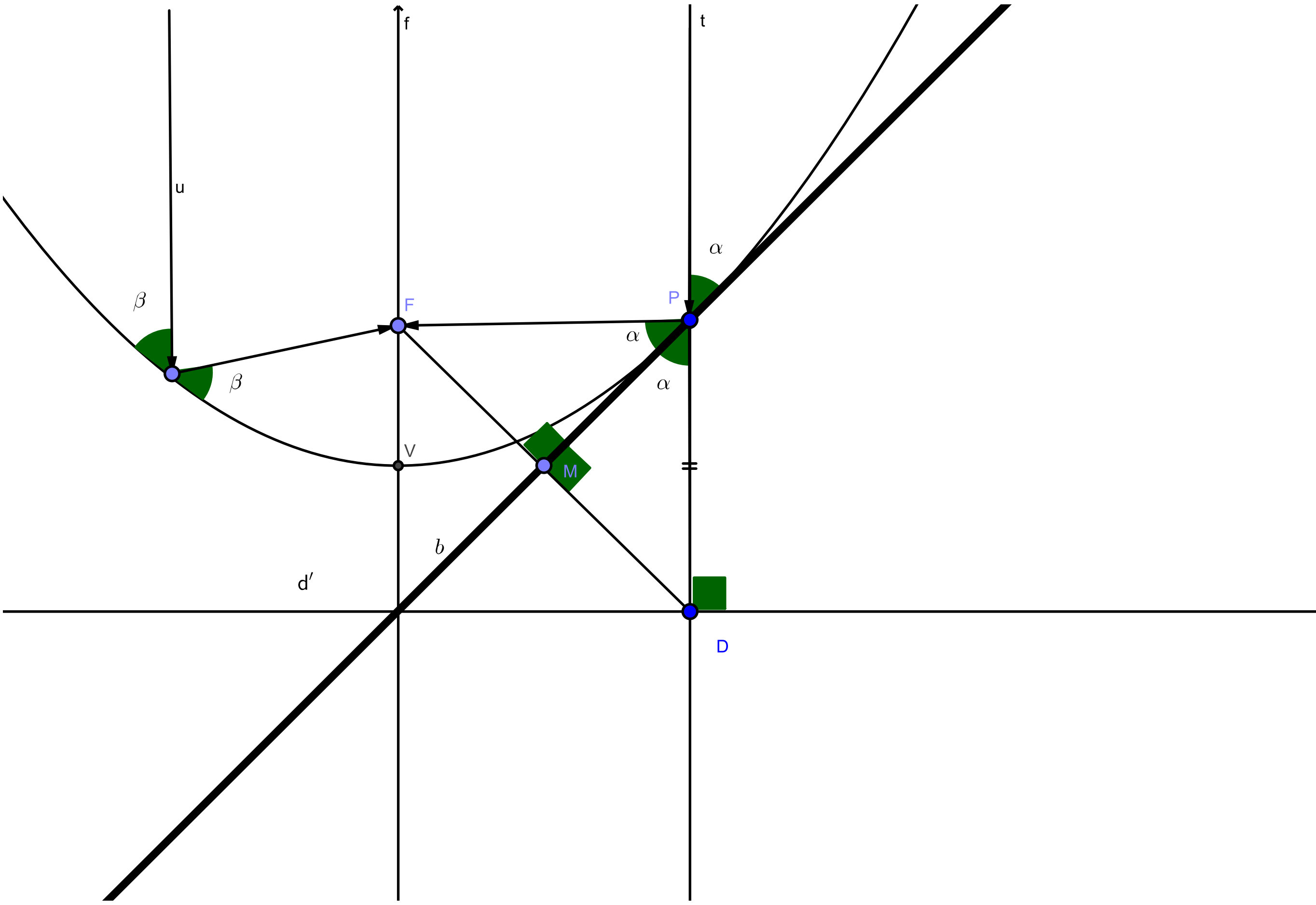


Figura 86 – Propriedade refletora da parábola.

7 PLOTANDO NO GEOGEBRA A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Para melhor visualização da função quadrática, os gráficos deste trabalho foram plotados no GeoGebra, um software livre, nos moldes da General Public License. GeoGebra (mistura de Geometria e Álgebra) é um aplicativo de matemática que mistura ideias de geometria e álgebra, é escrito em linguagem Java, o que lhe permite funcionar em várias plataformas. Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado de forma didática, principalmente. O projeto foi iniciado em 2001, na Universidade de Salzburg. Nas versões mais novas também é possível trabalhar com geometria em três dimensões. Para começar, baixe o programa no sítio eletrônico: "http://www.geogebra.org/"e vai aparecer uma página como essa:

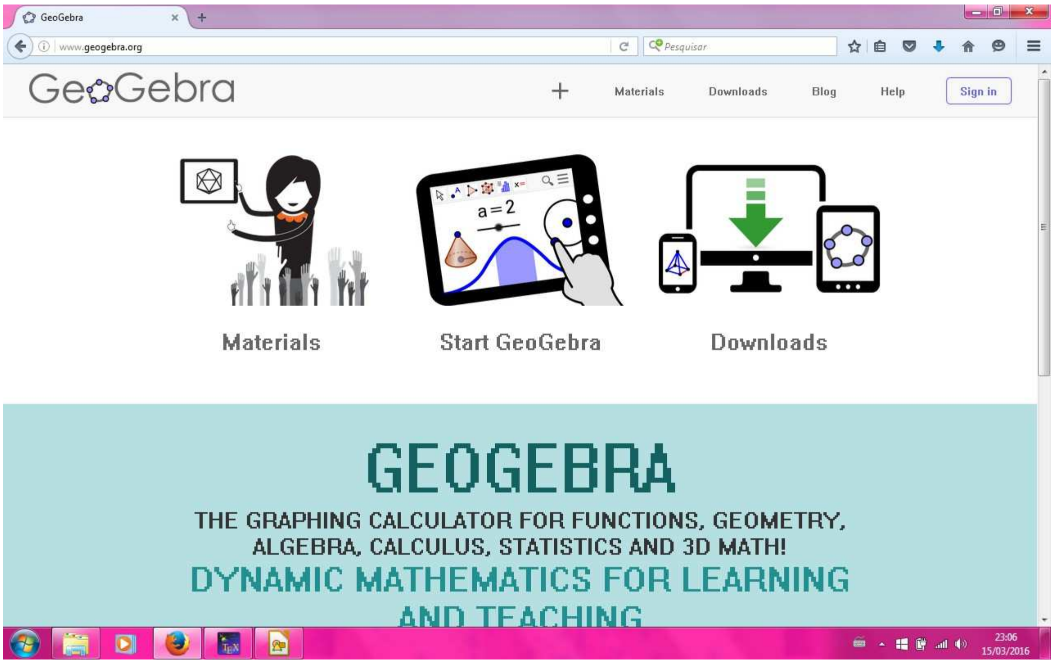


Figura 87 – Página inicial do GeoGebra

Escolha downloads e vai aparecer essa:

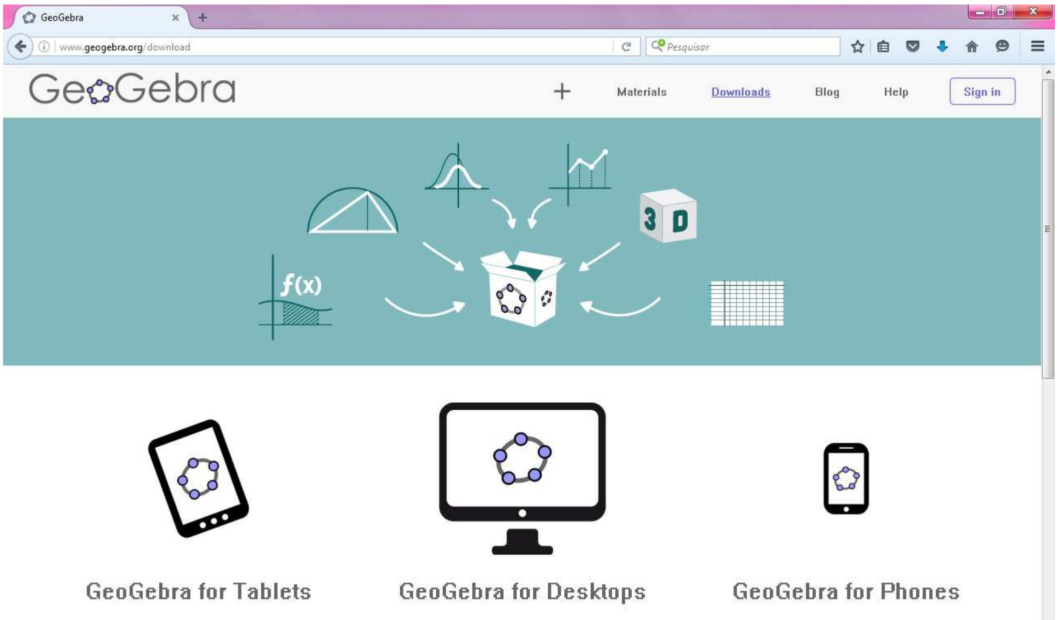


Figura 88 – GeoGebra download

Clique e se estiver tudo certo com sua máquina, após seguir os passos de instalação, aparecerá a janela inicial do GeoGebra: note na parte inferior a entrada, local onde vamos escrever nossa função, nesse caso a quadrática. Não é intenção deste trabalho, aprofundar nesse assunto, mas tão somente utilizar o básico do programa, de forma didática, para uma melhor visualização das funções quadráticas, não substituindo sua plotagem manual e tradicional, com a utilização da régua. A intenção é complementar o processo de aprendizagem.

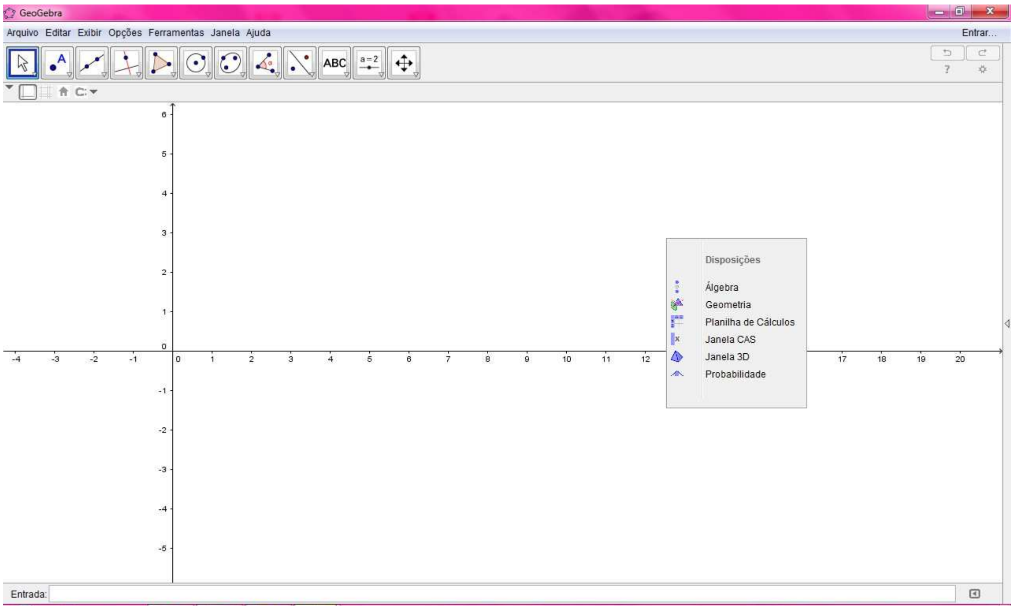


Figura 89 – Janela do Geogebra.

Vamos exemplificar com a função quadrática

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\ f(x)=x^2-5x+6.$$

Utilizando os comandos básicos para raízes reais, vértice da função, interseção com o eixo *oy* (o parâmetro "c"). Comece escrevendo $f(x)=x^2-5x+6$ e tecle enter.

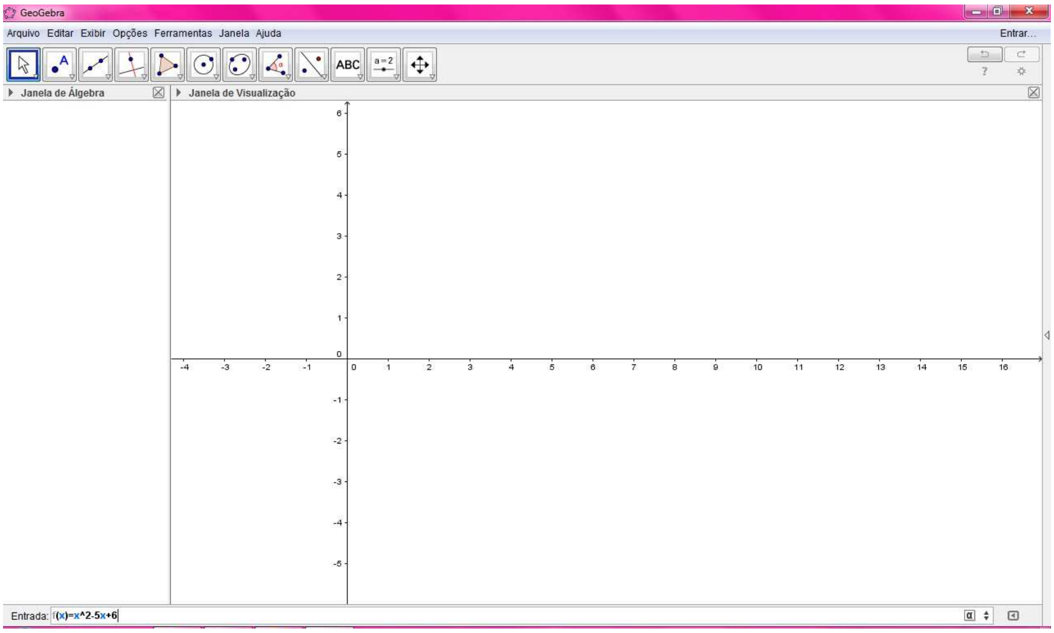


Figura 90 – Escrevendo a função na entrada.

Após teclar "enter"a função aparecerá na janela do GeoGebra: à direita sua representação gráfica, à esquerda a função na janela de álgebra.

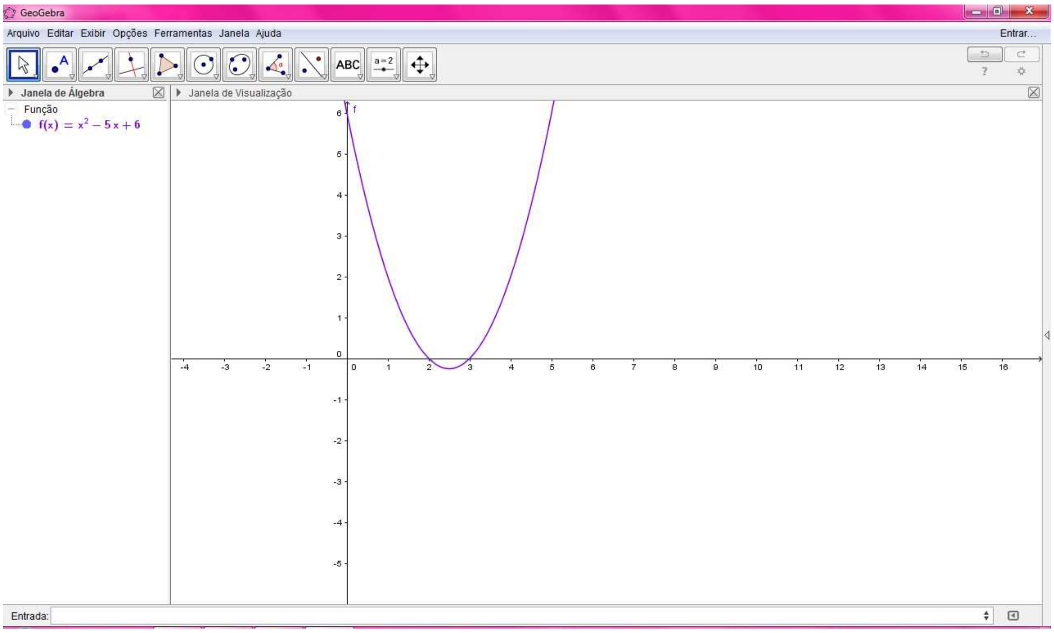


Figura 91 – Plotando a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Para mostrar as raízes da função, iremos escrever na entrada o comando "raiz[f]"e aperte "enter".

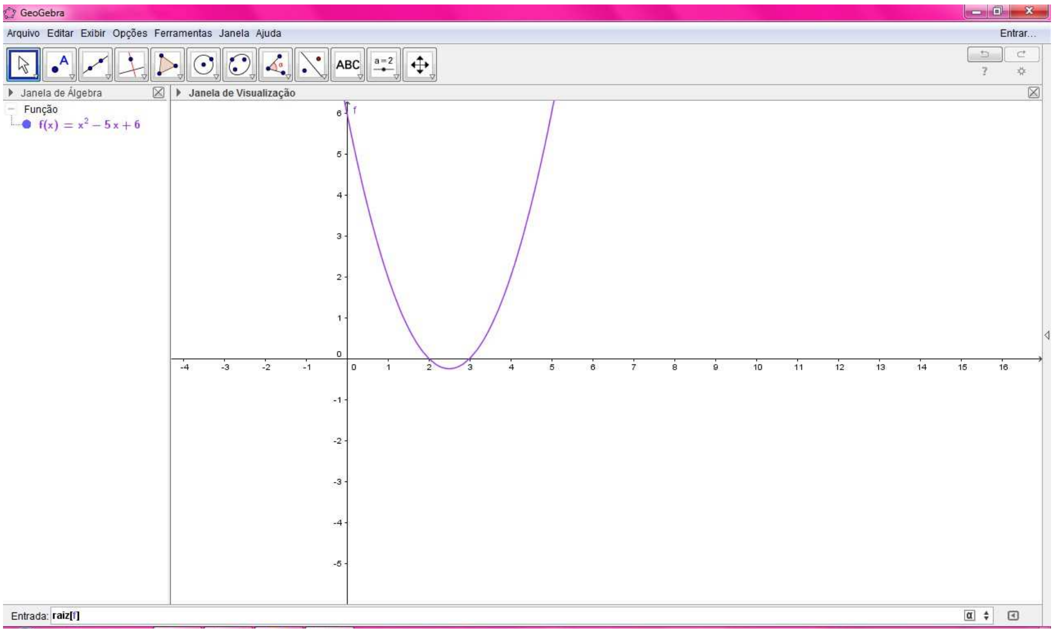


Figura 92 – Comando para encontrar a raiz da função.

Isso mostrará no gráfico as raízes e na janela de álgebra aparecerão como pontos, nesse caso: A e B.

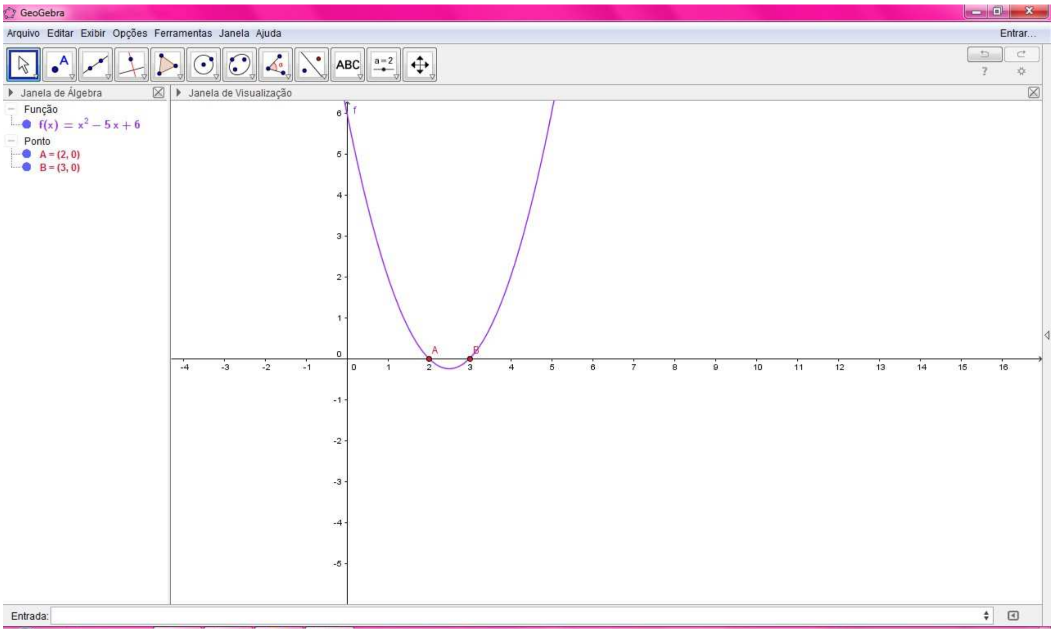


Figura 93 – Raízes da função $f(x)$.

Para encontrar o extremo da função quadrática, iremos utilizar o comando "extremo[f]", na entrada e aperte "enter".

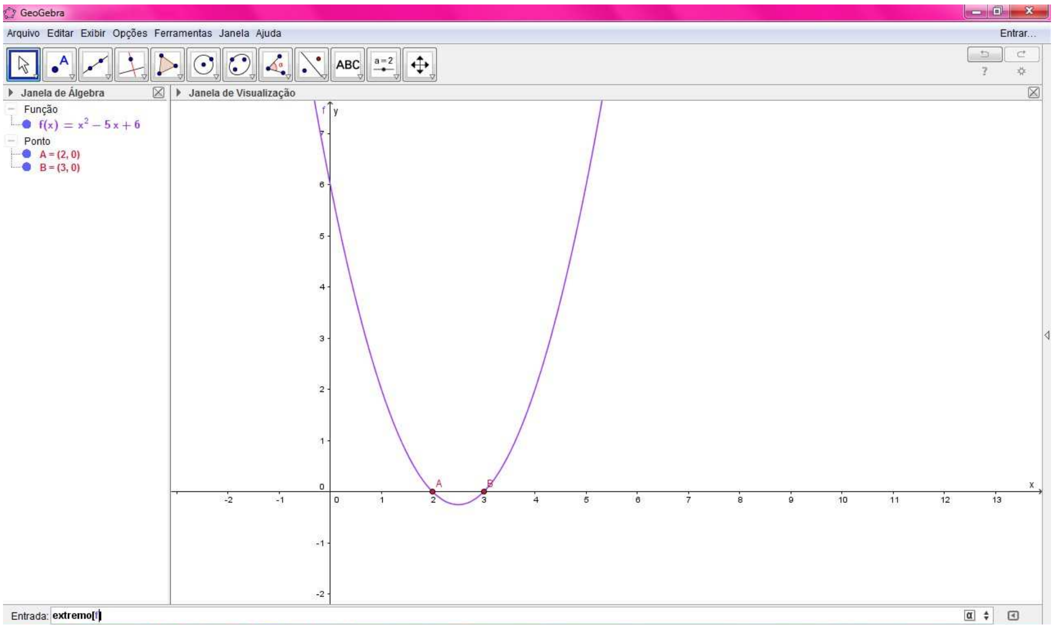


Figura 94 – Comando "extremo"da função em questão (vértice).

Nesse caso o extremo é o ponto C, que aparece na janela de álgebra e no gráfico, o vértice da função em questão.

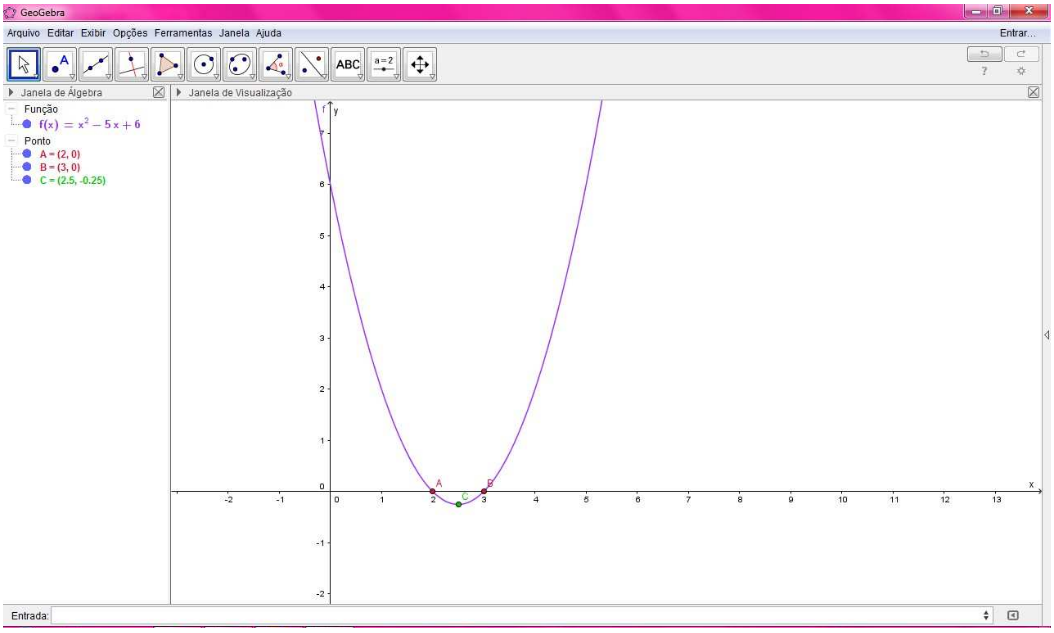


Figura 95 – Exibindo o extremo da função (ponto máximo ou mínimo da função)

Agora para mostrar a interseção da função com o eixo oy, ou seja: o parâmetro "c"da função quadrática, temos:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ a,\ b, \text{ e } c \in \mathbb{R},$$

digite na entrada "interseção $[f, x = 0]$"e aperte "enter".

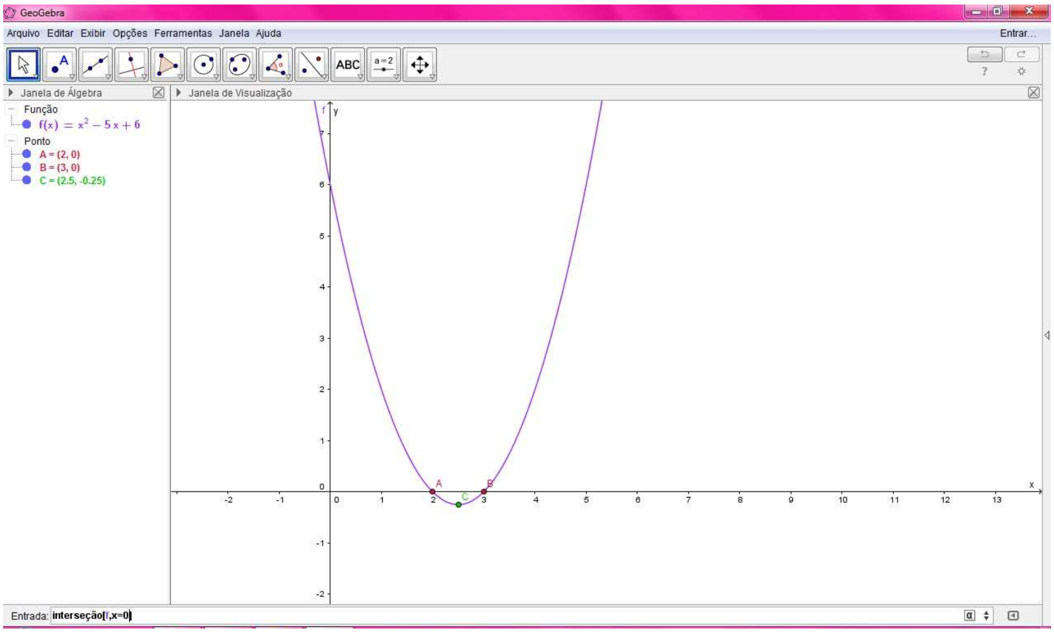


Figura 96 – Comando interseção eixo oy com a função.

Nesse caso, o ponto D.

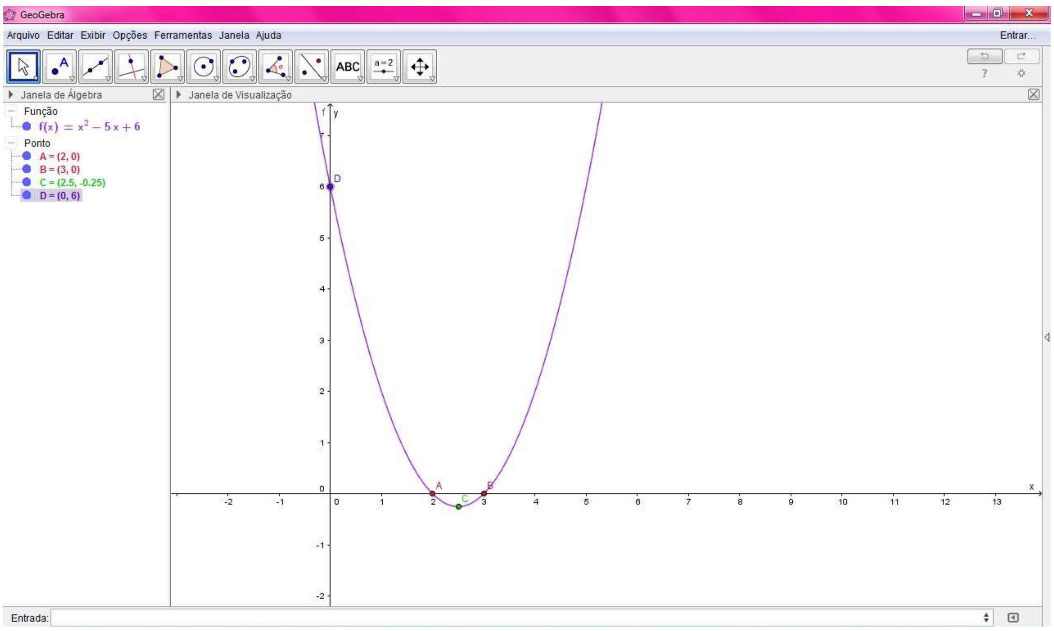


Figura 97 – Exibindo a interseção da parábola com o eixo y- o parâmetro "c"da função quadrática

Para Uma visualização mais agradável, mudando: cor, nome, etc., utilizaremos o comando do GeoGebra "propriedades", para isso basta clicar em cima do objeto que você deseja melhorar a visualização e aparecerá a janela abaixo. Você poderá renomear o objeto, apagar, trocar de cor, etc...

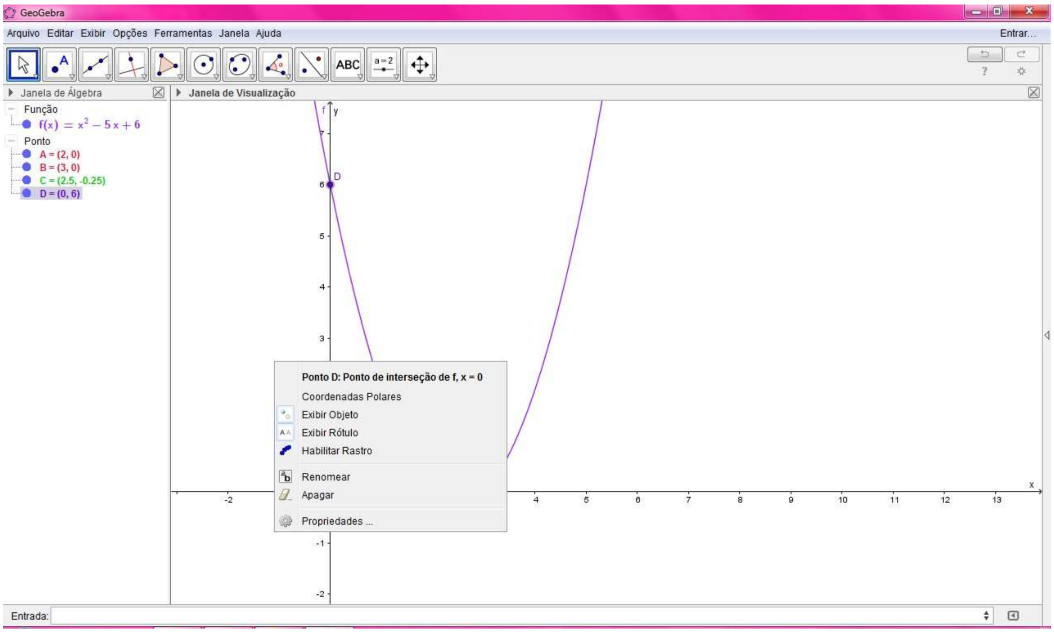


Figura 98 – Comando propriedades.

Se quiser mudar de cor, na caixa clique em propriedades. Pronto! Agora é só escolher a cor de acordo com as que estão disponíveis e fechar a janela.

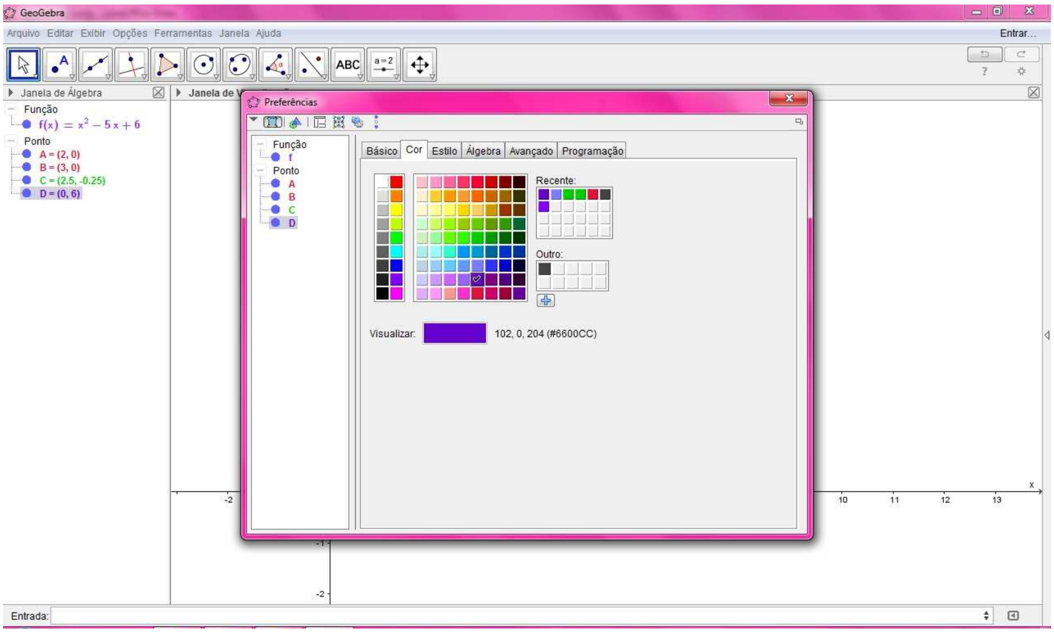


Figura 99 – Trocando a cor do objeto: ponto, função, etc.

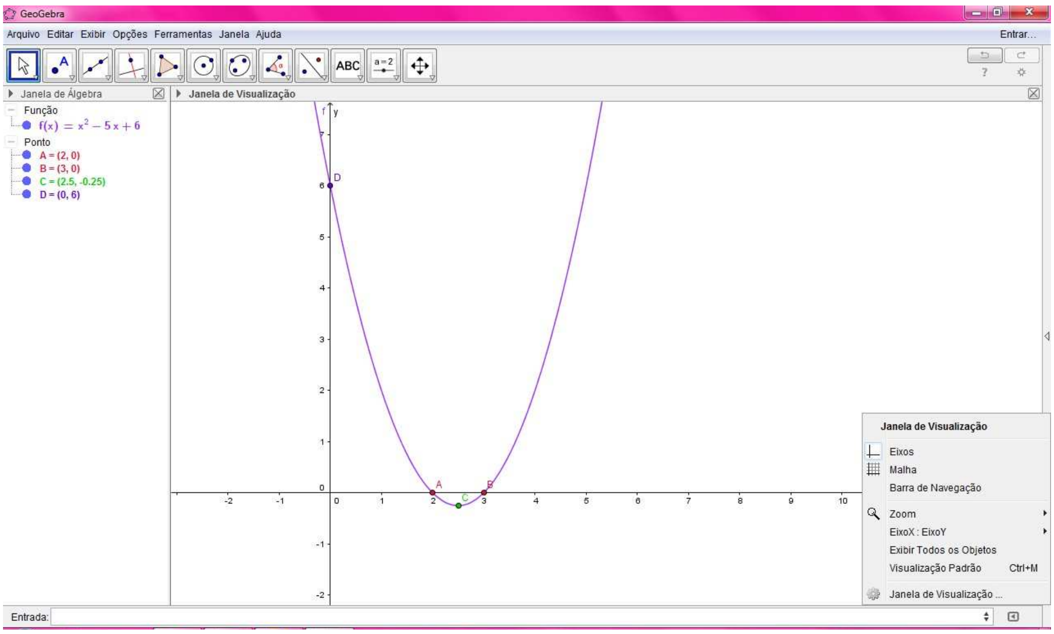


Figura 100 – Comando malha quadriculada.

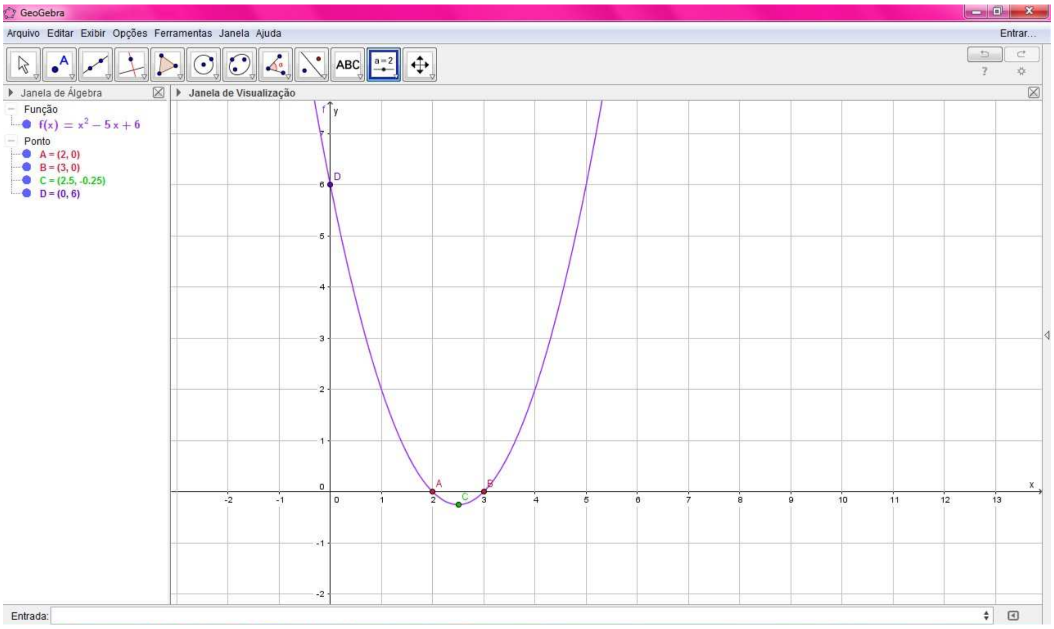


Figura 101 – função na malha quadriculada.

Exercício 27 Plote agora no GeoGebra, a função:

$$função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Encontre as raízes se existirem, o ponto de otimização da função (extremo) e a interseção com o eixo oy, como você aprendeu aqui. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

Exercício 28 Plote agora no GeoGebra a função:

$$função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Encontre as raízes se existirem, o ponto de otimização da função (extremo) e a interseção com o eixo OY, como você aprendeu aqui. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

Exercício 29 Plote agora no GeoGebra, a função

$$função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x + 4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Encontre as raízes se existirem, o ponto de otimização da função (extremo) e a interseção com o eixo oy, como você aprendeu aqui. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

Exercício 30 [Kaufman, p.69-adaptado [9]] Uma bala de canhão é atirada por um tanque de guerra e descreve uma trajetória em forma de parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$, sendo x a distância percorrida pela bala, em metros, y a altura atingida pela bala, medida em metros Esboce o gráfico da função com $x \in [0, 20]$, com x real. Você consegue estimar a altura máxima atingida bela bala? E o alcance do disparo? Agora, plote no GeoGebra e confira seu esboço. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

8 CONCLUSÃO: UM PEQUENO COMENTÁRIO SOBRE O TRABALHO.

Partindo do princípio que o trabalho foi feito com o intuito de ser utilizado para aprendizagem, seja em sala de aula, seja num ambiente com indivíduos dispostos a aprender, os exercícios em sua maioria foram aplicados em sala de aula, em duas turmas heterogêneas de primeiro ano do ensino médio, de uma escola pública no estado do Rio de Janeiro. A apresentação do trabalho, para os discentes, foi fracionada, sendo trabalhada a parte histórica, primeiramente, assim como na sequência apresentada no trabalho, formando vínculos satisfatórios de entendimento, colaborando para o desenvolvimento de habilidades e competências, além de servir de motivação inicial, dando sentido ao conhecimento matemático historicamente construído. Os conceitos foram trabalhados de forma intuitiva, antes de conceituados, dando preferência à construção gradativa do conhecimento. A abordagem da função quadrática, da forma que foi apresentada foi bem aceita, inclusive o uso da régua, compasso e do software livre GeoGebra, além dos outros recursos apresentados, mostrando que é possível o uso do trabalho para que sejam desenvolvidos conceitos, evitando-se a mera repetição de modelos, para que o aluno tome como seu o conhecimento matemático desenvolvido. Fazendo isso, o aluno tende a se tornar um ser pensante e colabora-se então, para o desenvolvimento da consciência crítica do aluno. Espera-se que ele se torne um ser crítico, capaz de pelo menos julgar o meio no qual está inserido, podendo atuar de forma eficiente na transformação do meio em que vive, seja ela social, econômica, política, etc., se assim o desejar, como sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais (P.C.N.).

REFERÊNCIAS

[1] AL-KHWARIZMI. *In Britannica Escola Online*. Enciclopédia Escolar Britannica, 2016. Web, 2016. Disponível em: <http://escola.britannica.com.br/article/481649/Al-Khwarizmi>. Acesso em: 20 de maio de 2016, hora: 20:30.

[2] BAUMGART, John K. *História da álgebra; tradução de Higino H. Domingues.*-Tópicos de historia da matemática para uso em sala de aula: v.4. São Paulo: Atual, 1992.

[3] BOYER, Carl Benjamin, 1906. *História da matemática; tradução Elza F.Gomide.* São Paulo: Ed. Edgard Blucher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs); Ensino MédioParte III- Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.* Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 9 de janeiro de 2016, hora: 17:30.

[5] CONTEÚDOS DIGITAIS UFF.*Conteúdos digitais Universidade Federal Fluminense.* Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/conicas/index.html>. Acesso em: 02 de maio de 2016, hora: 18:00.

[6] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática contextos e aplicações/Volume 1.*2ªedição - São Paulo: Ática, 2013.

[7] E-CÁLCULO.*E-cálculo.* Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/viete.htm>. Acesso em: 02 de maio de 2016, hora: 16:32.

[8] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática; tradução Hygino H.Domingues.*5ªed. – Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[9] FAINGUELERNT, Estela Kaufman *Matemática: práticas pedagógicas para o ensino médio./Estela K. Fainguelernt, Katia Regian A. Nunes*- Porto Alegre: Penso, 2012.

[10] FÍSICA INTERESSANTE*Física interessante.* Disponível em:<http://www.fisica-interessante.com/historia-da-fisica-espelhos-de-arquimedes.html>Acesso em: dia 08/02/2016, hora 22:22.

[11] GUELLI, Oscar. *Contando a história da matemática.* 3 - História da equação do segundo grau.6ªed. Ática, São Paulo, 1996.

[12] LIMA, Elon Lages.*A matemática do ensino médio-Volume 1/Elon Lages Lima,Paulo Cézar Carvalho, Augusto César Morgado.* 10ªed.- Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[13] LIMA, Elon Lages.Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho.Morgado, Augusto César. *Temas e problemas elementares/Elon Lages Lima,Paulo Cézar Carvalho, Augusto César Morgado.* 12ªed.- Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] MATEMÁTICA MUITO FÁCIL. *Equação do segundo grau.* Disponível em: <http://www.matematicamuitofacil.com>. Acesso em: 23 de março de 2016, hora: 19:51.

[15] MORGADO, Augusto César.*Matemática Discreta / Augusto César Morgado; Paulo Cézar Pinto Carvalho.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[16] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins.*Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções./Krerley Irraciel Martins Oliveira, Adán Jose Corcho Fernandes.*2ªedição - Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[17] PAIVA, Manoel. *História da equação do segundo grau.*6ªed.: Ática, São Paulo, 1996.

[18] PAIVA, Manoel. *Matemática Paiva-Volume 1* 2ªed.: Moderna, São Paulo, 2013.

[19] PORTAL DO PROFESSOR.*Portal do professor.*Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaaula.html?aula23269>.Acesso em: 22 de março de 2016, hora: 01:30.

[20] PROJETO PRÉ-CÁLCULO. *Pre-cálculo: módulo I, capítulo III.* Disponível em: <http://www.im.ufrj.br>. Acesso em 02 de maio de 2016, hora: 16:38.

[21] SMOLE, Kátia Cristina Stocco.*Matemática: ensino médio: volume1/Kátia Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz.*6ªed.-São Paulo: Saraiva, 2010.

[22] SOMATEMATICA.*Somatematica.* Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/desafios/diofanto.jpg>. Acesso em: 17 de março de 2016, hora: 14:00.

[23] ÚLTIMO SEGUNDO IG.*Último Segundo IG.*Disponível em: <http://ultimosegundo.ig.com.br/ciencia/meioambiente/na-andaluzia-uma-usina-solar-funciona-ate-de-noite/n1597701793380.html>. Acesso em 22 de maio de 2016, 16:31.

[24] UOL.*Folha ciência.* Disponível em: <ww1.folha.uol.com.br/ciencia/2015/12/1718418-hominideos-primitivos-ja-tinham-preferencias-esteticas-renascentistas.shtml>. Acesso em 20 de março de 2016, hora: 18:30.

[25] UOL. Disponível em: <http://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/4749-modernismos-no-brasil-foto-88846>. Acesso em: 20 de março de 2016, hora: 19:30.

[26] WIKIPÉDIA. *Wikipédia.* Disponível em: <http://pt.m.wikipedia.org/wiki/Plimpton-322>. Acesso em: 22 de março de 2016, hora: 17:30.

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS-POR CAPÍTULO

A.1 UM PROBLEMA MUITO, MAS MUITO ANTIGO.

Exercício 1-Resolução -Coloque na forma canônica as equações quadráticas abaixo, com $x \in \mathbb{R}$:

Note que, como:

$$ax^2 + bx + c \Rightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 + [\frac{-(b^2-4ac)}{4a}] \ , \ a \neq 0,$$

que é a forma canônica da equação do segundo grau, encontrando a, b, c (todos reais) e substituindo temos (lembre-se também que pode ser utilizado "completar o quadrado", que será o utilizado):

a) $3x^2 = 0$. Completando o quadrado:$3(x)^2 = 0$

b) $-4x^2 = 0$. Completando o quadrado: $-4(x)^2 = 0$.

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$. Completando o quadrado, para tal, devemos somar e subtrair 4:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = 0 \Longleftrightarrow (x + 2)^2 - 1 = 0$$

d) $x^2 + 4x + 5 = 0$. Completando o quadrado, devemos somar e subtrair 4:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + 5 = 0 \Longleftrightarrow (x^2 + 4x + 4) - 4 + 5 = 0 \Longleftrightarrow (x + 2)^2 + 1 = 0$$

e) $x^2 - 8x + 12 = 0$. Completando o quadrado, devemos somar e subtrair 16:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + 12 = 0 \Longleftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - 16 + 12 = 0 \Longleftrightarrow (x - 4)^2 - 4 = 0$$

f) $-x^2 + 9 = 0$. Completando o quadrado:$-(x)^2 + 9 = 0$

Exercício 2-Resolução -Escreva as equações abaixo na forma fatorada, se possível, com $x \in \mathbb{R}$:

Como a forma fatorada é do tipo:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

a) $3x^2 = 0$. Aqui, a raiz é 0 zero, de duplicidade 2 e como $a = 3 \Rightarrow 3(x - 0)(x - 0) = 0$

b) $-4x^2 = 0$. Aqui, a raiz é zero, de duplicidade 2 e como $a = -4 \Rightarrow -4(x-0)(x-0) = 0$

c) $x^2 + 4x + 3 = 0$. Na forma canônica, equivale a:

$$(x+2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow (x+2) = \pm\sqrt{1}$$

De:

$$x + 2 = -1 \Rightarrow x = -3 \text{ e de } x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1.$$

Ou seja, temos que:

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - (-3))(x - (-1)) = (x+3)(x+1) = 0,$$

que é a forma fatorada da equação quadrática em questão.

d) $x^2 + 4x + 5 = 0$. Na forma canônica, equivale a:

$$(x+2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = -1 \Rightarrow (x+2) = \pm\sqrt{-1}$$

Note que a equação quadrática não pode ser fatorada, pois $\pm\sqrt{-1}$ não pertence a $\mathbb{R}$, ou seja, não tem raiz real.

e) $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 4 \Rightarrow x - 4 = \pm\sqrt{4}$. De $x - 4 = 2$, temos que $x = 6$. De $(x-4) = -2$, temos que $x = 2$. Logo a forma fatorada de:

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \text{ é } (x-6)(x-2) = 0.$$

Exercício 3-Resolução

<u>Guelli[11], p.7- Exercício 1</u>

Na Índia antiga, um passatempo popular dos brâmanes (tipo de casta), era uma competição pública com quebra-cabeças matemáticos, os sutras (ditos populares, em formas de versos). Desafio você a resolver esse!

```
Alegravam-se os macacos
divididos em dois bandos:
sua oitava parte ao quadrado
no bosque brincava.

Com alegres gritos, doze
gritando no campo estão.
```

```
Sabes quantos macacos há
na manada no total?
```

Resolução:

Inicialmente, devemos passar o sutra para a linguagem matemática:

Alegravam-se os macacos	x
divididos em dois bandos: sua oitava parte ao quadrado no bosque brincava	$(\frac{x}{8})^2$
Com alegres gritos, doze gritando no campo estão.	12
Sabes quantos macacos há na manada no total?	$x = (\frac{x}{8})^2 + 12$

Desenvolvendo a equação, temos:

$x = (\frac{x}{8})^2 + 12 \Rightarrow x = (\frac{x^2}{64}) + 12 \Rightarrow^{(*1)} x^2 - 64x + 768 = 0$. $(*1)$ Fazendo o mínimo múltiplo comum na equação, para facilitar a manipulação algébrica.

Completando o quadrado, temos:

$$x^2 - 64x + 768 + 256 - 256 = 0 \Rightarrow x^2 - 64x + 1024 - 256 = 0 \Rightarrow (x-32)^2 - 256 = 0 \Rightarrow (x-32)^2 = 256 \Rightarrow x - 32 = \pm 16 \Rightarrow x = 48 \text{ ou } x = 16.$$

Isto quer dizer que temos duas respostas possíveis: podemos ter um total de 16 macacos ou um total de 48 macacos.

Exercício 4-Resolução [Exercício-Oscar Guelli, p.5-suplemento de trabalho-adaptado [11]] No *Al-jabr*, Al-Khwarizmi interpreta geometricamente através do cálculo de áreas de figuras planas, equações quadráticas. Observe um exemplo:

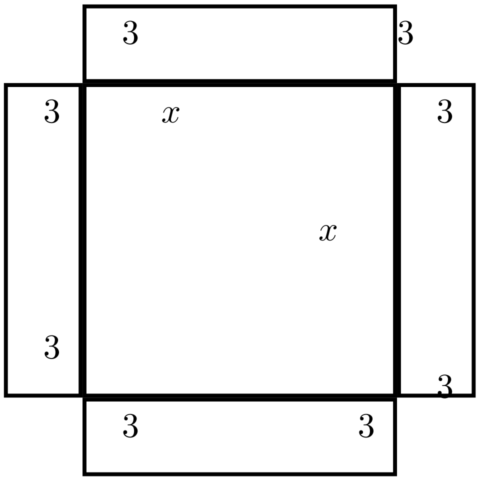


Figura 102 – Interpretação geométrica da equação quadrática do exercício

Essa figura tem área 64 *u.a.*. Para Al-Khwarizmi essa figura representava uma equação quadrática. Qual seria? Use seu método de resolução (complete o quadrado) e descubra a raiz positiva dessa equação.

Vamos começar, nos lembrando que como Al-Khwarizmi, temos um quadrado maior, de medida x e 4 retângulos de área $3x$ unidades de área ($u.a$), cada um. O que quer dizer que temos a equação que representa a área: $x^2 + 12x = 64$. Temos que completar os quadrados, que faltam na figura, para ficar um quadrado maior, de lado $3 + x + 3$. Temos ali, 4 quadrados de medida 3 unidades, ou seja: temos que completar com $4.(3.3) = 36$ *u.a.*. Isto quer dizer que, devemos somar e subtrair 36 à equação:

$$x^2 + 12x + 36 - 36 = 64 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 64 + 36$$

$$\Rightarrow (x + 6)^2 = 100 \Rightarrow x + 6 = \pm 10$$

$\Rightarrow x = 10 - 6 = 4$ ou $x = -10 - 6 = -16$ (que deve ser descartado, pois não existe quadrado de medida negativa)

$$\Rightarrow x = 4.$$

A equação é $x^2 + 12x = 64$ e a raiz positiva dessa equação é 4.

Exercício 5-Resolução (CefetQ- 2005) O custo das fotos EM-383 foi de 400 reais e deveria ser dividido em partes iguais por todos os alunos da turma. No entanto, 5 alunos deixaram de pagar a sua parte. Por conta disso, cada um dos demais teve de pagar 4 reais a mais. Determine o número total de alunos na turma.

Precisamos que 400 reais sejam divididos para o total de alunos (a, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$), encontrando , então a quantidade (q, com $q \in \mathbb{R}$, e $q > 0$, pois a foto não será de graça!) do dinheiro, ou seja: $\frac{400}{a} = q$.

Passando da linguagem corrente para a linguagem matemática, temos: 5 alunos deixaram de pagar a sua parte: $a - 5$. E cada um dos demais teve de pagar 4 reais a mais: $(q + 4)$. Note que se multiplicarmos a quantidade de alunos pela quantidade de dinheiro, teremos da mesma forma, 400 reais, pois o preço das fotos não se alterou, ou seja:

$$(a - 5)(q + 4) = 400.$$

De fato, como $q = \frac{400}{a}$, substituindo, temos:

$$(a - 5)(\tfrac{400}{a} + 4) = 400$$

$$\Rightarrow (a - 5)4(\tfrac{100}{a} + 1) = 400.$$

Dividindo toda expressão por 4, fica:

$$(a - 5)(\tfrac{100}{a} + 1) = 100$$

.Como o mínimo múltiplo comum no caso é a e aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$\Rightarrow (a - 5)(100 + a) = 100a$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a - 500 = 0$$

Somando e subtraindo $\frac{25}{4}$ a ambos os membros, para completar o quadrado, temos:

$$a^2 - 5a + \tfrac{25}{4} - \tfrac{25}{4} - 500 = 0 \Rightarrow (a - \tfrac{5}{2})^2 = 500 + \tfrac{25}{4}$$

$$\Rightarrow (a - \tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{2025}{4} \Rightarrow (a - \tfrac{5}{2}) = \sqrt{\tfrac{2025}{4}}$$

$$\Rightarrow (a - \tfrac{5}{2}) = \pm\tfrac{45}{2}.$$

De $(a - \frac{5}{2}) = \frac{45}{2}$, temos que $a = \frac{45+5}{2} = 25$. Por outro lado, se $(a - \frac{5}{2}) = -\frac{45}{2}$, temos que $a = \frac{-45+5}{2} = -20$ e como não se pode ter -20 alunos, o total da turma é de 25 alunos.

Exercício 6-Resolução (EPCAR-2001) Os números x, tais que o inverso de seu quadrado é igual ao inverso de sua soma com 2, constituem um subconjunto de cujos elementos somados equivalem a :

a) 0

b) 3

c) 2

d) 1

Passando da linguagem corrente para linguagem matemática:

O inverso de seu quadrado: $\frac{1}{x^2}$;

O inverso de sua soma com 2: $\frac{1}{x+2}$.

$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x+2}$. Multiplicando ambos os membros por x^2 e por $(x+2)$, fica: $x^2 - x - 2 = 0$. Somando e subtraindo $\frac{1}{4}$ para completar o quadrado, temos:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

Ou seja:

$$(x - \frac{1}{2}) = \pm\frac{3}{2}.$$

De $(x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, temos que:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

E de $(x - \frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$, temos que:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$$

De onde temos que a soma procurada é $2 - 1 = 1$: alternativa d.

A.2 A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Exercício 7-Resolução Observe outra obra de Sacilotto:

Dela retiramos as seguintes figuras e montamos a sequência:

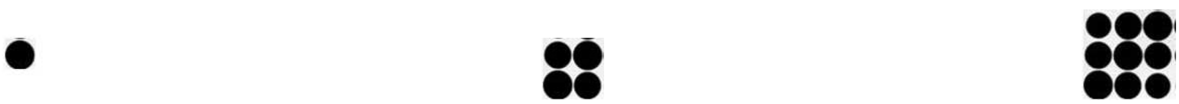


Figura 103 – Sequência de das bolinhas em série da obra de Sacilotto 8079, retiradas a partir do canto esquerdo inferior da obra.

Observe o padrão desenhado e desenhe a próxima figura da sequência. Depois resolva as questões:

a) Quantas bolas formam a figura 1? E a figura 2? E a figura 3 dessa sequência?

b) Quantas bolas terá a figura 5 dessa sequência?

c) Qual a expressão que indica o número de bolinhas da figurada posição que ela ocupa na sequência?

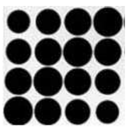
d) Qual a posição da figura que tem 2500 bolinhas na sequência?

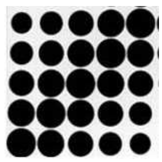
e) Usando as definições dadas no início da seção, justifique através de resultados, de forma simples, que essa é uma função quadrática, segundo as definições dadas.

a) É fácil ver a figura 1 da sequência tem somente uma bola, que a figura 2 dessa mesma sequência, tem 4 bolinhas e que a figura 3 dessa sequência tem 9 bolinhas. Note que as quantidades são quadrados perfeitos: primeira figura da sequência: $= 1^2$, segunda figura da sequência: $=2^2 = 4$, terceira figura da sequência:$= 3^2 = 9$.

b) Quantas bolas terá a figura 5 dessa sequência? Nesse caso, desenhando, fica fácil:

Figura 104 – Figuras 4 e 5 da sequência, respectivamente.





Contando, vemos que são 25 bolinhas na figura 5 da sequência.

c) Qual a expressão que indica o número de bolinhas da figurada posição que ela ocupa na sequência?

Posição	número de bolinhas da figura na sequência
1	1
2	4 (aumentou em 3 bolinhas)
3	9 (aumentou em 5 bolinhas)
4	16 (aumentou em 7 bolinhas)
5	25 (aumentou em 9 bolinhas)
...	...
posição (p)	p^2 = número de bolinhas

Temos então, que o número de bolinhas (b) em função da posição (p), é dado por $b(p) = p^2$, com $p, b \in \mathbb{N}$.

d) Qual a posição da figura que tem 2500 bolinhas na sequência?

Usando $b(p) = p^2$, temos que $b(p) = p^2 = 2500 \Rightarrow p = 50$, pois descartamos o -50 pois não existem -50 bolinhas, é claro.

e) Usando as definições dadas no início da seção, justifique através de resultados, de forma simples, que essa é uma função quadrática, segundo as definições dadas.

Analisando o exemplo acima, observamos que temos uma P.A. (progressão aritmética), crescente, de primeiro termo 1 de razão 1, nas posições, dada por:

$x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...$, que seria assim:

$$1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...$$

Se aplicarmos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, que é uma função contínua nos reais e quadrática, à sequência acima, teremos:

$$a_1 = f(x_1) = 1,\ a_2 = f(x_2) = 4,\ a_3 = f(x_3) = 9,\ ...,\ a_n = f(x_n) = n^2,\ ...,$$

que não é uma progressão aritmética de primeira ordem, muito menos constante, mas examinando a sequência formada pelas diferenças sucessivas (Δa_n), onde:

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 3;$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 5;$$

$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = 7;$$

$$... = ... - ... = ...;$$

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 1.$$

Que é uma progressão aritmética de razão 2, primeiro termo 3, não constante. Isso nos mostra que a sequência

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 9,\ ...,\ a_n = n^2,\ ...$$

é uma progressão aritmética de segunda ordem e como a sequência na qual o termo de posição n é um polinômio em n, de grau 2, é uma progressão de ordem 2 e reciprocamente, se (a_n) é uma P.A. de ordem 2, então (a_n) é um polinômio de grau 2 en n. Observando então, que segundo a definição, é uma função quadrática.

O aluno vai reparar que é o mesmo problema do exemplo, com uma nova "roupagem". Apesar de simples o exercício realmente precisava sê-lo, pois a abordagem aqui é para o aluno do primeiro ano do ensino médio.

O objetivo dessa atividade é descobrir de que modo o número de bolinhas depende da posição da figura e desse modo, ao despertar o interesse do aluno, levá-lo ao questionamento, criando hipóteses e testando-as, para que ele construa seu conhecimento acerca do tema, de forma que ele se sinta apto a adquirir novos conhecimentos, para aprofundamento posterior. Evitando, dessa forma, a mera repetição de modelos prontos e dessa forma, contribuindo para o desenvolvimento de seu pensamento crítico, de forma que ele sinta-se pronto não apenas para adquirir novos conhecimentos, mas também de forma a contribuir para a transformação da realidade à sua volta: seja ela social, política, econômica, etc..

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formular questões, peguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (P.C.N.[4], p.69-70)

Exercício 8 -Resolução A resolução da maioria dos problemas de otimização necessita de conhecimentos de Cálculo Diferencial e isso foge ao objetivo desse trabalho. Resolver este tipo de problema, quando o mesmo é modelado por uma função quadrática, chega a ser simples. Assim, na maioria dos problemas de otimização envolvendo funções quadráticas, a tarefa mais difícil é achar a função que modela o problema. Feito isto, resolver o problema se resume em achar as coordenadas do vértice do gráfico da função (valor máximo ou mínimo, conforme o caso, da função quadrática).

> "O valor mínimo (ou máximo) da função quadrática $f(x)$ é o menor (ou maior) valor possível que pode assumir $f(x)$, quando fazemos x percorrer o conjunto dos reais."(Iniciação à matemática, p.75)[16].

Entenda nesse caso, $f(x)$, função contínua, real, quadrática .

Uma outra forma de trabalhar o conceito de otimização, de forma que não se torne uma mera repetição de modelo, é "forçar"o aluno a companhar o raciocínio de outro, procurando "falhas", ou pequenos equívocos de conceitos (lacunas na construção do seu conhecimento matemático) que geralmente, levam a grandes equívocos. Vejamos um exemplo :

Exercício: O departamento de uma indústria de motores para piscina estimou que o custo unitário de produção, C, em real, de um tipo de motor decresce em função do número x de unidades fabricadas por dia, de acordo com a função

$$C(x) = 10x^2 - 410x + 4500,$$

com $x > 0$. Qual é o custo unitário mínimo pra a produção desse tipo de motor?

Resolução O custo unitário mínimo, em reais, é o valor da ordenada y_v, do vértice da parábola que representa a função C: $y_v = -\Delta/4a = 11900/40$ $\Rightarrow y_v = 297{,}50$. Logo, o custo unitário mínimo de produção é 297,50 reais.

Esse tipo de exercício, faz com que o aluno seja tirado da simples "repetição de modelos"e padrões. Nesse caso, devemos primeiro pensar que são motores e o custo de venda é unitário. Isto quer dizer que devemos encontrar valores inteiros e positivos, para números de motores. Note também que comparando a função com $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que $a = 10 > 0 \Rightarrow$ custo será mínimo, temos ainda que $b = -410$, e $c = 4500$.

Calculando $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{410}{2.10} = 20,5$ (número de motores para atingir o custo mínimo). Mas o custo é unitário, os valores inteiros mais próximos de $20,5$ seriam 20 ou 21 motores. Temos então, que analisar as duas possibilidades: 20 ou 21 motores.

De 20 motores, substituindo 20 na função, no lugar de x, encontramos o custo procurado, que poderá ser o mínimo:

$C(20) = 10.20^2 - 410.20 + 4500 = 300$ reais. Por outro lado, substituindo-se 21 na função, obtemos: $C(21) = 10.21^2 - 410.21 + 4500 = 300$. De qualquer forma, vemos que encontramos o custo mínimo de procurado: 300 reais. O erro do problema, começou ao não considerar um valor inteiro e positivo para número de motores, o que ocasionou um equívoco na resposta. Ele deveria ter analisado melhor o enunciado, erro causado muitas vezes por problema em sua interpretação.

Exercício 9-Resolução Determine k e p, para que o ponto de otimização da parábola de equação $y = x^2 - kx + p$ seja $(1, 2)$. Classifique-o como de ponto de máximo ou ponto de mínimo.

Temos que nesse caso, $a = 1$, $b = -k$, $c = p$ e como:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \text{ fica } x_v = \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$$

Temos ainda, que:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \text{ fica } y_v = -\frac{k^2-4p}{4} = 2 \Rightarrow -k^2 + 4p = 8.$$

Como $k = 2$, substituindo, fica: $-4 + 4p = 8 \Rightarrow 4p = 8 + 4 \Rightarrow p = 3$. Note também, que como $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e a parábola possui ponto de mínimo. Para que tenha vértice $(1, 2)$ devemos ter: $k = 2$ e $p = 3$.

Exercício 10-Resolução De todos os retângulos de perímetro 60 cm, determine o de área máxima.

Seja $2p$, o perímetro do retângulo, ou seja, $2p = 60$ cm, x a largura do retângulo e y o comprimento do retângulo. Temos então, que :

$$2p = 2x + 2y = 60 \Rightarrow x + y = 30 \Rightarrow x = 30 - y.$$

Calculando a área do retângulo, por definição, a área $A = x.y$, o que quer dizer que:

$$A(x) = x(30 - x) = 30x - x^2.$$

Donde comparando com $y = ax^2 + bx + c$, temos: $a = -1$, $b = 30$, $c = 0$.

Queremos a área máxima, que será dada pelo ponto do domínio que otimiza a função:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{-2} = 15\text{cm., que é a largura máxima do retângulo.}$$

Aplicando esse valor em $y = 30 - x$, temos que ele nos fornece o comprimento máximo, que é $y = 30 - 15 = 15$cm..

Então, a área máxima será:

$$A(15) = 30.15 - 15^2 = 450 - 225 = 225.$$

Exercício 11-Resolução Sejam os pares de números reais cuja a soma é 16, determine aquele cujo produto é máximo.

Sejam a e b, dois números reais, onde $a + b = 16 \Rightarrow a = 16 - b$. Queremos encontrar aquele cujo produto seja máximo, ou seja: $P = a.b \Rightarrow P(b) = (16 - b)b = 16b - b^2$. Donde comparando com $y = ax^2 + bx + c$, $a = -1$, $b = 16$, $c = 0$.

Queremos o produto máximo, que será dada pelo ponto do domínio que otimiza a função:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-2} = 8.$$

Aplicando esse valor em $a = 16 - b$, temos que ele nos fornece o valor de b, para o produto máximo, que é $a = 16 - 8 = 8$. Note então, que o produto máximo será $8.8 = 64$.

Exercício 12-Resolução Suponha que a potência elétrica de um gerador seja expressa por $P = 2i - i^2$ (Watts). Calcule a intensidade da corrente elétrica necessária para se obter a potência máxima do gerador.

Se compararmos com $y = ax^2 + bx + c$: $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$. Queremos a corrente que fornece a potência máxima do gerador, que será dada pelo ponto do domínio que otimiza a função:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Aplicando esse valor em na função, temos :$P(1) = 2.1 - 1^2 = 1\ Watt$ e ele nos fornece o valor de P, a potência máxima do gerador.

Exercício 13-Resolução O movimento de um projétil, lançado verticalmente para cima, é descrito por:

$$y = -50x^2 + 250x \text{ , com } x,\, y \in \mathbb{R} \text{ .}$$

Onde y é a altura em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. Qual a altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar?

Para achar o tempo que o projétil atinge a altura máxima, devemos encontrar o vértice da parábola (x_v):

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

Onde:

$$a = -50,\ b = 250,\ c = 0.$$

Assim:

$$x_v = \frac{-250}{-100} = 2,5 \text{ segundos.}$$

Substituindo $x = 2,5$ na equação, teremos o valor da altura máxima:

$$y = -50(2,5)^2 + 250(2,5) = \frac{-625+1250}{2} = 312,5m.$$

Para calcular o tempo que o projétil permanece no ar, devemos calcular as raízes: o tempo procurado corresponde à diferença entre as raízes: $|x' - x"|$. Assim:

$$-50x^2 + 250x = 0 \Rightarrow -50x(x-5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ segundos ou } x = 5 \text{ segundos.}$$

De modo que $|5 - 0| = 5$ segundos. Logo, ele atinge a altura máxima de $312,5\ m$, e ele fica no ar por 5 segundos.

Exercício 14-Resolução (UFRJ-2007)[14] Se um cabo suporta um peso homogêneo muito maior que seu próprio peso, ele toma a forma de uma parábola. As torres $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ de uma ponte pênsil medem 200 m e são perpendiculares à pista de rolamento $\overline{DC}$, que mede 1000 metros. O cabo de sustentação preso às torres nos pontos A e B tem a forma de uma parábola vértice no ponto médio de $\overline{DC}$, conforme a figura a seguir:

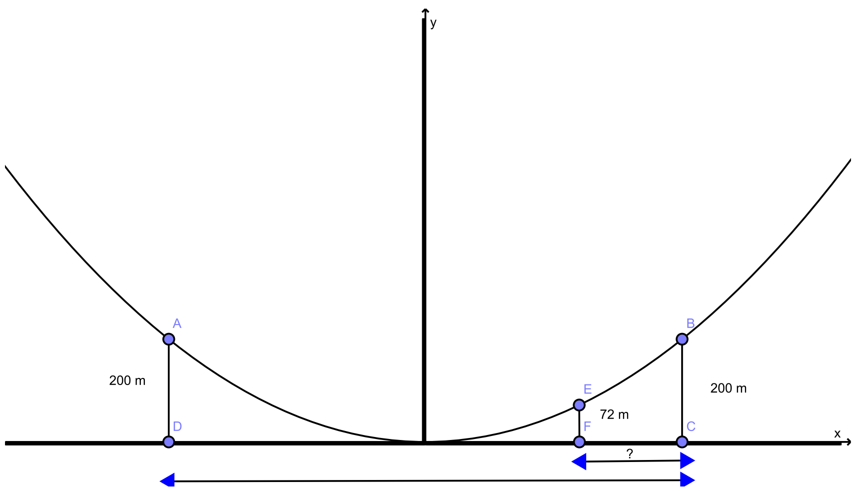


Figura 105 – Ponte pênsil

a) Determine, em relação ao sistema xoy a equação da parábola de vértice O (ponto médio de DC), que passa pelos pontos A e B.

Observando a parábola, temos as coordenadas dos pontos que pertencem ela: $A(-500, 200)$, $B(500, 200)$, $V(0, 0) \Rightarrow c = 0$ (interseção da parábola com eixo oy). Queremos encontrar a função $f(x) = y = ax^2 + bx + c$; a, b e $c \in \mathbb{R}$. Para tal, usaremos as coordenadas e o valor de c, resolvendo um sistema em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \; Substituindo(-500, 200), c = 0 \\ ax^2 + bx + c = y \; Substituindo(500, 200), c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25000a - 500b = 200 \\ 25000a + 500b = 200 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \tfrac{1}{125} \text{ e } b = 0 \Rightarrow y = \tfrac{x^2}{125}.$$

b)Se o cabo de aço $\overline{EF}$ de 72 m de comprimento é preso ao cabo de sustentação no ponto E, e é perpendicular à pista de rolamento no ponto F (conforme mostra a figura), calcule a medida de $\overline{FC}$.

Note que:

$$\overline{EF} = 72\ m,\ y = 72 \Rightarrow 72 = \tfrac{x^2}{125} \Rightarrow x = 30\sqrt{10}$$

(o valor negativo foi desprezado, pois trata-se de medida).

Exercício 15-Resolução Esboce as funções abaixo, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontrando a imagem das funções:

a) $y = 3x^2$. Note que: $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$. A função possui ponto mínimo, pois $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Para encontrar a imagem, precisamos encontrar o ponto mínimo da função.

Como: $x_v = \frac{-b}{2a} = 0$, substituindo $x = 0$ na função, temos que $y = 0 \Rightarrow V(0, 0) \Rightarrow \text{Im[f(x)]} = [0, \infty[$.

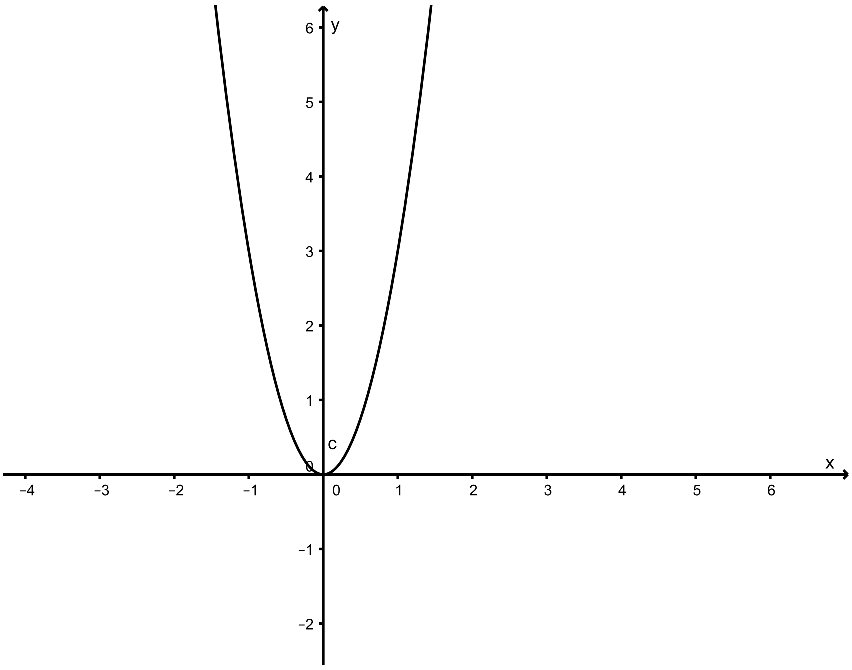


Figura 106 – $y = 3x^2$.

b) $y = -4x^2$. Note que: $a = -4$, $b = 0$, $c = 0$. A função possui ponto máximo, pois $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Para encontrar a imagem, precisamos descobrir o ponto máximo da função.

Como: $x_v = \frac{-b}{2a} = 0$, substituindo $x = 0$ na função, temos que $y = 0 \Rightarrow V(0,0) \Rightarrow \text{Im}[\text{f(x)}] =]-\infty, 0]$.

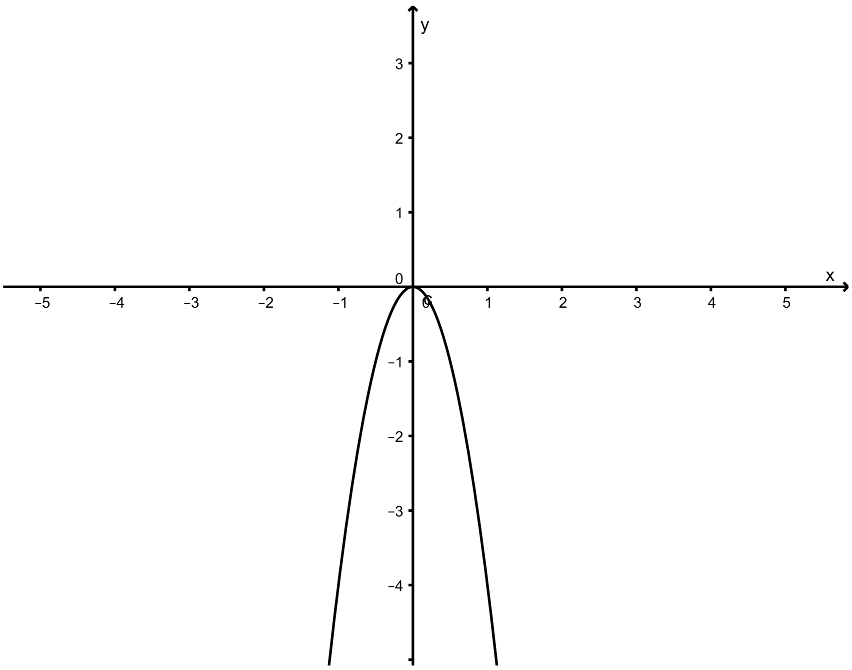


Figura 107 – $y = -4x^2$.

c) $y = x^2 + 4x + 3$.

Note que: $a = 1$, $b = 4$, $c = 3$. A função possui ponto mínimo, pois $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Para encontrar a imagem, precisamos descobrir o ponto mínimo da função.

Como: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$, substituindo $x = -2$ na função, temos que:

$$y = -1 \Rightarrow V(-2, -1) \Rightarrow \text{Im[f(x)]=}[-1, \infty[.$$

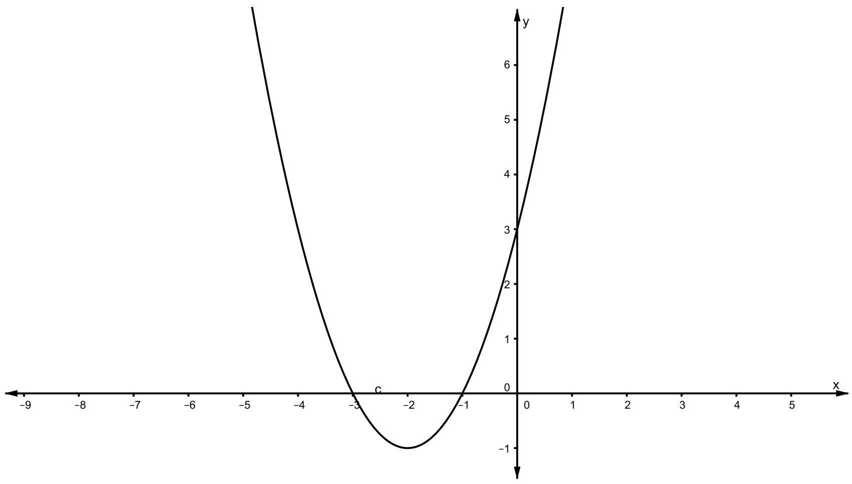


Figura 108 – $y = x^2 + 4x + 3$.

d) $y = -x^2 + 4x + 5$.

Note que: $a = -1$, $b = 4$, $c = 5$. A função possui ponto máximo, pois $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Para encontrar a imagem, precisamos descobrir o ponto máximo da função.

Como: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$, substituindo $x = 2$ na função, temos que $y = 9 \Rightarrow V(2, 9) \Rightarrow \text{Im[f(x)]} =]-\infty, 9]$.

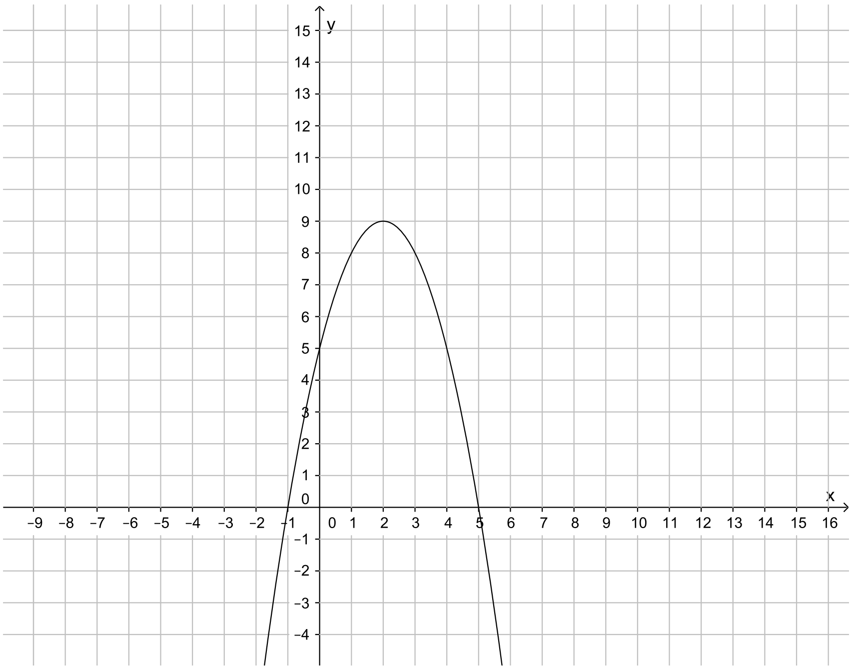


Figura 109 – $y = -x^2 + 4x + 5$.

e) $y = x^2 - 8x + 12$.

Note que: $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$. A função possui ponto mínimo, pois $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Para encontrar a imagem, precisamos descobrir o ponto mínimo da função.

Como: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$, substituindo $x = 4$ na função, temos que $y = -4 \Rightarrow V(4, -4) \Rightarrow$ Im[f(x)]=$[-4, \infty[$.

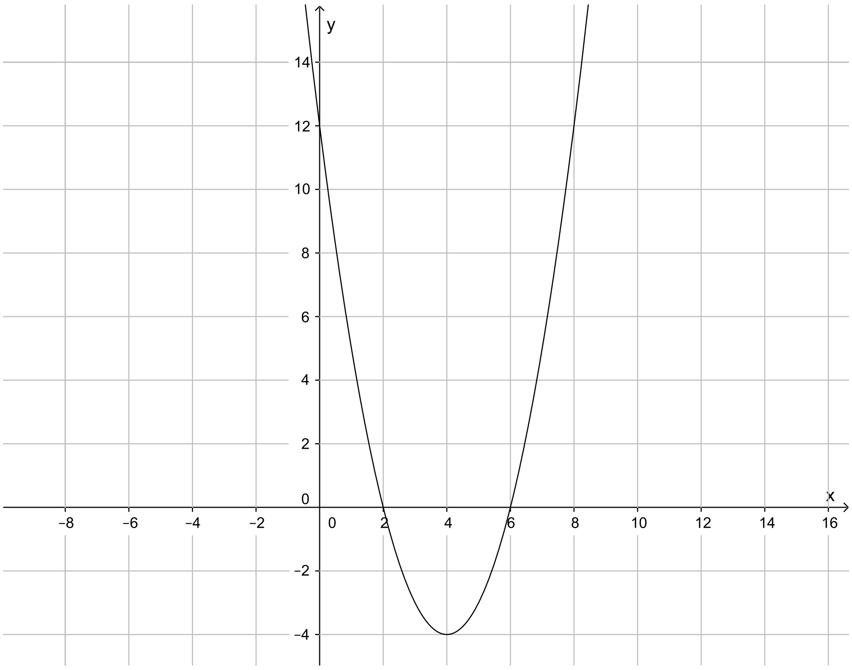


Figura 110 – $y = x^2 - 8x + 12$.

Exercício 16-Resolução Observe o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com a,b,$c \in \mathbb{R}$.

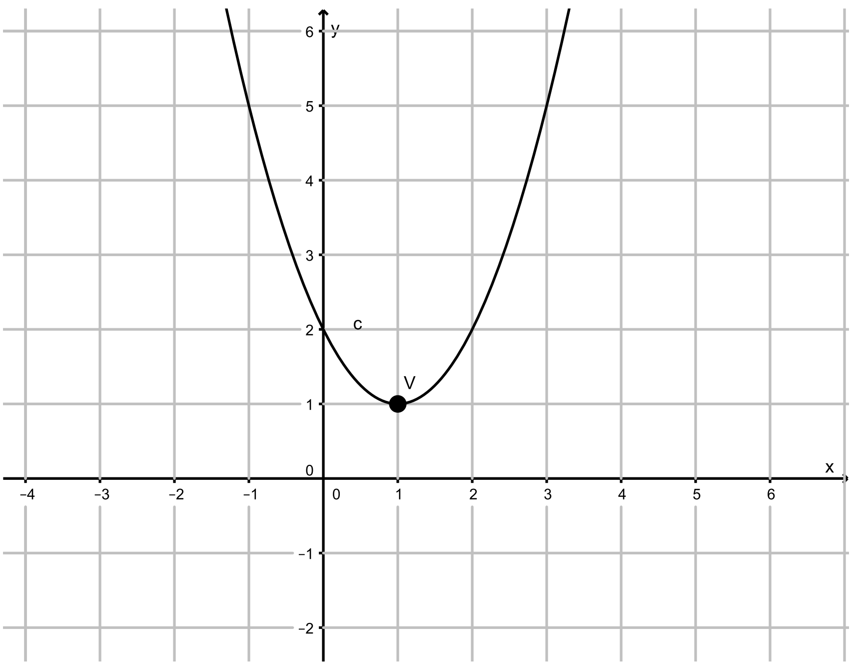


Figura 111 – Gráfico da função dada.

a) Calcule o valor de a, b e c.

É fácil ver o valor de c (coordenada de interseção do gráfico com eixo *oy* é $(0, 2)$). Temos então: $c = 2$. Para encontrarmos o valor de a e b, precisamos de dois pares ordenados que pertencem à parábola, por exemplo, $(1,1)$, $(3,5)$. Note que poderiam ser outros pares quaisquer, desde que pertencessem à parábola.

A parábola de concavidade voltada para cima é do tipo:$y = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$. Para encontrar o valor de a e b, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

Substituindo $c = 2$ e os pontos $(1,1)$ e $(3,5)$, fica :

$$\begin{cases} a + b + 2 = 1 \\ 9a + 3b + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = 3 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação do sistema por -3, fica:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ -3a - b = -1 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição, temos que $a = 1$. Substituindo $a = 1$ em $a + b = -1$, concluímos que $b = -2$. De sorte que já encontramos $c = 2$, basta substituir a, b, e c em $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = x^2 - 2x + 2$.

b) Encontre o valor de $f(5)$.

Como $y = x^2 - 2x + 2 = f(x)$, substituindo $x = 5$, fica $f(5) = 5^2 - 2.5 + 2 = 17$

c) Encontre a imagem da função.

É fácil ver que, como o vértice da parábola tem coordenadas $V(1,1)$, a parábola tem concavidade voltada para cima, a função tem valor mínimo, ou seja: é limitada inferiormente, não superiormente. A imagem da função consiste em $Im[f(x)] = [1, \infty[$

Exercício 17-Resolução Faça o estudo do sinal das funções abaixo, com função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em cada caso:

Antes de mais nada, deve-se lembrar que:

- A(s) raiz(es) da função, se existir(em) será(ão) encontrada(s) através da interseção do eixo x com a função;

- $f(x) > 0$ será dado pelos pontos do domínio que fornecem valores onde a função assume valores positivos;

- $f(x) < 0$ será dado pelos pontos do domínio que fornecem valores onde a função assume valores negativos.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Para fazer o estudo do sinal, é necessário primeiro encontrar as raízes reais, se elas existirem. Para tal, basta fazer $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Completando o quadrado, somando e subtraindo $\frac{25}{4}$, temos que:

$$x^2 - 5x + 6 + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0,$$

equivale a:

$$(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4} - 6 \Rightarrow (x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Ou seja:

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}. \text{ De } x - \frac{5}{2} = +\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

Por outro lado, de:

$$x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Temos então duas raízes reais: 2 e 3. Note ainda que: como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e a função possui ponto mínimo, ainda pela definição apresentada no trabalho, teríamos:

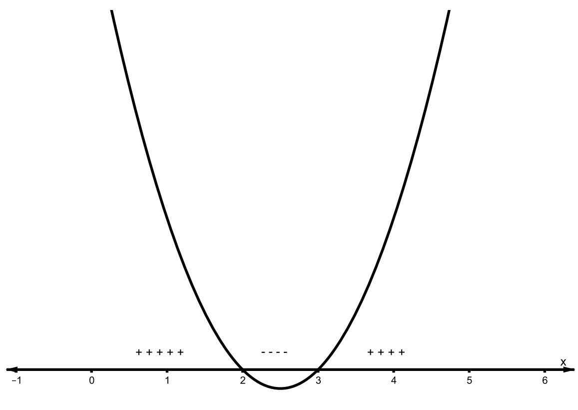


Figura 112 – Pequeno estudo do sinal da função em questão

Ou seja:

$$\begin{cases} f(x) = 0 : \{x \in \mathbb{R}; x = 2 \text{ ou } x = 3\} \\ f(x) > 0 : \{x \in \mathbb{R}; x < 2 \text{ ou } x > 3\} \\ f(x) < 0 : \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 3\} \end{cases}$$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4.$

Para fazer o estudo do sinal é necessário primeiro, encontrar as raízes reais, se elas existirem. Para tal, basta fazer $f(x) = 0 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 4$. Arrumando, temos que a equação equivale a $(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Temos então, uma raiz real de multiplicidade 2. Note ainda que: como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima, a função possui ponto mínimo e pela definição apresentada no trabalho, teríamos:

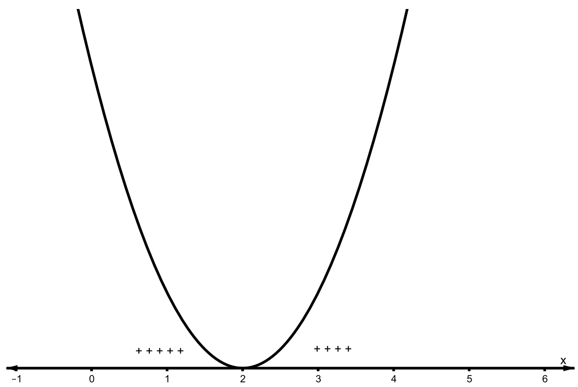


Figura 113 – Pequeno estudo do sinal da função em questão.

Ou seja:

$$\begin{cases} f(x) = 0 : \{x \in \mathbb{R}; x = 2\} \\ f(x) > 0 : \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} \\ f(x) < 0 : \{\nexists x; x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

c) $f(x) = x^2 + 9.$

Para fazer o estudo do sinal é necessário primeiro, encontrar as raízes reais, se elas existirem. Para tal, basta fazer

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9.$$

Note que essa equação quadrática não tem raízes reais, pois não existe número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo. Note ainda que: como

$a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e a função possui ponto mínimo. Pela definição apresentada no trabalho, teríamos:

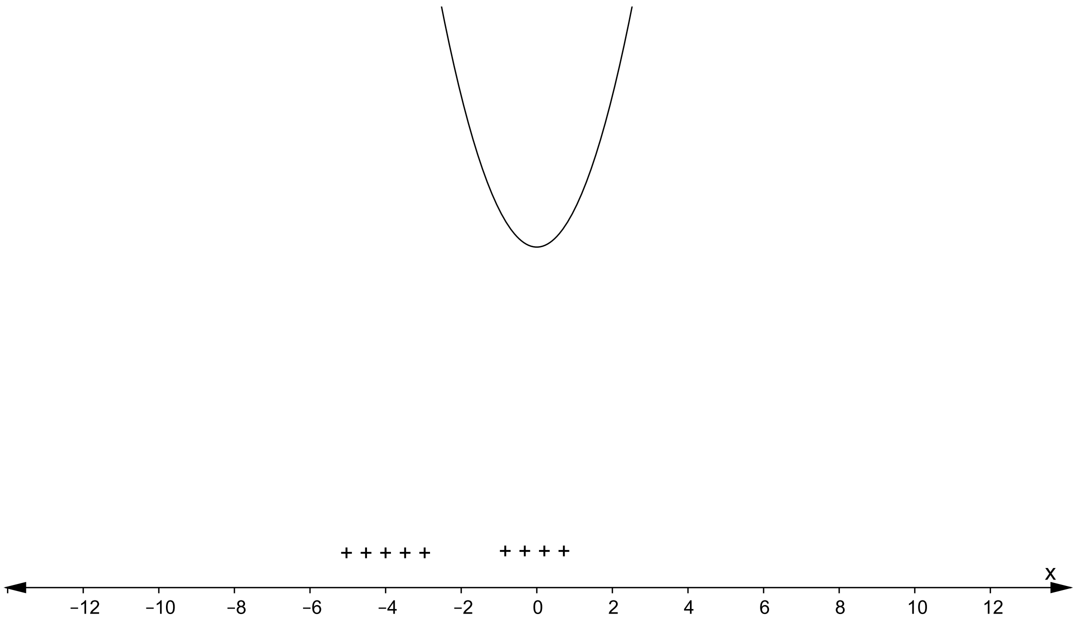


Figura 114 – Pequeno estudo do sinal da função em questão

Ou seja:

$$\begin{cases} f(x) = 0 : \{\nexists x; x \in \mathbb{R}\} \\ f(x) > 0 : \{x = \mathbb{R}\} \\ f(x) < 0 : \{\nexists x; x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

d) $f(x) = -x^2 - 9$.

Para fazer o estudo do sinal é necessário primeiro encontrar as raízes reais, se elas existirem. Para tal, basta fazer:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9.$$

Note que essa equação quadrática não tem raízes reais, pois não existe número real que elevado ao quadrado, resulte em um número negativo. Note ainda que: como $a = -1 < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo e a função possui ponto máximo. Pela definição apresentada no trabalho, teríamos:

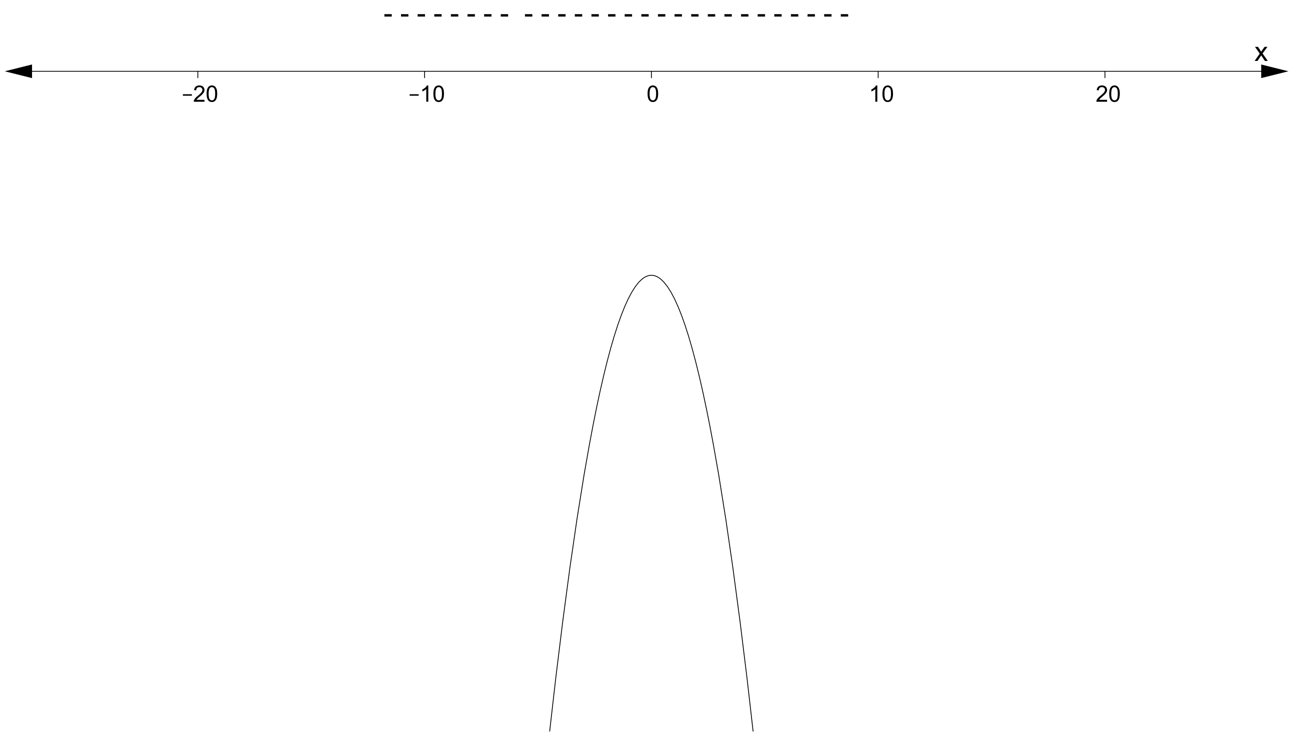


Figura 115 – Pequeno estudo do sinal da função em questão

Ou seja:

$$\begin{cases} f(x) = 0 : \{\nexists x; x \in \mathbb{R}\} \\ f(x) > 0 : \{\nexists x; x \in \mathbb{R}\} \\ f(x) < 0 : \{x = \mathbb{R}\} \end{cases}$$

A.3 INEQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Exercício 18-Resolução Deseja-se construir uma galpão de formato retangular. O terreno onde o galpão será construído, tem $180m$ de perímetro. Calcule as dimensões do galpão, sabendo que sua área deve ser menor que 1125 m^2.

Seja $2p$ o perímetro do retângulo, ou seja: $2p = 180\ cm$, x a largura do retângulo e y o comprimento do retângulo. Temos então, que :

$$2p = 2x + 2y = 180 \Rightarrow x + y = 90 \Rightarrow x = 90 - y.$$

Calculando a área do retângulo, por definição, a área $A = x.y$, o que quer dizer:

$$A(x) = x(90 - x) = 90x - x^2.$$

Queremos que a área seja menor que 1125 m:

$$90x - x^2 < 1125 \Rightarrow -x^2 + 90x - 1125 < 0.$$

Para resolver a inequação quadrática, vamos igualá-la com zero e depois fazer o estudo do sinal da equação. Conseguiremos visualizar os pontos do domínio da função, onde ela é negativa. Ou seja:

$$-x^2 + 90x - 1125 < 0.$$

Comparando com $ax^2 + bx + c$, $a = -1$, $b = 90$, $c = -1125$.

Somando e subtraindo 2025 para completar o quadrado, fica:

$$-(x^2 - 90x + 2025) + 2025 - 1125 = 0 \Rightarrow -(x^2 - 90x + 2025) = -900 \Rightarrow -(x - 45)^2 = -900.$$

Multiplicando ambos os membros por -1 e arrumando, temos:

$$x - 45 = \pm 30. \text{ De } x - 45 = 30 \Rightarrow x = 75.$$

De:

$$x - 45 = -30 \Rightarrow x = 15.$$

Fazendo o estudo do sinal da função quadrática, temos:

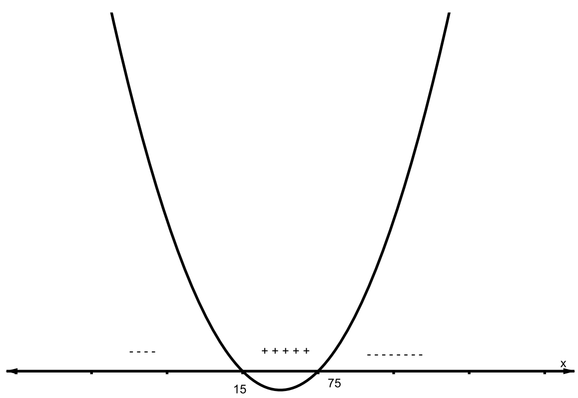


Figura 116 – Pequeno estudo do sinal da função em questão.

Queremos a solução de:

$$-x^2 + 90x - 1125 < 0,$$

ou seja: onde o intervalo é negativo. Isto quer dizer que:

$$\{x \in \mathbb{R}; x > 75 \ ou \ x < 15\}$$

Isso, se não fosse um problema envolvendo medida de terreno...Neste caso, precisamos nos lembrar que $x > 0$ e $x < 180$, pois não existe terreno de medida menor ou igual a zero. Atendendo a todas restrições e observando a resposta inicial, temos que $0 < x < 15$ ou $75 < x < 180$. A resposta procurada, deve ser então:

$$\{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 15 \ ou \ 75 < x < 180\}$$

.

De onde temos que:

$$0 < x < 15 \Rightarrow 75 < y < 90 \text{ ou se } 75 < x < 180 \Rightarrow 15 < y < 90.$$

Exercício 19-Resolução A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius), é determinada em função da hora h do dia, pela expressão:

$$t(h) = -h^2 + 22h - 96.$$

Responda:

a) Em quais horários a temperatura é $0^\circ C$?

b) Em que período(s) do dia a temperatura é positiva? E negativa?

c) Em que período(s) do dia a temperatura é crescente? E decrescente?

d) Em que horário a temperatura é máxima? Qual é a temperatura máxima?

a) Para encontrar quando a temperatura se anula, devemos fazer $t(h) = -h^2+22h-96 = 0$, ou seja: encontrar as raízes da função. Como $a = -1$, $b = 22$ e $c = -96$, temos que:

$$\Delta = 22^2 - 4(-1)(-96) = 484 - 384 = 100 \Rightarrow h = 16 \text{ ou } h = 6.$$

De forma que a temperatura se anula às 6 horas e às 16 horas.

b) Para encontrar quando a temperatura é positiva, negativa, ou seja: diferente de zero, devemos fazer o estudo do sinal da função $t(h) = -h^2 + 22h - 96 = 0$. Pela letra a, temos que as raízes são 6 e 16. E fazendo o estudo do sinal, como $a < 0$, fica:

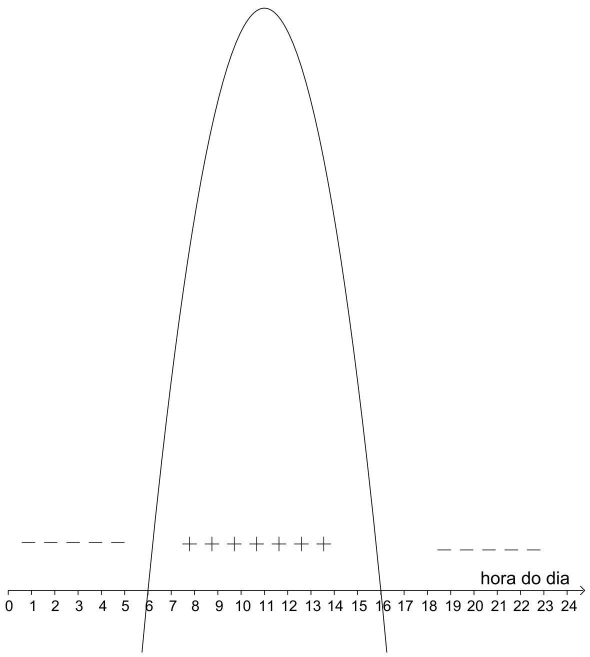


Figura 117 – Estudo do sinal da função $t(h) = -h^2 + 22h - 96$

O que nos mostra que a temperatura fica negativa entre 16 horas da tarde e 6 horas da manhã. Do mesmo modo, é fácil ver que a temperatura fica positiva entre 6 horas da manhã e 16 horas da tarde.

c) Para encontrar o período onde a temperatura é crescente ou decrescente, precisamos encontrar onde ele é máxima, pois em b já vimos que a função tem a concavidade voltada para baixo, onde $a < 0$. Procuramos então o máximo atingido pela função. Por b, temos que:

$$\Delta = 100 \Rightarrow y_v = \frac{-100}{4(-1)} = 25 \text{ graus Celsius.}$$

O que nos mostra que a temperatura é crescente antes de 25 graus Celsius. Calculando:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-22}{2(-1)} = 11 \text{ horas,}$$

onde a temperatura se torna máxima no dia. Note que a temperatura é crescente, a partir de 0 e antes de 11 horas. Ela se inicia em -96 graus Celsius. A temperatura se torna decrescente após 11 e antes de 24 horas, chegando a -144 graus Celsius.

d) Pela letra c, temos que a temperatura máxima é atingida às 11 horas do dia, sendo de 25 graus Celsius.

Exercício 20-Resolução O saldo de uma conta bancária é dado por

$$S(t) = t^2 - 18t,$$

onde S é o saldo em reais e t é o tempo em dias. Determine:

a) Em que dias o saldo é zero;

b) Em que período o saldo é negativo;

c) Em que período o saldo é positivo;

d) Em que dia o saldo é mínimo;

e) Qual é o saldo mínimo, em reais.

a) Para analisar em que dia o saldo é zero, devemos encontrar as raízes da função:

$$S(t) = t^2 - 18t = 0 \Rightarrow t(t-18) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 18.$$

O que nos diz que o saldo é zero no ato de abertura da conta e no dia 18.

b) Para responder em qual período o saldo é negativo, devemos analisar o valor de a, note que $a > 0$, o que nos mostra que a concavidade da parábola é voltada para cima, ela possui valor mínimo e a função assume valores negativos entre as raízes, que são 0 e 18, o que nos diz que o saldo é negativo entre o ato de abertura da conta e o dia 18 do mês corrente.

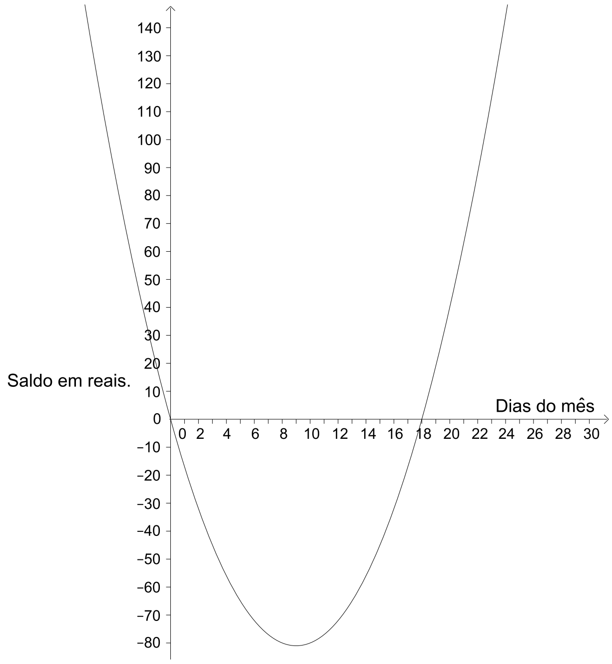


Figura 118 – Representação gráfica de $S(t)$.

c) Para responder em que período o saldo é positivo, temos que por b, ele será positivo após o dia 18.

d) O dia no qual saldo é mínimo, é dado pelo $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-18)}{2(1)} = 9$, ou seja no nono dia, da abertura da conta, o saldo será mínimo.

e) O saldo mínimo, em reais, é dado por $y_v = \frac{-\Delta}{4(a)} \Rightarrow \frac{-324}{4(1)} = -81$ reais. .

Exercício 21-Resolução Em que condições, a função quadrática

$$y = (k^2 - 4)x^2 - kx - 1$$

está definida?

Para resolver o exercício, devemos nos lembrar, que por definição de função quadrática, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (k^2 - 4) \neq 0 \Rightarrow k \neq \pm 2$.

Exercício 22-Resolução . A função:

$$R(d) = -d^2 + 20d - 84,$$

com d em dias, descreve a receita de uma padaria, tudo entre os dias 1 e 30 de um certo mês. E $D(d) = 9d + 49$, com R-receita em reais, L-lucro em reais, D-despesa também em reais. Houve momento onde o lucro da empresa foi nulo? E houve momento onde o lucro da empresa foi positivo? Houve prejuízo?

Sabemos que o lucro é dado por:

$$L = R - D \Rightarrow L = -d^2 + 29d - 26 - (9d + 49) = -d^2 + 20d - 75.$$

E como:

$$\Delta = 20^2 - 4(-1)(-75) = 400 - 300 = 100,$$

as raízes da função serão 5 e 15 e como $-1 = a < 0$, a função tem lucro máximo, temos então que o lucro foi nulo no dia 5 e no dia 15 do mês considerado.

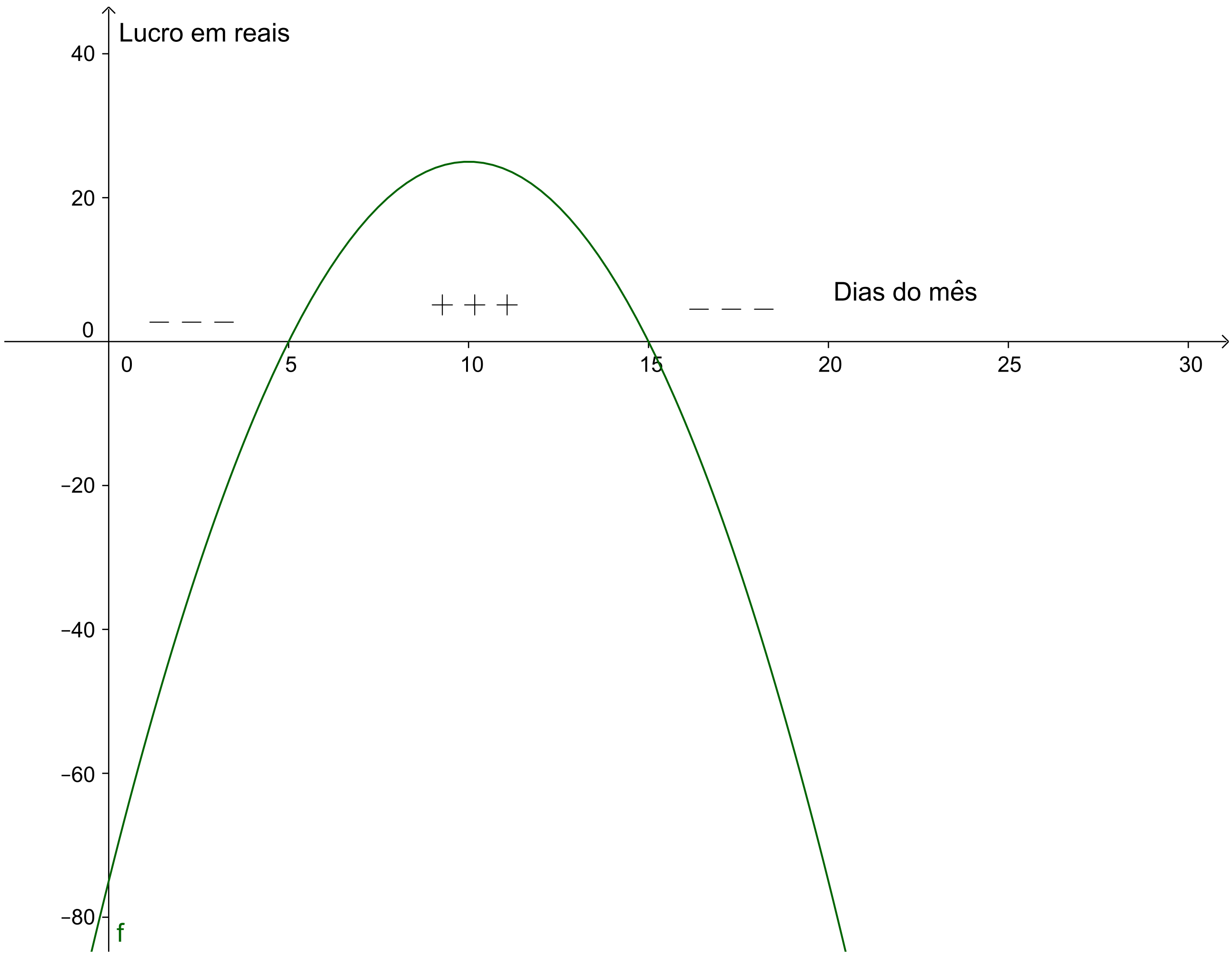


Figura 119 – Representação gráfica de $L(d)$, com estudo do sinal da função

Analisando o estudo do sinal da função acima, temos que houve prejuízo sim, entre o primeiro instante do dia do mês até o dia 5 do mês corrente e também a partir do dia 15 do mês corrente, até o último dia do mês corrente.

Exercício 23-Resolução Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + m + 3$ é positiva, para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

- Por definição, precisamos que $a > 0$ e a função não tenha raízes reais, ou seja: $\Delta < 0$. Como $a = 1 > 0$, a primeira condição está satisfeita.
- Já a segunda condição $\Delta < 0$, será satisfeita quando $-2 < m < 6$, com $m \in \mathbb{R}$ pois:

$\Delta = m^2 - 4(m + 3) \Rightarrow m^2 - 4m - 12 < 0$. Igualaremos a zero, para resolver a equação e aí sim analisar a resposta, decidindo onde Δ seria negativo. Comparando com $ax^2+bx+c = 0$, temos que $a = 1$, $b = -4$ e $c = -12$. É fácil ver que somando e subtraindo 4 na equação, para completar o quadrado:

$$m^2 - 4m + 4 - 4 - 12 = 0 \Rightarrow (m - 2)^2 = 16 \Rightarrow m - 2 = \pm 4.$$

De onde se observa que: $m - 2 = -4 \Rightarrow m = -2$. Ainda notamos que: de $m - 2 = 4 \Rightarrow m = 6$. Fazendo o estudo do sinal da função, temos que:

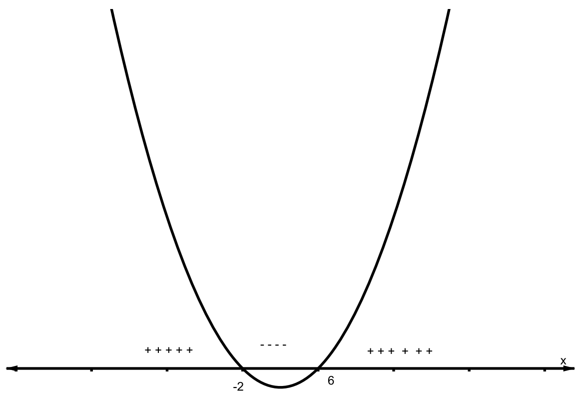


Figura 120 – Pequeno estudo do sinal da função em questão.

De onde se nota que o valor procurado se encontra no intervalo real $-2 < x < 6$, que é onde a função assume valores negativos, para que a função não tenha raiz real e seja positiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 24-Resolução Resolva o sistema em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, observe que temos duas condições iniciais a serem satisfeitas:

I: $x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ (Igualando a zero, para fazer um pequeno estudo do sinal).

De onde temos que:

$$x \geq 1 \text{ ou } x \leqslant 0.$$

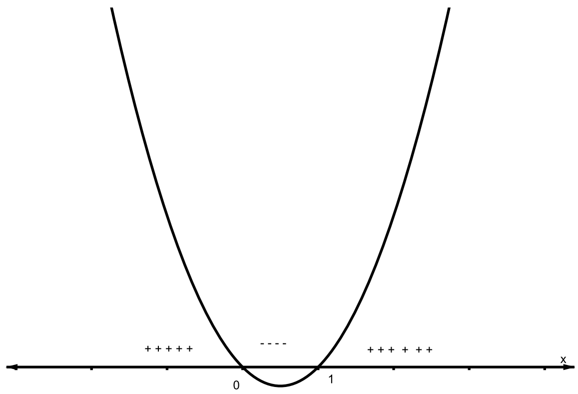


Figura 121 – Pequeno estudo do sinal da função em questão.

Condição II: $x^2 - 5x + 6 < 0$ (igualando a zero, para encontrar as raízes da função e fazendo um pequeno estudo do sinal).

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x^2 - 5x + 6) = 0$, que somando e subtraindo $\frac{25}{4}$, temos que:

$$x^2 - 5x + 6 + \tfrac{25}{4} - \tfrac{25}{4} = 0,$$

equivale a

$$(x - \tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{25}{4} - 6 \Rightarrow (x - \tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Ou seja:

$$x - \tfrac{5}{2} = \pm\tfrac{1}{2}.$$

De:

$$x - \tfrac{5}{2} = +\tfrac{1}{2} \Rightarrow x = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

Por outro lado, de:

$$x - \tfrac{5}{2} = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow x = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} = 2.$$

Temos então duas raízes reais: 2 e 3. Note ainda que como $a = 1 > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e a função possui ponto mínimo. Pela definição apresentada no trabalho, teríamos:

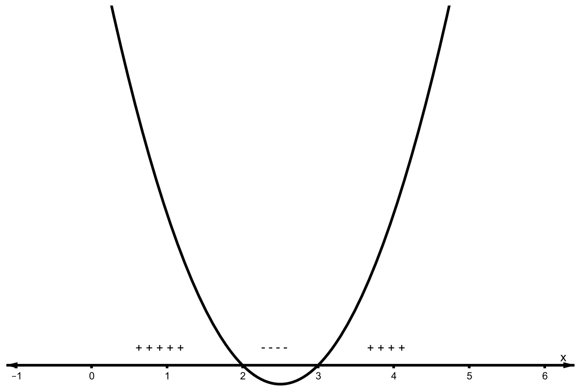


Figura 122 – Pequeno estudo do sinal da função em questão.

Ou seja: queremos $2 < x < 3$.

Atendendo as condições I e II (fazendo a interseção), temos que a resposta será: $\{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 3\}$.

Exercício 25-Resolução Seja a parábola que representa a função real $f(x) = x^2 + kx - 16$.

a) Encontre a interseção da função com o eixo ox, para os quais $k = -6$.

Tome $k = -6$ e $f(x) = x^2 + kx - 16$ fica $y = x^2 - 6x - 16$. Queremos encontrar a interseção com o eixo ox, ou seja: quando $y = 0$. Completando o quadrado, somando e subtraindo 9, temos: $y = x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 - 16 \Rightarrow (x-3)^2 = 16 + 9 = 25$.

De $x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$. Por outro lado, de $x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2$

A.4 A PARÁBOLA

Exercício 26- Resolução Agora utilizando o conhecimento que você construiu sobre a parábola, observe os gráficos e indique a função que dá origem à parábola em cada caso.

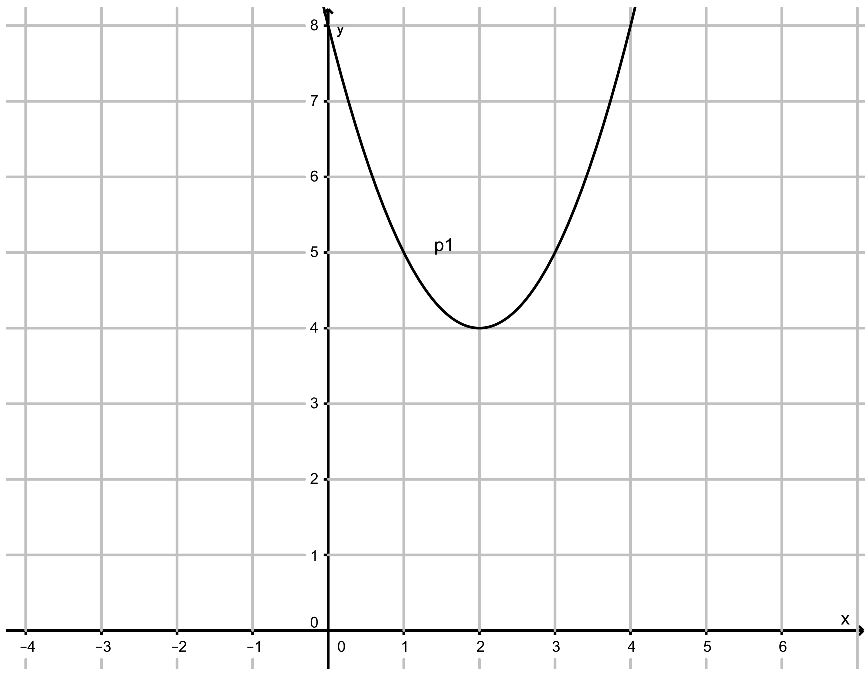


Figura 123 – Parábola 1.

a) Note que o gráfico foi transladado para direita em duas unidades e 4 unidades para cima, se considerarmos $y = ax^2$, como função original. Utilizando os conceitos construídos, temos que de $y = a(x-m)^2 + k$, $y = a(x-2)^2 + 4$. Mas falta a. Como:

$$2 = x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 4a = -b \Rightarrow b = -4a.$$

De $4 = y_v = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$ e como $c = 8$, temos que:

$$\frac{-(b^2-4.a.8)}{4a} = 4 \Rightarrow -b^2 + 16a = 0.$$

De $b = -4a$ e $-b^2 + 16a = 0$, temos que:

$$-b^2 + 16a = 0 \Rightarrow (-4a)^2 - 16a = 0 \Rightarrow 16a^2 - 16a = 0 \Rightarrow 16a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$\text{ou} \Rightarrow a = 1.$$

A hipótese $a = 0$ foi descartada pois $a = 0$ por definição de função quadrática, não ocorre. Temos então, que $y = a(x-2)^2 + 4 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 4$ é a função procurada.

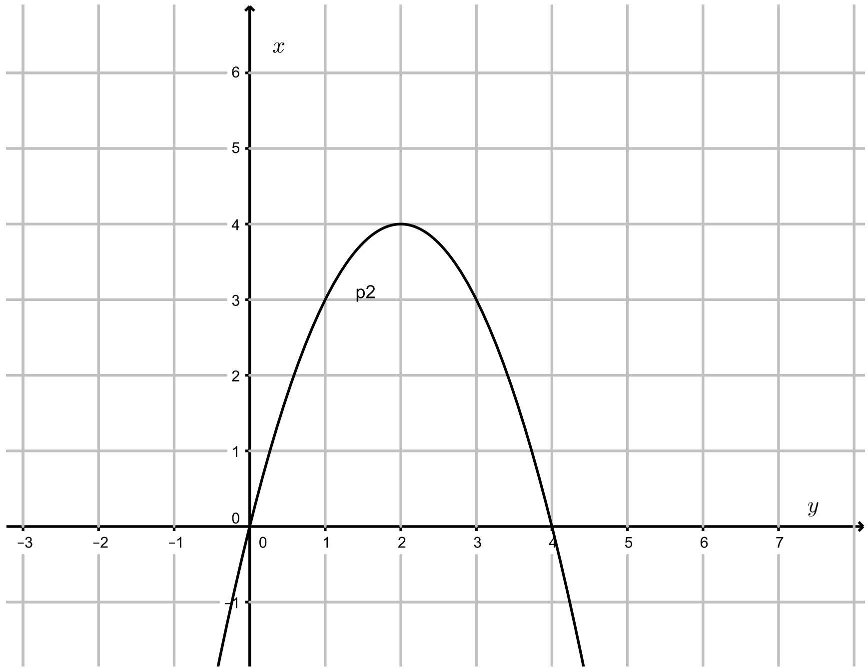


Figura 124 – Parábola 2

b) Note que o gráfico foi transladado para direita em duas unidades e 4 unidades para cima. Consideraremos $y = ax^2$ como função original, só que agora, a concavidade é voltada para baixo. Utilizando os conceitos construídos, temos que de $y = a(x - m)^2 + k$, $y = a(x - 2)^2 + 4$. Mas falta a. De $b = -4a$ e $b^2 + 16a = 0$, temos que:

$$b^2 + 16a = 0 \Rightarrow (-4a)^2 + 16a = 0 \Rightarrow 16a^2 + 16a = 0 \Rightarrow 16a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } \Rightarrow a = -1.$$

A hipótese $a = 0$ foi descartada pois $a = 0$ por definição de função quadrática, não ocorre. Temos então, que $y = a(x - 2)^2 + 4 \Rightarrow y = -(x - 2)^2 + 4$ é a função procurada.

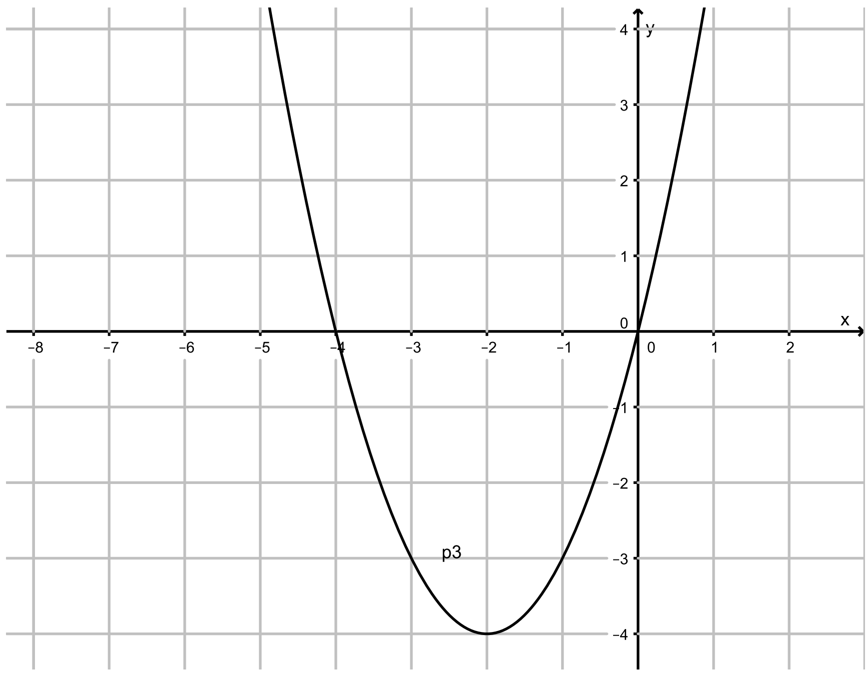


Figura 125 – Parábola 3

c) Note que o gráfico foi transladado para esquerda em 2 unidades e 4 unidades para baixo, se considerarmos $y = ax^2$, como função original. Utilizando os conceitos construídos, temos que de $y = a(x-m)^2 + k$, $y = a(x+2)^2 - 4$. Mas falta a . Como:

$$-2 = x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 4a = b \Rightarrow b = 4a. \text{ De } -4 = y_v = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$$

E como $c = 0$, temos que:

$$\frac{-(b^2-4.a.0)}{4a} = -4 \Rightarrow b^2 - 16a = 0. \text{ De } b = 4a, \text{ temos que}$$
$$b^2 - 16a = 0 \Rightarrow (4a)^2 - 16a = 0.$$

De onde temos: $a = 1$.

A hipótese $a = 0$ foi descartada porque de tornaria $a = 0$, que por definição de função quadrática, não ocorre. Temos então, que $y = a(x+2)^2-4 \Rightarrow y = (x+2)^2-4$, é a função procurada.

A.5 O PARABOLOIDE

Não há exercício nesse capítulo.

A.6 PLOTANDO NO GEOGEBRA

Nos exercícios 27, 28, 29, faremos na ordem: raiz, extremo e interseção com eixo oy, respectivamente A, B, C,..., repetidamente em cada caso, as mesmas letras, para facilitar.

Exercício 27 Plote agora no GeoGebra, a função $função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Encontre as raízes, se existirem, o ponto de otimização da função (extremo), a interseção com o eixo oy, como você aprendeu aqui. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

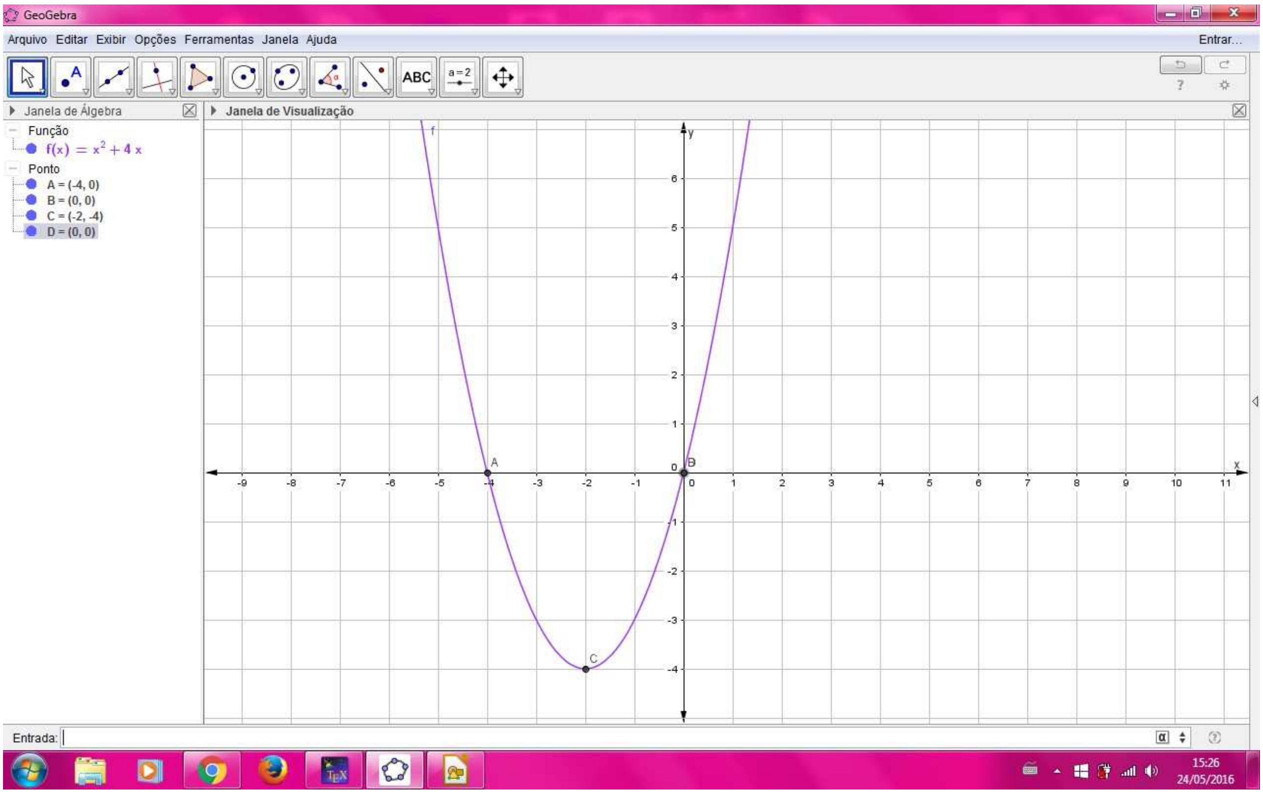


Figura 126 – $f(x) = x^2 + 4x$

Note que a interseção do eixo oy (D, nesse caso) com a função também é raiz (B) $B = D = (0, 0)$. Note também neste caso particular, que a função possui duas raízes reais em $x = 0$ e $x = -4$: os pontos A e B. O extremo da função é $C = (-2, -4)$.

Exercício 28 Plote agora no GeoGebra, a função $função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Encontre as raízes, se existirem, o ponto de otimização da função (extremo), a interseção com o eixo oy, como você aprendeu aqui. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

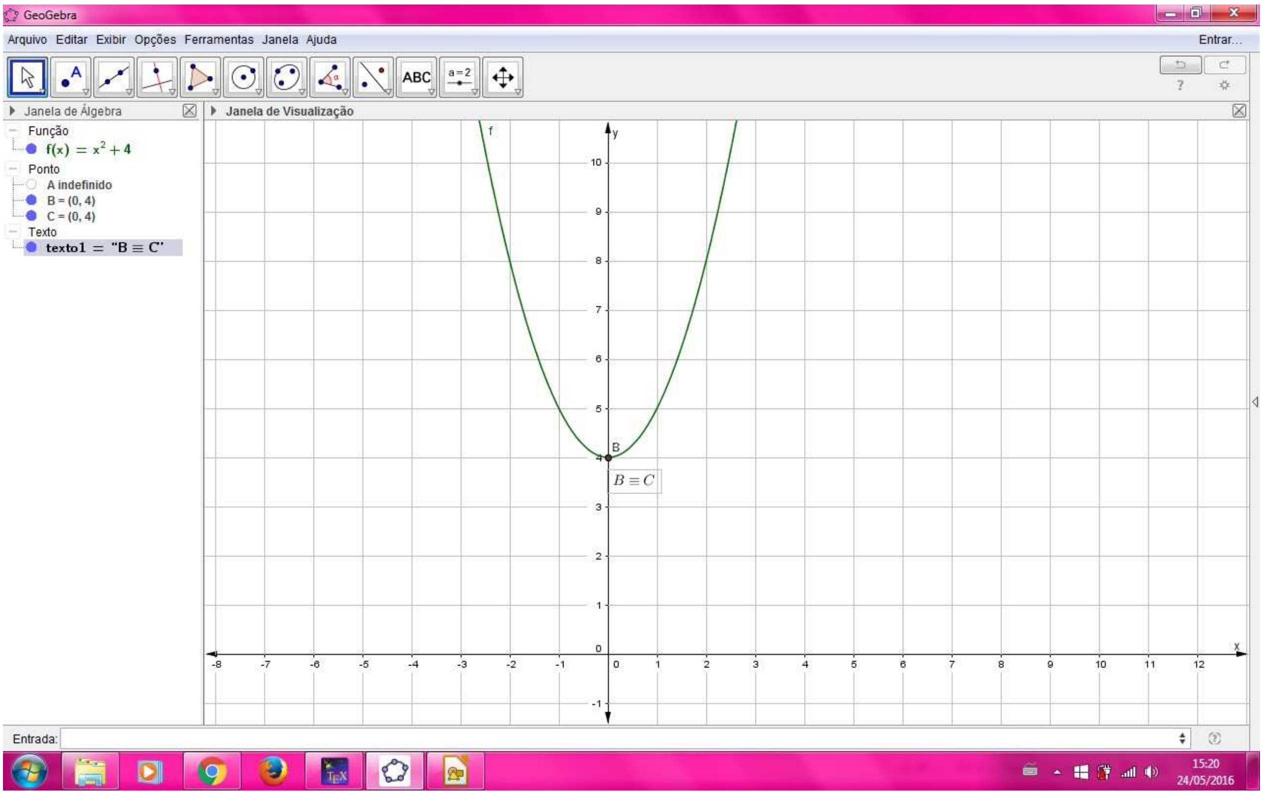


Figura 127 – $f(x) = x^2 + 4$

Note que neste caso particular, a função não possui raiz real(A indefinido - observe na janela do GeoGebra), a interseção da função com o eixo oy coincide com o extremo da função (B) e nesse caso, o ponto C, interseção de f com o eixo oy, é $B \equiv C = (0, 4)$.

Exercício 29 Plote agora no GeoGebra, função $função f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2+4x+4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Encontre as raízes, se existirem, o ponto de otimização da função (extremo), a interseção com o eixo oy, como você aprendeu aqui. Usaremos os comandos na ordem: plotar a função, "raiz, extremo, interseção eixo oy".

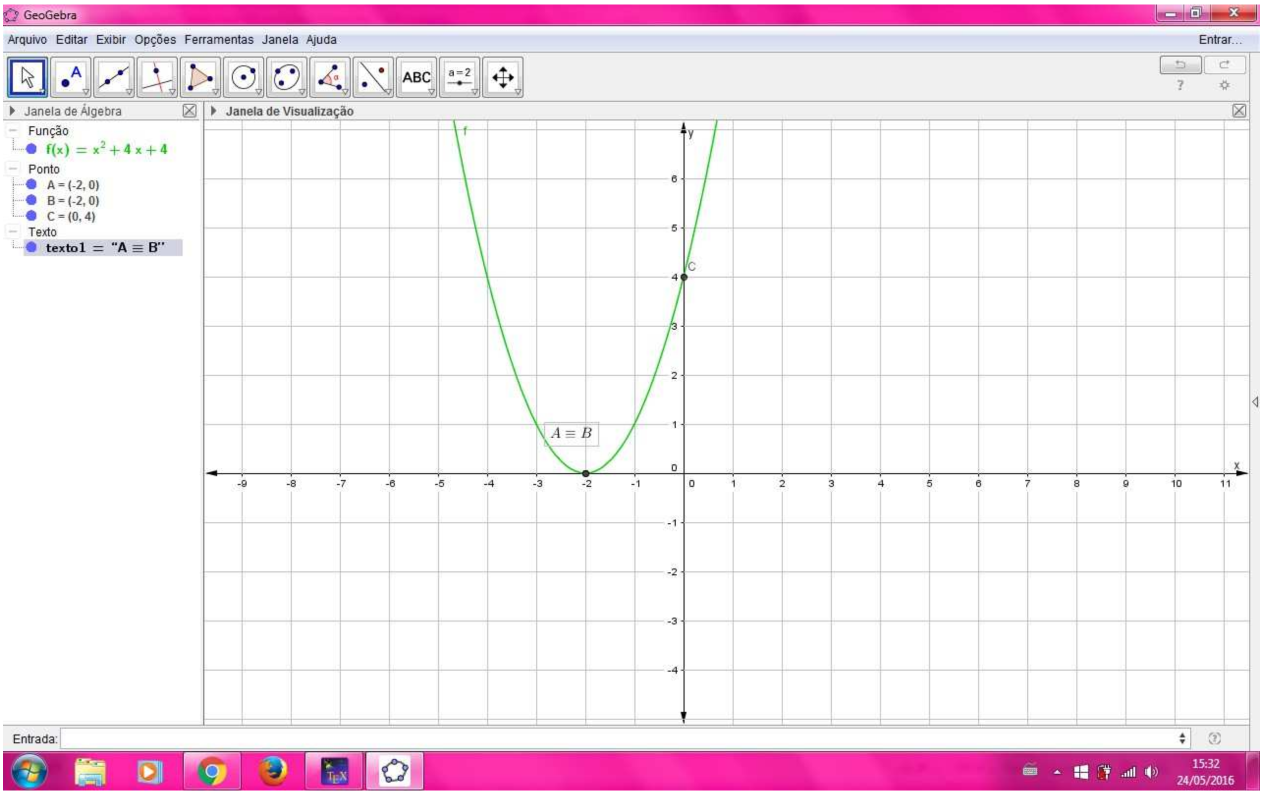


Figura 128 – $f(x) = x^2 + 4x + 4$.

Note que neste caso particular, a raiz ($A = (-2, 0)$) da função, coincide com o extremo da função (B), e que o ponto C, interseção de f com o eixo oy, é $C = (0, 4)$.

Note que todas as funções derivam da função real $y = x^2$, onde ela foi apenas transladada, ora pra cima, ora para esquerda, ora para esquerda e para cima, ao mesmo tempo: esta última equivale a $f(x) = (x + 2)^2$.

Exercício 30-Resolução [Kaufman, p.69-adaptado [9].] Uma bala de canhão é atirada por um tanque de guerra e descreve uma trajetória em forma de parábola de equação $y = -3x^2 + 60x$, sendo x, a distância percorrida pela bala, em metros, y, altura atingida pela bala, medida em metros. Esboce o gráfico da função com $x \in [0, 20]$, com x real. Você consegue estimar a altura máxima atingida bela bala? E o alcance do disparo?

Plotando o gráfico, ele deve ficar assim:

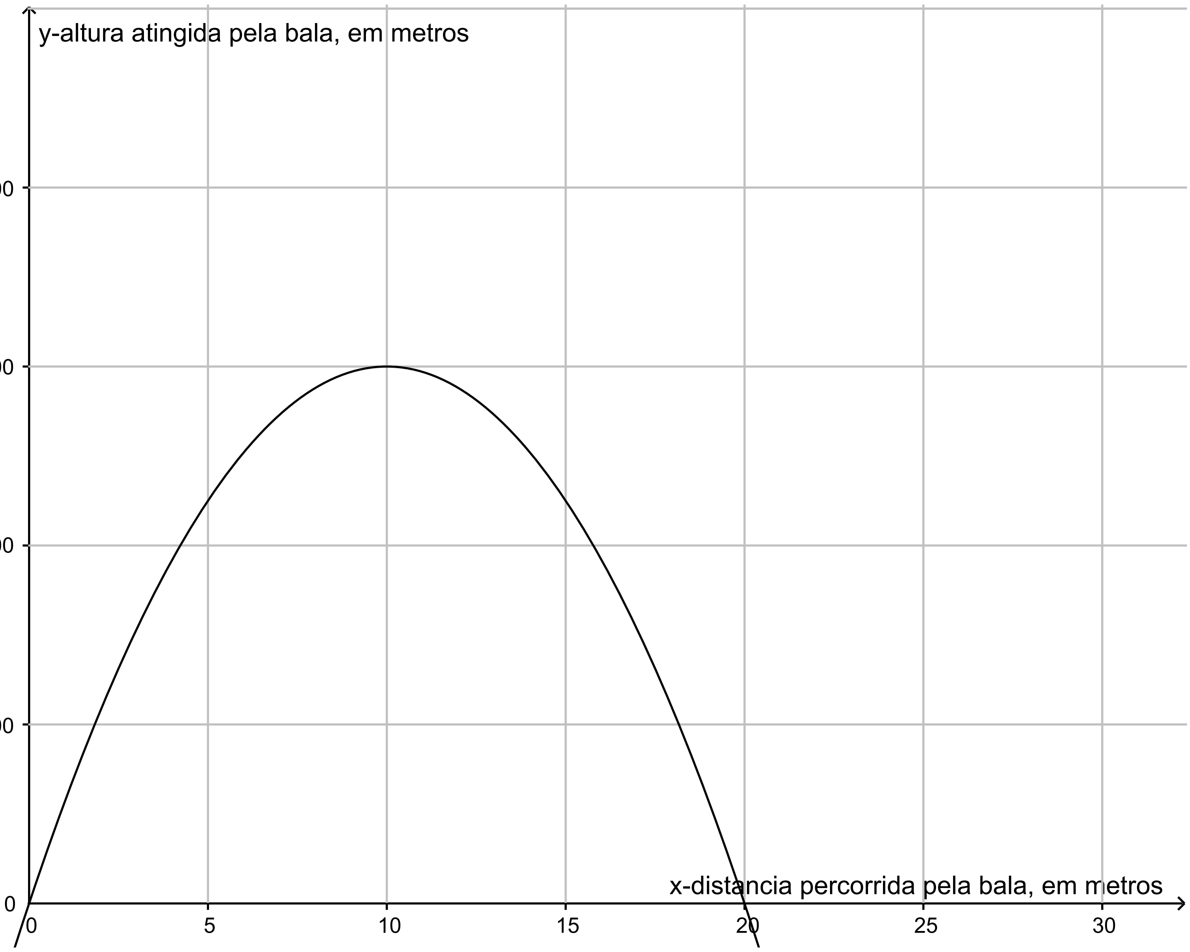


Figura 129 – Trajetória da pedra.

É fácil ver que a altura máxima, dada pelo extremo da função, na coordenada de y, é dado por 300 m e que o alcance do disparo é de 20 m.

Nesse caso, tanto calculando o máximo da função ou observando a simetria da parábola, observamos que na altura máxima, que é de 300 m, é atingida ao percorrer 10 m de distância de onde foi lançada. Da mesma forma, obtemos 300, calculando $\Delta = 3600$, e como $y_v = \frac{\Delta}{4a} = \frac{-3600}{-4(-3)} = 300\ m$. E o $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2(-3)} = 10\ m$, como já havíamos mostrado antes.