UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Augusto Miguel Camillo Silva

Uma investigação sobre a representação matricial real para sistemas OCDM e suas limitações estruturais

Juiz de Fora

2025

Augusto Miguel Camillo Silva

Uma investigação sobre a representação matricial real para sistemas OCDM e suas limitações estruturais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica. Modalidade: Sistemas Eletrônicos.

Orientador: Prof. Dr. Moisés Vidal Ribeiro

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Augusto Miguel Camillo.
Uma investigação sobre a representação matricial real para sistemas OCDM e suas limitações estruturais / Augusto Miguel Camillo Silva. – 2025.
42 p. : il.

Orientador: Moisés Vidal Ribeiro
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica, 2025.

1. Transformada de Fresnel Discreta. 2. Multiplexação por Divisão Ortogonal de Chirp. 3. Representação Matricial Real. I. Ribeiro, Moisés Vidal, orient. II. Título.

Augusto Miguel Camillo Silva

Uma investigação sobre a representação matricial real para sistemas OCDM e suas limitações estruturais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Elétrica. Modalidade: Sistemas Eletrônicos.

Aprovada em 25 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Moisés Vidal Ribeiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Prof. Dr. Mateus de Lima Filomeno
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Me. Túlio Fernandes Moreira
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, meu alicerce em todos os momentos. Em especial, aos meus pais, Valdeli Miguel da Silva e Maria Cristina Camillo da Silva, por todo o apoio, incentivo e suporte incondicional que me deram durante o longo período da graduação. Sem eles, eu não conseguiria chegar a este momento.

Agradeço a todos os meus amigos, cujo apoio foi fundamental ao longo desta trajetória. Em especial, aos integrantes do grupo "Fofoquinhas": Bernardo Silveira, Elian Henrique, Luan Gomes, Luis Karlos e Otton Guerra, que me acompanham desde o Ensino Médio, compartilhando desafios e celebrando conquistas. Um agradecimento particular a Bernardo Silveira e Elian Henrique, meus companheiros de apartamento, pela convivência diária e pela paciência. A caminhada foi muito melhor com todos vocês ao meu lado. Expresso minha sincera gratidão.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Moisés Vidal Ribeiro, pela oportunidade, confiança, paciência e apoio durante a elaboração deste trabalho, e pela valiosa experiência de trabalho no Laboratório de Comunicações (LCOM).

Agradeço também aos membros da banca avaliadora, pela disponibilidade em participar e pelas contribuições fundamentais que enriqueceram este texto.

É importante mencionar aqui o suporte educacional e a infraestrutura laboratorial disponibilizados pela Faculdade de Engenharia e pela Universidade Federal de Juiz de Fora, sem os quais não seria possível o desenvolvimento deste trabalho.

Por último, o autor também gostaria de agradecer o apoio financeiro em parte da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e a análise de um sistema de comunicação baseado na multiplexação por divisão ortogonal de *chirp* (do inglês, *orthogonal chirp division multiplexing*) (OCDM) para transmissão em banda base. Partindo dos fundamentos da transformada de Fresnel discreta (do inglês, *discret Fresnel transform*) (DFnT), que constitui o núcleo matemático do OCDM, propõe-se uma arquitetura baseada na representação real de matrizes unitárias complexas. A metodologia converte a matriz da transformação DFnT complexa $N \times N$ em uma matriz real $2N \times 2N$, permitindo a transmissão de sinais puramente reais. Uma análise crítica revela que esta representação quebra a estrutura circulante da matriz da DFnT, elevando a complexidade computacional da demodulação de $\mathcal{O}(N \log N)$ para $\mathcal{O}(N^2)$. Adicionalmente, demonstra-se uma limitação estrutural fundamental: a impossibilidade de construir uma matriz de transformação puramente real da forma $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda_1 W}_N \mathbf{\Lambda_2}$ para dimensões $N > 2$, em que $\mathbf{W}_N$ é a matriz da transformada de Fourier discreta (do inglês, *discret Fourier transform*) (DFT). Conclui-se que a abordagem proposta, apesar de funcional, introduz uma penalidade computacional significativa em comparação com alternativas existentes na literatura, sendo sua principal contribuição a análise teórica das limitações de transformadas reais baseadas na matriz da DFT.

Palavras-chave: Transformada de Fresnel Discreta. Multiplexação por Divisão Ortogonal de Chirp. Representação Matricial Real.

ABSTRACT

This work presents the development and analysis of an orthogonal chirp division multiplexing (OCDM)-based data communication system for baseband transmission. Stemming from the fundamentals of the discrete Fresnel transform (DFnT), which forms the mathematical core of OCDM, a novel architecture based on the real representation of complex unitary matrices is proposed. The methodology converts the $N \times N$ complex DFnT matrix into a $2N \times 2N$ real matrix, enabling the transmission of purely real signals. A critical analysis reveals that this representation breaks the circulant structure of the DFnT matrix, increasing the demodulation computational complexity from $\mathcal{O}(N \log N)$ to $\mathcal{O}(N^2)$. Furthermore, a fundamental structural limitation is demonstrated: The impossibility of constructing a purely real transformation matrix of the form $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda_1 W}_N \mathbf{\Lambda_2}$ for dimensions $N > 2$, where $\mathbf{W}_N$ is the Discrete Fourier Transform (DFT) matrix. It is concluded that the proposed approach, though functional, introduces a significant computational penalty compared to existing alternatives in the literature, with its main contribution being the theoretical analysis of the limitations of real transforms based on the DFT.

Keywords: Discrete Fresnel Transform. Orthogonal Chirp Division Multiplexing. Real Matrix Representation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Geometria da difração 14
Figura 2 – Geometria da grade utilizada para o Efeito Talbot 19
Figura 3 – Padrão de repetição do campo transmitido: visualização do Efeito Talbot 19
Figura 4 – Ilustração de *chirp* 23
Figura 5 – Diagrama de bloco do sistema OCDM. 25
Figura 6 – Diagrama de blocos do transmissor 31
Figura 7 – Diagrama de blocos do receptor 32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CP	prefixo cíclico (do inglês, *cyclic prefix*)
DFT	transformada de Fourier discreta (do inglês, *discret Fourier transform*)
DFnT	transformada de Fresnel discreta (do inglês, *discret Fresnel transform*)
FFT	transformada rápida de Fourier (do inglês, *fast Fourier transform*)
FMA	multiplicação e acumulação fundidas (do inglês, *fused multiply-accumulate*)
GEMV	multiplicação geral de matrizes e vetores (do inglês, *general matrix-Vector multiplication*)
IDFT	transformada inversa de Fourier discreta (do inglês, *inverse discrete Fourier transform*)
ISI	interferência intersimbólica (do inglês, *intersymbol interference*)
LIT	linear e invariante no tempo
MMSE	mínimo erro quadrático médio (do inglês, *minimum mean squared error*)
OCDM	multiplexação por divisão ortogonal de *chirp* (do inglês, *orthogonal chirp division multiplexing*)
OFDM	multiplexação por divisão ortogonal de frequência (do inglês, *orthogonal frequency division multiplexing*)
SIMD	instrução única, múltiplos dados (do inglês, *single instruction, multiple data*)
ZF	forçamento a zero (do inglês, *zero forcing*)

LISTA DE SÍMBOLOS

j	Unidade imaginária, em que $\mathrm{j}^2 = -1$.
e	Número de Euler.
$\mathbb{R}^*$	Conjunto dos números reais não nulos, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\mathbb{Z}^*$	Conjunto dos números inteiros não nulos, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
$(\cdot)^*$	Operador conjugado complexo.
$(\cdot)^\dagger$	Operador transposto conjugado (Hermitiano).
$(\cdot)^\intercal$	Operador de transposição de matriz.
$(\cdot)_N$	Operação módulo N.
$\mathrm{Re}\{\cdot\}$	Parte real de um número complexo.
$\mathrm{Im}\{\cdot\}$	Parte imaginária de um número complexo.
$\mathcal{F}_\alpha\{\cdot\}(x)$	Operador da Transformada de Fresnel unidimensional no domínio contínuo para $\alpha = \lambda z$ fixo.
$\mathrm{diag}\{\mathbf{v}\}$	Matriz diagonal cujos elementos da diagonal são dados por $\mathbf{v}$.
$\mathbb{K}^{M \times N}$	Espaço das matrizes de dimensão $M \times N$ com entradas no corpo $\mathbb{K}$.
$M_{m,n}$	Elemento da matriz $\mathbf{M}$ localizado na linha m e coluna n.
$\in$	Pertence a (símbolo de pertinência).
$\triangleq$	Igual por definição.
$\equiv$	Símbolo de equivalência ou congruência.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10
1.1 OBJETIVOS 11
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO 12
2 A TRANSFORMADA DE FRESNEL NO DOMÍNIO CONTÍNUO 13
2.1 ORIGENS ÓPTICAS: O PRINCÍPIO DE HUYGENS-FRESNEL . . . 13
2.2 APROXIMAÇÃO DE FRESNEL 14
2.3 TRANSFORMADA DE FRESNEL UNIDIMENSIONAL NO DOMÍNIO CONTÍNUO 16
3 A TRANSFORMADA DE FRESNEL NO DOMÍNIO DISCRETO 18
3.1 ORIGENS: O EFEITO TALBOT 18
3.2 A TRANSFORMADA DE FRESNEL NO DOMÍNIO DISCRETO . . . 19
3.3 PROPRIEDADES DA DFnT 20
4 O SISTEMA DE COMUNICAÇÃO OCDM 22
4.1 CARACTERIZAÇÃO DE SINAIS CHIRPS 22
4.2 O SISTEMA OCDM 23
4.2.1 **Relação entre a DFnT e a DFT** 23
4.2.2 **Arquitetura do sistema OCDM** 24
4.2.3 **Equalização no Domínio da Frequência** 25
5 SISTEMA OCDM NA BANDA BASE 27
5.1 A REPRESENTAÇÃO REAL DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES COMPLEXAS 27
5.1.1 **Generalização para matrizes unitárias complexas** 28
5.1.2 **Propriedades da matriz de representação real de matrizes unitárias** 29
5.2 REPRESENTAÇÃO MATRIZ REAL DE MATRIZES COMPLEXAS PARA COMUNICAÇÃO EM BANDA BASE 31
5.2.1 **Prós e contras desse esquema de comunicação** 33
6 LIMITAÇÕES ESTRUTURAIS NA DECOMPOSIÇÃO DE TRANSFORMADAS REAIS 35
6.1 DERIVAÇÃO DA CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA 35
6.2 IMPOSSIBILIDADE DE EXISTÊNCIA PARA $N > 2$ 37
7 CONCLUSÃO 39
7.1 TRABALHOS FUTUROS 39
REFERÊNCIAS 41

1 INTRODUÇÃO

A busca por sistemas de comunicação digital mais eficientes e robustos tem impulsionado o desenvolvimento de diversas técnicas de modulação multiportadora. Entre elas, a multiplexação por divisão ortogonal de frequência (do inglês, *orthogonal frequency division multiplexing*) (OFDM) e suas variações consolidaram-se como um padrão em muitas tecnologias sem fio e cabeadas, devido à sua capacidade de mitigar os efeitos da seletividade em frequência dos canais (RIBEIRO *et al.*, 2014; OLIVEIRA *et al.*, 2018; CAMPOS *et al.*, 2021). Recentemente, a multiplexação por divisão ortogonal de *chirp* (do inglês, *orthogonal chirp division multiplexing*) (OCDM) surgiu como uma alternativa promissora, substituindo as subportadoras senoidais dO OFDM por um conjunto de sinais *chirp* ortogonais (OUYANG; ZHAO, 2016). A base matemática do sistema OCDM é a transformada de Fresnel discreta (do inglês, *discret Fresnel transform*) (DFnT), uma ferramenta cuja origem remonta aos estudos da óptica e da propagação de ondas (GORI, 1994; GOODMAN, 1968).

A DFnT é a análoga discreta da transformada de Fresnel contínua, que descreve o fenômeno da difração em campo próximo. Suas raízes teóricas estão ligadas a trabalhos sobre a natureza ondulatória da luz, como os de (RAYLEIGH, 1874) e (COWLEY; MOODIE, 1957), e sua formulação moderna está intrinsecamente conectada ao Efeito Talbot, um fenômeno de autoimagem de grades periódicas que tem sido objeto de estudo por décadas (WEN; ZHANG; XIAO, 2013). Essa rica base teórica facilitou o desenvolvimento do OCDM, um sistema de comunicação com propriedades únicas, como robustez a ausência de sincronismo e a canais com forte espalhamento de atraso (FILOMENO *et al.*, 2022; MOREIRA *et al.*, 2023).

Originalmente concebido para comunicação digital de dados em banda passante, o OCDM deve ter sua estrutura adaptada para que seja aplicado em meios físicos cuja a transmissão é preferencialmente em banda base (por exemplo, cabo de par trançados e rede de energia elétrica). A comunicação em banda base requer que os sinais processados e transmitidos sejam puramente reais, o que representa um desafio para uma transformada inerentemente complexa como a DFnT.

A literatura já apresenta métodos para a implementação do OCDM em banda base, como os quatro esquemas descritos em (DIB *et al.*, 2020). Dentre esses esquemas, apenas um, o Tipo IV, preserva a relação linear entre tempo e frequência instantânea para todos os símbolos/chirps transmitidos. Esse esquema utiliza uma versão modificada da DFnT que pode ser representada por uma matriz cujos elementos são todos pertences ao conjunto (ou corpo) dos números reais. O problema central, no entanto, reside no impacto que a representação real impõe sobre a complexidade computacional do sistema.

Este trabalho se dedica a explorar uma abordagem para essa adaptação do sistema

OCDM para banda base, fundamentada na representação de operações com números complexos por meio de matrizes com entradas reais. A metodologia proposta neste trabalho baseia-se no isomorfismo entre o corpo dos números complexos e um subanel das matrizes reais de dimensão 2×2 (SILVA, 2017). Essa equivalência algébrica pode ser estendida para espaços vetoriais, permitindo que uma transformação linear complexa de dimensão $N \times N$ seja representada por uma transformação linear real de dimensão $2N \times 2N$ (ZHOU, 2018). Propõe-se, assim, um novo formalismo para o sistema OCDM em banda base, no qual a matriz da DFnT é convertida para sua representação real equivalente, resultando em uma matriz de transformação puramente real que preserva propriedades fundamentais da transformada original, como a unitariedade.

Outra questão fundamental abordada no trabalho é se a representação real canônica preserva alguma estrutura que permita uma implementação rápida ou se a conversão para o domínio real inevitavelmente resulta em uma multiplicação matriz-vetor genérica, de complexidade $\mathcal{O}(N^2)$. A DFnT em sua versão original possui uma estrutura circulante que permite sua implementação eficiente por meio de uma transformada de Fourier discreta (do inglês, *discret Fourier transform*) (DFT), com uma complexidade de ordem $\mathcal{O}(N \log N)$ (OUYANG *et al.*, 2015; HOU; HUANG; LV, 2024). Nesse contexto, surge um questionamento sobre a possibilidade de se construir uma matriz de transformação puramente real, tal como aquela associada à versão modificada da DFnT proposta por (OUYANG; ZHAO, 2016), que mantenha a estrutura de fatoração da DFnT, ou seja, da forma $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda_1 W}_N \mathbf{\Lambda_2}$ em que $\mathbf{W}_N$ é a matriz de DFT $\mathbf{\Lambda}_1$ e $\mathbf{\Lambda}_2$ são matrizes diagonais complexas.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e realizar uma análise crítica de um sistema de comunicação OCDM em banda base, fundamentado na representação matricial real de transformadas unitárias complexas, investigando sua viabilidade, seu desempenho computacional e suas limitações estruturais intrínsecas.

Desse modo, visando alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

i) Desenvolver o formalismo de um sistema de comunicação em banda base utilizando a representação real da matriz da DFnT, analisando as propriedades da matriz de transformação resultante e avaliando sua complexidade computacional em comparação com a abordagem complexa.

ii) Avaliar a viabilidade matemática de se construir uma matriz de transformação puramente real da forma $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda_1 W}_N \mathbf{\Lambda_2}$, habilitando a redução da complexidade computacional em transceptores OCDM que operem na banda base baseados no Tipo IV (DIB *et al.*, 2020).

1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O restante deste documento está dividido em cinco capítulos, organizados da seguinte forma:

No Capítulo 2 é realizada uma revisão sobre a transformada de Fresnel no domínio contínuo, detalhando suas origens na óptica a partir do Princípio de Huygens-Fresnel e o papel da aproximação de Fresnel em sua formulação.

No Capítulo 3 é descrito o análogo discreto da transformada, a DFnT, partindo de sua origem física no efeito Talbot, definindo sua estrutura matricial e apresentando suas propriedades matemáticas fundamentais, como unitariedade e circularidade.

No Capítulo 4 é apresentado o sistema OCDM. O capítulo detalha a relação entre a DFnT e a DFT, que viabiliza sua implementação computacionalmente eficiente, e descreve tanto as arquiteturas do transmissor e do receptor, como o processo de equalização no domínio da frequência.

No Capítulo 5 é desenvolvida a proposta central deste trabalho: um sistema OCDM para transmissão em banda base. O capítulo introduz o formalismo da representação real de transformações complexas e o aplica para definir a nova arquitetura, finalizando com uma análise comparativa de suas vantagens e desvantagens.

No Capítulo 6 são apresentadas as limitações estruturais de transformadas reais baseadas em Fourier. Este capítulo contém a derivação matemática da condição de existência para uma matriz real da forma $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Lambda_1}\mathbf{W}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\Lambda_2}$ e a prova de sua impossibilidade para dimensões $N > 2$.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

2 A TRANSFORMADA DE FRESNEL NO DOMÍNIO CONTÍNUO

Este capítulo introduz a transformada de Fresnel no domínio contínuo, uma ferramenta matemática usada para descrever a propagação de ondas ópticas em regime de difração. O fenômeno de difração ocorre quando a luz interage com estruturas cujas dimensões são comparáveis ao seu comprimento de onda e, portanto, exigindo uma abordagem baseada na teoria ondulatória em vez da óptica geométrica (GOODMAN, 1968). O emprego da teoria ondulatória simplifica a formulação integral original, baseada no Princípio de Huygens-Fresnel, por meio da aproximação de Fresnel. Com isso, é possível chegar à definição da transformada de Fresnel unidimensional no domínio contínuo, a qual permite modelar como o campo óptico evolui no espaço após passar por uma abertura com simetria unidimensional.

Neste contexto, este capítulo está dividido em seções que constroem a teoria passo a passo. Inicialmente, a Seção 2.1 explora as origens ópticas da transformada de Fresnel, detalhando o Princípio de Huygens-Fresnel e sua formulação matemática. A seguir, a Seção 2.2 foca na aproximação de Fresnel, um passo crucial que simplifica a integral de propagação para uma forma mais tratável, baseando-se na expansão binomial. Por fim, a Seção 2.3 apresenta a definição formal da transformada, introduzindo a transformada de Fresnel unidimensional e sua inversa, a qual é a forma conjugada da transformada direta.

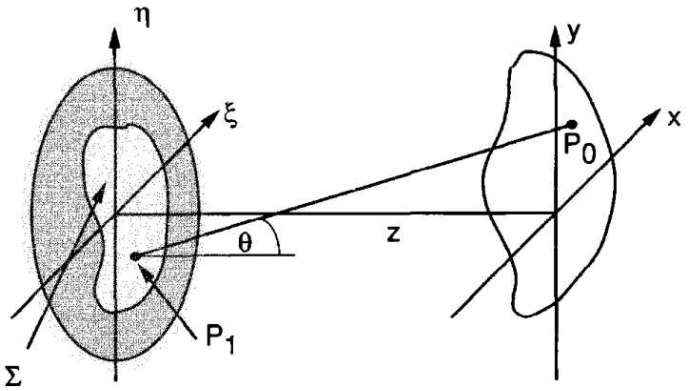
2.1 ORIGENS ÓPTICAS: O PRINCÍPIO DE HUYGENS-FRESNEL

O princípio de Huygens-Fresnel afirma que cada ponto de uma frente de onda atua como uma fonte secundária de ondas esféricas elementares, e que a frente de onda em um instante posterior pode ser obtida pela superposição das contribuições dessas fontes secundárias (GOODMAN, 1968). Essa ideia, inicialmente proposta por Huygens e, posteriormente, refinada por Fresnel com a introdução do conceito de interferência, é fundamental para descrever fenômenos como difração e interferência que não podem ser explicados pela óptica geométrica clássica.

Na formulação escalar moderna da teoria da difração, o campo escalar $U(P_0)$ em um ponto de observação P_0 é obtido por meio de uma integral sobre uma superfície de difração Σ (GOODMAN, 1968), conforme ilustrado na Figura 1. Esta integral considera a amplitude e a fase do campo no plano da abertura, bem como a distância, a orientação entre os pontos do plano de abertura e o ponto de observação e um fator de inclinação angular.

Considerando o emprego das coordenadas retangulares na modelagem ilustrada na Figura 1, assume-se que a abertura de difração está situada no plano (ξ, η), sendo iluminada na direção positiva do eixo z. Deseja-se calcular o campo de onda no plano (x, y), que é paralelo ao plano da abertura e está a uma distância z deste. O eixo z perfura

Figura 1 – Geometria da difração



Fonte: (GOODMAN, 1968).

ambos os planos em suas origens. De acordo com (GOODMAN, 1968), o princípio de Huygens-Fresnel diz que o campo escalar no ponto de observação P_0 é expresso por

$$U(P_0) = \frac{1}{\mathrm{j}\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(\mathrm{j}kr)}{r} \cos\theta \, ds, \tag{2.1}$$

em que λ é o comprimento de onda da luz; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda; r representa a distância entre o ponto $P_1 \in \Sigma$ e o ponto P_0; θ é o ângulo entre a normal da superfície Σ e o vetor de propagação $\vec{r}$; o vetor de propagação $\vec{r}$ é definido entre as posições P_0 e P_1; ds é um elemento diferencial de área sobre a superfície Σ; $U(P_1)$ é o campo escalar na posição P_1.

O fator de inclinação $\cos\theta$ é dado por $\cos\theta = \dfrac{z}{r}$. Deste modo, substituindo essa expressão para $\cos\theta$ em (2.1), obtêm-se uma forma útil para coordenadas retangulares, a saber:

$$U(x, y) = \frac{z}{\mathrm{j}\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(\mathrm{j}kr)}{r^2} \, d\xi \, d\eta, \tag{2.2}$$

em que a distância r entre o ponto (ξ, η) na abertura e o ponto de observação (x, y) é

$$r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \tag{2.3}$$

Note que (2.2) representa a forma geral da propagação da luz segundo o princípio de Huygens-Fresnel, sem ainda aplicar a aproximação de Fresnel.

2.2 APROXIMAÇÃO DE FRESNEL

Para reduzir o princípio de Huygens-Fresnel a uma expressão mais simples e utilizável, são introduzidas aproximações para a distância r entre os pontos P_1 e P_0. As aproximações são baseadas na expansão binomial da raiz quadrada. Seja $b \in \mathbb{C}$ um número cuja magnitude é muito menor que 1, isto é $|b| < 1$, e considere a expressão $\sqrt{1 + b}$. A

expansão binomial da raiz quadrada é expressa por

$$\begin{aligned}\sqrt{1+b} &= (1+b)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} b^n \\ &= 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \cdots ,\end{aligned} \tag{2.4}$$

em que o número de termos necessários para uma dada precisão depende da magnitude de b.

Para aplicar a expansão binomial ao problema em questão, fatora-se z para fora da raiz quadrada na expressão de r em (2.3), resultando em

$$r = z\left[1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{2.5}$$

Assumindo que $b = \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2$ e retendo apenas os dois primeiros termos da expansão binomial dada em 2.4, obtêm-se

$$r \approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]. \tag{2.6}$$

Conforme discutido em (GOODMAN, 1968), a necessidade de manter ou não todos os termos da aproximação de r depende de onde ele aparece. Por exemplo, considerando o denominador, onde surge como r^2, descartar todos os termos, exceto z, introduz erro geralmente pequeno. Por outro lado, considerando o expoente, os erros tornam-se críticos, pois são amplificados pelo fator k, que no regime óptico é tipicamente da ordem de 10^7. Além disso, variações de fase mesmo inferiores a um radiano já impactam significativamente o valor da integral. Portanto, para garantir precisão na fase da exponencial, mantêm-se os dois primeiros termos da expansão binomial de r no expoente. Assim sendo, a expressão para o campo observado em (x, y), após a introdução da aproximação de Fresnel em (2.6) é expressa por

$$U(x,y) \triangleq \frac{e^{\mathrm{j}kz}}{\mathrm{j}\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi,\eta) \exp\left[\mathrm{j}\frac{k}{2z}\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)\right] d\xi\, d\eta, \tag{2.7}$$

na qual foram incorporados os limites finitos da abertura na definição de $U(\xi, \eta)$, de acordo com as condições de contorno normalmente assumidas. Em (GOODMAN, 1968) é feita uma avaliação da precisão desta aproximação.

Na aproximação de Fresnel, a propagação é representada por uma dispersão de fase quadrática. O termo exponencial na integral modela os atrasos de fase entre as diferentes direções de propagação. Já o fator $\exp(\mathrm{j}kz)$ representa uma fase global comum a todos os componentes, com módulo unitário, ou seja, $|\exp(\mathrm{j}kz)| = 1$. Como o fator $\exp(\mathrm{j}kz)$ não afeta a intensidade nem a distribuição espacial relativa do campo, é usual omití-lo. Assim, a partir deste ponto, este fator também será desconsiderado na formulação da transformada de Fresnel.

2.3 TRANSFORMADA DE FRESNEL UNIDIMENSIONAL NO DOMÍNIO CONTÍNUO

A transformada de Fresnel unidimensional no domínio contínuo descreve o padrão de difração gerado quando um campo óptico se propaga a partir de uma abertura única com perfil uniforme ao longo de uma direção transversal. Considere uma fonte de onda plana monocromática de amplitude unitária com comprimento de onda λ, iluminando uma abertura unidimensional infinita, alinhada ao eixo η no plano transversal (ξ,η), com centro em $\xi = 0$. Nesse contexto, o campo imediatamente após a grade coincide com a função de transmitância complexa da abertura no plano $z = 0$ representada pela função $t(\xi,\eta)$. Quando a abertura possui perfil constante ao longo de η, ou seja, não varia em função de η pois a sua derivada parcial em relação a η é igual a zero, tem-se $t(\xi,\eta) = t(\xi)$, o que permite reduzir o problema bidimensional para uma formulação unidimensional.

A propagação da onda a uma distância $z > 0$ pode ser descrita pela aproximação de Fresnel, cuja solução para o campo no ponto (x, y) é dada por

$$U(x,y) = \frac{1}{\mathrm{j}\alpha} \iint_{-\infty}^{\infty} t(\xi) \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\alpha}\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right)\right] d\xi\, d\eta, \tag{2.8}$$

em que $\alpha = \lambda z$. Como $t(\xi)$ independe de η, a integral se separa em duas partes: uma que depende de x e outra de y. Assim, o campo pode ser expresso como o produto de duas integrais unidimensionais. Avaliando o campo ao longo da linha $y = 0$, obtêm-se a transformada de Fresnel unidimensional no domínio contínuo, a qual é expressa por

$$\begin{aligned} T(x) &\triangleq U(x,0) \\ &= \mathcal{F}_\alpha\{t(\xi)\}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{j}\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} t(\xi) \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{\alpha}(x-\xi)^2\right] d\xi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

em que $\mathcal{F}_\alpha\{\cdot\}(x)$ é o operador da transformada de Fresnel unidimensional no domínio contínuo para $\alpha = \lambda z$ fixo. Para tanto, foi considerado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi\eta^2}{\alpha}\right) d\eta = \sqrt{\mathrm{j}\alpha} \tag{2.10}$$

Essa transformada representa a difração de Fresnel unidimensional do campo escalar $t(\xi)$, isto é, ela fornece o campo escalar $T(x)$ em função da coordenada transversal x, em um plano de observação situado a uma distância z da abertura em que o campo $t(\xi)$ é definido.

A inversa da transformada de Fresnel unidirecional no domínio contínuo é expressa por

$$\begin{aligned} t(\xi) &= \mathcal{F}_\alpha^{-1}\{T(x)\}(\xi) \\ &\triangleq \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{j}\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} T(x) \exp\left[-\mathrm{j}\frac{\pi}{\alpha}(x-\xi)^2\right] dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uma transformada é unitária se ela conserva a energia do sinal. Para a transformada de Fresnel, a unitariedade é garantida porque sua inversa é formalmente idêntica à sua transformada adjunta. Esta propriedade estrutural assegura que a energia total do campo no plano de observação é igual à energia do campo original na abertura, permitindo a reconstrução exata do campo na ausência de perdas ou ruído.

3 A TRANSFORMADA DE FRESNEL NO DOMÍNIO DISCRETO

Este capítulo apresenta a DFnT, uma formulação matemática derivada a partir da propagação de ondas ópticas em regime de difração de Fresnel sobre estruturas com aberturas igualmente espaçadas (também chamadas de grades de difração),[1], no qual réplicas exatas ou fracionárias do campo imediatamente após a grade de difração são criadas em distâncias específicas ao longo do eixo de propagação.

A estrutura do capítulo segue uma progressão lógica para construir a teoria da DFnT. A Seção 3.1 aborda as origens físicas do conceito, detalhando o Efeito Talbot e sua relação com a difração de Fresnel. A Seção 3.2 apresenta a definição formal da DFnT. Finalmente, a Seção 3.3 detalha as principais propriedades da DFnT, como a unitariedade, circularidade, autovalores, autovetores e a transformação por similaridade.

3.1 ORIGENS: O EFEITO TALBOT

Quando a difração de Fresnel ocorre sobre uma estrutura com aberturas igualmente espaçadas por uma distância $d \in \mathbb{R}^*$, forma-se uma sequência de réplicas do campo propagado a partir da grade de difração em posições discretas ao longo do eixo de propagação. Em particular, o campo resultante reproduz uma autoimagem da grade em uma distância específica, esse fenômeno é conhecido como Efeito Talbot.

Definindo a distância Z_T, de modo

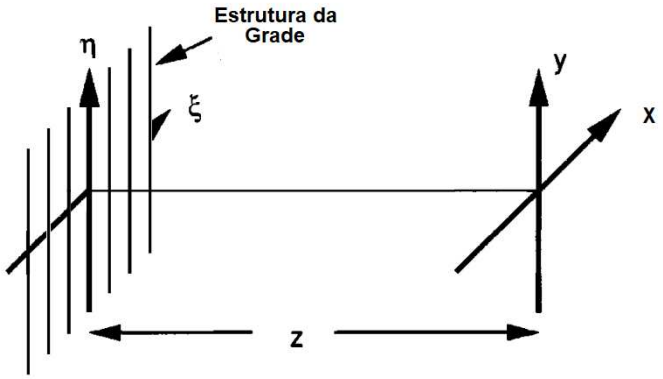
$$Z_T \triangleq \frac{d^2}{\lambda}, \tag{3.1}$$

em que λ representa o comprimento de onda da luz incidente. Autoimagens completas do campo original sobre a estrutura com aberturas periódicas surgem em múltiplos inteiros de $2Z_T$. Já versões fracionárias, muitas vezes deslocadas lateralmente, aparecem em distâncias $z = Z_T/N$, com $N \in \mathbb{N}$. Tal comportamento decorre da interferência coerente entre os diversos harmônicos espaciais induzidos pela periodicidade da grade.

Considere a configuração geométrica de uma grade de difração ilustrada na Figura 2. A grade está no plano $z = 0$, sendo iluminada por uma onda plana monocromática de amplitude unitária. Nesse arranjo, o campo imediatamente após a grade coincide com a função de transmitância $t(\xi)$. A forma como o campo escalar se propaga para distâncias finitas $z > 0$, sob a aproximação de Fresnel, resulta na formação das autoimagens do Efeito Talbot visualizadas na Figura 3.

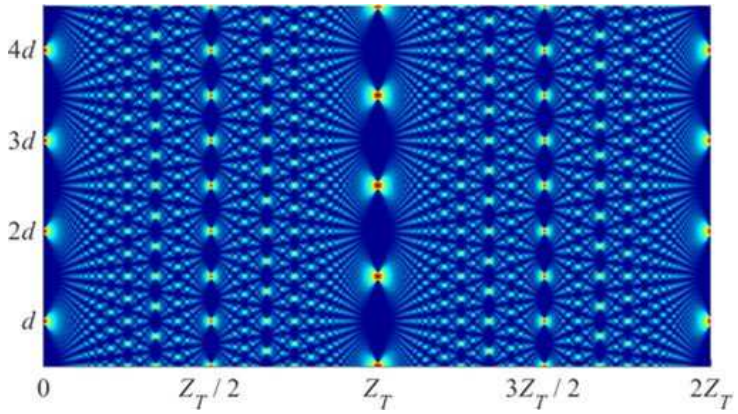
[1] A propagação de ondas ópticas em regime de difração de Fresnel sobre estruturas periódicas é um fenômeno conhecido como Efeito Talbot.

Figura 2 – Geometria da grade utilizada para o Efeito Talbot



Fonte: Adaptado de (GOODMAN, 1968).

Figura 3 – Padrão de repetição do campo transmitido: visualização do Efeito Talbot



Fonte: (OUYANG; ZHAO, 2016).

3.2 A TRANSFORMADA DE FRESNEL NO DOMÍNIO DISCRETO

A DFnT, surge naturalmente no contexto da difração de Fresnel em grades periódicas, especialmente no estudo do Efeito Talbot. A DFnT descreve os coeficientes do campo óptico observados nas autoimagens formadas pela difração de uma grade de difração periódica, em posições discretas ao longo da direção de propagação. Em particular, ela fornece os coeficientes de campo da imagem de Talbot na distância $z = \frac{Z_T}{N} = \frac{d^2}{N\lambda}$, tal como descrito em (OUYANG; ZHAO, 2016).

Historicamente, formulações anteriores da DFnT apresentavam uma degenerescência estrutural, o que limitava sua aplicação como uma ferramenta matemática geral. Essa degenerescência surgia do fato de que, para certas paridades de N, a matriz de transformação não era completa, refletindo as distâncias em que o campo resultante originava de interferências destrutivas. Essa limitação foi superada em uma formulação recente que propõem uma definição consistente da matriz da DFnT de dimensão $N \times N$ para qualquer valor de N, eliminando tal degenerescência (OUYANG *et al.*, 2015).

Neste contexto, define-se a DFnT para modelar o padrão de difração unidirecional no domínio discreto gerado por uma grade de difração iluminada por uma onda plana monocromática. A matriz $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, cujos elementos são dados por

$$\Phi_{m,n} \triangleq \frac{\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{N}} \times \begin{cases} \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{N}(m-n)^2\right], & N \equiv 0 \pmod 2 \\ \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{N}\left(m-n+\frac{1}{2}\right)^2\right], & N \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \tag{3.2}$$

em que $m, n = 0, 1, \ldots, N-1$ são os índices dos elementos e N é o número de amostras.

A ação da matriz $\mathbf{\Phi}$ sobre o vetor de transmitância discreto $\mathbf{v}_\mathrm{t}$ produz o padrão de difração discreto:

$$\mathbf{v}_\mathrm{T} = \mathbf{\Phi}\mathbf{v}_\mathrm{t}, \tag{3.3}$$

em que $\mathbf{v}_\mathrm{t} = [t[0], t[d/N], \ldots, t[(N-1)d/N]]^\intercal$, $t[n] = t(\xi)|_{\xi=n\frac{d}{N}}$, $n = 0, \cdots, N-1$, é a transmitância no domínio discreto e $t(\xi)$ é a transmitância contínua e periódica, com período d, associada à grade de difração.

O vetor resultante $\mathbf{v}_\mathrm{T}$ da aplicação de $\mathbf{\Phi}$ contém os coeficientes do campo difratado nos pontos de máximo de Talbot. Esse formalismo matricial encapsula a física do Efeito Talbot em uma representação discreta compacta. A paridade de N determina o padrão de autoimagem que emerge, refletindo o alinhamento dos picos de interferência construtiva na grade, enquanto os elementos $\Phi_{m,n}$ podem ser interpretados como a contribuição de amplitude complexa de cada ponto da grade para um ponto de observação.

3.3 PROPRIEDADES DA DFnT

As propriedades fundamentais da DFnT são analisadas em detalhes por (OUYANG *et al.*, 2015). Nesse trabalho, os autores não apenas apresentam a formulação não degenerada da DFnT, como também investigam suas principais características estruturais, com destaque para a circularidade, unitariedade e transformação por similaridade. Com base nos resultados estabelecidos por Ouyang *et al.* (2015), descrevem-se a seguir essas propriedades.

i) Unitariedade:

A matriz $\mathbf{\Phi}$ da DFnT satisfaz a condição de unitariedade:

$$\mathbf{\Phi}^\dagger\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\dagger = \mathbf{I}_N, \tag{3.4}$$

em que $\mathbf{\Phi}^\dagger$ denota a transposta conjugada de $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{I}_N$ é a matriz identidade de ordem N.

Essa propriedade garante conservação de energia sob a transformação, além de assegurar que a inversa da DFnT seja simplesmente $\mathbf{\Phi}^\dagger$. Em contextos físicos, isso reflete a reversibilidade da propagação óptica em meios homogêneos e livres de perdas, mantendo inalterada a densidade de potência total do campo.

ii) Circularidade:

A matriz DFnT têm estrutura de deslocamento cíclico tanto para N par quanto ímpar, isto é:

$$\Phi_{m,n} = \Phi_{0,(n-m)_N};\ \forall\, m,n \in \{0,1,\ldots,N-1\}. \tag{3.5}$$

iii) Periodicidade:

Os elementos da DFnT também são periódicos

$$\begin{aligned}\Phi_{m,n} &= \Phi_{(m+aN)_N,(n+bN)_N} \\ &= \Phi_{m+aN,n+bN},\end{aligned} \tag{3.6}$$

em que $a, b \in \mathbb{Z}$, e $(\cdot)_N$ denota a operação módulo-N.

Essa propriedade reflete a periodicidade natural resultante da periodicidade da transmitância no domínio contínuo. Além disso, se N é par, então $\mathbf{\Phi}$ é simétrica $\Phi_{m,n} = \Phi_{n,m}$. Por outro lado, se N é ímpar, então $\mathbf{\Phi}$ não é simétrica, posto que $\Phi_{m,n} = \Phi_{n-1,m}$.

iv) Autovalores e autovetores:

A DFnT, por ser circulante, pode ser diagonalizada pela matriz da DFT normalizada. Os autovalores correspondentes ao k-ésimo vetor coluna da DFT são dados por

$$\gamma_k = \begin{cases} \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{N}k^2\right), & N \equiv 0 \pmod 2 \\ \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{N}k\,(k+1)\right), & N \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

v) Transformação por similaridade

A transformação por similaridade de uma matriz circulante $\mathbf{C}$ pela DFnT resulta na própria matriz, isto é

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi C \Phi}^{\dagger} \tag{3.7}$$

$$= \mathbf{C}. \tag{3.8}$$

4 O SISTEMA DE COMUNICAÇÃO OCDM

Este capítulo trata do emprego da DFnT para fins de comunicação digital de dados, posto que a DFnT pode ser implementada de forma computacionalmente eficiente utilizando a DFT e operadores de fase quadrática. Dá-se o nome de sistema OCDM ao uso da DFnT em sistemas de comunicação digital de dados. A arquitetura do sistema OCDM é baseada na utilização de sinais *chirp* ortogonais, cuja definição e propriedades são derivadas da DFnT. O sistema OCDM é projetado para transmitir informações através de canais de comunicação e corrompidos pela presença de ruído aditivo.

A estrutura do capítulo segue uma progressão que detalha os componentes do sistema. A Seção 4.1 aborda a caracterização de sinais *chirp*, que são a base física do sistema. A Seção 4.2 apresenta o sistema OCDM, estabelecendo a conexão entre os conceitos ópticos da transformada de Fresnel e sua aplicação para modulação multiportadora. Esta seção também detalha a relação entre a DFnT e a DFT, que permite a implementação eficiente do sistema OCDM, a arquitetura dos componentes transmissor e receptor e a equalização no domínio da frequência.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DE SINAIS CHIRPS

Sinais *chirp* são aqueles cuja fase varia não linearmente com o tempo. A maioria das aplicações considera o sinal de frequência modulada, cuja frequência instantânea evolui linearmente ou, equivalentemente, cuja fase muda quadraticamente ao longo do tempo, como apresentado na Figura 4. O sinal *chirp*, neste caso, pode ser representado por

$$\psi(t) = \exp\left[\mathrm{j}\left(\pi a t^2 + \theta_0\right)\right], \tag{4.1}$$

em que $a \in \mathbb{R}_*$ é a *taxa de chirp* e θ_0 é a fase inicial. A frequência instantânea do sinal é dada por

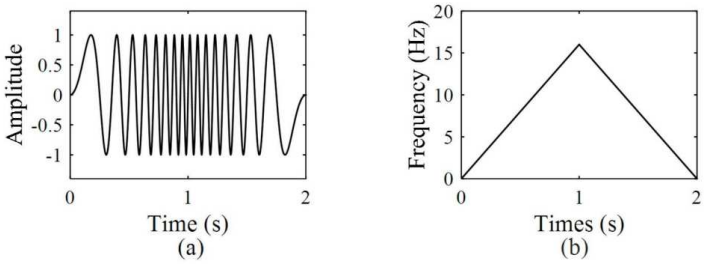
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\pi a t^2 + \theta_0\right) \tag{4.2}$$

$$= at. \tag{4.3}$$

Quando o *chirp* é limitado a um intervalo de duração T, sua largura de banda B é determinada pela taxa de *chirp* a e por T. Por utilizarem um espectro de banda larga, esses sinais apresentam elevada robustez frente a ruídos, desvanecimento e efeitos de multipercurso. (OUYANG; ZHAO, 2016)

O trabalho de Ouyang e Zhao (2016) introduz o OCDM, um sistema de multiplexação que define um conjunto de formas de onda *chirp* mutuamente ortogonais. Essa ortogonalidade permite que múltiplos sinais coexistam na mesma largura de banda e no mesmo intervalo de tempo, sem causar interferência entre si. O princípio fundamental por trás do OCDM é a DFnT apresentada nos capítulos anteriores. Nessa abordagem, cada

Figura 4 – Ilustração de *chirp*



Legenda: (a) forma de onde de um *chirp* linear; (b) espectrograma

Fonte: (OUYANG; ZHAO, 2016).

forma de onda ortogonal funciona como uma subportadora. Sua amplitude e fase podem ser moduladas para transmitir dados, utilizando esquemas de modulação digital como M-PSK, M-PAM ou M-QAM.

4.2 O SISTEMA OCDM

A aplicação da DFnT para comunicação digital de dados, ou seja, sistema OCDM, envolve a transposição de conceitos originalmente desenvolvidos no contexto da óptica para o domínio no tempo contínuo e discreto. Essa adaptação se baseia na premissa de que o efeito Talbot, tradicionalmente descrito como um fenômeno de reconstrução periódica de padrões de difração no espaço, pode ser reinterpretado de forma análoga nos tempos contínuo e discreto.

A seguir, detalha-se a estrutura matemática do sistema OCDM, começando pela definição da DFnT e sua relação fundamental com a DFT, que é a base para sua implementação eficiente.

4.2.1 **Relação entre a DFnT e a DFT**

A base matemática da DFnT pode ser melhor compreendida ao contrastá-la com a tradicional DFT. O núcleo da DFT normalizada, que define os elementos da sua matriz $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{W}_N$, é descrito por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m,n} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}mn\right) \\ &= \frac{W_N^{mn}}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que $m, n = 0, 1, \cdots, N-1$,

$$W_N = \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}\right), \tag{4.5}$$

$\mathbf{W}_N$ é a matriz da DFT, cujos elementos são dados por W_N^{mn}.

Em contraste, o núcleo da DFnT, incorpora termos de fase quadrática adicionais, com definições distintas para dimensões N pares e ímpares, posto que

$$\Phi_{m,n} = \frac{\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{N}} \times \begin{cases} \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{N}(m^2 - 2mn + n^2)\right] & \text{se } N \text{ é par} \\ \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4N}\right)\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{N}(m^2 + m - 2mn + n^2 - n)\right] & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{4.6}$$

A principal vantagem estrutural do núcleo da DFnT é que ele pode ser fatorado. Ela se decompõe em um termo bilinear, idêntico ao da DFT, e dois termos de fase quadráticos que dependem apenas do índice de saída m ou do índice de entrada n. Essa propriedade permite que a matriz da DFnT, $\mathbf{\Phi}$, seja expressa como o produto de três matrizes, ou seja,

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Theta}_2 \boldsymbol{\mathcal{F}} \mathbf{\Theta}_1, \tag{4.7}$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ é a matriz da DFT, enquanto $\mathbf{\Theta}_1$ e $\mathbf{\Theta}_2$ são matrizes diagonais cujos elementos são dados por

$$\Theta_{1,m,m} = \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}\right) \times \begin{cases} \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{N}m^2\right) & \text{se } N \text{ é par} \\ \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{4N}\right)\exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{N}(m^2 + m)\right] & \text{se } N \text{ é ímpar} \end{cases} \tag{4.8}$$

e

$$\Theta_{2,n,n} = \begin{cases} \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{N}n^2\right) & \text{se } N \text{ é par} \\ \exp\left[\mathrm{j}\frac{\pi}{N}(n^2 - n)\right] & \text{se } N \text{ é ímpar,} \end{cases} \tag{4.9}$$

respectivamente. Note que a representação dada por (4.7) permite implementar a DFnT utilizando uma DFT em três etapas, a saber: multiplicação por $\mathbf{\Theta}_1$, aplicação da DFT e multiplicação por $\mathbf{\Theta}_2$. Consequentemente, a complexidade computacional é um pouco acima daquela demandada pela DFT.

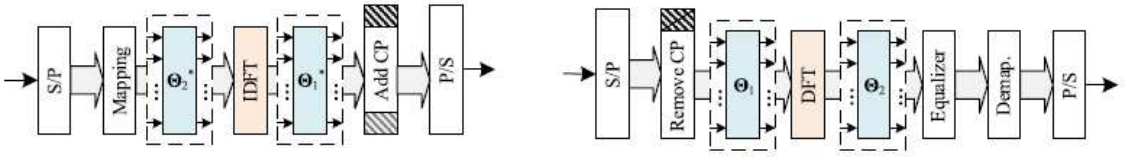
4.2.2 **Arquitetura do sistema OCDM**

A Figura 5 ilustra os diagramas de bloco do transmissor e do receptor do sistema OCDM. No transmissor mostrado na Figura 5a, a sequência de bits é disposta de forma paralela e blocos de bits são mapeados a pontos das constelações utilizadas (p.ex., M-QAM ou M-PSK), ou seja, a modulação digital é aplicada. A seguir, o vetor $\dot{\mathbf{x}}$ é obtido. Em seguida, esses dados são processados pela inversa da DFnT, dada por $\mathbf{\Phi}^\dagger$. O vetor de símbolos transmitidos $\mathbf{x}$ no domínio do tempo discreto é, portanto, obtido por

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}^\dagger \dot{\mathbf{x}}. \tag{4.10}$$

A implementação da transformada inversa é feita com a sequência de operações $\mathbf{\Theta}_2^*$, transformada inversa de Fourier discreta (do inglês, *inverse discrete Fourier transform*) (IDFT) $\boldsymbol{\mathcal{F}}^\dagger$ e $\mathbf{\Theta}_1^*$, conforme a fatoração em (4.7). Um prefixo cíclico (do inglês, *cyclic*

Figura 5 – Diagrama de bloco do sistema OCDM.



(a) (b)

Legenda: (a) Diagrama do transmissor; (b) Diagrama do receptor.

Fonte: (OUYANG; ZHAO, 2016).

prefix) (CP) de comprimento $L_{\mathrm{CP}} \geq L_{\mathrm{h}} - 1$, em que L_{h} é o comprimento do canal, é incluído no vetor $\mathbf{x}$, posto que essa ação permite tornar a matriz de convolução do canal circulante e, consequentemente, viabiliza a equalização no domínio da frequência, ou seja, mitigar a interferência intersimbólica (do inglês, *intersymbol interference*) (ISI).

Considerando sincronização perfeita e a remoção no CP no receptor, mostrado na Figura 5b, tem-se o vetor $\mathbf{y}$. A obtenção desse vetor considera que o canal de comunicação é linear e invariante no tempo (LIT) e representado vetorialmente por $\mathbf{h} = [h[0], h[1], \cdots, h[L_{\mathrm{h}} - 1]]^{\intercal}$. O sinal recebido é então transformado de volta para o domínio da DFnT aplicando a matriz $\mathbf{\Phi}$. O sinal recebido, após a passagem pelo canal, é modelado por

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{\mathrm{h}}\mathbf{x} + \mathbf{v} \\ &= \mathbf{C}_{\mathrm{h}}\mathbf{\Phi}^{\dagger}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

em que $\mathbf{C}_{\mathrm{h}}$ é a matriz circulante de convolução do canal, em que a linhas da matriz são obtidas pela permutação do vetor $\mathbf{h}$, e $\mathbf{v}$ representa o ruído.

4.2.3 Equalização no Domínio da Frequência

Uma das principais vantagens da arquitetura do OCDM é a possibilidade de realizar a equalização de canal diretamente no domínio da frequência, de forma conjunta com a aplicação da DFnT.

No receptor, após a remoção do CP e a conversão para o domínio da frequência por meio da DFT, o vetor resultante pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{y} \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{C}_{\mathrm{h}}\mathbf{\Phi}^{\dagger}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{v} \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{C}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{\Phi}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Devido às propriedades de circularidade da matriz do canal $\mathbf{C}_{\mathrm{h}}$ e da DFnT $\mathbf{\Phi}$, os termos $\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{C}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}$ e $\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{\Phi}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}$ se tornam matrizes diagonais. Isso significa que os efeitos do canal

e da DFnT, são convertidos em simples fatores de ganho multiplicativos no domínio da frequência. Assumindo $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{C}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}$ e $\mathbf{\Gamma}^{\dagger} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{\Phi}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}$ em (4.12), obtêm-se

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}\mathbf{\Gamma}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{x} + \mathbf{V}, \tag{4.13}$$

em que $\mathbf{V} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{v}$ é a representação do ruído do domínio da frequência discreta. Essa representação do canal através de uma matriz diagonal permite a aplicação de um equalizador simples por subportadora, como o forçamento a zero (do inglês, *zero forcing*) (ZF) ou o mínimo erro quadrático médio (do inglês, *minimum mean squared error*) (MMSE). O equalizador atua sobre cada elemento do vetor $\mathbf{Y}$, dividindo-o pelo ganho de canal correspondente. Em seguida, o mesmo pode ser feito para a matriz $\Gamma^{\dagger}$. Essas operações, seguidas de uma IDFT, resultam na seguinte estimativa do vetor transmitido:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\mathbf{\Gamma}^{\dagger-1}\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}\mathbf{\Gamma}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{x} + \mathbf{V}\right)\\ &= \mathbf{x} + \boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\mathbf{\Gamma}^{\dagger-1}\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\mathbf{V}\\ &= \mathbf{x} + \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{h}},\end{aligned} \tag{4.14}$$

sendo $\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{h}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\mathbf{\Gamma}^{\dagger-1}\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\mathbf{V}$. Finalmente, os elementos do vetor $\hat{\mathbf{x}}$ são submetidos ao processo de detecção de símbolos, tendo como referência as constelações utilizadas pelo transmissor.

5 SISTEMA OCDM NA BANDA BASE

O sistema OCDM foi originalmente concebido para a transmissão de dados na banda passante. Entretanto, a comunicação de dados através de cabos (p.ex., telefônicos e de energia) demanda a adaptação do sistema OCDM para a transmissão na banda base. Noutras palavras, em vez de transmitir um bloco de símbolos complexos na banda passante, passasse a transmitir um bloco de símbolos reais na banda base. Neste capítulo, propõe-se uma nova abordagem baseada na representação real de uma matriz de transformação unitária, que, por sua construção, resulta em uma matriz de transformação puramente real, mas que preserva todas as propriedades da transformada complexa original. Esta representação apresenta uma fundamentação teórica sólida e, sob algumas considerações, se reduz ao resultado obtido pelo método descrito no OCDM tipo II em (DIB *et al.*, 2020).

Este capítulo está estruturado para apresentar o desenvolvimento e as propriedades desse novo formalismo. A Seção 5.1 detalha a fundamentação teórica da representação real de transformações complexas, explorando as propriedades-chave da matriz de representação real, como sua ortogonalidade e a preservação da estrutura da transformada original. Em seguida, a Seção 5.2 aplica esse formalismo para definir a arquitetura de um sistema de comunicação em banda base, ilustrando o funcionamento do transmissor e do receptor, e por fim discutindo os prós e contras desse esquema em comparação com abordagens existentes.

5.1 A REPRESENTAÇÃO REAL DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES COMPLEXAS

O pilar para a construção de um sistema de comunicação digital de dados na banda base a partir de uma transformada inerentemente complexa, é a representação de operações em espaços vetoriais complexos por meio de matrizes e vetores sobre o corpo dos números reais. Este conceito é formalizado pelo princípio do isomorfismo entre espaços vetoriais.

Um espaço vetorial $\mathbb{C}^N$ sobre o corpo dos números complexos pode ser igualmente visto como um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}^{2N}$. A transição entre estes dois pontos de vista é estabelecida por um isomorfismo de espaços vetoriais $\zeta : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^{2N}$. Para um vetor qualquer $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, expresso por suas partes real e imaginária $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{j}\mathbf{y}$, em que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, o mapeamento é definido como a concatenação de suas componentes real e imaginária, ou seja,

$$\zeta(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Considere uma transformação linear no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^N$, representada por uma matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Essa transformação atua sobre um vetor complexo $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{j}\mathbf{y}$, com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$, produzindo um novo vetor complexo $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathrm{j}\mathbf{v}$, em que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$.

O objetivo é obter uma matriz real correspondente, $\mathbf{M}_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$, que descreva a mesma transformação no espaço $\mathbb{R}^{2N}$. Isso significa que, ao representar os vetores complexos $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$ como vetores reais expandidos $\zeta(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix}\mathbf{x} & \mathbf{y}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ e $\zeta(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$, a relação $\zeta(\mathbf{w}) = \mathbf{M}_{\mathrm{R}}\zeta(\mathbf{z})$ deve ser satisfeita.

Para encontrar $\mathbf{M}_{\mathrm{R}}$, a matriz complexa $\mathbf{M}$ é decomposta em suas partes real e imaginária, a saber: $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathrm{j}\mathbf{B}$, sendo que $\mathbf{A} = \mathrm{Re}\{\mathbf{M}\}$ e $\mathbf{B} = \mathrm{Im}\{\mathbf{M}\}$ são matrizes reais de dimensão $N \times N$. Aplicando essa decomposição à transformação $\mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{z}$, obtêm-se

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathrm{j}\mathbf{v} &= (\mathbf{A} + \mathrm{j}\mathbf{B})(\mathbf{x} + \mathrm{j}\mathbf{y});\\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathrm{j}\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathrm{j}\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathrm{j}^2\mathbf{B}\mathbf{y};\\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{y}) + \mathrm{j}(\mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ao igualar as partes real e imaginária do resultado, tem-se um sistema de equações lineares para as componentes de saída $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de modo que

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{y} \tag{5.3}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{5.4}$$

Tal sistema pode ser reescrito de forma compacta utilizando uma matriz de bloco

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

a qual está na forma $\zeta(\mathbf{w}) = \mathbf{M}_{\mathrm{R}}\zeta(\mathbf{z})$, como desejado.

A estrutura matricial dada por (5.5) é a chave para a generalização, posto que mostra como traduzir a estrutura da multiplicação complexa para a linguagem da álgebra linear com matrizes reais. Da mesma forma que um número complexo pode ser representado por uma matriz real 2×2, observa-se que uma matriz complexa de $N \times N$ pode ser representada por uma matriz real de $2N \times 2N$, abrindo o caminho para a definição da nova interpretação da DFnT e, consequentemente, para a obtenção do sistema OCDM na banda base.

5.1.1 **Generalização para matrizes unitárias complexas**

Considere uma matriz complexa $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ que representa uma transformação linear unitária, satisfazendo a condição $\mathbf{\Psi}^{\dagger}\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}_N$. Ao decompor a matriz em suas partes real e imaginária, $\mathbf{\Psi} = \mathbf{A} + \mathrm{j}\mathbf{B}$, com $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, a condição de unitariedade impõe restrições específicas sobre as matrizes reais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Para demonstrar essas restrições, é

necessário expandir a definição de unitariedade

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}^{\dagger}\boldsymbol{\Psi} &= (\mathbf{A}+\mathrm{j}\mathbf{B})^{\dagger}(\mathbf{A}+\mathrm{j}\mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{A}^{\intercal}-\mathrm{j}\mathbf{B}^{\intercal})(\mathbf{A}+\mathrm{j}\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}+\mathrm{j}\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B}-\mathrm{j}\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}-\mathrm{j}^{2}\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B} \\ &= (\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B})+\mathrm{j}(\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B}-\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Note que o produto $\boldsymbol{\Psi}^{\dagger}\boldsymbol{\Psi}$ é igual à matriz identidade real $\mathbf{I}_N$ se a parte real do resultado for $\mathbf{I}_N$ e a parte imaginária for a matriz nula $\mathbf{0}$. Consequentemente, tem-se as seguintes relações:

$$\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}=\mathbf{I}_N \tag{5.7}$$

$$\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B}-\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B}=\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}. \tag{5.8}$$

Note que (5.7) e (5.8) caracterizam as condições que as componentes real e imaginária, respectivamente, de uma matriz complexa devem satisfazer para que a matriz seja unitária.

5.1.2 Propriedades da matriz de representação real de matrizes unitárias

Considere uma matriz complexa $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ que representa uma transformação linear unitária e sua representação real, $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}} \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$, dada por

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

As seguintes propriedades aplicam-se:

i) Ortogonalidade

A matriz $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$ é uma matriz real unitária, ou seja, ortogonal. Essa propriedade é fundamental, pois garante que a representação real da transformação preserve o produto escalar no espaço $\mathbb{R}^{2N}$. Para demonstrar sua ortogonalidade, calcula-se o produto $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$. Primeiramente, a transposta da matriz $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$ é

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\intercal} & \mathbf{B}^{\intercal}\\ -\mathbf{B}^{\intercal} & \mathbf{A}^{\intercal}\end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Em seguida, realiza-se a multiplicação de matrizes por blocos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}} &= \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\intercal} & \mathbf{B}^{\intercal}\\ -\mathbf{B}^{\intercal} & \mathbf{A}^{\intercal}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & -\mathbf{B}\\ \mathbf{B} & \mathbf{A}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B} & -\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B}+\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}\\ -\mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{B} & \mathbf{B}^{\intercal}\mathbf{B}+\mathbf{A}^{\intercal}\mathbf{A}\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Sabe-se que a condição de unitariedade da matriz complexa $\mathbf{\Psi}$ implica nas condições (5.7) e (5.8), substituindo essas relações no produto de blocos, obtêm-se o seguinte resultado

$$\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\mathsf{T}}\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2N}. \tag{5.12}$$

Portanto, a matriz de representação real $\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}$ é ortogonal, confirmando que ela preserva a propriedade de unitariedade da transformação original no domínio real.

ii) Preserva a estrutura de $\mathbf{\Psi}$

A equivalência entre as representações complexa e real pode ser visualizada usando uma transformação de similaridade. O objetivo é mostrar que a matriz real $\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}$ é similar a uma matriz bloco-diagonal que contém as matrizes complexas $\mathbf{\Psi}$ e $\mathbf{\Psi}^*$. Essa relação de similaridade confirma que a representação real possui os mesmos autovalores da matriz complexa original.

Para isso, define-se uma matriz unitária de transformação $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ como

$$\mathbf{U} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathrm{j}\mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

A transformação unitária, definida em (5.13), é uma matriz de transformação de base padrão utilizada para mapear os sinais do domínio real para o complexo (TSE; VISWANATH, 2005). A matriz $\mathbf{U}$ é unitária, ou seja, $\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{I}_{2N}$ e sua transposta conjugada (Hermitiana) é dada por

$$\mathbf{U}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathrm{j}\mathbf{I}_N \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

Aplicando a transformação de similaridade na matriz $\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}\mathbf{U} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathrm{j}\mathbf{I}_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathrm{j}\mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathrm{j}\mathbf{I}_N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathrm{j}\mathbf{B} & \mathbf{A}+\mathrm{j}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}+\mathrm{j}\mathbf{A} & \mathbf{B}-\mathrm{j}\mathbf{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathrm{j}\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}+\mathrm{j}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Psi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Noutras palavras, a transformação de similaridade demonstra que a matriz real $\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}$ é similar à matriz $\mathbf{D}$, que é bloco-diagonal e contém a matriz complexa original $\mathbf{\Psi}$ e sua conjugada complexa $\mathbf{\Psi}^*$.

Considere agora um vetor complexo $\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$. Representando-o por seu correspondente real de dimensão $2N \times 1$ como $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\} & \mathrm{Im}\{\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\}\end{bmatrix}^{\intercal}$, a operação $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}\dot{\mathbf{x}}$ pode ser avaliada utilizando a decomposição obtida para $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$, ou seja,

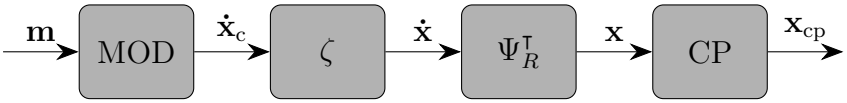
$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathrm{j}\mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathrm{j}\mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\} \\ \mathrm{Im}\{\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\}\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathrm{j}\mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}^* \\ \dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathrm{j}\mathbf{I}_N & -\mathrm{j}\mathbf{I}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}})^* \\ \boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}})^* + \boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}} \\ \mathrm{j}(\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}})^* - \mathrm{j}\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\} \\ \mathrm{Im}\{\boldsymbol{\Psi}\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}\}\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Este resultado comprova que a multiplicação de um vetor real $\dot{\mathbf{x}}$ pela matriz real $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$ é equivalente à multiplicação do vetor complexo original $\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}}$ pela matriz complexa $\boldsymbol{\Psi}$, seguida pela separação das componentes real e imaginária, o que equivale ao processo de modulação do OCDM tipo II de (**??**).

5.2 REPRESENTAÇÃO MATRIZ REAL DE MATRIZES COMPLEXAS PARA COMUNICAÇÃO EM BANDA BASE

Com base na representação real de matrizes complexas, é possível propor uma matriz de transformação $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$ que atua diretamente sobre vetores de dados puramente reais. Essa abordagem preserva a estrutura e a ortogonalidade da transformada complexa original $\boldsymbol{\Psi}$, permitindo a implementação de um esquema de comunicação em banda base para qualquer transformada unitária $\boldsymbol{\Psi}$. Os diagramas de blocos mostrados nas Figuras 6 e 7 ilustram respectivamente a arquitetura do transmissor e do receptor que utiliza este formalismo.

Figura 6 – Diagrama de blocos do transmissor

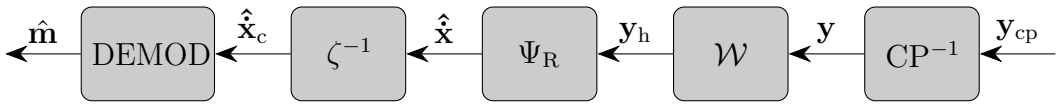


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Conforme ilustrado na Figura 6, o transmissor processa os dados de uma mensagem de entrada $\mathbf{m}$ por meio de uma série de etapas. Inicialmente, o fluxo de bits $\mathbf{m}$ é agrupado e modulado, gerando um vetor de N símbolos complexos representado por $\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{c}} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$. Em

seguida, esses símbolos passam por um mapeamento ζ, que os converte para o formato real fazendo a concatenação da parte real com a parte imaginária, como apresentado em (5.1), resultando em um vetor de dados real expandido de dimensão $2N \times 1$, denotado por $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{2N\times 1}$. Esse vetor real é então processado pela transformada inversa, representada pela matriz transposta $\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}$, o que gera o vetor de sinal no domínio do tempo discreto $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}}$. Posteriormente, adiciona-se um CP a esse vetor, formando o vetor $\mathbf{x}_{\mathrm{cp}}$, que representa o sinal transmitido através do canal, modelado como um sistema LIT e cuja resposta ao impulso é vetorialmente representada por $\mathbf{h} = [h[0], h[1], \cdots, h[L_{\mathrm{h}}-1]]^{\intercal}$, sendo $\{h[n]\}_{n=0}^{L_{\mathrm{h}}-1}$ a resposta ao impulso do canal no tempo discreto.

Figura 7 – Diagrama de blocos do receptor



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Conforme ilustrado na Figura 7, o receptor executa as operações inversas às do transmissor para recuperar o fluxo de bits original. O processo se inicia com a remoção do CP do sinal recebido $\mathbf{y}_{\mathrm{cp}}$, obtendo o vetor $\mathbf{y}$. Considerando ruído aditivo representado pelo vetor $\mathbf{v}$, o vetor $\mathbf{y}$ pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \mathbf{C}_{\mathrm{h}}\mathbf{x} + \mathbf{v} \\ &= \mathbf{C}_{\mathrm{h}}\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{v},\end{aligned} \tag{5.17}$$

em que $\mathbf{C}_{\mathrm{h}}$ é a matriz circulante que representa o canal. Este vetor é então submetido a um processo de equalização, representado pelo bloco $\mathcal{W}$, no domínio da frequência para compensar os efeitos do canal. Primeiramente, o sinal é levado ao domínio da frequência pela DFT

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{C}_{\mathrm{h}}\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{v}. \tag{5.18}$$

Como a matriz de convolução $\mathbf{C}_{\mathrm{h}}$ é circulante, ela é diagonalizada pela DFT, de modo que $\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{C}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger} = \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}$, em que $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}} = \mathrm{diag}\{H[0], H[1], \cdots, H[2N-1]\}$, $\{H[k]\}_0^{2N-1}$ é a DFT da sequência $\{h_e[n]\}_0^{2N-1}$, obtida a partir do emprego do *zero-padding* para estender a sequência $\{h[n]\}_0^{N-1}$. Assim, a expressão se torna

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}, \tag{5.19}$$

em que $\mathbf{V} = \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{v}$ é o ruído no domínio da frequência. A equalização ZF é aplicada multiplicando-se o vetor que representa o símbolo recebido no domínio da frequência discreta pela matriz diagonal que representa a inversa da resposta em frequência do canal

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\mathrm{h}} &= \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\mathbf{Y} \\ &= \boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\mathbf{V}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

O vetor resultante do processo de equalização baseada no critério ZF é, então, retornado ao domínio do tempo discreto, conforme abaixo:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{\mathrm{h}} &= \boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\mathbf{Y}_{\mathrm{h}} \\ &= \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\mathbf{V} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{v}_{\mathrm{h}}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

O vetor $\mathbf{y}_{\mathrm{h}}$ é uma estimativa do sinal transmitido $\mathbf{x}$ corrompido por um ruído filtrado pelo equalizador baseado no critério ZF. A seguir, aplica-se a transformada direta $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$ sobre o vetor $\mathbf{y}_{\mathrm{h}}$ para estimar o vetor de dados original

$$\begin{aligned}\hat{\dot{\mathbf{x}}} &= \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}\mathbf{y}_{\mathrm{h}}; \\ &= \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}^{\intercal}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\dagger}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathrm{h}}^{-1}\mathbf{V}); \\ &= \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{h}}, \end{aligned} \tag{5.22}$$

em que $\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{h}}$ representa o ruído resultante no domínio de Fresnel discreto. O vetor estimado $\hat{\dot{\mathbf{x}}}$ é então convertido de volta para a representação em símbolos complexos pelo mapeamento inverso ζ^{-1}, gerando $\hat{\dot{\mathbf{x}}}_c$. Por fim, os símbolos complexos $\hat{\dot{\mathbf{x}}}_c$ são demodulados, resultando no fluxo estimado de bits $\hat{\mathbf{m}}$.

5.2.1 **Prós e contras desse esquema de comunicação**

A adoção da representação matricial real $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{R}}$ para implementar um sistema de comunicação em banda base oferece vantagens e desvantagens, cuja relevância depende fundamentalmente da estrutura da matriz de transformação complexa original, $\boldsymbol{\Psi}$.

A principal vantagem desta abordagem manifesta-se quando a matriz $\boldsymbol{\Psi}$ é uma matriz densa e sem estrutura particular (não circulante). Nesse cenário, a multiplicação matriz-vetor é a operação dominante. Ao converter a operação para o domínio real, o sistema pode alavancar diretamente as rotinas de multiplicação geral de matrizes e vetores (do inglês, *general matrix-Vector multiplication*) (GEMV) de valor real disponíveis em bibliotecas de álgebra linear de alto desempenho, como *Intel MKL* e *OpenBLAS*. Essas bibliotecas são otimizadas para arquiteturas de processadores modernos, explorando recursos como paralelismo em nível de instrução, isto é instrução única, múltiplos dados (do inglês, *single instruction, multiple data*) (SIMD) e unidades multiplicação e acumulação fundidas (do inglês, *fused multiply-accumulate*) (FMA) (OLSHEVSKY, 2003).

Frequentemente, as rotinas para matrizes reais (como DGEMV) recebem um nível de otimização superior ao de suas contrapartes complexas (ZGEMV), pois são cruciais para testes em computação de alto desempenho. Portanto, para transformadas gerais, a representação real pode oferecer um ganho de desempenho computacional, pois explora os *kernels* matemáticos mais otimizados disponíveis no *hardware*, uma estratégia conhecida como "método induzido" para alcançar computação de alto desempenho (ZEE, 2020).

Por outro lado, a principal desvantagem surge quando a matriz de transformação complexa original, $\mathbf{\Psi}$, possui uma estrutura especial que permite uma implementação algorítmica rápida. Um caso notório é quando $\mathbf{\Psi}$ é uma matriz circulante, como na implementação da DFnT. Uma multiplicação por uma matriz circulante de dimensão $N \times N$ é matematicamente equivalente a uma convolução circular, que pode ser computada de forma eficiente através da transformada rápida de Fourier (do inglês, *fast Fourier transform*) (FFT), com uma complexidade computacional de ordem $\mathcal{O}(N \log N)$ (HOU; HUANG; LV, 2024).

No entanto, quando a matriz circulante complexa $\mathbf{\Psi}$ é convertida para sua representação real canônica $\mathbf{\Psi}_{\mathrm{R}}$, a matriz resultante de dimensão $2N \times 2N$ perde a circularidade. A consequência direta é a impossibilidade de aplicar um algoritmo rápido da DFT para acelerar o cálculo. A operação passa a ser uma multiplicação de matriz-vetor genérica, com uma complexidade computacional de ordem $\mathcal{O}(N^2)$, tornando a representação real canônica uma escolha computacionalmente ineficiente nesse contexto. Além disso, a própria matriz $\mathbf{\Psi}$ pode ser fatorada na forma rápida apresentada em (4.7), permitindo uma implementação ainda mais rápida baseada em apenas um DFT. Fica evidente, portanto, a vantagem da abordagem proposta em Dib *et al.* (2020) para o transmissor tipo II. Tal implementação contorna a custosa multiplicação matricial da forma real canônica, garantindo, ao mesmo tempo, que o sinal transmitido seja idêntico, conforme demonstrado pela equivalência em (5.16).

Existem outras formas de se obter uma transformada real, no trabalho de Dib *et al.* (2020), é proposta uma versão real da DFnT que preserva a eficiência computacional, podendo ser implementada com duas DFTs e uma multiplicação por matriz diagonal. Isso levanta um questionamento fundamental sobre as transformadas reais: existe uma "versão rápida" ou uma fatoração eficiente, análoga a $\mathbf{\Theta_2 \mathcal{F} \Theta_1}$, para estas matrizes? Esse questionamento se correlaciona com as propriedades estruturais e algebraicas que diferenciam transformadas puramente reais das baseadas em Fourier complexa, assunto a ser explorado no Capítulo 6.

6 LIMITAÇÕES ESTRUTURAIS NA DECOMPOSIÇÃO DE TRANSFORMADAS REAIS

A comunicação digital na banda base exige que os sinais transmitidos sejam puramente reais, uma restrição que impõe um desafio fundamental ao uso de transformadas complexas fundamentadas em Fourier, tal como DFT e DFnT. Para adaptar essas transformadas ao domínio real, surge a questão central sobre a possibilidade de encontrar matrizes diagonais complexas, $\mathbf{\Lambda}_1$ e $\mathbf{\Lambda}_2$, que resultem em uma matriz de transformação puramente real da forma $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{W}_N \mathbf{\Lambda}_2$.

Este capítulo aborda o problema descrito acima e revela uma limitação intrínseca das transformadas baseadas em Fourier. A análise demonstra que a criação de uma matriz real com esta estrutura é impossível para qualquer dimensão $N > 2$. Esta análise é particularmente relevante para o sistema OCDM. Embora a DFnT, base do sistema OCDM, possa ser representada pela decomposição $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Theta}_2 \boldsymbol{\mathcal{F}} \mathbf{\Theta}_1$, a mesma incompatibilidade estrutural inerente à matriz DFT impede que uma matriz de transformação puramente real seja construída com essa mesma decomposição para dimensões $N > 2$ e, consequentemente, o seu uso para transmissão de dados na banda base.

A estrutura deste capítulo se divide em duas seções principais. Na Seção 6.1, a análise se concentra na derivação da condição de existência. Consequentemente, a relação de fase necessária e suficiente para que a matriz de transformação seja puramente real é matematicamente formulada. Em seguida, a Seção 6.2 aborda a impossibilidade de existência para $N > 2$, apresentando a prova por contradição que demonstra que essa condição não pode ser satisfeita para dimensões superiores a dois.

6.1 DERIVAÇÃO DA CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

Considere a matriz $\mathbf{W}_N$ da DFT de dimensão $N \times N$ cujos elementos na posição (k, n) são dados como W_N^{kn} com os índices $k, n = 0, 1, \cdots, N-1$. Assim sendo, os elementos da matriz conjugada da DFT são dados por

$$W_N^{-kn} = \exp\left(\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn\right). \tag{6.1}$$

Considere ainda as matrizes diagonais complexas $\mathbf{\Lambda_1}$ e $\mathbf{\Lambda_2}$, definidas como $\mathbf{\Lambda_1} \triangleq \mathrm{diag}\{\lambda_{1,0}; \lambda_{1,1}; ...; \lambda_{1,N-1}\}$ e $\mathbf{\Lambda_2} \triangleq \mathrm{diag}\{\lambda_{2,0}; \lambda_{2,1}; ...; \lambda_{2,N-1}\}$ em que $\lambda_{1,k}$ e $\lambda_{2,n}$ são escalares complexos. Note que pré-multiplicar por $\mathbf{\Lambda}_1$ tem o efeito de escalar as linhas de uma matriz, enquanto pós-multiplicar por $\mathbf{\Lambda}_2$ escala as colunas.

Suponha que uma matriz de transformação $\mathbf{M}$ é descrita como o produto $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{W}_N \mathbf{\Lambda}_2$. Para que uma matriz $\mathbf{M}$ seja puramente real ela deve ser igual à sua própria conjugada complexa, elemento a elemento. Formalmente, tem-se

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^*. \tag{6.2}$$

Aplicando a condição de realidade e utilizando a propriedade da conjugada de um produto de matrizes, (6.2) se torna

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{W}_N\mathbf{\Lambda}_2 &= (\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{W}_N\mathbf{\Lambda}_2)^* \\ &= \mathbf{\Lambda}_1^*\mathbf{W}_N^*\mathbf{\Lambda}_2^*. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Esta é a equação matricial fundamental que relaciona as matrizes desconhecidas $\mathbf{\Lambda_1}$ e $\mathbf{\Lambda_2}$ com as matrizes conhecidas $\mathbf{W}_N$.

Para analisar as restrições sobre os elementos individuais em (6.3), traduz-se a equação matricial para a sua forma elemento a elemento. A condição que deve ser satisfeita para todos os pares de índices $(k, n) \in \{0, \ldots, N-1\}^2$ é

$$\lambda_{1,k} W_N^{kn} \lambda_{2,n} = \lambda_{1,k}^* W_N^{-kn} \lambda_{2,n}^*. \tag{6.4}$$

Assumindo que todos os elementos diagonais são não nulos (caso contrário, as linhas ou colunas correspondentes de $\mathbf{M}$ seriam nulas, um caso trivial), pode-se rearranjar a equação (6.4) para isolar os termos desconhecidos de um lado

$$\frac{\lambda_{1,k}\lambda_{2,n}}{\lambda_{1,k}^*\lambda_{2,n}^*} = \frac{W_N^{-kn}}{W_N^{kn}} = W_N^{-2kn}. \tag{6.5}$$

Representando os elementos diagonais complexos na sua forma polar de modo

$$\lambda_{1,k} = |\lambda_{1,k}| \exp\left(\mathrm{j}\theta_k\right), \tag{6.6}$$

bem como

$$\lambda_{2,n} = |\lambda_{2,n}| \exp\left(\mathrm{j}\psi_n\right), \tag{6.7}$$

sendo que θ_k e ψ_n são as fases dos elementos diagonais, substituindo em (6.5) obtêm-se

$$\frac{|\lambda_{1,k}| \exp\left(\mathrm{j}\theta_k\right) |\lambda_{2,n}| \exp\left(\mathrm{j}\psi_n\right)}{|\lambda_{1,k}| \exp\left(-\mathrm{j}\theta_k\right) |\lambda_{2,n}| \exp\left(-\mathrm{j}\psi_n\right)} = \exp\left(\frac{\mathrm{j}4\pi kn}{N}\right). \tag{6.8}$$

As magnitudes $|\lambda_{1,k}|$ e $|\lambda_{2,n}|$ cancelam-se, demonstrando que o problema não impõe restrições sobre as magnitudes dos elementos diagonais, mas sim exclusivamente sobre as suas fases. Consequentemente, (6.8) reduz-se para

$$\exp\left(\mathrm{j}(2\theta_k + 2\psi_n)\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{j}4\pi kn}{N}\right). \tag{6.9}$$

A igualdade de dois exponenciais complexos, implica que os seus argumentos são iguais módulo 2π, ou seja,

$$2(\theta_k + \psi_n) = \frac{4\pi kn}{N} + 2\pi l_{k,n}, \tag{6.10}$$

de modo que para todo par (k,n) existe um $l_{k,n} \in \mathbb{Z}$ dependente de k e n que satisfaz a equação, dividindo (6.10) por 2, chega-se à condição central que governa as fases

$$\begin{aligned}\theta_k + \psi_n &= \frac{2\pi kn}{N} + \pi l_{k,n} \\ \theta_k + \psi_n &\equiv \frac{2\pi kn}{N} \pmod{\pi}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Para que a matriz $\mathbf{M}$ seja real, é condição necessária e suficiente a existência de dois conjuntos de fases $\{\theta_0, \ldots, \theta_{N-1}\}$ e $\{\psi_0, \ldots, \psi_{N-1}\}$ que satisfaçam a congruência estabelecida para todos os pares de índices (k, n), com $k, n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

6.2 IMPOSSIBILIDADE DE EXISTÊNCIA PARA $N > 2$

Dada a condição de existência sobre a decomposição da matriz $\mathbf{M}$ pode-se demonstrar que, para qualquer dimensão inteira $N > 2$, não existe nenhum par de conjuntos de fases $\{\theta_k\}$ e $\{\psi_n\}$ capaz de satisfazer a congruência de (6.11) para todos os valores de k e n.

A demonstração será conduzida por contradição. Suponha, por hipótese, que existam conjuntos de fases θ_k e ψ_n que verifiquem a congruência para todos os pares de índices. Sendo a condição válida para todos os casos, ela deve, em particular, ser satisfeita quando $k = 0$. Substituindo $k = 0$ em (6.11), obtém-se

$$\begin{aligned} \theta_0 + \psi_n &\equiv \frac{2\pi \cdot 0 \cdot n}{N} \pmod{\pi}; \\ \theta_0 + \psi_n &\equiv 0 \pmod{\pi}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Isolando o termo ψ_n, chega-se a uma restrição fundamental sobre as fases da segunda matriz diagonal:

$$\psi_n \equiv -\theta_0 \pmod{\pi}, \tag{6.13}$$

que deve ser válida para todos os valores de $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Como o lado direito, $-\theta_0$, é um valor constante que não depende de n, conclui-se que todas as fases ψ_n devem ser iguais entre si, módulo π.

Substituindo o resultado da equação (6.13) na condição inicial dada por (6.11), obtém-se, para qualquer par (k, n):

$$\theta_k - \theta_0 \equiv \frac{2\pi kn}{N} \pmod{\pi}. \tag{6.14}$$

Rearranjando os termos de forma a isolar θ_k, resulta-se

$$\theta_k \equiv \theta_0 + \frac{2\pi kn}{N} \pmod{\pi}. \tag{6.15}$$

Note que (6.15) evidencia uma contradição estrutural na dependência das variáveis. O lado esquerdo, θ_k, representa uma fase cujo valor depende exclusivamente do índice k. Para um valor fixo de k, θ_k é constante. Já o lado direito, $\theta_0 + \dfrac{2\pi kn}{N}$, para k fixo e não nulo, é uma expressão que varia explicitamente com o índice n.

Para que a congruência (6.15) se mantenha, o lado direito deveria assumir o mesmo valor módulo π para todos os $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Isso somente ocorreria se o termo dependente de n, $\dfrac{2\pi kn}{N}$, fosse efetivamente constante módulo π.

Para formalizar esta condição, é preciso que a diferença de valor do termo entre n e $n+1$ seja um múltiplo inteiro de π:

$$\left(\frac{2\pi k(n+1)}{N}\right) - \left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \equiv 0 \pmod{\pi};$$
$$\frac{2\pi k}{N} \equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{6.16}$$

Consequentemente, tem-se a seguinte condição

$$\frac{2k}{N} \in \mathbb{Z}, \tag{6.17}$$

a qual teria de ser satisfeita para todos os $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ para os quais a premissa é válida. No entanto, para qualquer $N > 2$, pode-se escolher um valor de k que viola esta condição. Por exemplo, se escolhermos $k = 1$ (que está sempre no intervalo de índices), a condição torna-se

$$\frac{2}{N} \in \mathbb{Z}. \tag{6.18}$$

Esta afirmação é manifestamente falsa para qualquer inteiro $N > 2$. Concluí-se então que é impossível satisfazer a condição de fase para $N > 2$.

A análise detalhada apresentada neste capitulo demonstra a impossibilidade de construir uma matriz de transformação puramente real, da forma $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{W}_N \mathbf{\Lambda}_2$, para qualquer transformada com dimensão $N > 2$. A raiz dessa limitação reside na incompatibilidade fundamental entre a estrutura de fase da transformada DFT e a estrutura de fase imposta pelas matrizes de escalonamento diagonal. Enquanto a primeira apresenta uma dependência bilinear, as matrizes de escalonamento só podem impor uma correção aditiva e separável. Em sistemas de comunicação na banda base, onde as transformadas devem ser representadas por matrizes puramente reais, este resultado estabelece uma restrição importante: a base de Fourier, mesmo modificada por escalonamentos diagonais, não é adequada para a construção de um operador na banda base com essa estrutura para dimensões práticas ($N > 2$).

7 CONCLUSÃO

Este trabalho dedicou-se ao desenvolvimento e à análise de uma nova abordagem para a implementação de um sistema OCDM na banda base, motivado pela necessidade de operar com sinais puramente reais. A investigação apresentada foi fundamentada no isomorfismo entre espaços vetoriais complexos e reais, resultando em um formalismo que converte a matriz da DFnT complexa de dimensão $N \times N$ em uma matriz de transformação real equivalente de dimensão $2N \times 2N$. A arquitetura do sistema OCDM, incluindo transmissor e receptor, foi detalhada, e demonstrou-se que a matriz de representação real preserva propriedades fundamentais da transformada original, como a unitariedade, que se manifesta como ortogonalidade no domínio real, fornecendo uma base teórica para arquiteturas já existentes, como a do Tipo II em (DIB *et al.*, 2020).

Foi demonstrado que a representação real canônica, quebra a estrutura circulante da matriz da DFnT. Essa perda estrutural impede o uso de algoritmos rápidos baseados na DFT, elevando a complexidade computacional das transformadas (direta e inversa) de $\mathcal{O}(N \log N)$ para $\mathcal{O}(N^2)$. Esse resultado posiciona a abordagem proposta como computacionalmente inferior a outras alternativas já existentes na literatura, que conseguem adaptar o sistema OCDM para operar na banda base sem incorrer em tal penalidade de desempenho.

A principal contribuição deste trabalho emergiu da investigação sobre a possibilidade de se construir uma transformada real computacionalmente eficiente com uma estrutura análoga à fatoração da DFnT. Foi desenvolvida uma prova matemática que demonstra a impossibilidade de se construir uma matriz de transformação puramente real da forma $\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda_1 W}_N \mathbf{\Lambda_2}$ para qualquer dimensão $N > 2$. Esta descoberta estabelece uma limitação estrutural intrínseca e fundamental para qualquer transformada real baseada na DFT que busque essa forma de fatoração.

Em suma, conclui-se que o sistema OCDM na banda base, obtido através de representação matricial real canônica, apesar de funcional, não se apresenta como uma alternativa prática e eficiente para implementação. A contribuição mais significativa deste trabalho reside, portanto, na análise teórica aprofundada que não apenas quantifica a ineficiência computacional da abordagem, mas também estabelece um limite teórico importante sobre a construção de transformadas reais baseadas em Fourier, oferecendo um discernimento para o projeto de futuros sistemas de comunicação digital de dados baseados em multiportadoras.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para dar continuidade à pesquisa desenvolvida nesta dissertação, são apresentadas as seguintes propostas:

a) Investigar representações reais não canônicas de matrizes complexas. O presente trabalho focou na estrutura de bloco padrão (5.9). Outros isomorfismos poderiam ser explorados para verificar se alguma estrutura computacionalmente explorável da matriz original, como a circularidade, poderia ser parcialmente preservada.

b) Análise de desempenho em hardware específico. Implementar o sistema proposto para matrizes sem estrutura circular, onde o sistema pode apresentar maior vantagem e compará-lo com a versão complexa baseada em DFT em plataformas de hardware como FPGAs ou DSPs. Tal estudo permitiria uma avaliação prática não apenas da complexidade computacional, mas também de outros fatores como consumo de memória, latência e gasto energético.

c) Exploração de transformadas reais alternativas. Tendo em vista a limitação demonstrada para transformadas baseadas na DFT, uma linha de pesquisa futura seria investigar outras famílias de transformadas ortogonais puramente reais, como as baseadas em Transformadas Discretas de Cosseno (DCT) ou de Seno (DST), como candidatas para a construção de um sistema multiportadora do tipo *chirp* que seja inerentemente de banda base e computacionalmente eficiente.

REFERÊNCIAS

CAMPOS, F. P. V. de; SIRIMARCO, L. M.; CAMPOS, M. L. R. de; RIBEIRO, M. V. The implementation of the clustered-OFDM-based transceiver on an FPGA device: A comprehensive comparison. **IET Communications**, v. 15, n. 6, p. 824–839, 2021.

COWLEY, J. M.; MOODIE, A. F. The theory of fresnel images: I. plane periodic objects in monochromatic light. **Acta Crystallographica**, v. 10, n. 10, p. 609–619, 1957.

DIB, L. de M. B. A.; COLEN, G. R.; FILOMENO, M. de L.; RIBEIRO, M. V. Orthogonal Chirp Division Multiplexing for Baseband Data Communication Systems. **IEEE Systems Journal**, v. 14, n. 2, p. 2164–2174, June 2020.

FILOMENO, M. de L.; OLIVEIRA, L. G. de; CAMPONOGARA, A.; DIEWALD, A.; ZWICK Thomas; CAMPOS, M. L. R. de; RIBEIRO, M. V. Joint channel estimation and Schmidl & Cox synchronization for OCDM-based systems. **IEEE Communications Letters**, v. 26, n. 8, p. 1878–1882, 2022.

GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier Optics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1968.

GORI, F. Why is the Fresnel transform so little known? In: DAINTY, J. C. (Ed.). **Current Trends in Optics**. [S.l.]: Academic Press, 1994. p. 139–148.

HOU, L.; HUANG, Z.; LV, C. Quantum algorithms for the multiplication of circulant matrices and vectors. **Information**, v. 15, n. 8, p. 453, 2024.

MOREIRA, T. F.; CAMPONOGARA, A.; BAIG, S.; RIBEIRO, M. V. Performance analysis of orthogonal multiplexing techniques for PLC systems with low cyclic prefix length and symbol timing offset. **Sensors**, v. 23, p. 4363, 2023.

OLIVEIRA, L. G. de; COLEN, G. R.; VINCK, A. J. H.; RIBEIRO, M. V. Resource allocation in hs-ofdm-based plc systems: A tutorial. **Journal of Communication and Information Systems**, v. 33, n. 1, 2018. Disponível em: <https://jcis.sbrt.org.br/jcis/article/view/526>.

OLSHEVSKY, V. (Ed.). **Fast Algorithms for Structured Matrices: Theory and Applications**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2003. v. 323. (Contemporary Mathematics, v. 323). ISBN 9780821831779.

OUYANG, X.; ANTONY, C.; GUNNING, F.; ZHANG, H.; GUAN, Y. L. **Discrete Fresnel Transform and Its Circular Convolution**. 2015. <http://arxiv.org/abs/1510.00574>. Online.

OUYANG, X.; ZHAO, J. Orthogonal chirp division multiplexing. **IEEE Transactions on Communications**, v. 64, n. 9, 2016.

RAYLEIGH, L. On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith. **Philosophical Magazine Series 4**, v. 47, n. 310, p. 193–205, 1874.

RIBEIRO, M. V.; COLEN, G. R.; CAMPOS, F. V. P. de; QUAN, Z.; POOR, H. V. Clustered-orthogonal frequency division multiplexing for power line communication: When is it beneficial? **IET Communications**, v. 8, n. 13, p. 2336–2347, 2014.

SILVA, S. M. d. **Números Complexos: uma abordagem matricial**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, RR, 2017.

TSE, D.; VISWANATH, P. **Fundamentals of Wireless Communication**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.

WEN, J.; ZHANG, Y.; XIAO, M. The talbot effect: Recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics. **Advances in Optics and Photonics**, v. 5, n. 1, p. 83–130, 2013.

ZEE, F. G. V. Implementing high-performance complex matrix multiplication via the 1m method. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 42, n. 3, p. C239–C268, 2020.

ZHOU, B. Analysis and design of complex-valued linear systems. **arXiv preprint arXiv:1708.05120**, 2018.