UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS/FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Thiago de Almeida Lopes

Métodos de Elementos Finitos com Adaptatividade de Malha para Escoamentos Compressíveis e Incompressíveis

Juiz de Fora

2026

Thiago de Almeida Lopes

Métodos de Elementos Finitos com Adaptatividade de Malha para Escoamentos Compressíveis e Incompressíveis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional. Área de concentração: Métodos Numéricos Aplicados

Orientador: Prof. Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lopes, Thiago .
Métodos de Elementos Finitos com Adaptatividade de Malha para Escoamentos Compressíveis e Incompressíveis / Thiago Lopes. -- 2026.
130 f.

Orientador: Iury Higor Aguiar da Igreja
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2026.

1. Adaptatividade de Malha. 2. Auto AMR. 3. Equações de Navier-Stokes. 4. Equações de Euler. 5. Método dos Elementos Finitos. I. Igreja, Iury Higor Aguiar da , orient. II. Título.

Thiago de Almeida Lopes

Métodos de Elementos Finitos com Adaptatividade de Malha para Escoamentos Compressíveis e Incompressíveis

Dissertação apresentada Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional
da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em 29 de setembro de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. José Jerônimo Camata
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Thiago de Oliveira Quinelato
Universidade Federal do Paraná

Juiz de Fora, 28/09/2026.

Documento assinado eletronicamente por **Iury Higor Aguiar da Igreja**, **Professor(a)**, em 29/09/2026, às 12:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Thiago de Oliveira Quinelato**, **Usuário Externo**, em 29/09/2026, às 17:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Jeronimo Camata**, **Professor(a)**, em 30/09/2026, às 09:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3249687** e o código CRC **32BBA2C5**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço meus pais por todo o apoio dado durante a minha passagem por esse mundo.

Aos amigos que não me deixaram perder a esperança desde o início da graduação.

Aos grupos musicais e solistas que escuto por proporcionarem conforto através de suas músicas.

Ao PGMC-UFJF pela estrutura e suporte para que fosse possível concluir os testes a tempo e aos professores pelas aulas de alto nível que me deram base para concluir esse trabalho.

Ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo financiamento.

RESUMO

A simulação numérica de escoamentos pelo Método dos Elementos Finitos enfrenta severos desafios decorrentes da não linearidade das equações governantes, da predominância convectiva e da formação de fortes gradientes locais, como estruturas vorticais, camadas limite e descontinuidades de choque, inerentes aos regimes incompressível, compressível e invíscido das equações de Navier–Stokes e Euler. Embora o Refinamento Adaptativo de Malha (AMR) seja essencial para concentrar a resolução espacial onde necessário, as abordagens convencionais dependem da calibração empírica de parâmetros pelo usuário e sofrem com o risco de crescimento descontrolado do número de elementos. Para superar tais limitações, este trabalho propõe o *Auto AMR*, uma metodologia autônoma de adaptatividade que integra um estimador de erro a posteriori a uma função de distribuição estatística e introduz uma função de penalização original baseada na razão entre células ativas e a capacidade máxima da malha, estabelecendo um critério autoajustável que equilibra a redução do erro numérico e o custo computacional sem intervenção manual. Esta metodologia é acoplada a uma formulação variacional estabilizada por técnicas como PSPG, SUPG e captura de choque $YZ\beta$, além de um esquema implícito BDF de segunda ordem para integração temporal. A abordagem é amplamente validada para os modelos de Navier–Stokes incompressível e compressível e para as equações de Euler por estudos de convergência e por uma gama de problemas clássicos, incluindo os escoamentos em cavidade quadrada, cilindro, degrau, camada de cisalhamento duplamente periódica, aerofólio NACA 0012, vórtice isentrópico 2D, choques oblíquo e refletido e aerofólio diamante em regime supersônico e de elevado número de Reynolds. Os resultados comprovam que o *Auto AMR* rastreia autonomamente estruturas físicas complexas em múltiplos regimes de escoamento, garantindo alta precisão com uma redução considerável na quantidade de elementos em relação a malhas fixas.

Palavras-chave: Adaptatividade de Malha; Auto AMR; Equações de Navier-Stokes; Equações de Euler; Método dos Elementos Finitos; Escoamento Compressível.

ABSTRACT

Numerical simulation of flows using the Finite Element Method faces severe challenges arising from the non-linearity of the governing equations, the predominance of convection, and the formation of strong local gradients, such as vortical structures, boundary layers, and shock discontinuities, inherent to the incompressible, compressible, and inviscid regimes of the Navier-Stokes and Euler equations. Although Adaptive Mesh Refinement (AMR) is essential to focus spatial resolution where necessary, conventional approaches depend on empirical parameter calibration by the user and suffer from the risk of uncontrolled growth in the number of elements. To overcome these limitations, this work proposes Auto AMR, an autonomous adaptivity methodology that integrates a posteriori error estimator with a statistical distribution function and introduces an original penalty function based on the ratio between active cells and the maximum mesh capacity, establishing a self-adjusting criterion that balances the reduction of numerical error and computational cost without manual intervention. This methodology is coupled with a variational formulation stabilized by techniques such as PSPG, SUPG, and $YZ\beta$ shock capture, in addition to an implicit second-order BDF scheme for temporal integration. The approach is widely validated for incompressible and compressible Navier-Stokes models and for Euler equations through convergence studies and a range of classical problems, including square cavity, cylinder, step, doubly periodic shear layer, NACA 0012 airfoil, 2D isentropic vortex, oblique and reflected shocks, and diamond airfoil flows in supersonic and high Reynolds number regimes. The results demonstrate that Auto AMR autonomously tracks complex physical structures in multiple flow regimes, ensuring high accuracy with a considerable reduction in the number of elements compared to fixed meshes.

Keywords: Adaptive Mesh Refinement; Auto AMR; Navier-Stokes Equations; Euler Equations; Finite Element Method; Compressible Flow; Shock-Capturing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de escoamento laminar usado como decoração. 14
Figura 2 – A pluma de uma vela comum transita de um fluxo laminar para um fluxo turbulento. 15
Figura 3 – Diagrama da implementação do método BDF 2. 35
Figura 4 – Estrutura em árvore da lógica dos níveis de refinamento, onde os elementos em branco estão inativos, pois foram substituídos pelo resultado de refinamento, e os elementos em verde são os elementos ativos. 40
Figura 5 – Uma malha simples com os *hanging nodes* destacados em vermelho, os nós da malha original em laranja e os nós em verde são o resultado do refinamento. 41
Figura 6 – Exemplo de uso da estimativa de erro para definição do conjunto Z_α, onde as linhas em cinza são os pontos do conjunto. 43
Figura 7 – Exemplo de gráfico da função de distribuição aplicada ao erro descrito na Figura 6. É possível identificar os máximos locais nas descontinuidades. 44
Figura 8 – Aplicação da função peso ao resultado da função de distribuição (Fig. 7). 45
Figura 9 – Comportamento do α_{pe} e erro l^2 proporcional ao número de células em uma execução de 3 segundos do problema da cavidade, com $Re = 1000$. . . . 47
Figura 10 – Exemplo de comportamento do parâmetro α_{pe} proporcionalmente ao número de células. 48
Figura 11 - Exemplo de estimativas de erro obtidas para o problema do choque refletido. 49
Figura 12 – Exemplo de ação dos limites de refinamento e mesclagem para $t = 0{,}845$. 50
Figura 13 - Exemplo de marcação de elementos para o problema do choque refletido. 51
Figura 14 - Exemplo de uma malha inicial com poucos elementos onde há um obstáculo suave com forma ideal indicada na linha pontilhada. 52
Figura 15 – Ação do ajuste proposto aos vértices adicionados por refinamento. Pode-se observar a melhoria na qualidade da aproximação do contorno semicircular. 53
Figura 16 – Esquema do domínio usado para o Escoamento em Cavidade com a disposição do contorno. 59
Figura 17 - Soluções em $\|\mathbf{u}\|$ e malha do último passo de tempo para o problema do escoamento em cavidade. 61
Figura 18 – Comparativo dos perfis de velocidade do escoamento em cavidade entre o Auto AMR, malha fixa com 16.384 elementos e os perfis obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982). 62
Figura 19 – Esquema do domínio usado para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro. 64
Figura 20 – Malha com 4.320 elementos usada para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro. 65

Figura 21 - Evolução dos resultados de C_D e C_L para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro. 67
Figura 22 – Visualizações do resultado para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro com $Re = 100$. 68
Figura 23 – Esquema do domínio usado para o problema do degrau. 71
Figura 24 – Medição do comprimento de reanexação no degrau. 72
Figura 25 – Comparativo do número de elementos entre as execuções com malha fixa e o número de elementos final da simulação do Auto AMR. 73
Figura 26 - Visualizações do resultado para o problema do escoamento no degrau com $Re = 100$ obtido a $t = 47{,}55s$. 74
Figura 27 - Visualizações do resultado para o problema do escoamento no degrau com $Re = 500$ obtido a $t = 140{,}45s$. 74
Figura 28 - Visualizações do resultado para o problema do escoamento no degrau com $Re = 800$ obtido a $t = 105{,}40s$. 75
Figura 29 – Comparativo dos resultados obtidos neste trabalho com dados experimentais e literatura para o comprimento de reanexação partindo de $Re = 100$ até $Re = 800$ para o problema do escoamento em degrau. 76
Figura 30 – Soluções para a vorticidade e malha adaptativa do último passo de tempo para o problema do cisalhamento duplamente periódico. 78
Figura 31 – Resultados para o decaimento da enstrofia e energia para o problema da camada de cisalhamento duplamente periódica. 80
Figura 32 – Esquema do domínio usado para o problema do escoamento compressível ao redor do cilindro. 83
Figura 33 – Malha com 3.864 elementos usada para o problema do Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro. 84
Figura 34 – Visualizações do resultado para o problema do Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro com $Re = 100$. 86
Figura 35 - Evolução dos resultados de C_D e C_L para o problema do Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro. 88
Figura 36 – Domínio usado para o aerofólio NACA 0012. 90
Figura 37 – Malha com 4.080 elementos usada para o problema do Fluxo Supersônico no Aerofólio NACA 0012. 91
Figura 38 – Soluções para a densidade e malha adaptativa do último passo de tempo para o problema do fluxo supersônico no aerofólio NACA 0012. 93
Figura 39 – Resultados comparativos para a densidade e Mach ao longo da linha horizontal ($y = 0$, $-0.6 \leq x \leq -0.5$) entre as execuções com Auto AMR, Malha Fixa e os resultados obtidos por Aliabadi, Ray e Tezduyar (1993). 94
Figura 40 – Resultados no eixo-x nos tempos $t = 0{,}2s$, $t = 0{,}6s$, $t = 1{,}0s$ e $t = 1{,}4s$. 97

Figura 41 – Domínio quadrado unitário para o problema do choque oblíquo. A linha mais grossa representa a barreira de choque e a linha pontilhada a posição do eixo de onde os dados de comparação são obtidos. 98
Figura 42 – Soluções para a densidade e malha adaptativa do último passo de tempo para o problema do choque oblíquo. 100
Figura 43 – Resultados comparativos para o problema do Choque Oblíquo entre a solução exata, uma malha com número fixo de elementos, Auto AMR e os dados obtidos por (CATABRIGA; COUTINHO, 2002). 102
Figura 44 – Domínio para o problema do choque refletido. A linha mais grossa representa a barreira de choque e a linha pontilhada a posição do eixo de onde os dados de comparação são obtidos. 103
Figura 45 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com $l_{max} = 5$. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha adaptativa com 1.039 elementos. . 103
Figura 46 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com $l_{max} = 6$. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha adaptativa com 2.257 elementos. . 104
Figura 47 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com $l_{max} = 7$. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha adaptativa com 4.681 elementos. . 104
Figura 48 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com malha fixa. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha fixa com 4.096 elementos. . . 105
Figura 49 – Resultados do problema do choque refletido no eixo $y = 0{,}25$ comparado a solução exata e a uma malha fixa com 4096 elementos e o resultado obtido pelo Auto AMR com 2296 elementos. 106
Figura 50 – Perfil do aerofólio supersônico. 107
Figura 51 – Domínio usado para o aerofólio supersônico. 107
Figura 52 – Malha com 8.809 elementos usada para o problema do Fluxo Supersônico Em Um Aerofólio Diamante. A direita é mostrado o detalhe da região próxima ao aerofólio, destacando as regiões mais refinadas ao redor das extremidades. 109
Figura 53 - Soluções na densidade e malhas do último passo de tempo para o problema do fluxo supersônico em um aerofólio diamante. 110
Figura 54 – Resultados comparativos para o problema do fluxo supersônico em um aerofólio diamante dos coeficiente de arrasto e sustentação com os dados experimentais obtidos por Jernell e Center (1974), Auto AMR, malha fixa e teoria de expansão de choque de formulação inviscida para Mach 4,63. 112
Figura 55 – Disposição dos ângulos, ondas de choque e expansão. 124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estudo de convergência na norma $L^2(\Omega)$ do problema de Taylor-Green para o sistema de Navier-Stokes incompressível. 58
Tabela 2 – Comparação entre malha adaptativa Auto AMR e malha fixa para o problema da cavidade. 63
Tabela 3 – Comparativo com dados de referência para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro com $Re = 100$. 70
Tabela 4 – Valores de velocidade e largura do duto de saída para o problema do escoamento no degrau. 72
Tabela 5 – Comparativo do número final de elementos, tamanho mínimo de elemento e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o problema do cisalhamento duplamente periódico. 80
Tabela 6 – Estudo de convergência para o problema de Navier–Stokes Compressível 82
Tabela 7 – Comparativo com dados de referência para o problema do escoamento ao redor do cilindro compressível em $R_e = 100$ 89
Tabela 8 – Comparativo do menor tamanho de elemento, número final de elementos e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o fluxo supersônico no aerofólio NACA 0012. 92
Tabela 9 – Estudo de convergência para o problema de Euler Compressível 97
Tabela 10 – Comparativo do menor tamanho de elemento, número final de elementos e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o problema do choque oblíquo. 99
Tabela 11 – Valores de momento e pressão por região do domínio para o problema do choque refletido 101
Tabela 12 – Comparativo do menor tamanho de elemento, número final de elementos e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o problema do choque refletido. 105
Tabela 13 – Ângulos de inclinação relativos ao escoamento para ângulos de ataque 0° e 7°. 125

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AMR	*Adaptive Mesh Refinement*
BDF	*Backward Differentiation Formula*
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional
DNS	*Direct Numerical Simulation*
FFT	*Fast Fourier Transform*
GMM	Modelo de Mistura Gaussiana
LIC	Convolução Integral de Linha em Superfícies
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVF	Método de Volumes Finitos
PSPG	*Pressure Stabilization Petrov–Galerkin*
SUPG	*Streamline-Upwind Petrov–Galerkin*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
2 MODELO MATEMÁTICO 21
2.1 Equações Governantes 21
2.1.1 Conservação de Massa 21
2.1.2 Conservação de Momento 22
2.1.2.1 Lei Constitutiva para Fluidos Newtonianos 22
2.1.3 Equação de Energia 23
2.1.4 Equação de Estado 24
2.1.5 Efeitos da temperatura 25
2.2 Sistema de Equações Governantes 25
2.2.1 Modelo Compacto Vetorial 26
3 MODELO NUMÉRICO 28
3.1 Notações e Definições 28
3.2 Formulação de Elementos Finitos Estabilizados 29
3.2.1 Formulação Quasilinear 29
3.2.2 Formulação Variacional Semi-Discreta 30
3.2.3 Estabilização SUPG 31
3.2.4 Captura de Choques 33
3.2.5 Discretização no Tempo 34
3.2.6 Critério de Convergência para Regime Estacionário 35
3.3 Modelo Numérico Estabilizado 36
3.4 Resolução do Sistema Não Linear 37
4 ADAPTATIVIDADE DE MALHA 38
4.1 Estratégia de Adaptatividade de Malha 38
4.1.1 Seleção dos Limites de Refinamento e Mesclagem de Elementos 40
4.1.2 Função de Distribuição 42
4.1.3 Função de penalização 44
4.1.4 Exemplo de aplicação do Auto AMR 48
4.1.5 Adaptatividade aplicada a malhas com obstáculos 51
5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEL 55
5.1 Modelo Incompressível 55
5.2 Formulação Numérica para o Caso Incompressível 56
5.2.1 Formulação Variacional Estabilizada (SUPG/PSPG) 57
5.3 Estudo de Convergência - Taylor-Green Vortex 58
5.4 Escoamento em Cavidade 58
5.5 Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro 64

5.6 Escoamento em Degrau 70
5.7 Camada de Cisalhamento Duplamente Periódica 75
6 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA NAVIER-STOKES COMPRESSÍVEL 81
6.1 Estudo de Convergência 81
6.2 Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro 82
6.3 Fluxo Supersônico no Aerofólio NACA 0012 89
7 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA AS EQUAÇÕES DE EULER 95
7.1 Formulação Variacional Estabilizada 95
7.2 Estudo de Convergência - Vórtice 2D em Fluxo Isentrópico 96
7.3 Choque Oblíquo 96
7.4 Choque Refletido 99
7.5 Fluxo Supersônico Em Um Aerofólio Diamante 106
8 CONCLUSÕES 113
REFERÊNCIAS 115
APÊNDICE A – Informações Complementares 120
A.1 Matrizes jacobianas 120
A.2 Matrizes do termo viscoso 121
A.3 Teoria de Choque-Expansão Aplicada ao Cálculo do Fluxo Supersônico em um Aerofólio Diamante 123

1 INTRODUÇÃO

Fluidos são materiais que se deformam continuamente quando submetidos a tensões cisalhantes. Como consequência, diferentemente dos sólidos, não possuem forma própria e tendem a assumir a forma do recipiente que os contém. Um exemplo simples é a água em um recipiente sob a ação da gravidade, que escoa até atingir uma configuração de equilíbrio ocupando a região disponível. Uma característica importante desses materiais é a resposta da densidade às variações de pressão. Em líquidos, como a água, as mudanças de densidade são geralmente pequenas, enquanto em gases, como o ar, podem ser significativas. Essa diferença dá origem à classificação dos fluidos em incompressíveis e compressíveis, conforme a influência das variações de densidade sobre o escoamento (LAI; RUBIN; KREMPL, 2009).

No contexto da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), os escoamentos podem ser classificados segundo diferentes características físicas. Neste trabalho, são considerados escoamentos estacionários e transientes, bem como regimes de escoamento laminares, de transição e casos com elevados números de Reynolds, capazes de gerar estruturas vorticais complexas e fenômenos associados à transição para a turbulência (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002; KAWAHARA, 2016).

Um escoamento é denominado estacionário quando as propriedades do fluido em um ponto fixo do domínio não variam com o tempo. Nessa condição, grandezas como velocidade, pressão e temperatura podem assumir valores distintos ao longo do domínio, mas permanecem constantes ao longo do tempo em cada posição analisada. Quando essas propriedades apresentam variação temporal, o escoamento é classificado como transiente.

Quanto ao regime de escoamento, o caso laminar caracteriza-se pelo movimento ordenado das partículas fluidas, que se deslocam em camadas suaves com pouca mistura entre si. Esse comportamento é tipicamente observado quando os efeitos viscosos predominam sobre os efeitos inerciais. Um exemplo de escoamento laminar é apresentado na Figura 1, na qual os filetes de fluido mantêm trajetórias bem definidas e praticamente invariáveis ao longo do tempo (LAI; RUBIN; KREMPL, 2009).

À medida que os efeitos inerciais se tornam mais significativos em relação aos efeitos viscosos, o escoamento pode deixar de apresentar o comportamento ordenado característico do regime laminar e passar por uma região de transição, na qual surgem instabilidades e estruturas vorticais cada vez mais complexas. A distinção entre esses regimes é tradicionalmente feita por meio do número de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{u_m \rho D}{\mu}, \tag{1.1}$$

onde u_m é uma velocidade característica do escoamento, ρ a densidade do fluido, D um comprimento característico e μ a viscosidade dinâmica. O número de Reynolds representa

Figura 1 – Exemplo de escoamento laminar usado como decoração.



Fonte: Disponível em https://www.blackstone-ney.com/blog/laminar-flow/ Acesso em: 11/04/2026

a razão entre os efeitos inerciais e viscosos do escoamento e é amplamente utilizado para caracterizar diferentes regimes de escoamento (LAI; RUBIN; KREMPL, 2009).

Um exemplo de escoamento em transição é apresentado na Figura 2. Nessa situação, o ar aquecido pela chama de uma vela inicialmente apresenta um comportamento aproximadamente laminar, mas, à medida que pequenas instabilidades se desenvolvem, o movimento torna-se progressivamente mais desordenado. A região intermediária entre esses dois comportamentos caracteriza o regime de transição.

Para valores elevados do número de Reynolds, os efeitos inerciais passam a dominar a dinâmica do escoamento, favorecendo o surgimento de instabilidades e de estruturas vorticais de diferentes escalas. Nessas condições, a energia cinética é transferida continuamente entre vórtices de tamanhos distintos, formando padrões de escoamento complexos e altamente sensíveis a pequenas perturbações (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

Embora a transição para a turbulência dependa das características específicas de cada problema, escoamentos com números de Reynolds elevados frequentemente apresentam fenômenos associados a esse regime, como a formação, interação e desprendimento de vórtices. Esses efeitos são particularmente relevantes em diversos dos problemas analisados neste trabalho, nos quais o aumento do número de Reynolds resulta em estruturas vorticais cada vez mais complexas (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002; KAWAHARA, 2016).

Além dos regimes de escoamento, os fluidos também podem ser classificados de acordo com suas propriedades físicas. Uma das distinções mais importantes está relacionada à compressibilidade. Quando as variações de densidade são desprezíveis, o fluido pode ser tratado como incompressível. Em contrapartida, para escoamentos gasosos em altas velocidades, as variações de densidade tornam-se significativas, caracterizando os chamados

Figura 2 – A pluma de uma vela comum transita de um fluxo laminar para um fluxo turbulento.



Fonte: By Gary Settles - Own work, CC BY-SA 3.0, Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Laminar-turbulent_transition Acesso em: 11/04/2026

escoamentos compressíveis (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

Outra classificação relevante está associada aos efeitos viscosos. Em escoamentos viscosos, a viscosidade exerce influência significativa sobre a dinâmica do fluido, gerando tensões de cisalhamento e dissipação de energia. Já em regiões onde esses efeitos são pequenos em comparação às forças de inércia, o escoamento pode ser aproximado como invíscido (WHITE, 2015).

Quanto ao comportamento reológico, este trabalho considera apenas fluidos newtonianos, nos quais a tensão de cisalhamento é proporcional à taxa de deformação, resultando em uma viscosidade constante (WHITE, 2015).

Nos escoamentos compressíveis, a propagação de perturbações de pressão está associada à velocidade local do som, definida por

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \tag{1.2}$$

onde γ é a razão entre os calores específicos do gás a pressão e volume constantes, p é a pressão e ρ a densidade do fluido. A partir dessa grandeza define-se o número de Mach, que corresponde à razão entre a velocidade característica do escoamento e a velocidade

do som no meio. Esse parâmetro permite classificar o escoamento em subsônico ($M < 1$), transônico ($M \approx 1$) e supersônico ($M > 1$), sendo este último caracterizado pela formação de ondas de choque e por variações abruptas das propriedades do fluido (ANDERSON, 2016; KAWAHARA, 2016).

Com a caracterização dos principais regimes de escoamento, a formulação matemática adotada neste trabalho é estabelecida a partir das equações de conservação de massa e quantidade de movimento, eventualmente complementadas por uma relação constitutiva entre pressão, densidade e energia. Essas equações resultam da aplicação da segunda lei de Newton a um meio contínuo, conduzindo ao sistema de Navier–Stokes, o qual descreve o escoamento de fluidos viscosos e generaliza o modelo invíscido de Euler (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002; KAWAHARA, 2016).

Na forma mais geral, o sistema admite escoamentos compressíveis. Sob a hipótese de variações desprezíveis de densidade, obtém-se o modelo incompressível, no qual a densidade é considerada constante. Nesse caso, o sistema reduz-se à equação de quantidade de movimento acoplada à condição de incompressibilidade, expressa pela divergência nula do campo de velocidades. Como caso particular, ao desconsiderar os efeitos viscosos, obtém-se o sistema de equações de Euler. Esse modelo corresponde a uma aproximação invíscida do escoamento e é frequentemente utilizado em regimes onde os efeitos dissipativos são secundários em relação aos efeitos inerciais (KAWAHARA, 2016).

A solução analítica das equações de Navier–Stokes e de Euler permanece um problema em aberto, estando relacionada ao problema de existência e unicidade de soluções suaves, com prêmio proposto pelo Clay Mathematics Institute. Na prática, recorre-se a métodos numéricos, embora sua resolução seja dificultada por diversas características intrínsecas do sistema. No contexto da resolução numérica, as principais dificuldades são a não linearidade das equações, associada aos termos convectivos, e o forte acoplamento entre as variáveis do escoamento. Em regimes dominados pela convecção, típicos de altos números de Reynolds, surgem ainda camadas de gradiente acentuado e estruturas multiescala, o que exige discretizações suficientemente refinadas para evitar instabilidades e erros numéricos significativos (KAWAHARA, 2016; VOLKER, 2016).

Para a resolução das equações de Navier–Stokes e de Euler, diferentes métodos de discretização são empregados, de acordo com a geometria do domínio e as características do escoamento. O Método das Diferenças Finitas (MDF) aproxima derivadas por expansões locais em série de Taylor, sendo tipicamente aplicado em malhas estruturadas (LEVEQUE, 2007). O Método dos Volumes Finitos (MVF) baseia-se na forma integral das equações de conservação, garantindo conservação local e global por meio do balanço de fluxos entre volumes de controle (MOUKALLED et al., 2016). Já o Método dos Elementos Finitos (MEF) fundamenta-se em formulações variacionais, utilizando aproximações locais para a solução, o que o torna particularmente adequado para geometrias complexas e malhas não

estruturadas (VOLKER, 2016; KAWAHARA, 2016).

Dentre os métodos de discretização clássicos, o MEF é adotado neste trabalho devido à sua flexibilidade na representação de geometrias complexas e, principalmente, à sua estrutura local que favorece a construção de estratégias de adaptatividade de malha. Além disso, sua formulação variacional permite o desenvolvimento sistemático de esquemas estabilizados para escoamentos viscosos e invíscidos, o que o torna particularmente adequado para os problemas considerados. A aplicação direta do MEF com formulação de Galerkin padrão, no entanto, apresenta limitações conhecidas para as equações de Navier–Stokes e Euler, especialmente em regimes dominados por convecção. Nessas situações, surgem instabilidades numéricas e oscilações espúrias, o que motiva o uso de estratégias de estabilização.

Nesse contexto, as formulações do tipo Streamline-Upwind Petrov–Galerkin (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982) e Pressure Stabilization Petrov–Galerkin (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986) se destacam por serem amplamente utilizadas para estabilizar o método de Galerkin no caso incompressível, permitindo inclusive a utilização de espaços de aproximação de mesma ordem para velocidade e pressão.

Para o caso compressível, extensões dessas ideias incluem a incorporação de termos adicionais de estabilização e captura de descontinuidades, particularmente relevantes em regimes de alto número de Mach. Entre essas abordagens, destacam-se técnicas de captura de choque como o esquema $YZ\beta$ (TEZDUYAR, 2004), utilizadas para controlar oscilações não físicas associadas a gradientes abruptos.

A literatura apresenta um desenvolvimento consistente dessas formulações no contexto de escoamentos compressíveis e incompressíveis. Trabalhos como Hughes e Tezduyar (1984), Hughes (1987) estabelecem fundamentos do método SUPG para sistemas hiperbólicos e para as equações de Euler. Desenvolvimentos posteriores exploram a computação de parâmetros estabilizadores e formulações baseadas em variáveis conservativas e entrópicas (ALIABADI; RAY; TEZDUYAR, 1993). Abordagens baseadas em estruturas de dados orientadas a arestas também foram propostas para eficiência computacional em problemas de Euler (CATABRIGA; COUTINHO, 2002; CATABRIGA; COUTINHO; TEZDUYAR, 2006). Além disso, extensões para escoamentos turbulentos compressíveis incorporando modelos como k–ε foram estudadas em (MOHAMMADI, 1993).

Por outro lado, um aspecto recorrente em métodos numéricos para equações de Navier–Stokes e Euler é a necessidade de alta resolução espacial para a obtenção de soluções precisas, especialmente em regimes dominados por camadas finas, gradientes elevados e estruturas vorticais. Nesse contexto, abordagens baseadas em refinamento de malha e/ou aumento da ordem polinomial tornam-se essenciais para equilibrar precisão e custo computacional. Entre essas estratégias, destaca-se o Refinamento de Malha Adaptativo, ou Adaptive Mesh Refinement (AMR), que consiste em ajustar dinamicamente a resolução

da malha de acordo com estimativas locais do erro da solução. A ideia central é concentrar refinamento apenas nas regiões onde ele é efetivamente necessário, evitando o uso de malhas globalmente refinadas como nas simulações do tipo Direct Numerical Simulation (DNS), que apresentam custo computacional significativamente mais elevado.

As primeiras formulações de AMR foram propostas por Berger e Oliger (1984) no contexto de diferenças finitas para equações hiperbólicas, baseando-se em hierarquias de malhas refinadas guiadas por estimativas de erro. Posteriormente, o método foi estendido para equações de Euler e problemas com formação de choques, permitindo que a malha acompanhasse descontinuidades móveis de forma adaptativa (BERGER; COLELLA, 1989).

Com a consolidação do Método dos Elementos Finitos, surgiram extensões do AMR para geometrias complexas, incluindo estratégias de refinamento do tipo *h-refinement*, nas quais elementos são subdivididos localmente para aumentar a resolução espacial (LÖHNER, 2008). Nesse contexto, estimadores de erro a posteriori, como o proposto por Kelly et al. (1983), passaram a desempenhar papel central na identificação automática das regiões de refinamento.

A partir do desenvolvimento de métodos de alta ordem, como o *Discontinuous Galerkin* (DG), passaram a ser exploradas estratégias combinadas de *h*- e *p-refinement*, permitindo ajustes simultâneos do tamanho do elemento e da ordem polinomial (DU; STECHMANN, 2023). Mais recentemente, avanços em computação de alto desempenho viabilizaram a aplicação de AMR em larga escala, com o uso de estruturas hierárquicas como *octrees* e bibliotecas como `p4est`, permitindo simulações com bilhões de graus de liberdade em aplicações em física e engenharia (BURSTEDDE; WILCOX; GHATTAS, 2011). Alternativamente, abordagens baseadas em aprendizado de máquina também têm sido exploradas para identificar regiões de refinamento a partir de padrões dos campos físicos (KUMAR; NAIR, 2025).

Nesse contexto, destaca-se a abordagem proposta por Pons et al. (2016), Pons e Ersoy (2019), na qual o refinamento de malha é guiado por uma função de distribuição do erro por célula, associada a um parâmetro de referência. A partir desse valor, são definidos dois limiares de controle: um limiar superior, acima do qual os elementos são marcados para refinamento, e um limiar inferior, abaixo do qual são indicados para desrefinamento (ou mesclagem) de elementos. Além disso, impõe-se uma restrição de suavidade da malha, de modo que a diferença entre níveis de refinamento de células adjacentes não exceda dois níveis. Quando essa condição é violada, ações adicionais de refinamento ou desrefinamento são aplicadas para garantir a consistência da hierarquia de malhas (ERSOY; GOLAY; YUSHCHENKO, 2013).

Neste trabalho, o refinamento adaptativo de malha é incorporado no contexto do Método dos Elementos Finitos por meio de uma estratégia de *h-refinement* implementada na biblioteca `deal.II` (AFRICA et al., 2024). A seleção das regiões de refinamento é

baseada na função de distribuição proposta por Pons e Ersoy (2019), que associa o erro por célula a um parâmetro de referência α_{pe}, a partir do qual são definidos os limiares e restrições como definidos por (ERSOY; GOLAY; YUSHCHENKO, 2013). Embora essa abordagem forneça um mecanismo sistemático para a adaptação da malha, a determinação de alguns de seus parâmetros permanece dependente de escolhas do usuário. Neste trabalho, essa limitação é abordada por meio de uma estratégia de automatização dos parâmetros de controle, baseada em uma função de penalização e na taxa de convergência esperada do erro, reduzindo a necessidade de ajustes manuais e tornando o processo de adaptatividade mais autônomo.

Baseado nos conceitos apresentados até aqui, este trabalho investiga a simulação numérica de escoamentos incompressíveis e compressíveis descritos pelas equações de Navier–Stokes e Euler, por meio de uma formulação estabilizada de Elementos Finitos associada a uma estratégia de adaptatividade de malha. O objetivo é combinar estabilidade numérica, flexibilidade geométrica e refinamento automático da malha para capturar adequadamente estruturas de escoamento em diferentes regimes físicos.

A formulação espacial emprega o Método de Elementos Finitos estabilizado, com os termos Streamline-Upwind Petrov–Galerkin (SUPG) (BROOKS; HUGHES, 1982) e Pressure Stabilization Petrov–Galerkin (PSPG) (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986) no caso incompressível, permitindo o uso de aproximações de mesma ordem para velocidade e pressão. No regime compressível, inclui-se ainda um termo de captura de choque do tipo $YZ\beta$ (TEZDUYAR, 2004), voltado ao tratamento de descontinuidades associadas a escoamentos em alto número de Mach. A discretização temporal é realizada por meio do esquema Backward Differentiation Formula (BDF) de segunda ordem, enquanto a não linearidade é tratada de forma explícita a partir da solução do passo de tempo anterior.

A adaptatividade de malha é baseada em um estimador de erro a posteriori (KELLY et al., 1983), que fornece uma medida local da contribuição de cada elemento para o erro global. A partir dessa informação, são definidos critérios automáticos que determinam quais elementos devem ser refinados ou desrefinados, permitindo a evolução dinâmica da malha ao longo da simulação.

Com essa formulação, são considerados problemas clássicos da dinâmica dos fluidos em diferentes regimes, visando a verificação da metodologia numérica e a avaliação da robustez e eficiência da estratégia de adaptatividade de malha. Para o caso incompressível de Navier–Stokes, são estudados os escoamentos em cavidade, em degrau, a camada de cisalhamento duplamente periódica e o escoamento ao redor de cilindro. No regime compressível, são analisados o escoamento em torno de cilindro e o fluxo supersônico no aerofólio NACA 0012. Finalmente, para as equações de Euler, são considerados o vórtice isentrópico bidimensional, o choque oblíquo, o choque refletido e o escoamento supersônico em aerofólio tipo diamante.

Esta dissertação está organizada em sete capítulos, além desta introdução. O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica e o modelo matemático adotado, partindo das equações governantes no contexto da mecânica do contínuo para obter o sistema de Navier–Stokes para fluidos newtonianos compressíveis. A partir dessa formulação, propõe-se uma forma vetorial compacta, adequada ao tratamento dos problemas considerados neste trabalho.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação numérica associada ao modelo matemático descrito no capítulo anterior, que é discretizada no espaço pelo Método dos Elementos Finitos de formulação mista com estabilização do tipo SUPG e um termo de captura de choques para garantir a estabilidade numérica na presença de fortes saltos de gradiente entre elementos. A discretização temporal é feita com uma abordagem de segunda ordem da família de métodos implícitos BDF.

O Capítulo 4 apresenta em detalhes a estratégia de adaptatividade de malha proposta neste trabalho. Inicialmente, são descritos os principais componentes do algoritmo e, em seguida, são apresentadas as estratégias desenvolvidas para automatizar os parâmetros de controle da função de distribuição do erro. Por fim, é apresentado um procedimento complementar para o ajuste dos vértices do contorno de obstáculos a partir de uma equação que descreve sua geometria.

O Capítulo 5 trata da simplificação do modelo para o regime de Navier–Stokes incompressível. Apresenta-se a formulação estabilizada pelos métodos SUPG e PSPG — este último viabilizando o uso de polinômios de mesma ordem para velocidade e pressão. A validação numérica é realizada por estudo de convergência espacial, seguida da aplicação do algoritmo Auto AMR aos problemas clássicos da cavidade quadrada, do escoamento ao redor do cilindro, do degrau e da camada de cisalhamento duplamente periódica.

O Capítulo 6 desenvolve a formulação completa para as equações de Navier–Stokes compressíveis. Após a verificação da ordem de acurácia via estudo de convergência, o modelo acoplado à estratégia Auto AMR é avaliado no escoamento compressível ao redor de um cilindro e no escoamento supersônico sobre o aerofólio NACA 0012.

O Capítulo 7 aborda o modelo das equações de Euler para escoamentos compressíveis invíscidos. A verificação do código baseia-se na solução analítica do vórtice 2D em fluxo isentrópico, enquanto o desempenho da adaptatividade de malha é testado frente às descontinuidades dos problemas do choque oblíquo, choque refletido e do aerofólio em formato de diamante em regime supersônico.

O Capítulo 8 sintetiza as principais conclusões e contribuições do trabalho, apontando limitações e propostas de pesquisas futuras.

2 MODELO MATEMÁTICO

Este capítulo apresenta o modelo matemático adotado nesta dissertação. A modelagem é desenvolvida no contexto da mecânica do contínuo e baseia-se nas leis de conservação que governam o movimento dos fluidos. A partir dessas leis, obtém-se o sistema de Navier–Stokes para fluidos newtonianos compressíveis, que constitui o modelo mais geral considerado neste trabalho. Esse sistema é composto pelas equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, complementadas por uma relação constitutiva para o tensor de tensões e por uma equação de estado responsável pelo fechamento termodinâmico do problema.

Além da apresentação das equações governantes e de seus termos constituintes, é introduzida uma forma vetorial compacta do sistema, adequada à construção da formulação variacional e à discretização numérica desenvolvida nos capítulos posteriores. Essa representação fornece uma estrutura unificada para o tratamento dos problemas considerados nesta dissertação. Embora o foco deste capítulo seja o modelo geral de Navier–Stokes compressível, as formulações de Navier–Stokes incompressível e das equações de Euler compressíveis, também consideradas neste trabalho, são derivadas a partir desse modelo por meio de simplificações apropriadas e apresentadas de forma independente nos Capítulos 5 e 7, respectivamente.

2.1 Equações Governantes

Considera-se um domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 2$ ou $d = 3$ e um intervalo de tempo $(0, T]$ sendo $\partial\Omega$ o contorno do domínio. As coordenadas espacial e temporal são representadas por $\mathbf{x}$ e t respectivamente.

Seja um fluido caracterizado pelos campos de densidade ρ, velocidade $\mathbf{u} = (u, v, w)$, pressão p e energia total $\mathcal{E}$. O comportamento desse fluido é descrito pelas equações de Navier–Stokes compressíveis, Nas subseções seguintes são apresentadas as equações governantes e os principais termos físicos que as compõem.

2.1.1 Conservação de Massa

A conservação da massa estabelece que a massa não pode ser criada nem destruída no interior de um volume de controle. Assim, considerando um elemento infinitesimal de fluido, a taxa de variação da massa em seu interior deve ser equilibrada pelo fluxo líquido de massa através de sua superfície de contorno. Aplicando esse princípio, obtém-se a equação da conservação da massa, também conhecida como equação da continuidade, dada por (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{2.1}$$

onde o primeiro termo representa a variação temporal da densidade e o segundo corresponde ao divergente do fluxo de massa.

2.1.2 Conservação de Momento

A conservação da quantidade de movimento linear corresponde à aplicação da segunda lei de Newton a um meio contínuo, segundo a qual a taxa de variação do momento linear de um fluido é igual à resultante das forças atuantes sobre ele (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002). Considerando um volume arbitrário Ω, essa relação pode ser escrita como

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}_{ext}\, d\mathbf{x},$$

onde $\mathbf{f}_{ext}$ representa a força resultante por unidade de volume atuante no fluido.

De forma geral, essa força pode ser decomposta em forças de corpo e forças associadas às tensões internas do fluido, permitindo escrever

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{b}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\, d\mathbf{x},$$

onde $\mathbf{b}$ representa as forças de corpo por unidade de volume (como a gravidade) e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy, responsável por descrever as interações internas no fluido (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002).

Neste trabalho, as forças de corpo são desprezadas, de modo que $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Assim, a forma diferencial da conservação de momento reduz-se a

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{2.2}$$

na qual o primeiro termo representa a variação temporal do momento linear e o segundo o transporte convectivo.

2.1.2.1 Lei Constitutiva para Fluidos Newtonianos

Uma relação constitutiva descreve o comportamento mecânico de um meio contínuo, estabelecendo a forma funcional entre o tensor de tensões e as variáveis cinemáticas do escoamento. No presente trabalho, considera-se um fluido newtoniano, no qual o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é assumido como função linear do tensor taxa de deformação.

A partir das relações cinemáticas da mecânica do contínuo, introduz-se o tensor taxa de deformação, definido como

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right), \tag{2.3}$$

o qual representa a parte simétrica do gradiente da velocidade e está associado às deformações locais do fluido. Para fluidos newtonianos compressíveis, a relação constitutiva é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I} + \lambda\,(\nabla \cdot \mathbf{u})\,\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u}), \tag{2.4}$$

onde $\mathbb{I}$ é o tensor identidade, μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica (viscosidade de cisalhamento) e λ é o segundo coeficiente de viscosidade (viscosidade volumétrica).

Por conveniência, o tensor de tensões pode ser decomposto na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I} + \mathbb{V}, \tag{2.5}$$

onde $\mathbb{V}$ representa o tensor de tensões viscosas, definido por

$$\mathbb{V} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u}). \tag{2.6}$$

Nessa decomposição, o termo $-p\mathbb{I}$ está associado às tensões isotrópicas de pressão, enquanto $\mathbb{V}$ representa as contribuições viscosas responsáveis pela dissipação de energia no escoamento (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002).

Os coeficientes viscosos μ e λ não são, em geral, independentes para fluidos compressíveis. A relação entre eles pode ser expressa por meio da viscosidade volumétrica μ_b, definida por

$$\mu_b = \frac{2}{3}\mu + \lambda. \tag{2.7}$$

A viscosidade volumétrica está associada aos efeitos dissipativos relacionados a processos de compressão e expansão do fluido. Neste trabalho, adota-se a hipótese de Stokes (STOKES, 1880), segundo a qual assume-se

$$\mu_b = 0. \tag{2.8}$$

Fisicamente, essa hipótese assume que variações volumétricas (compressão e expansão) não geram dissipação viscosa de energia. Essa aproximação é amplamente aceita para a maioria dos fluidos e exata para gases monoatômicos (BIRD; STEWART; LIGHTFOOT, 2002; KAWAHARA, 2016). Como consequência, obtém-se a relação

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \tag{2.9}$$

que é adotada ao longo deste trabalho.

2.1.3 Equação de Energia

A equação de conservação de energia em escoamentos compressíveis decorre da primeira lei da termodinâmica aplicada a um volume de controle em movimento. Conforme apresentado por Anderson (2016), a variação temporal da energia total do fluido é balanceada pelo transporte convectivo de energia, pelo trabalho das tensões e pelo fluxo de calor através do contorno do domínio.

Nesse contexto, definindo a energia total específica como

$$\mathcal{E} = e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}, \tag{2.10}$$

onde e representa a energia interna específica, a forma diferencial da conservação de energia pode ser escrita como

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{E})}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(\rho\mathcal{E} + p)] = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q}, \tag{2.11}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy definido em (2.4) e $\mathbf{q}$ é o fluxo de calor modelado pela lei de Fourier,

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta, \tag{2.12}$$

em que k é a condutividade térmica e θ é a temperatura.

Usando a definição (2.5) para $\boldsymbol{\sigma}$, obtém-se a forma conservativa usual para escoamentos viscosos compressíveis (ANDERSON, 2016; KAWAHARA, 2016):

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{E})}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(\rho\mathcal{E} + p) - \mathbb{V}\mathbf{u} - \mathbf{q}] = 0. \tag{2.13}$$

2.1.4 Equação de Estado

A equação de estado tem o objetivo de fornecer o fechamento termodinâmico do sistema de Navier–Stokes compressível, estabelecendo relações entre as variáveis termodinâmicas fundamentais. Conforme discutido por Versteeg (2007), sob a hipótese de equilíbrio termodinâmico local, o estado de um fluido pode ser descrito a partir de duas variáveis independentes, usualmente escolhidas como a densidade ρ e a temperatura θ. Assim, as demais propriedades termodinâmicas podem ser expressas como funções do tipo

$$p = p(\rho, \theta), \qquad e = e(\rho, \theta).$$

Para um gás ideal, essas relações assumem a forma

$$p = \rho R\theta, \tag{2.14}$$

$$e = C_v\theta, \tag{2.15}$$

onde R é a constante dos gases ideais e C_v é o calor específico a volume constante.

Eliminando a temperatura θ entre as Equações (2.14) e (2.15), e utilizando a relação de Mayer ($R = C_p - C_v$), obtém-se

$$p = \rho(\gamma - 1)e,$$

onde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ é a razão entre os calores específicos. Utilizando a definição da energia total específica (2.10), a pressão pode ser escrita na forma

$$p = (\gamma - 1)\left(\rho\mathcal{E} - \rho\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right), \tag{2.16}$$

que constitui a forma de fechamento termodinâmico utilizada neste trabalho para o sistema de equações de Navier–Stokes compressível.

2.1.5 Efeitos da temperatura

Em função da escolha de um gás ideal para a equação de estado (2.16), o fluxo térmico pode ser definido em função da energia interna pela substituição de (2.15) em (2.12) como feito por Kawahara (2016):

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla \left(\frac{e}{C_v} \right). \tag{2.17}$$

Assumindo C_v constante

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa}{C_v} \nabla e \tag{2.18}$$

Aqui é útil usar o número adimensional de Prandtl (KAWAHARA, 2016)

$$P_r = \frac{C_p \mu}{\kappa} \rightarrow \kappa = \frac{C_p \mu}{P_r}. \tag{2.19}$$

Assim, substituindo (2.19) em (2.18) e sabendo que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

$$\mathbf{q} = -\frac{\gamma \mu}{P_r} \nabla e. \tag{2.20}$$

2.2 Sistema de Equações Governantes

Nesta seção é apresentado o sistema de equações governantes geral utilizado neste trabalho, correspondente ao modelo de Navier–Stokes para fluidos newtonianos compressíveis. A formulação resulta da combinação da conservação de massa (2.1), quantidade de movimento (2.2) e energia (2.13), associadas à lei constitutiva do fluido (2.4), à equação de estado (2.16) e aos efeitos da temperatura (2.20).

Definindo a variável de energia utilizada na formulação como a energia total por unidade de volume,

$$E = \rho \mathcal{E}, \tag{2.21}$$

e o fluxo de calor em função da energia interna, o sistema pode ser escrito na forma conservativa:

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + p\mathbb{I} - \mathbb{V}] = \mathbf{0} \qquad \text{em } \Omega \times (0, T], \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \qquad \text{em } \Omega \times (0, T], \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u}(E + p) - \mathbb{V}\mathbf{u} - \mathbf{q}] = 0 \qquad \text{em } \Omega \times (0, T]. \tag{2.24}$$

Considerando a decomposição do contorno do domínio em duas partes disjuntas, denotadas por $\partial\Omega_D$ e $\partial\Omega_N$, tais que $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ e $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$, onde $\partial\Omega_D$ e $\partial\Omega_N$ representam, respectivamente, as porções do contorno associadas às condições de Dirichlet

e de Neumann, o sistema (2.22)-(2.24) é complementado pelas seguintes condições de contorno e iniciais:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D, \quad \rho = \rho_D, \quad E = E_D \qquad \text{sobre } \partial\Omega_D \times (0, T], \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbb{I} - \mathbb{V})\,\mathbf{n} = \mathbf{g}_m \\ (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = g_\rho \\ (\mathbf{u}(E + p) - \mathbb{V}\mathbf{u} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = g_E \end{cases} \qquad \text{sobre } \partial\Omega_N \times (0, T], \tag{2.26}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \rho = \rho_0, \quad E = E_0 \qquad \text{em } \Omega \times \{0\}, \tag{2.27}$$

onde $\mathbf{n}$ representa o vetor normal unitário externo ao contorno.

Nas Equações (2.25)-(2.27), as funções $\mathbf{u}_D$, ρ_D e E_D representam os valores prescritos de velocidade, densidade e energia total no contorno de Dirichlet $\partial\Omega_D$. No contorno de Neumann $\partial\Omega_N$, são especificados os fluxos associados às equações de quantidade de movimento, massa e energia por meio de $\mathbf{g}_m$, g_ρ e g_E, respectivamente. Ao longo deste trabalho são adotadas condições homogêneas de Neumann, isto é, $\mathbf{g}_m = \mathbf{0}$, $g\rho = 0$ e $g_E = 0$. As condições iniciais do problema são definidas pelas funções $\mathbf{u}_0$, ρ_0 e E_0 no domínio Ω, enquanto o fechamento termodinâmico do sistema é garantido pela equação de estado (2.16).

2.2.1 Modelo Compacto Vetorial

A partir do sistema de equações de Navier–Stokes compressível apresentado nas Equações (2.22)–(2.24), o modelo pode ser reescrito na forma conservativa vetorial, adequada para formulações variacionais e métodos de discretização numérica, como o Método dos Elementos Finitos. O sistema então pode ser escrito como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) - \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \mathbf{G}, \tag{2.28}$$

onde o vetor de variáveis conservativas é definido por

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \\ E \end{bmatrix}, \qquad E = \rho \mathcal{E}, \tag{2.29}$$

o fluxo convectivo é dado por

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbb{I} \\ \rho \mathbf{u} \\ (E + p)\mathbf{u} \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

onde a primeira linha corresponde ao fluxo de quantidade de movimento, a segunda à conservação de massa e a terceira à conservação de energia. O fluxo viscoso é escrito como

$$\mathbf{V}(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbb{V} \\ 0 \\ \mathbb{V}\mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbb{I}\ \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u}) \\ 0 \\ [\lambda \mathbb{I}\ \nabla \cdot \mathbf{u}]\mathbf{u} + 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{q} \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

em que $\mathbb{V}$ denota o tensor de tensões viscosas associado ao fluido newtoniano, conforme definido em (2.6). O vetor de fontes externas é definido por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

uma vez que forças de corpo são desconsideradas neste trabalho.

As condições de contorno são definidas como a seguir. No contorno de Dirichlet (2.25), impõem-se diretamente os valores das variáveis conservativas:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_D \qquad \text{em } \partial\Omega_D \times (0, T], \tag{2.33}$$

onde $\partial\Omega_D \subset \partial\Omega$ representa a porção do contorno com condições essenciais. No contorno de Neumann (2.26), são prescritos os fluxos totais do sistema:

$$(\mathbf{F}(\mathbf{U}) - \mathbf{V}(\mathbf{U}, \nabla\mathbf{U}))\,\mathbf{n} = \mathbf{H} \qquad \text{em } \partial\Omega_N \times (0, T], \tag{2.34}$$

onde $\partial\Omega_N \subset \partial\Omega$, $\mathbf{n}$ é o vetor normal externo ao domínio e $\mathbf{H}$ representa fluxos impostos no contorno. A condição inicial (2.27) é dada por

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0 \qquad \text{em } \Omega, \tag{2.35}$$

onde $\mathbf{U}_0$ define o estado inicial do escoamento.

Assim, o sistema de equações governantes pode ser escrito na forma compacta:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{G} \qquad \text{em } \Omega \times (0, T], \tag{2.36}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_D \quad \text{sobre } \partial\Omega_D \times (0, T], \tag{2.37}$$

$$(\mathbf{F} - \mathbf{V})\mathbf{n} = \mathbf{H} \quad \text{sobre } \partial\Omega_N \times (0, T], \tag{2.38}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0 \quad \text{em } \Omega \times \{0\}. \tag{2.39}$$

3 MODELO NUMÉRICO

Neste capítulo é apresentada a formulação numérica associada ao modelo matemático descrito no Capítulo 2. A discretização espacial é realizada por meio de uma formulação mista do Método dos Elementos Finitos, incorporando estabilização do tipo SUPG e um termo adicional de captura de choques, de modo a garantir estabilidade numérica em regimes predominantemente convectivos e na presença de fortes gradientes. Para a discretização temporal, empregamos a abordagem de segunda ordem da família de métodos implícitos BDF.

3.1 Notações e Definições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$. O espaço $L^2(\Omega)$ é definido como o conjunto das funções mensuráveis e quadrado-integráveis em Ω, isto é,

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ \|v\|_{L^2(\Omega)} < \infty \right\}, \tag{3.1}$$

onde a norma $L^2(\Omega)$ é dada por

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

O produto interno associado é definido por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \, d\mathbf{x}, \tag{3.3}$$

o que induz a estrutura de espaço de Hilbert em $L^2(\Omega)$. Com isso, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como o conjunto das funções cujas derivadas até ordem k pertencem a $L^p(\Omega)$. No caso particular $p = 2$, utilizamos a notação $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, que também possui estrutura de espaço de Hilbert. Para $k = 1$, definimos

$$H^1(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \ : \ \nabla v \in [L^2(\Omega)]^d \}. \tag{3.4}$$

O produto interno e a norma em $H^1(\Omega)$ são dados por

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \tag{3.5}$$

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

O espaço $H^1_0(\Omega)$ é definido como o subespaço de $H^1(\Omega)$ cujas funções possuem traço nulo na fronteira $\partial\Omega$, isto é,

$$H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \}, \tag{3.7}$$

onde a restrição ao contorno é entendida no sentido do operador de traço.

A partir dessas definições, introduzimos o conjunto de funções admissíveis e o espaço vetorial das funções teste utilizados na formulação do problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{ \mathbf{U} \in [H^1(\Omega)]^{d+2} \ : \ \mathbf{U}|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{U}_D \}, \\ \mathcal{W} &= \{ \mathbf{W} \in [H^1(\Omega)]^{d+2} \ : \ \mathbf{W}|_{\partial\Omega_D} = \mathbf{0} \}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 Formulação de Elementos Finitos Estabilizados

Nesta seção é apresentada a formulação numérica baseada no Método dos Elementos Finitos aplicada ao sistema de equações governantes descrito no Capítulo 2. O objetivo é construir uma aproximação consistente e estável para o problema de Navier-Stokes compressível, considerando regimes convectivos dominantes e possíveis descontinuidades na solução.

A formulação é desenvolvida inicialmente na forma fraca e posteriormente estendida para uma forma semi-discreta no espaço, a partir da qual são introduzidas estratégias de estabilização numérica. Em particular, emprega-se a estabilização do tipo SUPG, bem como um termo adicional de captura de choques, com o objetivo de melhorar a robustez da solução em regiões de gradientes elevados. A discretização temporal é realizada por meio de esquemas implícitos da família Backward Differentiation Formula (BDF), adequados para problemas rígidos e para o acoplamento com a formulação espacial estabilizada.

Por fim, são discutidos critérios para convergência ao regime estacionário e apresentada a formulação final do modelo numérico estabilizado utilizado neste trabalho.

3.2.1 Formulação Quasilinear

Sistemas quasilineares de equações diferenciais parciais são aqueles nos quais as derivadas de ordem mais elevada aparecem de forma linear, enquanto os coeficientes do operador diferencial podem depender das próprias variáveis desconhecidas. Essa estrutura é típica das equações de conservação não lineares, como o sistema de Navier–Stokes compressível (TORO, 1999).

Partindo da forma conservativa do sistema, o termo convectivo pode ser reescrito na forma quasilinear utilizando a regra da cadeia aplicada ao fluxo $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \tag{3.9}$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ é a matriz jacobiana do fluxo, definida por

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{U}}. \tag{3.10}$$

O termo difusivo também pode ser reescrito em formato linearizado, onde o vetor difusivo é separado entre o produto das matrizes de coeficientes e as colunas de $\nabla \mathbf{U}$ como

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{V}_i(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right), \tag{3.11}$$

onde $\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})$ são as matrizes de coeficientes difusivos obtidas pelo agrupamento das derivadas parciais das componentes conservativas nas linhas dos vetores difusivos $\mathbf{V}_i(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})$.

Com isso, o sistema de Navier-Stokes pode ser escrito na forma quasilinear como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}\right) = \mathbf{G}. \tag{3.12}$$

Nesta formulação, o termo convectivo passa a ser interpretado como um operador diferencial linearizado localmente, no qual a matriz jacobiana $\mathbf{A}_i(\mathbf{U})$ descreve a propagação das ondas características do sistema.

O termo viscoso permanece na forma divergente, sendo tratado diretamente na formulação fraca por integração por partes, o que introduz contribuições naturais de contorno associadas às tensões viscosas.

3.2.2 Formulação Variacional Semi-Discreta

Aplicando o método de Galerkin à forma quasilinear do sistema de Navier-Stokes compressível (3.12), busca-se uma solução aproximada $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ e funções teste $\mathbf{W} \in \mathcal{W}$, onde

$$\mathbf{U} = [m_x, m_y, m_z, \rho, E]^T, \qquad m_i = \rho u_i, \tag{3.13}$$

sendo m_i as componentes do momento linear e $E = \rho\mathcal{E}$ a energia total por unidade de volume.

A formulação semi-discreta é obtida aplicando o operador produto interno L^2 no domínio Ω a forma quasilinear (3.12) e $\mathbf{W}$, resultando em:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{W} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\right) d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right) d\mathbf{x} \\ - \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j}\right)\right) d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \mathbf{G}\, d\mathbf{x},\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde o índice repetido i indica soma sobre as d dimensões espaciais. As matrizes jacobianas do fluxo convectivo são definidas por (3.10) em que $\mathbf{F}_i$ representa as componentes do fluxo convectivo na direção x_i. Os fluxos convectivos deste sistema são dados por:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} m_x u + p \\ m_y u \\ m_z u \\ m_x \\ (E+p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} m_x v \\ m_y v + p \\ m_z v \\ m_y \\ (E+p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} m_x w \\ m_y w \\ m_z w + p \\ m_z \\ (E+p)w \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

com

$$u = \frac{m_x}{\rho}, \quad v = \frac{m_y}{\rho}, \quad w = \frac{m_z}{\rho},$$

e a pressão obtida a partir da equação de estado na forma

$$p = (\gamma - 1)\left(E - \frac{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}{2\rho}\right).$$

A substituição dessas relações em $\mathbf{F}_i(\mathbf{U})$ permite a construção explícita das matrizes jacobianas $\mathbf{A}_i(\mathbf{U})$, cuja forma detalhada em 2 e 3 dimensões é apresentada no Apêndice A.1 e a implementação 2D em (LOPES, 2026). Para obter a formulação fraca do termo viscoso, aplica-se integração por partes ao termo divergente:

$$-\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) \right) d\mathbf{x} = \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \cdot \left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}\mathbf{n})\, ds. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.16) em (3.14), obtém-se a formulação variacional semi-discreta completa:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{A}_i(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} + \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \cdot \left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \\ - \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{V}\mathbf{n})\, ds = \int_\Omega \mathbf{W} \cdot \mathbf{G}\, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde a forma detalhada das matrizes $\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U})$ são apresentadas no Apêndice A.2 para os casos bi e tridimensionais, cuja a implementação computacional em duas dimensões pode ser encontrada em (LOPES, 2026).

3.2.3 Estabilização SUPG

A estabilização do tipo Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) proposta por Brooks e Hughes (1982) é construída a partir da adição de um termo consistente à formulação variacional (3.17). O objetivo dessa técnica é aumentar a estabilidade numérica em problemas dominados por advecção, reduzindo oscilações espúrias que podem surgir quando a discretização de Galerkin padrão é aplicada a escoamentos com elevados números de Reynolds ou na presença de fortes gradientes da solução.

A ideia central do método consiste em modificar o espaço de funções de teste por meio de uma perturbação orientada segundo as direções características do operador convectivo. Como resultado, obtém-se um termo adicional proporcional ao resíduo das equações governantes, preservando a consistência da formulação. Dessa forma, a contribuição SUPG pode ser escrita da forma apresentada por Aliabadi, Ray e Tezduyar (1993)

$$\int_\Omega \boldsymbol{\tau}\, \mathcal{P}(\mathbf{W}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{U})\, d\mathbf{x}, \quad (3.18)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é a matriz dos parâmetros de estabilização. O termo $\mathcal{R}(\mathbf{U})$ representa o resíduo da forma quasilinear do sistema (3.12), definido por

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{G}, \quad (3.19)$$

o qual se anula para a solução exata do problema, garantindo a consistência da formulação estabilizada.

O termo de perturbação das funções de teste é definido pela projeção do operador convectivo na direção das funções de ponderação, sendo dado por

$$\mathcal{P}(\mathbf{W}) = \mathbf{A}_i^T(\mathbf{U}) \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \right). \tag{3.20}$$

A intensidade da estabilização é controlada pela matriz $\boldsymbol{\tau}$, definida como

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{m_x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{m_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^{m_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau^{E} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

onde as constantes $\tau^{m_x}, \tau^{m_y}, \tau^{m_z}, \tau^{\rho}, \tau^{E}$ são associadas às componentes da velocidade, densidade e energia total. Para obter os valores dessas constantes primeiro são definidos um vetor unitário na direção do gradiente da solução e a velocidade local do som, respectivamente, como

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\nabla \|\mathbf{U}\|^2}{\|\nabla \|\mathbf{U}\|^2\|}, \tag{3.22}$$

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \tag{3.23}$$

onde esses valores são usados para calcular os parâmetros de estabilização

$$\boldsymbol{\tau}_{\alpha} = \frac{\max\left(h_i |\mathcal{B}_i|\right)}{2(c + |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}|)} \mathbf{I}, \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\delta} = \frac{\delta}{(c + |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}|)^2} \mathbf{I}, \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\mu} = \frac{\mathcal{B}_i^2 \operatorname{diag} \mathbf{K}_{ii}}{(c + |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}|)^2}, \tag{3.26}$$

para $i = x, y, z$, com δ denotando o coeficiente de viscosidade artificial da captura de choques descrito na Seção **3.2.4** e $\mathbf{I}$ a matriz identidade. No numerador de (3.24) é avaliado o valor máximo entre os eixos $i = x, y, z$ dos produtos do tamanho de elemento h_i pelo módulo da componente $\mathcal{B}_i$. Para este trabalho é considerado um único valor de h da forma $h = h_x = h_y = h_z$ que é obtido da seguinte maneira (TEZDUYAR, 2003; BLAIS et al., 2020)

$$h = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{4A_{el}}{\pi}}, \tag{3.27}$$

onde k é o grau do polinômio de aproximação usado e A_{el} a área do elemento.

A montagem da matriz de coeficientes de estabilização segue

$$\boldsymbol{\tau} = \max\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}_{\alpha} - \boldsymbol{\tau}_{\delta} - \boldsymbol{\tau}_{\mu}\right), \tag{3.28}$$

que é arranjada de tal maneira que a contribuição da viscosidade do sistema e a viscosidade artificial são subtraídas para evitar a sobreposição de efeitos dissipativos (ALIABADI; RAY; TEZDUYAR, 1993; MOHAMMADI, 1993).

3.2.4 Captura de Choques

Embora a estabilização SUPG seja eficiente para controlar oscilações numéricas associadas aos termos advectivos dominantes, sua atuação isolada pode não ser suficiente para eliminar oscilações espúrias em regiões onde ocorrem gradientes muito elevados, como ondas de choque e descontinuidades de contato (KAWAHARA, 2016; ANDERSON, 2016). Nesses casos, torna-se necessária a introdução de um mecanismo adicional de dissipação numérica local, capaz de atuar seletivamente apenas nas regiões onde a solução apresenta comportamento não resolvido pela malha (TEZDUYAR, 2004; CATABRIGA; COUTINHO; TEZDUYAR, 2006).

Neste trabalho, emprega-se o método $YZ\beta$, proposto por Tezduyar (2004), para a determinação de um coeficiente de viscosidade artificial adaptativo. Esse método utiliza medidas locais do resíduo e dos gradientes da solução para construir um parâmetro de captura de choques que aumenta a dissipação apenas nas regiões onde ela é necessária, preservando a precisão da solução nas demais partes do domínio. A viscosidade artificial associada ao método é definida por

$$\mu_s(\beta) = \left\|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Z}\right\| \left(\sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\|\mathbf{Y}^{-1}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}-1} \left\|\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{U}\right\|^{1-\beta} \left(\frac{h_{jgn}}{2}\right)^{\beta}, \tag{3.29}$$

onde n_{sd} representa o número de dimensões espaciais do problema e h_{jgn} é definido como

$$h_{jgn} = 2\left(\sum_{a=1}^{d} \left|\frac{\nabla\rho}{\|\nabla\rho\|}\cdot\nabla N_a\right|\right)^{-1}, \tag{3.30}$$

onde d é o número de pontos de quadratura e ∇N_a o gradiente da função de base em um ponto da quadratura. A matriz diagonal $\mathbf{Y}$ é introduzida com o objetivo de normalizar as diferentes escalas físicas presentes nas variáveis conservativas, sendo definida por

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} (U_1)_{\text{ref}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (U_2)_{\text{ref}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (U_3)_{\text{ref}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (U_4)_{\text{ref}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (U_5)_{\text{ref}} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

onde $(U_i)_{\text{ref}}$ corresponde ao valor de referência associado à i-ésima componente do vetor de variáveis conservativas. Neste trabalho, tais valores são obtidos a partir dos valores máximos prescritos pelas condições iniciais de cada problema analisado. O vetor $\mathbf{Z}$ é definido como

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}, \tag{3.32}$$

correspondendo à parcela advectiva do resíduo das equações governantes. Dessa forma, $\mathbf{Z}$ fornece uma medida local da intensidade das variações da solução, permitindo identificar regiões onde a dissipação adicional deve ser aplicada.

O parâmetro do expoente β controla a sensibilidade da viscosidade artificial aos gradientes da solução. Valores menores de β tendem a produzir uma distribuição mais suave da dissipação artificial, enquanto valores maiores concentram a dissipação em regiões mais próximas das descontinuidades. A partir da avaliação da viscosidade artificial para $\beta = 1$ e $\beta = 2$, são consideradas duas estratégias distintas para a definição do parâmetro de captura de choques δ. A primeira estratégia, originalmente proposta por Tezduyar (2004), consiste em utilizar a média aritmética dos coeficientes obtidos para os dois valores de β:

$$\delta = \frac{1}{2}\left[\mu_s(1) + \mu_s(2)\right]. \tag{3.33}$$

Essa abordagem de média produz uma dissipação mais distribuída ao longo da região de choque. A segunda estratégia consiste em utilizar diretamente o valor correspondente a β,

$$\delta = \mu_s(\beta), \tag{3.34}$$

o que resulta em uma dissipação artificial dependente do valor de β escolhido. Se for escolhido o valor $\beta = 1$ a dissipação artificial é mais intensa nas proximidades das descontinuidades, enquanto $\beta = 2$ resulta em uma dissipação menos intensa nas proximidades das descontinuidades.

Uma vez determinado o parâmetro δ, a contribuição de captura de choques é incorporada à formulação variacional por meio do termo difusivo adicional

$$\int_\Omega \delta\, \nabla\mathbf{W} : \nabla\mathbf{U}\, d\mathbf{x}. \tag{3.35}$$

Esse termo atua como um mecanismo de difusão artificial dependente da solução, introduzindo dissipação apenas nas regiões onde os gradientes são suficientemente elevados para indicar a presença de descontinuidades ou camadas internas não resolvidas pela discretização. Como consequência, obtém-se uma redução significativa das oscilações numéricas espúrias, preservando simultaneamente a precisão da solução em regiões suaves do escoamento.

3.2.5 Discretização no Tempo

Seja o intervalo temporal $[0, T]$ particionado em N subintervalos uniformes de tamanho Δt, com instantes $t^n = n\Delta t$. Para a discretização temporal do sistema semi-discreto em espaço, adota-se o esquema Backward Differentiation Formula de segunda ordem (BDF2), compatível com a ordem de aproximação espacial empregada neste trabalho.

A aproximação da derivada temporal é dada por

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} \approx \frac{3\mathbf{U}^{n+2} - 4\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2\Delta t}. \tag{3.36}$$

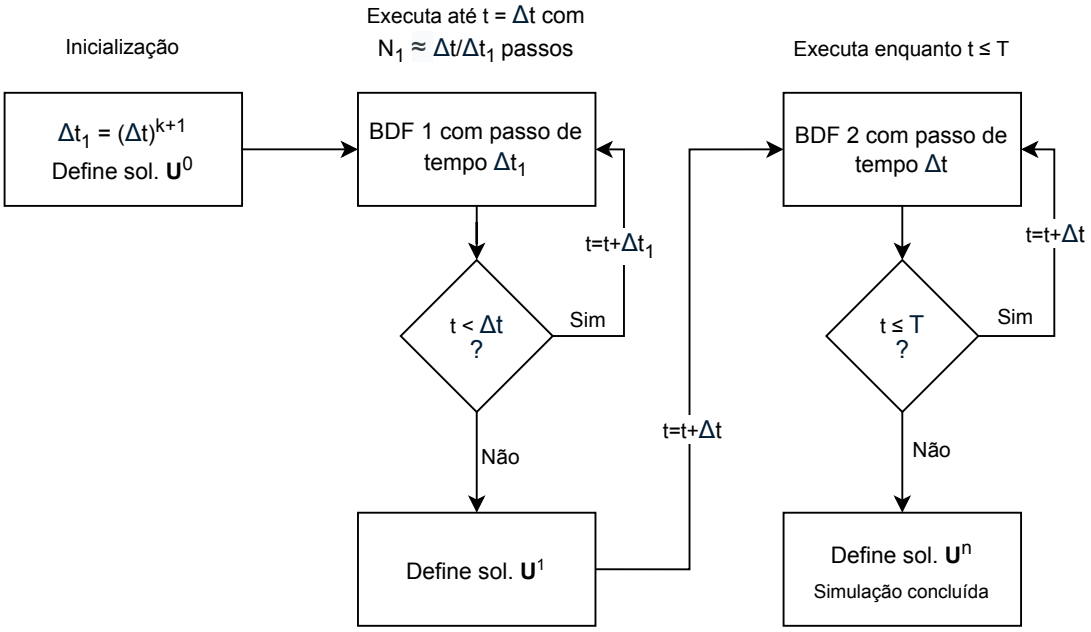
O esquema BDF2 é um método de dois passos, exigindo a solução nos dois instantes anteriores. Assim, é necessário um procedimento de inicialização para obtenção de $\mathbf{U}^1$

a partir de $\mathbf{U}^0$. Conforme descrito no fluxograma da Figura 3, para o primeiro passo temporal utilizamos o esquema BDF1 (Euler implícito), dado por

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t_1}, \tag{3.37}$$

que é de primeira ordem no tempo. Entretanto, para melhorar a qualidade da condição inicial do esquema multietapas BDF2, adota-se um refinamento do passo de tempo no estágio inicial, definido por $\Delta t_1 = (\Delta t)^{k+1}$, o que permite reduzir o erro de inicialização e fornecer uma aproximação mais precisa de $\mathbf{U}^1$ a partir de $\mathbf{U}^0$. Após a obtenção de $\mathbf{U}^1$, o esquema BDF2 em (3.36) é aplicado para todos os passos subsequentes $n \geq 1$. Esse procedimento garante consistência na inicialização e estabilidade na evolução temporal do sistema semi-discreto resultante da formulação de elementos finitos.

Figura 3 – Diagrama da implementação do método BDF 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

3.2.6 Critério de Convergência para Regime Estacionário

Para problemas em regime estacionário, a detecção de convergência é realizada por meio da avaliação da variação temporal da solução discreta entre dois passos consecutivos. Em particular, define-se o indicador de convergência como a norma da diferença entre os estados em instantes sucessivos, dado por

$$\max\left(\left\| m_i^{n+1} - m_i^n \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \left\| \rho^{n+1} - \rho^n \right\|_{L^2(\Omega)}, \left\| E^{n+1} - E^n \right\|_{L^2(\Omega)} \right) < \psi_{\text{est}} \tag{3.38}$$

onde $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ denota a norma L^2 no domínio Ω, m_i são as componentes do momento linear e ψ_{est} uma tolerância. Neste trabalho, adota-se $\psi_{\text{est}} = 10^{-7}$, de modo que a solução

é considerada quasi-estacionária quando a variação temporal se torna suficientemente pequena em relação à escala do problema. Este procedimento fornece uma medida robusta da evolução temporal do sistema, uma vez que soluções estacionárias satisfazem, no limite, $\partial \mathbf{U}/\partial t \to \mathbf{0}$.

Para cenários em que a solução não converge estritamente para um regime estacionário no intervalo temporal considerado, a condição (3.38) pode não ser satisfeita de forma direta, mesmo para tempos de simulação elevados. Nesses casos, torna-se necessário introduzir um critério adicional de parada da simulação, de natureza algorítmica, de modo a evitar custos computacionais excessivos. Assim, após um tempo mínimo de simulação $t > T$, passa-se a monitorar a evolução do indicador de convergência ao longo das iterações temporais. Se, a partir desse instante, a condição de convergência ao estado estacionário não for atendida por um número consecutivo de passos de tempo superior a um parâmetro previamente definido, assume-se que não há evolução significativa adicional da solução e o cálculo é interrompido.

3.3 Modelo Numérico Estabilizado

Para a discretização espacial pelo Método dos Elementos Finitos, considera-se uma partição $\mathcal{T}_h$ do domínio Ω em elementos K. Sobre essa malha, definem-se os espaços discretos de aproximação polinomiais de ordem k como

$$\mathcal{U}^h = \left\{ \mathbf{U}_h \in [H^1(\Omega)]^{d+2} : \mathbf{U}_h|_K \in [P^k(K)]^{d+2},\ \mathbf{U}_h = \mathbf{U}_D \text{ sobre } \partial\Omega_D \right\}, \tag{3.39}$$

$$\mathcal{W}^h = \left\{ \mathbf{W}_h \in [H^1(\Omega)]^{d+2} : \mathbf{W}_h|_K \in [P^k(K)]^{d+2},\ \mathbf{W}_h = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_D \right\}. \tag{3.40}$$

onde $P^k(K)$ denota o espaço de polinômios de grau menor ou igual a k em cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$.

Nesse contexto, a formulação estabilizada de elementos finitos para o sistema (2.36)-(2.39), incorporando a estabilização SUPG (3.18), o termo de captura de choques (3.35) e a discretização temporal BDF2 (3.36), consiste em:

Encontrar $\mathbf{U}_h^{n+2} \in \mathcal{U}^h$, tal que, para todo $\mathbf{W}_h \in \mathcal{W}^h$,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{W}_h \cdot \frac{3\mathbf{U}_h^{n+2}}{2\Delta t}\, d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega \mathbf{W}_h \cdot \left(\mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{W}_h}{\partial x_i} \cdot \left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}_h^{n+1}) \, \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_j} \right) d\mathbf{x} \\
&- \int_{\partial\Omega} \mathbf{W}_h \cdot \left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}_h^{n+1}) \, \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_j} \right) \mathbf{n}\, ds \\
&+ \int_\Omega \boldsymbol{\tau} \left(\mathbf{A}_i^T(\mathbf{U}_h^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{W}_h}{\partial x_i} \right) \mathcal{R}(\mathbf{U}_h^{n+2}) \cdot \, d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega \delta \, \nabla \mathbf{W}_h : \nabla \mathbf{U}_h^{n+2}\, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{W}_h \cdot \frac{4\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^{n}}{2\Delta t}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{W}_h \cdot \mathbf{G}\, d\mathbf{x}.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

onde o resíduo discreto é definido por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{U}_h^{n+2}) = \frac{3\mathbf{U}_h^{n+2} - 4\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathbf{U}_h^{n}}{2\Delta t} &+ \mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_i} \\
&- \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{K}_{ij}(\mathbf{U}_h^{n+1}) \, \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_j} \right) - \mathbf{G}.
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

A formulação (3.41) reúne, respectivamente: o termo de evolução temporal (BDF2), a contribuição convectiva linearizada, o termo viscoso obtido por integração por partes (incluindo a contribuição de contorno), a estabilização do tipo SUPG baseada no resíduo consistente do sistema e, por fim, o termo de difusão artificial associado à captura de descontinuidades. O termo de força externa é dado pelo vetor $\mathbf{G}$.

3.4 Resolução do Sistema Não Linear

A discretização da formulação mista apresentada na Equação (3.41) resulta em um sistema de equações algébricas não lineares. Para a sua resolução, emprega-se o Método Semi-Implícito, no qual as variáveis de acoplamento não linear são avaliadas no passo de tempo anterior à solução corrente.

A implementação computacional foi desenvolvida utilizando a biblioteca de elementos finitos `deal.II` versão 9.7 (AFRICA et al., 2024), a qual disponibiliza a infraestrutura para a definição da forma fraca, a montagem das matrizes globais e a interface com os solucionadores lineares. O sistema linearizado resultante é resolvido por um método direto por meio da biblioteca `UMFPACK`, especializada em sistemas lineares esparsos não simétricos mediante a fatoração LU direta (DAVIS, 2004).

4 ADAPTATIVIDADE DE MALHA

A resolução pelo método dos Elementos Finitos oferece bons resultados, porém o custo computacional tanto de memória quanto de operações por segundo é alto. Esse custo pode ser visto de maneira simplificada em função da ordem dos polinômios de aproximação e número de elementos usados para a aproximação, o que impacta diretamente o tamanho da matriz que vai ser enviada a um *solver* de sistemas lineares. Apesar do alto grau de otimização que esses algoritmos possuem é comum em problemas práticos o uso de matrizes com número alto de graus de liberdade, que podem chegar facilmente a milhões dependendo do nível de refinamento, ordem polinomial e dimensões (no caso, 2D ou 3D) da malha escolhida.

Com o objetivo de reduzir o número de graus de liberdade sem comprometer a precisão da solução numérica ao longo de todo o domínio, empregam-se técnicas de Refinamento Adaptativo de Malha (AMR) durante a simulação. Essas técnicas permitem refinar a malha em regiões com maior erro estimado e reduzir o nível de refinamento nas regiões onde o erro é menor, promovendo uma distribuição mais eficiente dos elementos e garantindo uma precisão mais uniforme em todo o domínio.

Por motivo de simplicidade de escrita, a partir dessa seção a técnica de AMR proposta será definida como Auto AMR.

4.1 Estratégia de Adaptatividade de Malha

O processo de adaptatividade de malha considerado neste trabalho é composto pelas seguintes etapas:

1. **Inicialização:** definição e construção da malha inicial, que pode incluir a aplicação de um refinamento global;
2. **Solução do problema:** resolução do sistema de equações na malha corrente;
3. **Estimativa de erro:** avaliação do erro local em cada elemento por meio do indicador de erro;
4. **Marcação de elementos:** identificação dos elementos para refinamento (cujo erro excede o limite superior) ou desrefinamento (cujo erro é inferior ao limite inferior), mantendo-se os demais inalterados;
5. **Adaptação da malha:** execução das operações de refinamento e desrefinamento nos elementos marcados para gerar a nova malha;
6. **Projeção da solução:** transferência e interpolação do campo de variáveis da malha anterior para a nova malha adaptada.

Na etapa de inicialização, a malha inicial é obtida por meio de um refinamento global uniforme até um nível previamente definido por parâmetro. Nesse procedimento, a cada nível de refinamento, todos os elementos da malha são subdivididos uniformemente, de modo que cada elemento quadrilateral é dividido em quatro novos elementos. Assim, o nível de refinamento indica o número de vezes que esse processo de subdivisão é aplicado (2^{2N}, sendo N o nível de refinamento). Por exemplo, considerando uma malha inicial composta por um único elemento quadrilateral ($N = 0$), um refinamento global de nível 3 resulta em 4 elementos ($N = 1$) no primeiro nível, 16 no segundo ($N = 2$) e 64 no terceiro ($N = 3$).

Na etapa 6 ocorre o processo de transferência da solução da malha de entrada da etapa 3 para a malha resultante da etapa 5, onde esse processo é feito por meio de uma função disponível na biblioteca `deal.II`, que usa um processo de interpolação para obter os valores nos nós extras criados na malha refinada.

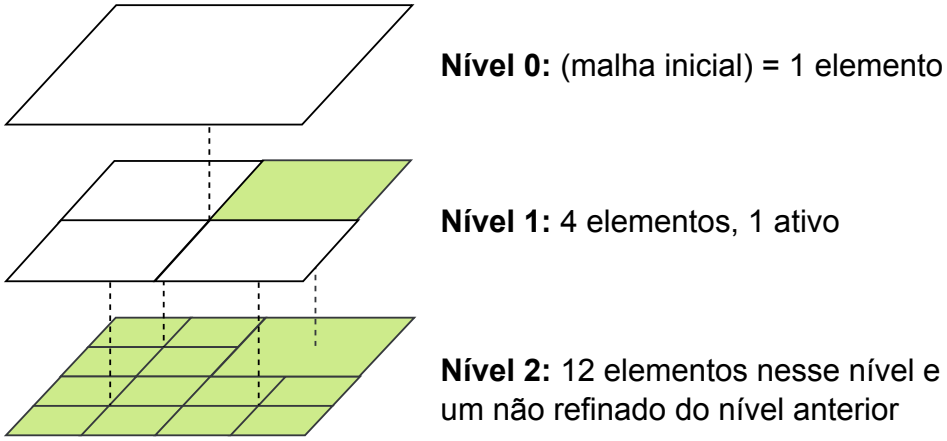
Nas etapas de 2 a 6 inicia-se o processo de refinamento adaptativo e transferência da solução onde essas etapas são repetidas iterativamente dada uma frequência pré determinada até que o erro seja suficientemente pequeno, buscando minimizar o número de elementos sem comprometer a precisão da solução em todo o domínio.

Durante o processo de refinamento adaptativo, internamente à biblioteca `deal.II` é gerada uma estrutura em árvore para organização do processo de adaptatividade como mostrado na Figura 4. Digamos que se inicie o processo com uma malha de um elemento com um refinamento global, levando ao nível 1, onde a biblioteca guarda uma referência ao elemento original marcando-o como inativo. Na etapa de refinamento adaptativo, uma nova iteração é feita e a estimativa de erro é obtida, sendo marcados três elementos para refinamento e um se mantendo inalterado, assim, ao aplicar o refinamento a esses elementos é criado um segundo nível com 12 elementos refinados e o elemento inalterado do nível anterior, formando assim um conjunto de 13 elementos ativos, onde esse conjunto será referido como a malha atual.

A função da estrutura em árvore é possibilitar a reversão do processo de refinamento. Quando um grupo de quatro elementos ativos filhos de um elemento inativo do nível anterior tem o erro muito baixo, esses são marcados para redução do nível de refinamento pelo algoritmo do Auto AMR, onde na etapa de aplicação os valores nodais dos quatro elementos são transferidos ao elemento pai de forma apropriada, e os elementos filhos são removidos, com esse processo de redução de nível sendo executado internamente pela biblioteca `deal.II`.

Na Figura 5 é mostrado um exemplo de como a biblioteca `deal.II` executa o refinamento em elementos quadriláteros, incluindo como a biblioteca lida com as diferenças de número de nós entre elementos adjacentes criando nós auxiliares chamados *hanging nodes*.

Figura 4 – Estrutura em árvore da lógica dos níveis de refinamento, onde os elementos em branco estão inativos, pois foram substituídos pelo resultado de refinamento, e os elementos em verde são os elementos ativos.



Fonte: Elaborada pelo autor

O cálculo da estimativa de erro é feito usando uma função interna da biblioteca `deal.II` baseada no trabalho de Kelly et al. (1983). Essa função busca aproximar o erro por célula pela integração do salto do gradiente da solução ao redor das faces F de cada célula K. Essa abordagem é formalizada pela seguinte equação

$$\eta_K^2 = \sum_{F \in \partial K} c_F \int_F [\![\nabla u]\!]^2 \, dS \qquad \text{com} \qquad [\![\nabla u]\!] = \nabla u^+ \mathbf{n}_{K^+} + \nabla u^- \mathbf{n}_{K^-}, \tag{4.1}$$

onde $c_F = h_K/24$ proposto por Ainsworth e Oden (1997), h_K é o diâmetro da célula. O operador de salto $[\![\cdot]\!]$ é calculado na interface entre as células vizinhas K^+ e K^-, que compartilham a face F, onde $\nabla u^\pm$ e $\mathbf{n}_{K^\pm}$ representam, respectivamente, o gradiente da solução e o vetor normal unitário associados a essas células.

4.1.1 Seleção dos Limites de Refinamento e Mesclagem de Elementos

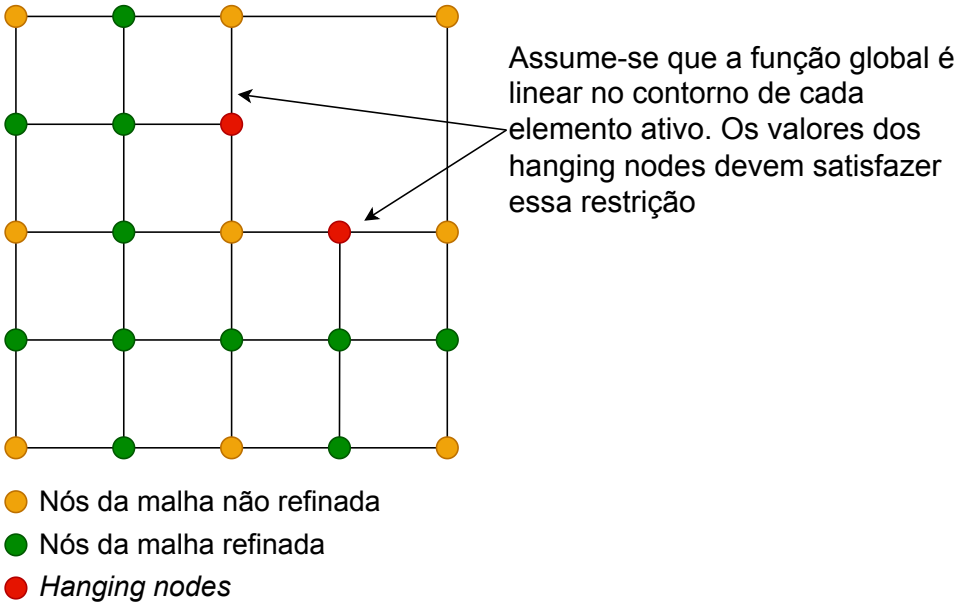
Com base no erro estimado em cada elemento por intermédio da equação (4.1), define-se quais elementos devem ser refinados e quais devem ter seu nível de refinamento reduzido, a partir da comparação com limites superior e inferior do erro.

Dos métodos revisados por Pons e Ersoy (2019), a técnica de seleção de limites proposta por Kallinderis e Baron (1989) é uma das mais simples, baseada na média do erro no domínio, somada ao desvio padrão, definido como

$$\alpha = \varepsilon \left(\frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=1}^{nel} \eta_K^2(\Psi, t) \right) + \xi \sigma(\Psi, t) \tag{4.2}$$

onde o primeiro termo refere-se à média do erro em todos os elementos do domínio e $\sigma(\Psi, t)$ o desvio padrão do erro no domínio. Em geral $\Psi = \mathbf{u}$ no caso incompressível ou

Figura 5 – Uma malha simples com os *hanging nodes* destacados em vermelho, os nós da malha original em laranja e os nós em verde são o resultado do refinamento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$\Psi = \rho\mathbf{u}$ no caso compressível. Casos particulares com outras escolhas de Ψ são ressaltados no texto. Os parâmetros ε e ξ são ajustados pelo usuário. Essa abordagem, proposta por Pons e Ersoy (2019), exige o ajuste manual de parâmetros pelo usuário o que pode ser um desafio, já que esses parâmetros devem ser modificados para cada problema.

Outros métodos revisados incluem a aplicação de duas etapas para melhor detectar regiões suaves na presença de picos na função de erro, como os propostos em (WARREN et al., 1991; AFTOSMIS, 1994). Porém, como apontado por Pons e Ersoy (2019) esses métodos não são suficientes para capturar com eficiência a parte suave da solução na presença de grandes picos da função de erro. Outro ponto negativo é que esses métodos mantêm o uso de parâmetros ajustados pelo usuário.

Neste contexto, propomos uma modificação do método de determinação dos limites baseado na média e desvio padrão, na qual o valor de referência α é determinado automaticamente por meio da função de distribuição proposta em (PONS; ERSOY, 2019), combinada com uma função de penalização. Essa função atua de forma a moderar o processo de adaptatividade da malha, ajustando os limites superior e inferior de erro. Esses limites definem, respectivamente, as regiões a serem refinadas e aquelas em que o nível de refinamento deve ser reduzido, evitando tanto o refinamento excessivo quanto o insuficiente. O procedimento é independente do problema e dispensa o ajuste de parâmetros pelo usuário.

4.1.2 Função de Distribuição

Para contornar a dependência de parâmetros calibrados pelo usuário, utiliza-se neste trabalho a estratégia baseada na função de distribuição proposta por Pons e Ersoy (2019). Essa abordagem permite determinar automaticamente um valor de referência α_{pe} a partir da distribuição espacial do erro estimado, sendo esse valor empregado na definição do critério de refinamento apresentado ao final desta seção.

A construção da função de distribuição baseia-se na análise das regiões do domínio em que o erro estimado excede um determinado valor de referência α. Seja Z_α o conjunto dos intervalos

$$x_0(\alpha) < x_1(\alpha) < \cdots < x_{2p_\alpha-2}(\alpha) < x_{2p_\alpha-1}(\alpha), \tag{4.3}$$

com $\alpha \in S_K$, onde $S_K = \eta_K^2$. A função de distribuição $d(\alpha)$ representa a acumulação das densidades dos conjuntos Z_α para $0 < \alpha < S_{max}$, sendo

$$S_{max} = \max(S_K). \tag{4.4}$$

A Figura 6 ilustra a construção do conjunto Z_α para um valor fixo de $\alpha = 4.0$, utilizando uma distribuição hipotética do erro estimado com três máximos locais. A reta horizontal em vermelho representa o valor de referência α, enquanto as interseções entre essa reta e a distribuição do erro definem os intervalos pertencentes a Z_α. Nesse contexto, o valor associado a Z_α corresponde à soma dos comprimentos desses intervalos, representando a região do domínio em que o erro estimado é superior ao valor de referência considerado. Mais detalhes podem ser encontrados em (PONS; ERSOY, 2019).

Na prática, entretanto, o erro estimado está disponível apenas de forma discreta, sendo associado às células da malha. Dessa forma, a definição contínua dos intervalos de Z_α é substituída por uma contagem do número de células cujo erro excede o valor de referência α_j.

Os valores de α_j são definidos por

$$(\alpha_j)_{0\le j\le M} = \left(S_m \left(\frac{j}{M}\right)^{\varepsilon}\right)_{0\le j\le M}, \tag{4.5}$$

onde M representa o número de amostragens, S_m é o valor obtido pelo método da média e ε é um fator de ajuste adotado como $\varepsilon = 2$, conforme proposto por Pons et al. (2016).

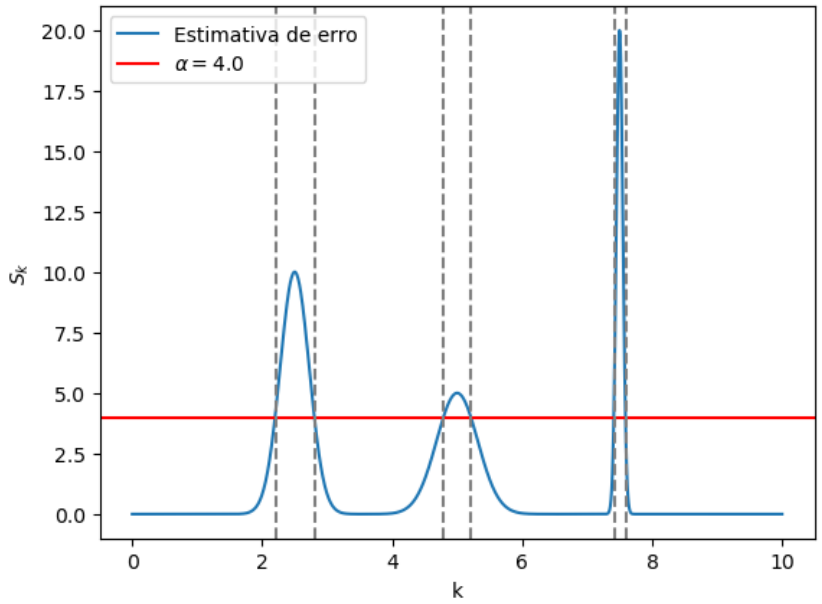
A partir dessa definição, a função de distribuição é generalizada para o caso discreto como

$$d_j(\alpha) = \begin{cases} L & \text{se } \alpha = 0, \\ \sum_{j=0}^{M} \#\{K \ ; \ S_K^n > \alpha_j\} & 0 < \alpha < S_{max}, \\ 0 & \text{se } \alpha = S_{max}, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde L é o número total de células do domínio. Nessa formulação, o termo

$$\#\{K \ ; \ S_K^n > \alpha_j\} \tag{4.7}$$

Figura 6 – Exemplo de uso da estimativa de erro para definição do conjunto Z_α, onde as linhas em cinza são os pontos do conjunto.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

representa o número de células cuja estimativa de erro é superior ao valor de referência α_j.

Voltando ao exemplo hipotético da Figura 6, pode-se interpretar o eixo horizontal como a distribuição do erro por célula de uma determinada malha, enquanto a reta vermelha representa os diferentes valores de α_j, variando de 0 até $\max(S_K)$ ao longo de M amostragens.

A Figura 7 mostra um exemplo da aplicação da função de distribuição ao erro hipotético apresentado na Figura 6. Observa-se que os máximos locais da distribuição do erro resultam em pontos onde a derivada de $d_j(\alpha)$ não está definida.

A identificação automática do valor de referência α_{pe} poderia ser realizada diretamente a partir da análise da função de distribuição $d(\alpha)$. Entretanto, essa abordagem exige aproximações precisas de derivadas em regiões onde a função apresenta descontinuidades associadas aos máximos locais do erro estimado, o que implica maior custo computacional.

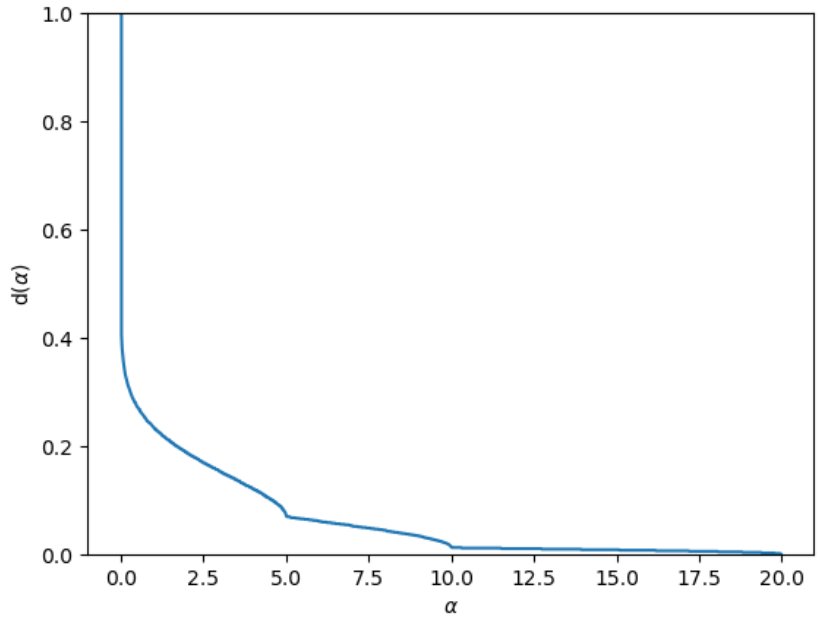
Para evitar essa dificuldade, utiliza-se a função peso definida por

$$f(\alpha) = \alpha \; d(\alpha), \tag{4.8}$$

aplicada aos M valores de α obtidos a partir de (4.5). O efeito dessa função é transformar determinados pontos característicos de $d(\alpha)$ em máximos locais bem definidos, permitindo identificar automaticamente o valor de referência α_{pe} por meio da localização do valor máximo de $f(\alpha)$, ou seja,

$$\alpha_{pe} = \arg \max_{\alpha \in [0, S_{max}]} f(\alpha), \tag{4.9}$$

Figura 7 – Exemplo de gráfico da função de distribuição aplicada ao erro descrito na Figura 6. É possível identificar os máximos locais nas descontinuidades.



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

onde o operador arg max representa o valor de α para o qual a função $f(\alpha)$ atinge seu valor máximo. Em Pons e Ersoy (2019) é apresentada uma descrição detalhada das propriedades dessa função.

A Figura 8 mostra um exemplo da aplicação da função peso aos valores da função de distribuição apresentados na Figura 7. Nesse caso, o valor de referência α_{pe} pode ser obtido diretamente pela identificação do ponto de máximo da função peso.

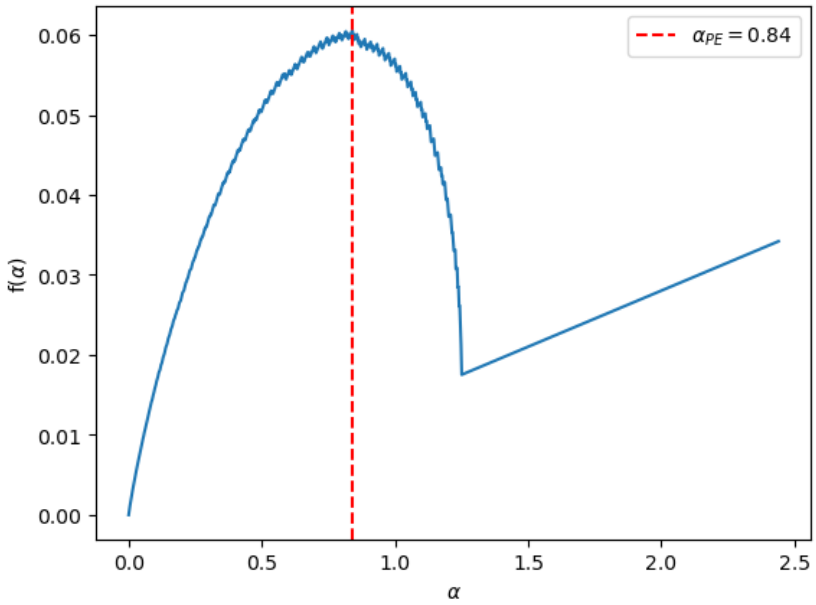
Embora a função de distribuição e a função peso sejam utilizadas conforme propostas em Pons e Ersoy (2019), neste trabalho o valor α_{pe} é incorporado a um novo critério de refinamento, no qual os limites superior e inferior de refinamento são ajustados dinamicamente por meio de uma função de penalização. Essa modificação busca evitar refinamentos excessivos ou insuficientes ao longo das iterações adaptativas, sem a necessidade de calibração manual de parâmetros. Esse esquema é apresentado a seguir.

4.1.3 Função de penalização

Seguindo a estratégia proposta por Pons e Ersoy (2019), após a etapa de cálculo do valor da função de distribuição e obtenção do valor de α_{pe}, duas constantes ε_{min} e ε_{max} são definidas para determinar os limites de refinamento e mesclagem dos elementos

- Se $S_K > \alpha_{pe}\varepsilon_{max}$ a célula é marcada para refinamento se $l_K < l_{max}$,
- Se $S_K < \alpha_{pe}\varepsilon_{min}$ a célula é marcada para mesclagem, se $l_K > l_{min}$,

Figura 8 – Aplicação da função peso ao resultado da função de distribuição (Fig. 7).



Fonte: Elaborada pelo autor (2025)

Nessas expressões, l_K representa o nível de refinamento da célula K, enquanto l_{min} e l_{max} correspondem, respectivamente, aos níveis mínimo e máximo de refinamento permitidos. Em malhas quadrilaterais, cada nível de refinamento subdivide um elemento em quatro novos elementos.

Pons et al. (2016) propõem a utilização dos valores fixos $\varepsilon_{min} = \varepsilon_{max} = 1$, dando origem a metodologia de refinamento que os autores nomearam como BB-AMR. Entretanto, nos problemas considerados neste trabalho, essa escolha conduz a um refinamento excessivo da malha em regiões onde tal refinamento não é necessário para manter uma distribuição homogênea do erro ao longo do domínio. Nesse cenário, a função de distribuição tende a acompanhar continuamente a redução do erro estimado, deslocando o valor de referência α_{pe} para regiões cada vez mais próximas de zero. Como consequência, o processo adaptativo pode levar, no pior caso, ao refinamento de toda a malha.

Para contornar essa tendência, propomos a inclusão de uma contribuição associada ao número de células no processo de determinação do critério adaptativo. O objetivo é moderar a ação da função de distribuição à medida que níveis menores de erro passam a exigir aumentos desproporcionais no número de elementos da malha. Para tanto, definimos uma função de penalização f_p responsável por introduzir uma contribuição proporcional ao número de células ativas e à norma discreta l^2, aplicada ao vetor que armazena os valores do erro estimado retornados pela função de avaliação (4.1)

$$\|l^2_{err}\|^2 = \sum_K |S_K|^2, \tag{4.10}$$

onde $S_K = \eta_K^2$. Dessa forma, busca-se equilibrar automaticamente o nível de refinamento da malha e o custo computacional associado.

A inclusão da função de penalização modifica diretamente o valor de referência utilizado no processo adaptativo, controlando a intensidade com que α_{pe} atua na marcação das células para refinamento e mesclagem. Com isso, o critério adaptativo passa a ser definido por

- Se $S_K > (\alpha_{pe} + f_p)\varepsilon_{max}$ a célula é marcada para refinamento se $l_K < l_{max}$,
- Se $S_K < (\alpha_{pe} + f_p)\varepsilon_{min}$ a célula é marcada para mesclagem, se $l_K > l_{min}$.

Neste trabalho, adota-se $\varepsilon_{max} = 1$. Já o parâmetro ε_{min} é definido por

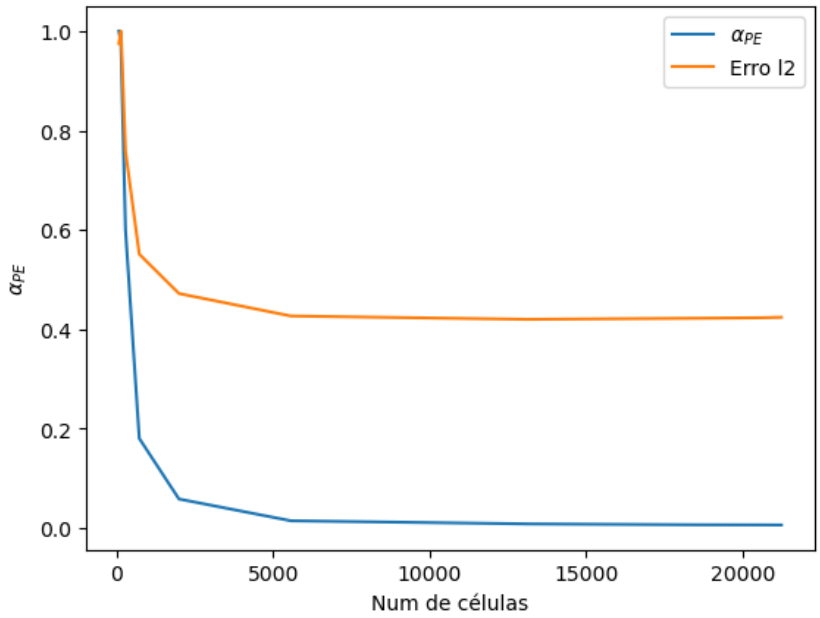
$$\varepsilon_{min} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \tag{4.11}$$

onde k representa o grau polinomial utilizado na aproximação numérica. O fator $\frac{1}{2}$ está associado à subdivisão das arestas dos elementos quadrilaterais durante o refinamento da malha. Com essa definição, o valor de ε_{min} passa a refletir a taxa esperada de convergência do erro em função do refinamento da malha. Isso impede que o processo de mesclagem dos elementos ocorra de forma excessivamente agressiva, reduzindo oscilações indesejadas entre refinamento e desrefinamento sucessivos. Essas oscilações podem ocorrer quando células com erro próximo ao limite de refinamento são refinadas e, após a subdivisão, passam imediatamente a satisfazer o critério de mesclagem no passo adaptativo seguinte. Nesse caso, os elementos refinados seriam novamente mesclados, produzindo ciclos repetitivos de refinamento e desrefinamento. A definição proposta para ε_{min} reduz esse comportamento, tornando o processo adaptativo mais estável.

Nesse contexto, a construção da função de penalização f_p pode ser interpretada como um problema de otimização, no qual as variáveis relevantes são o valor de referência α_{pe}, o número de células da malha e a norma l^2 do erro estimado. A Figura 9 mostra a relação entre essas variáveis para o problema da cavidade (tratado na Seção 5.4). Observa-se que tanto α_{pe} quanto a norma l^2 do erro apresentam comportamento aproximadamente exponencial quando analisados em função do número de células.

Esse comportamento foi observado de forma consistente em diferentes problemas e configurações numéricas simuladas neste trabalho. Isso sugere a existência de uma região de equilíbrio, na qual reduções adicionais do erro passam a exigir aumentos significativos no número de células. A identificação precisa desse ponto poderia ser realizada por meio da análise da derivada da curva associada a α_{pe}. Entretanto, essa abordagem introduziria complexidade adicional ao procedimento adaptativo. Para evitar esse custo computacional, propõe-se a utilização de uma função de penalização capaz de modificar o comportamento assintótico de α_{pe}, induzindo a formação de um mínimo local estável.

Figura 9 – Comportamento do α_{pe} e erro l^2 proporcional ao número de células em uma execução de 3 segundos do problema da cavidade, com $Re = 1000$.



Fonte: Elaborada pelo autor

A função de penalização proposta, denotada por f_p, é definida a partir do número atual de células da malha, representado por c, e da contribuição relativa do erro global, como segue

$$f_p = \frac{c}{\gamma_c} \max(\alpha_{pe}), \qquad \gamma_c = C_{max} + C_{max} \frac{l2_{err}}{\max(l2_{err})} \tag{4.12}$$

o termo de penalização f_p é definido pela relação de células ativas e o parâmetro γ_c ponderado pelo maior valor de α_{pe} observado durante a execução. O parâmetro γ_c corresponde ao número máximo de células ponderado pela contribuição relativa do erro atual normalizado pelo maior erro registrado ao longo da simulação. O valor de C_{max} é definido automaticamente na inicialização, como o valor máximo de elementos caso toda a malha seja refinada até l_{max}. Por exemplo, se $l_{min} = 1$ se inicia com 400 elementos e o nível máximo de refinamento é definido como $l_{max} = 4$, o valor máximo de elementos é calculado como

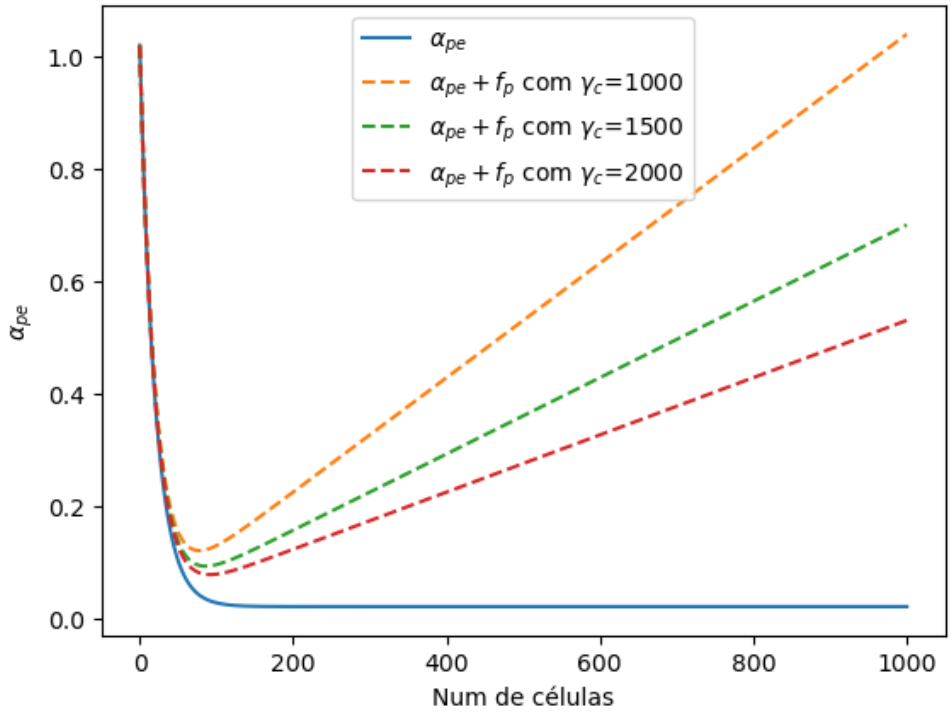
$$C_{max} = 400 \times 4^{4-1} = 25.600, \tag{4.13}$$

com o fator 4 (elevado a diferença dos níveis máximo e mínimo de refinamento) correspondendo ao número de divisões feitas em um elemento quando refinado.

Para ilustrar o efeito dessa penalização, o comportamento de α_{pe} foi modelado por uma função exponencial simplificada do tipo $\alpha_{pe}(c) = \exp(-0.05c) + 0.02$, considerando $C_{max} = 1000$. A Figura 10 apresenta o efeito da função de penalização para diferentes valores de γ_c, os quais variam entre C_{max} e $2C_{max}$ conforme a razão entre o erro atual e o maior erro registrado.

Quando o valor atual de $l2_{err}$ está próximo de $\max(l2_{err})$, o parâmetro γ_c aproxima-se de $2C_{max}$, permitindo que o mínimo local da função resultante assuma valores menores, como ilustrado pela curva vermelha da Figura 10. Nesse cenário, o processo adaptativo tende a permitir refinamentos mais profundos. À medida que o erro diminui, a influência da penalização aumenta progressivamente, conduzindo ao comportamento ilustrado pelas curvas verde e laranja.

Figura 10 – Exemplo de comportamento do parâmetro α_{pe} proporcionalmente ao número de células.



Fonte: Elaborada pelo autor

Por fim, define-se também a frequência de aplicação do processo adaptativo em função do tamanho do passo de tempo adotado na simulação. Para $\Delta t \geq 0.1$, o refinamento de malha é realizado a cada três iterações, enquanto para $\Delta t < 0.1$ o processo adaptativo é aplicado a cada dez iterações. Essa escolha busca equilibrar o custo computacional associado à adaptatividade com a necessidade de acompanhar adequadamente a evolução temporal da solução.

A implementação das funções de distribuição e penalização podem ser vistas em (LOPES, 2026).

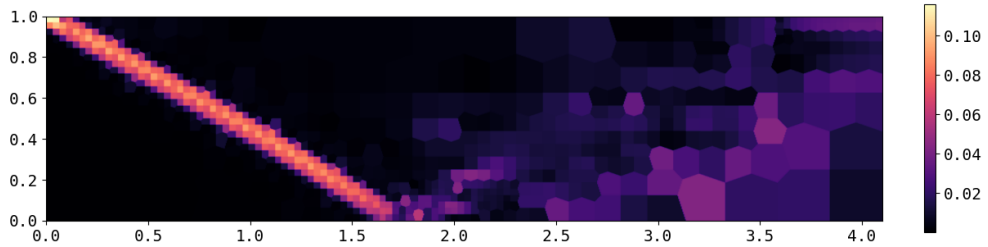
4.1.4 Exemplo de aplicação do Auto AMR

Para ilustrar o funcionamento da estratégia de adaptabilidade do Auto AMR, apresenta-se um caso prático baseado nos resultados do problema do choque refletido

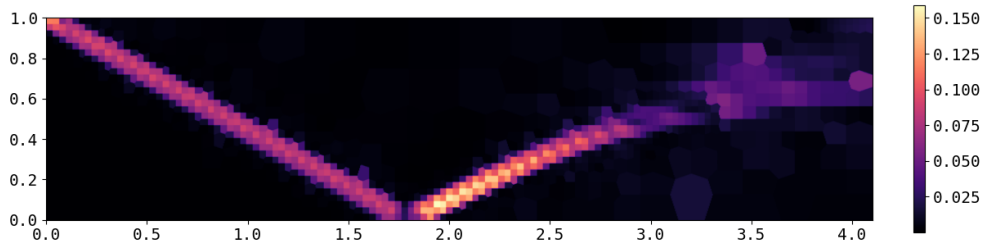
(Seção 7.4). O detalhamento abrange as etapas 2 a 4 do algoritmo, contemplando a estimativa de erro e a sinalização dos elementos a partir dos limites tolerados (α_{pe} e α_{ce}). Como resultado, os elementos são classificados para refinamento, mesclagem ou manutenção na faixa de estabilidade.

Ao término do passo de tempo em que se realiza a adaptabilidade de malha, obtém-se a estimativa de erro de acordo com a Equação (4.1). Na Figura 11, exibem-se as distribuições de erro por elemento para três instantes de tempo, destacando-se no primeiro (Figura 11a) a captura do erro durante a formação do choque inicial no lado esquerdo do domínio, previamente à formação do choque refletido no lado direito.

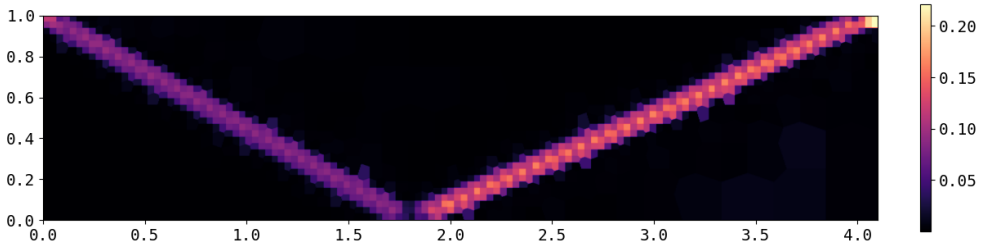
Figura 11 - Exemplo de estimativas de erro obtidas para o problema do choque refletido.



(a) Obtida a $t = 0{,}845$.



(b) Obtida a $t = 1{,}205$.

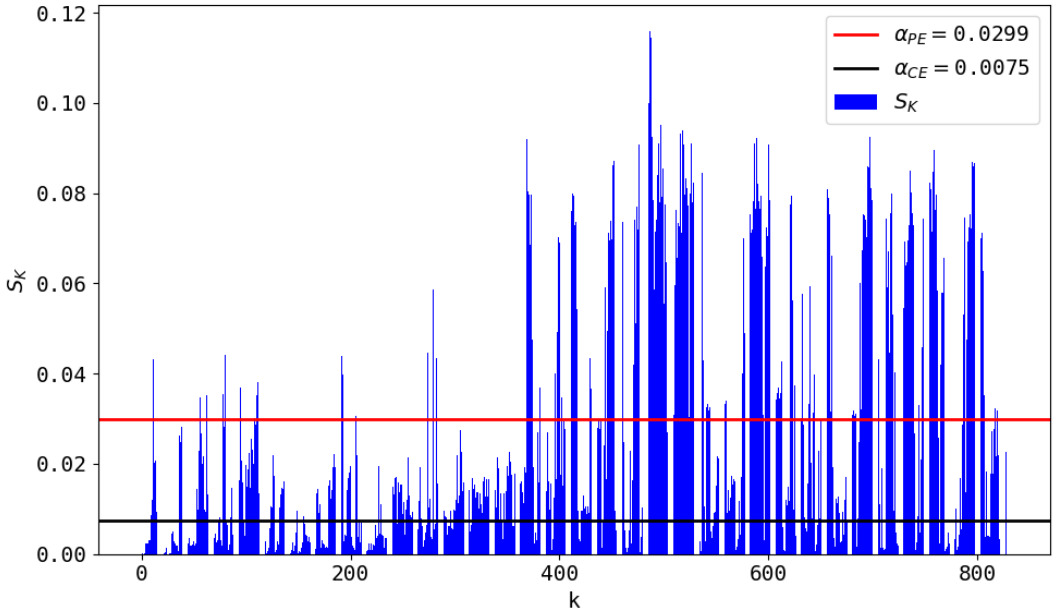


(c) Obtida a $t = 2{,}405$.

Fonte: Elaborada pelo autor

No lado esquerdo do domínio, verifica-se que o erro está concentrado ao redor da onda de choque, enquanto no lado direito ainda se encontra disperso por uma região mais ampla. A Figura 11b ilustra o processo de formação do choque refletido na metade direita, ao passo que a Figura 11c retrata a estimativa de erro para a configuração final dos choques, na qual a localização do erro se restringe quase integralmente às proximidades das frentes de choque.

Figura 12 – Exemplo de ação dos limites de refinamento e mesclagem para $t = 0{,}845$.



Fonte: Elaborada pelo autor

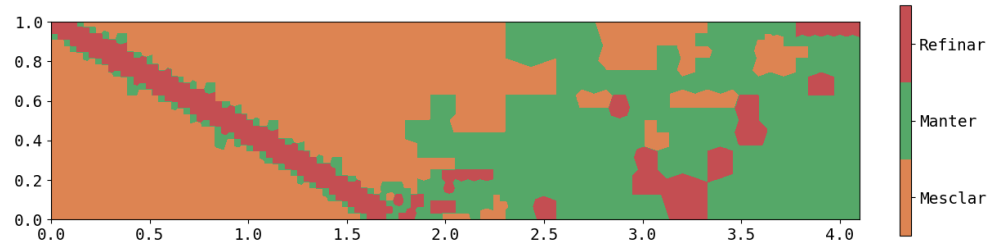
Após a determinação da estimativa de erro, calculam-se a função de distribuição (4.6) e a função peso (4.8), cujo resultado é somado à contribuição da função de penalização (4.12) para resultar nos limiares superior (α_{pe}) e inferior (α_{ce}).

Na Figura 12, exibe-se um comportamento similar ao da Figura 6, do qual difere por empregar os dados de erro ilustrados na Figura 11a no lugar de uma função sintética. Os limites α_{pe} e α_{ce} obtidos para essa distribuição estão indicados pelas linhas horizontais na figura. Verifica-se que, para esse estágio da simulação, uma quantidade reduzida de elementos encontra-se abaixo do limite de mesclagem (α_{ce}), enquanto os demais se distribuem entre a faixa de estabilidade e a região superior ao limite de refinamento (α_{pe}).

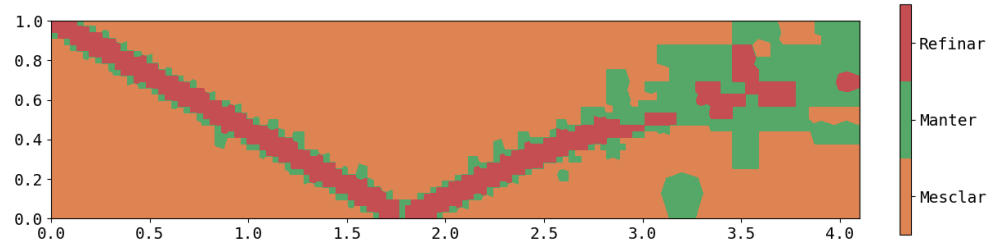
As distribuições de elementos marcados para refinamento, mesclagem e manutenção (região de estabilidade), obtidas a partir da aplicação dos limiares superior e inferior aos perfis de erro da Figura 11, são apresentadas na Figura 13. No primeiro instante avaliado (Figura 13a), correspondente ao estagio inicial de erro, a marcação de elementos para refinamento concentra-se no lado esquerdo do domínio, acompanhando a estrutura do choque. Essa zona de refinamento é delineada por uma estreita faixa de elementos estáveis, sucedida por uma região sinalizada para mesclagem. Por outro lado, no lado direito do domínio, a maioria das células preserva o nível de refinamento corrente, registrando-se apenas pontuais indicações para refinamento ou mesclagem.

No segundo caso (Figura 13b), que retrata a formação do choque refletido em andamento, identifica-se a região de transição pela presença expressiva de elementos

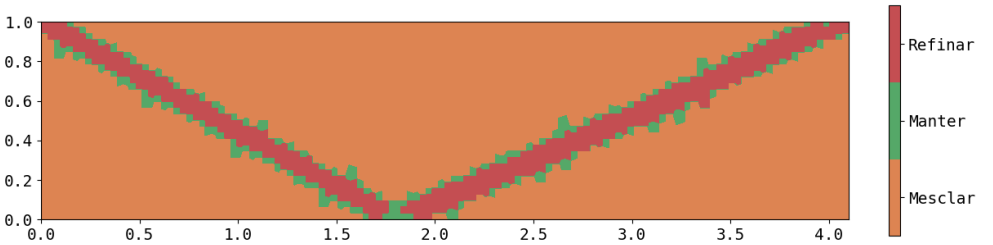
Figura 13 - Exemplo de marcação de elementos para o problema do choque refletido.



(a) Marcação feita para $t = 0{,}845$.



(b) Marcação feita para $t = 1{,}205$.



(c) Marcação feita para $t = 2{,}405$.

Fonte: Elaborada pelo autor

inalterados no trecho em que o choque ainda não se consolidou, enquanto os elementos sinalizados para refinamento concentram-se no pico de erro. Por sua vez, a Figura 13c exibe a distribuição das marcações para a estrutura de choques plenamente estabelecida. Distinguem-se três zonas bem delimitadas: três regiões marcadas para mesclagem, que tendem a alcançar o nível mínimo de refinamento ($l_{\min}$) ao longo da evolução temporal; duas faixas sobre as frentes de choque (zonas de maior erro), marcadas para refinamento com tendência a atingir o nível máximo ($l_{\max}$); e uma faixa de estabilidade no entorno dessas regiões, na qual se preserva o nível de refinamento corrente dos elementos.

4.1.5 Adaptatividade aplicada a malhas com obstáculos

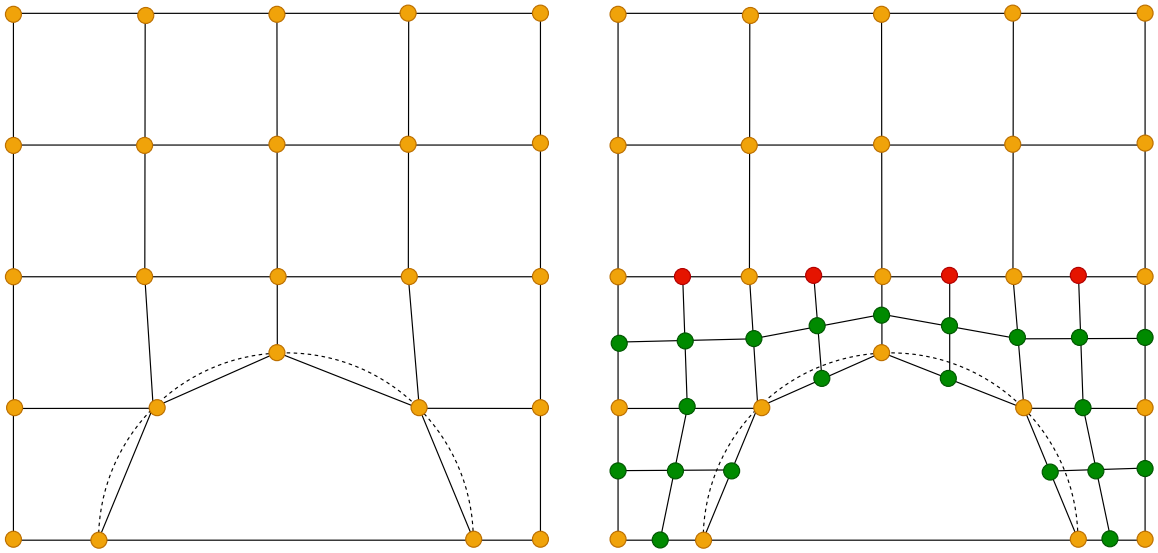
Como estabelecido neste capítulo, o algoritmo Auto AMR realiza a subdivisão dos elementos com base nas funções de distribuição e penalização. Nesse processo, a posição dos nós da malha inicial permanece inalterada, adicionando-se novos nós estruturais e *hanging nodes* apenas quando necessário para manter a coerência topológica da malha.

Essa abordagem não altera a geometria base dos elementos, o que constitui uma

limitação em domínios contendo obstáculos com contornos suaves e curvos, como ilustrado na Figura 14. Na malha inicial grossa (Figura 14a), os elementos de grandes dimensões resultam em uma discretização imprecisa da fronteira, o que pode comprometer a exatidão dos resultados numéricos.

Na Figura 14b, os elementos adjacentes ao semicírculo são subdivididos. Contudo, os novos vértices gerados ao longo da fronteira são alinhados à geometria linear da malha inicial em vez de serem projetados sobre a curva real do obstáculo. Assim, a discrepância entre o contorno geométrico real e o discretizado persiste mesmo com a elevação dos níveis de refinamento.

Figura 14 - Exemplo de uma malha inicial com poucos elementos onde há um obstáculo suave com forma ideal indicada na linha pontilhada.



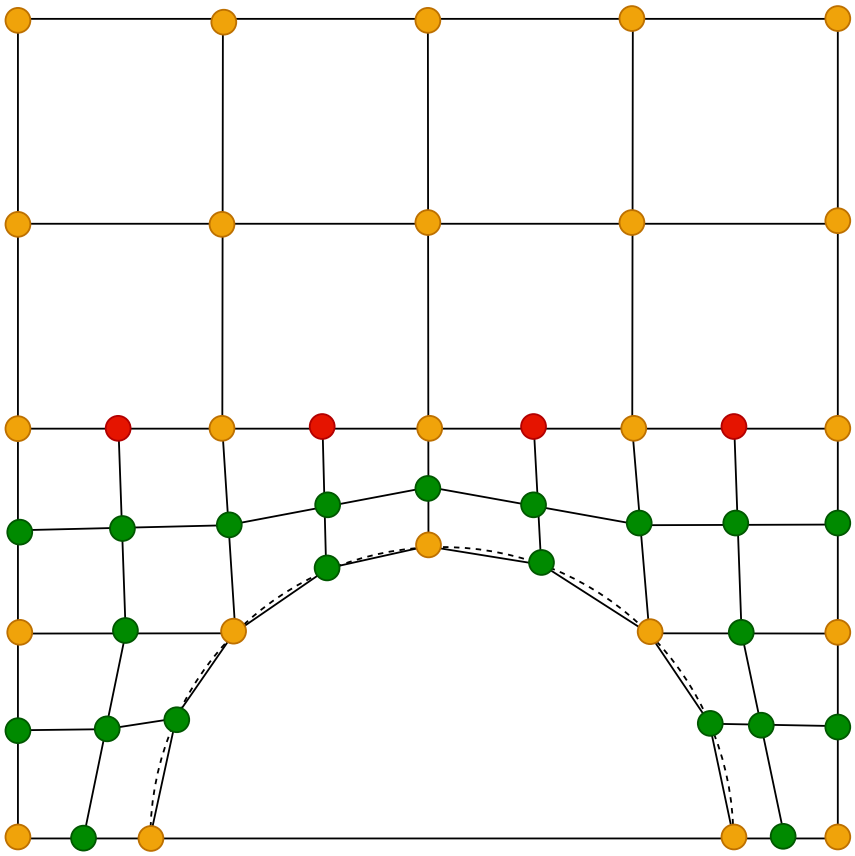
(a) Malha inicial. (b) Malha após passar por um refinamento.

Fonte: Elaborada pelo autor

Para mitigar essa limitação, propomos uma etapa adicional ao processo de refinamento dedicada ao reposicionamento dos vértices criados na fronteira, projetando-os sobre a superfície real do obstáculo, como mostrado na Figura 15. Essa etapa é então executada após a projeção da solução na malha refinada, com as coordenadas de cada vértice sendo obtidas e alteradas por meio de funções da biblioteca `deal.II`.

O Algoritmo 1 apresenta a estrutura lógica dessa etapa adicional. O procedimento percorre os elementos ativos e seleciona aqueles localizados no contorno que se deseja modificar. Em seguida, identificam-se os vértices pertencentes à fronteira para aplicação dos critérios de alteração. Para cada vértice de contorno, verifica-se primeiramente se o elemento associado atingiu o nível máximo de refinamento. Caso o nível limite tenha sido atingido e o vértice já tenha sido reposicionado previamente, nenhuma modificação é realizada. Caso contrário, executa-se o algoritmo de projeção no ponto mais próximo

Figura 15 – Ação do ajuste proposto aos vértices adicionados por refinamento. Pode-se observar a melhoria na qualidade da aproximação do contorno semicircular.



Fonte: Elaborada pelo autor

(detalhado adiante), cujas coordenadas calculadas são atribuídas ao vértice da fronteira.

Algorithm 1 Modificar Vértices do Contorno

```
for elemento ← elementos ativos do
    if elemento está no contorno then
        for vertice ← vertices(elemento) do
            if vértice está no contorno then
                if nivel(elemento < l_max) ou foiAlterado(vertice) = Não then
                    novoPonto ← obtemPontoMaisPróximo(vertice)
                    vertice ← novoPonto
                    foiAlterado(vertice) ← Sim
                end if
            end if
        end for
    end if
end for
```

Para a determinação do ponto mais próximo, assume-se que a fronteira suave seja representada por uma função $y = f_s(x)$ contínua e diferenciável (de classe $\mathcal{C}^1$). Atendido esse pré-requisito, o ponto de origem é denotado por $P = (x_p, y_p)$, o ponto de destino sobre

a superfície por $Q = (x, f_s(x))$ e a distância Euclidiana entre eles por $d(P, Q)$. Embora a dedução teórica neste trabalho seja apresentada para o caso bidimensional (2D), a extensão para o caso tridimensional (3D) pode ser realizada por generalização direta ou empregando-se multiplicadores de Lagrange para a minimização da distância.

No caso bidimensional, a curva de contorno é descrita por uma função $y = f_s(x)$, na qual os pontos são definidos por $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x, f_s(x))$. A distância Euclidiana entre esses pontos é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - f_s(x))^2}. \tag{4.14}$$

Como a minimização da distância é equivalente à minimização do seu quadrado, adota-se a função distância ao quadrado, $D(x) \equiv [d(P, Q)]^2$, para simplificação dos cálculos:

$$D(x) = (x_p - x)^2 + (y_p - f_s(x))^2. \tag{4.15}$$

A determinação da menor distância corresponde à busca pelo mínimo global de $D(x)$ no domínio de definição de $f_s(x)$. Os pontos críticos candidatos ao mínimo satisfazem a condição $D'(x) = 0$, expressa por

$$D'(x) = 2(x - x_p) - 2\left(y_p - f_s(x)\right) f_s'(x) = 0. \tag{4.16}$$

A determinação das raízes da Equação (4.16) depende da viabilidade de se isolar a variável x de forma analítica. Nos casos em que a solução algébrica é possível, obtêm-se um ou mais valores para x, cada um definindo um ponto candidato $Q = (x, f_s(x))$. Quando a solução analítica não é viável devido à complexidade de $f_s(x)$, aplicam-se métodos numéricos de busca de raízes, tais como o Método da Bisseção, da Falsa Posição ou da Secante (FRANCO, 2006).

Para este trabalho o método descrito nessa subseção foi aplicado a três problemas. Para os problemas 5.5 e 6.2 o obstáculo é um círculo de raio unitário onde $f_s'(x)$ existe para os semicírculos superior e inferior (em relação ao eixo-x) sendo possível isolar a variável x de forma analítica para ambos, com o ponto x selecionado sendo o que resulta na menor distância quando aplicado a (4.15).

Para o problema 6.3 o obstáculo é o conhecido aerofólio NACA 0012, onde as curvas superior e inferior são simétricas em relação a corda, mas ao contrário do caso do obstáculo circular, $f_s'(x)$ existe para ambas curvas mas não é possível isolar a variável x. Nesse caso a raiz de (4.16) é aproximada pelo Método da Falsa Posição, onde a escolha da curva superior ou inferior é feita em função da coordenada y_p. Se $y_p > 0$ é usada a derivada da superfície superior, se $y_p \leq 0$ da inferior. A implementação dessas estratégias está disponível em (LOPES, 2026).

5 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA NAVIER-STOKES INCOMPRESSÍVEL

Neste capítulo, a formulação matemática e numérica desenvolvida nos Capítulos 2 e 3 para as equações de Navier-Stokes compressíveis é particularizada para o regime incompressível. A validação da implementação é inicialmente conduzida por meio de um estudo de convergência, no qual são avaliadas a consistência da formulação e as taxas de convergência obtidas numericamente. Posteriormente, o método é aplicado a diferentes problemas de referência da literatura, permitindo analisar sua precisão, robustez e desempenho em escoamentos incompressíveis. Além disso, o modelo incompressível é testado empregando a estratégia de adaptatividade de malha proposto no Capítulo 4 no qual a implementação de cada problema está disponível em (LOPES, 2026).

5.1 Modelo Incompressível

Partindo do modelo geral de Navier–Stokes compressível apresentado nas Equações (2.36)–(2.39), obtém-se a formulação incompressível assumindo que o fluido possui densidade constante e que os elementos materiais preservam seu volume durante o escoamento. Sob essa hipótese, a equação de conservação da massa reduz-se à restrição cinemática de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{5.1}$$

A condição (5.1) simplifica a expressão do tensor viscoso (2.6). Em particular, como o termo associado à viscosidade volumétrica depende de $\nabla \cdot \mathbf{u}$, obtém-se

$$\mathbb{V} = 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u}), \tag{5.2}$$

onde $\mathbb{D}(\mathbf{u})$ é o tensor taxa de deformação definido na Equação (2.3).

Além disso, assumindo viscosidade dinâmica constante, o divergente do tensor viscoso pode ser simplificado como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{V} &= 2\mu \nabla \cdot \mathbb{D}(\mathbf{u}) \\ &= \mu \left[\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^T) \right] \\ &= \mu \left[\Delta \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \\ &= \mu \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde foi utilizada a condição de incompressibilidade (5.1). Consequentemente, o tensor de tensões de Cauchy (2.4) assume a forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u}). \tag{5.4}$$

A hipótese de incompressibilidade também simplifica o termo convectivo da equação da quantidade de movimento. De fato, para densidade constante, como definido por Volker

(2016)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \\ &= \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde novamente foi utilizada a restrição (5.1). Além disso, para escoamentos incompressíveis com propriedades termodinâmicas constantes, a densidade deixa de ser uma incógnita do problema. Nesse contexto, a equação de conservação da energia desacopla-se do sistema hidrodinâmico e não é necessária para a determinação dos campos de velocidade e pressão. Consequentemente, o problema passa a ser descrito exclusivamente pelas equações de conservação da quantidade de movimento e da massa. Dessa forma, o escoamento de um fluido newtoniano incompressível é governado pelo seguinte sistema de equações:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{em } \Omega \times (0, T], \tag{5.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \qquad \text{em } \Omega \times (0, T], \tag{5.7}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{sobre } \partial\Omega_D \times (0, T], \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = (-p\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{u}))\,\mathbf{n} = \mathbf{h} \qquad \text{sobre } \partial\Omega_N \times (0, T], \tag{5.9}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \qquad \text{em } \Omega \times \{0\}. \tag{5.10}$$

5.2 Formulação Numérica para o Caso Incompressível

Nesta seção, a formulação numérica apresentada no Capítulo 3 para o sistema compressível é adaptada ao caso incompressível. Para isso, mantém-se a estabilização do tipo SUPG, empregada para reduzir oscilações numéricas associadas à predominância dos efeitos convectivos. Por outro lado, o termo de captura de choques utilizado na formulação compressível é removido, uma vez que os problemas considerados neste capítulo não envolvem descontinuidades nem regimes de elevado número de Reynolds que justifiquem a introdução de difusão artificial adicional.

A principal diferença em relação ao caso compressível está associada às incógnitas do problema, na formulação incompressível os campos de velocidade e pressão passam a ser resolvidos simultaneamente. Como consequência, a discretização espacial deve satisfazer a condição de compatibilidade inf-sup (ou condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi), que garante estabilidade para a aproximação mista velocidade-pressão (VOLKER, 2016). Na formulação clássica, essa condição exige a utilização de espaços de aproximação distintos para velocidade e pressão, sendo usual a adoção de funções de interpolação de ordem superior para a velocidade. Entretanto, essa restrição pode ser contornada por meio da estabilização PSPG, proposta por Hughes, Franca e Balestra (1986). Essa técnica introduz termos residuais consistentes que estabilizam a aproximação da pressão, permitindo o uso de espaços de mesma ordem para ambas as variáveis.

Nesse contexto, a contribuição estabilizadora PSPG é construída a partir do resíduo da equação da quantidade de movimento, definido por

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}) = \rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p. \tag{5.11}$$

As perturbações das funções de teste associadas às estabilizações SUPG e PSPG são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{P}_{SUPG} = \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}, \qquad \mathcal{P}_{PSPG} = -\nabla q, \tag{5.12}$$

onde $\mathbf{v}$ e q representam as funções de teste associadas aos campos de velocidade e pressão. Como ambas as estabilizações utilizam o mesmo resíduo da equação da quantidade de movimento e o mesmo parâmetro de estabilização τ, suas contribuições podem ser reunidas em uma única expressão por meio da função de teste modificada

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} - \nabla q, \tag{5.13}$$

de modo que os termos SUPG e PSPG passam a ser incorporados simultaneamente à formulação variacional através de uma única contribuição residual estabilizada.

5.2.1 Formulação Variacional Estabilizada (SUPG/PSPG)

Nesta seção, a formulação numérica desenvolvida para o caso compressível na Equação (3.41) é adaptada para o sistema incompressível (5.6)-(5.10), resultando na seguinte formulação variacional estabilizada.

$$\begin{aligned} \rho\int_\Omega \frac{3\mathbf{u}_h^{n+2}}{2\Delta t}\cdot\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} + \mu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h^{n+2} : \nabla\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} \\ +\rho\int_\Omega \left(\mathbf{u}_h^{n+1}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_h^{n+2}\cdot\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} - \int_\Omega p_h^{n+2}\,\nabla\cdot\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} \\ -\int_\Omega q_h\,\nabla\cdot\mathbf{u}_h^{n+2}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \tau\,\mathcal{R}\cdot\mathbf{w}_h\,d\mathbf{x} = \rho\int_\Omega \frac{4\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n}}{2\Delta t}\cdot\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_N}\mathbf{h}\cdot\mathbf{v}_h\,ds, \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde o resíduo da equação da quantidade de movimento é definido por

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_h^{n+2}) = \rho\frac{3\mathbf{u}_h^{n+2} - 4\mathbf{u}_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^{n}}{2\Delta t} - \mu\Delta\mathbf{u}_h^{n+2} + \rho\left(\mathbf{u}_h^{n+1}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_h^{n+2} + \nabla p_h^{n+2}, \tag{5.15}$$

e a função de teste modificada associada às estabilizações SUPG e PSPG é dada por

$$\mathbf{w}_h = \mathbf{u}_h^{n+1}\cdot\nabla\mathbf{v}_h - \nabla q_h. \tag{5.16}$$

Por fim, a estabilização é controlada pelo parâmetro τ, cuja definição segue a proposta de Tezduyar e S. (2003). Esse parâmetro incorpora os efeitos das escalas temporal, convectiva e difusiva do problema, sendo calculado em função do tamanho característico do elemento h e da velocidade local do escoamento, como segue

$$\tau = \left[\left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2||\mathbf{u}||}{h}\right)^2 + \left(\frac{4\mu}{3h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.17}$$

5.3 Estudo de Convergência - Taylor-Green Vortex

Com o objetivo de verificar a consistência da formulação numérica (5.14) e avaliar sua taxa de convergência, considera-se o problema do vórtice de Taylor-Green (*Taylor-Green vortex*) desenvolvido por Taylor e Green (1937), cuja solução analítica é dada por

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\cos(\pi x)\sin(\pi y)e^{-2\pi^2 t/Re} \\ \sin(\pi x)\cos(\pi y)e^{-2\pi^2 t/Re} \end{bmatrix}, \qquad p = -\frac{1}{4}\left(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)\right)e^{-4\pi^2 t/Re}, \quad (5.18)$$

onde $Re = 1/\mu$ é o número de Reynolds. Para esta solução, não há termo fonte associado ao problema. Neste estudo são adotados $\Delta t = h$, tempo final $T = 1$, viscosidade dinâmica $\mu = 0{,}025$ e densidade $\rho = 1$, resultando em $Re = 40$.

O domínio computacional consiste em um quadrado unitário discretizado por malhas estruturadas sucessivamente refinadas. As condições de contorno para a velocidade são impostas diretamente a partir da solução analítica (5.18). Como a pressão é definida a menos de uma constante aditiva, sua unicidade é garantida pela imposição de um valor de referência em um ponto do domínio, escolhido como $(0, 0)$.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1, onde são mostrados os erros na norma L^2 para os campos de velocidade e pressão, bem como as respectivas taxas de convergência para malhas variando de 64 a 16.384 elementos. Nestes resultados é possível observar que o erro da velocidade apresenta convergência aproximadamente quadrática, com taxas próximas de 2 em todos os níveis de refinamento. Resultado semelhante é obtido para o campo de pressão, cuja ordem de convergência permanece próxima de 2. Esses resultados validam a formulação estabilizada SUPG/PSPG e demonstram a convergência de segunda ordem para a discretização espacial e temporal empregada.

Tabela 1 – Estudo de convergência na norma $L^2(\Omega)$ do problema de Taylor-Green para o sistema de Navier-Stokes incompressível.

Elementos	$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2}$	**Ordem**	$\|p - p_h\|_{L^2}$	**Ordem**
64	$1{,}248 \times 10^{-2}$	–	$4{,}717 \times 10^{-3}$	–
256	$3{,}244 \times 10^{-3}$	1,94	$1{,}252 \times 10^{-3}$	1,91
1.024	$8{,}172 \times 10^{-4}$	1,99	$3{,}077 \times 10^{-4}$	2,02
4.096	$2{,}069 \times 10^{-4}$	1,98	$8{,}111 \times 10^{-5}$	1,92
16.384	$5{,}189 \times 10^{-5}$	2,00	$2{,}172 \times 10^{-5}$	1,90

Fonte: Elaborada pelo autor.

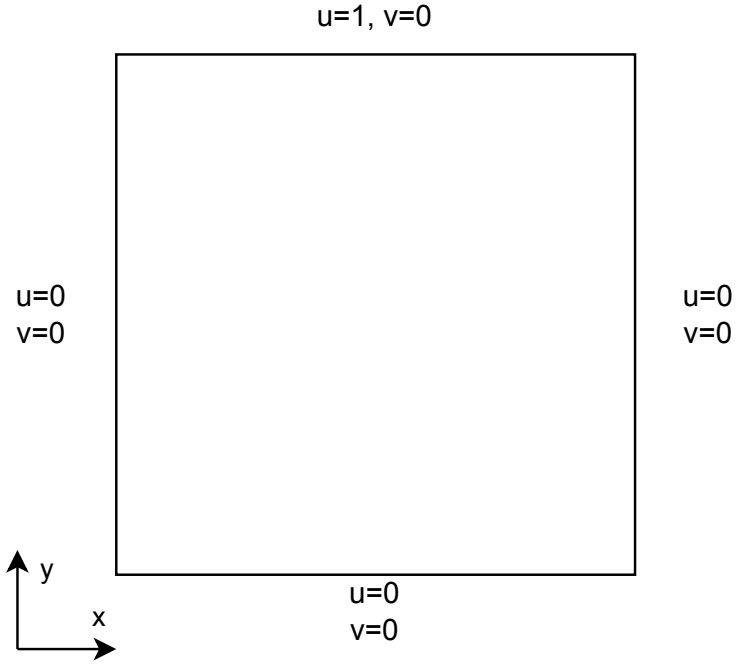
5.4 Escoamento em Cavidade

O problema da cavidade quadrada com tampa móvel, conhecido na literatura como *lid-driven cavity*, no qual um escoamento laminar é induzido pelo movimento uniforme

da parede superior, é amplamente utilizado como *benchmark* na avaliação de métodos numéricos para escoamentos incompressíveis (GHIA; GHIA; SHIN, 1982; ERTURK, 2009; BRUNEAU; SAAD, 2006; ERTURK, 2009; VOLKER, 2016).

O domínio computacional e a configuração das condições de contorno são apresentados na Figura 16. O problema consiste em um domínio quadrado de lado unitário, no qual a velocidade na parede superior é prescrita como $u = 1$ e $v = 0$, enquanto nas demais fronteiras são impostas condições de não deslizamento, isto é, $u = v = 0$.

Figura 16 - Esquema do domínio usado para o Escoamento em Cavidade



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste trabalho, são considerados quatro valores do número de Reynolds, dentre aqueles analisados por Ghia, Ghia e Shin (1982): $Re = 400$, 1.000, 5.000 e 10.000. Para esse problema, assumindo densidade $\rho = 1$ e comprimento característico unitário aplicado à definição do número de Reynolds em (1.1), obtém-se $Re = 1/\mu$, de modo que as viscosidades correspondentes são $\mu = 2{,}50 \times 10^{-3}$, $\mu = 1 \times 10^{-3}$, $\mu = 2 \times 10^{-4}$ e $\mu = 1 \times 10^{-4}$, respectivamente.

Para fins de comparação, utilizam-se os resultados de Ghia, Ghia e Shin (1982), obtidos por meio do Método de Diferenças Finitas em uma malha quadrada contendo 16.384 nós, para números de Reynolds variando entre 100 e 10.000. A comparação é feita a partir da extração dos perfis de velocidade ao longo dos eixos centrais do domínio, considerando as componentes u e v. No caso $Re = 10.000$, considera-se ainda uma média temporal dos últimos instantes da simulação, devido à presença de flutuações de natureza quase-periódica.

As simulações iniciam com nível global de refinamento $l_{max} = 5$ (1.024 elementos), permitindo refinamento adaptativo até o nível $l_{max} = 9$, equivalente a uma malha uniforme com até 262.144 elementos. Além das simulações com refinamento adaptativo, também foram realizadas execuções em malha fixa utilizando 16.384 elementos, sem aplicação de adaptatividade.

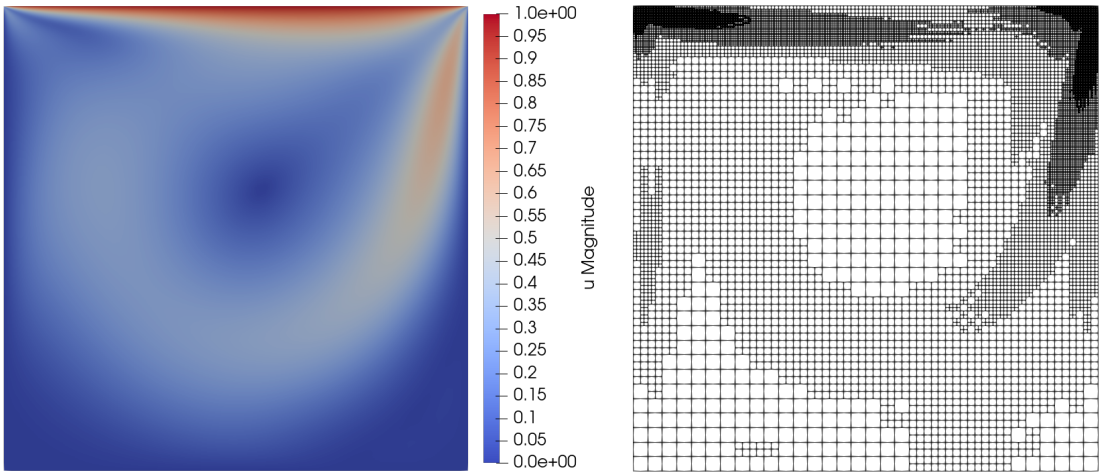
O passo de tempo adotado é $\Delta t = 0{,}1$, reduzido para $\Delta t = 0{,}02$ no caso $Re = 10.000$ a fim de melhor capturar a dinâmica não estacionária associada ao regime de transição. Além disso, para $Re = 10.000$, observa-se a formação de estruturas vorticais instáveis, fenômeno também reportado por Bruneau e Saad (2006), com início em torno de $Re \approx 8.000$. Nessa situação, o critério de parada baseado em regime estacionário é aprimorado por um critério adicional de estagnação de progresso, limitando o número de iterações sem melhoria a 150. Essa modificação evita a não terminação da simulação em regimes essencialmente não estacionários.

As Figuras 17a-17d apresentam a magnitude da velocidade $\|\mathbf{u}\|$ no último instante de cada simulação, juntamente com a malha adaptativa correspondente. Nota-se que o aumento do número de Reynolds implica maior concentração de elementos nas regiões próximas às camadas limite e aos núcleos vorticais, o que evidencia a capacidade do critério de erro em capturar automaticamente as regiões relevantes do escoamento.

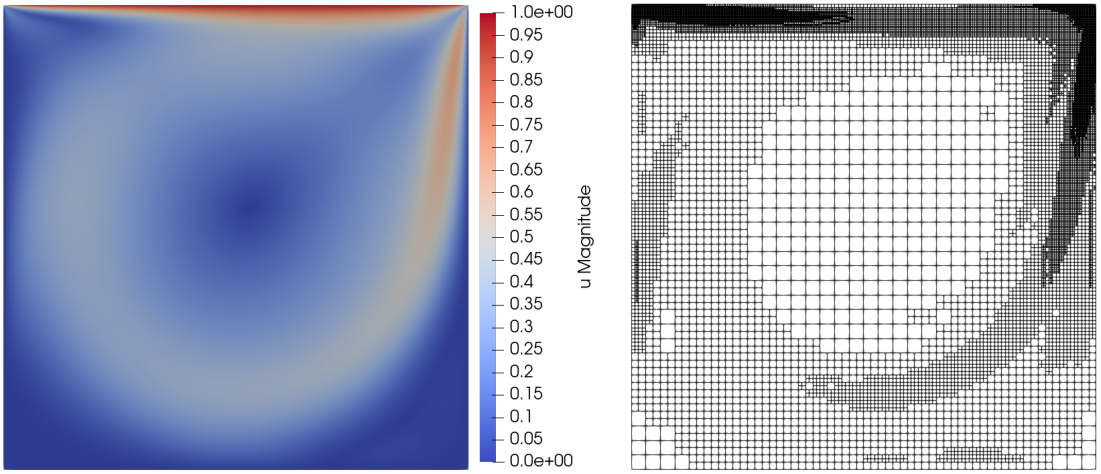
As Figuras 18a-18d apresentam os perfis de velocidade comparando a solução obtida com o método adaptativo, malha fixa e os dados de referência de Ghia, Ghia e Shin (1982). Os resultados apresentam boa concordância para $Re = 400$, 1.000 e 5.000, com melhora consistente em relação à malha fixa. Para $Re = 10.000$, embora haja maior discrepância devido à natureza não estacionária do escoamento e à presença de estruturas vorticais instáveis, o método ainda captura adequadamente a tendência geral do perfil.

A Tabela 2 apresenta o número final de elementos obtidos com a estratégia adaptativa Auto AMR, a porcentagem de utilização de elementos na malha, que é a relação entre o número de elementos ativos no ultimo passo de tempo e o número máximo de elementos dado por (4.13) (correspondendo a $C_{max} = 262.144$ elementos), e o erro em norma l^2 em relação à solução de referência de Ghia, Ghia e Shin (1982), comparado com uma malha fixa de 16.384 elementos. Os resultados indicam que o número de elementos cresce com o aumento do número de Reynolds, refletindo a maior complexidade das estruturas vorticais e a intensificação dos gradientes do escoamento. Ainda assim, para $Re = 400$, 1.000 e 5.000, o erro na norma L^2 permanece aproximadamente uma ordem de grandeza inferior ao obtido com a malha fixa, mesmo utilizando quantidades de elementos da mesma ordem. Para $Re = 10.000$, o método emprega apenas 9,0% do total de elementos disponíveis no refinamento máximo (C_{max}), mantendo erro inferior ao da malha uniforme. Esses resultados evidenciam a eficiência da estratégia adaptativa em concentrar o refinamento nas regiões fisicamente relevantes do domínio (ver Fig. 17), reduzindo o custo computacional

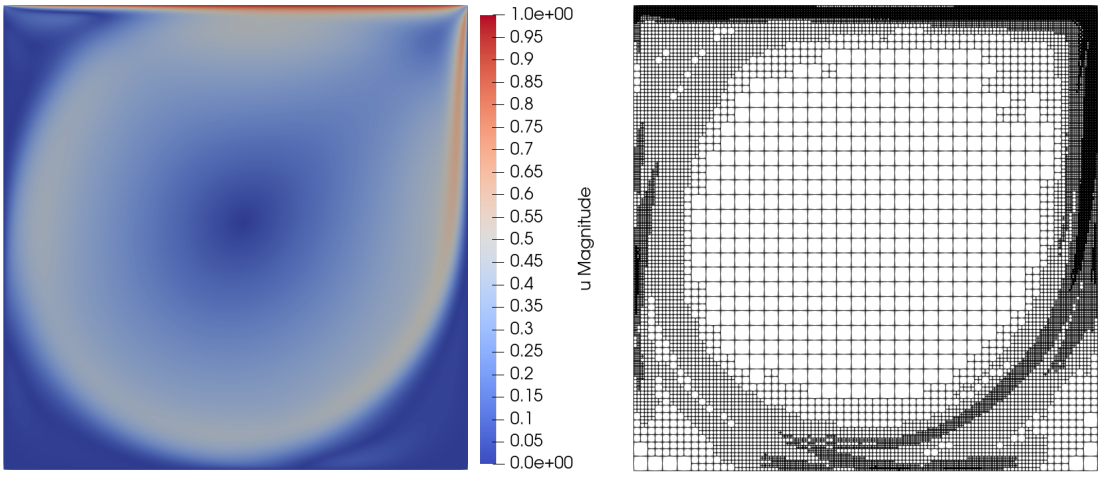
Figura 17 - Soluções em $\|\mathbf{u}\|$ e malha do último passo de tempo para o problema do escoamento em cavidade.



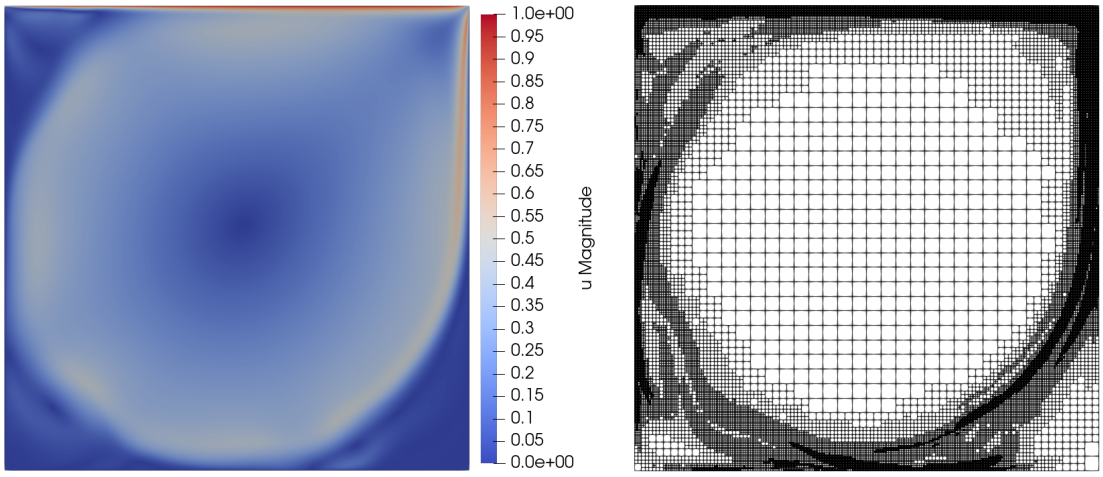
(a) Solução e última malha para $Re = 400$ obtida a $t = 47{,}9s$



(b) Solução e última malha para $Re = 1.000$ obtida a $t = 103{,}3s$



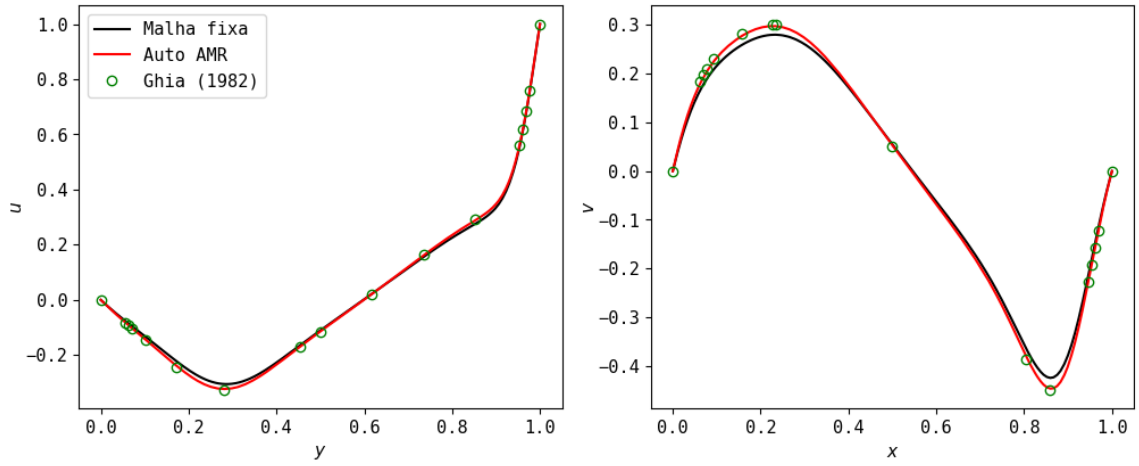
(c) Solução e última malha para $Re = 5.000$ obtida a $t = 589{,}2s$



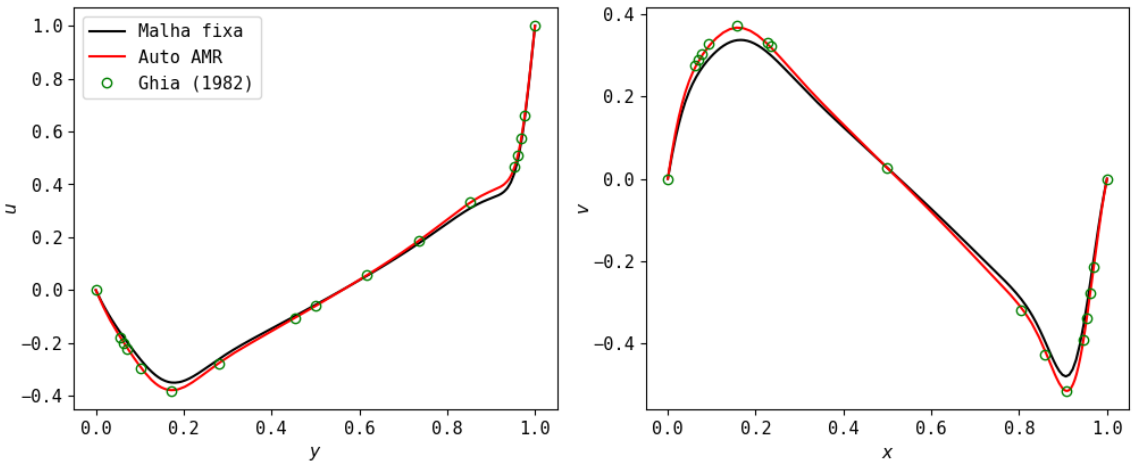
(d) Solução e última malha para $Re = 10.000$ obtida a $t = 600s$.

Figura 18 – Comparativo dos perfis de velocidade do escoamento em cavidade entre o Auto AMR, malha fixa com 16.384 elementos e os perfis obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982).

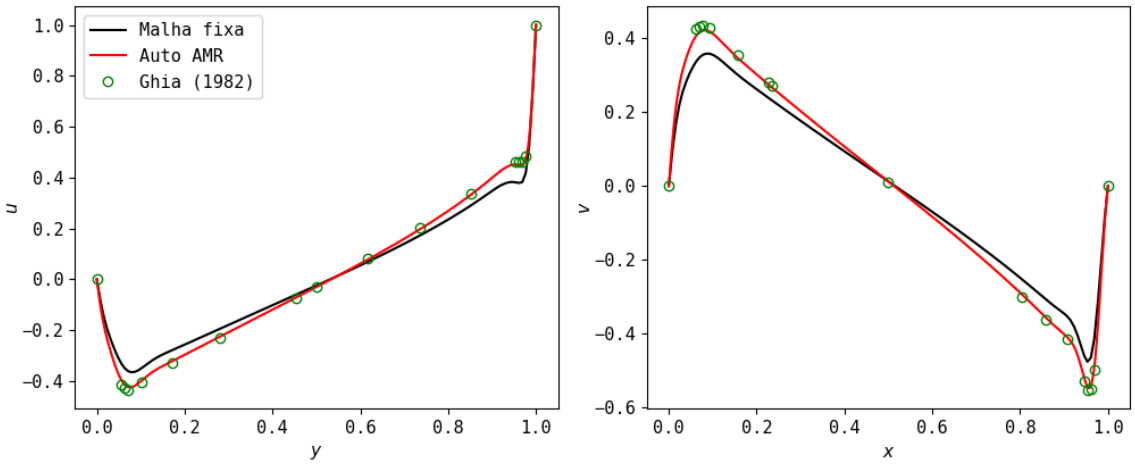
(a) Perfis do Auto AMR, malha fixa e perfis de referência a $Re = 400$.



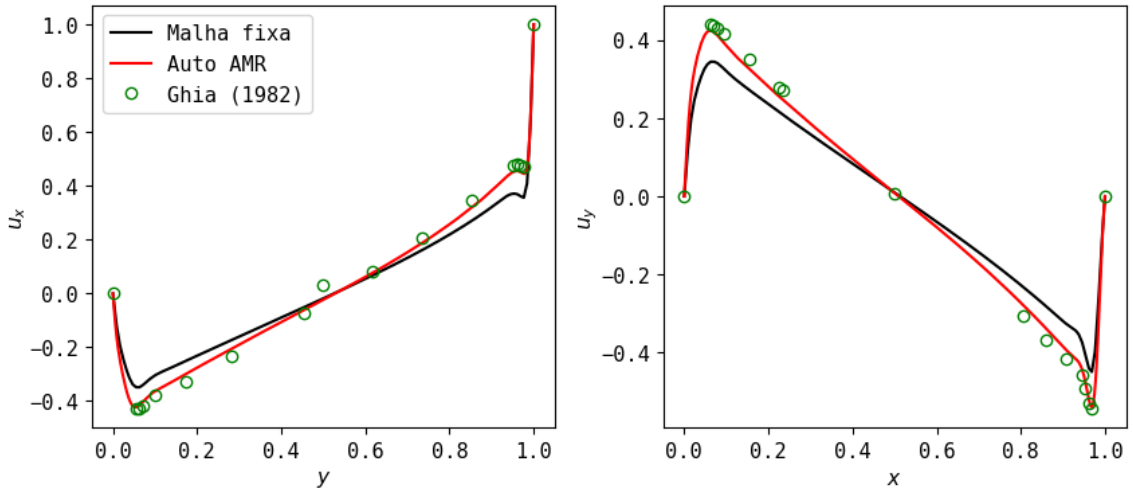
(b) Perfis do Auto AMR, malha fixa e perfis de referência a $Re = 1.000$.



(c) Perfis do Auto AMR, malha fixa e perfis de referência a $Re = 5.000$.



(d) Perfis do Auto AMR, malha fixa e perfis de referência a $Re = 10.000$.



sem comprometer a precisão da solução.

Tabela 2 – Comparação entre malha adaptativa Auto AMR e malha fixa para o problema da cavidade.

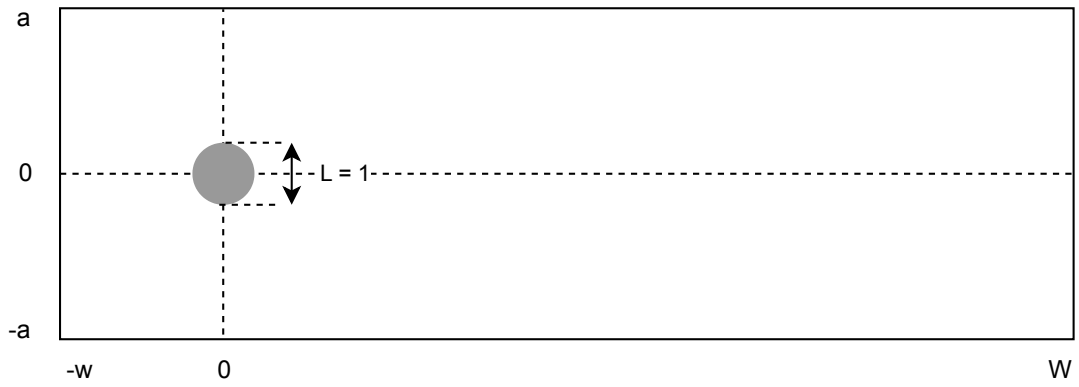
Re	Elementos	Uso (%)	Erro AMR	Erro malha fixa
400	14.896	5,7	$2,68 \times 10^{-3}$	$1,33 \times 10^{-2}$
1.000	17.389	6,6	$4,33 \times 10^{-3}$	$2,29 \times 10^{-2}$
5.000	23.062	8,8	$8,87 \times 10^{-3}$	$5,91 \times 10^{-2}$
10.000	23.683	9,0	$2,22 \times 10^{-2}$	$7,59 \times 10^{-2}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5 Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro

Um problema amplamente usado para avaliação de métodos numéricos é o escoamento ao redor do cilindro, também conhecido na literatura como *Von Karman Vortex Street*, que é um padrão repetitivo e alternado de vórtices giratórios que se formam, no caso desse problema, atrás de um cilindro sujeito a um escoamento laminar (BLOMQUIST et al., 2024; NG; MIN; GIBOU, 2009; ENGELMAN; JAMNIA, 1990). O domínio do problema é mostrado na Figura 19. As dimensões são dadas por $a = w = 10$, $W = 30$ onde o círculo de diâmetro unitário tem seu centro coincidente com a origem.

Figura 19 – Esquema do domínio usado para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro.



Fonte: Elaborada pelo autor

O contorno do domínio é estruturado em três regiões principais. Na aresta esquerda, definida como a entrada do escoamento, prescreve-se um perfil uniforme com $u = U_{\max}$ e $v = 0$. Na aresta direita, correspondente à saída, aplica-se a condição de Neumann homogênea para ambas as componentes da velocidade. Nas arestas superior e inferior, que delimitam o canal, impõem-se condições de simetria: condição de Neumann homogênea para a componente horizontal u e prescrição nula ($v = 0$) para a componente vertical. A condição inicial é estabelecida atribuindo-se a todo o domínio numérico o estado físico definido no contorno de entrada. O número de Reynolds (1.1) pode ser calculado aplicando $\rho = 1$, $U_{max} = 1$ e comprimento característico unitário a Equação (1.1) resultando em $Re = 1/\mu$, dessa forma a viscosidade para um valor de $Re = 100$ é dada por $\mu = 0{,}01$.

As quantidades de interesse analisadas neste problema são os coeficientes de arrasto e sustentação. Para sua determinação, calcula-se inicialmente a força hidrodinâmica resultante exercida pelo fluido sobre a superfície S do cilindro, obtida pela integração do

vetor de tração ao longo do contorno do obstáculo

$$\mathbf{f} = \int_S \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\, dS = \int_S (\mu\nabla\mathbf{u} - p\mathbb{I})\mathbf{n}\, dS, \tag{5.19}$$

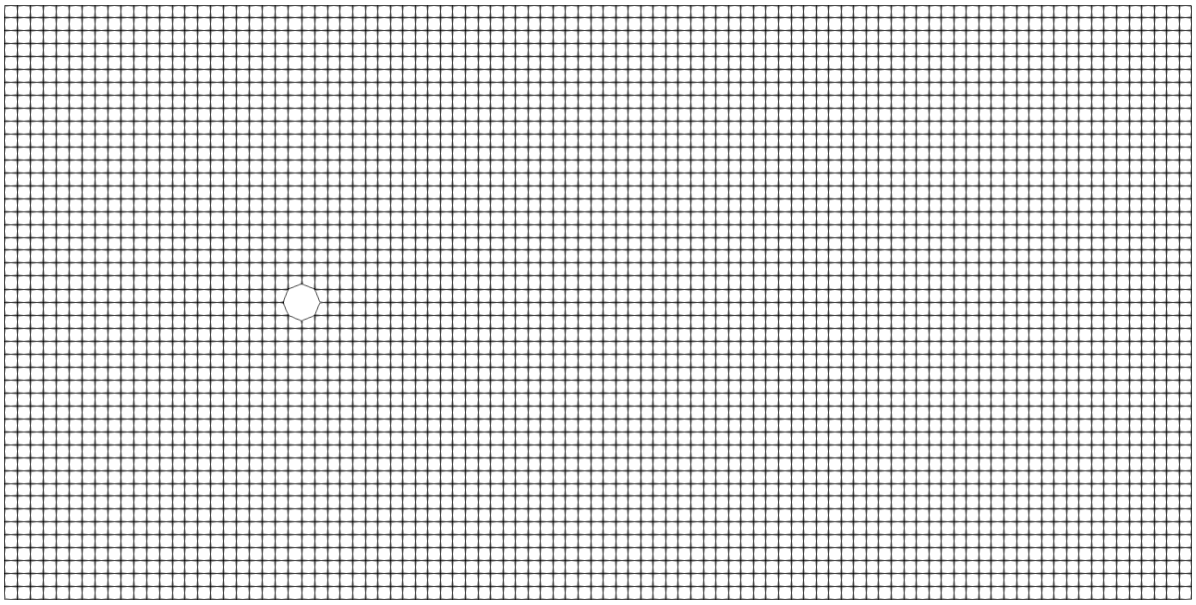
onde $\mathbf{f} = (F_D, F_L)$, sendo F_D a componente na direção do escoamento (força de arrasto) e F_L a componente perpendicular ao escoamento (força de sustentação). A partir dessas definições, os coeficientes de arrasto C_D e sustentação C_L podem ser apresentados como

$$C_D = \frac{2}{\rho(U_{max})^2 L} F_D \tag{5.20}$$

$$C_L = \frac{2}{\rho(U_{max})^2 L} F_L. \tag{5.21}$$

A execução das simulações foi feita para o passo de tempo de $\Delta t = 0{,}01$ até o tempo $T = 200$ partindo de uma malha estruturada de 4.320 elementos desenvolvida com o software gmsh (GEUZAINE; REMACLE, 2009) apresentada na Figura 20, com o refinamento adaptativo variando ao nível 1 (podendo chegar a 17.280 elementos em todo o domínio) ao nível 4 (podendo chegar a 1.105.920 elementos em todo o domínio). A simulação também foi feita sem o uso da estratégia de adaptatividade com uma malha do mesmo formato com 37.908 elementos. A janela de extração dos coeficientes de arrasto C_D e sustentação C_L é feita pelos últimos 25 segundos registrados, com C_D sendo obtido pela média simples e C_L pelo valor máximo de amplitude pico a pico. Dada a baixa resolução

Figura 20 – Malha com 4.320 elementos usada para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro.



Fonte: Elaborada pelo autor

do círculo representando o cilindro adotada para a malha, também foi usada a estratégia

de modificação dos vértices do contorno do obstáculo, que sendo um círculo centrado na origem leva a utilização da função $f_s(x, y) = x^2 + y^2 = 0.25$, que aplicada a (4.16) possui solução analítica, que é usada no cálculo da menor distância do Algoritmo 1.

Na Figura 21 é apresentada a evolução dos coeficientes de arrasto e sustentação na janela de medição de $t = 175$ a $t = 200$ para o nível máximo de refinamento 3 ($l_{max} = 3$). Em particular, na Figura 21a é possível observar que o histórico temporal de C_D obtido com adaptatividade de malha apresenta oscilações de maior amplitude em relação ao resultado obtido em malha fixa (Fig. 21b). Esse comportamento está associado ao processo de adaptação da malha que alcança um tamanho de elemento menor nas proximidades do cilindro em relação a solução com malha fixa (ver Tabela 3) onde o menor tamanho proporciona uma melhor resolução da camada de fronteira do cilindro.

A solução numérica obtida no instante final $t = 200$ por meio da metodologia Auto AMR é apresentada na Figura 22. Os campos da magnitude da velocidade ($\|\mathbf{u}\|$) e as respectivas malhas adaptativas finais para os níveis máximos de refinamento $l_{max} \in \{1, 2, 3, 4\}$ são detalhados nas Figuras 22a a 22d.

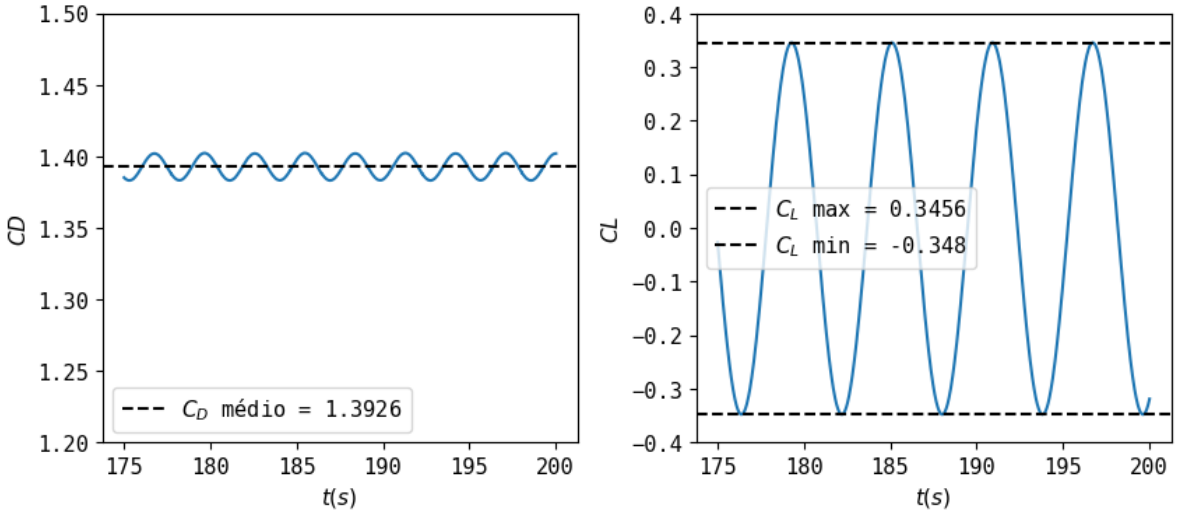
Para $l_{max} = 1$ (Figura 22a), observa-se a concentração do refinamento nas regiões de maiores gradientes da solução, sobretudo nas proximidades do cilindro e na esteira inicial, capturando adequadamente as estruturas globais do escoamento. Apesar disso observam-se regiões simétricas anômalas se estendendo da parte frontal do cilindro para o topo e base do domínio devido à baixa resolução da aproximação da circunferência onde as faces geram desvios de escoamento que não correspondem ao cilindro. Ao avançar para $l_{max} = 2$ (Figura 22b), a malha passa a acompanhar com maior precisão a dinâmica oscilatória dos vórtices destacados na esteira e a região anômala é reduzida significativamente com o aumento da resolução da aproximação pelo Auto AMR.

Esse padrão se consolida no nível $l_{max} = 3$ (Figura 22c), em que a densidade de elementos se concentra no núcleo desses vórtices e ao redor da parede do cilindro. Por fim, para $l_{max} = 4$ (Figura 22d), o ganho em resolução e a maior disponibilidade de elementos ampliam ligeiramente a área refinada.

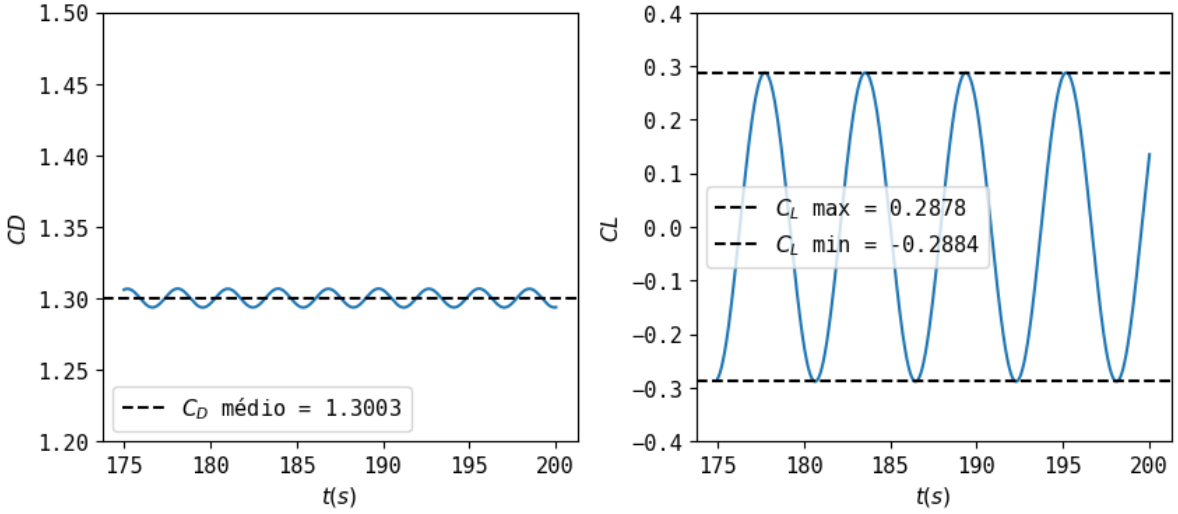
Os resultados comparativos para o escoamento ao redor do cilindro com $Re = 100$ são apresentados na Tabela 3, na qual a metodologia Auto AMR proposta é contrastada com a simulação em malha fixa e com os dados de referência da literatura estabelecidos por Blomquist et al. (2024) e Guittet, Theillard e Gibou (2015).

O estudo desenvolvido por Blomquist et al. (2024) emprega refinamento adaptativo a partir de uma malha inicialmente homogênea de 16.384 elementos a nível 7 de refinamento, atingindo um tamanho mínimo de elemento de $h_{min} = 1{,}56 \times 10^{-2}$ para o nível 10. Em contrapartida, a configuração do algoritmo Auto AMR inicia-se com uma discretização contendo 4.320 elementos, cujo comprimento mínimo pré-existente de $3{,}42 \times 10^{-1}$ localiza-se na região adjacente ao contorno do cilindro circular. Ao longo do processo adaptativo, a

Figura 21 - Evolução dos resultados de C_D e C_L para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro.

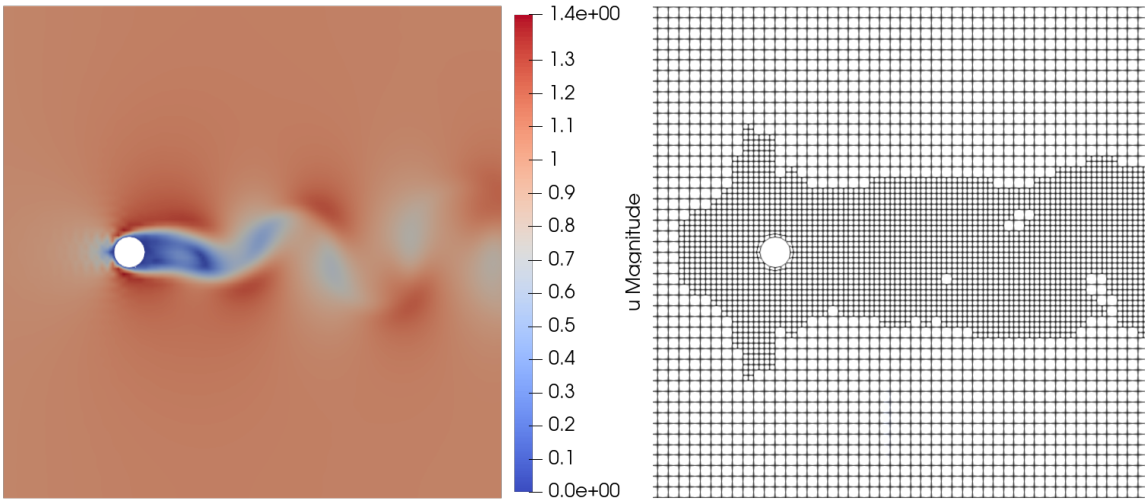


(a) Coeficiente de arrasto e sustentação com o Auto AMR para $l_{max} = 3$.

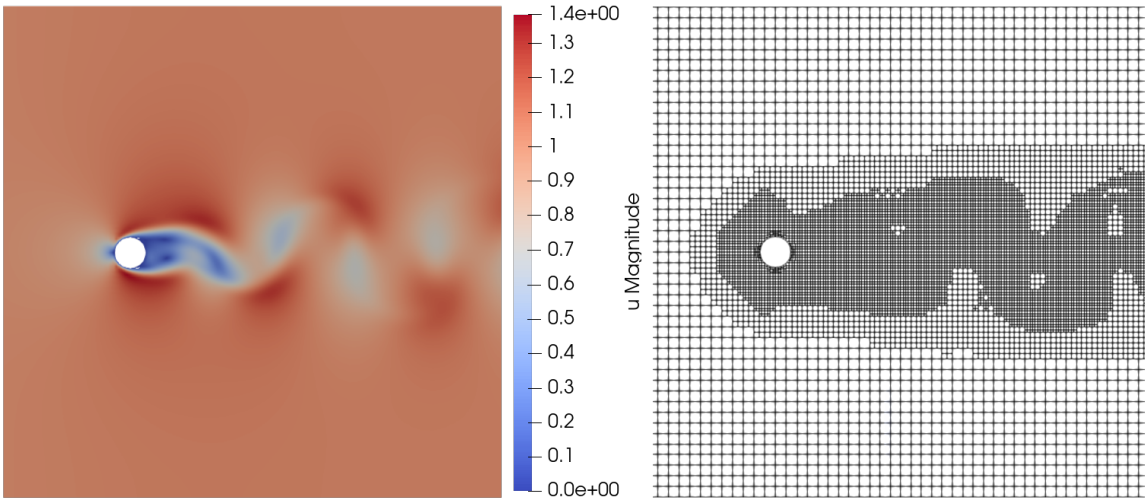


(b) Coeficiente de arrasto e sustentação com a malha fixa.

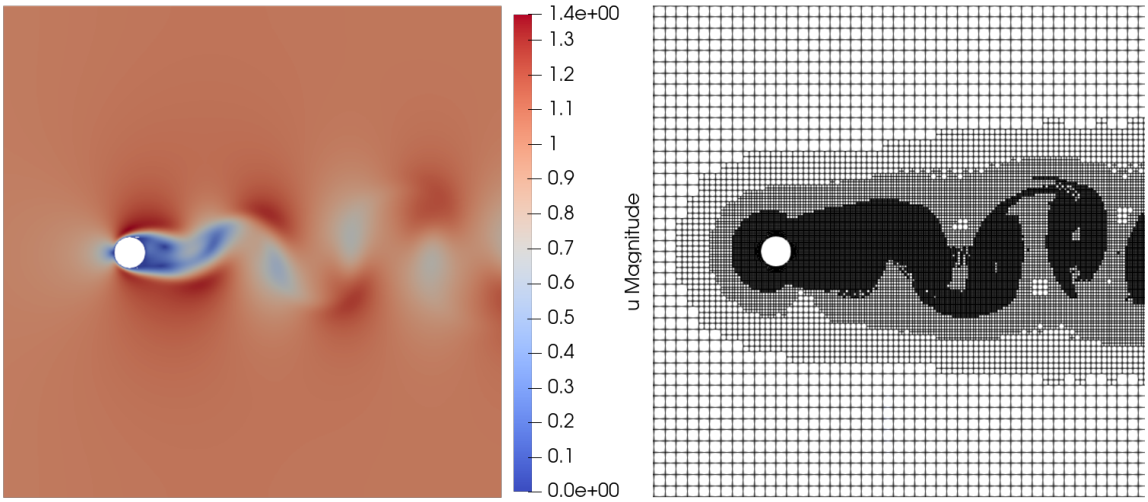
Figura 22 – Visualizações do resultado para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro com $Re = 100$.



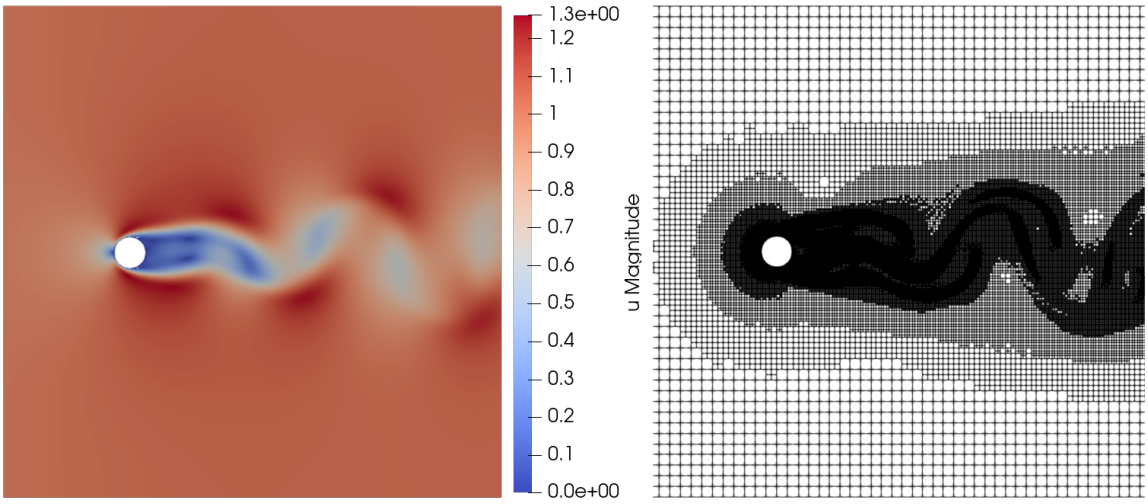
(a) Solução para $l_{max} = 1$ em $\|\mathbf{u}\|$ e malha adaptativa final com 7.740 elementos.



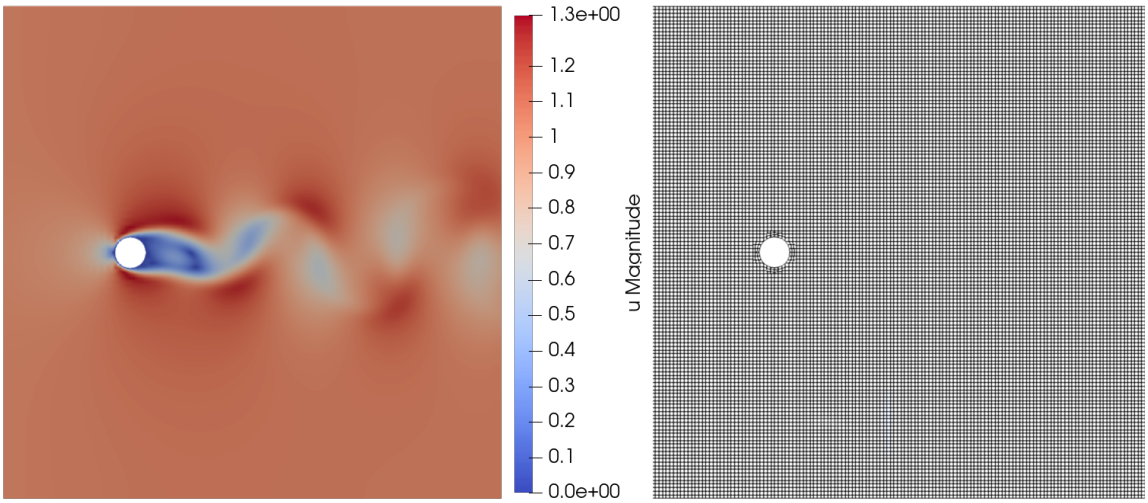
(b) Solução para $l_{max} = 2$ em $\|\mathbf{u}\|$ e malha adaptativa final com 18.447 elementos.



(c) Solução para $l_{max} = 3$ em $\|\mathbf{u}\|$ e malha adaptativa final com 40.158 elementos.



(d) Solução para $l_{max} = 4$ em $\|\mathbf{u}\|$ e Malha adaptativa final com 84.975 elementos.



(e) Solução para $\|\mathbf{u}\|$ em malha fixa de 37.908 elementos.

metodologia proposta alcança refinamentos de $h_{min} = 1{,}595 \times 10^{-1}$ a $h_{min} = 1{,}832 \times 10^{-2}$ para os níveis máximos de $l_{max} = 1$ a $l_{max} = 4$ respectivamente. A análise comparativa quantitativa indica que o Auto AMR obtém coeficientes de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) em consonância com as referências a partir de $l_{max} = 2$, com o caso específico para $l_{max} = 1$ não tendo alcançado os valores devido a baixa resolução de aproximação do círculo, contudo, atingindo menores tamanhos de elemento enquanto parte de um número inicial de elementos significantemente menor. Essa eficiência computacional é parcialmente atribuída ao fato de a malha inicial adotada neste trabalho ser mais especializada e direcionada à geometria do problema do que a estrutura homogênea utilizada por Blomquist et al. (2024).

Conclusão análoga estende-se à comparação com os dados de Guittet, Theillard e Gibou (2015), os quais foram obtidos via método de projeção associado a um esquema de adaptatividade de malha estruturada em níveis. Nessa abordagem, a discretização variou do nível 7 (16.384 nós) até o nível 11 (4.194.304 nós). O algoritmo Auto AMR,

Tabela 3 – Comparativo com dados de referência para o problema do Escoamento Incompressível ao Redor do Cilindro com $Re = 100$.

Método	C_D	C_L	h_{min}	N^o elem.
Guittet et al. (2015)	1,404 ± 0,011	0,662	$1{,}530 \times 10^{-5}$	-
Blomquist et al. (2024)	1,387 ± 0,019	0,692	$1{,}560 \times 10^{-2}$	-
Auto AMR ($l_{max} = 1$)	1,174 ± 0,007	0,390	$1{,}595 \times 10^{-1}$	7.740
Auto AMR ($l_{max} = 2$)	1,346 ± 0,017	0,644	$7{,}591 \times 10^{-2}$	18.447
Auto AMR ($l_{max} = 3$)	1,393 ± 0,019	0,694	$3{,}706 \times 10^{-2}$	40.110
Auto AMR ($l_{max} = 4$)	1,405 ± 0,020	0,706	$1{,}832 \times 10^{-2}$	84.000
Malha Fixa	1,300 ± 0,013	0,576	$1{,}010 \times 10^{-1}$	37.908

Fonte: Elaborada pelo autor.

estabilizando-se de 18.477 a 84.975 elementos para os níveis máximos de $l_{max} = 1$ a $l_{max} = 4$ respectivamente, conseguiu reproduzir as variáveis de interesse com acurácia equivalente à da malha mais refinada da literatura a partir de $l_{max} = 2$, evidenciando o potencial de economia de recursos computacionais da formulação proposta.

Por fim, a estratégia de atualização geométrica dos vértices de contorno do obstáculo demonstrou elevada eficácia quando integrada ao algoritmo Auto AMR. Partindo de uma discretização inicial de baixa resolução, intrinsecamente insuficiente para representar a curvatura do domínio e produzir resultados precisos, a metodologia promove uma aproximação progressiva da geometria circular do cilindro à medida que o nível máximo de refinamento é incrementado. Observa-se que, para $l_{max} > 2$, o refinamento geométrico e espacial combinados possibilita a completa resolução da camada limite e das estruturas de escoamento ao redor do obstáculo.

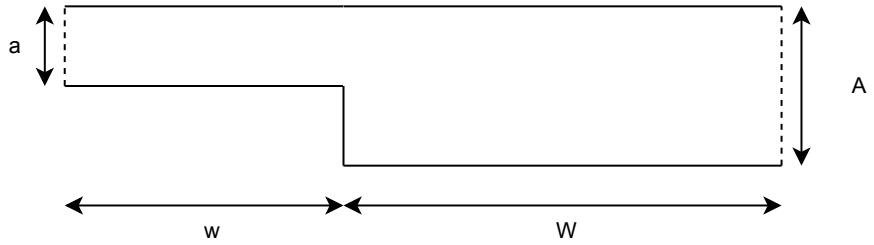
5.6 Escoamento em Degrau

O escoamento em degrau, conhecido na literatura como *backward-facing step*, consiste em uma configuração clássica da dinâmica dos fluidos na qual o escoamento percorre um canal que sofre um aumento abrupto de altura. Essa expansão súbita da seção transversal induz a separação da camada limite e a formação de regiões de recirculação a jusante do degrau. A configuração de referência utilizada neste trabalho foi proposta por Armaly et al. (1983) e é amplamente empregada como *benchmark* na análise de métodos numéricos aplicados a problemas envolvendo separação de escoamento.

A geometria do domínio a ser simulado é apresentada na Figura 23. A entrada do escoamento corresponde à seção menor do canal, indicada pela linha pontilhada, com altura $a = 0{,}5$ e largura $w = 0{,}5$. Após o degrau, o canal passa a possuir altura total $A = 1{,}0$, sendo a altura do degrau definida por $a_{dg} = A - a$. O comprimento do domínio a jusante do degrau, representado por W, é ajustado de acordo com o número de Reynolds,

considerando o comprimento esperado da região de recirculação (ou *reattachment length*). Embora seja possível utilizar um valor fixo de W para todos os casos, esse ajuste permite reduzir o número total de elementos da malha e, consequentemente, o custo computacional das simulações. Em relação às condições de contorno, nas paredes superior e inferior foram

Figura 23 - Esquema do domínio usado para o problema do Escoamento em Degrau.



Fonte: Elaborada pelo autor

impostas condições de não deslizamento, isto é, $u = v = 0$. Na entrada do domínio, foi aplicada a condição

$$u = \begin{cases} \dfrac{4u_{max}(y - a_{dg})(a - y + a_{dg})}{a^2} & y > a_{dg} \\ 0 & y \leq a_{dg} \end{cases}, \tag{5.22}$$

que prescreve um perfil parabólico para a componente horizontal da velocidade, com valor máximo u_{max} localizado no centro da abertura de entrada. Além disso, a condição inicial do problema foi definida como $u = v = 0$ em todo o domínio.

O número de Reynolds é calculado pela Equação (5.23), onde u_{max} é a velocidade máxima no ponto médio da abertura de entrada e a altura do degrau a_{dg} o comprimento característico (ARMALY et al., 1983)

$$Re = \frac{4u_{max}a_{dg}}{3\mu}. \tag{5.23}$$

Os diferentes valores de Reynolds foram obtidos variando u_{max} como mostrado na Tabela 4, onde também são exibidos os valores da largura W adotados para esse trabalho.

A quantidade de interesse usada para comparação e validação desse experimento é o comprimento do vórtice de recirculação no degrau x_r, no qual o procedimento de medição desse vórtice é ilustrado na Figura 24. Geralmente x_r é apresentado na sua forma adimensionalizada

$$x_f = \frac{x_r}{a_{dg}},$$

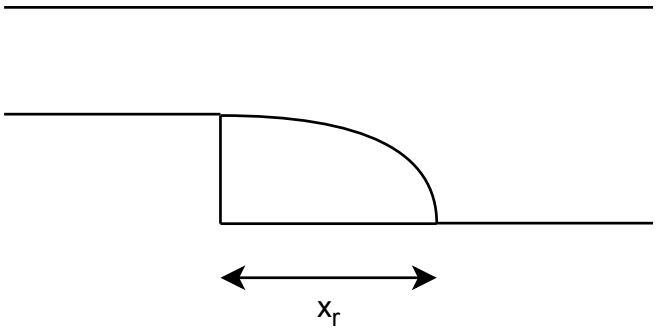
com x_f sendo o valor usado na comparação com dados experimentais obtidos por Armaly et al. (1983).

Tabela 4 – Valores de velocidade e largura do duto de saída para o problema do escoamento no degrau.

Reynolds	u_{max}	W
100	0,75	4,5
150	1,125	5,0
300	2,25	6,5
400	3,0	7,5
450	3,375	8,0
500	3,75	8,5
600	4,5	9,5
650	4,875	10,0
700	5,25	10,5
800	6,0	11,5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 - Medição do comprimento de recirculação no degrau.

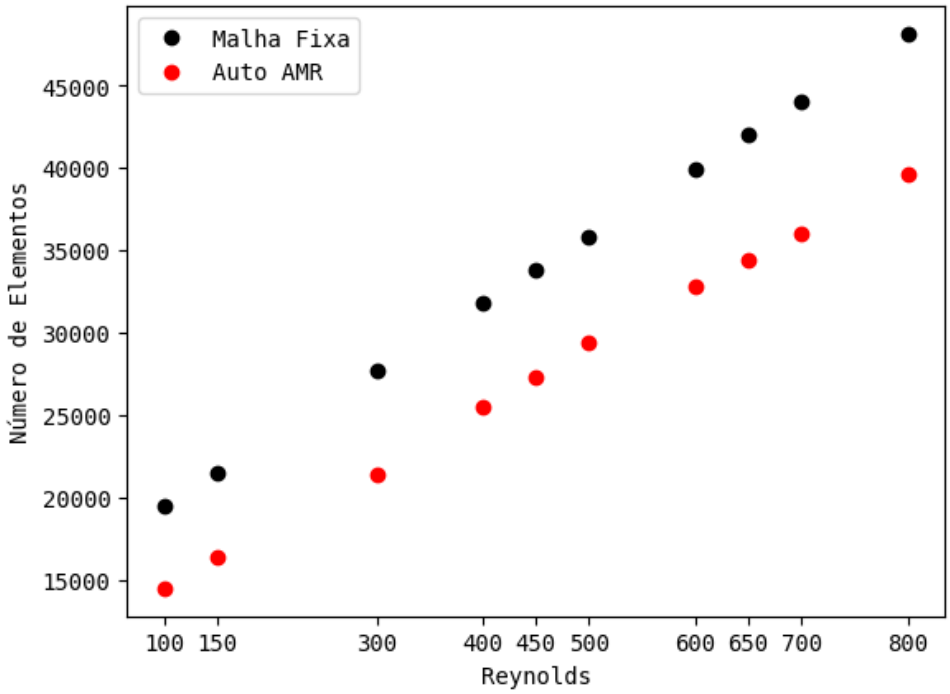


Fonte: Elaborada pelo autor

A realização das simulações aplicando a adaptatividade de malha empregou malha inicial de nível $l_{max} = 2$, podendo chegar até o nível $l_{max} = 7$. O passo de tempo adotado foi $\Delta t = 0{,}05$ e viscosidade $\mu = 0{,}005$. As execuções com a malha fixa são feitas com nível $l_{max} = 5$ de refinamento, na qual a variação do número de elementos é devido a mudança de comprimento do duto de saída, no qual o comparativo dos números finais de elementos é exibido na Figura 25.

As Figuras 26a, 26b e 26c apresentam, respectivamente, a magnitude da velocidade, as linhas de corrente obtidas por meio da técnica *Line Integral Convolution* (LIC) disponível no software de visualização Paraview e a malha adaptativa para o caso com $Re = 100$. Os resultados correspondentes para $Re = 500$ e $Re = 800$ são mostrados nas Figuras 27a–27c e 28a–28c. As linhas de corrente evidenciam a formação da região primária de recirculação para todos os casos analisados e, para $Re = 500$, o surgimento da região

Figura 25 - Comparativo do número de elementos entre as execuções com malha fixa e o número de elementos final da simulação do Auto AMR.

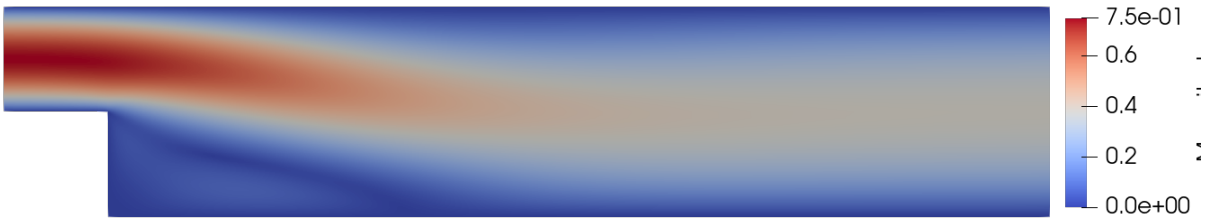


Fonte: Elaborada pelo autor

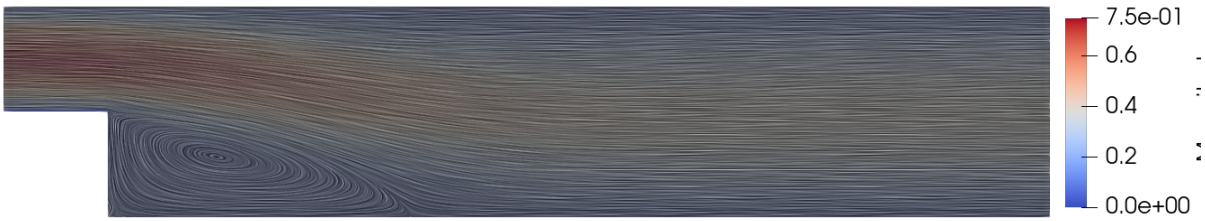
secundária próximo à parede superior do canal, em concordância com a literatura. Em paralelo, observa-se que a estratégia Auto AMR concentra o refinamento nas regiões de separação e recirculação do escoamento, onde os gradientes da solução são mais elevados, preservando uma malha mais grosseira nas regiões de escoamento quase uniforme.

Os resultados comparativos com os dados experimentais de Armaly et al. (1983) e numéricos de Biswas, Breuer e Durst (2004) são apresentados na Figura 29. Observa-se que, para $R_e \geq 300$, tanto as soluções obtidas com o Auto AMR quanto com a malha fixa passam a apresentar desvios mais significativos em relação aos resultados experimentais. Esse comportamento também foi reportado por Armaly et al. (1983) e está associado ao surgimento de múltiplas regiões de separação, cuja dinâmica é essencialmente tridimensional e, portanto, não pode ser completamente representada por um modelo bidimensional. Ainda assim, as soluções obtidas pelo Auto AMR e pela malha fixa permanecem muito próximas entre si e em excelente concordância com os resultados numéricos de Biswas, Breuer e Durst (2004). Como a malha fixa emprega um número significativamente maior de elementos (Figura 25), esses resultados evidenciam a eficiência da estratégia adaptativa em concentrar refinamento apenas nas regiões de maior interesse, reproduzindo com precisão o comprimento da recirculação primária (x_r).

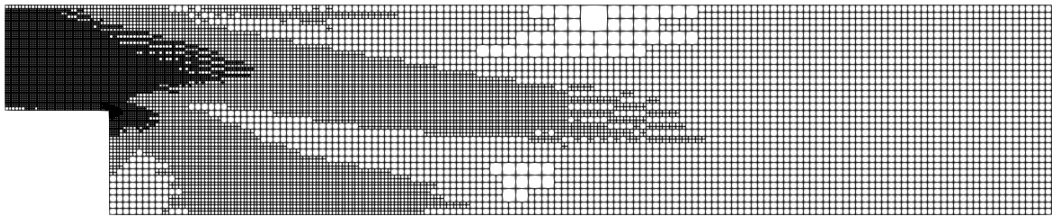
Figura 26 - Visualizações do resultado para o problema do escoamento no degrau com $Re = 100$ obtido a $t = 47{,}55s$.



(a) Solução para $\|\mathbf{u}\|$

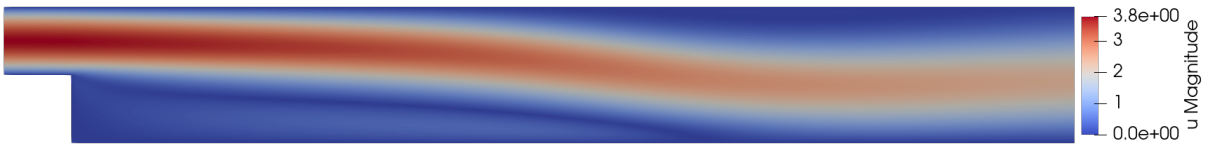


(b) linhas de corrente

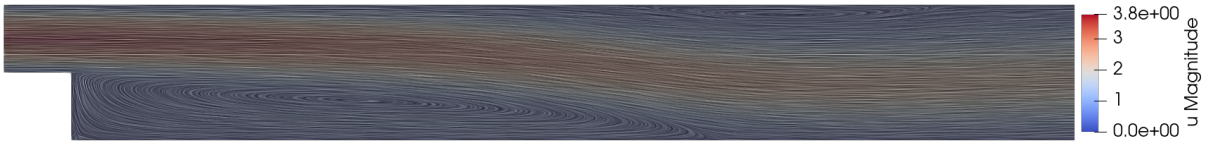


(c) Malha adaptada final

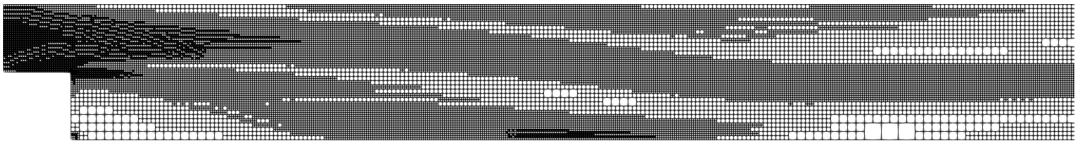
Figura 27 - Visualizações do resultado para o problema do escoamento no degrau com $Re = 500$ obtido a $t = 140{,}45s$.



(a) Solução para $\|\mathbf{u}\|$

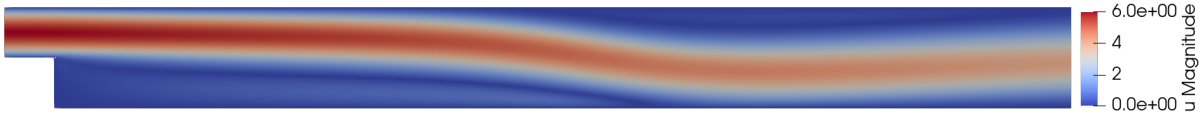


(b) linhas de corrente

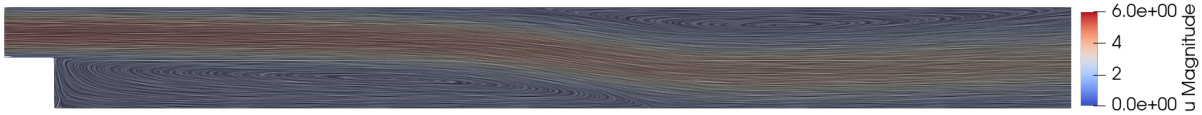


(c) Malha adaptada final

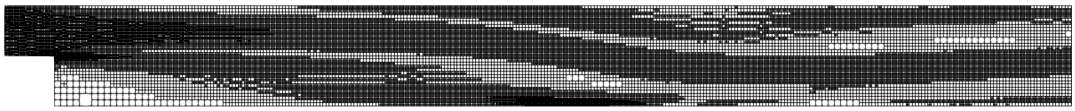
Figura 28 - Visualizações do resultado para o problema do escoamento no degrau com $Re = 800$ obtido a $t = 105{,}40s$.



(a) Solução para $\|\mathbf{u}\|$



(b) linhas de corrente



(c) Malha adaptada final

5.7 Camada de Cisalhamento Duplamente Periódica

O problema da dupla camada de cisalhamento *2D double shear layer* consiste na evolução temporal de duas camadas de cisalhamento inicialmente paralelas, cuja instabilidade leva à formação e interação de um par de vórtices simétricos. À medida que o escoamento evolui, essas estruturas sofrem intenso estiramento, originando regiões de elevados gradientes de velocidade e vorticidade em escalas cada vez menores. Esse problema é utilizado na avaliação de métodos numéricos para escoamentos incompressíveis (BROWN, 1995; CLAUSEN, 2013), inclusive na análise da capacidade de estratégias de adaptatividade em identificar corretamente as regiões do domínio que demandam maior refinamento (FAMBRI; DUMBSER, 2017). Uma descrição detalhada do problema pode ser encontrada em Brown (1995).

O domínio é definido em um quadrado unitário com contornos periódicos seguindo os eixos vertical e horizontal. A condição inicial é definida como (CLAUSEN, 2013)

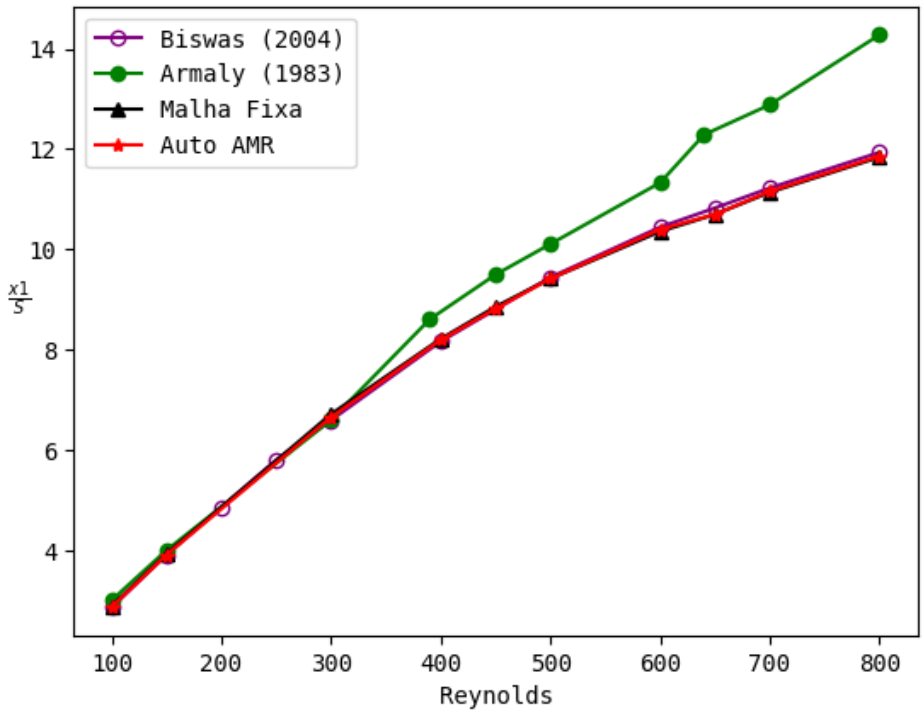
$$u = \begin{cases} \tanh[\delta_w(y - 0{,}25)] & \text{se} \quad y \leq 0{,}5 \\ \tanh[\delta_w(0{,}75 - y)] & \text{se} \quad y > 0{,}5 \end{cases} \tag{5.24}$$

$$v = \delta_p \sin[2\pi(x + 0{,}25)] \tag{5.25}$$

onde δ_w é o parâmetro que governa a largura da camada de cisalhamento e δ_p é a força da perturbação inicial. Para este trabalho os valores adotados são $\delta_w = 80$ e $\delta_p = 0{,}05$. O número de Reynolds é proposto por Brown (1995), como $Re = 1/\mu$, que para uma viscosidade $\mu = 1 \times 10^{-4}$ obtém-se $Re = 10.000$.

As quantidades de interesse avaliadas neste problema são a enstrofia (CLAUSEN,

Figura 29 – Comparativo dos resultados obtidos neste trabalho com dados experimentais e literatura para o comprimento de reanexação partindo de $Re = 100$ até $Re = 800$ para o problema do escoamento em degrau.



Fonte: Elaborada pelo autor

2013),

$$\Omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega_i^2 A_i}{2A}, \tag{5.26}$$

e a energia cinética média,

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i)\, A_i}{2A}, \tag{5.27}$$

as quais correspondem às aproximações discretas das respectivas integrais sobre o domínio, onde $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ representa a vorticidade, A_i é a área do i-ésimo elemento, $A = \sum_{i=1}^{N} A_i$ é a área total do domínio e N denota o número de elementos da malha.

A enstrofia fornece uma medida da intensidade do campo de vorticidade, sendo amplamente utilizada para acompanhar a formação, o estiramento e a dissipação das estruturas vorticais ao longo da evolução temporal. Já a energia cinética média permite quantificar o decaimento da energia do escoamento devido aos efeitos dissipativos da viscosidade.

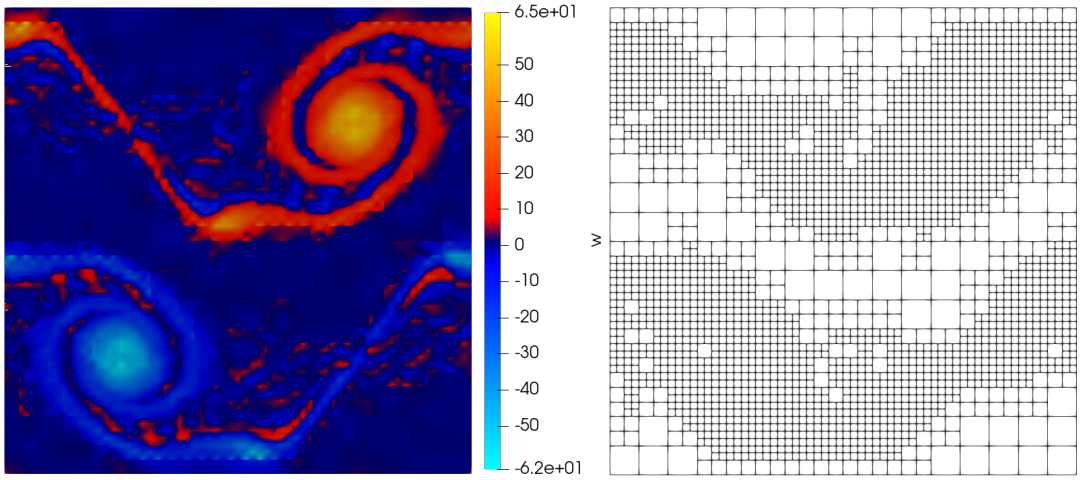
As simulações foram iniciadas com nível global de refinamento 4, correspondente a 256 elementos, permitindo refinamento adaptativo até os níveis 6, 7, 8 e 9. Para comparação, também foi realizada uma simulação em malha fixa com refinamento global 7 (16.384 elementos). Em todas as execuções adotou-se $\Delta t = 0{,}001$ e tempo final $T = 1{,}0$. Antes do início da integração temporal, o Auto AMR executa cinco ciclos sucessivos de refinamento adaptativo sobre a condição inicial, permitindo resolver adequadamente as camadas de cisalhamento já presentes e reduzir o erro inicial na aproximação da enstrofia.

As distribuições de vorticidade obtidas após o desenvolvimento das camadas de cisalhamento e as malhas adaptativas finais são apresentadas na Figura 30. Para o refinamento adaptativo máximo de nível 6 (Figura 30a), o tamanho mínimo de elemento mostrou-se insuficiente para resolver corretamente as camadas de cisalhamento, resultando em estruturas excessivamente espessas e na formação de um vórtice secundário espúrio. Com refinamento adaptativo máximo 7 (Figura 30b), as camadas passam a ser representadas adequadamente, sem o aparecimento dessas estruturas não físicas, enquanto o Auto AMR concentra o refinamento apenas nas regiões de elevados gradientes de vorticidade, utilizando 7.090 elementos.

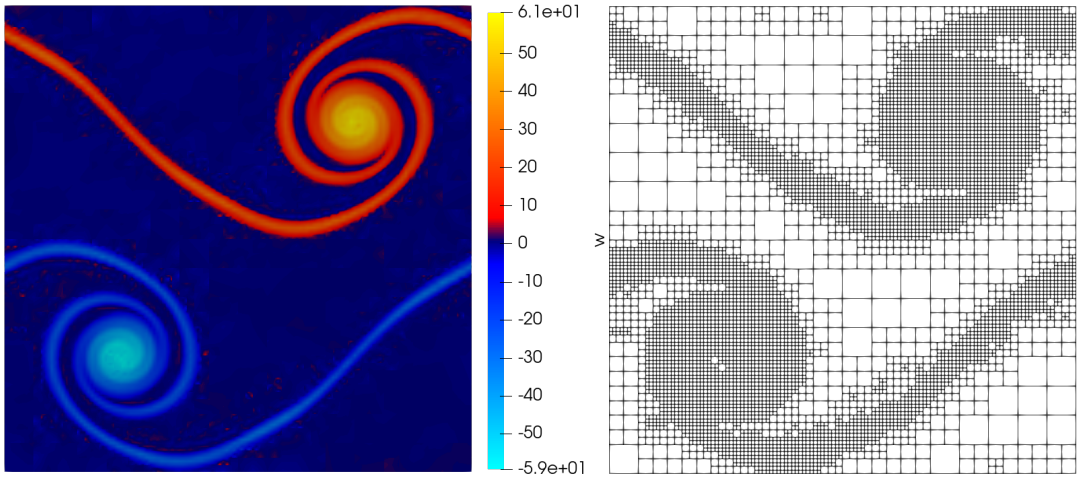
Os melhores resultados foram obtidos com refinamento máximo 8 (Figura 30c), no qual as camadas de cisalhamento apresentam maior definição e a malha adaptativa acompanha com precisão sua evolução, empregando 28.762 elementos. Embora o refinamento máximo 9 (Figura 30d) produza uma representação ligeiramente mais nítida, os resultados de enstrofia e energia, discutidos a seguir, permanecem praticamente inalterados em relação ao nível 8, apesar do aumento do número de elementos para 81.715. Para comparação, a Figura 30e apresenta a solução obtida em malha fixa com 16.384 elementos, que mostra que a malha uniforme não representa adequadamente o desenvolvimento das camadas de cisalhamento, evidenciando a importância da distribuição local dos elementos.

Na Figura 31 são comparados os resultados obtidos com o Auto AMR, a malha fixa e a solução pseudoespectral de referência de Clausen (2013). Para a enstrofia, observa-se excelente concordância entre a solução de referência e as soluções adaptativas com níveis máximos de refinamento 8 e 9 ao longo de toda a simulação. Em contraste, o nível 6 mostrou-se insuficiente para resolver adequadamente as camadas de cisalhamento, como visto na Fig. 30a. Até aproximadamente $t = 0{,}6$, sua evolução é semelhante à obtida com malha fixa e, embora ocorra uma aproximação posterior aos valores de referência devido ao desenvolvimento dos vórtices principais, a solução permanece significativamente menos precisa. O nível 7 representa um caso intermediário: inicialmente acompanha a solução em malha fixa, mas a partir de aproximadamente $t = 0{,}2$ passa a reproduzir corretamente a evolução da enstrofia, indicando que essa resolução se encontra próxima do limite necessário para capturar adequadamente as camadas de cisalhamento. Esse comportamento é consistente com os campos de vorticidade apresentados nas Figuras 30a e 30e, que evidenciam a incapacidade da malha fixa e do refinamento máximo de nível 6

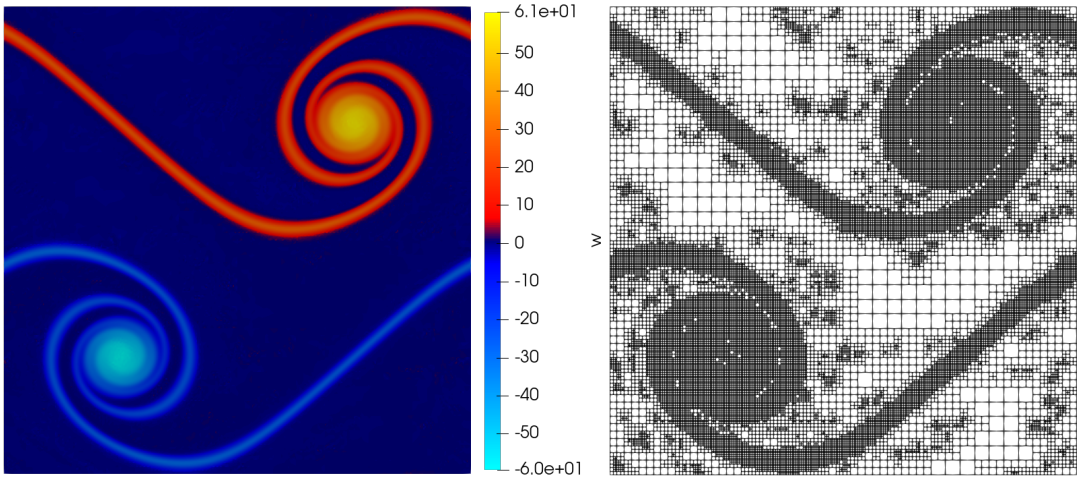
Figura 30 – Soluções para a vorticidade e malha adaptativa do último passo de tempo para o problema do cisalhamento duplamente periódico.



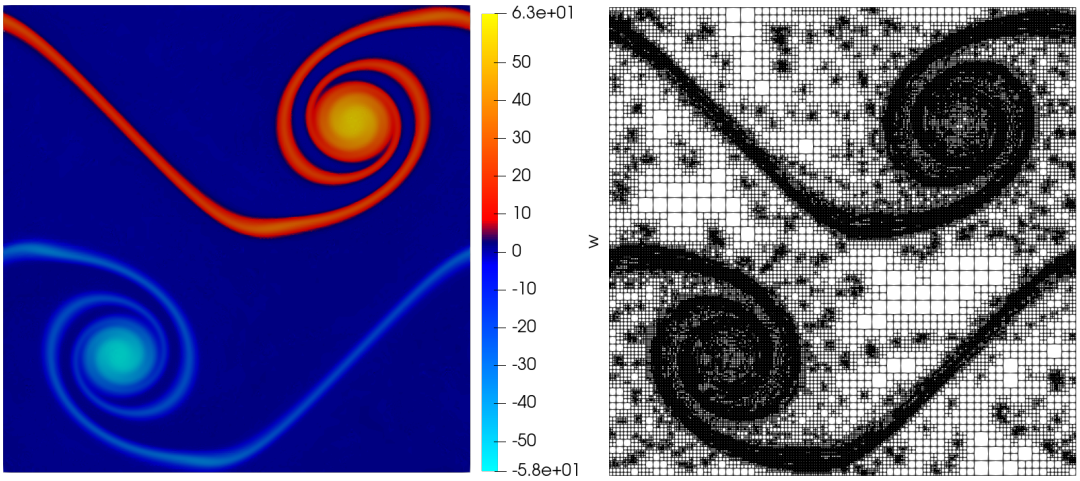
(a) Solução e última malha com 2.509 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 6.



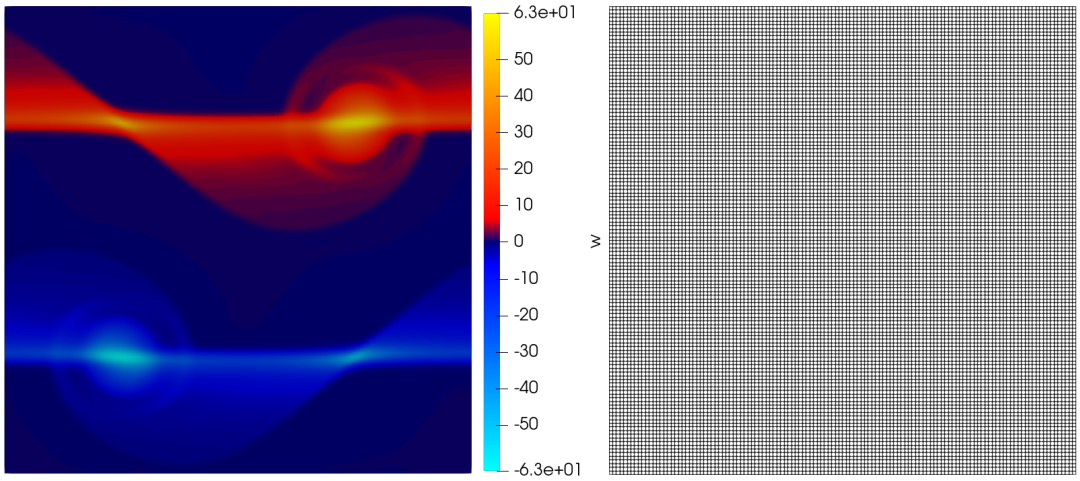
(b) Solução e última malha com 7.090 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 7



(c) Solução e última malha com 28.762 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 8



(d) Solução e última malha com 81.715 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 9



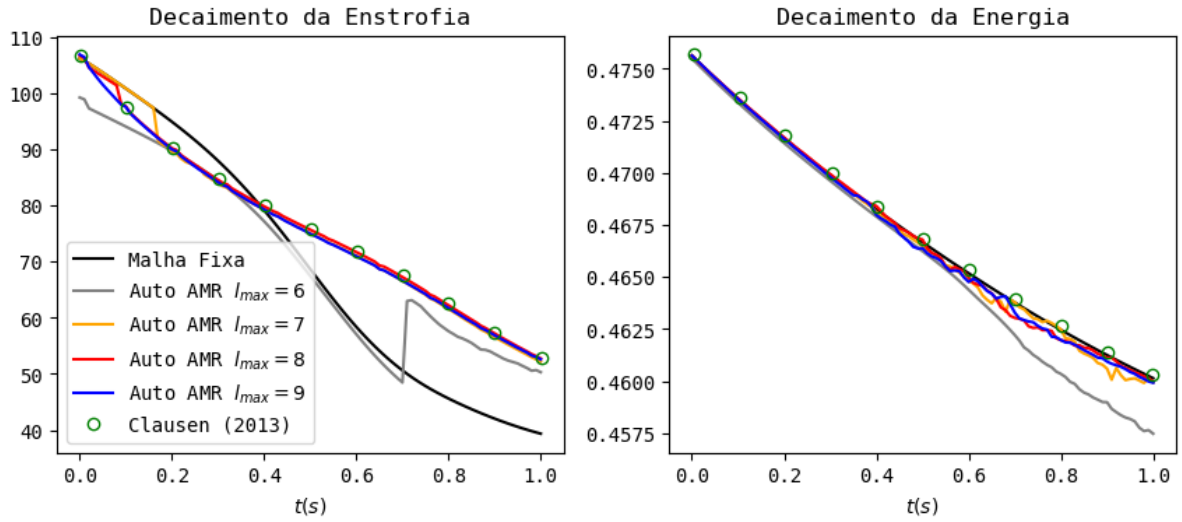
(e) Solução e malha fixa com 16.384 elementos

em representar corretamente as estruturas vorticais mais finas.

Para o decaimento da energia cinética, as soluções adaptativas com níveis máximos de refinamento entre 7 e 9 também apresentam boa concordância com a solução de referência, enquanto o nível 6 volta a divergir a partir de aproximadamente $t = 0{,}6$. Entretanto, para $t > 0{,}5$, as soluções dos níveis 7 a 9 passam a apresentar valores ligeiramente inferiores aos da referência, indicando uma dissipação numérica discretamente mais elevada. Por outro lado, a solução em malha fixa reproduz de forma mais próxima o decaimento da energia cinética, embora não represente adequadamente a evolução da enstrofia. Esse comportamento pode ser atribuído à baixa resolução espacial, que suaviza as pequenas estruturas vorticais, reduz os gradientes locais de velocidade e produz uma distribuição de energia global aparentemente mais próxima da referência, porém com menor fidelidade física.

A Tabela 5 apresenta o tamanho mínimo de elemento, o número final de elementos e a porcentagem de utilização do refinamento máximo para cada simulação. A porcentagem

Figura 31 – Resultados para o decaimento da enstrofia e energia para o problema da camada de cisalhamento duplamente periódica.



Fonte: Elaborada pelo autor

de utilização se refere a razão do número de elementos ativos, independente do nível de refinamento, no ultimo passo de tempo em relação ao número máximo de elementos dado por (4.13).

Em conjunto com os resultados qualitativos e quantitativos apresentados anteriormente, observa-se que o refinamento máximo de nível 8 oferece o melhor compromisso entre acurácia e custo computacional. Embora o nível 9 produza resultados praticamente indistinguíveis para enstrofia e energia (ver Fig. 31), ele requer um aumento expressivo no número de elementos, enquanto o Auto AMR continua utilizando apenas uma fração da malha uniformemente refinada equivalente.

Tabela 5 – Comparativo do número final de elementos, tamanho mínimo de elemento e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o problema do cisalhamento duplamente periódico.

Nível Máximo	h_{min}	Número de Elementos	Porcentagem de Uso
6	$2{,}44 \times 10^{-4}$	2.509	61,3%
7	$6{,}10 \times 10^{-5}$	7.090	43,3%
8	$1{,}53 \times 10^{-5}$	28.762	43,9%
9	$3{,}81 \times 10^{-6}$	81.715	31,2%
Fixa	$6{,}10 \times 10^{-5}$	16.384	100%

Fonte: Elaborada pelo autor.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA NAVIER-STOKES COMPRESSÍVEL

Neste capítulo, o modelo de Navier–Stokes compressível apresentado no Capítulo 2 e sua aproximação numérica descrita no Capítulo 3 são integrados à estratégia de adaptatividade de malha Auto AMR desenvolvida no Capítulo 4.

A formulação governante do modelo numérico estabilizado é definida pelas Equações (3.41) e (3.42), incorporando o método SUPG acoplado ao operador de captura de choque $YZ\beta$. Para este último, são empregadas duas estratégias de dissipação numérica pela captura de choque apresentadas nas Equações (3.33) e (3.34).

A metodologia é verificada inicialmente por meio de um estudo de convergência de malha. Em seguida, valida-se o desempenho do algoritmo adaptativo na identificação automática das regiões do domínio que requerem maior refinamento do escoamento em dois problemas clássicos da literatura aerodinâmica: o escoamento compressível ao redor de um cilindro circular e o escoamento supersônico sobre o aerofólio NACA 0012 a Mach 6. O código computacional contendo a implementação de cada caso está disponível em (LOPES, 2026).

6.1 Estudo de Convergência

Para o estudo de convergência para o sistema de Navier–Stokes compressível serão usadas as mesmas definições do caso incompressível relativas a obtenção dos dados no ultimo passo de tempo (Seção 5.3). Assim, consideramos a solução analítica (BULL; JAMESON, 2014; DIOSADY; MURMAN, 2015)

$$u = V_0 \sin(y)\cos(x), \tag{6.1}$$

$$v = -V_0 \sin(x)\cos(y), \tag{6.2}$$

$$p = \rho_0 V_0^2 \left[\frac{1}{\gamma M_0^2} + \frac{1}{16}(\cos(2x) + \cos(2y))\right], \tag{6.3}$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho_0(u^2 + v^2)}{2}, \tag{6.4}$$

onde $V_0 = \rho_0 = 1{,}0$, $\gamma = 1{,}4$ e $M_0 = 0{,}1$, com o passo de tempo definido como $\Delta t = h$ até atingir o critério de convergência (3.38), quando a solução do ultimo passo de tempo é comparada a solução analítica. O valor de viscosidade adotado é $\mu = 3{,}93 \times 10^{-3}$, com uma malha quadrada homogênea de lado 2π, o que resulta em um valor de Reynolds de 1.600, e contorno definido usando a própria solução analítica.

Os resultados para cada uma das três variáveis são mostrados na Tabela 6, onde para cada uma delas é apresentado o erro e a ordem de convergência para números de elementos variando de 64 a 16.384. Também é adotado $\mathbf{m} = \rho\mathbf{u}$ correspondendo ao vetor de momento linear. É possível observar que os resultados para o momento convergem

para a ordem esperada de 2 a partir de 1.024 elementos e se estabilizam a partir de 4.096 elementos, resultado semelhante para a densidade e energia que se aproximam de 2 consistentemente ao se aumentar o número de elementos, o que demonstra a convergência de segunda ordem para a discretização espacial e temporal empregada.

Tabela 6 – Estudo de convergência para o problema de Navier–Stokes Compressível

Nº Elem.	$\|\mathbf{m} - \mathbf{m}_h\|_{L^2}$	**Ordem**	$\|\rho - \rho_h\|_{L^2}$	**Ordem**	$\|E - E_h\|_{L^2}$	**Ordem**
64	$4{,}801 \times 10^{-1}$	-	$5{,}999 \times 10^{-3}$	-	$7{,}505 \times 10^{-1}$	-
256	$2{,}044 \times 10^{-1}$	1,23	$2{,}960 \times 10^{-3}$	1,02	$4{,}697 \times 10^{-1}$	0,68
1.024	$4{,}335 \times 10^{-2}$	2,24	$6{,}255 \times 10^{-4}$	2,24	$1{,}127 \times 10^{-1}$	2,06
4.096	$1{,}077 \times 10^{-2}$	2,01	$1{,}421 \times 10^{-4}$	2,14	$2{,}679 \times 10^{-2}$	2,07
16.384	$2{,}674 \times 10^{-3}$	2,01	$3{,}357 \times 10^{-5}$	2,08	$6{,}480 \times 10^{-3}$	2,05

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro

Nesta seção, a formulação compressível de Navier-Stokes é aplicada ao problema do escoamento ao redor de um cilindro circular, anteriormente analisado no contexto incompressível na Seção 5.5. Considera-se um escoamento subsônico com número de Reynolds igual a 100 sobre o domínio ilustrado na Figura 32 onde as dimensões são dadas por $a = 10$, $w = 10$ e $W = 30$, com $C = 1$ sendo o diâmetro do cilindro e $R = 6$ a região tipo-o onde os semicírculos que a formam são controlados pelo afastamento dos pontos de origem do centro a uma distância $Z = 3$. As condições de contorno são definidas de forma análoga ao caso incompressível. Na entrada do domínio ($x = -w$) é imposto um perfil uniforme de velocidade, dado por $u = U_{max}$ e $v = 0$, além de $\rho = 1{,}0$. Para a energia total E, adota-se condição de Neumann homogênea. Nas fronteiras superior e inferior do domínio, representando as paredes do canal, é aplicada uma condição de simetria. Nesse caso, impõe-se condição de Neumann homogênea para a componente horizontal da velocidade, enquanto a componente vertical satisfaz $v = 0$. Na saída do domínio ($x = W$) são aplicadas condições de Neumann homogêneas para u, v e ρ. Já a energia total é prescrita pela Equação

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2), \tag{6.5}$$

onde a pressão é definida por

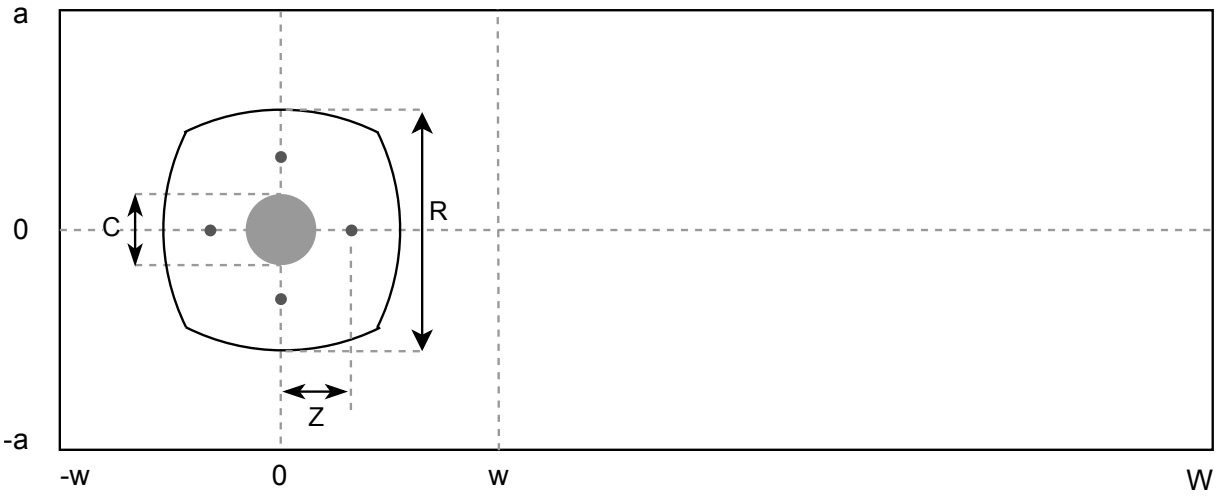
$$p = \frac{1}{\gamma M_0^2}, \tag{6.6}$$

com $\gamma = 1{,}4$ e número de Mach $M_0 = 0{,}2$.

Com objetivo de reduzir a produção de ondas acústicas devido à diferença brusca de pressão criada pela distribuição dos valores do contorno de entrada em todo o domínio,

um passo intermediário na construção da condição inicial que produz uma solução aproximadamente estacionária é aplicado. A geração dessa solução é feita a partir das mesmas condições de contorno, viscosidade e estratégia SUPG/YZβ usadas para o problema transiente, mas sem a presença da discretização temporal. Sabendo que uma solução realmente estacionária é inviável para $Re = 100$, é usada uma adaptação do Método de Iterações de Picard (LARSON; BENGZON, 2013), o qual é modificado para executar 10 iterações, e a solução da iteração com menor diferença em relação a solução da iteração anterior é definida como condição inicial. Dessa forma a solução obtida é a que mais se aproxima de uma solução estacionária. O valor de Reynolds é obtido da mesma maneira que foi para o modelo incompressível. Se for usado o valor $U_{max} = 1{,}0$ e a viscosidade $\mu = 0{,}01$ obtemos $R_e = 100$.

Figura 32 – Esquema do domínio usado para o problema do escoamento compressível ao redor do cilindro.



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim como no caso incompressível, tratado na Seção 5.5, as quantidades de interesse são os coeficientes de arrasto e sustentação definidos, respectivamente, em (5.20) e (5.21). Contudo, devido à compressibilidade as forças de arrasto e sustentação são obtidas através do vetor de tração

$$\mathbf{f} = \int_S (\mathbb{V} - p\mathbb{I})\mathbf{n}\ dS, \tag{6.7}$$

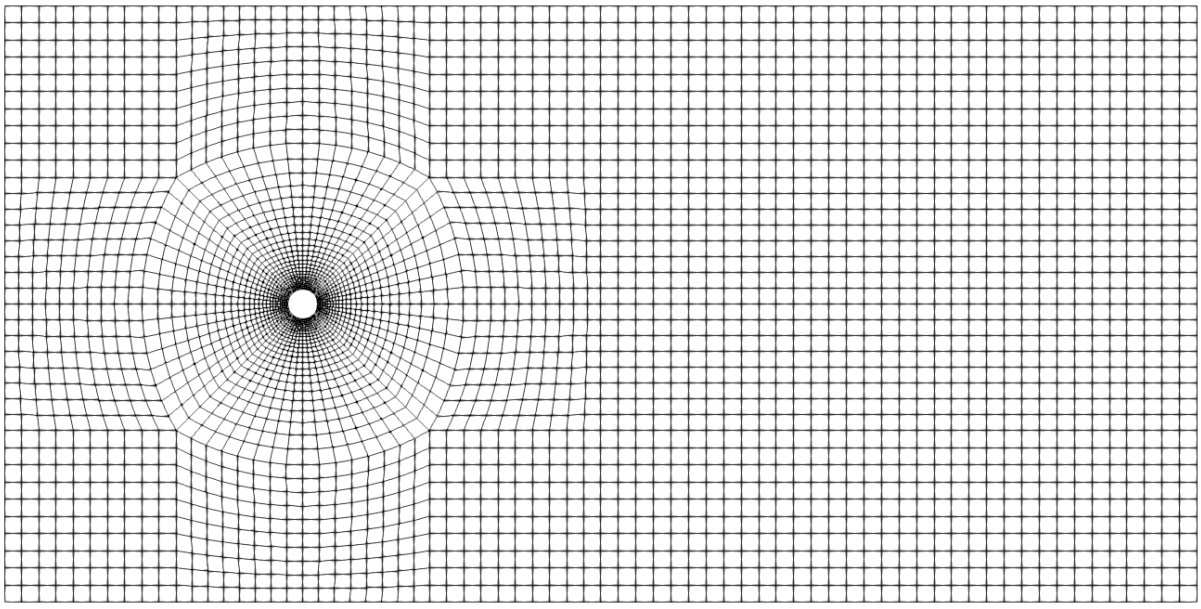
com $\mathbb{V}$ definido em (2.6). Além disso também são verificados o período da oscilação principal do coeficiente de sustentação capturado pelo último ciclo completo e o número de Strouhal, definido como:

$$St = \frac{fC}{U_{max}} = \frac{C}{T_{cl}\ U_{max}} \tag{6.8}$$

onde C é o comprimento característico, nesse caso o diâmetro do cilindro, T_{cl} o período do último ciclo do coeficiente de sustentação e U_{max} a velocidade do escoamento.

As simulações foram feitas com passo de tempo $\Delta t = 0{,}01$ até o tempo final $T = 200$. A captura de choque foi configurada usando a estratégia de obtenção de δ da Equação (3.34) onde é definido $\beta = 2$, que corresponde a configuração onde há menor dissipação na proximidade de eventuais descontinuidades. Para a estratégia adaptativa Auto AMR, foi adotado um nível inicial de refinamento igual a 0, correspondente a uma malha inicial com 3.864 elementos desenvolvida com o software gmsh (GEUZAINE; REMACLE, 2009) ilustrada na Figura 33 que difere da malha previamente usada para o caso incompressível pela necessidade de maior resolução inicial no cilindro para o método compressível, e pela maior tolerância observada para esse método a mudanças de razão de aspecto na interface tipo-o que contém o cilindro com a parte quadrangular do restante da malha. Foram considerados três cenários com níveis máximos de refinamento $l_{max} = 1, 2, 3$, que se aplicada em toda a malha podendo alcançar, respectivamente, 15.456, 61.824 e 247.296 elementos.

Figura 33 – Malha com 3.864 elementos usada para o problema do Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro.



Fonte: Elaborada pelo autor

Para os cenários com $l_{max} = 2, 3$ foi usada uma limitação de nível máximo do Auto AMR de forma a acelerar a formação da sequência de vórtices esperados para esse tipo de problema. A limitação vale a partir do início da simulação, e mantém $l_{max} = 1$ enquanto a condição $|C_L| < 0{,}05$ for verdadeira. Quando o valor do módulo de C_L ultrapassa o valor determinado a limitação é desligada e o nível máximo de refinamento atinge seu valor predeterminado para a simulação. Após a simulação atingir $t = 100$ a frequência de aplicação da adaptatividade é acelerada para uma aplicação a cada cinco passos de tempo,

de forma a capturar melhor os vórtices. Também foi feita uma simulação com malha fixa com 48.767 elementos sem o uso de adaptatividade.

As soluções em $T = 200$ para o Auto AMR são exibidas na Figura 34 com foco na parte frontal do domínio ($-w \leq x \leq w$), a Figura 34a mostra o resultado da magnitude da velocidade ($\|\mathbf{u}\|$) para $l_{max} = 1$ e da malha adaptativa correspondente com 7.668 elementos. Observa-se que o refinamento foi concentrado nas proximidades do cilindro e na esteira de escoamento onde há os maiores gradientes da solução. Mesmo utilizando em torno de 50% do total de elementos disponíveis no refinamento máximo, a estratégia adaptativa capturou adequadamente as principais estruturas do escoamento.

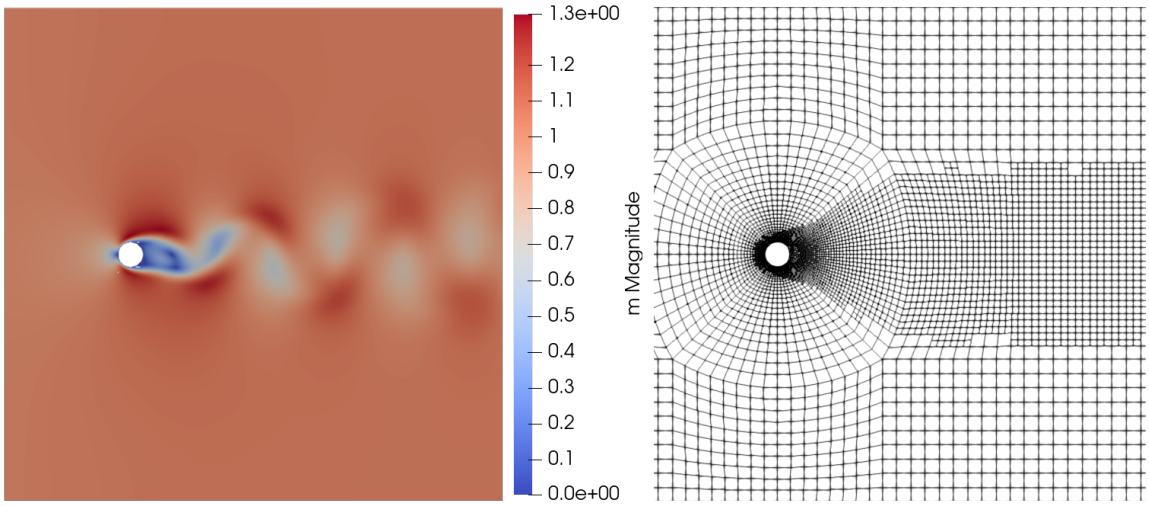
Para a Figura 34b são exibidos os resultados da magnitude da velocidade para $l_{max} = 2$ e da malha adaptativa correspondente com 20.535 elementos, que representam 33% do total de elementos disponíveis no refinamento máximo. Também observa-se o refinamento concentrado nas regiões de maior gradiente da esteira de escoamento e ao redor do cilindro, onde a região refinada aumenta ligeiramente junto com a velocidade máxima da solução, e a disposição de elementos começa a apresentar regiões menos refinadas correspondentes as regiões entre os vórtices com menor erro local.

Para a Figura 34c são exibidos os resultados da magnitude da velocidade para $l_{max} = 3$ e da malha adaptativa correspondente com 49.221 elementos, que representam 20% do total de elementos disponíveis no refinamento máximo. Pelas porcentagens de uso anteriores confirma a tendência geral observada nos outros problemas a serem usados menos elementos à medida que o nível de refinamento se aprofunda. Também é observado que a região de refinamento engloba uma área pouco maior que a esteira de escoamento à medida que essa se expande mais facilmente devido ao menor tamanho de elemento. A captura das regiões de maior gradiente como os vórtices da esteira de escoamento são bem definidas e mostra que o Auto AMR consegue identificar e priorizar essas estruturas para receber um maior nível de refinamento.

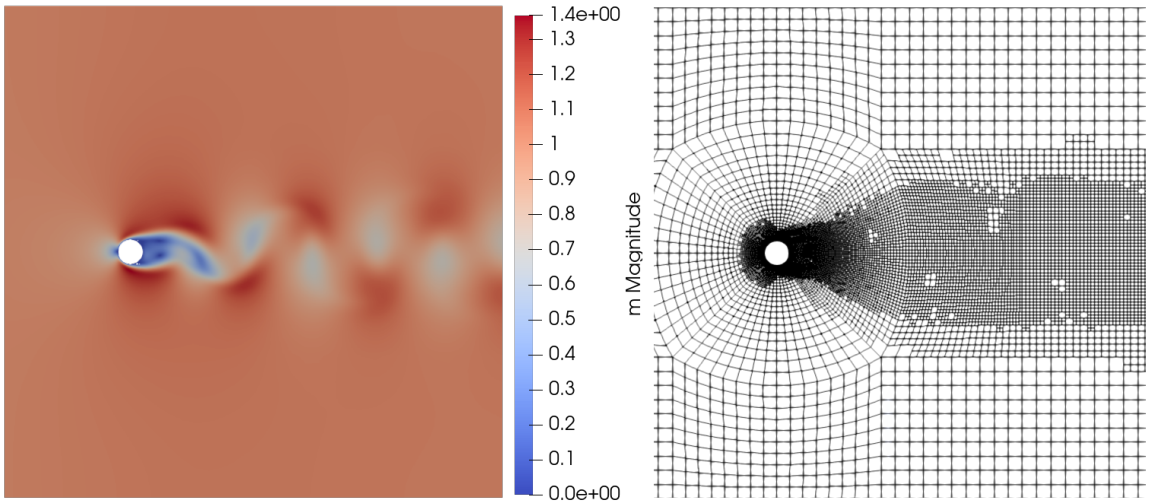
Por fim é feita a comparação das soluções com a simulação em malha fixa (Figura 34d), onde a magnitude da velocidade é semelhante a obtida para $l_{max} = 2$. Visualmente, percebe-se apenas uma pequena diferença na qualidade da esteira de vórtices em relação à condição $l_{max} = 3$, na qual o Auto AMR atinge uma maior resolução.

Na Figura 35 é apresentada a evolução dos coeficientes de arrasto e sustentação na janela de medição de $t = 175$ a $t = 200$. Observa-se uma oscilação secundária afetando a evolução dos coeficientes presente de forma mais visível para os resultados de C_D. A Figura 35c apresenta a evolução dos coeficientes ao longo de todo o período, no qual a oscilação secundária mantém a razão de 2:1 em relação às oscilações principais e aumenta de amplitude com o passar do tempo. A possível origem dessa oscilação secundária reside no acoplamento aeroacústico: as perturbações de pressão geradas pelo descolamento de vórtices sofrem reflexões residuais nas fronteiras do domínio truncado e retroalimentam a

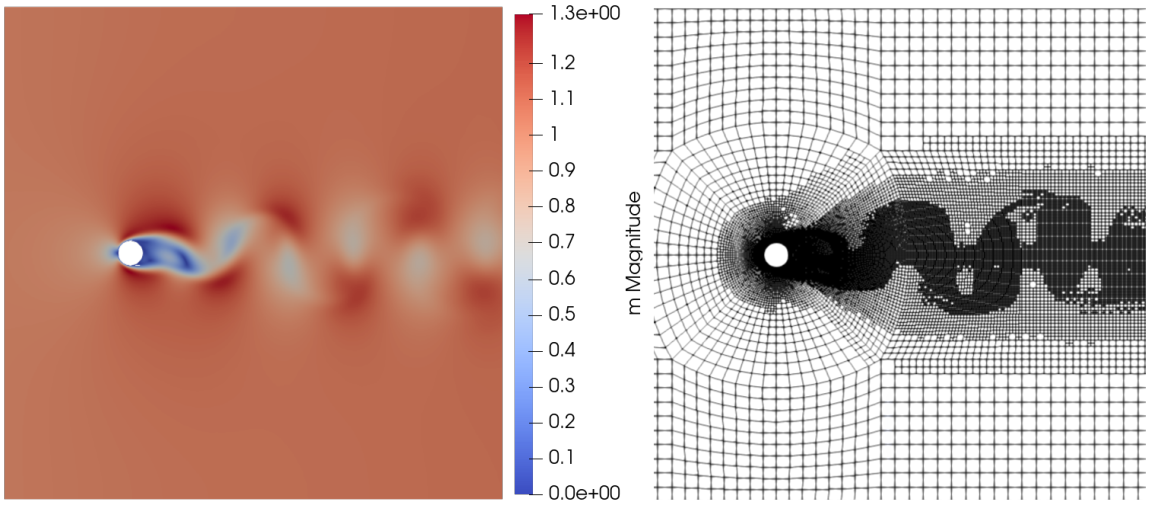
Figura 34 – Visualizações do resultado para o problema do Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro com $Re = 100$.



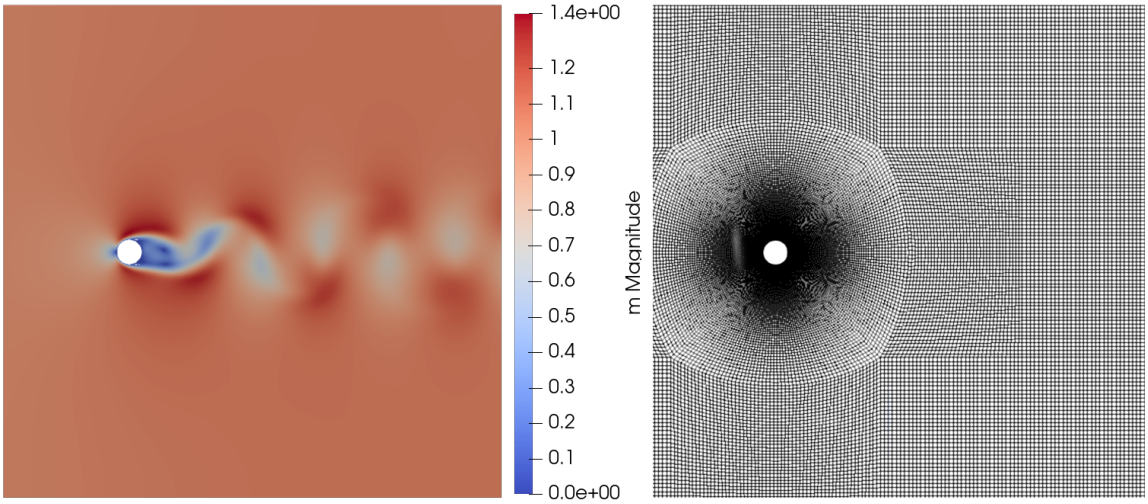
(a) Solução para $l_{max} = 1$ em $\|\mathbf{u}\|$ e malha adaptativa final com 7.668 elementos.



(b) Solução para $l_{max} = 2$ em $\|\mathbf{u}\|$ e malha adaptativa final com 20.535 elementos.



(c) Solução para $l_{max} = 3$ em $\|\mathbf{u}\|$ e malha adaptativa final com 49.221 elementos.



(d) Solução em $\|\mathbf{u}\|$ e malha fixa com 48.767 elementos.

esteira no contorno do cilindro.

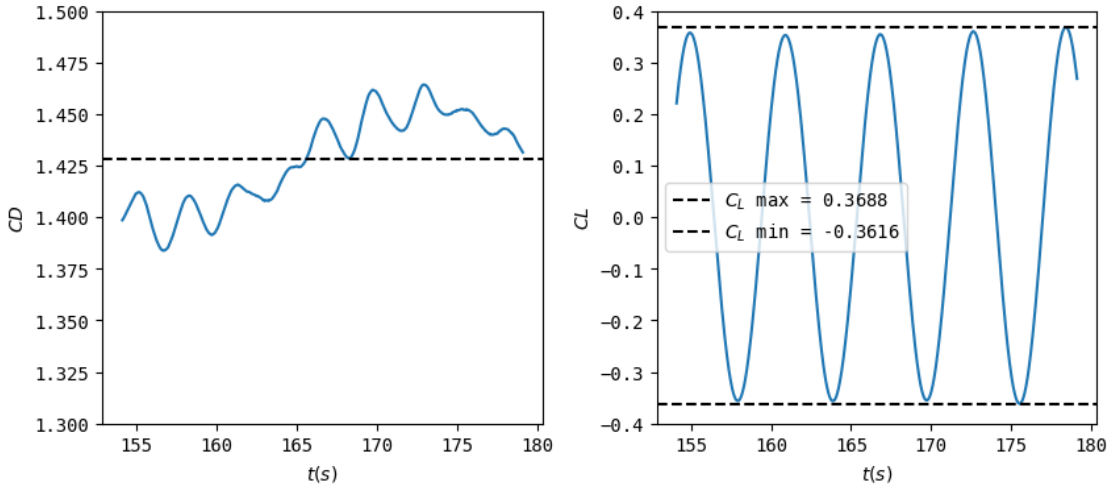
Os resultados comparativos para o escoamento compressível ao redor do cilindro a $Re = 100$ são sintetizados na Tabela 7, na qual a metodologia Auto AMR é confrontada com a simulação em malha fixa e com as referências numéricas de Lomtev, Quillen e Karniadakis (1998) e Burbeau e Sagaut (2002).

O trabalho de Lomtev, Quillen e Karniadakis (1998) emprega uma formulação mista Espectral/hp baseada no método Galerkin Descontínuo (DG), utilizando uma malha inicial de 462 elementos triangulares acoplada a polinômios de aproximação de sétima ordem. Por sua vez, Burbeau e Sagaut (2002) utilizam uma abordagem DG para diferentes graus de discretização espacial. Para fins de comparação neste trabalho, selecionaram-se os resultados da primeira ordem polinomial ($\mathbb{P}_1$) para malhas de diferentes tamanhos, as quais são classificadas como: Grossa, a que tem 2.942 elementos triangulares e 30 elementos no contorno do cilindro. Média, com 2.942 elementos triangulares e 34 elementos no contorno do cilindro. Fina, com 7.478 elementos triangulares e 46 elementos no contorno do cilindro.

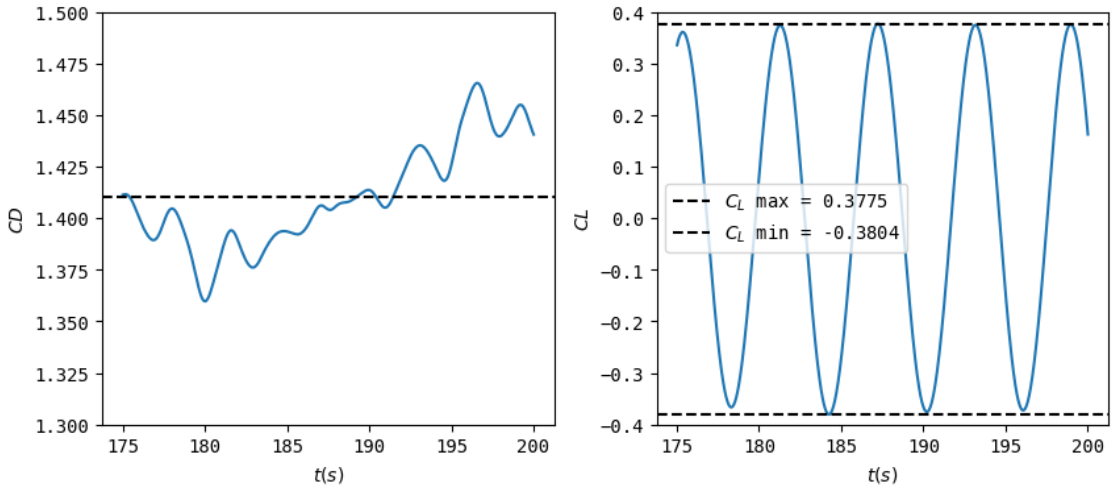
A análise comparativa demonstra que o Auto AMR obtém coeficientes aerodinâmicos (C_D e C_L) e parâmetros dinâmicos (período e número de Strouhal) em concordância com a literatura. Observa-se que o coeficiente de arrasto (C_D) exibe a mesma tendência de elevação com o incremento do nível de refinamento (l_{max}) reportado por Burbeau e Sagaut (2002). Em relação ao coeficiente de sustentação (C_L), os valores obtidos pela metodologia proposta alinham-se mais aos resultados de Burbeau e Sagaut (2002) para as malhas Média e Fina devido a maior proximidade com os valores de h_{min} alcançados pelo Auto AMR, que exibe uma pequena variação na segunda casa decimal, assim como as malhas Média e Grossa de Burbeau e Sagaut (2002), mas mesmo assim concordando com a tendência de leve elevação com o incremento do nível de refinamento.

Em relação ao número de Strouhal para as simulações com o Auto AMR, é observada

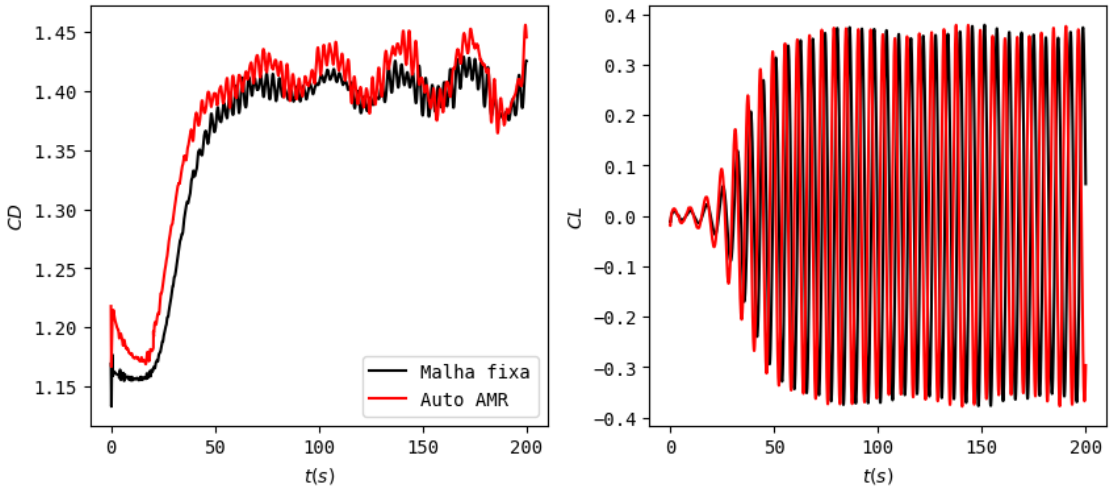
Figura 35 - Evolução dos resultados de C_D e C_L para o problema do Escoamento Compressível ao Redor do Cilindro.



(a) Coeficiente de arrasto e sustentação com o Auto AMR para $l_{max} = 3$.



(b) Coeficiente de arrasto e sustentação com a malha fixa.



(c) Coeficiente de arrasto e sustentação em todo o período. Nota-se que a amplitude da oscilação secundária cresce com o tempo.

uma tendência de elevação com o incremento do nível de refinamento, que é o oposto do reportado por Burbeau e Sagaut (2002) consideradas as três malhas. Como o número de Strouhal é uma medida do fluxo oscilatório (WHITE, 2015), acreditamos que a interferência construtiva nas oscilações principais de C_D e C_L causada pelas ondas acústicas refletidas pelas paredes do domínio seja responsável pela tendência de subida, visto que há um aumento da interferência diretamente proporcional a progressão temporal do problema, como pode ser visto na Figura 35c.

Também observamos que a simulação em malha fixa apresenta seus coeficientes com valores consideravelmente elevados em comparação ao Auto AMR e soluções de referência mesmo tendo um tamanho de elemento entre os obtidos com $l_{max} = 1$ e $l_{max} = 2$. Como foram observadas interferências acústicas de maior magnitude para essa simulação, devido ao fato de toda a malha estar mais refinada, e consequentemente facilitando a resolução das ondas acústicas, o efeito descrito dessas ondas maximizou os valores obtidos além do esperado.

Método	C_D	C_L	Período	Strouhal	h_{min}
Lomtev et al. (1998)	1.37	0.67	6.06	0.165	-
Burbeau e Sagaut (2002) Grossa	1.23	0.64	5.64	0.177	$1{,}05 \times 10^{-1}$
Burbeau e Sagaut (2002) Média	1.27	0.71	5.60	0.178	$9{,}24 \times 10^{-2}$
Burbeau e Sagaut (2002) Fina	1.38	0.74	5.85	0.171	$6{,}83 \times 10^{-2}$
Auto AMR ($l_{max} = 1$)	1.38	0.72	5.97	0.168	$2{,}33 \times 10^{-2}$
Auto AMR ($l_{max} = 2$)	1.40	0.75	5.96	0.168	$1{,}15 \times 10^{-2}$
Auto AMR ($l_{max} = 3$)	1.43	0.73	5.78	0.173	$5{,}70 \times 10^{-3}$
Malha Fixa	1.41	0.76	5.83	0.172	$1{,}31 \times 10^{-2}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

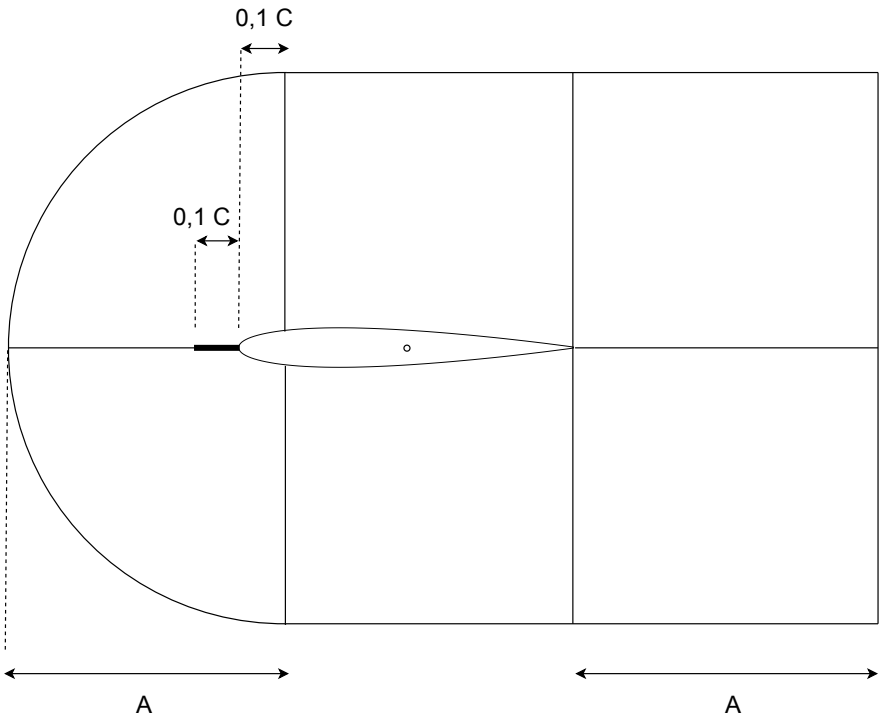
Tabela 7 – Comparativo com dados de referência para o problema do escoamento ao redor do cilindro compressível em $R_e = 100$

6.3 Fluxo Supersônico no Aerofólio NACA 0012

O problema consiste na simulação de um escoamento laminar a Mach 6 em torno de um aerofólio NACA 0012. Proposto originalmente por Aliabadi, Ray e Tezduyar (1993), o caso foi empregado para comparar formulações numéricas das equações de Navier–Stokes baseadas em variáveis conservativas e de entropia. Para o presente estudo, consideram-se como referência os resultados obtidos com a abordagem em variáveis conservativas.

O domínio simulado é apresentado na Figura 36 e tem dimensões definidas pelo comprimento de corda C, que para esse caso é unitário, e por $A = 0{,}75$, resultando na área $-1{,}15 \leq x \leq 1{,}25$ por $-0{,}75 \leq y \leq 0{,}75$ onde a origem é posicionada no ponto médio da corda. As condições de contorno são definidas em três regiões. Na entrada, representada pela seção semicircular a esquerda, é imposto um perfil uniforme de velocidade a ângulo de

Figura 36 – Domínio usado para o aerofólio NACA 0012.



Fonte: Elaborada pelo autor

ataque zero, dado por $u = U_{max}$ e $v = 0$ com $U_{max} = 1{,}0$, além de $\rho = 1{,}0$ com a energia sendo obtida pela Equação (6.5) onde a pressão é dada por (6.6) por $M_0 = 6{,}0$ e $\gamma = 1.4$. No restante da fronteira dado pelas linhas de topo, base e a direita adota-se uma condição de Newmann homogênea. No aerofólio é definida uma condição de não deslizamento com $u = v = 0$ e Newmann homogênea para densidade e energia. O número de Reynolds desse problema é definido com base na velocidade característica de entrada U_{max} e na corda unitária do aerofólio. Dessa forma a definição do número de Reynolds é reduzida para

$$Re = \frac{U_{max}}{\mu}, \tag{6.9}$$

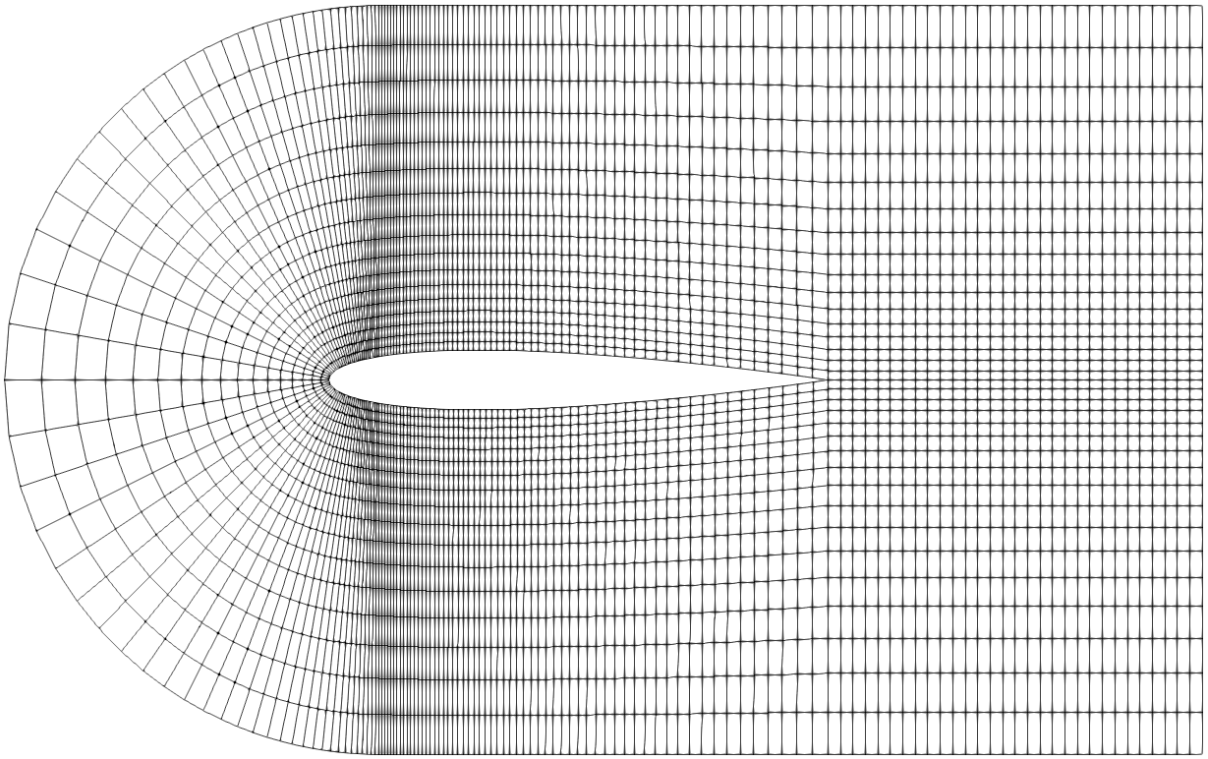
onde $\mu = 10^{-4}$ resulta em $Re = 10.000$.

As quantidades de interesse para esse problema são a densidade e número de Mach avaliados ao longo da linha horizontal destacada na Figura 36, com $-0{,}6 \leq x \leq -0{,}5$, que corresponde a uma linha de comprimento 0,1 até a ponta frontal (*leading edge*) do aerofólio.

As execuções do problema são feitas a partir de uma malha com 4.080 elementos desenvolvida com o software gmsh apresentada na Figura 37, no qual o Auto AMR é avaliado partindo do nível inicial 0 até os níveis 2, 3 e 4 onde cada nível máximo podendo chegar a 65.280, 261.120 e 1.044.480 elementos, respectivamente. Por último é realizada

uma simulação em malha fixa com 20.800 elementos sem a utilização de adaptatividade de malha. Para cada simulação foi usada a configuração quase-estacionária na qual a estratégia secundária para detectar o estado estacionário é avaliada se o tempo de simulação passar de $t = 5$, com o passo de tempo usado sendo $\Delta t = 0{,}01$.

Figura 37 – Malha com 4.080 elementos usada para o problema do Fluxo Supersônico no Aerofólio NACA 0012.



Fonte: Elaborada pelo autor

O parâmetro de avaliação da estimativa de erro do Auto AMR para esse problema é determinado levando em conta a densidade. A captura de choque foi configurada usando a estratégia de obtenção de δ da Equação (3.34), na qual se define $\beta = 1$, correspondendo à configuração de maior dissipação nas proximidades das descontinuidades. Também se utilizou nesse problema o Algoritmo 1 de modificação do contorno do aerofólio, baseado nas funções superior e inferior $f_s(x, y)$ que descrevem a espessura da geometria em função da posição ao longo da corda. Para determinar a raiz da derivada da distância mais próxima do ponto P ao contorno do aerofólio, emprega-se o método numérico da Falsa Posição.

Os campos de densidade e as respectivas malhas adaptativas são apresentadas na Figura 38. Para o nível máximo de refinamento $l_{max} = 2$ (Figura 38a), a frente de onda de choque exibe discretas oscilações numéricas (ruídos), mas é evidente que o Auto AMR conseguiu capturar corretamente a região de descontinuidade. Ao elevar o nível de

refinamento para $l_{max} = 3$ (Figura 38b) observa-se uma camada de choque mais nítida com a intensidade das oscilações numéricas reduzidas, onde a região de descontinuidade é também mais fina. E por fim, a simulação com $l_{max} = 4$ (Figura 38c) reproduz uma linha de transição consideravelmente mais fina onde a configuração da malha adaptativa segue de maneira semelhante aos níveis 2 e 3, com a onda de descontinuidade se deslocando mais em direção à saída à medida que o nível de refinamento cresce. Em relação à malha fixa de 20.800 elementos, da Figura 38d, as oscilações da frente de onda são similares às obtidas com $l_{max} = 2$, porém com um aspecto mais difuso, assim como a espessura também é maior. O que reflete o fato de que essa malha é a que tem o maior tamanho de elemento, com $h_{min} = 4{,}08 \times 10^{-3}$.

A validação quantitativa dos perfis de densidade e número de Mach, extraídos ao longo da linha horizontal destacada à frente do aerofólio (Figura 36, com coordenadas $y = 0$ e $-0.6 \leq x \leq -0.5$) , é apresentada na Figura 39, na qual os resultados do Auto AMR são comparados com a solução de referência de Aliabadi, Ray e Tezduyar (1993) e com o caso de malha fixa. Na região pós-choque (adjacente ao bordo de ataque, de $-0.52 \leq x \leq -0.5$), a densidade obtida pelo Auto AMR aproxima-se progressivamente do resultado de referência conforme o nível de refinamento é elevado, ao passo que o número de Mach atinge o valor de referência em todas as configurações. Na zona de transição do choque, tanto a densidade quanto o número de Mach apresentam perfis com gradientes mais íngremes a partir de $l_{max} = 3$, evidenciando uma captura mais nítida da descontinuidade. Adicionalmente, observa-se uma discreta oscilação numérica no nível $l_{max} = 3$, a qual é totalmente eliminada com o avanço do refinamento para $l_{max} = 4$.

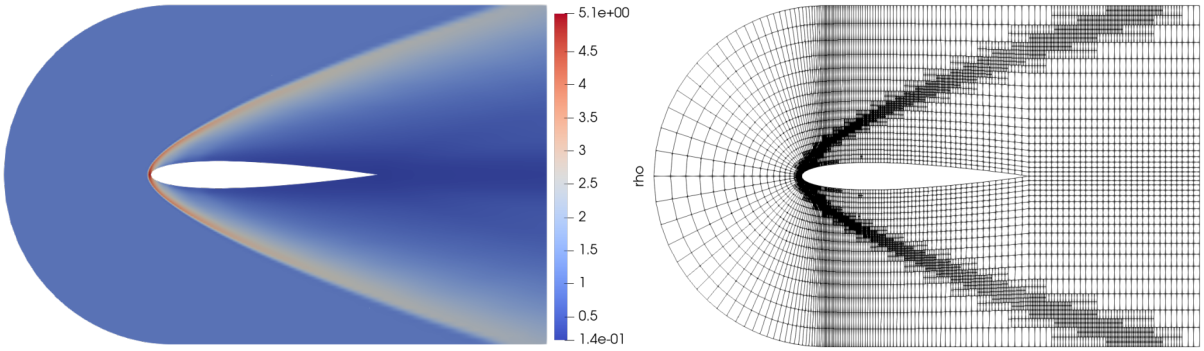
A Tabela 8 sintetiza a evolução do número total de elementos e do comprimento mínimo de elemento (h_{min}) em função do nível de refinamento. Como a estrutura física da onda de choque permanece inalterada, reduzindo-se apenas a sua espessura numérica proporcionalmente ao decréscimo de h_{min}, a fração de elementos efetivamente utilizados diminui progressivamente com o aumento de l_{max}.

Tabela 8 – Comparativo do menor tamanho de elemento, número final de elementos e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o fluxo supersônico no aerofólio NACA 0012.

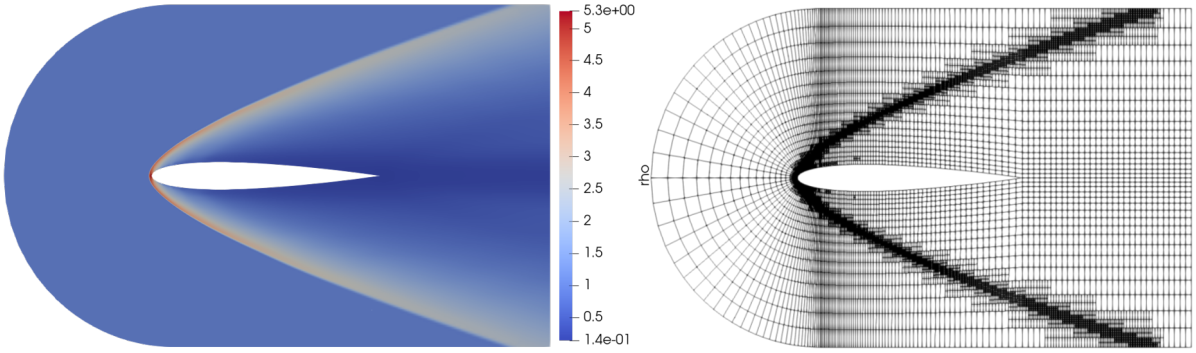
Nível Máximo	h_{min}	Número de Elementos	Porcentagem de Uso
2	$2{,}86 \times 10^{-3}$	10.218	15%
3	$1{,}42 \times 10^{-3}$	18.597	7%
4	$7{,}22 \times 10^{-4}$	35.007	3%
Fixa	$4{,}08 \times 10^{-3}$	20.800	100%

Fonte: Elaborada pelo autor.

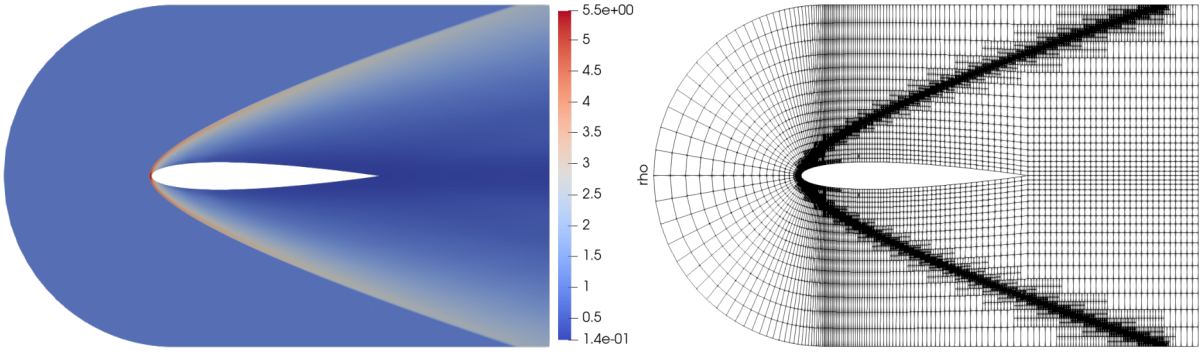
Figura 38 – Soluções para a densidade e malha adaptativa do último passo de tempo para o problema do fluxo supersônico no aerofólio NACA 0012.



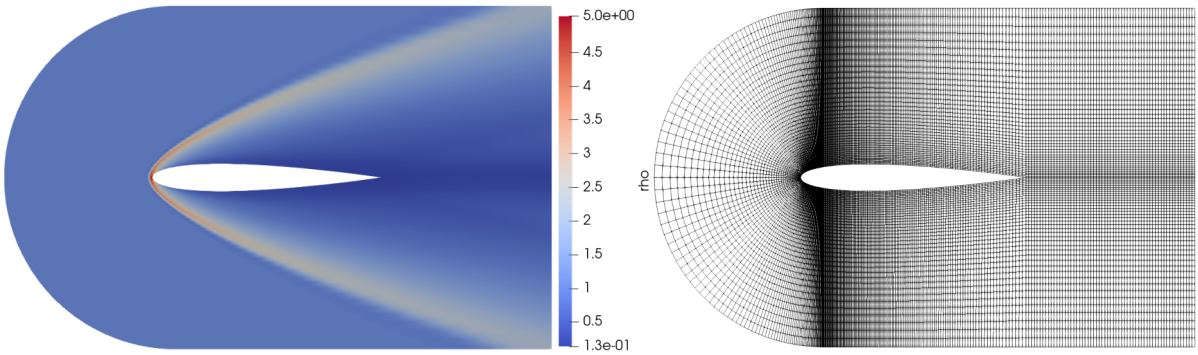
(a) Solução e malha adaptativa com 10.218 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 2.



(b) Solução e malha adaptativa com 18.597 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 3

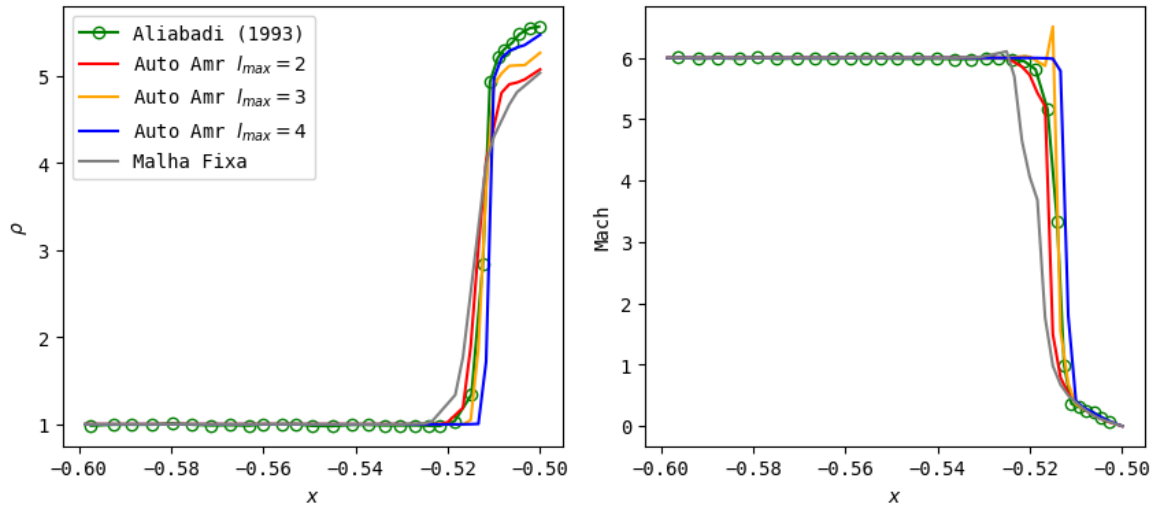


(c) Solução e malha adaptativa com 35.007 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 4



(d) Solução e malha fixa com 20.800 elementos.

Figura 39 – Resultados comparativos para a densidade e Mach ao longo da linha horizontal ($y = 0$, $-0.6 \leq x \leq -0.5$) entre as execuções com Auto AMR, Malha Fixa e os resultados obtidos por Aliabadi, Ray e Tezduyar (1993).



Fonte: Elaborada pelo autor

7 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA AS EQUAÇÕES DE EULER

Neste capítulo, aborda-se o regime invíscido, no qual as equações de Navier–Stokes compressíveis se reduzem às equações de Euler ao se desconsiderarem os efeitos viscosos. A formulação numérica é derivada diretamente do modelo geral previamente estabelecido. A exemplo do caso viscoso, realizam-se estudos de convergência e aplicações em problemas clássicos da literatura para avaliar o desempenho do algoritmo adaptativo na presença de fortes gradientes e descontinuidades. O código computacional correspondente a cada simulação está disponível em (LOPES, 2026).

7.1 Formulação Variacional Estabilizada

As equações de Euler descrevem escoamentos nos quais as forças viscosas são desprezíveis frente aos mecanismos advectivos, premissa válida em regimes caracterizados por elevados números de Reynolds. Na prática todo o fluido tem alguma viscosidade, à exceção do Hélio resfriado a temperaturas próximas ao zero absoluto, que assume um estado de zero viscosidade e atrito conhecido como superfluido (SCHMITT, 2015).

Formalmente, essa representação deriva da simplificação do modelo de Navier–Stokes definido na Equação (3.41). Ao se imporem os coeficientes de viscosidade $\mu = \lambda = 0$, o tensor viscoso relacionado ao termo difusivo (3.11) anula-se ($\mathbf{V} = \mathbf{0}$), reduzindo a formulação variacional (3.41) ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{3\mathbf{U}_h^{n+2}}{2\Delta t} \cdot \mathbf{W}_h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{W}_h \, d\mathbf{x} \\ + \int_\Omega \mathcal{R} \cdot \boldsymbol{\tau} \left(\mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{W}_h}{\partial x_i} \right) \, d\mathbf{x} \\ + \int_\Omega \delta \left(\nabla \mathbf{W}_h \cdot \nabla \mathbf{U}_h^{n+2} \right) \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \frac{4\mathbf{U}_h^{n+1} - \mathbf{U}_h^n}{2\Delta t} \cdot \mathbf{W}_h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{G}_h \cdot \mathbf{W}_h \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde

$$\mathcal{R} = \frac{3\mathbf{U}_h^{n+2} - 4\mathbf{U}_h^{n+1} + \mathbf{U}_h^n}{2\Delta t} + \mathbf{A}_i(\mathbf{U}_h^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{U}_h^{n+2}}{\partial x_i}. \tag{7.2}$$

A ausência dos termos viscosos na Equação (7.1) dispensa o processo de integração por partes na formulação variacional, de modo que não emergem termos de superfície para a imposição direta de condições de contorno do tipo Neumann. Tal característica não representa uma limitação para este trabalho, visto que as fronteiras não submetidas a condições de Dirichlet requerem apenas condições de Neumann homogêneas, as quais são satisfeitas de forma implícita pela própria formulação. Caso a imposição de condições de Neumann não homogêneas fosse necessária, esta poderia ser realizada mediante a integração por partes do termo advectivo ou pelo emprego de fluxos numéricos de contorno. Os termos remanescentes da equação preservam as definições estabelecidas anteriormente.

7.2 Estudo de Convergência - Vórtice 2D em Fluxo Isentrópico

O caso do vórtice isentrópico bidimensional representa uma solução analítica para as equações de Euler compressíveis (BUI-THANH, 2015). Conforme a formulação de Yee, Sandham e Djomehri (1999), o escoamento é definido como uma perturbação suave convectada sobre um estado uniforme de referência, cujas variáveis são dadas por:

$$u = 1 - \frac{y - y_0}{2\pi}\beta e^{(1-R^2)}, \tag{7.3}$$

$$v = \frac{x - t - x_0}{2\pi}\beta e^{(1-R^2)}, \tag{7.4}$$

$$\rho = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{16\gamma\pi^2}\beta^2 e^{2(1-R^2)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \tag{7.5}$$

$$p = \rho^\gamma, \tag{7.6}$$

onde $R^2 = (x - t - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $x_0 = 5$, $y_0 = 0$, $\gamma = 1{,}4$ e $\beta = 5$. O vetor fonte para esse problema é $\mathbf{G} = \mathbf{0}$.

O domínio computacional consiste no quadrado $\Omega = [3{,}5; 5{,}5] \times [-1, 1]$, no qual condições de contorno de Dirichlet são prescritas em toda a sua fronteira com base na solução exata. A condição inicial é igualmente definida a partir da solução analítica. Visto tratar-se de um escoamento suave e livre de descontinuidades, os termos de estabilização SUPG e de captura de choque não foram empregados.

O primeiro resultado apresentado para este problema é o teste de convergência do método. Para execução foram considerados $\mu = 2 \times 10^{-4}$, $\Delta t = h/1.000$ e $T = 0{,}05$. Na Tabela 9 são mostrados os resultados para as variáveis conservativas em malhas compostas por 16, 64, 256, 1.024 e 4.096 elementos. Também é adotado $\mathbf{m} = \rho\mathbf{u}$ correspondendo ao vetor de momento linear. Para cada variável, apresentamos o erro na norma L_2 (coluna à esquerda) e a respectiva taxa de convergência (coluna à direita). É possível observar que os resultados para o momento convergem para a ordem esperada de 2, resultado semelhante para a densidade e energia que se aproximam de 2 consistentemente ao se aumentar o número de elementos, o que demonstra a convergência de segunda ordem para a discretização espacial e temporal empregada.

A Figura 40 apresenta os perfis unidimensionais ao longo do eixo x ($y = 0$) referentes à evolução temporal da densidade e das componentes da quantidade de movimento em x e y até o instante $t = 1{,}4$. Observa-se uma excelente concordância entre os resultados numéricos e a solução exata, com as curvas para o momento em x e densidade apresentando uma pequena oscilação, mas mantendo uma forte concordância com a solução exata.

7.3 Choque Oblíquo

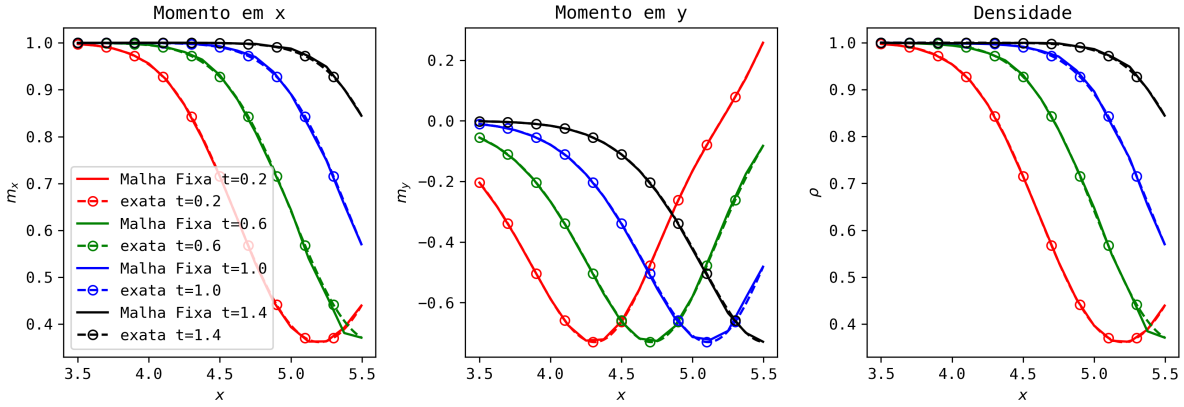
Este problema consiste no escoamento invíscido e compressível de um fluido a Mach 2, cujo vetor velocidade apresenta uma inclinação de $-10°$ em relação à parede inferior,

Tabela 9 – Estudo de convergência para o problema de Euler Compressível

Nº Elem.	$\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_h\|_{L^2}$	**Ordem**	$\|\rho-\rho_h\|_{L^2}$	**Ordem**	$\|E-E_h\|_{L^2}$	**Ordem**
16	$1{,}063\times10^{-1}$	-	$6{,}393\times10^{-2}$	-	$2{,}832\times10^{-1}$	-
64	$2{,}720\times10^{-2}$	1,97	$1{,}590\times10^{-2}$	2,01	$7{,}158\times10^{-2}$	1,98
256	$6{,}755\times10^{-3}$	2,01	$3{,}901\times10^{-3}$	2,03	$1{,}767\times10^{-2}$	2,02
1.024	$1{,}660\times10^{-3}$	2,01	$9{,}586\times10^{-4}$	2,02	$4{,}340\times10^{-3}$	2,03
4.096	$4{,}097\times10^{-4}$	1,98	$2{,}387\times10^{-4}$	2,01	$1{,}079\times10^{-3}$	2,01

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – Resultados no eixo-x nos tempos $t = 0{,}2s$, $t = 0{,}6s$, $t = 1{,}0s$ e $t = 1{,}4s$.



Fonte: Elaborada pelo autor

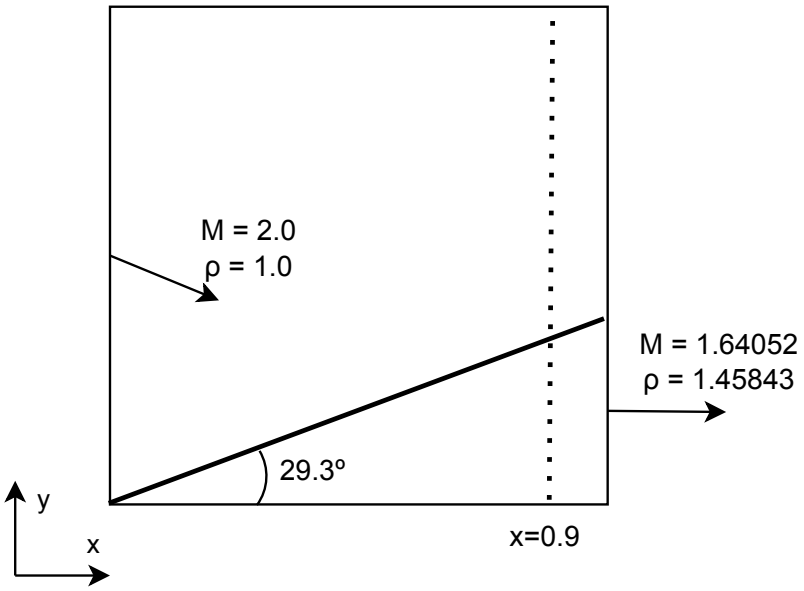
conforme ilustrado na Figura 41. Essa deflexão origina uma onda de choque oblíqua com ângulo de inclinação de 29,3° em relação à horizontal, estabelecendo, a jusante do choque, um escoamento com número de Mach igual a 1,64052 (CATABRIGA; COUTINHO, 2002).

O domínio computacional consiste em um quadrado unitário $\Omega = [0,1]^2$. Condições de contorno de Dirichlet são prescritas nas fronteiras de entrada (esquerda) e superior (topo) com os valores do estado a montante: $u = \cos(\omega)$, $v = -\sin(\omega)$ (sendo $\omega = 10\pi/180\,\text{rad}$), densidade $\rho = 1$ e pressão $p = 0{,}17857$, sendo a energia total obtida pela equação de estado (2.16). Na região a jusante (pós-choque), os valores analíticos de referência correspondem a $\rho = 1{,}45843$, $u = 0{,}88731$, $v = 0$ e $p = 0{,}30475$.

O perfil descontínuo de densidade resultante dessa transição (de $\rho = 1$ para $\rho = 1{,}45843$) é adotado como solução de referência para a validação da metodologia empregada. A condição inicial é estabelecida atribuindo-se o estado físico a montante a todo o domínio numérico.

A quantidade de interesse para esse problema é o valor da densidade ao longo da linha vertical em $x = 0.9$ como mostrado na Figura 41. Esses valores são comparados com

Figura 41 – Domínio quadrado unitário para o problema do choque oblíquo. A linha mais grossa representa a barreira de choque e a linha pontilhada a posição do eixo de onde os dados de comparação são obtidos.



Fonte: Elaborada pelo autor

a solução exata e os valores apresentados por Catabriga e Coutinho (2002).

As execuções do problema foram feitas com captura de choque usando a estratégia da média simples dos valores de β (3.33). O passo de tempo é definido como $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ e executado até atingir o regime quase-estacionário partindo de uma malha com 400 elementos no nível 0 aos níveis 2, 3 e 4 com cada nível máximo podendo chegar a 6.400, 25.600 e 102.400 elementos, respectivamente. Para esse problema o Auto AMR foi configurado para fazer a estimativa de erro com base no valor da densidade.

Os campos de densidade e as respectivas malhas adaptativas geradas pelo algoritmo Auto AMR são apresentados na Figura 42. Para o nível máximo de refinamento $l_{max} = 2$ (Figura 42a), a frente da onda de choque exibe discretas oscilações numéricas (ruídos), embora a estrutura de malha evidencie que o algoritmo rastreou corretamente a zona de descontinuidade. Ao elevar o refinamento para $l_{max} = 3$ (Figura 42b), observa-se uma camada de choque significativamente mais nítida e isenta de flutuações visíveis. Nesse cenário, a faixa correspondente aos elementos mais refinados mostra-se mais estreita e delimitada do que a obtida com $l_{max} = 2$. Por fim, a simulação com $l_{max} = 4$ reproduz uma linha de transição consideravelmente mais fina para a descontinuidade, ao passo que a distribuição de elementos da malha adaptativa mantém-se qualitativamente semelhante à configuração observada para $l_{max} = 3$. Em relação a malha fixa de 1.600 elementos, da

Figura 42d, as oscilações da frente de onda de choque são maiores do que as obtidas para $l_{max} = 2$ e também a sua espessura, dado que essa malha é a que tem o maior valor de comprimento mínimo de elemento, com $h_{min} = 2{,}50 \times 10^{-2}$.

A Tabela 10 sintetiza a evolução do número total de elementos e do comprimento mínimo de elemento (h_{min}) em função do nível de refinamento. Como a estrutura física da onda de choque permanece inalterada, reduzindo-se apenas a sua espessura numérica proporcionalmente ao decréscimo de h_{min}, a fração de elementos efetivamente utilizados diminui progressivamente com o aumento de l_{max}.

Tabela 10 – Comparativo do menor tamanho de elemento, número final de elementos e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o problema do choque oblíquo.

Nível Máximo	h_{min}	Número de Elementos	Porcentagem de Uso
2	$1{,}77 \times 10^{-2}$	961	15,02%
3	$8{,}84 \times 10^{-3}$	1.714	6,70%
4	$4{,}42 \times 10^{-3}$	3.256	3,18%
Fixa	$2{,}50 \times 10^{-2}$	1.600	100,00%

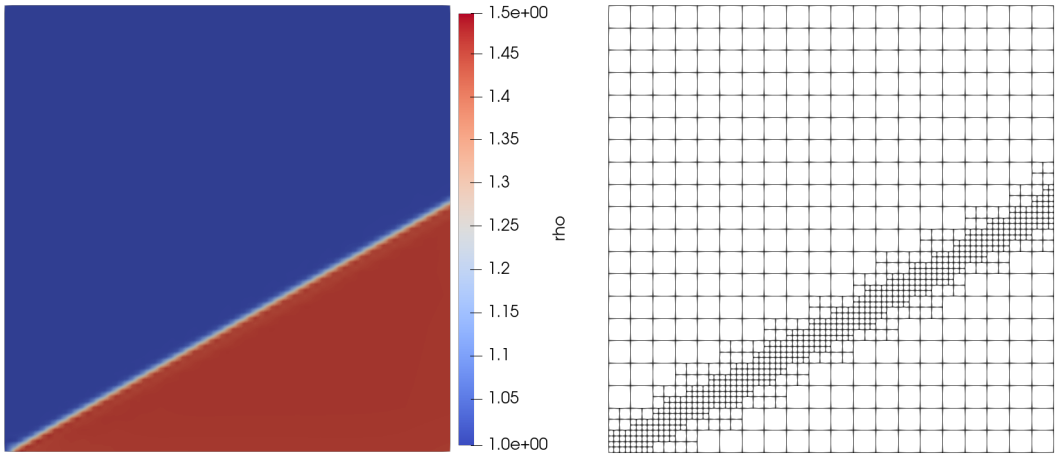
Fonte: Elaborada pelo autor.

A validação quantitativa do perfil de densidade extraído na seção vertical $x = 0{,}9$ é apresentada na Figura 43, na qual a metodologia proposta é confrontada com a solução exata, com a malha fixa e com o resultado numérico de Catabriga e Coutinho (2002) obtido com uma malha fixa de 800 elementos triangulares e $h_{min} = 5{,}00 \times 10^{-2}$. Os perfis obtidos pelo Auto AMR demonstram maior proximidade em relação à solução analítica quando comparados tanto à malha fixa quanto aos resultados de referência de Catabriga e Coutinho (2002). Como esperado, o incremento no nível de refinamento máximo e a consequente redução do parâmetro h_{min} promove a convergência para a solução exata, sendo o menor erro global verificado para a condição de $l_{max} = 4$.

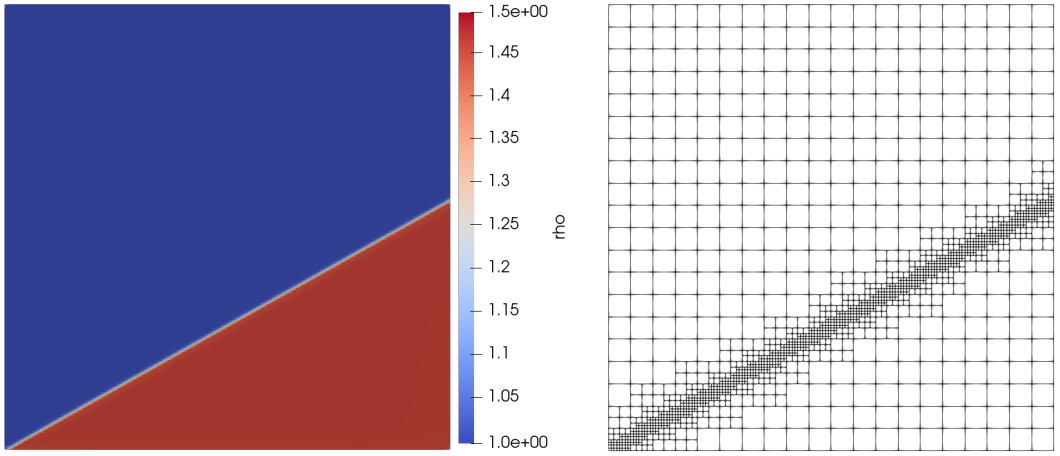
7.4 Choque Refletido

Este problema consiste na simulação da reflexão de uma onda de choque oblíqua em uma parede plana, caso clássico de validação para escoamentos supersônicos (CATABRIGA; COUTINHO, 2002; ALIABADI; RAY; TEZDUYAR, 1993). Modelado no domínio retangular $\Omega = [0, 4{,}1] \times [0, 1]$ (Figura 44), o escoamento é estabelecido pela interação entre um fluxo uniforme paralelo ao eixo x a Mach 2,9 (prescrito na entrada) e um fluxo inclinado a Mach 2,3781 proveniente da fronteira superior. Essa configuração origina três regiões uniformes distintas, delimitadas pela onda de choque incidente (29° em relação ao topo) e pela onda refletida na parede inferior (23,28° em relação à horizontal).

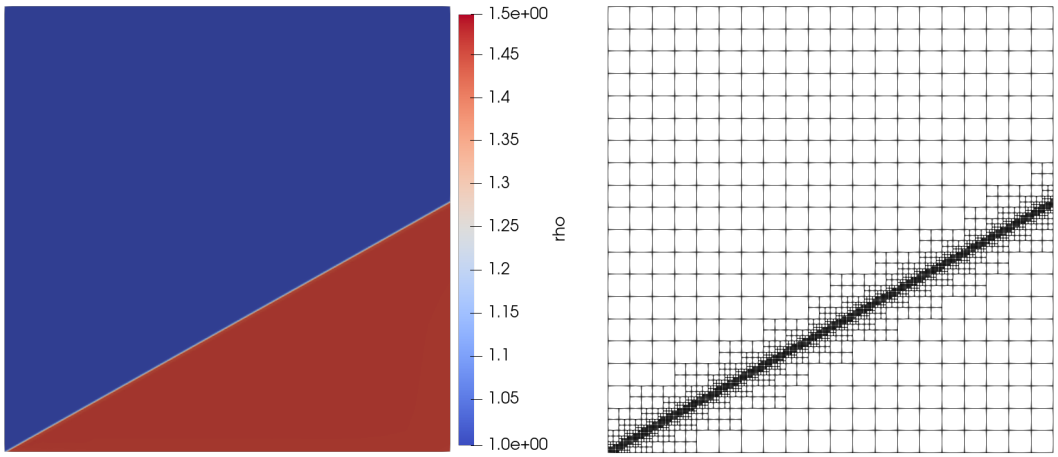
Figura 42 – Soluções para a densidade e malha adaptativa do último passo de tempo para o problema do choque oblíquo.



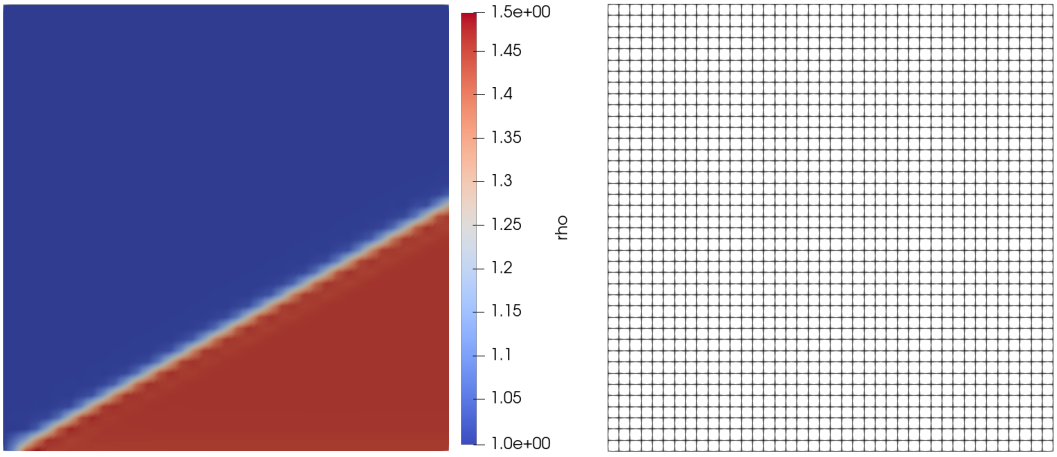
(a) Solução e malha adaptativa com 961 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 2.



(b) Solução e malha adaptativa com 1.723 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 3



(c) Solução e malha adaptativa com 3.259 elementos para o nível máximo de refinamento igual a 4



(d) Solução para a densidade sob uma malha fixa de 1.600 elementos para o problema do choque oblíquo.

As propriedades analíticas de cada região estão sintetizadas na Tabela 11, onde na fronteira esquerda (entrada), prescrevem-se condições de Dirichlet com as propriedades da Região 1 (R1), enquanto a fronteira superior (topo) recebe os valores da Região 2 (R2). Na parede inferior, impõe-se a condição de Dirichlet $v = 0$. Na fronteira direita (saída), aplica-se a condição de Neumann homogênea, na qual se espera obter a solução correspondente à Região 3 (R3). A condição inicial é estabelecida atribuindo-se o estado da Região 1 a todo o domínio computacional.

Tabela 11 – Valores de momento e pressão por região do domínio para o problema do choque refletido

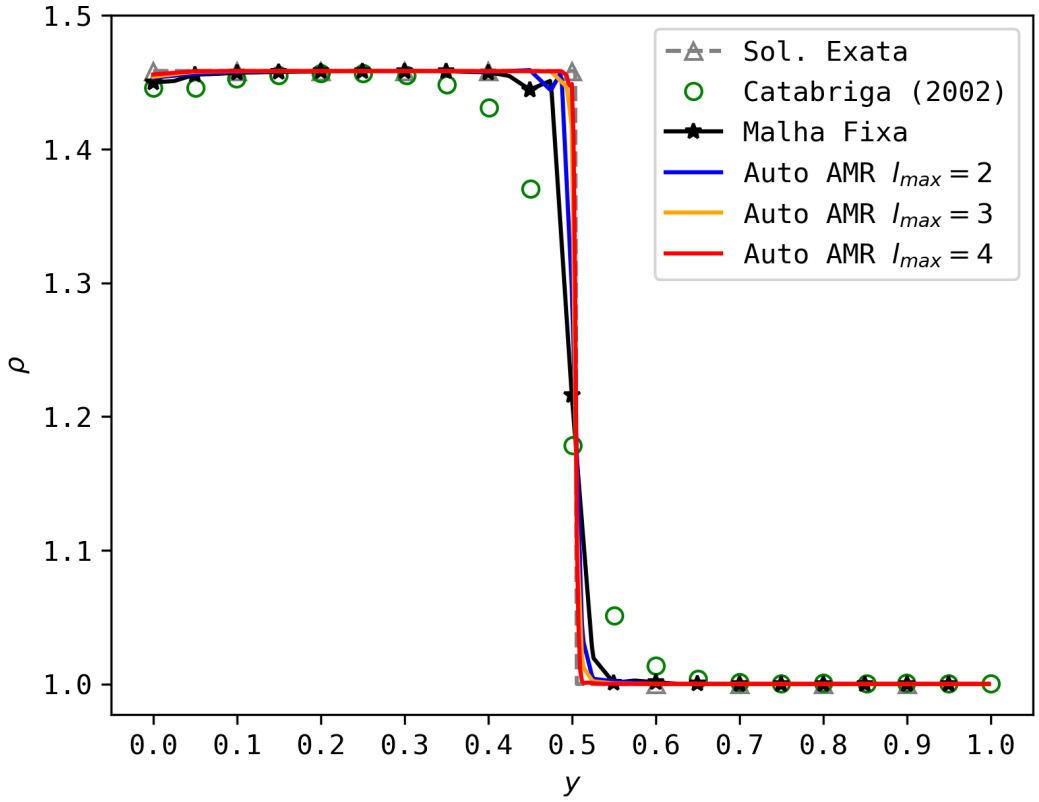
R1	R2	R3
$\rho = 1{,}0$	$\rho = 1{,}7$	$\rho = 2{,}68728$
$u = 2{,}9$	$u = 2{,}61934$	$u = 2{,}40140$
$v = 0$	$v = -0{,}50632$	$v = 0$
$p = 0{,}714286$	$p = 1{,}52819$	$p = 2{,}93407$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A quantidade de interesse primária consiste nos perfis das variáveis extraídos ao longo da linha horizontal $y = 0{,}25$ (Figura 44), cobrindo a extensão do domínio da entrada até a saída na Região R3.

O esquema computacional relativo a captura de choque e o passo de tempo foram os mesmos utilizados no problema do choque oblíquo (Seção 7.3). Em particular pra esse caso, A malha base (nível 3) parte de 256 elementos, enquanto os testes com refinamento adaptativo atingem os níveis $l_{max} = 5$, 6 ou 7, cujos limites máximos de elementos são 4096, 16384 e 65536, respectivamente. A indicação de erro do Auto AMR foi configurada tomando a densidade como variável de controle.

Figura 43 – Resultados comparativos para o problema do Choque Oblíquo entre a solução exata, uma malha com número fixo de elementos, Auto AMR e os dados obtidos por (CATABRIGA; COUTINHO, 2002).

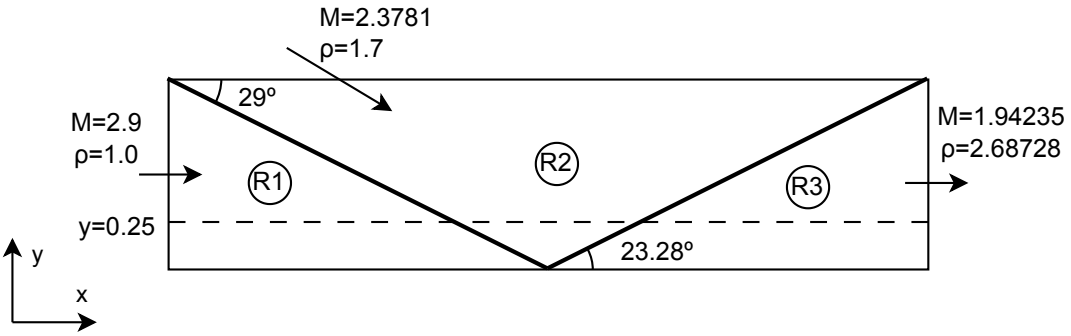


Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados obtidos com o Auto AMR são apresentados nas Figuras 45, 46 e 47, enquanto o resultado para a malha fixa é exibido na Figura 48. A primeira ilustra o campo de densidade e a malha adaptativa para o nível máximo $l_{max} = 5$, no qual o tamanho mínimo de elemento h equivale ao da malha fixa não adaptativa de 4096 elementos. Para esse nível de refinamento, verifica-se que as ondas de choque exibem discretas oscilações numéricas, comportamento análogo ao observado no caso de malha fixa (Figura 48a), porém com quase 3000 elementos a menos. Nota-se, contudo, que o algoritmo Auto AMR identifica e refina com precisão a região ao longo das descontinuidades.

Ao elevar o nível máximo de refinamento para $l_{max} = 6$, a captura da onda de choque torna-se significativamente mais nítida e isenta de flutuações visíveis. Nesse cenário, a faixa de refinamento da malha adaptativa desenvolve uma camada adicional de elementos mais refinados em relação ao nível anterior. Com $l_{max} = 7$, a resolução da descontinuidade é ainda superior, mantendo-se uma distribuição de elementos similar à do nível $l_{max} = 6$, porém com maior densidade de elementos de menor dimensão característica na região do choque.

Figura 44 – Domínio para o problema do choque refletido. A linha mais grossa representa a barreira de choque e a linha pontilhada a posição do eixo de onde os dados de comparação são obtidos.

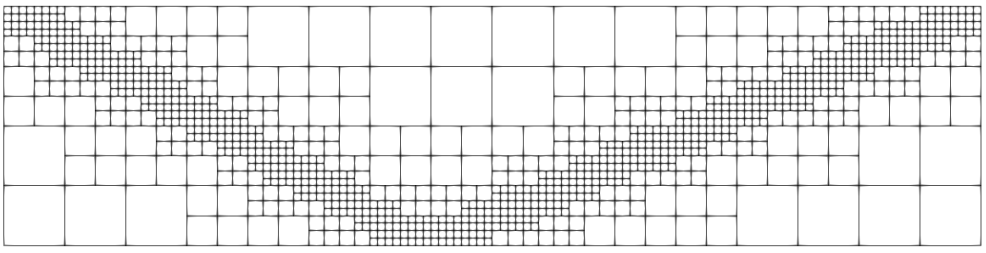


Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 45 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com $l_{max} = 5$. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha adaptativa com 1.039 elementos.



(a)



(b)

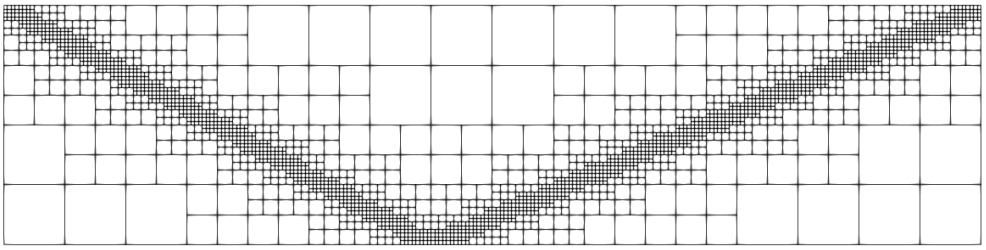
A Tabela 12 sintetiza a evolução do número total de elementos e do comprimento mínimo de elemento (h_{min}) em função do nível de refinamento. Como a estrutura física da onda de choque permanece inalterada, reduzindo-se apenas a sua espessura numérica proporcionalmente ao decréscimo de h_{min}, a fração de elementos efetivamente utilizados diminui progressivamente com o aumento de l_{max}.

A validação quantitativa do perfil de densidade extraído na seção vertical $y = 0{,}25$

Figura 46 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com $l_{max} = 6$. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha adaptativa com 2.257 elementos.



(a)

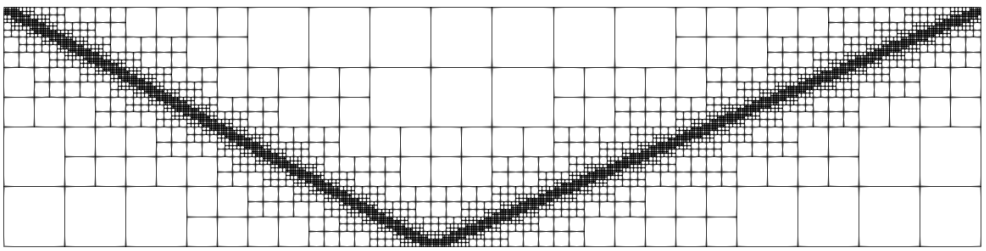


(b)

Figura 47 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com $l_{max} = 7$. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha adaptativa com 4.681 elementos.



(a)

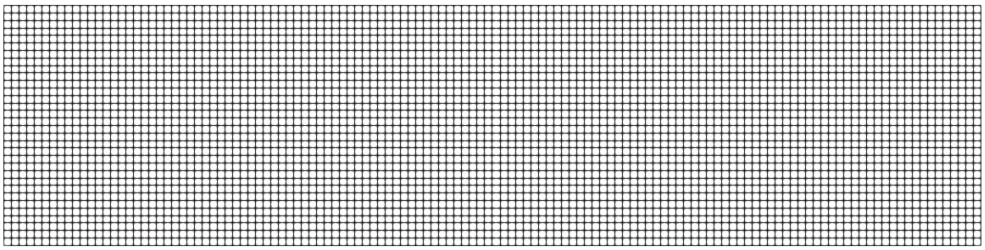


(b)

Figura 48 – Visualizações do resultado para o problema do choque refletido com malha fixa. Em (a) é apresentada a visualização da solução para a densidade. Em (b) é apresentada a visualização da malha fixa com 4.096 elementos.



(a)



(b)

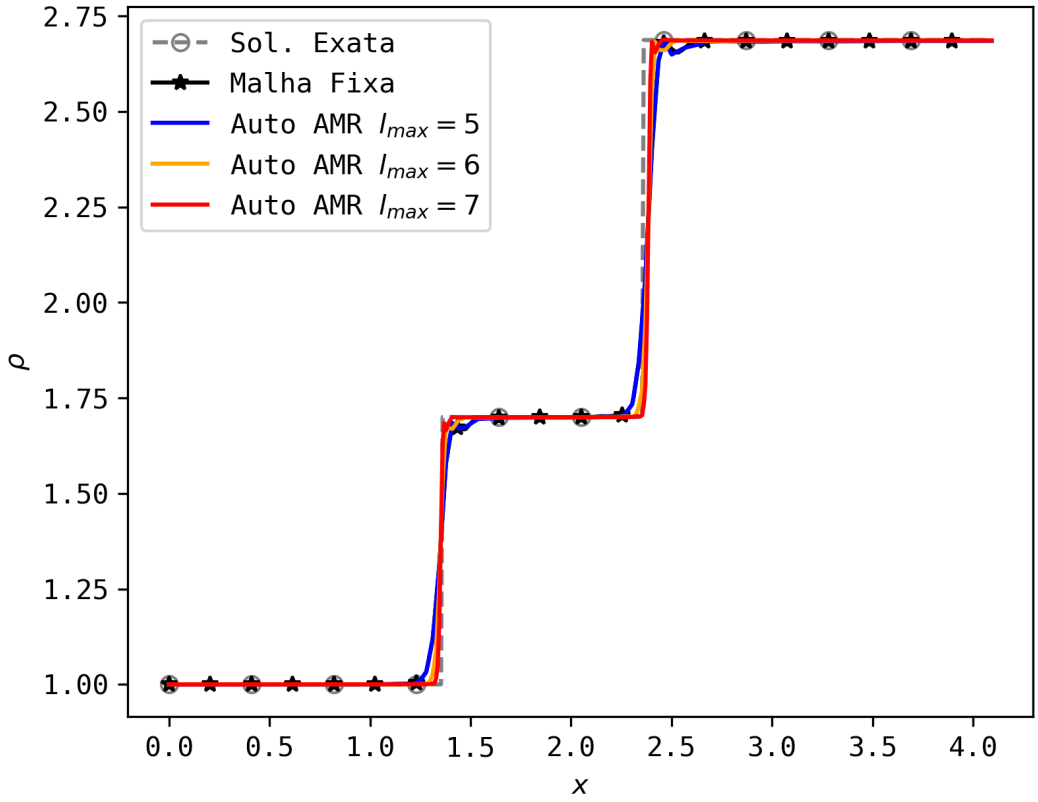
Tabela 12 – Comparativo do menor tamanho de elemento, número final de elementos e porcentagem de uso do total disponível de elementos para o problema do choque refletido.

Nível Máximo	h_{min}	Número de Elementos	Porcentagem de Uso
5	$4{,}47 \times 10^{-2}$	1.039	25,4%
6	$2{,}24 \times 10^{-2}$	2.257	13,8%
7	$1{,}12 \times 10^{-2}$	4.681	7,1%
Fixa	$4{,}47 \times 10^{-2}$	4.096	100%

Fonte: Elaborada pelo autor.

é apresentada na Figura 49, na qual a metodologia adaptativa é confrontada com a solução exata e com a malha fixa. Os perfis obtidos pelo Auto AMR demonstram maior proximidade em relação à solução analítica quando comparados a malha fixa. Como esperado, o incremento no nível de refinamento máximo e a consequente redução do parâmetro h_{min} promove a convergência para a solução exata, sendo o menor erro global verificado para a condição de $l_{max} = 7$. Para a simulação com $l_{max} = 5$, o perfil retornado pelo Auto AMR sobrepõe-se quase perfeitamente ao da malha fixa, ocultando-o no gráfico, comportamento condizente com o fato de ambas as discretizações compartilharem a mesma dimensão mínima de elemento (h_{min}).

Figura 49 – Resultados do problema do choque refletido no eixo $y = 0{,}25$ comparado a solução exata e a uma malha fixa com 4096 elementos e o resultado obtido pelo Auto AMR com 2296 elementos.



Fonte: Elaborada pelo autor

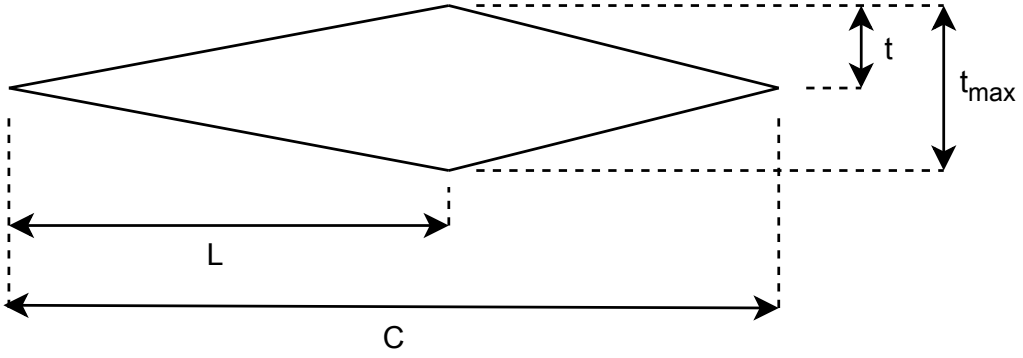
7.5 Fluxo Supersônico Em Um Aerofólio Diamante

Neste problema, analisamos o escoamento ao redor de um aerofólio em formato de diamante, no qual se desenvolve o padrão clássico de ondas de choque e leques de expansão. Selecionamos o perfil identificado como ótimo por Jernell e Center (1974) (Figura 50), cujas dimensões geométricas correspondem a $L = 0{,}6$, $C = 1{,}0$, $t = 0{,}036$ e $t_{\max} = 0{,}06$.

O domínio computacional, descrito na Figura 51, é delimitado por uma fronteira circular de raio $R = 15{,}0$, com a origem posicionada na interseção entre os vértices superior e inferior do perfil. Para o controle da discretização espacial, define-se uma região quadrada de lado $B = 4{,}0$ centralizada na origem, onde é aplicada a maior densidade de elementos (Figura 52). Adicionalmente, quatro subdomínios quadrados de lado $0{,}08C$ são posicionados nas extremidades do aerofólio, nos quais a malha é gerada de forma estruturada e com a máxima densidade de elementos.

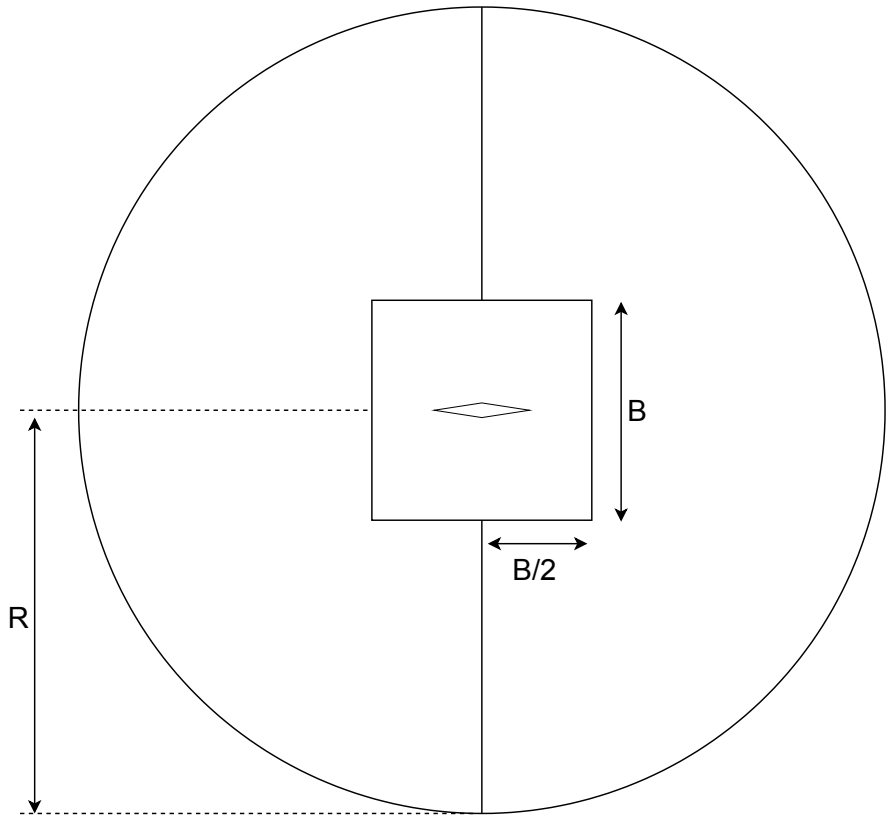
O contorno externo é definido em duas regiões semicirculares, onde a região a esquerda corresponde a entrada e é imposto um perfil uniforme de velocidade com um

Figura 50 – Perfil do aerofólio supersônico.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 51 – Domínio usado para o aerofólio supersônico.



Fonte: Elaborada pelo autor

ângulo de ataque α e $U_{max} = 1{,}0$ dado por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} U_{max}\cos(\omega) \\ U_{max}\sin(\omega) \end{pmatrix}, \tag{7.7}$$

onde

$$\omega = \frac{\alpha\pi}{180}. \tag{7.8}$$

Além disso, é imposto $\rho = 1{,}0$, energia obtida por (6.5) e a pressão dada por (6.6) com $M_0 = 4{,}63$ e $\gamma = 1.4$. No aerofólio é definida uma condição de não deslizamento com $u = v = 0$ e Newmann homogênea para densidade e energia. As quantidades de interesse avaliadas consistem nos coeficientes de sustentação (C_L) e de arrasto (C_D). Nas equações de Euler, o tensor de tensões viscosas $\mathbb{V}$ presente na Equação (6.7) é nulo ($\mu = \lambda = 0$). Com isso, a força aerodinâmica resultante simplifica-se para a integração do campo de pressões ao longo da superfície do perfil:

$$\mathbf{f} = \int_S (-p\mathbb{I})\mathbf{n}\ dS. \tag{7.9}$$

Como o vetor de força resultante $\mathbf{f} = (F_D, F_L)$ para esse caso precisa ser rotacionada, pois o referencial dela é o plano da velocidade imposto em (7.7), que precisa ser modificado para o referencial do aerofólio, dessa forma é aplicada uma rotação no sentido horário (visto que a velocidade é imposta no sentido anti-horário) dada pela equação

$$\begin{aligned} F'_D &= F_D \cos(\omega) + F_L \sin(\omega) \\ F'_L &= -F_D \sin(\omega) + F_L \cos(\omega), \end{aligned} \tag{7.10}$$

a qual converte o vetor de forças $\mathbf{f}$ para o referencial $\mathbf{f}'$ do aerofólio. Assim os valores F'_D, F'_L são aplicados a (5.20) e (5.21) retornam os coeficientes de arrasto e sustentação corretamente para qualquer ângulo de ataque α.

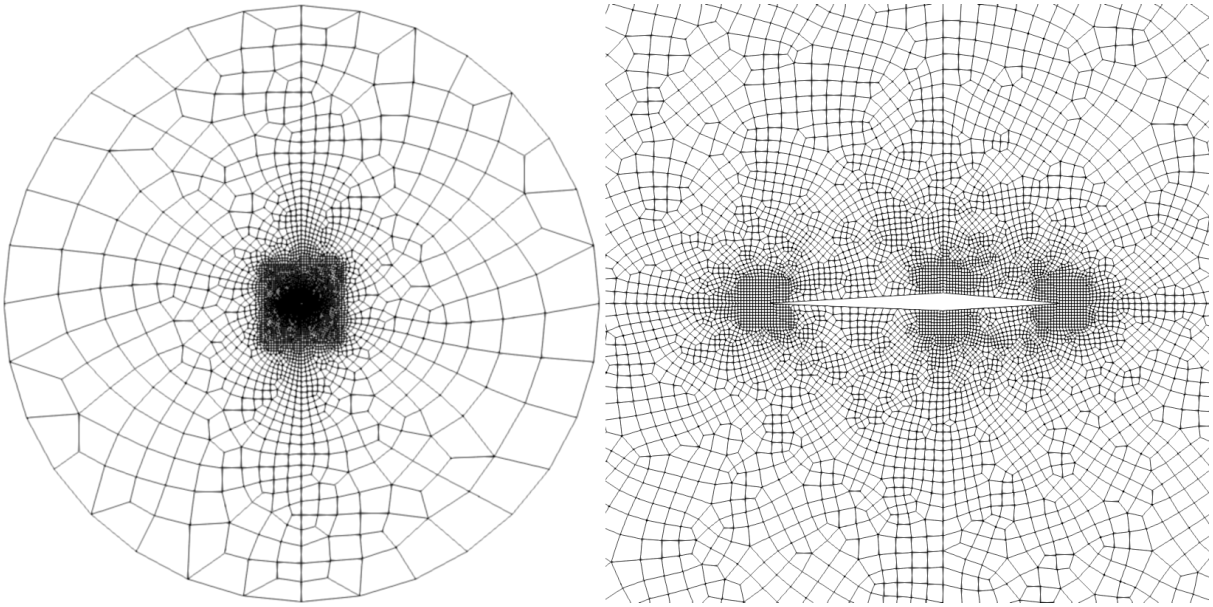
A simulação foi executada empregando o operador de captura de choque com a estratégia de obtenção de δ da Equação (3.34), adotando-se $\beta = 1$, valor que proporciona maior dissipação artificial na vizinhança das descontinuidades. O avanço temporal foi realizado com passo $\Delta t = 0{,}01$ até $t = 25$, partindo de uma malha base com 8.809 elementos no nível 0 e permitindo-se atingir até 563.776 elementos no nível de refinamento 3 ($l_{max} = 3$).

A malha foi gerada no software gmsh atribuindo um identificador de superfície física distinto à região quadrada ilustrada na Figura 51. Na biblioteca `deal.II`, esses marcadores são traduzidos como identificadores de material, os quais são utilizados para restringir a atuação do algoritmo Auto AMR exclusivamente à região quadrada que envolve o aerofólio. Na Figura 52 são exibidas a malha completa e o detalhe do aerofólio, mostrando as quatro regiões com maior densidade de elementos localizadas nas extremidades do aerofólio.

O escoamento foi analisado sob número de Mach igual a 4,63, executando-se simulações para os ângulos de ataque α de 0° a 7°. As mesmas configurações foram mantidas para os testes comparativos em malha fixa não adaptativa, constituída por 45.686 elementos.

Os resultados comparativos do Auto AMR e malha fixa são mostrados na Figura 53. Na Figura 53a, os resultados da densidade para o ângulo de ataque 0° e refinamento

Figura 52 – Malha com 8.809 elementos usada para o problema do Fluxo Supersônico Em Um Aerofólio Diamante. A direita é mostrado o detalhe da região próxima ao aerofólio, destacando as regiões mais refinadas ao redor das extremidades.



Fonte: Elaborada pelo autor

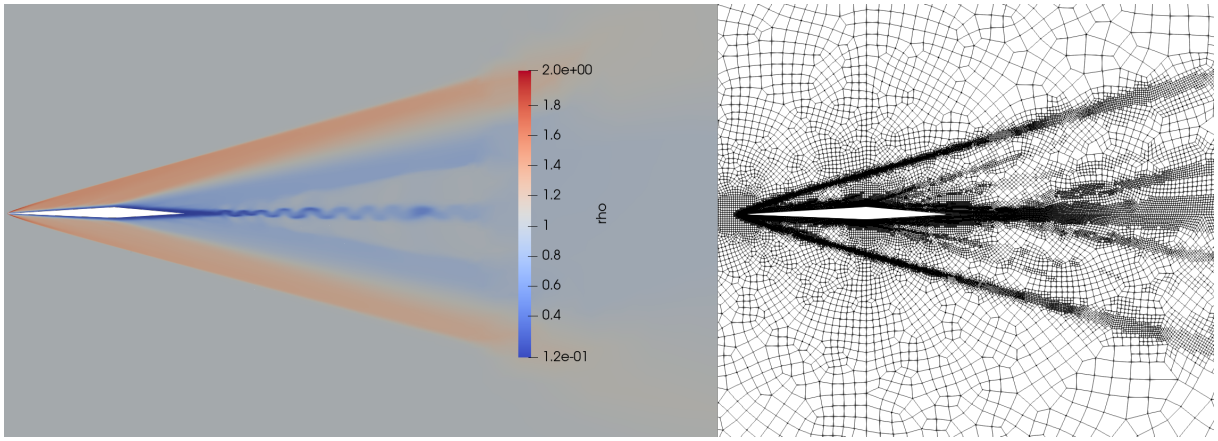
máximo $l_{max} = 3$, alcançam 46.762 elementos no último passo de tempo tendo o menor elemento atingido $h_{min} = 1{,}05 \times 10^{-3}$. Nesse resultado, podem ser vistas claramente duas ondas de choque relativas as faces frontais, conforme previsto nos cálculos teóricos apresentados no Apêndice A.3. O Auto AMR conseguiu identificar corretamente as regiões de choque frontais e traseiras além das regiões de expansão na região central concentrando o refinamento nessas regiões dentro dos limites impostos para a sua atuação.

A simulação com malha fixa (Figura 53b) de 45.686 elementos e tamanho mínimo $3{,}44 \times 10^{-3}$ mostra uma velocidade mais concentrada e menor resolução nos choques, com a oscilação na região de esteira (*wake*) não sendo capturada, com a região de choque também menos evidente do que a solução obtida pelo Auto AMR. A ausência da oscilação na região de esteira para a solução com malha fixa pode ser atribuída ao tamanho mínimo de elemento insuficiente para resolver os vórtices responsáveis por essa oscilação.

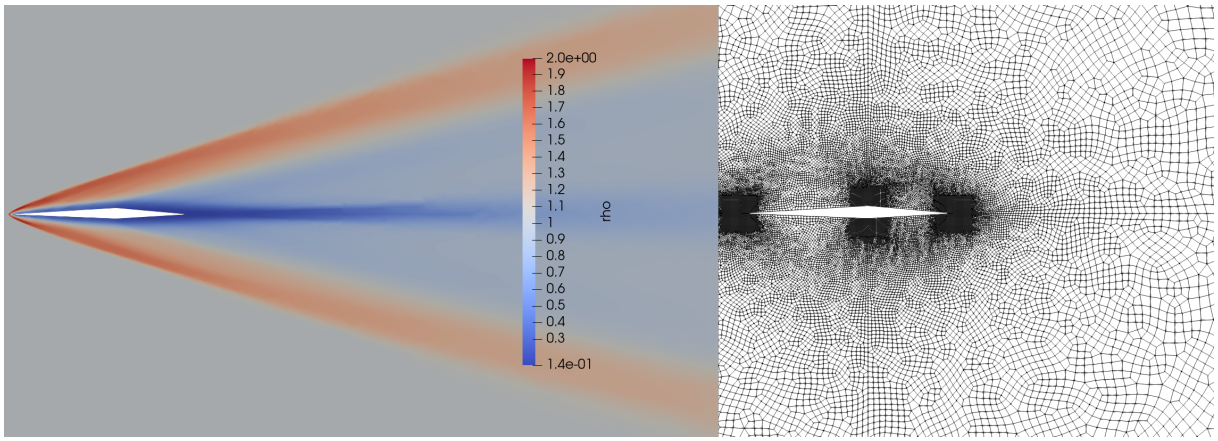
Na Figura 53c os resultados da densidade para o ângulo de ataque de 7° e refinamento máximo $l_{max} = 3$, alcançam 43.621 elementos no último passo de tempo tendo o menor elemento atingido $h_{min} = 1{,}09 \times 10^{-3}$. Assim como previsto nos cálculos teóricos (Apêndice A.3), como o ângulo de ataque para esse caso é maior que o ângulo interno da face frontal superior, temos que para essa face uma região de expansão onde a medida que se afasta da ponta frontal do aerofólio, a descontinuidade fica menos evidente, como pode ser visto pela diminuição de intensidade de refinamento na descontinuidade superior na

malha adaptativa. Já a onda de choque da face frontal inferior, bem como as ondas de choque e expansão restantes foram capturadas corretamente pelo Auto AMR, bem como a região de esteira. A simulação com malha fixa mostra um resultado similar para as ondas de choque e expansão ao caso para 0°, com as regiões de choque traseiras aparentes, mas de forma bem mais difusa que o obtido pelo Auto AMR.

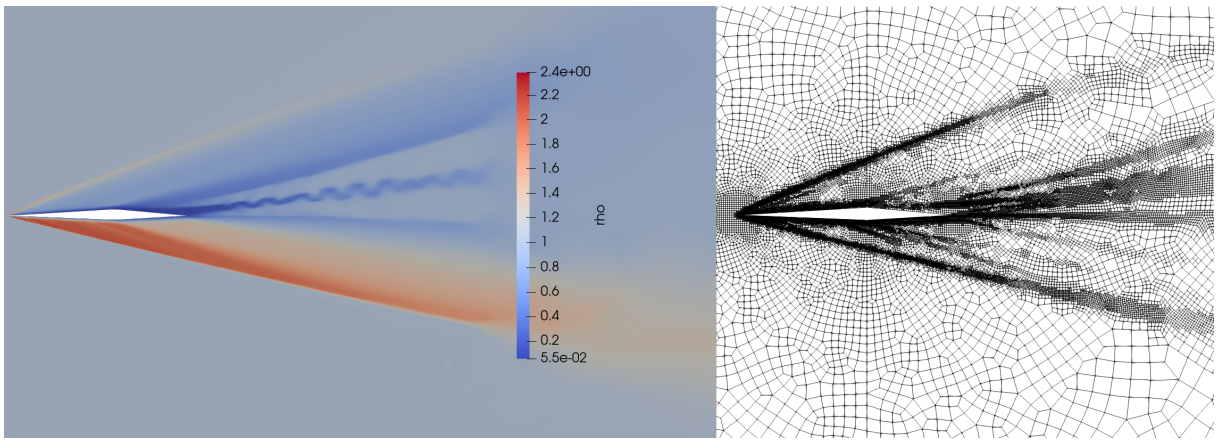
Figura 53 - Soluções na densidade e malhas do último passo de tempo para o problema do fluxo supersônico em um aerofólio diamante.



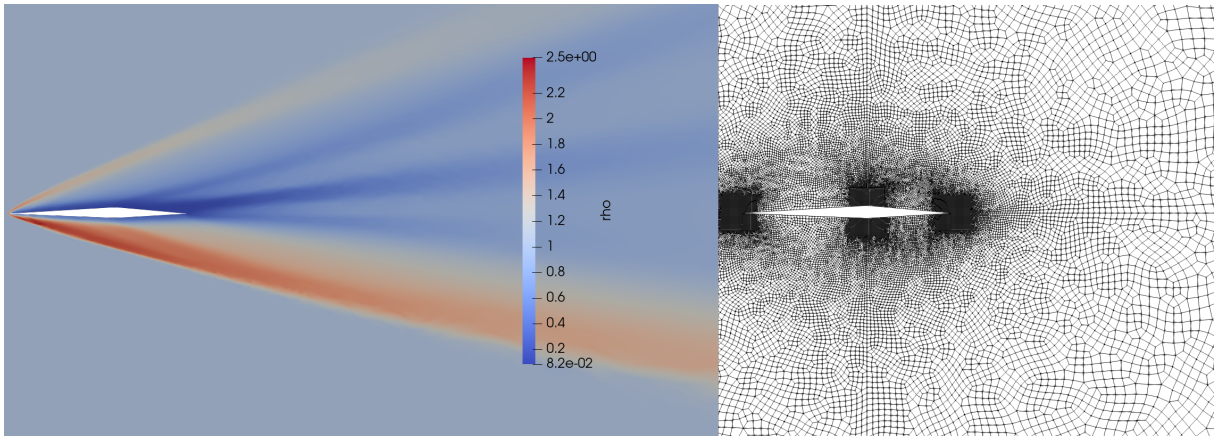
(a) Solução e última malha adaptativa para ângulo de ataque 0°



(b) Solução e malha fixa para ângulo de ataque 0°



(c) Solução e última malha adaptativa para ângulo de ataque 7°



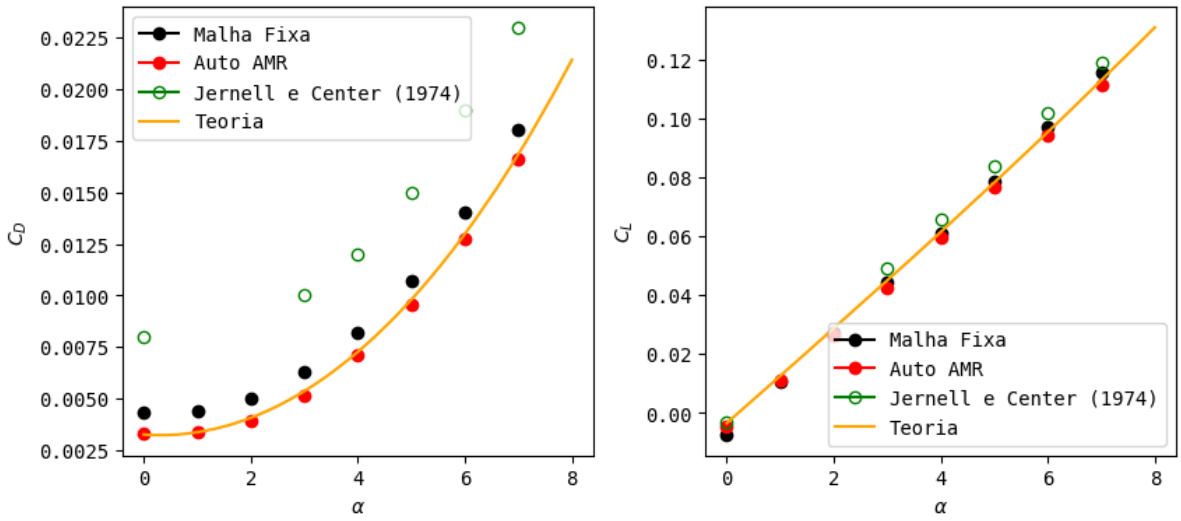
(d) Solução e malha fixa para ângulo de ataque 7°

A validação quantitativa dos coeficientes de arrasto e sustentação é apresentada na Figura 54, na qual a metodologia adaptativa é confrontada com a solução da teoria analítica de choque-expansão (VOS; FAROKHI, 2015), com os dados experimentais de laboratório encontrados em Jernell e Center (1974) e com a simulação em malha fixa não adaptativa. A curva analítica foi avaliada para ângulos de ataque no intervalo de 0° a 8° utilizando 200 pontos igualmente espaçados, cujos detalhes teóricos encontram-se no Apêndice A.3. Essa formulação prevê que a estrutura do escoamento na superfície frontal superior transiciona de uma onda de choque para um leque de expansão quando o ângulo de ataque ultrapassa a inclinação geométrica da face (aproximadamente 3,43°).

Na Figura 54, é possível observar que os coeficientes de arrasto (C_D) obtidos via Auto AMR apresentam boa concordância com a solução teórica analítica. Ambos os resultados encontram-se abaixo das medições experimentais, uma vez que a formulação invíscida adotada não contempla os efeitos viscosos e turbulentos presentes na camada limite. Conforme reportado por Jernell e Center (1974), mesmo utilizando formulações empíricas como a de Sommer e Short (1955) para incluir a contribuição viscosa, persistem desvios adicionais atribuídos a efeitos tridimensionais do ensaio experimental. Quanto aos resultados em malha fixa, constata-se uma superestimação do arrasto todos os ângulos simulados. Esse comportamento decorre da menor resolução espacial na região das descontinuidades, o que exige maior introdução de dissipação artificial pelo esquema de captura de choque.

Para o coeficiente de sustentação (C_L), nota-se também uma forte concordância entre a simulação adaptativa e a teoria de choque-expansão. Para essa grandeza, a discrepância em relação aos dados experimentais é consideravelmente menor, seguindo a mesma tendência de afastamento descrita por Jernell e Center (1974). A solução em malha fixa exibe menor concordância com o benchmark analítico, apresentando uma tendência progressiva de superestimar o valor de C_L à medida que o ângulo de ataque aumenta.

Figura 54 – Resultados comparativos para o problema do fluxo supersônico em um aerofólio diamante dos coeficiente de arrasto e sustentação com os dados experimentais obtidos por Jernell e Center (1974), Auto AMR, malha fixa e teoria de expansão de choque de formulação inviscida para Mach 4,63.



Fonte: Elaborada pelo autor

8 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e a validação do método de adaptatividade de malha Auto AMR, concebido a partir da função de distribuição de Pons e Ersoy (2019) e do estimador de erro a posteriori de Kelly et al. (1983). A principal contribuição da metodologia reside na eliminação de parâmetros arbitrários ajustados pelo usuário. Para conter a tendência ao refinamento ilimitado, introduziu-se uma função de penalização que pondera a fração de células ativas em relação à capacidade máxima da malha. Essa formulação estabeleceu um novo critério de refinamento cujos limites superior e inferior equilibram, de forma autônoma, a redução do erro e a eficiência computacional.

A fundamentação teórica abrangeu três regimes de escoamento baseados nas equações de Navier-Stokes e Euler. Para o regime incompressível, impôs-se o divergente nulo da velocidade, aplicando-se a estabilização PSPG (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986) para viabilizar aproximações de mesma ordem polinomial para velocidade e pressão. Para o regime compressível (sob a Hipótese de Stokes), aplicou-se a técnica SUPG acoplada ao termo de captura de choque $YZ\beta$ e ao operador temporal BDF2, complementado por um critério de parada baseado na estagnação do resíduo para identificação de estados estacionários. Por fim, o modelo foi simplificado para as equações de Euler para simulação de escoamentos invíscidos supersônicos. Todos os modelos numéricos foram verificados por estudos de convergência espacial baseados em soluções analíticas exatas apresentando taxas de convergência ótimas para todas as variáveis do sistema — *Taylor-Green vortex* Taylor e Green (1937) para o caso incompressível, a formulação de Burbeau e Sagaut (2002) para o Navier-Stokes compressível e o vórtice isentrópico de Bui-Thanh (2015) para invíscido.

A validação do Auto AMR frente a casos clássicos da literatura confirmou a robustez da metodologia em um amplo espectro de regimes físicos:

- Escoamentos Incompressíveis: Na cavidade quadrada ($400 \leq Re \leq 10.000$), o algoritmo identificou corretamente as estruturas de vórtices, registrando erros relativos de 10^{-3} no regime estacionário e 10^{-2} para $Re = 10.000$, cuja natureza é quase-periódica (BRUNEAU; SAAD, 2006). No escoamento ao redor do cilindro ($Re = 100$), o refinamento adaptativo da esteira resultou em coeficientes C_D e C_L equivalentes às referências (GUITTET; THEILLARD; GIBOU, 2015; BLOMQUIST et al., 2024). No problema do degrau ($100 \leq Re \leq 800$), capturaram-se as zonas de recirculação em concordância com Armaly et al. (1983) e Biswas, Breuer e Durst (2004). Na camada de cisalhamento duplamente periódica, as análises de enstrofia e decaimento de energia confirmaram a correta evolução física dos vórtices para níveis $l_{max} \geq 7$ (BROWN, 1995).
- Escoamentos Compressíveis Viscosos: No cilindro compressível ($Re = 100, M = 0{,}2$),

o Auto AMR capturou corretamente as regiões da esteira de escoamento e reproduziu os parâmetros dinâmicos de Burbeau e Sagaut (2002) e Lomtev, Quillen e Karniadakis (1998), evidenciando pequenas modulações secundárias decorrentes de reflexões acústicas residuais nas fronteiras. No aerofólio NACA 0012 ($Re = 10.000, M = 6$), o aumento do refinamento ($l_{max} = 4$) proporcionou uma resolução mais nítida da descontinuidade de choque de proa em comparação aos dados de Aliabadi, Ray e Tezduyar (1993).

- Escoamentos Compressíveis Invíscidos (Equações de Euler): Nos problemas do choque oblíquo ($M = 2$) e choque refletido ($M = 2{,}9$), o método convergiu para as soluções exatas e de Catabriga e Coutinho (2002), reduzindo a suavização numéricas a medida que diminui h_{min} nas frentes de onda. No aerofólio diamante ($0° \leq \alpha \leq 7°$), o algoritmo capturou com precisão o sistema complexo de choques e expansões, alinhando-se aos cálculos teóricos de choque-expansão e seguindo as tendências experimentais de C_L e C_D de Jernell e Center (1974).

Os resultados mostram que o Auto AMR é capaz de rastrear de forma autônoma estruturas complexas em escoamentos subsônicos, transientes e supersônicos, garantindo acurácia equivalente às malhas refinadas estáticas com uma redução considerável no número de elementos. Como perspectivas de trabalhos futuros, destacamos:

- A paralelização em computação de alto desempenho (HPC) e a extensão da formulação para domínios tridimensionais (3D);
- O estudo de estimadores de erro baseados em aprendizado de máquina e Redes Neurais Informadas pela Física (PINNs);
- O desenvolvimento de algoritmos de adaptação anisotrópica e movimentação de nós de fronteira para o alinhamento da malha ao longo das superfícies dos obstáculos.

REFERÊNCIAS

AFRICA, P. C. et al. The deal.ii library, version 9.6. *Journal of Numerical Mathematics*, v. 32, n. 4, p. 369–380, 2024.

AFTOSMIS, M. Upwind method for simulation of viscous flow on adaptively refined meshes. *AIAA journal*, v. 32, n. 2, p. 268–277, 1994.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 142, n. 1-2, p. 1–88, 1997.

ALIABADI, S. K.; RAY, S. E.; TEZDUYAR, T. E. Supg finite element computation of viscous compressible flows based on the conservation and entropy variables formulations. *Computational Mechanics*, Springer, v. 11, n. 5, p. 300–312, 1993.

ANDERSON, J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*. 6. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2016.

ARMALY, B. F. et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 127, p. 473–496, 1983.

BERGER, M. J.; COLELLA, P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 82, n. 1, p. 64–84, 1989.

BERGER, M. J.; OLIGER, J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 53, n. 3, p. 484–512, 1984.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport phenomena*. 2nd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, New York, 2002.

BISWAS, G.; BREUER, M.; DURST, F. Backward-facing step flows for various expansion ratios at low and moderate reynolds numbers. *Journal of Fluids Engineering*, v. 126, n. 3, p. 362–374, 07 2004. ISSN 0098-2202. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.1760532>.

BLAIS, B. et al. Lethe: An open-source parallel high-order adaptative cfd solver for incompressible flows. *SoftwareX*, Elsevier, v. 12, p. 100579, 2020.

BLOMQUIST, M. et al. Stable nodal projection method on octree grids. *Journal of Computational Physics*, v. 499, p. 112695, 2024. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999123007908>.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1, p. 199–259, 1982. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782582900718>.

BROWN, D. L. Performance of under-resolved two-dimensional incompressible flow simulations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 122, n. 1, p. 165–183, 1995.

BRUNEAU, C.-H.; SAAD, M. The 2d lid-driven cavity problem revisited. *Computers Fluids*, v. 35, n. 3, p. 326–348, 2006. ISSN 0045-7930. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793005000368>.

BUI-THANH, T. From godunov to a unified hybridized discontinuous galerkin framework for partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 295, p. 114–146, 2015.

BULL, J. R.; JAMESON, A. Simulation of the compressible taylor green vortex using high-order flux reconstruction schemes. In: *7th AIAA theoretical fluid mechanics conference*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 3210.

BURBEAU, A.; SAGAUT, P. Simulation of a viscous compressible flow past a circular cylinder with high-order discontinuous galerkin methods. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 31, n. 8, p. 867–889, 2002.

BURSTEDDE, C.; WILCOX, L. C.; GHATTAS, O. p4est: Scalable algorithms for parallel adaptive mesh refinement on forests of octrees. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 33, n. 3, p. 1103–1133, 2011.

CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. Implicit supg solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002.

CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L.; TEZDUYAR, T. E. Compressible flow supg stabilization parameters computed from degree-of-freedom submatrices. *Computational Mechanics*, Springer, v. 38, n. 4, p. 334–343, 2006.

CLAUSEN, J. R. Entropically damped form of artificial compressibility for explicit simulation of incompressible flow. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, APS, v. 87, n. 1, p. 013309, 2013.

DAVIS, T. A. Algorithm 832: Umfpack v4. 3—an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM New York, NY, USA, v. 30, n. 2, p. 196–199, 2004.

DIOSADY, L.; MURMAN, S. Case 3.3: Taylor green vortex evolution. In: *Case Summary for 3rd International Workshop on Higher-Order CFD Methods*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 3–4.

DU, S.; STECHMANN, S. N. Inverse radiative transfer with goal-oriented hp-adaptive mesh refinement: adaptive-mesh inversion. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 39, n. 11, p. 115002, 2023.

ENGELMAN, M. S.; JAMNIA, M.-A. Transient flow past a circular cylinder: a benchmark solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 11, n. 7, p. 985–1000, 1990.

ERSOY, M.; GOLAY, F.; YUSHCHENKO, L. Adaptive multiscale scheme based on numerical density of entropy production for conservation laws. *Open Mathematics*, Versita, v. 11, n. 8, p. 1392–1415, 2013.

ERTURK, E. Discussions on driven cavity flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 60, n. 3, p. 275–294, 2009.

FAMBRI, F.; DUMBSER, M. Semi-implicit discontinuous galerkin methods for the incompressible navier–stokes equations on adaptive staggered cartesian grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 324, p. 170–203, 2017. ISSN 0045-7825.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introduction to Fluid Mechanics*. 8. ed. Hoboken: Wiley, 2011.

FRANCO, N. M. B. *Cálculo Numérico*. [S.l.]: Prentice Hall Brasil., 2006.

GEUZAINE, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2579>.

GHIA, U.; GHIA, K.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999182900584>.

GUITTET, A.; THEILLARD, M.; GIBOU, F. A stable projection method for the incompressible navier–stokes equations on arbitrary geometries and adaptive quad/octrees. *Journal of Computational Physics*, v. 292, p. 215–238, 2015. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115001710>.

HUGHES, T.; TEZDUYAR, T. Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, n. 1, p. 217–284, 1984. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the babuška-brezzi condition: a stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 85–99, 1986. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782586900253>.

HUGHES, T. J. R. Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 7, n. 11, p. 1261–1275, 1987.

JERNELL, L.; CENTER, L. R. *Comparisons of Two-dimensional Shock-expansion Theory with Experimental Aerodynamic Data for Delta-planform Wings at High Supersonic Speeds*. National Aeronautics and Space Administration, 1974. (NASA technical note). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XZKE_FtQ-8IC>.

KALLINDERIS, Y. G.; BARON, J. R. Adaptation methods for a new navier-stokes algorithm. *AIAA journal*, v. 27, n. 1, p. 37–43, 1989.

KAWAHARA, M. *Finite Element Methods in Incompressible, Adiabatic, and Compressible Flows*. [S.l.]: Springer, Tokyo, 2016.

KELLY, D. W. et al. A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part i—error analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 19, n. 11, p. 1593–1619, 1983.

KUMAR, G.; NAIR, A. G. Dominant balance-based adaptive mesh refinement for incompressible fluid flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, p. 114522, 2025.

LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. *Introduction to continuum mechanics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2009.

LARSON, M. G.; BENGZON, F. *The finite element method: theory, implementation, and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 10.

LEVEQUE, R. J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. [S.l.]: SIAM, 2007.

LÖHNER, R. *Applied computational fluid dynamics techniques: an introduction based on finite element methods*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.

LOMTEV, I.; QUILLEN, C.; KARNIADAKIS, G. Spectral/hp methods for viscous compressible flows on unstructured 2d meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 144, n. 2, p. 325–357, 1998.

LOPES, T. A. *Casos de teste do Auto AMR em problemas clássicos de CDF para escoamentos compressíveis, incompressíveis e inviscidos*. [S.l.]: GitHub, 2026. <https://github.com/thiago9864/mestrado-pgmc-ufjf>.

MOHAMMADI, B. Finite element computation of turbulent compressible flows based on the k—ε model and supg stabilization. *Revue Européenne des Éléments Finis*, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 27–46, 1993.

MOUKALLED, F. et al. *The finite volume method*. [S.l.]: Springer, 2016.

NG, Y. T.; MIN, C.; GIBOU, F. An efficient fluid–solid coupling algorithm for single-phase flows. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 23, p. 8807–8829, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109004719>.

PONS, K.; ERSOY, M. Adaptive mesh refinement method. part 1: Automatic thresholding based on a distribution function. 2019.

PONS, K. et al. Adaptive mesh refinement method. part 2: Application to tsunamis propagation. 2016.

SCHMITT, A. *Introduction to superfluidity*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 888.

SOMMER, S. C.; SHORT, B. J. *Free-flight measurements of turbulent-boundary-layer skin friction in the presence of severe aerodynamic heating at Mach numbers from 2.8 to 7.0*. [S.l.], 1955. Disponível em: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19930084096/downloads/19930084096.pdf>.

STOKES, G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, University Press, v. 8, 1880.

TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 158, n. 895, p. 499–521, 1937.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. [S.l.]: MIT press, 1972.

TEZDUYAR, T.; S., S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *J Comput Appl Mech*, p. 71–88, 2003.

TEZDUYAR, T. E. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *Mecanica computacional*, p. 71–88, 2003.

TEZDUYAR, T. E. Determination of the stabilization and shock-capturing parameters in supg formulation of compressible flows. In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004*. [S.l.: s.n.], 2004.

TORO, E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 1999. (Applied mechanics: Researchers and students). ISBN 9783540659662. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=FbemQgAACAAJ>.

VERSTEEG, H. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics The Finite Volume Method, 2/e*. Pearson Education, 2007. ISBN 9788131720486. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Gc4AWPJqb4AC>.

VOLKER, J. *Finite element methods for incompressible flow problems*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 51.

VOS, R.; FAROKHI, S. *Introduction to transonic aerodynamics*. [S.l.]: Springer, 2015.

WARREN, G. et al. Grid convergence for adaptive methods. In: *10th Computational Fluid Dynamics Conference*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 1592.

WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. 8. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.

YEE, H. C.; SANDHAM, N. D.; DJOMEHRI, M. J. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 150, n. 1, p. 199–238, 1999.

APÊNDICE A – Informações Complementares

Nesta seção, apresentam-se as deduções algébricas e os desenvolvimentos complementares que fundamentam a formulação numérica e analítica do trabalho. O Apêndice A.1 traz o detalhamento das matrizes jacobianas da formulação quasilinear e o Apêndice A.2 das matrizes associadas aos termos viscosos desenvolvidos no Capítulo 3. Adicionalmente, o Apêndice A.3 apresenta o desenvolvimento do modelo analítico baseado na teoria de choque-expansão para a determinação dos coeficientes de sustentação (C_L) e arrasto (C_D) do aerofólio diamante abordado na Seção 7.5.

A.1 Matrizes jacobianas

Nessa seção do apêndice são apresentadas os resultados dos cálculos das matrizes jacobianas apresentados na seção 3.2 do Capítulo 3 para os eixos x, y e z. A generalização para matrizes é feita assumindo que as colunas representam as constantes multiplicadas pelas derivadas parciais $\frac{\partial m_x}{\partial x_i}$, $\frac{\partial m_y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial m_z}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial E}{\partial x_i}$ e então os valores correspondentes de cada equação são divididos entre as colunas.

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} u\,(3-\gamma) & -\overline{\gamma}v & -\overline{\gamma}w & \frac{\overline{\gamma}v^2}{2} + \frac{\overline{\gamma}w^2}{2} + \frac{u^2(\gamma-3)}{2} & \overline{\gamma} \\ v & u & 0 & -uv & 0 \\ w & 0 & u & -uw & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\mathcal{E} - \frac{3\overline{\gamma}u^2}{2} - \frac{\overline{\gamma}v^2}{2} - \frac{\overline{\gamma}w^2}{2} & -\overline{\gamma}uv & -\overline{\gamma}uw & u\,(-\gamma\mathcal{E} + \overline{\gamma}u^2 + \overline{\gamma}v^2 + \overline{\gamma}w^2) & \gamma u \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} v & u & 0 & -uv & 0 \\ -\overline{\gamma}u & v\,(3-\gamma) & -\overline{\gamma}w & \frac{\overline{\gamma}u^2}{2} + \frac{\overline{\gamma}w^2}{2} + \frac{v^2(\gamma-3)}{2} & \overline{\gamma} \\ 0 & w & v & -vw & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\overline{\gamma}uv & \gamma\mathcal{E} - \frac{\overline{\gamma}u^2}{2} - \frac{3\overline{\gamma}v^2}{2} - \frac{\overline{\gamma}w^2}{2} & -\overline{\gamma}vw & v\,(-\gamma\mathcal{E} + \overline{\gamma}u^2 + \overline{\gamma}v^2 + \overline{\gamma}w^2) & \gamma v \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} w & 0 & u & -uw & 0 \\ 0 & w & v & -vw & 0 \\ -\overline{\gamma}u & -\overline{\gamma}v & w\,(3-\gamma) & \frac{\overline{\gamma}u^2}{2} + \frac{\overline{\gamma}v^2}{2} + \frac{w^2(\gamma-3)}{2} & \overline{\gamma} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2\overline{\gamma}uw & 0 & \gamma\mathcal{E} - \overline{\gamma}u^2 - \frac{3\overline{\gamma}w^2}{2} & w\,(-\gamma\mathcal{E} + 2\overline{\gamma}u^2 + \overline{\gamma}w^2) & \gamma w \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

É possível obter as matrizes para o caso 2D eliminando as linhas e colunas correspondentes ao eixo z.

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} u\,(3-\gamma) & -\overline{\gamma}v & \frac{\overline{\gamma}v^2}{2} + \frac{u^2(\gamma-3)}{2} & \overline{\gamma} \\ v & u & -uv & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}\gamma - \frac{3\overline{\gamma}u^2}{2} - \frac{\overline{\gamma}v^2}{2} & -\overline{\gamma}uv & u\,(-\mathcal{E}\gamma + \overline{\gamma}u^2 + \overline{\gamma}v^2) & \gamma u \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} v & u & -uv & 0 \\ -\overline{\gamma}u & v\,(3-\gamma) & \frac{\overline{\gamma}u^2}{2} + \frac{v^2(\gamma-3)}{2} & \overline{\gamma} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\overline{\gamma}uv & \mathcal{E}\gamma - \frac{\overline{\gamma}u^2}{2} - \frac{3\overline{\gamma}v^2}{2} & v\,(-\mathcal{E}\gamma + \overline{\gamma}u^2 + \overline{\gamma}v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

A.2 Matrizes do termo viscoso

Nessa seção do apêndice são apresentadas os resultados dos cálculos das matrizes do termo viscoso apresentados na seção 3.2 do Capítulo 3 para os eixos x, y e z. A generalização das matrizes segue a mesma ideia das matrizes jacobianas onde as colunas representam os valores multiplicados por cada derivada parcial das variáveis conservativas.

Matrizes relativas as derivadas em x, y e z das variáveis conservativas para o vetor vetor $\mathbf{V}_x$:

$$\mathbf{K}_{xx} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \lambda + 2.0\mu & 0 & \lambda & -\lambda u - \lambda w - 2.0\mu u & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -\mu v & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2.0\mu + \lambda - Q)u & (\mu - Q)v & \lambda u + (\mu - Q)w & K_{xx}^{54} & Q \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

$$\mathbf{K}_{yx} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & -\lambda v & 0 \\ \mu & 0 & 0 & -\mu u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu v & \lambda u & 0 & uv\,(-\lambda - \mu) & 0 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

$$\mathbf{K}_{zx} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & -\mu u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu w & 0 & 0 & -\mu u w & 0 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

onde:

$$K_{xx}^{54} = Q(-e_t + u^2 + v^2 + w^2) - \lambda uw - (2.0\mu + \lambda)u^2 - \mu(v^2 + w^2). \tag{A.9}$$

Matrizes relativas as derivadas em x, y e z das variáveis conservativas para o vetor vetor $\mathbf{V}_y$:

$$\mathbf{K}_{xy} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 & -\mu v & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda\left(-u-w\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda v & \mu u & \lambda v & v\left(-\lambda u - \lambda w - \mu u\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu u & 0 \\ 0 & \lambda + 2.0\mu & 0 & v\left(-\lambda - 2.0\mu\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0Qu + \mu u & -1.0Qv + \lambda v + 2.0\mu v & -1.0Qw + \mu w & K_{yy}^{54} & Q \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

$$\mathbf{K}_{zy} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -\mu v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu w & 0 & -\mu v w & 0 \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

onde:

$$K_{yy}^{54} = -Qe_t + 1.0Qu^2 + 1.0Qv^2 + 1.0Qw^2 - (2.0\mu + \lambda)v^2 - \mu(u^2 + w^2) \tag{A.13}$$

Matrizes relativas as derivadas em x, y e z das variáveis conservativas para o vetor vetor $\mathbf{V}_z$:

$$\mathbf{K}_{xz} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu & -\mu w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda\left(-u-w\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda v & 0 & \lambda v + \mu u & -\lambda u v - \lambda v w - \mu u w & 0 \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

$$\mathbf{K}_{yz} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu w & 0 \\ 0 & \lambda & 2.0\mu & -\lambda v - 2.0\mu w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda v & 3.0\mu v & v\left(-\lambda v - 3.0\mu w\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

$$\mathbf{K}_{zz} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu u & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -\mu v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0Qu + \mu u & -1.0Qv + \mu v & -1.0Qw & K_{zz}^{54} & Q \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

onde:

$$K_{zz}^{54} = Q(-e_t + u^2 + v^2 + w^2) - \mu(u^2 + v^2) \tag{A.17}$$

Também é possível obter as matrizes para o caso 2D eliminando as linhas e colunas correspondentes ao eixo z, e também as matrizes extraídas do vetor $\mathbf{V}_z$, conforme apresentado a seguir.

$$\mathbf{K}_{xx} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) & 0 & -(2\mu + \lambda)u & 0 \\ 0 & \mu & -\mu v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2\mu + \lambda - Q)u & (\mu - Q)v & K_{xx}^{43} & Q \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

$$\mathbf{K}_{yx} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & \lambda & -\lambda v & 0 \\ \mu & 0 & -\mu u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu v & \lambda u & -(\lambda + \mu)uv & 0 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

$$\mathbf{K}_{xy} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} 0 & \mu & -\mu v & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda v & \mu u & -(\lambda + \mu)uv & 0 \end{bmatrix} \tag{A.20}$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} \mu & 0 & -\mu u & 0 \\ 0 & 2\mu + \lambda & -(2\mu + \lambda)v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\mu - Q)u & (2\mu + \lambda - Q)v & K_{yy}^{43} & Q \end{bmatrix} \tag{A.21}$$

onde:

$$K_{xx}^{43} = -(2\mu + \lambda)u^2 - \mu v^2 - Q(\mathcal{E} - (u^2 + v^2))$$
$$K_{yy}^{43} = -\mu u^2 - (2\mu + \lambda)v^2 - Q[\mathcal{E} - (u^2 + v^2)]$$

A.3 Teoria de Choque-Expansão Aplicada ao Cálculo do Fluxo Supersônico em um Aerofólio Diamante

O desenvolvimento analítico para a determinação dos coeficientes de sustentação (C_L) e arrasto (C_D) do aerofólio diamante — cujos resultados são discutidos na Seção 7.5,

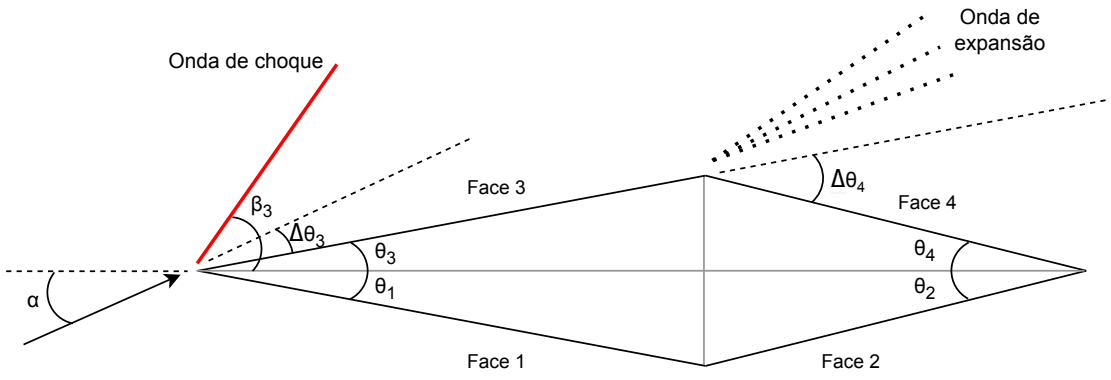
baseia-se na teoria de choque-expansão para escoamentos invíscidos supersônicos (VOS; FAROKHI, 2015).

A etapa inicial dessa formulação consiste na determinação das deflexões angulares do escoamento ao longo das quatro superfícies do aerofólio, conforme esquematizado na Figura 55. A partir da geometria interna (θ_1 a θ_4) e do ângulo de ataque (α), calculam-se as variações angulares $\Delta\theta_1$ a $\Delta\theta_4$ necessárias para alinhar o escoamento paralelamente a cada uma das faces:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 &= \theta_1 + \alpha, \\ \Delta\theta_2 &= \theta_1 + \theta_2, \\ \Delta\theta_3 &= \theta_3 - \alpha, \\ \Delta\theta_4 &= \theta_3 + \theta_4. \end{aligned} \tag{A.22}$$

Para as superfícies de montante (faces 1 e 3), os ângulos de deflexão são referenciados diretamente ao vetor velocidade do escoamento não perturbado. No caso de $\Delta\theta_1$, soma-se o ângulo de ataque α ao ângulo da face θ_1, uma vez que a rotação total exige a compensação de α em relação ao eixo de referência acrescida da inclinação da própria face. Para $\Delta\theta_3$, aplica-se a diferença entre os ângulos, pois a inclinação geométrica da face 3 em relação ao eixo principal é parcialmente atenuada pelo ângulo de ataque. Por fim, para as superfícies de jusante (faces 2 e 4), as deflexões correspondem ao somatório dos ângulos internos das extremidades medianas adjacentes, assumindo-se que o fluido ruma de forma paralela às respectivas faces frontais imediatamente após cruzar a primeira estrutura de choque ou onda de expansão (VOS; FAROKHI, 2015).

Figura 55 – Disposição dos ângulos, ondas de choque e expansão.



Fonte: Elaborada pelo autor

A Tabela 13 sintetiza os ângulos internos do aerofólio e os respectivos deslocamentos angulares computados para cada superfície. A partir dessa caracterização geométrica, define-se a natureza da descontinuidade física (onda de choque ou leque de expansão) associada a cada uma das faces.

Para as superfícies de jusante (faces 2 e 4, Figura 55), o fluido provém paralelamente às faces frontais adjacentes, exigindo uma deflexão divergente para contornar a geometria traseira. Em virtude dessa ampliação da área de escoamento, a transição é invariavelmente governada por leques de expansão de Prandtl-Meyer.

Por outro lado, as superfícies de montante (faces 1 e 3) interagem diretamente com o escoamento não perturbado sob o ângulo de ataque α, tornando a natureza do fenômeno dependente da orientação relativa da face em relação à corrente fluida. Na face 1, o fluido incide frontalmente para toda a faixa de α considerada, promovendo a compressão do escoamento por meio de uma onda de choque oblíqua. Já na face 3, a descontinuidade é ditada pela magnitude do ângulo de ataque em relação à inclinação geométrica da superfície (θ_3): para $\alpha < \theta_3$, ocorre a compressão direta do fluido, gerando um choque oblíquo; para $\alpha > \theta_3$, o escoamento sofre uma deflexão divergente, resultando em uma expansão de Prandtl-Meyer.

Tabela 13 – Ângulos de inclinação relativos ao escoamento para ângulos de ataque 0° e 7°.

Face	θ_i	$\Delta\theta_i$ para $\alpha = 0°$	$\Delta\theta_i$ para $\alpha = 7°$
1	2.2906º	2.2906º	9.2906º
2	3.4336º	5.7242º	5.7242º
3	3.4336º	3.4336º	-3.5664º
4	5.1428º	8.5764º	8.5764º

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definidos os deslocamentos angulares e a natureza física do escoamento sobre cada superfície, procede-se à determinação do coeficiente de pressão, do número de Mach a jusante da descontinuidade e da razão de pressão através de cada estrutura de onda.

O procedimento analítico inicia-se pelas superfícies de montante (faces 1 e 3), para as quais as propriedades do escoamento não perturbado são conhecidas. Para a face 1, sujeita a uma onda de choque oblíqua, a primeira incógnita a ser computada é o ângulo de inclinação da onda de choque em relação ao vetor velocidade de montante (β_1), determinado implicitamente por

$$\theta(\beta_1, M) - \Delta\theta_1 = 0, \tag{A.23}$$

em que a relação analítica $\theta(\beta_i, M)$, estabelecida por Vos e Farokhi (2015), é dada por

$$\theta(\beta_i, M) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{\tan(\beta_i)}\frac{M^2\sin^2(\beta_i) - 1}{M^2(\gamma + \cos(2\beta_i) + 2}\right) \quad \text{para} \quad i = 1, 3. \tag{A.24}$$

Substituindo-se o número de Mach do escoamento não perturbado ($M = 4{,}63$) e a deflexão $\Delta\theta_1$ na Equação (A.24), a determinação de β_1 exige a solução numérica de (A.23),

uma vez que o ângulo de choque não pode ser isolado algebricamente. Para tal, emprega-se o Método da Falsa Posição delimitado ao intervalo $0° < \beta_1 < 60°$. Esse intervalo de busca foi definido a partir do diagrama $\theta - \beta - M$ (VOS; FAROKHI, 2015), garantindo a seleção da solução fisicamente admissível correspondente ao choque fraco.

Uma vez obtido o valor de β_1, computam-se a razão de pressão estática e o número de Mach a jusante da onda de choque (M_1) por meio das relações analíticas de choque oblíquo (VOS; FAROKHI, 2015):

$$\frac{p_i}{p_{inf}} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_{ant}\sin^2(\beta_i) - 1) \quad \text{para} \quad i = 1, 3, \tag{A.25}$$

$$M_i = \frac{1}{\sin(\beta_i - \phi)}\sqrt{\frac{1.0 + \dfrac{\gamma-1}{2}(M_{ant}\sin(\beta_i))^2}{\gamma(M_{ant}\sin(\beta_i))^2 - \dfrac{\gamma-1}{2}}} \quad \text{para} \quad i = 1, 3, \tag{A.26}$$

em que $\gamma = 1{,}4$, $\beta_i = \beta_1$ e $M_{\text{ant}} = 4{,}63$ para a face 1. Por fim, a partir da razão de pressão obtida na Equação (A.25), o coeficiente de pressão C_{p1} é calculado por

$$C_{pi} = \frac{2}{\gamma M_i^2}\left(\frac{p_i}{p_{inf}} - 1.0\right) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, 4\ . \tag{A.27}$$

Para a face 3, a metodologia de cálculo é ditada pelo ângulo de ataque α. Caso $\alpha < \theta_3$, o regime é de onda de choque oblíqua, empregando-se procedimento análogo ao descrito para a face 1. Por outro lado, para $\alpha > \theta_3$, a transição ocorre por um leque de expansão de Prandtl-Meyer. Nessa condição, o cálculo inicia-se pela determinação da função de Prandtl-Meyer para o escoamento incidente (VOS; FAROKHI, 2015):

$$\nu(M_{ant}) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M_{ant}^2 - 1)} - \tan^{-1}\sqrt{M_{ant}^2 - 1}, \tag{A.28}$$

Em seguida, o número de Mach na face 3 (M_3) é determinado pela condição de deflexão angular:

$$\nu(M_3) - \nu(M_{ant}) - \Delta\theta_3 = 0, \tag{A.29}$$

De maneira análoga à Equação (A.23), a variável M_3 não pode ser isolada algebricamente em (A.29). Aplica-se, portanto, o Método da Falsa Posição no intervalo $0 \leq M_3 \leq 100$. Obtido o número de Mach M_3, a razão entre a pressão estática na superfície e a pressão de referência do escoamento não perturbado é calculada pela relação isentrópica (VOS; FAROKHI, 2015):

$$\frac{p_i}{p_{inf}} = \left(\frac{1 + (\gamma-1)\dfrac{M_{ant}^2}{2}}{1 + (\gamma-1)\dfrac{M_i^2}{2}}\right)^{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{para} \quad i = 2, 4 \tag{A.30}$$

adotando-se $M_i = M_3$ para a face 3. A substituição dessa razão de pressão e do Mach M_3 na Equação (A.27) fornece o coeficiente de pressão C_{p3}.

Para as superfícies de jusante (faces 2 e 4), a determinação dos coeficientes de pressão segue formulação equivalente à expansão de Prandtl-Meyer, assumindo-se como estado a montante as propriedades da face adjacente correspondente (isto é, $M_{\text{ant}} = M_1$ para a face 2 e $M_{\text{ant}} = M_3$ para a face 4 nas Equações (A.28) e (A.29)). A razão de pressão em relação ao escoamento não perturbado é então obtida por encadeamento:

$$\frac{p_4}{p_{inf}} = \frac{p_4}{p_3}\frac{p_3}{p_{inf}}, \tag{A.31}$$

$$\frac{p_2}{p_{inf}} = \frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{inf}}. \tag{A.32}$$

A aplicação das razões p_2/p_∞ e p_4/p_∞ e dos respectivos números de Mach M_2 e M_4 à Equação (A.27) resulta nos coeficientes de pressão C_{p2} e C_{p4}.

Conhecida a distribuição de C_{p1} a C_{p4} ao longo da geometria, computam-se os coeficientes de força normal (F_n) e axial (F_a) (VOS; FAROKHI, 2015):

$$F_n = (C_{p1} - C_{p3})L + (C_{p2} - C_{p4})(C - L), \tag{A.33}$$

$$F_a = (C_{p1} - C_{p2})\frac{t_{max} - t}{C} + (C_{p3} - C_{p4})\frac{t}{C}, \tag{A.34}$$

em que $c = 1{,}0$ denota o comprimento da corda, $L = 0{,}6$ a extensão da seção frontal, $t = 0{,}036$ a espessura nas faces superiores e $t_{\max} = 0{,}06$ a espessura máxima do aerofólio. Por fim, projeta-se o sistema de forças nos eixos do escoamento não perturbado para obter os coeficientes globais de sustentação (C_L) e arrasto (C_D):

$$C_D = F_n \cos(\alpha) - F_a \sin(\alpha) \tag{A.35}$$

$$C_L = F_n \sin(\alpha) + F_a \cos(\alpha). \tag{A.36}$$

A aplicação dessa rotina analítica a um conjunto discretizado de ângulos no intervalo $0^\circ \leq \alpha \leq 7^\circ$ gera as curvas teóricas de C_L e C_D, utilizadas na validação dos resultados numéricos do aerofólio diamante apresentados na Figura 54 da Seção 7.5.