Cálculo de frações por meio de segmentos:

realizando experimentos mentais

Janaína Lamas Santiago

Willian José da Cruz

Apresentação

Este material constitui o Produto Educacional, resultado da dissertação intitulada "Uma proposta de ensino de frações por meio de cálculos de segmentos: desvendando o objeto por meio dos Experimentos Mentais", desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

A concepção deste material insere-se no campo da Educação Matemática e visa complementar as práticas de ensino já utilizadas por professores que ensinam Matemática, por meio de uma abordagem metodológica chamada Experimentos Mentais. Essa metodologia auxiliará os estudantes a construírem fatos sobre um determinado objeto da matemática, a partir do desenvolvimento contínuo do objeto, dentro do próprio contexto da matemática e das relações de seus contrários. Nos Experimentos Mentais são utilizados diagramas que ao serem modificados, a partir da utilização de deduções e abduções, ampliam a possibilidade de interpretações e significações sobre o objeto do conhecimento.

Nesse material foram desenvolvidas atividades com foco no objeto do conhecimento chamado fração e para representá-lo foram utilizados segmentos realizando uma complementaridade entre a geometria e a álgebra. Nessas atividades, além de trabalhar a construção de frações por meio dos segmentos, oferece-se também a possibilidade de realizar as operações soma, subtração, multiplicação e divisão de frações.

Nos Experimentos Mentais propostos foram pensados para serem construídos no Geogebra e para o 9º ano do Ensino Fundamental. Porém, podem ser adaptados para que sejam realizados utilizando-se régua (esquadros) e compasso.

Sumário

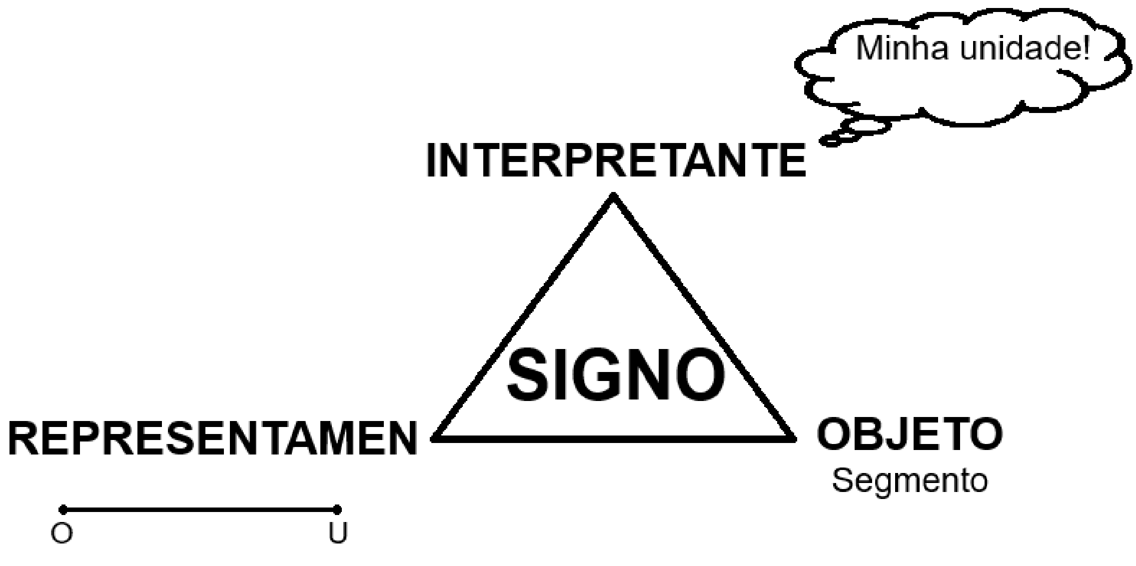
Conceitos fundamentais na semiótica de Peirce

A semiótica é o estudo de como os signos de todos os tipos referem-se aos seus objetos por meio de uma ideia a qual é reconhecida pelo sujeito.

Signo é algo que representa algo para alguém.

O signo é dado por meio de uma relação triádica entre o representamen (símbolo ou sinal), o objeto (o que está sendo representada) e o interpretante (o sentido que o intérprete produz na relação entre o representamen e o objeto). Observe um exemplo na figura 1.

Figura 1: Signo.



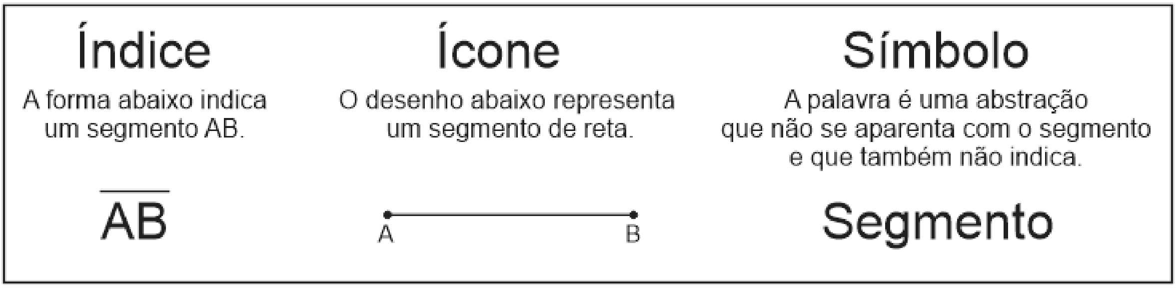
Fonte: Elaborada pela autora no paint em 2024.

O signo pode ser classificado quanto ao seu objeto em:

- **Índice:** refere-se ao objeto. Podendo ser utilizado para particularizar.
- **Ícone:** é um signo diagramático que se assemelha ao objeto.
- **Símbolo:** consiste em uma regra.

Observe exemplos de índice, ícone e símbolo na figura 2.

Figura 2: Índice, ícone e símbolo.



DURANTE O PROCESSO DE DESENVOLVIMENTO DO EXPERIMENTO MENTAL, OS DIAGRAMAS VÃO SOFRENDO MODIFICAÇÕES E A REPRESENTAÇÃO DO OBJETO OCORRERÁ TANTO POR MEIO DE ÍCONES QUANTO DE ÍNDICE E DE SÍMBOLOS.

Peirce também classificou os argumentos com base no tipo de raciocínio.

- **Abdução:** é o início de um processo, pois envolve a formulação de hipótese, mas também sendo usado para explicar um conjunto de observações. É esse o processo responsável por novas ideias.
- **Indução:** é o raciocínio utilizado para generalizar.
- **Dedução:** esse tipo de raciocínio utiliza-se uma ou mais premissas para se obter uma conclusão. E ela tem como característica unir os processos abdutivos e intuitivos.

Acesse a dissertação intitulada "Uma proposta de ensino de frações por meio de cálculos de segmentos: desvendando o objeto por meio dos Experimentos Mentais" para se aprofundar no assunto.

A Matemática como uma atividade semiótica

➢ **O que significa essa concepção?**

Significa que a Matemática é construída por meio de diagramas e experimentações.

➢ **Qual é o pilar dessa concepção?**

O pilar dessa concepção está no fato de que a Matemática pode ser acessada por meio do uso de diagramas geométricos e/ou algébricos.

➢ **O que são diagramas?**

Os diagramas são predominantemente um ícone regido por regras e convenções de um sistema de representações consistente e fundamentado sobre uma ideia básica.

➢ **E quais são as vantagens de acessar os objetos matemáticos por meio de diagramas?**

- Reduz o custo cognitivo na solução de problemas e nos conflitos.
- Verificação de resultados que ampliam as possibilidades e significações.
- Auxiliam na compreensão do objeto matemático.

O PILAR DOS EXPERIMENTOS MENTAIS É O RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO E A SEMIÓTICA DE PEIRCE!

Complementaridade entre geometria e aritmética

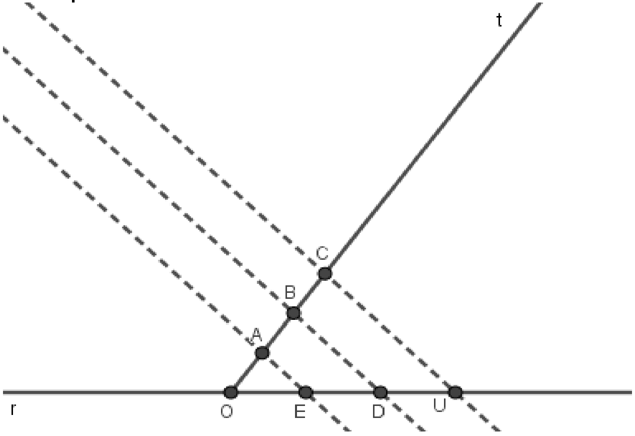
O princípio da complementaridade é uma teoria instituída por um matemático alemão chamado Michael Otte, em que o conceito está na dualidade que se tem na relação do sujeito com o objeto, pois o sujeito busca integrar as informações obtidas por meio de uma atividade e operatividade do pensamento (Otte, 1993).

Para Otte, a aritmética e a geometria se complementam em simbologia e em sistema de representação. Combinadas, elas servem como instrumentos e campos de interpretação e, assim, representam um modo de geração de pensamento matemático (1990).

Na aritmética um argumento pode ser utilizado para generalizar, porém a propriedade perde seu real significado. Enquanto na geometria há limitações, porém, a propriedade ganha significado. Logo, apesar de suas diferenças elas podem se complementar, pois uma permite atribuir significado enquanto a outra permite generalizar (Wielewski, 2008).

Observe na figura 2, um exemplo da Geometria e da Aritmética se complementando.

Figura 3: Complementaridade entre Geometria e Aritmética.



Elaborada pela autora.

$$\overline{OU} = 1$$

$$\overline{OE} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{OD} = \overline{OE} + \overline{OE} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Experimentos Mentais na Matemática

Os Experimentos Mentais são “formas de representar o objeto do conhecimento, por meio de um diagrama, e de desenvolver certas deduções e abduções no referido diagrama, a ponto de modificá-lo, para que seja possível chegar a novos conceitos e/ou generalizações” (Cruz, 2024, p. 5)

Essa metodologia se ancora na concepção histórico-dialética da educação, ou seja, está baseada na concepção de dialética com base no materialismo de Marx. Segundo Gadotti, a teoria é um guia para ação, em que por meio da prática tem-se base para construção da teoria, afinal, é por meio do conhecimento obtido pela prática que ela é dialeticamente construída (1997).

Os Experimentos Mentais podem auxiliar os estudantes a construírem fatos sobre um determinado objeto da matemática, a partir do desenvolvimento contínuo do objeto, dentro do próprio contexto da matemática e das relações de seus contrários.

Essa metodologia possui algumas características fundamentais.

- **Forma:** a conjectura, a hipótese e as suposições que são desenvolvidas em uma representação particular do objeto geral (Cruz, 2021; 2022).

- **Estrutura:** permite que novas ideias sejam introduzidas, criando-se, assim, uma síntese abdutiva (Cruz, 2021).

- **Compreensão:** utilização do processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental (Cruz, 2021), permitindo perceber relações que não estão explicitamente apresentadas nos diagramas.

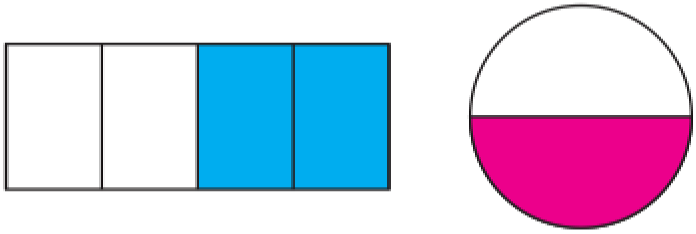
- **Dependência:** sistema de representação. Baliza a aplicação de novos conceitos e de objetos.

- **Revelação:** revela contradições e apresenta novas leis (Cruz, 2021).

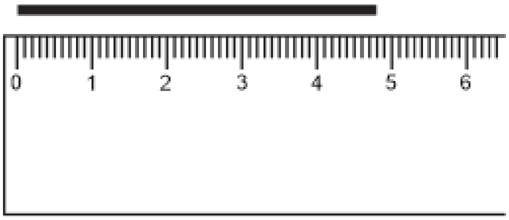
Frações

As frações podem ser representadas por três modelos.

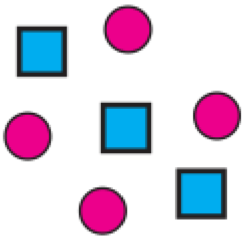
Área



Reta numérica ou segmento



Conjunto



Os significados gerados pelos contextos em que as frações são empregadas.

- **Razão:** parte de uma parte.
- **Quociente:** uma divisão.
- **Operador:** indica uma transformação.
- **Parte e todo:** particionar.
- **Medida:** Subdividir a unidade.

Propostas de atividades de frações

Utilizando-se dos Experimentos Mentais

ATIVIDADE 1: Construindo frações por meio de segmentos

Objetivo	Compreender o que é fração como parte de um segmento unitário.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/yjnmzchr (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção).
Orientações Gerais	Nessa atividade foi proposto um Experimento Mental em que é utilizada a complementaridade entre a geometria e a álgebra para reconhecer frações. Para isso, foram construídos segmentos e, a partir de um segmento chamado unidade, associou-se frações. Nesse Experimento Mental buscamos construir um segmento que representa $\frac{1}{3}$ da unidade considerada, ou seja, a terça parte da unidade. A partir do segmento $\frac{1}{3}$, o estudante é convidado a reconhecer a fração $\left(\frac{2}{3}\right)$ e a construir a fração $\frac{4}{3}$, explorando, nesse último, a ideia de fração imprópria.

CONSTRUINDO FRAÇÕES POR MEIO DE SEGMENTO

1) O que é fração para você?

____

____

2) Convido você a fazer um Experimento Mental de construção da fração $\frac{1}{3}$.

a) Iniciamos construindo, no Geogebra, duas retas fixas r e t que intersectam em um ponto O.

- Os segmentos que serão construídos terão início em um ponto O e terão extremidades sobre essas retas fixas e serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por $\overline{OO} = 0$.

b) Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denominá-lo de U. Esse segmento OU será chamado segmento 1 ou unidade. Simbolicamente representado por $\overline{OU} = 1$.

c) Marcar um ponto A sobre a reta t.

d) Criar uma circunferência com centro em A de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto B, intersecção da circunferência com a reta t.

e) Criar uma nova circunferência com centro em B e raio equivalente ao segmento OA e marcar o ponto C, interseção da circunferência com a reta t.

f) Qual é a relação entre o segmento OA e o segmento OB? E a relação entre a o segmento OA e do segmento OC?

Retomando ao Experimento Mental no Geogebra!

g) Traçar uma reta passando pelos pontos U e C.

h) Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto B e marcar o ponto de interseção D com a reta r.

i) Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto A e marcar o ponto de interseção E com a reta r.

j) Pelo teorema de Tales, podemos concluir que o segmento unitário foi dividido em três partes iguais. Sabendo disso, relacione o segmento AE com a unidade e o segmento AD com a unidade?

O que diz o teorema de Tales?

k) Explique com suas palavras o que é o segmento AE.

l) Explique com suas palavras o que é o segmento AD.

m) Arraste o ponto B, para alterar o tamanho da unidade. Com essa alteração, o que podemos afirmar sobre o segmento AE, em relação a essa nova unidade?

n) Agora, construa o segmento $\frac{4}{3}$ no Geogebra.

o) A partir desses Experimentos, como você explicaria a alguém o que é fração?

____

____

____

____

ATIVIDADE 2: Somando frações por meio de segmentos[1]

Objetivo	Compreender a soma entre frações.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/ybadthhe (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção). Observação: Para reduzir a quantidade de elementos da construção e essa ficasse mais clara de ser observada pelo protocolo do Geogebra, foi utilizada o recurso de ponto médio para obter a metade da unidade, mas é possível essa seja obtida com o auxílio da reta suporte.
Orientações Gerais	Nessa atividade foi proposto um Experimento Mental em que é utilizada a complementaridade entre a geometria e a aritmética para somar frações. Para isso, foram construídos segmentos e, a partir de um segmento chamado unidade, foram associadas frações. Nesse Experimento Mental é realizada a soma de $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Para isso, foi construído um segmento que representa $\frac{1}{3}$ da unidade considerada e um segmento $\frac{3}{2}$, em seguida, o segmento $\frac{3}{2}$ foi transladado, obtendo um novo segmento que representa a soma de $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Em seguida, foi realizada uma subdivisão da unidade, revelando, assim, o resultado da soma $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$.

[1] Veja a nota ao professor ao final deste Produto Educacional para compreender a heurística do Experimento Mental sobre a soma de frações por meio de segmentos.

SOMANDO FRAÇÕES POR MEIO DE SEGMENTOS

1) Como você realizaria a soma $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$?

____

____

2) E agora, $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}$?

____

____

3) Convido você a somar $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ por meio de um Experimento Mental.

a) Iniciamos construindo, no Geogebra, duas retas fixas r e t que intersectam em um ponto O.

- Os segmentos que serão construídos terão início em O e terão extremidades sobre essas retas fixas e serão obtidas as medidas desses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por $\overline{OO}=0$.

b) Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denominá-lo de U. Esse segmento OU será chamado segmento 1 ou unidade. Simbolicamente representado por $\overline{OU}=1$.

c) Construir um segmento OE que representa $\frac{1}{3}$ e um segmento OG que representa $\frac{3}{2}$, sobre a reta r. (Observação: Utilizar a reta suporte para dividir o segmento).

d) Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto U' sobre reta t, em que o segmento OU' seja equivalente a unidade.

e) Traçar uma reta paralela à reta t passando por G.

f) Traçar uma reta paralela à reta r passando por U' e marcar o ponto H de intersecção.

g) Traçar a reta que passa pelos pontos E e U'.

h) Traçar uma reta paralela a essa última reta construída passando pelo ponto H e marcar o ponto de intersecção J com a reta r.

i) Nesse Experimento, foi realizada uma transformação geométrica denominada translação. Você consegue identificar em qual segmento foi aplicado o movimento de translação? Explique sua resposta.

O que é uma transformação geométrica de translação?

j) Considerando o segmento OE e o segmento OG, qual é a relação que descreve o segmento OJ?

k) É possível representar OJ por meio de uma única fração?

Vamos continuar nosso Experimento Mental!

l) No Geogebra, marcar na reta r, o ponto que demarca o segmento que representa a fração unitária que deu origem à fração $\frac{3}{2}$.

m) Marcar um círculo de raio igual a diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ com centro em O.

n) Replicar circunferências de raio igual a diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ de forma a dividir todo o segmento OJ. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são interseção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto J.

o) A unidade foi subdividida em novas partes, em quantas partes ela foi subdividida?

p) Com essa nova subdivisão da unidade, qual é a fração que representa o segmento AE? E o segmento AC?

q) O que significa duas frações serem equivalentes?

ATIVIDADE 3: Subtraindo frações por meio de segmentos[2]

Objetivo	Compreender a subtração entre frações.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/nkzmqerc (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção). Observação: Para reduzir a quantidade de elementos da construção e essa ficasse mais clara de ser observada pelo protocolo do Geogebra, foi utilizada o recurso de ponto médio para obter a metade da unidade e a quarta parte da unidade, mas é possível que essas sejam obtidas com o auxílio da reta suporte.
Orientações Gerais	Nessa atividade foi proposto um Experimento Mental em que é utilizada a complementaridade entre a geometria e a aritmética para subtrair frações. Para isso, foram construídos segmentos e, a partir de um segmento chamado unidade, foram associadas frações. Nesse Experimento Mental realizamos a operação $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$. Para isso, foi construído um segmento que representa três meio da unidade considerada e um segmento que representa um quarto da unidade considerada. Em seguida, o segmento que representa $\frac{1}{4}$ foi transladado, obtendo um novo segmento que representa a operação $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$.

[2] Veja a nota ao professor ao final deste Produto Educacional para compreender a heurística do Experimento Mental sobre a subtração de frações por meio de segmentos.

SUBTRAINDO FRAÇÕES POR MEIO DE SEGMENTOS

1) Como você realizaria a subtração $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$?

____

____

2) Convido você a realizar o cálculo $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$ por meio de um Experimento Mental.

a) Iniciamos construindo, no Geogebra, duas retas fixas r e t que intersectam em um ponto O.

- Os segmentos construídos terão início em O e extremidades sobre essas retas fixas. Serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por $\overline{OO}=0$.

b) Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denominá-lo de U. Esse segmento OU será chamado segmento 1 ou unidade. Simbolicamente representado por $\overline{OU}$ = 1.

c) Construir um segmento OD que representa $\frac{3}{2}$ e um segmento OE que representa $\frac{1}{4}$, sobre a reta r. (Observação: Utilizar a reta suporte para dividir o segmento).

d) Criar um ponto U' sobre reta t equivalente ao segmento 1 ($\overline{OU}$). Assim o segmento OU' pode ser representado simbolicamente por $\overline{OU'}$ = 1.

e) Traçar uma reta paralela à reta t passando por E.

f) Traçar uma reta paralela à reta r passando por U' e marcar o ponto K de intersecção.

g) Traçar a reta que passa pelos pontos D e K.

h) Traçar uma reta paralela a essa última reta construída passando pelo ponto U' e marcar o ponto de intersecção L com a reta r.

i) Você consegue identificar em qual segmento foi aplicado o movimento de translação? Explique sua resposta.

____

____

____

j) Considerando o segmento OE e o segmento OD, qual é a relação que descreve o segmento OL?

___

k) É possível representar OL por meio de uma única fração?

___

___

l) Marcar um círculo de raio equivalente ao do segmento OE com centro em E.

m) Replicar circunferências de raio equivalente ao do segmento OE de forma a dividir todo o segmento OL. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são interseção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto D.

n) A unidade foi subdividida em novas partes, em quantas partes ela foi subdividida?

___

3) Você acha que é possível, seguindo os passos da atividade anterior, encontrar um segmento que represente $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}$?

ATIVIDADE 4: Multiplicando frações por meio de segmentos[3]

Objetivo	Compreender o significado da multiplicação entre frações.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/s3tykkzk (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção). Observação: Para reduzir a quantidade de elementos da construção e essa ficasse mais clara de ser observada pelo protocolo do Geogebra, foi utilizada o recurso de ponto médio para obter a metade da unidade e a quarta parte da unidade, mas é possível essas sejam obtidas com o auxílio da reta suporte.
Orientações Gerais	Nessa atividade foi proposto um Experimento Mental em que é utilizada a complementaridade entre a geometria e a álgebra para multiplicar frações. Para isso, foram construídos segmentos e foram associadas frações a partir de um segmento chamado unidade. Nesse Experimento Mental foi realizada a multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$. Para isso, foi construído um segmento que é um quarto da unidade considerada e um segmento que é três meio dessa unidade. Em seguida foi construído dois triângulos que são semelhantes, permitindo ao aplicar a relação de proporção entre os lados obter o resultado da multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

[3] Veja a nota ao professor ao final deste Produto Educacional para compreender a heurística do Experimento Mental sobre a multiplicação de frações por meio de segmentos.

MULTIPLICANDO FRAÇÕES POR MEIO DE SEGMENTO

1) Ao multiplicar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, você espera que o resultado seja maior do que $\frac{1}{3}$, menor do que $\frac{1}{3}$ ou maior do que $\frac{1}{2}$?

____

2) Ao multiplicar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$, você espera que o resultado seja maior do que $\frac{1}{4}$, menor do que $\frac{1}{4}$ ou maior do que $\frac{3}{2}$?

____

3) Ao multiplicar as frações $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$, você espera que o resultado seja maior do que $\frac{4}{3}$, menor do que $\frac{4}{3}$ ou maior do que $\frac{3}{2}$?

____

4) Convido você a realizar a multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$ por meio de um Experimento.

a) Iniciamos construindo, no Geogebra, duas retas fixas r e t que intersectam em um ponto O.

- Os segmentos que serão construídos terão início em O e terão extremidade sobre essas retas fixas. Além disso, esses segmentos serão associados às frações.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por $\overline{OO} = 0$.

b) Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denominá-lo de U. Esse segmento OU será chamado segmento 1 ou unidade. Simbolicamente representado por $\overline{OU} = 1$.

c) Construir um segmento OE que representa $\frac{1}{4}$ de $\overline{OU}$ e um segmento OD que representa $\frac{3}{2}$ de $\overline{OU}$, sobre a reta r. (Observação: Utilizar a reta auxiliar para a divisão do segmento).

d) Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto E' sobre reta t, cujo o raio da circunferência é o segmento OE.

e) Traçar uma reta que passa pelo ponto E' e pelo ponto U.

f) Traçar uma reta paralela à última reta construída passando pelo ponto D e marcar o ponto F de intersecção com a reta t.

g) Os triângulos OUE' e ODF são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA). Qual é a relação de proporção entre os lados desse triângulo?

O que são triângulos semelhantes?

____

____

____

Retornando ao Experimento Mental!

h) Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto F' sobre a reta r, que cujo o segmento OD seja o raio da circunferência.

i) Marcar um círculo de raio igual a diferença entre os segmentos OF' e OE com centro em O.

j) Replicar circunferências de raio igual a diferença entre os segmentos OF' e OE de forma a dividir todo o segmento 1. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são intersecção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto D.

k) Qual é a fração que indica o segmento OF'?

____

5) Agora, vamos realizar a multiplicação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ por meio de um Experimento Mental!

ATIVIDADE 5: Dividindo frações por meio de segmentos[4]

Objetivo	Compreender o significado da divisão entre frações.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/a7wtzntr (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção). Observação: Para reduzir a quantidade de elementos da construção e essa ficasse mais clara de ser observada pelo protocolo do Geogebra, foi utilizada o recurso de ponto médio para obter a quarta parte da unidade, mas é possível essa seja obtida com o auxílio da reta suporte.
Orientações Gerais	Nessa atividade foi proposto um Experimento Mental em que é utilizada a complementaridade entre a geometria e a álgebra para dividir frações. Para isso, foram construídos segmentos e, a partir de um segmento chamado unidade, foram associadas frações. Nesse Experimento Mental foi realizada a divisão de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$. Para isso, foi construído um segmento que é um quarto da unidade considerada e um segmento que é um terço dessa unidade. Em seguida, foi construído dois triângulos semelhantes, permitindo, ao aplicar a relação de proporção entre os lados obter o resultado da divisão entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$.

[4] Veja a nota ao professor ao final deste Produto Educacional para compreender a heurística do Experimento Mental sobre a divisão de frações por meio de segmentos.

DIVIDINDO FRAÇÕES POR MEIO DE SEGMENTO

1) Como você faria a divisão de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$?

____

2) Convido você a dividir $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$ por meio de um Experimento Mental.

a) Iniciamos construindo, no Geogebra, duas retas fixas r e t que intersectam em um ponto O.

- Os segmentos que serão construídos terão início em O e terão extremidade sobre essas retas fixas. Além disso, serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por $\overline{OO} = 0$.

b) Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denominá-lo de U. Esse segmento OU será chamado segmento 1 ou unidade. Simbolicamente representado por $\overline{OU} = 1$.

c) Construir um segmento OD que representa $\frac{1}{3}$ do segmento OU e um segmento OG que é $\frac{1}{4}$ do segmento OU, sobre a reta r.

d) Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto U' sobre reta t, em que o segmento OU' seja equivalente a unidade.

e) Traçar uma reta que passa pelo ponto D e pelo ponto U'.

f) Traçar uma reta paralela à última reta construída passando pelo ponto G e marcar o ponto J de intersecção com a reta t.

g) Os triângulos ODU' e OGJ são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA). Qual é a relação de proporção entre os lados desse triângulo? Desenvolva a igualdade.

h) Com o auxílio de uma circunferência de raio OJ centralizada no ponto O, criar um ponto J' sobre a reta r.

i) Marcar um círculo de raio igual a diferença entre os segmentos OD e OG com centro em O.

j) Replicar circunferências de raio igual a diferença entre os segmentos OD e OG de forma a dividir todo o segmento 1. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são intersecção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto U.

k) Qual a fração que representa o segmento OJ'?

---

4) Vamos agora realizar a divisão de $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$ utilizando-se do Experimento Mental!

Considerações

Essas atividades foram pensadas com o intuito de criar um ambiente construtivo, dentro do próprio contexto da matemática, que possibilite os alunos a interpretar e criar significados para as operações com frações e estimulando o aluno a vivenciar uma relação dialética com o conhecimento, apresentando-o uma Matemática dinâmica e não mecanizada.

Durante sua elaboração, buscou-se apoiar na semiótica pierciana e no princípio da complementaridade de Otte e utilizou-se como metodologia os Experimentos Mentais aplicados à Matemática trazendo uma perspectiva de ensino inovadora que se ancora na concepção histórico-dialética da educação.

Embora esse Produto Educacional não tenha sido aplicado, o desenvolvimento deste representa uma contribuição para o avanço do processo educacional, com o intuito de enriquecer as práticas pedagógicas e facilitar o acesso ao conhecimento de maneira mais dinâmica.

Por fim, espera-se que este produto continue a contribuir para o aprimoramento da educação, com a possibilidade de expansão e adaptação a diferentes contextos e necessidades pedagógicas.

Referências

CRUZ, W. J. **Experimentos mentais: uma nova metodologia para o ensino de Matemática.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, Ltda., 2022a.

CRUZ, W. J. DA. Experimentos mentais como metodologia de ensino: perspectivas teóricas para a soma dos ângulos externos de um triângulo euclidiano. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 1-15, 24 ago. 2024. Acesso em 29 ago. 2024.

CRUZ, W. J. ***O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico***. REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática, [*s. l.*], 16, p. 1-26, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 7 jan. 2023.

GADOTTI, M. **Concepção dialética da educação: um estudo introdutório.** 10. ed. São Paulo: Cortez, 1997

OTTE, M. Arithmetic and Geometry: Some Remarks on the concept of complementary. **Study in Philosophy and Education,** v.10, p. 37-62. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990.

OTTE, M. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática.** Tradução: Raul Fernando Neto. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

WIELEWSKI, S. A. **Pensamento instrumental e pensamento relacional na Educação Matemática.** 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

Nota para o professor:

Heurística do Experimento Mental sobre a soma de frações por meio de segmentos

O objetivo desse Experimento Mental é somar $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Do ponto de vista semiótico, essas frações serão representadas como partes de segmentos de reta, a partir de um segmento considerado, o qual será indicado por unidade. Este experimento pode ser dividido em duas partes, a primeira tem como objetivo encontrar as frações como partes do segmento unidade e a segunda de desenvolver a soma.

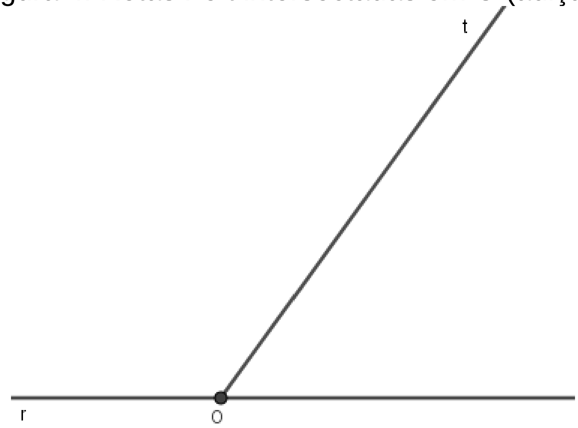
PRIMEIRA PARTE:

Obter a fração um terço da unidade considerada e a fração três meios da unidade considerada.

Forma: Parte-se de uma hipótese ou suposição por meio de uma representação do objeto considerado.

- Considerar duas retas fixas, r e t, que intersectam em um ponto O.

Figura 4: Retas r e t intersectadas em O (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

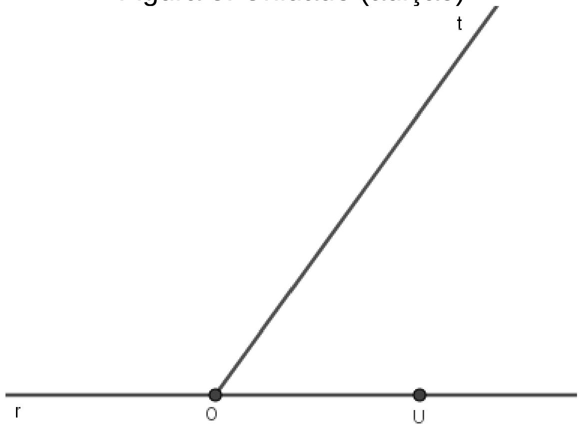
- Construir segmentos que tenham início em O e extremidades em um ponto sobre essas retas fixas e serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por:

$$OO = 0 \quad \text{ou} \quad 0 = OO$$

- Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denomina-lo de U. Nomeá-lo de segmento OU de segmento 1 ou unidade, simbolicamente, representado por:

$$OU = 1$$

Figura 5: Unidade (adição)

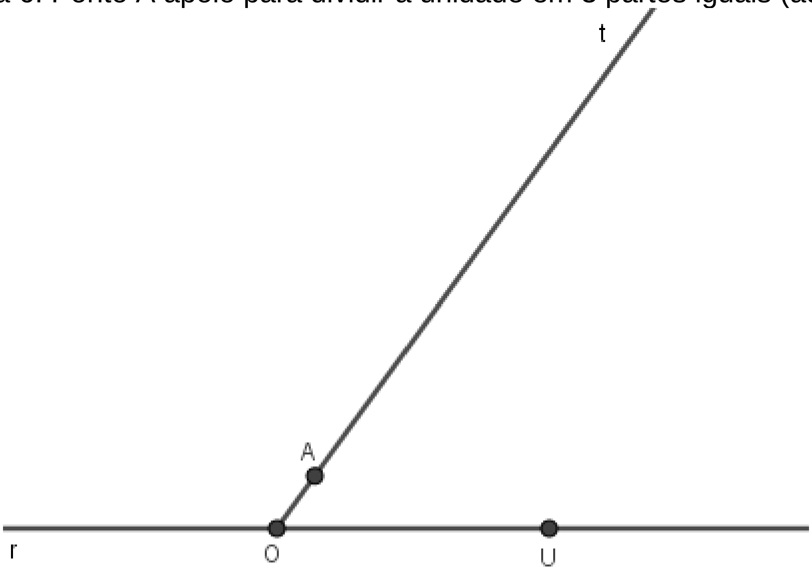


Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova que, ainda, não está contida nos dados do problema. É o processo abdutivo no desenvolvimento do Experimento.

- Marcar sobre a reta t um ponto A.

Figura 6: Ponto A apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (adição)



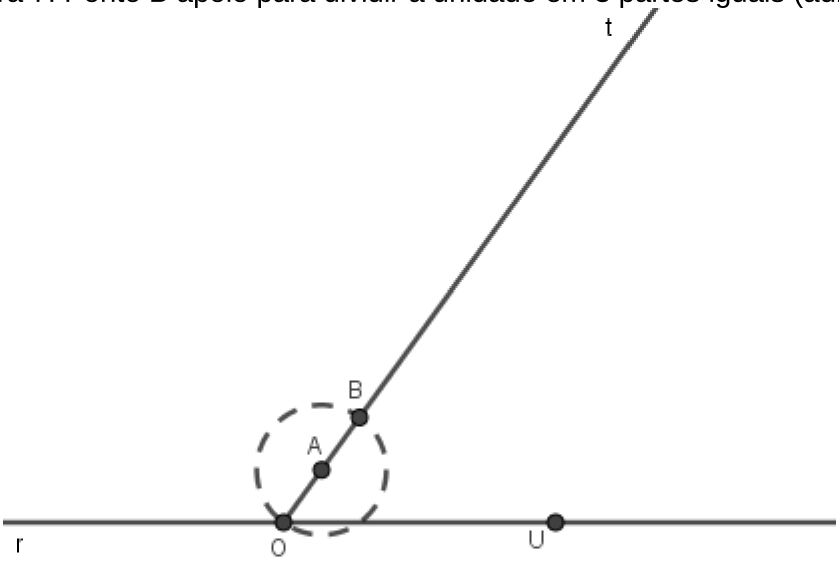
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Compreensão e dependência: Neste momento, será desenvolvido um processo dedutivo para encontrar a fração $\frac{1}{3}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a um terço da unidade considerada. O sistema de representação, neste caso, será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em A de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto B, interseção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} AB = OA \\ OB = OA + AB \end{array}\right\} OB = OA + OA \Rightarrow OB = 2 \times OA$$

Figura 7: Ponto B apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (adição)



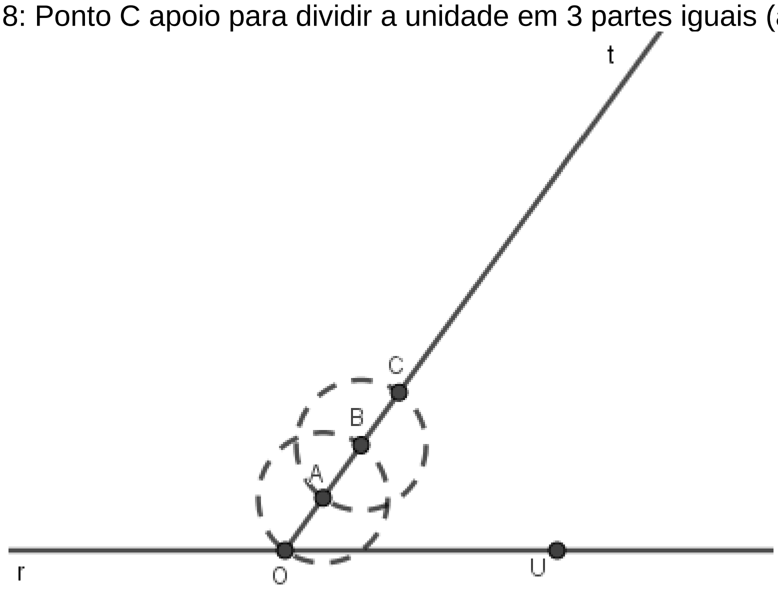
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Criar uma nova circunferência com centro em B e raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto C, interseção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} BC = OA \\ OC = OB + BC \end{array}\right\} OC = OB + OA$$

Como $OB = 2 \times OA$ então $OC = 2 \times OA + OA \Rightarrow OC = 3 \times OA$

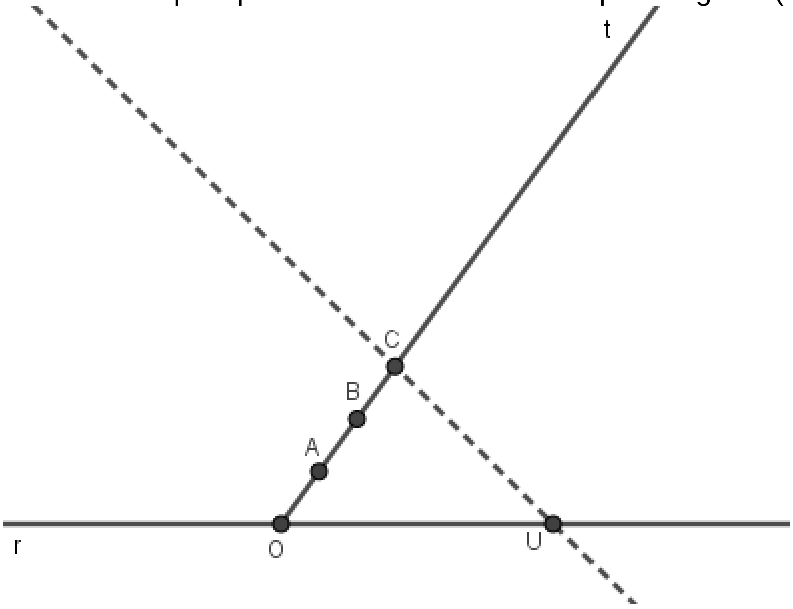
Figura 8: Ponto C apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e C.

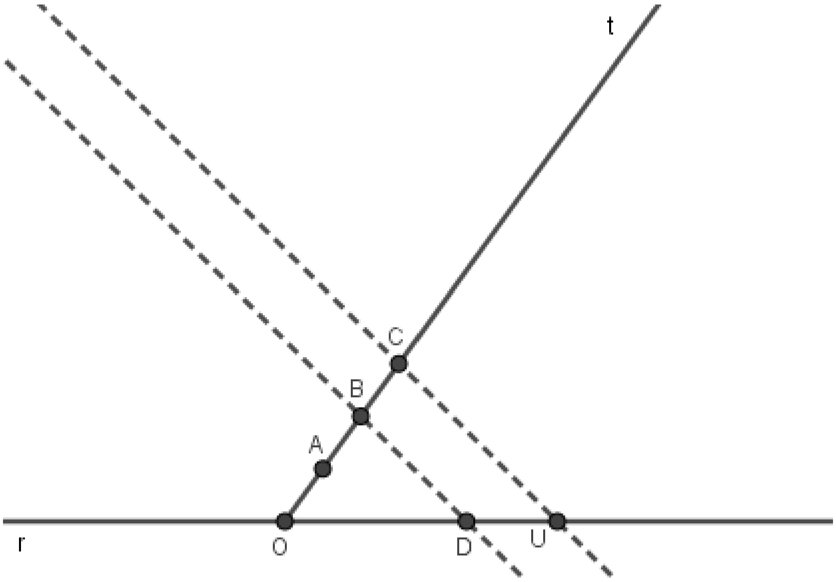
Figura 9: Reta UC apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto B e marcar o ponto de interseção D com a reta r.

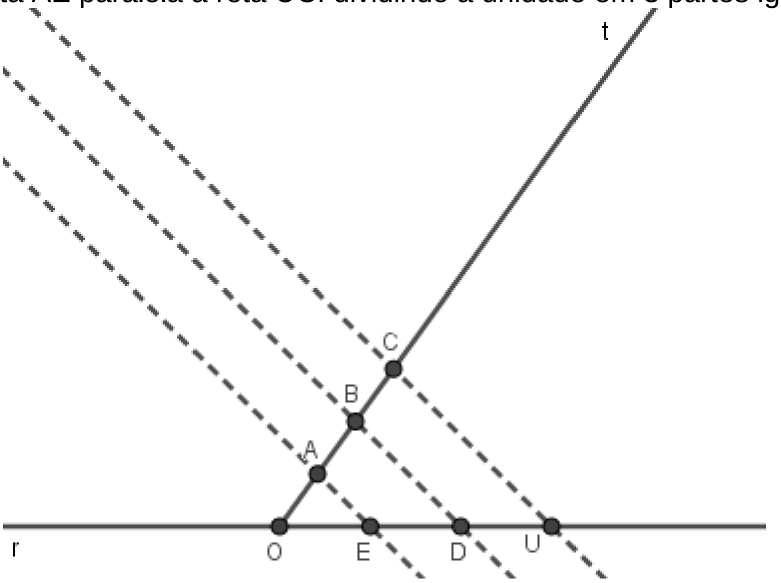
Figura 10: Reta BD paralela à reta UC: dividindo a unidade em 3 partes iguais (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto A e marcar o ponto de interseção E com a reta r.

Figura 11: Reta AE paralela à reta UC: dividindo a unidade em 3 partes iguais (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Os triângulos OAE, OBD e OCU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e pelo fato de $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ e $\overline{CU}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}E$, $O\hat{B}D$ e $O\hat{C}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OU}{OC} = \frac{OD}{OB}$$

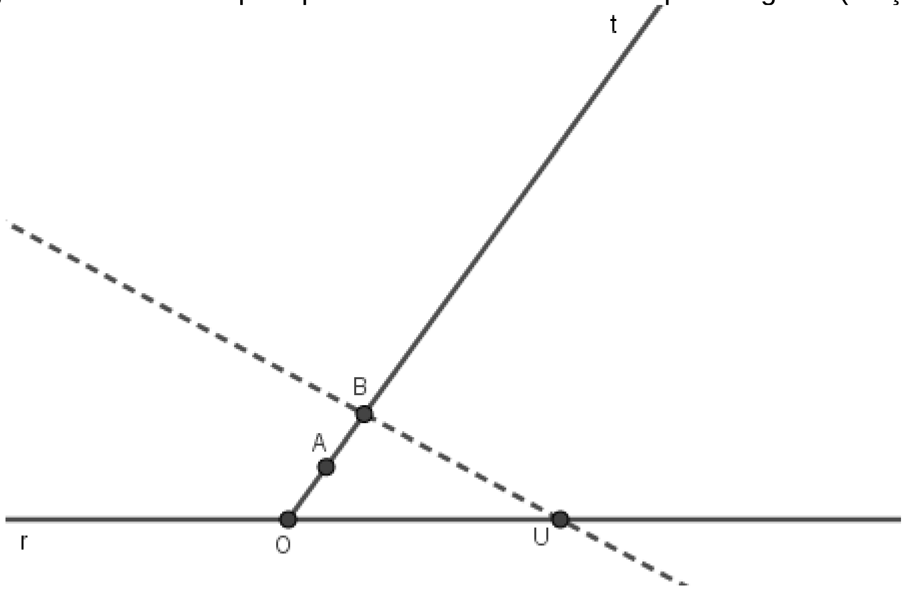
- Da igualdade $\frac{OE}{OA} = \frac{OU}{OC}$, tem-se que $OE = \frac{OU \times OA}{OC}$, como $OC = 3 \times OA$, então $OE = \frac{OU \times OA}{3 \times OA} = \frac{OU}{3} = \frac{1}{3} \times OU$, como $OU = 1$, $OE = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.

- Da igualdade $\frac{OU}{OC} = \frac{OD}{OB}$, tem-se que $OD = \frac{OU \times OB}{OC}$, como $OC = 3 \times OA$ e $OB = 2 \times OA$, então $OD = \frac{OU \times 2 \times OA}{3 \times OA} = \frac{OU \times 2}{3} = \frac{2}{3} \times OU$, como $OU = 1$, $OD = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

Compreensão e dependência: Um novo processo dedutivo será desenvolvido para encontrar, dessa vez, a fração $\frac{3}{2}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a unidade mais um meio dela. O sistema de representação, neste caso, também será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Começar traçando uma reta passando pelos pontos B e U.

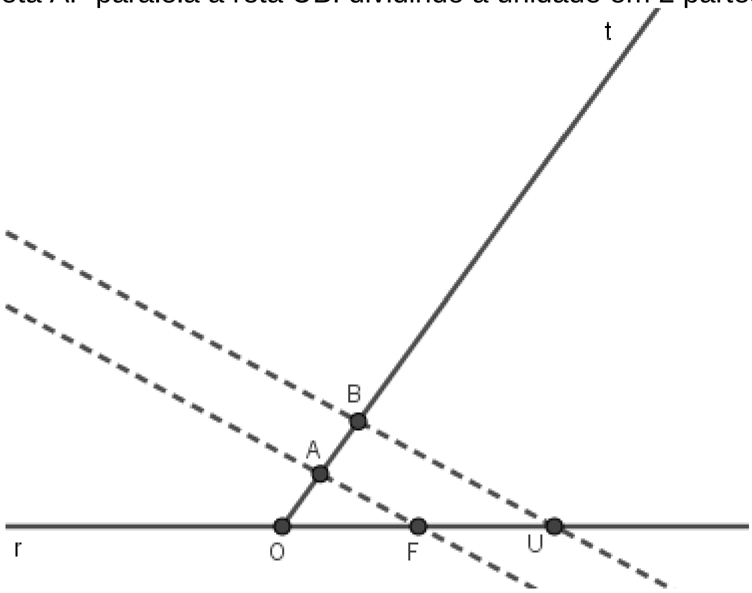
Figura 12: Reta UB apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Em seguida, traçar uma reta paralela à reta BU, passando pelo ponto A e marcar o ponto F.

Figura 13: Reta AF paralela à reta UB: dividindo a unidade em 2 partes iguais (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Os triângulos OAF e OBU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois possuem um ângulo em comum e pelo fato de $\overline{AF}$ e $\overline{BU}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}F$ e $O\hat{B}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OF}{OA} = \frac{OU}{OB}$$

- Dessa igualdade, tem-se que $OF = \frac{OU \times OA}{OB}$, como $OB = 2 \times OA$, então:

$$OF = \frac{OU \times OA}{2 \times OA} = \frac{OU}{2} = \frac{1}{2} \times OU, \text{ como } OU = 1, \ OF = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

- Agora, traçar uma circunferência com centro no ponto U e de raio equivalente ao segmento OF, em seguida, marcar o ponto G de interseção com a reta r.

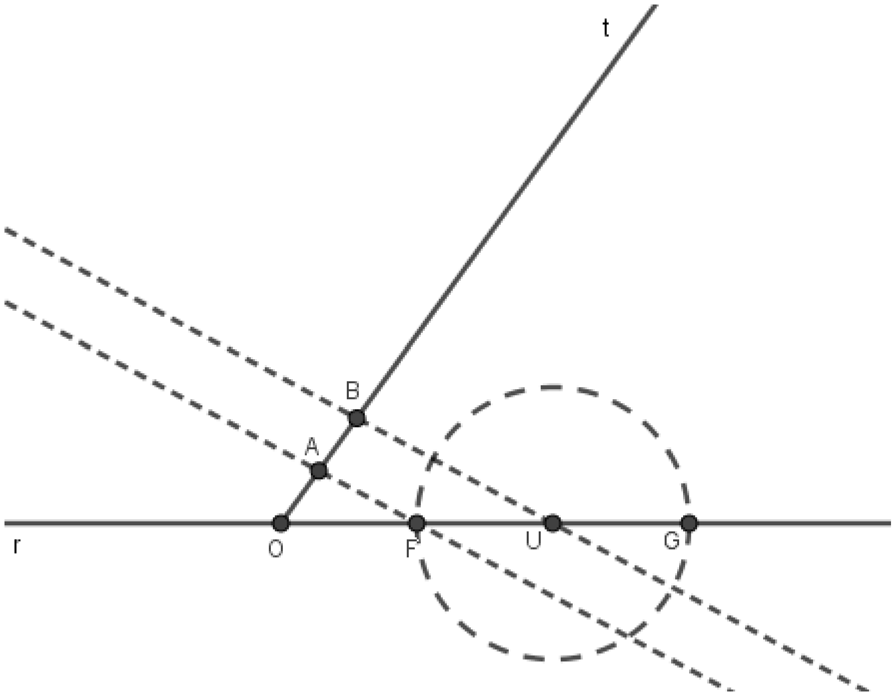
$$\left.\begin{array}{l} OF = FU \\ OU = OF + FU \end{array}\right\} OU = OF + OF \Rightarrow 2 \cdot OF,$$

e

$$\left.\begin{array}{l} UG = OF \\ OU = 2 \cdot OF \\ OG = OU + UG \end{array}\right\} OG = 2 \cdot OF + OF \Rightarrow OG = 3 \cdot OF.$$

Como, $OF = \frac{1}{2}$, então $OU = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ e $OG = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Figura 14: Segmento OG: fração $\frac{3}{2}$ (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Revelação: Realizar descobertas ou contradições na forma de pensar. Na atividade em questão, algumas conclusões foram obtidas e foram feitas generalizações desses resultados.

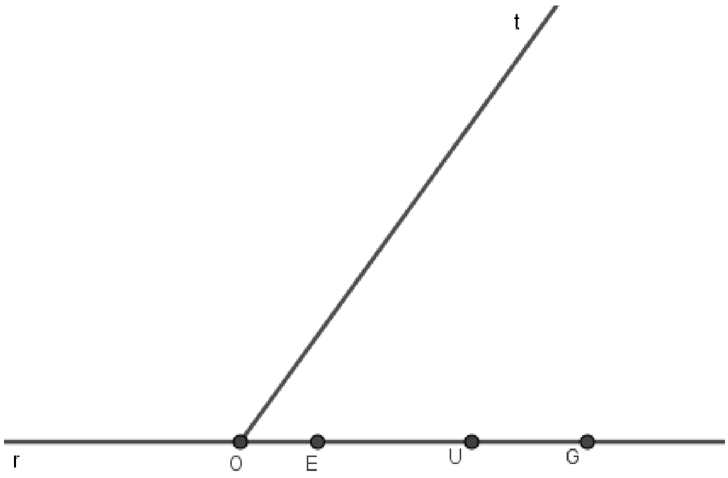
- Uma fração unitária, ou seja, que representa uma fração com numerador igual a 1, indicada por $\frac{1}{n}$, pode ser representada por um segmento que é uma parte da subdivisão em n partes da unidade, ou seja, a fração é uma subunidade da unidade considerada.
- Já uma fração não unitária indicada por $\frac{m}{n}$, pode ser representada por um segmento que é “m” partes da subdivisão da unidade em n partes.
- Visto que $OE = \frac{1}{3}$ e $OG = \frac{3}{2}$ então os segmentos OE e OG representam respectivamente as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

Segunda Parte:

Desenvolver um processo para se chegar à soma das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

Forma: Tomar como hipótese a unidade e as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ obtidas sobre a reta r no Experimento anterior e a reta t para auxiliar na construção.

Figura 15: Unidade, fração $\frac{1}{3}$ e fração $\frac{3}{2}$ (adição)



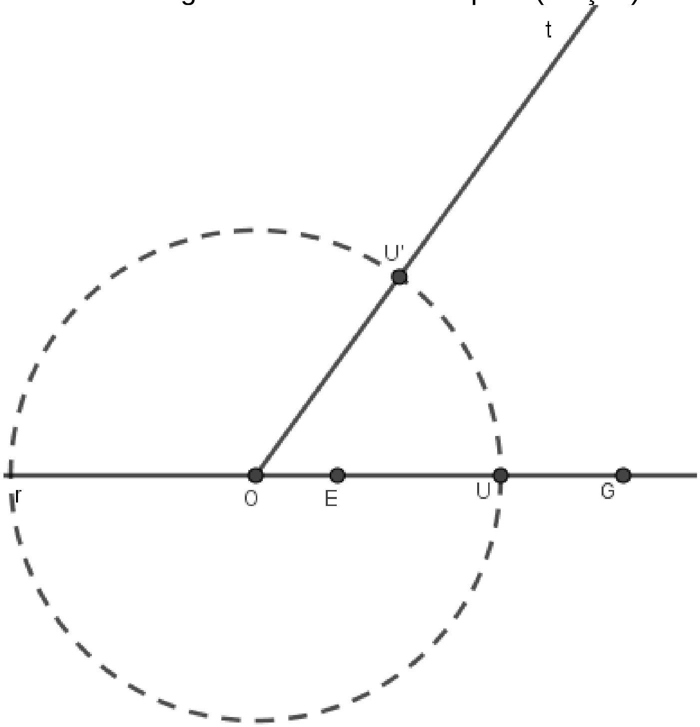
Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova surge, um pensamento abdutivo de traçar retas paralelas, circunferências, modificando o diagrama.

- Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto U' sobre reta t, que equivalente ao segmento 1 ($\overline{OU}$), assim o segmento OU' pode ser representado simbolicamente por:

$$OU' = 1$$

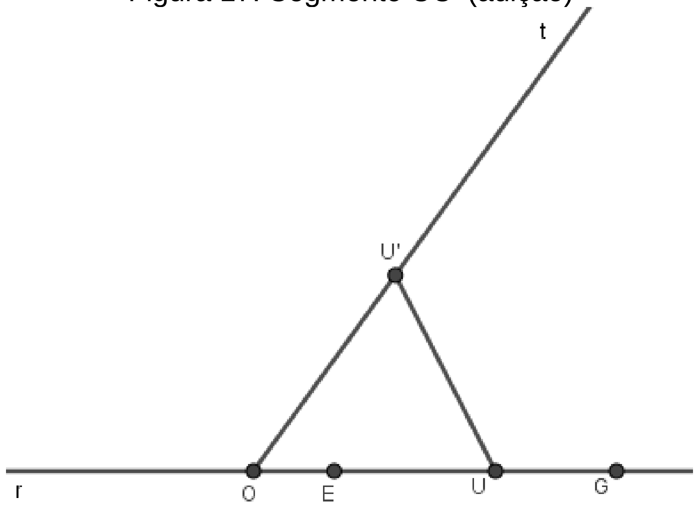
Figura 16: Unidade de apoio (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Ligar os pontos U e U', obtendo assim o segmento UU'.

Figura 17: Segmento UU' (adição)

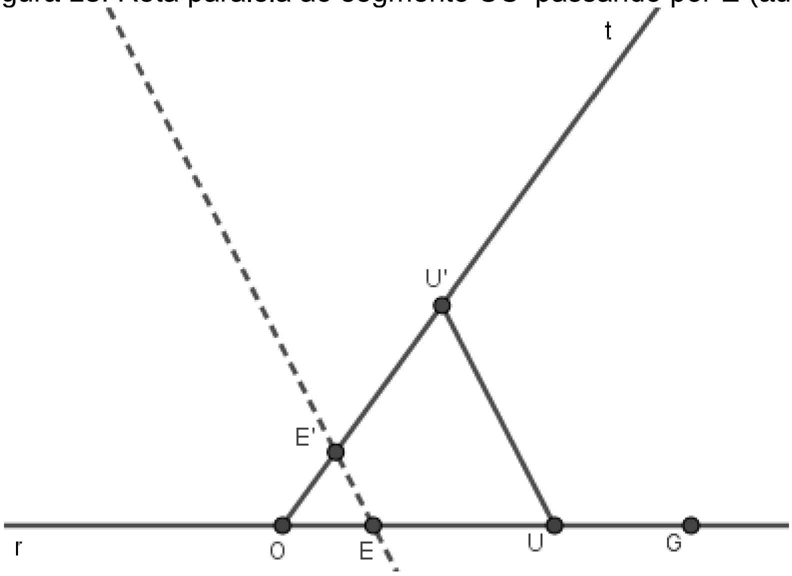


Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

Compreensão e Dependência: Início do processo dedutivo, por meio da geometria euclidiana, mais especificamente, levando em consideração o postulado das paralelas.

- Traçar uma reta paralela a UU’ passando pelo ponto E e marcar o ponto E’ de intersecção com a reta t.

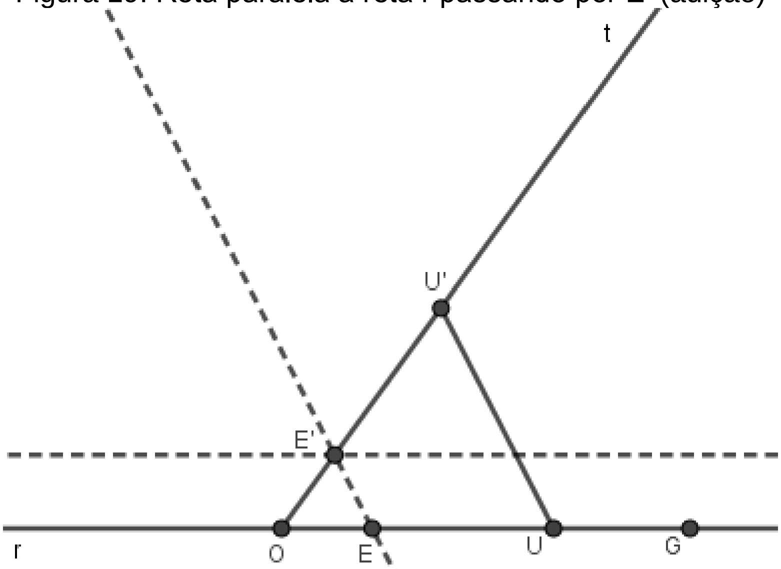
Figura 18: Reta paralela ao segmento UU’ passando por E (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Por construção os triângulos OEE’ e OUU’ são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo. Como OU = 1 e OU’ = 1 então OE = OE’.
- Traçar uma reta paralela à reta r pelo ponto E’.

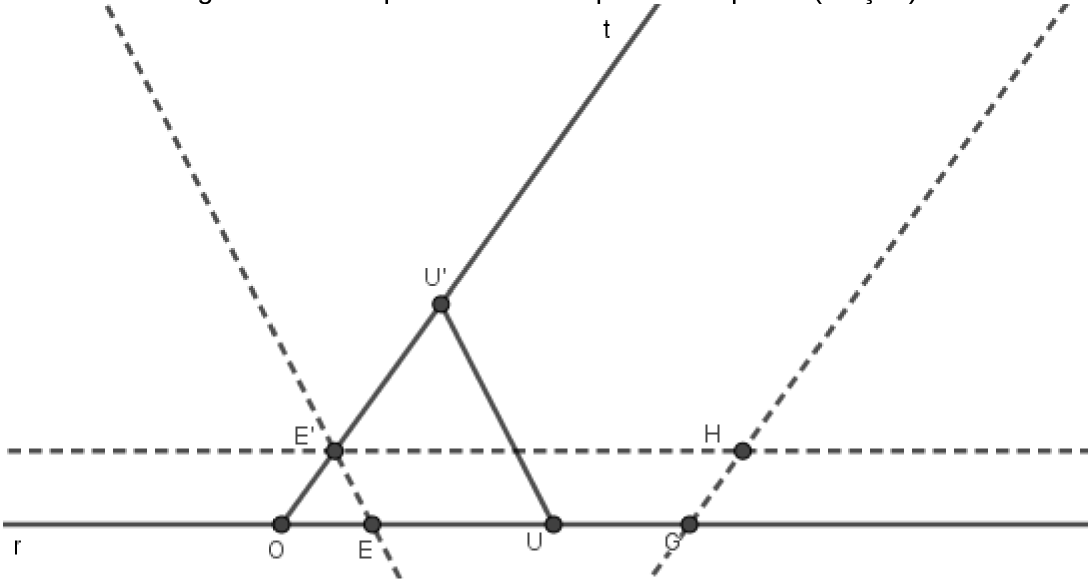
Figura 19: Reta paralela à reta r passando por E’ (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta t passando pelo ponto G e marcar o ponto H onde essa reta e a reta traçada anteriormente se intersectam.

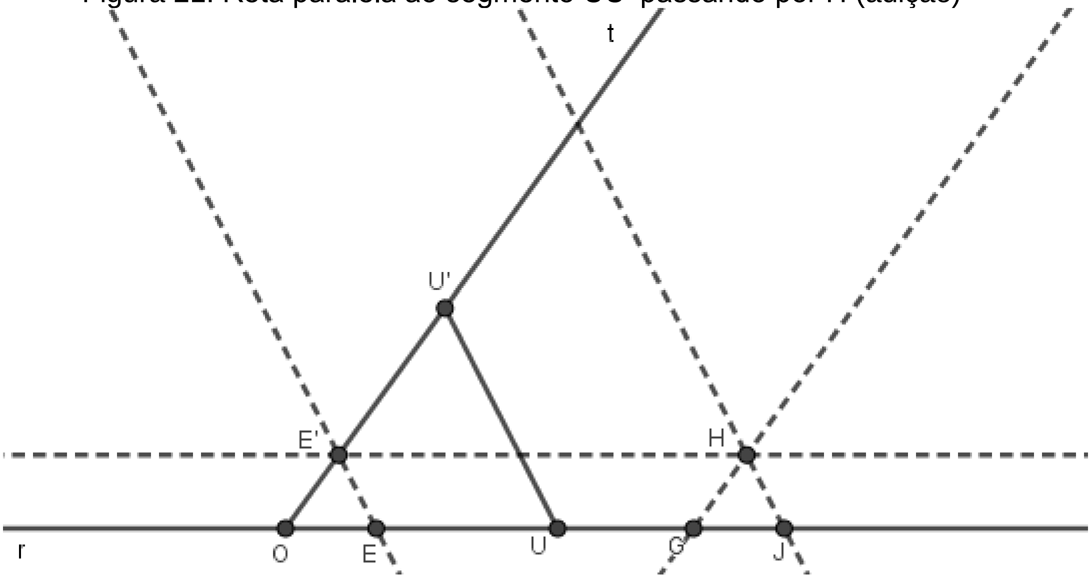
Figura 20: Reta paralela à reta t passando por G (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela ao segmento UU’ pelo ponto H e marcar o ponto de intersecção com a reta r.

Figura 21: Reta paralela ao segmento UU’ passando por H (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

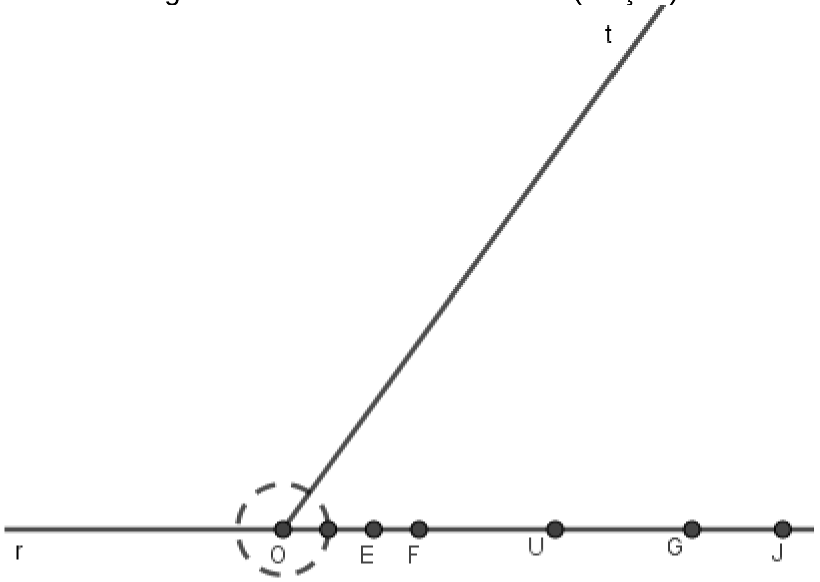
- Note que por construção OG é paralelo a E’H e OE’ é paralelo a GH, formando, assim, um paralelogramo OE’HG, então a fração OG é equivalente a E’H.
- Por construção EE’ é paralelo a UU’ e HJ é paralelo a UU’, logo, EE’ é paralelo a HJ, assim, EE’HJ é um paralelogramo, com isso, tem-se que E’H é equivalente a EJ.

- Como a fração OG é equivalente E’H e E’H é equivalente a EJ, então a fração OG é equivalente à EJ. Portanto, a fração OE mais a fração OG é igual a fração OJ.

Revelação: Por meio do processo abdutivo de tomar uma circunferência específica e por meio de realizações de alguns processos dedutivos, pode-se revelar quanto mede o segmento equivalente à soma das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

- Marcar um ponto sobre a reta r que represente uma fração que é a diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$. Para isso, utilizar uma circunferência de raio igual à diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ com centro em O (Processo abdutivo).

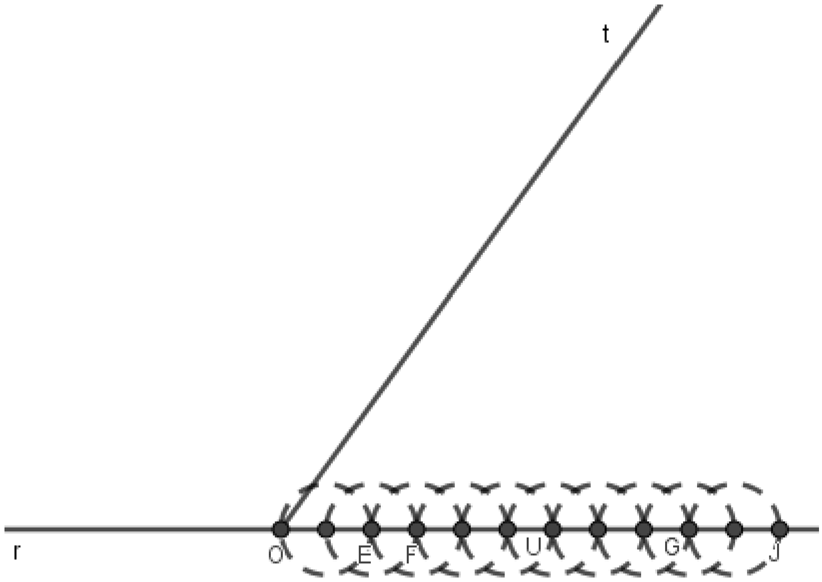
Figura 22: Medida de subdivisão (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Por meio de um processo dedutivo, replicar circunferências de raio igual a diferença entre as frações unitárias que deram origem às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2}$ de forma a dividir todo o segmento OJ. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são interseção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto J.

Figura 23: Soma fração $\frac{1}{3}$ e fração $\frac{3}{2}$ (adição)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Note que o segmento unidade está dividido em 6 partes iguais, como a fração OE é composta por duas partes dessa, então, OE é $\frac{2}{6}$ da unidade OU. Já a fração OG é composta por 9 partes, logo OG é $\frac{9}{6}$ da unidade e a fração OJ é composta por 11 partes, ou seja, OJ e $\frac{11}{6}$ da unidade.
- Com isso, conclui-se que $OE + OG = OJ \therefore \frac{2}{6} + \frac{9}{6} = \frac{11}{6}$.

Comparação:

- As frações equivalentes representam a mesma parte do segmento 1.
- As frações são partes de subdivisões de unidades, que são subunidades dessa unidade. Assim, para que se obtenha o resultado da soma dessas frações é necessário que elas sejam representadas em uma mesma subunidade. Por exemplo: o milímetro e o centímetro são subunidades do metro, para que se possa somar centímetro com milímetro é necessário transformar um deles para que ambos estejam representados em uma mesma unidade. Na fração acontece a mesma coisa, ou seja, para somar duas frações é necessário que elas estejam representadas em uma mesma subdivisão da unidade considerada, assim, a transformação necessária para que elas estejam

representadas em uma mesma subdivisão da unidade é obter frações que sejam equivalentes a elas, em outra subunidade da unidade considerada.

Heurística do Experimento Mental sobre a subtração de frações por meio de segmentos

O objetivo desse Experimento Mental é realizar o cálculo $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$. Do ponto de vista semiótico, essas frações serão representadas como partes de segmentos de reta, a partir de um segmento considerado, o qual será indicado por unidade. Este experimento pode ser dividido em duas partes, a primeira tem como objetivo encontrar as frações como partes do segmento unidade e a segunda de desenvolver a subtração.

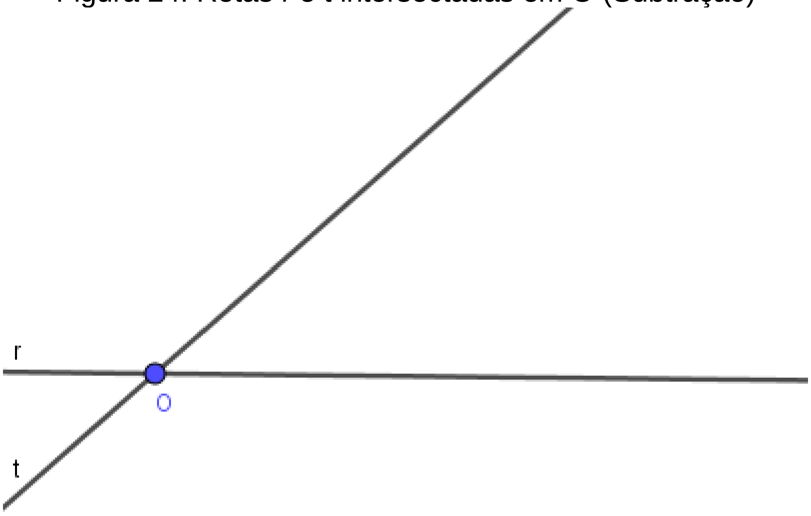
PRIMEIRA PARTE:

Obter a fração três meio da unidade considerada e a fração um quarto da unidade considerada.

Forma: Parte-se de uma hipótese ou suposição por meio de uma representação do objeto considerado.

- Considerar duas retas fixas, r e t, que intersectam em um ponto O.

Figura 24: Retas r e t intersectadas em O (Subtração)



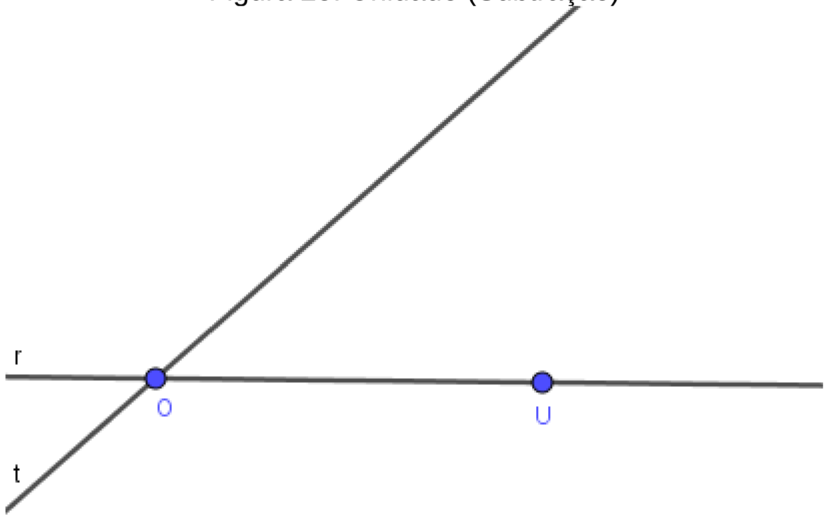
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Construir segmentos que tenham início em O e extremidades em um ponto sobre essas retas fixas. Serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por: $OO = 0$

- Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denomina-lo de U. Nomeá-lo de segmento OU de segmento 1 ou unidade, simbolicamente, representado por:

$$OU = 1$$

Figura 25: Unidade (Subtração)

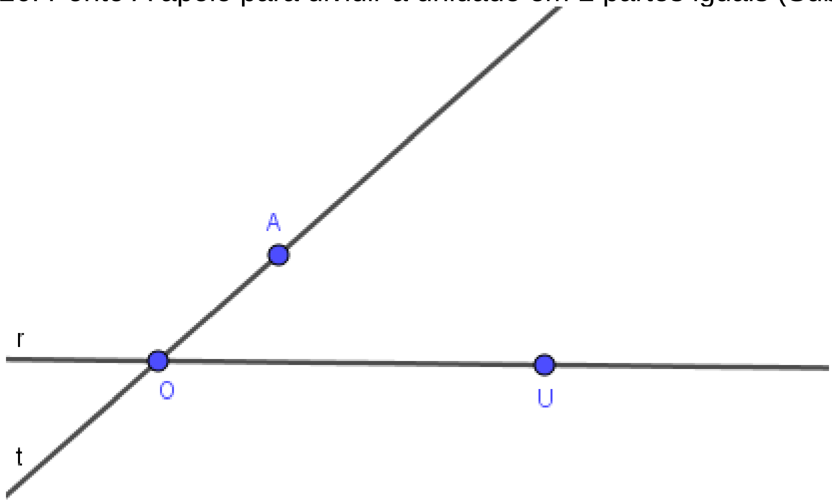


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova que, ainda, não está contida nos dados do problema. É o processo abdutivo no desenvolvimento do Experimento.

- Marcar sobre a reta t um ponto A.

Figura 26: Ponto A apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (Subtração)



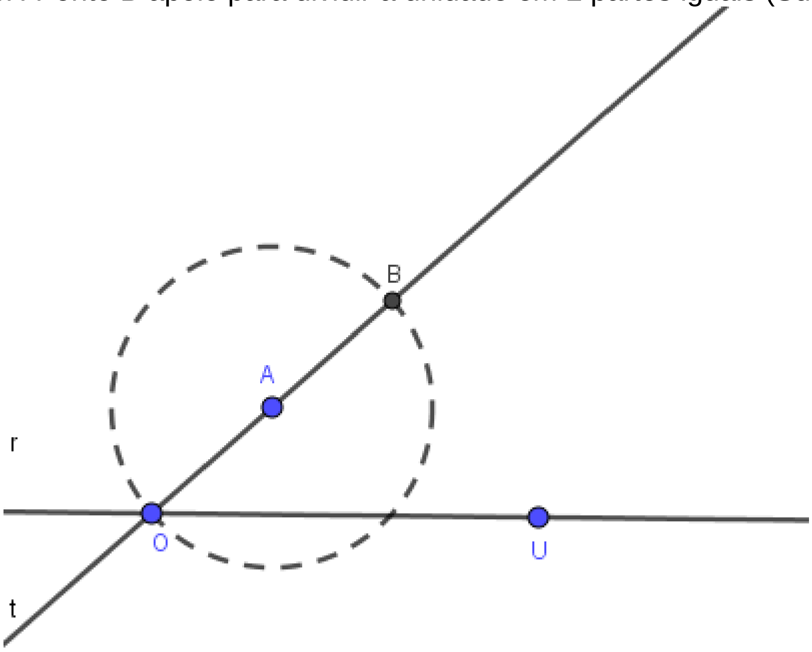
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e dependência: Neste momento, será desenvolvido um processo dedutivo para encontrar a fração $\frac{3}{2}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a três metades da unidade considerada ou a unidade considerada mais meio dela. O sistema de representação, neste caso, será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em A de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto B, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{matrix} AB = OA \\ OB = OA + AB \end{matrix}\right\} OB = OA + OA \Rightarrow OB = 2 \times OA$$

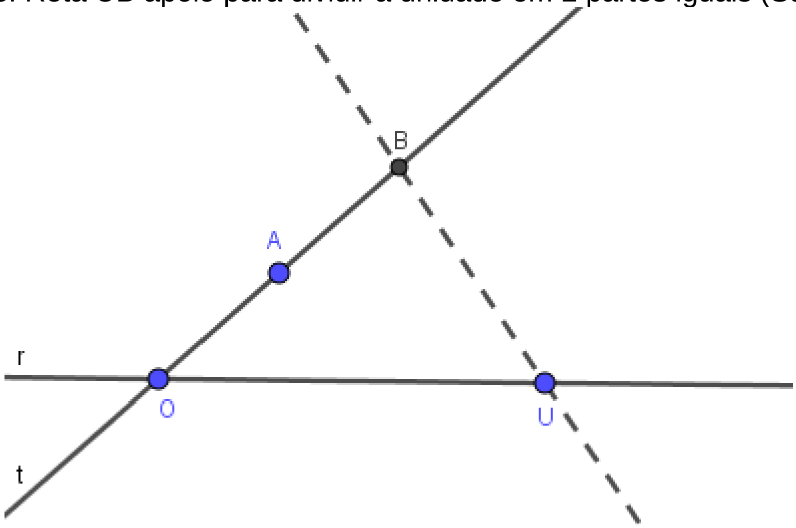
Figura 27: Ponto B apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e B.

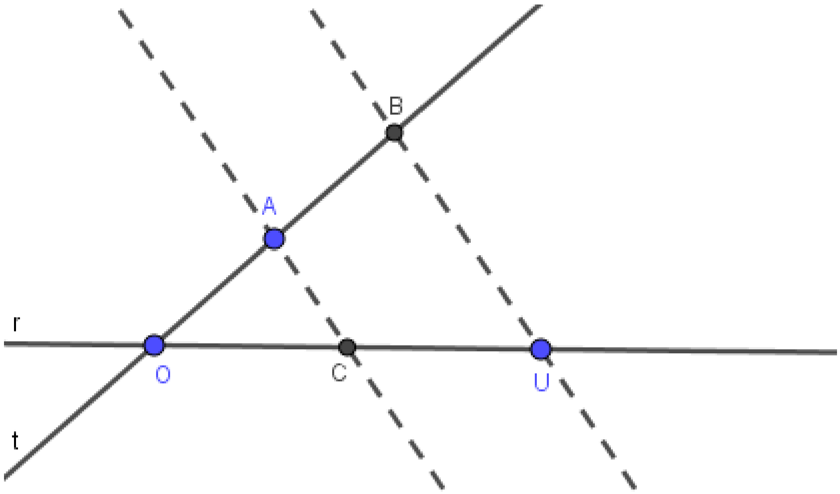
Figura 28: Reta UB apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UB passando pelo ponto A e marcar o ponto de interseção C com a reta r.

Figura 29: Reta CA paralela à reta UB: dividindo a unidade em 2 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Os triângulos OAC e OBU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e, pelo fato de $\overline{AC}$ e $\overline{BU}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}C$ e $O\hat{B}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OU}{OB}$$

- Da igualdade $\frac{OC}{OA} = \frac{OU}{OB}$, tem-se que $OC = \frac{OU \times OA}{OB}$, como $OB = 2 \times OA$, então $OC = \frac{OU \times OA}{2 \times OA} = \frac{OU}{2} = \frac{1}{2} \times OU$, como $OU = 1$, $OC = \frac{1}{2} \times OU = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

- Agora, traçar uma circunferência com centro em U e de raio equivalente ao segmento OC, em seguida, marcar o ponto D intersecção da circunferência com a reta r.

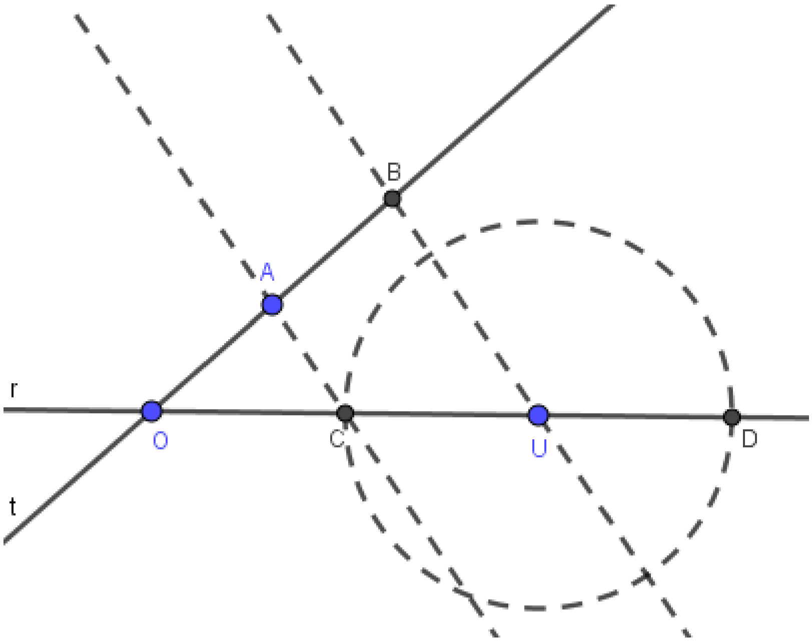
$$\left.\begin{array}{l} OC = CU \\ OU = OC + CU \end{array}\right\} OU = OC + OC \Rightarrow OU = 2 \times OC,$$

e

$$\left.\begin{array}{l} UD = OC \\ OU = 2 \times OC \\ OD = OU + UD \end{array}\right\} OD = 2 \times OC + OC \Rightarrow OD = 3 \times OC.$$

Como, $OC = \frac{1}{2}$, então $OU = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ e $OD = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Figura 30: Segmento OD: fração $\frac{3}{2}$ (Subtração)



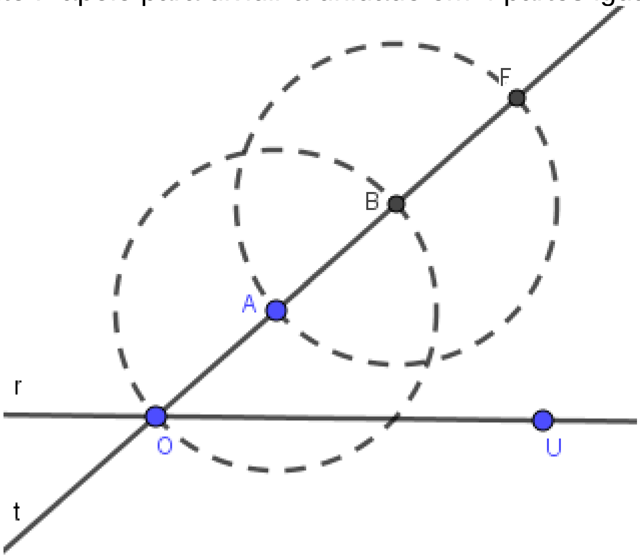
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e dependência: Um novo processo dedutivo será desenvolvido para encontrar, dessa vez, a fração $\frac{1}{4}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a quarta parte da unidade. O sistema de representação, neste caso, também será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em B de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto F, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} BF = OA \\ OB = 2 \times OA \\ OF = OB + BF \end{array}\right\} OF = 2 \times OA + OA \Rightarrow OF = 3 \times OA$$

Figura 31: Ponto F apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Subtração)

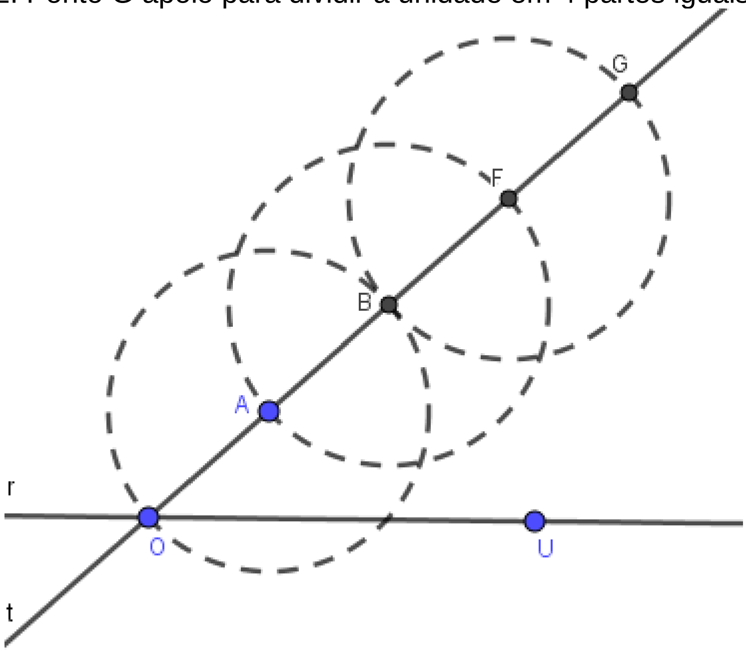


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Criar uma circunferência com centro em F de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto G, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} FG = OA \\ OF = 3 \times OA \\ OG = OF + FG \end{array}\right\} OF = 3 \times OA + OA \Rightarrow OF = 4 \times OA$$

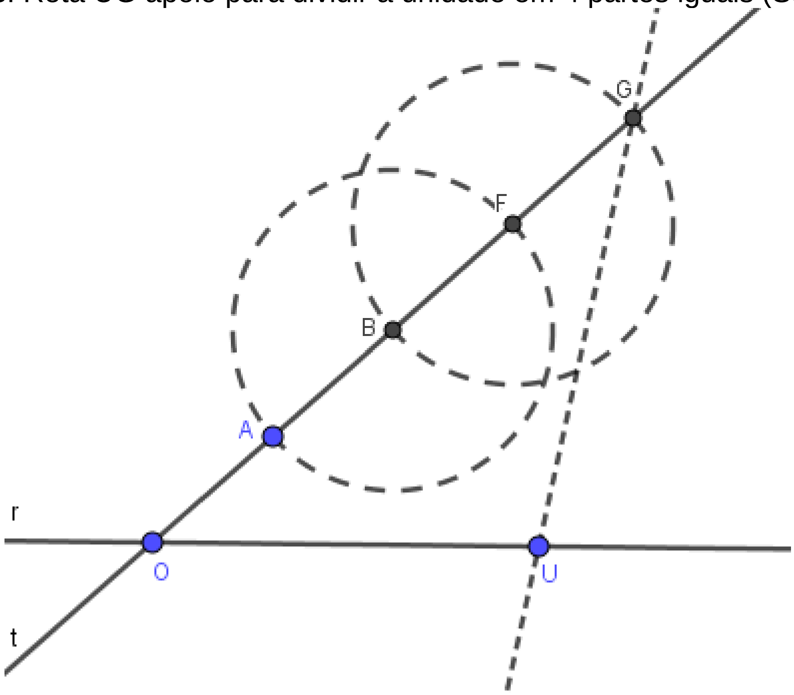
Figura 32: Ponto G apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e G.

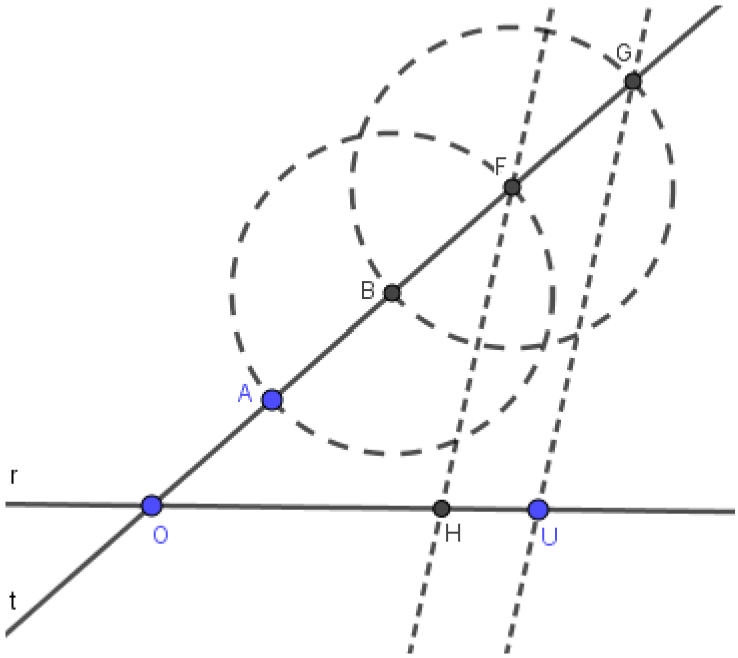
Figura 33: Reta UG apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UG passando pelo ponto F e marcar o ponto de intersecção H com a reta r.

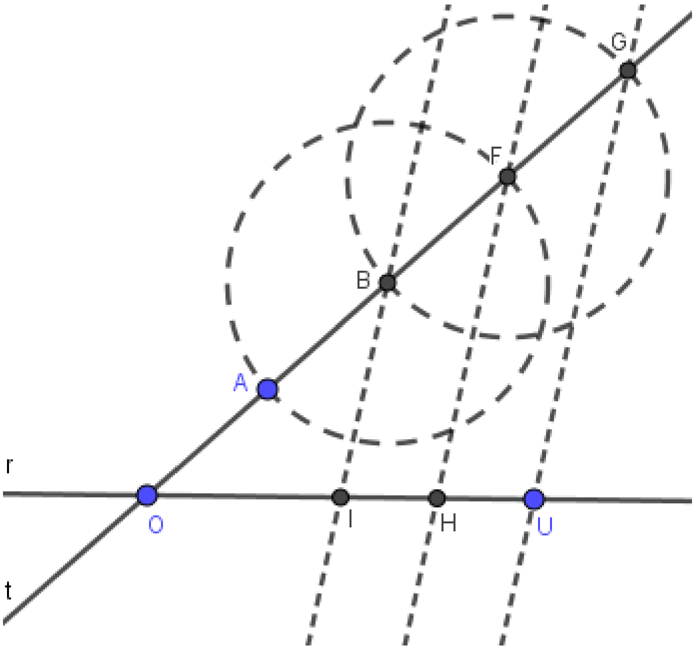
Figura 34: Reta HF paralela à reta UG: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UG passando pelo ponto B e marcar o ponto de intersecção I com a reta r.

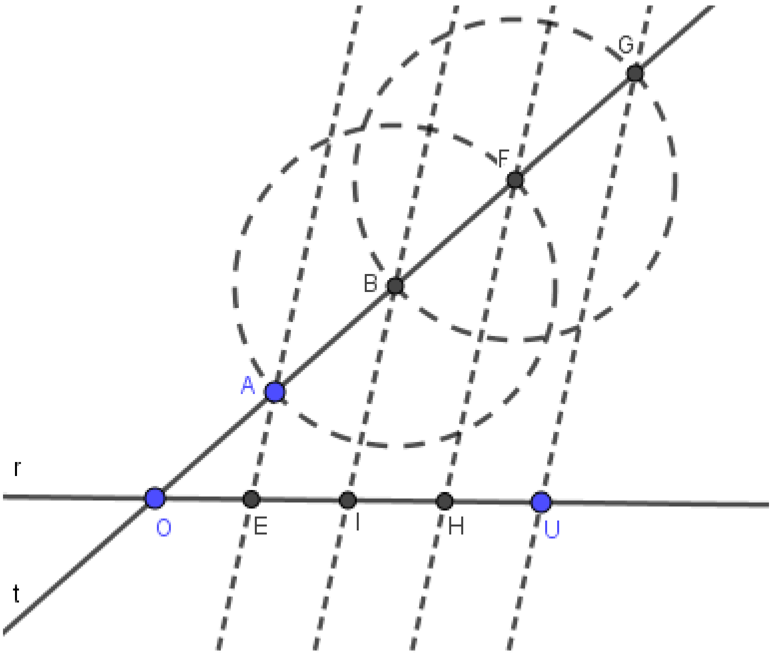
Figura 35: Reta BI paralela à reta UG: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UG passando pelo ponto A e marcar o ponto de intersecção E com a reta r.

Figura 36: Reta AE paralela à reta UG: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Os triângulos OAE, OIB, OHF e OUG são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e, pelo fato de $\overline{AE}$, $\overline{BI}$, $\overline{FH}$ e

$\overline{UG}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}E$, $O\hat{B}I$, $O\hat{F}H$ e $O\hat{G}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OI}{OB} = \frac{OH}{OF} = \frac{OU}{OG}$$

- Da igualdade $\frac{OE}{OA} = \frac{OU}{OG}$, tem-se que $OE = \frac{OU \times OA}{OG}$, como $OG = 4 \times OA$, então $OE = \frac{OU \times OA}{4 \times OA} = \frac{OU}{4} = \frac{1}{4} \times OU$, como $OU = 1$, $OE = \frac{1}{4} \times OU = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$.

- Da igualdade $\frac{OI}{OB} = \frac{OU}{OG}$, tem-se que $OI = \frac{OU \times OB}{OG}$, como $OG = 4 \times OA$ e $OB = 2 \times OA$, então $OI = \frac{OU \times 2 \times OA}{4 \times OA} = \frac{2 \times OU}{4} = \frac{2}{4} \times OU$, como $OU = 1$, $OI = \frac{2}{4} \times OU = \frac{2}{4} \times 1 = \frac{2}{4}$.

- Da igualdade $\frac{OH}{OF} = \frac{OU}{OG}$, tem-se que $OH = \frac{OU \times OF}{OG}$, como $OG = 4 \times OA$ e $OF = 3 \times OA$, então $OH = \frac{OU \times 3 \times OA}{4 \times OA} = \frac{3 \times OU}{4} = \frac{3}{4} \times OU$, como $OU = 1$, $OH = \frac{3}{4} \times OU = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$.

Visto que $OD = \frac{3}{2}$ e $OE = \frac{1}{4}$, então os segmentos OD e OE representam respectivamente as frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

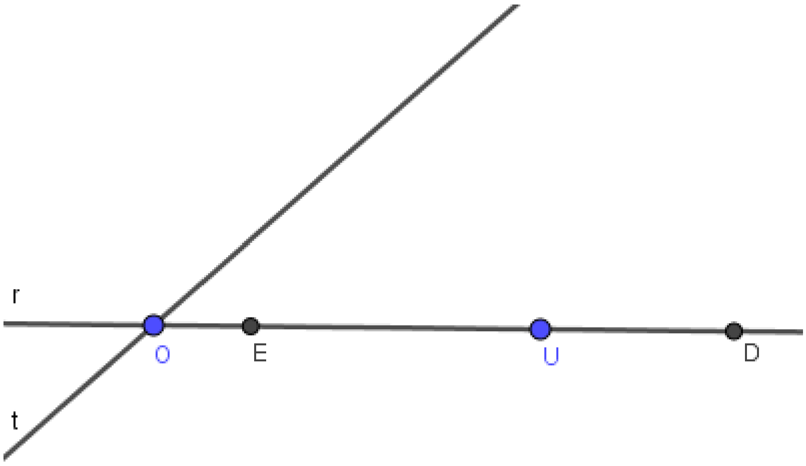
Continuando o Experimento Mental, a segunda fase é desenvolver um processo para se chegar à subtração das frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Segunda Parte:

Desenvolver um processo para se chegar à subtração das frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Forma: Tomar como hipótese a unidade e as frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$ obtidas sobre a reta r no Experimento anterior e a reta t para auxiliar na construção.

Figura 37: Unidade, fração $\frac{3}{2}$ e fração $\frac{1}{4}$ (Subtração)



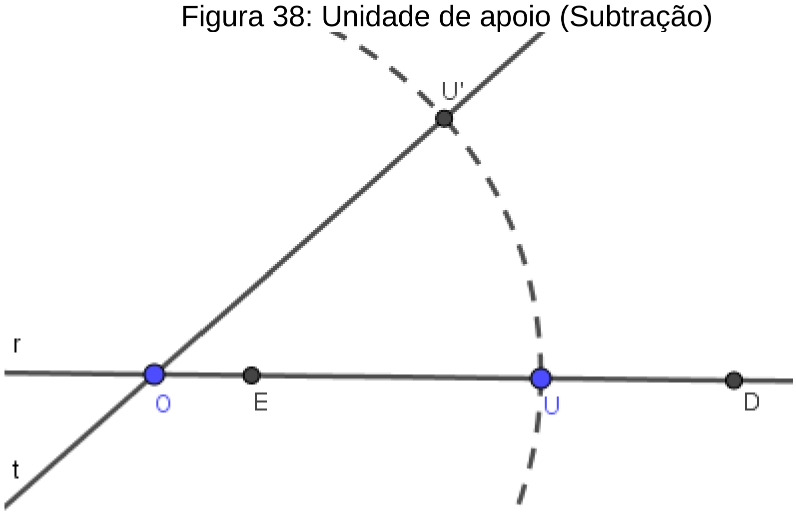
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova surge, um pensamento abdutivo de traçar retas paralelas, circunferências, modificando o diagrama.

- Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto U' sobre reta t, que equivalente ao segmento 1 ($\overline{OU}$). Assim, o segmento OU' pode ser representado simbolicamente por:

$$OU' = 1$$

Figura 38: Unidade de apoio (Subtração)

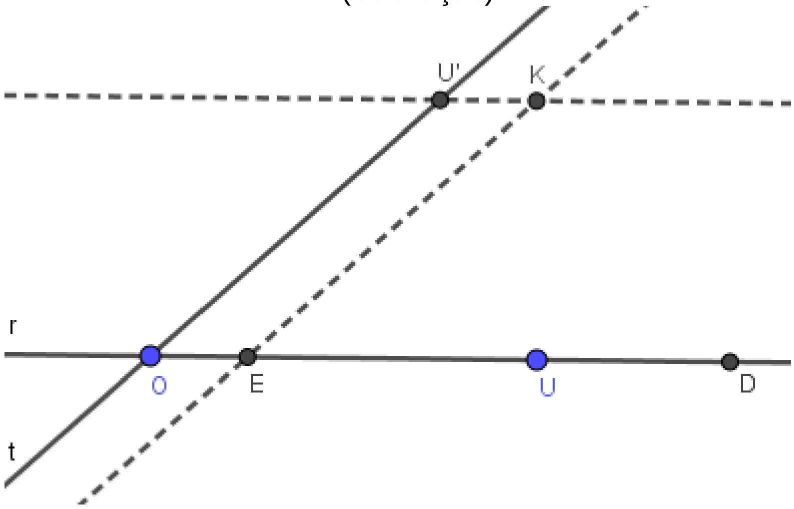


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e Dependência: Início do processo dedutivo, por meio da geometria euclidiana, mais especificamente, levando em consideração o postulado das paralelas.

- Traçar uma reta paralela a reta t passando pelo ponto E e uma reta paralela à reta r passando por U’ e marcar o ponto K de intersecção entre elas.

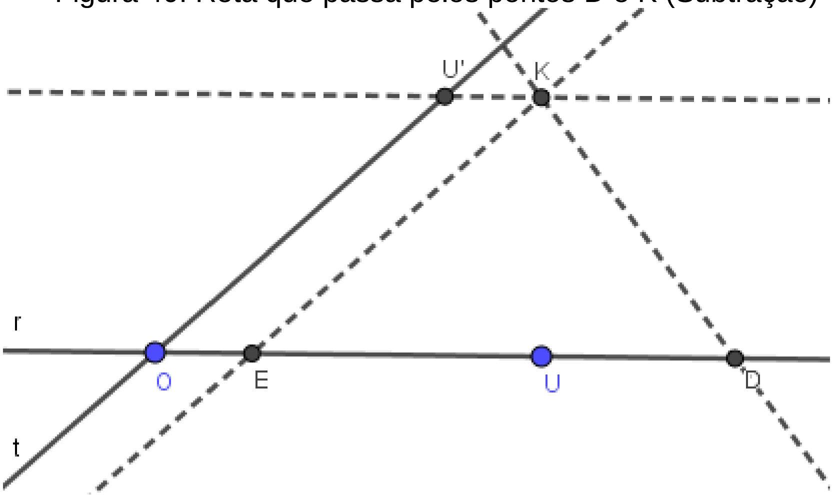
Figura 39: Reta paralela à reta t passando por E e reta paralela à reta r passando por U’ (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Por construção, OEKU’ é um paralelogramo, logo $OE = U'K$ e $OU' = EK$.
- Traçar a reta que passa pelos pontos D e K.

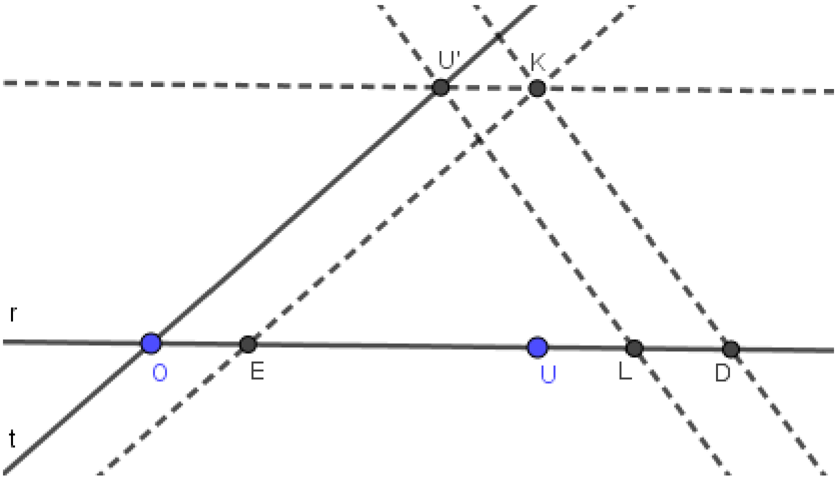
Figura 40: Reta que passa pelos pontos D e K (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta passando por U’ que seja paralela à reta que passa pelos pontos D e K e marcar o ponto de intersecção L com a reta r.

Figura 41: Ponto L, resultado da subtração $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$ (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Como $OU'=EK$, os ângulos $U'OL$ e KED são iguais (paralelogramo OEKU') e, por construção, os ângulos $OU'L$ e EKD são correspondentes, então os triângulos OU'L e EKD são congruentes pelo caso ângulo, lado, ângulo. Logo, $OL=ED$.

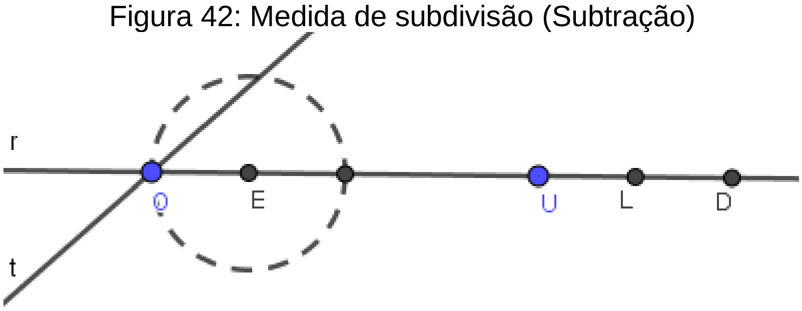
$$\left.\begin{array}{l} OL=ED \\ OD=OE+ED \end{array}\right\} OD=OE+OL \Rightarrow OL=OD-OE$$

- Portanto, como $OD=\frac{3}{2}$ e $OE=\frac{1}{4}$, então $OL=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$.

Revelação: Por meio do processo abdutivo de tomar uma circunferência específica e por meio de realizações de alguns processos dedutivos, pode-se revelar quanto mede o segmento equivalente à subtração $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$.

- Marcar um círculo de raio equivalente ao do segmento OE com centro em E e marcar a interseção com a reta r (Processo abdutivo).

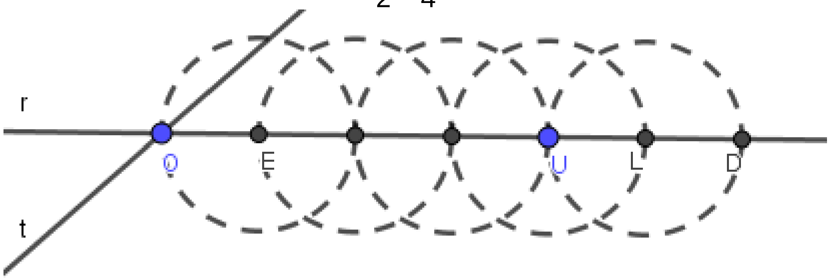
Figura 42: Medida de subdivisão (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Por meio de um processo dedutivo, replicar circunferências de raio igual ao segmento OE de forma a dividir todo o segmento OD. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são interseção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a interseção da última circunferência seja o ponto D.

Figura 43: $\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$ (Subtração)



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Note que o segmento unidade está dividido em 4 partes iguais, como a fração OE é composta por uma parte dessa, então, OE é $\frac{1}{4}$ da unidade OU. Já a fração OD é composta por 6 partes, logo OD é $\frac{6}{4}$ da unidade e a fração OL é composta por 5 partes, ou seja, OL e $\frac{5}{4}$ da unidade.
- Com isso, conclui-se que $OD - OE = OL \therefore \frac{6}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

Heurística do Experimento Mental sobre a multiplicação de frações por meio de segmentos

O objetivo desse Experimento Mental é realizar a multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$. Do ponto de vista semiótico, essas frações serão representadas como partes de segmentos de reta, a partir de um segmento considerado, o qual será indicado por unidade. Este experimento pode ser dividido em duas partes, a primeira tem como objetivo encontrar as frações como partes do segmento unidade e a segunda de desenvolver a multiplicação.

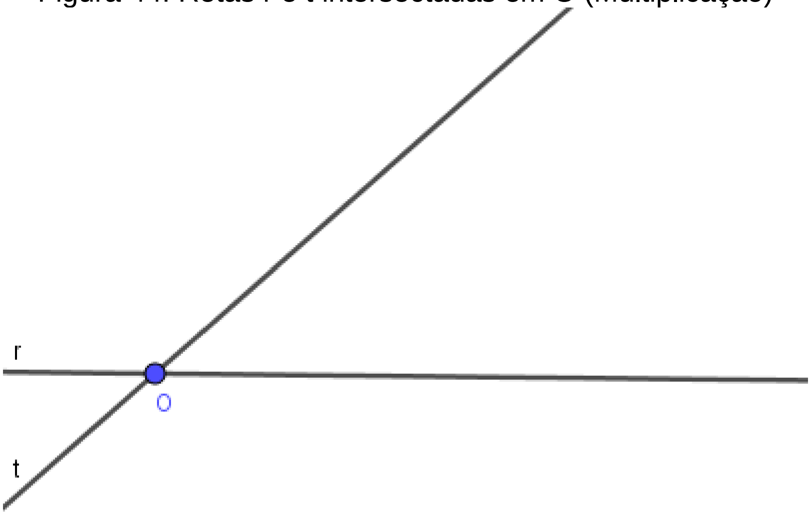
PRIMEIRA PARTE:

Obter a fração três meio da unidade considerada e a fração um quarto da unidade considerada.

Forma: Parte-se de uma hipótese ou suposição por meio de uma representação do objeto considerado.

- Considerar duas retas fixas, r e t, que intersectam em um ponto O.

Figura 44: Retas r e t intersectadas em O (Multiplicação)



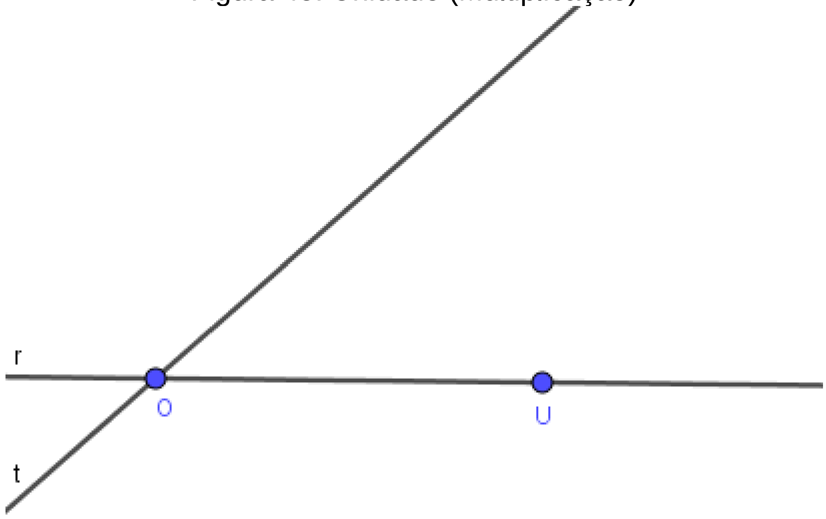
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Construir segmentos que tenham início em O e extremidades em um ponto sobre essas retas fixas. Serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por: $OO = 0$

- Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denomina-lo de U. Nomeá-lo de segmento OU de segmento 1 ou unidade, simbolicamente, representado por:

$$OU = 1$$

Figura 45: Unidade (Multiplicação)

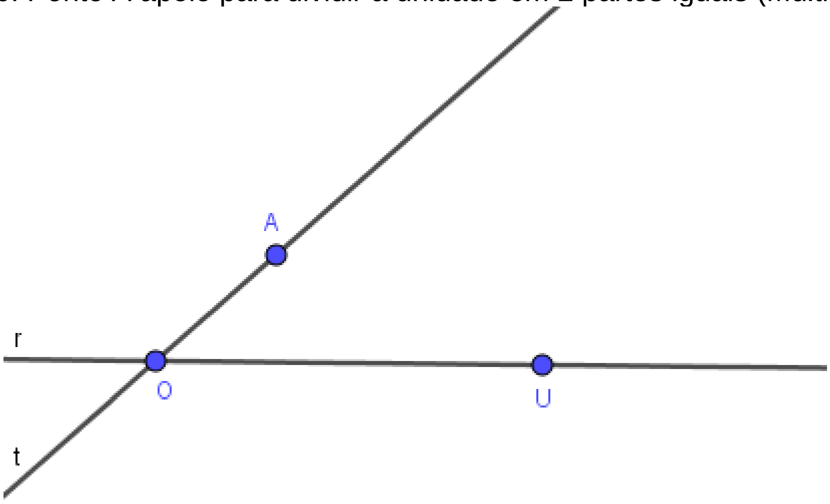


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova que, ainda, não está contida nos dados do problema. É o processo abdutivo no desenvolvimento do Experimento.

- Marcar sobre a reta t um ponto A.

Figura 46: Ponto A apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (Multiplicação)



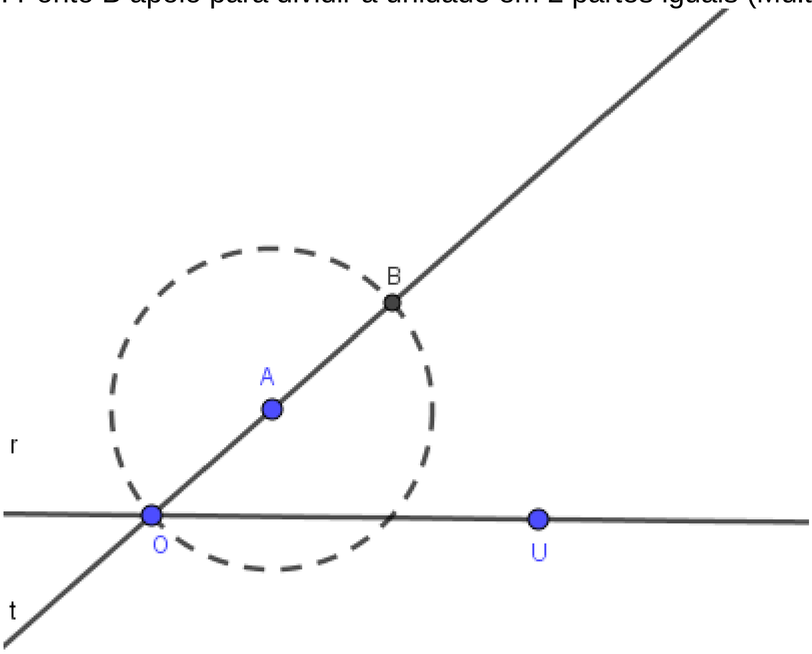
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e dependência: Neste momento, será desenvolvido um processo dedutivo para encontrar a fração $\frac{3}{2}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a três metades da unidade considerada ou a unidade considerada mais meio dela. O sistema de representação, neste caso, será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em A de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto B, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} AB = OA \\ OB = OA + AB \end{array}\right\} OB = OA + OA \Rightarrow OB = 2 \times OA$$

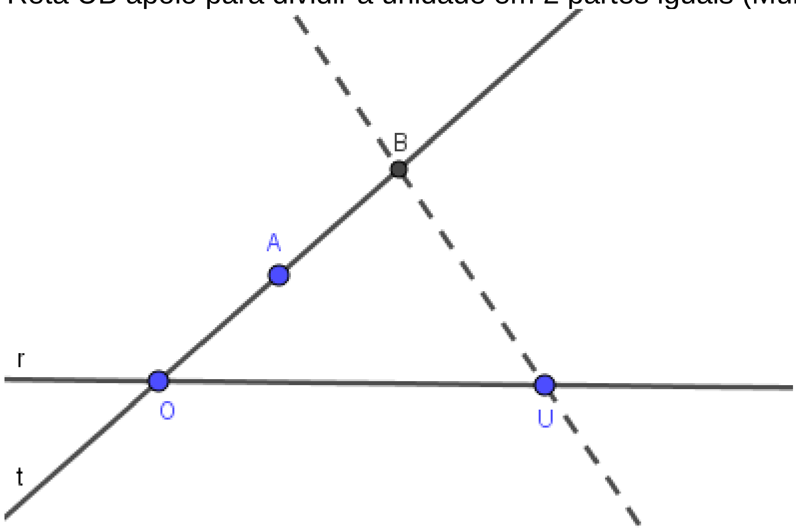
Figura 47: Ponto B apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e B.

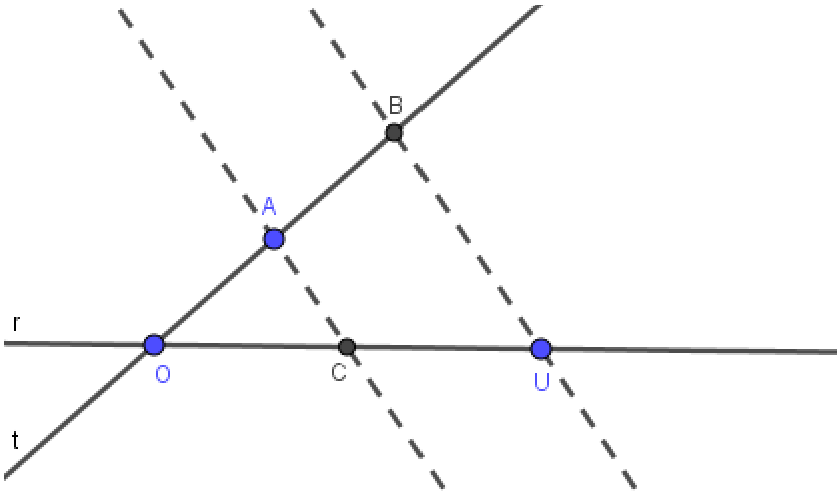
Figura 48: Reta UB apoio para dividir a unidade em 2 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UB passando pelo ponto A e marcar o ponto de interseção C com a reta r.

Figura 49: Reta AC paralela à reta UB: dividindo a unidade em 2 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Os triângulos OAC e OBU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e, pelo fato de $\overline{AC}$ e $\overline{BU}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}C$ e $O\hat{B}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OU}{OB}$$

- Da igualdade $\frac{OC}{OA} = \frac{OU}{OB}$, tem-se que $OC = \frac{OU \times OA}{OB}$, como $OB = 2 \times OA$, então $OC = \frac{OU \times OA}{2 \times OA} = \frac{OU}{2} = \frac{1}{2} \times OU$, como $OU = 1$, $OC = \frac{1}{2} \times OU = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

- Agora, traçar uma circunferência com centro em U e de raio equivalente ao segmento OC, em seguida, marcar o ponto D intersecção da circunferência com a reta r.

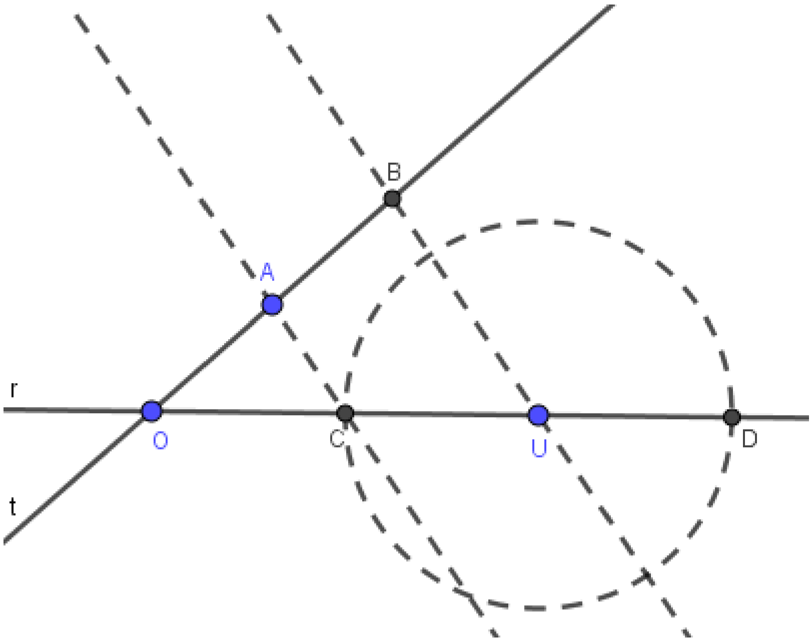
$$\left.\begin{array}{l} OC = CU \\ OU = OC + CU \end{array}\right\} OU = OC + OC \Rightarrow OU = 2 \times OC,$$

e

$$\left.\begin{array}{l} UD = OC \\ OU = 2 \times OC \\ OD = OU + UD \end{array}\right\} OD = 2 \times OC + OC \Rightarrow OD = 3 \times OC.$$

Como, $OC = \frac{1}{2}$, então $OU = 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ e $OD = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Figura 50: Segmento OD: fração $\frac{3}{2}$ (Multiplicação)



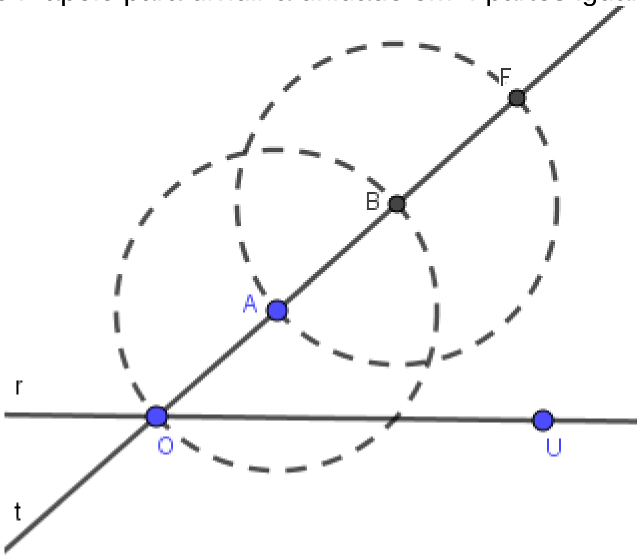
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e dependência: Um novo processo dedutivo será desenvolvido para encontrar, dessa vez, a fração $\frac{1}{4}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a quarta parte da unidade. O sistema de representação, neste caso, também será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em B de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto F, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} BF = OA \\ OB = 2 \times OA \\ OF = OB + BF \end{array}\right\} OF = 2 \times OA + OA \Rightarrow OF = 3 \times OA$$

Figura 51: Ponto F apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Multiplicação)

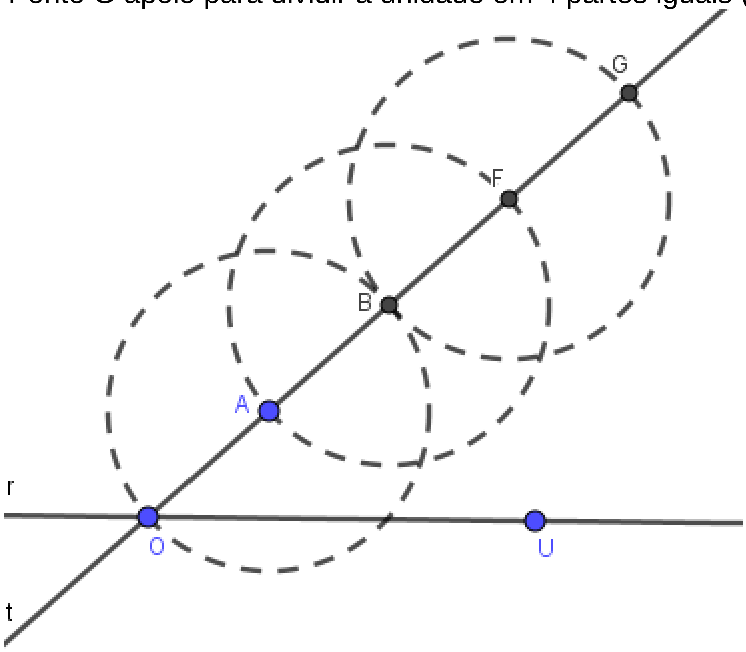


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Criar uma circunferência com centro em F de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto G, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} FG = OA \\ OF = 3 \times OA \\ OG = OF + FG \end{array}\right\} OF = 3 \times OA + OA \Rightarrow OF = 4 \times OA$$

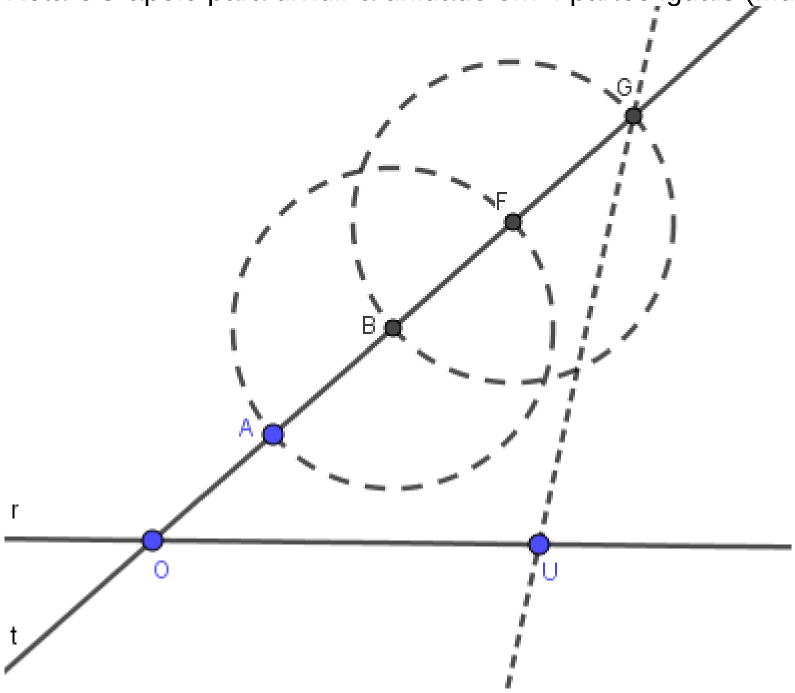
Figura 52: Ponto G apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e G.

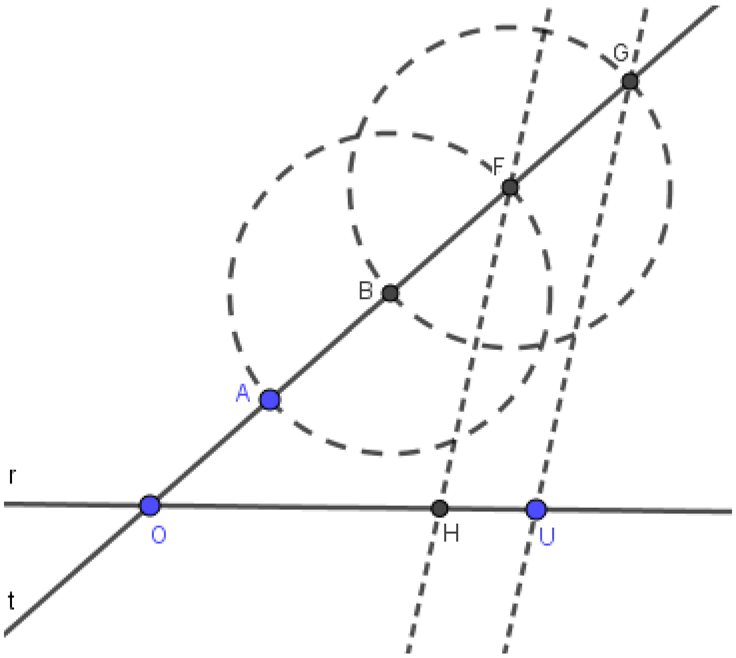
Figura 53: Reta UG apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UG passando pelo ponto F e marcar o ponto de intersecção H com a reta r.

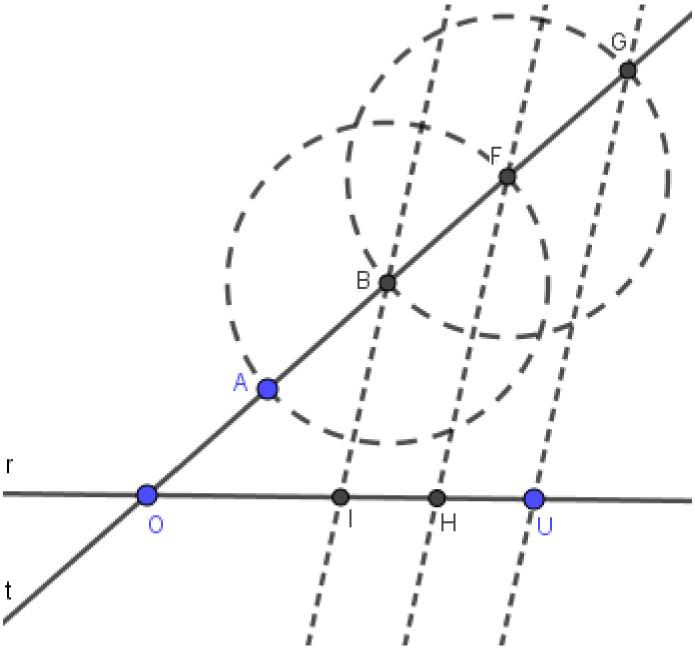
Figura 54: Reta FH paralela à reta UG: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UG passando pelo ponto B e marcar o ponto de intersecção I com a reta r.

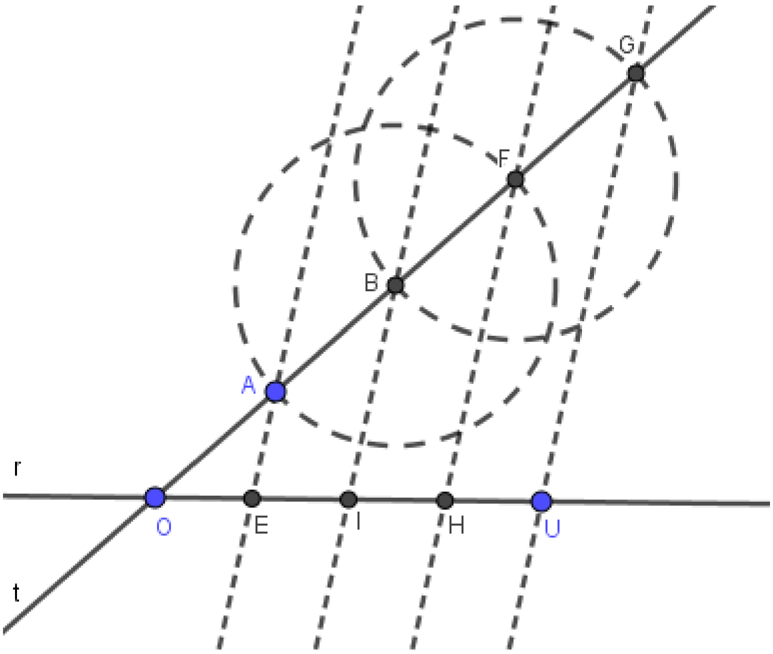
Figura 55: Reta BI paralela à reta UG: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UG passando pelo ponto A e marcar o ponto de intersecção E com a reta r.

Figura 56: Reta AE paralela à reta UG: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Os triângulos OAE, OIB, OHF e OUG são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e, pelo fato de $\overline{AE}$, $\overline{BI}$, $\overline{FH}$ e

$\overline{UG}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}E$, $O\hat{B}I$, $O\hat{F}H$ e $O\hat{G}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OE}{OA}=\frac{OI}{OB}=\frac{OH}{OF}=\frac{OU}{OG}$$

- Da igualdade $\frac{OE}{OA}=\frac{OU}{OG}$, tem-se que $OE=\frac{OU\times OA}{OG}$, como $OG=4\times OA$, então $OE=\frac{OU\times OA}{4\times OA}=\frac{OU}{4}=\frac{1}{4}\times OU$, como $OU=1$, $OE=\frac{1}{4}\times OU=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$.
- Da igualdade $\frac{OI}{OB}=\frac{OU}{OG}$, tem-se que $OI=\frac{OU\times OB}{OG}$, como $OG=4\times OA$ e $OB=2\times OA$, então $OI=\frac{OU\times 2\times OA}{4\times OA}=\frac{2\times OU}{4}=\frac{2}{4}\times OU$, como $OU=1$, $OI=\frac{2}{4}\times OU=\frac{2}{4}\times 1=\frac{2}{4}$.
- Da igualdade $\frac{OH}{OF}=\frac{OU}{OG}$, tem-se que $OH=\frac{OU\times OF}{OG}$, como $OG=4\times OA$ e $OF=3\times OA$, então $OH=\frac{OU\times 3\times OA}{4\times OA}=\frac{3\times OU}{4}=\frac{3}{4}\times OU$, como $OU=1$, $OH=\frac{3}{4}\times OU=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$.

Visto que $OD=\frac{3}{2}$ e $OE=\frac{1}{4}$, então os segmentos OD e OE representam respectivamente as frações $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

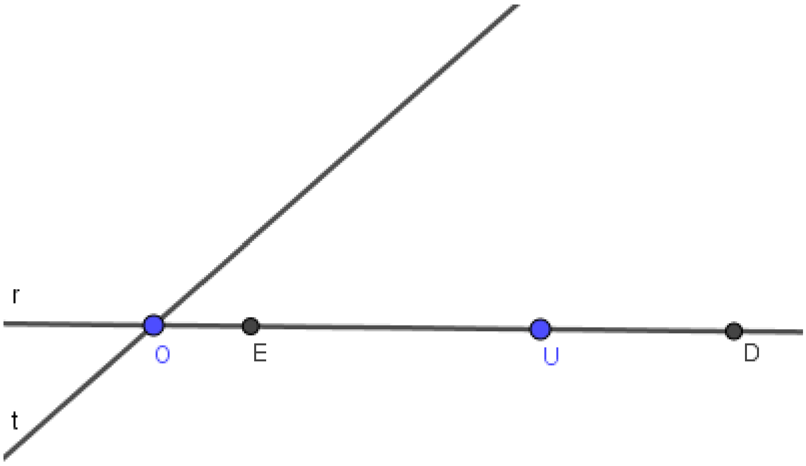
Continuando o Experimento Mental, a segunda fase é desenvolver um processo para se chegar à multiplicação das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

Segunda Parte:

Desenvolver um processo para obter à multiplicação entre as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

Forma: Tomar como hipótese a unidade e as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$ obtidas sobre a reta r no Experimento anterior e a reta t para auxiliar na construção.

Figura 57: Unidade, fração $\frac{3}{2}$ e fração $\frac{1}{4}$ (Multiplicação)



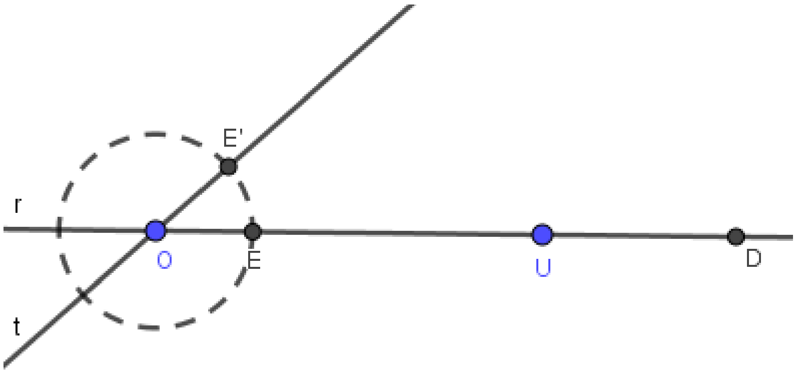
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova surge, um pensamento abdutivo de traçar retas paralelas, circunferências, modificando o diagrama.

- Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto E' sobre reta t, que equivalente à fração $\frac{1}{4}$ ($\overline{OE}$). Assim, o segmento OE' pode ser representado simbolicamente por:

$$OE' = \frac{1}{4}$$

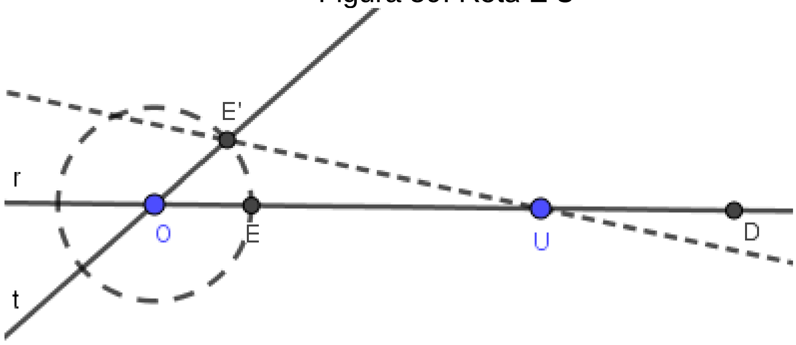
Figura 58: Fração $\frac{1}{4}$, reta suporte (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar a reta uma reta que passa pelo ponto E' e pelo ponto U.

Figura 59: Reta E'U

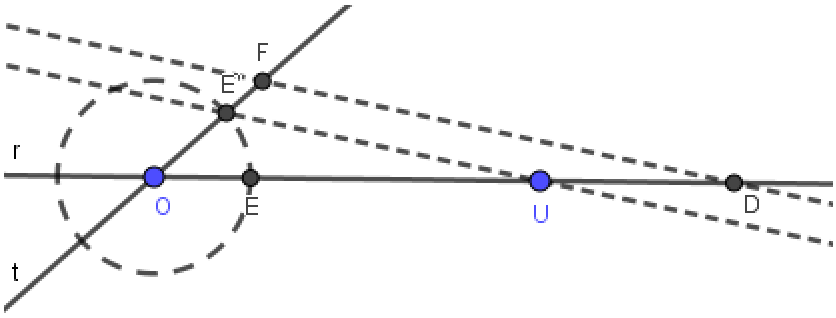


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e Dependência: Início do processo dedutivo, por meio da geometria euclidiana, mais especificamente, levando em consideração o postulado das paralelas.

- Traçar uma reta paralela à reta determinada pelos pontos E' e U passando pelo ponto D e marcar o ponto F de intersecção com a reta t.

Figura 60: Segmento OF, resultado da multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$ na reta suporte



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Note que os triângulos OEU e OFD são congruentes pelo caso ângulo, ângulo, pois possuem um ângulo em comum e, por construção, os ângulos $OE'U$ e OFD são correspondentes. A partir disso, tem-se que:

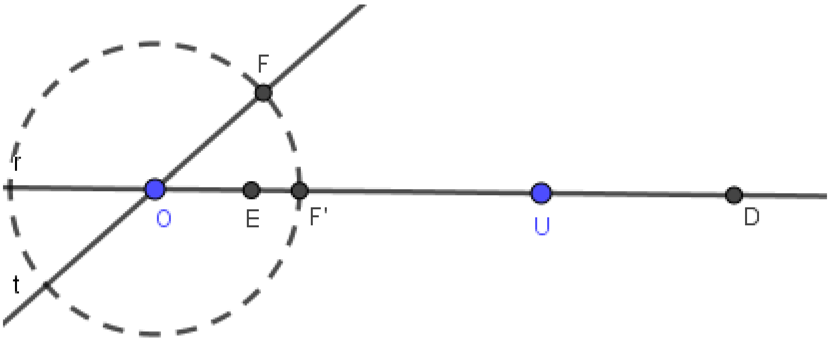
$$\frac{OE'}{OF} = \frac{OU}{OD}$$

- Substituindo $OE' = \frac{1}{4}$, $OD = \frac{3}{2}$ e $OU = 1$ em $\frac{OE'}{OF} = \frac{OU}{OD}$, obtêm-se:

$$\frac{OF}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{1} \Rightarrow OF \times 1 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \Rightarrow OF = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}$$

- Marcar um círculo de raio equivalente ao do segmento OF com centro em O e marcar a intersecção F’ com a reta r, ou seja, o segmento OF’, também representa a multiplicação entre $\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}$.

Figura 61: Segmento OF’, resultado da multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$

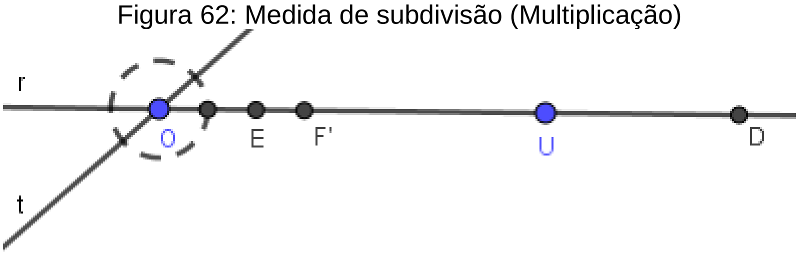


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra

<u>Revelação:</u> Por meio do processo abdutivo de tomar uma circunferência específica e por meio de realizações de alguns processos dedutivos, pode-se revelar quanto mede o segmento equivalente à multiplicação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{2}$.

- Marcar um círculo com centro em O e raio equivalente a diferença entre os segmentos OF’ e OE e marcar a interseção com a reta r (Processo abdutivo).

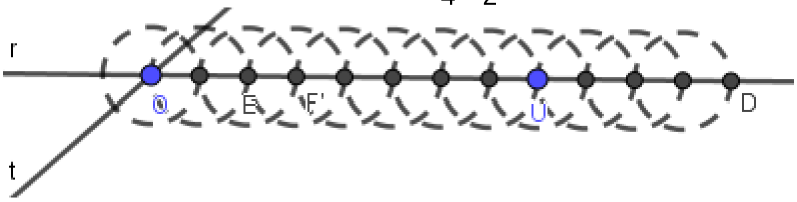
Figura 62: Medida de subdivisão (Multiplicação)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Por meio de um processo dedutivo, replicar circunferências de raio equivalente a diferença entre os segmentos OF’ e OE de forma a dividir todo o segmento OD. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são intersecção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a intersecção da última circunferência seja o ponto D.

Figura 63: $\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}$



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Note que o segmento unidade está dividido em 8 partes iguais, como a fração OE é composta por duas partes dessa, então, OE é $\frac{2}{8}$ da unidade OU. Já a fração OD é composta por 12 partes, logo OD é $\frac{12}{8}$ da unidade e a fração OF' é composta por 3 partes, ou seja, OF' e $\frac{3}{8}$ da unidade.
- Com isso, conclui-se que $OE \times OD = OF' \therefore \frac{2}{8} \times \frac{12}{8} = \frac{3}{8}$.

Heurística do Experimento Mental sobre a divisão de frações por meio de segmentos

O objetivo desse Experimento Mental é realizar a divisão de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$. Do ponto de vista semiótico, essas frações serão representadas como partes de segmentos de reta, a partir de um segmento considerado, o qual será indicado por unidade. Este experimento pode ser dividido em duas partes, a primeira tem como objetivo encontrar as frações como partes do segmento unidade e a segunda de desenvolver a divisão.

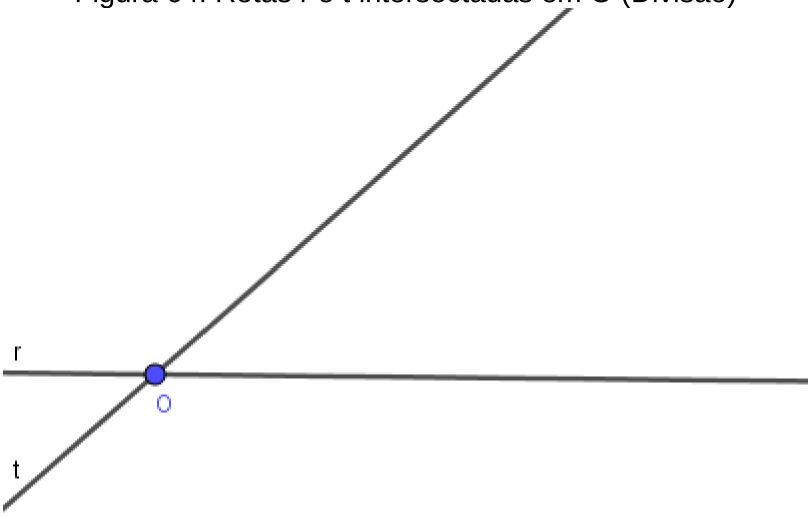
PRIMEIRA PARTE:

Obter a fração um terço da unidade considerada e a fração um quarto da unidade considerada.

Forma: Parte-se de uma hipótese ou suposição por meio de uma representação do objeto considerado.

- Considerar duas retas fixas, r e t, que intersectam em um ponto O.

Figura 64: Retas r e t intersectadas em O (Divisão)

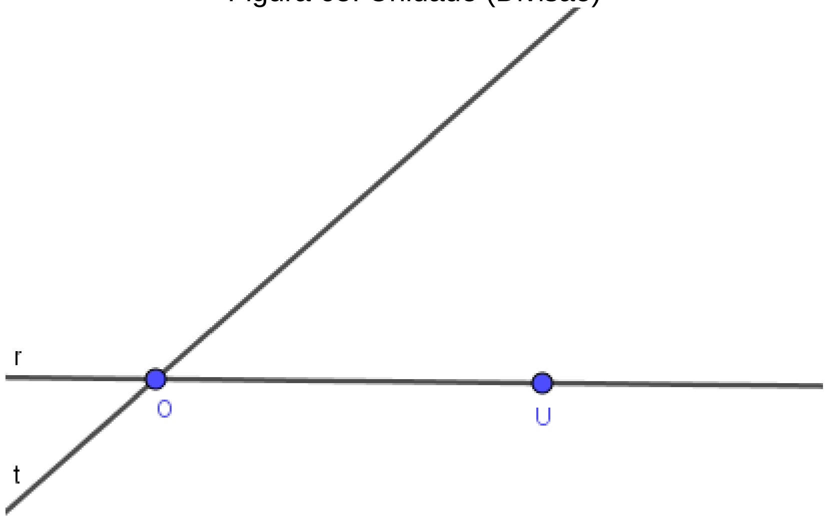


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Construir segmentos que tenham início em O e extremidades em um ponto sobre essas retas fixas. Serão associadas frações a esses segmentos.
- O segmento que representa o 0 pode ser simbolicamente representado por: $OO = 0$
- Escolher um ponto qualquer sobre a reta r e denomina-lo de U. Nomeá-lo de segmento OU de segmento 1 ou unidade, simbolicamente, representado por:

$$OU = 1$$

Figura 65: Unidade (Divisão)

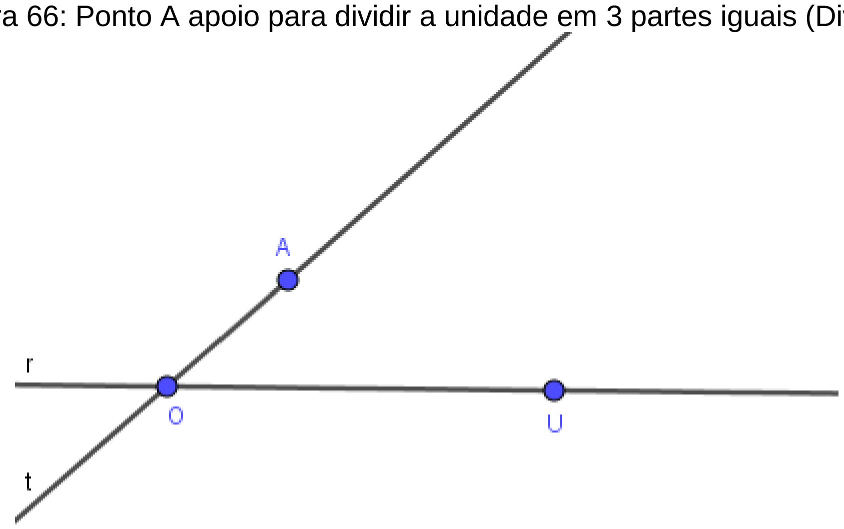


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova que, ainda, não está contida nos dados do problema. É o processo abdutivo no desenvolvimento do Experimento.

- Marcar sobre a reta t um ponto A.

Figura 66: Ponto A apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (Divisão)



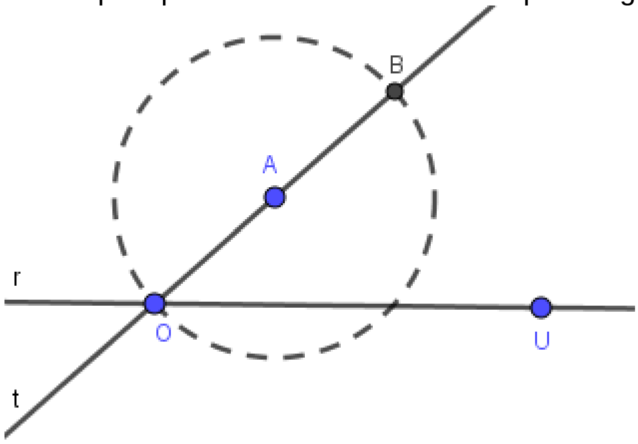
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e dependência: Neste momento, será desenvolvido um processo dedutivo para encontrar a fração $\frac{1}{3}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a dois terços da unidade considerada. O sistema de representação, neste caso, será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em A de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto B, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} AB = OA \\ OB = OA + AB \end{array}\right\} OB = OA + OA \Rightarrow OB = 2 \times OA$$

Figura 67: Ponto B apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (Divisão)

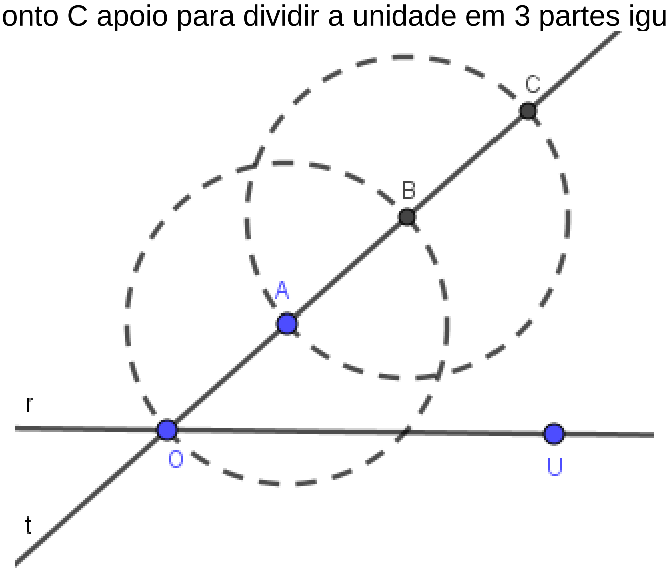


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Criar uma circunferência com centro em B de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto C, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} BC = OA \\ OB = 2 \times OA \\ OC = OB + BC \end{array}\right\} OC = 2 \times OA + OA \Rightarrow OC = 3 \times OA$$

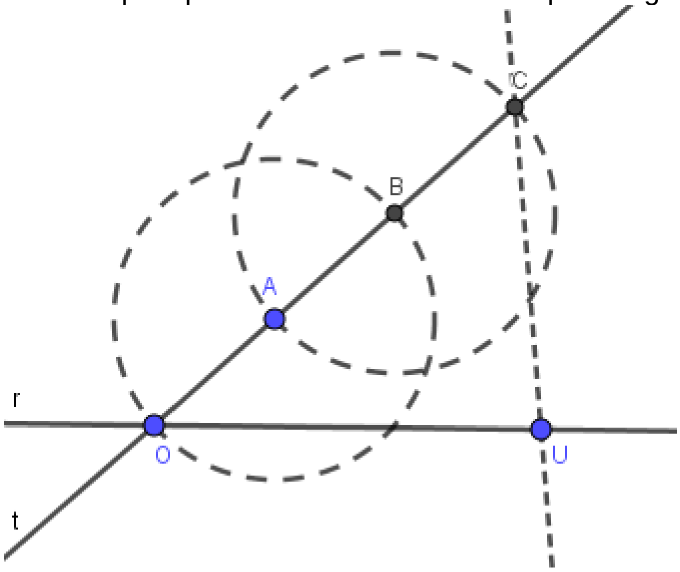
Figura 68: Ponto C apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e C.

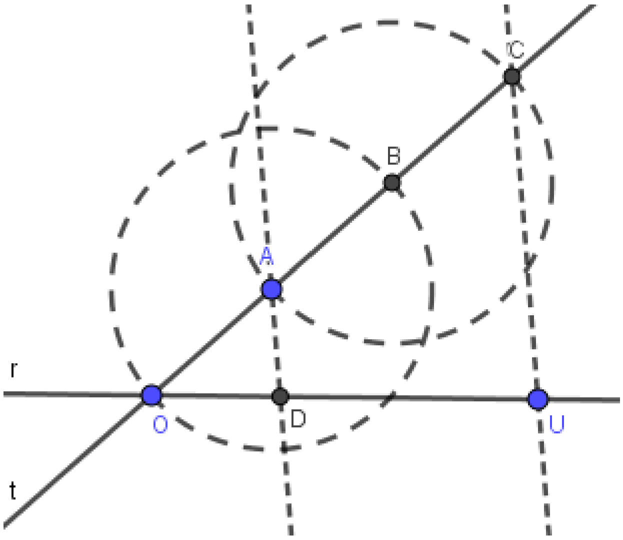
Figura 69: Reta UC apoio para dividir a unidade em 3 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto A e marcar o ponto de intersecção D com a reta r.

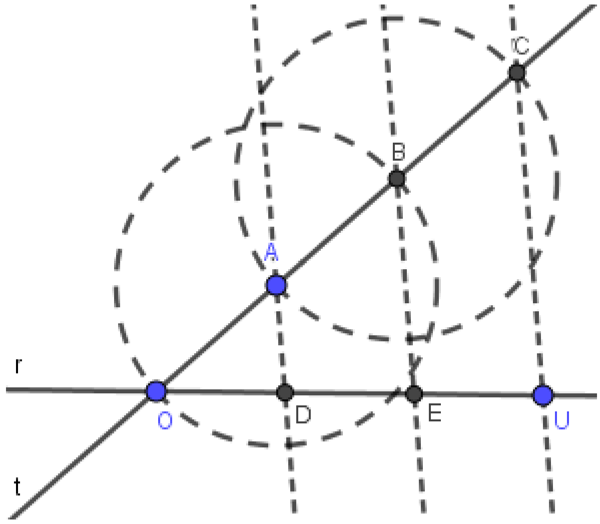
Figura 70: Reta AD paralela à reta UC: dividindo a unidade em 3 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UC passando pelo ponto B e marcar o ponto de intersecção E com a reta r.

Figura 71: Reta AE paralela à reta UC: dividindo a unidade em 3 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Os triângulos OAD, OBE e OCU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e, pelo fato de $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CU}$ serem paralelos, os ângulos $O\hat{A}D$, $O\hat{B}E$ e $O\hat{C}U$ são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OU} = \frac{OB}{OE}$$

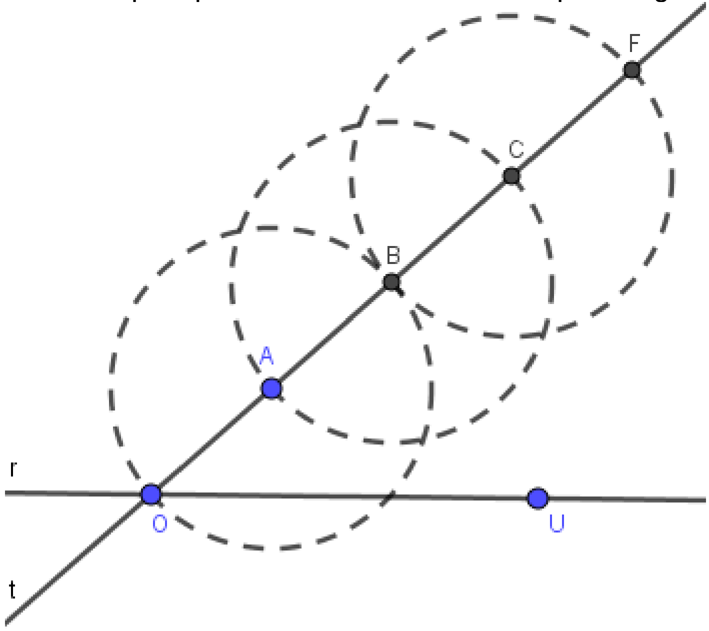
- Da igualdade $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OU}$, tem-se que $OD = \frac{OU \times OA}{OC}$, como $OC = 3 \times OA$, então $OD = \frac{OU \times OA}{3 \times OA} = \frac{OU}{3} = \frac{1}{3} \times OU$, como $OU = 1$, $OD = \frac{1}{3} \times OU = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.
- Da igualdade $\frac{OC}{OU} = \frac{OB}{OE}$, tem-se que $OE = \frac{OU \times OB}{OC}$, como $OC = 3 \times OA$ e $OB = 2 \times OA$, então $OD = \frac{OU \times 2 \times OA}{3 \times OA} = \frac{2 \times OU}{3} = \frac{2}{3} \times OU$.

Compreensão e dependência: Um novo processo dedutivo será desenvolvido para encontrar, dessa vez, a fração $\frac{1}{4}$, isto é, o segmento sobre a reta r que corresponderá a quarta parte da unidade. O sistema de representação, neste caso, também será a divisão de segmentos pela geometria euclidiana.

- Criar uma circunferência com centro em C de raio equivalente à medida do segmento OA e marcar o ponto F, intersecção da circunferência com a semirreta t.

$$\left.\begin{array}{l} CF = OA \\ OC = 3 \times OA \\ OF = OC + CF \end{array}\right\} OF = 3 \times OA + OA \Rightarrow OF = 4 \times OA$$

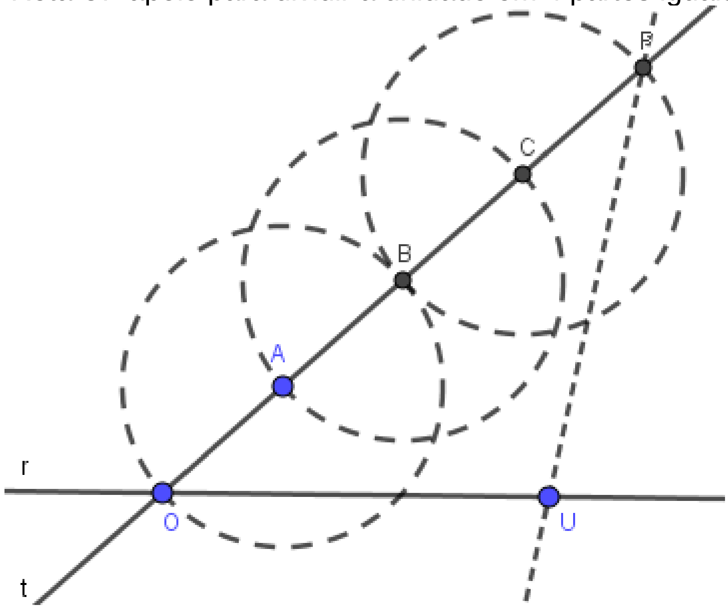
Figura 72: Ponto F apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Agora, traçar uma reta passando pelos pontos U e F.

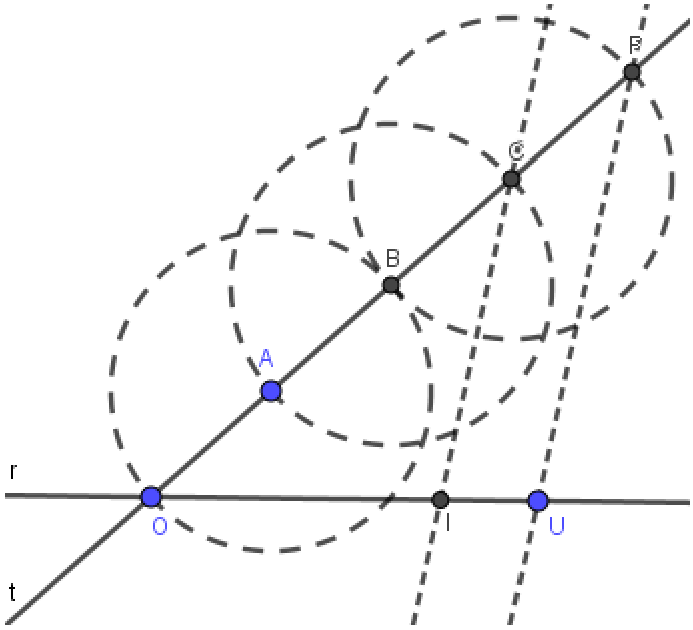
Figura 73: Reta UF apoio para dividir a unidade em 4 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UF passando pelo ponto A e marcar o ponto de intersecção I com a reta r.

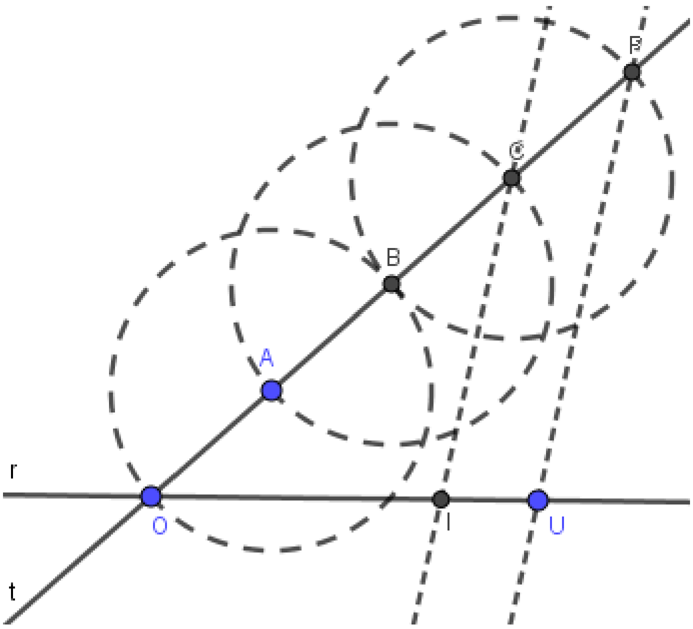
Figura 74: Reta CI paralela à reta UF: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UF passando pelo ponto B e marcar o ponto de intersecção H com a reta r.

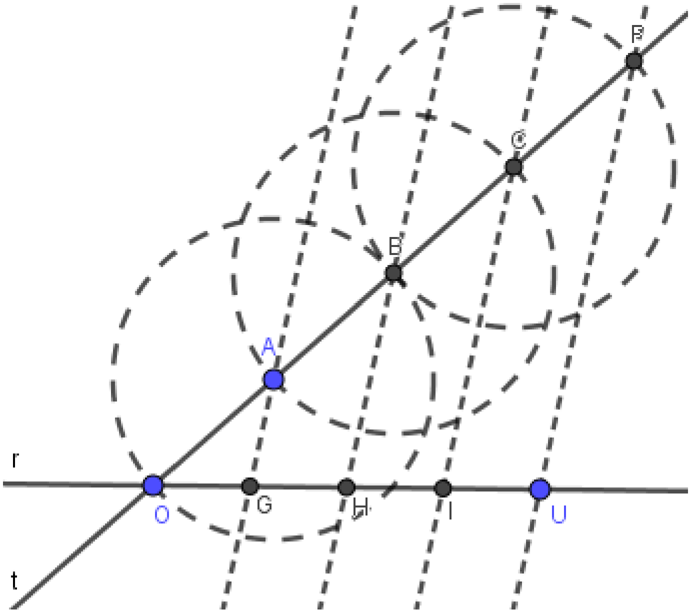
Figura 75: Reta BH paralela à reta UF: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta paralela à reta UF passando pelo ponto A e marcar o ponto de intersecção G com a reta r.

Figura 76: Reta AG paralela à reta UF: dividindo a unidade em 4 partes iguais (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Os triângulos OAG, OBH, OCI e OFU são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, pois eles possuem um ângulo em comum e, pelo fato de $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CI}$ e $\overline{UF}$ serem paralelos, os ângulos OAG, OBH, OCI e OFU são correspondentes, ou seja, são congruentes. Assim:

$$\frac{OG}{OA}=\frac{OH}{OB}=\frac{OI}{OC}=\frac{OU}{OF}$$

- Da igualdade $\frac{OG}{OA}=\frac{OU}{OF}$, tem-se que $OG=\frac{OU\times OA}{OF}$, como $OF=4\times OA$, então $OG=\frac{OU\times OA}{4\times OA}=\frac{OU}{4}=\frac{1}{4}\times OU$, como $OU=1$, $OG=\frac{1}{4}\times OU=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$.

- Da igualdade $\frac{OH}{OB}=\frac{OU}{OF}$, tem-se que $OH=\frac{OU\times OB}{OF}$, como $OF=4\times OA$ e $OB=2\times OA$, então $OH=\frac{OU\times 2\times OA}{4\times OA}=\frac{2\times OU}{4}=\frac{2}{4}\times OU$, como $OU=1$, $OH=\frac{2}{4}\times OU=\frac{2}{4}\times 1=\frac{2}{4}$.

- Da igualdade $\frac{OI}{OC}=\frac{OU}{OF}$, tem-se que $OI=\frac{OU\times OC}{OF}$, como $OF=4\times OA$ e $OC=3\times OA$, então $OI=\frac{OU\times 3\times OA}{4\times OA}=\frac{3\times OU}{4}=\frac{3}{4}\times OU$, como $OU=1$, $OI=\frac{3}{4}\times OU=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$.

Visto que $OD=\frac{1}{3}$ e $OG=\frac{1}{4}$, então os segmentos OD e OG representam respectivamente as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

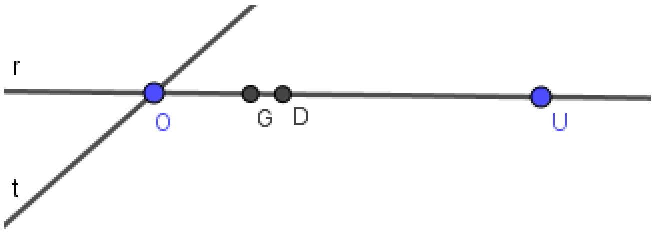
Continuando o Experimento Mental, a segunda fase é desenvolver um processo para se chegar à divisão da fração $\frac{1}{3}$ pela fração $\frac{1}{4}$.

Segunda Parte:

Desenvolver um processo para obter à divisão entre as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

Forma: Tomar como hipótese a unidade e as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ obtidas sobre a reta r no Experimento Mental anterior e a reta t para auxiliar na construção.

Figura 77: Unidade, fração $\frac{1}{3}$ e fração $\frac{1}{4}$ (Divisão)



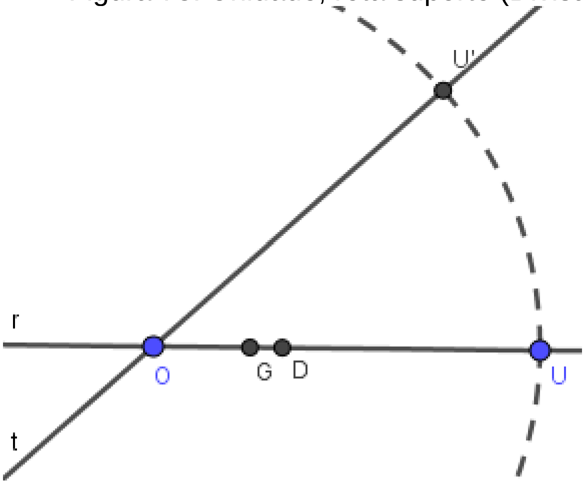
Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Estrutura: Uma ideia nova surge, um pensamento abdutivo de traçar retas paralelas, circunferências, modificando o diagrama.

- Com o auxílio de uma circunferência centralizada no ponto O, criar um ponto U' sobre reta t, em que o segmento OU' seja equivalente a unidade. Assim, o segmento OU' pode ser representado simbolicamente por:

$$OU'=1$$

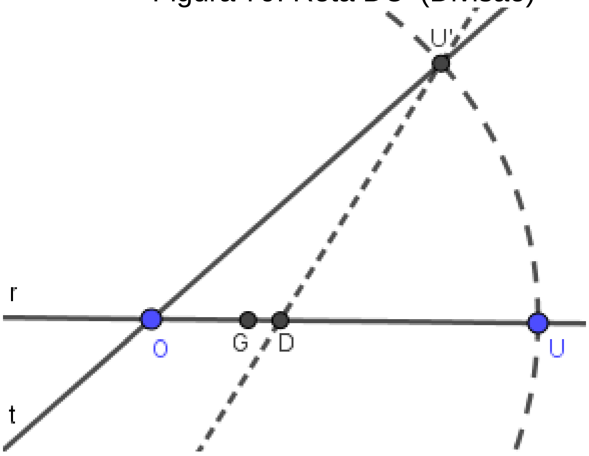
Figura 78: Unidade, reta suporte (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Traçar uma reta que passa pelo ponto D e pelo ponto U'.

Figura 79: Reta DU' (Divisão)

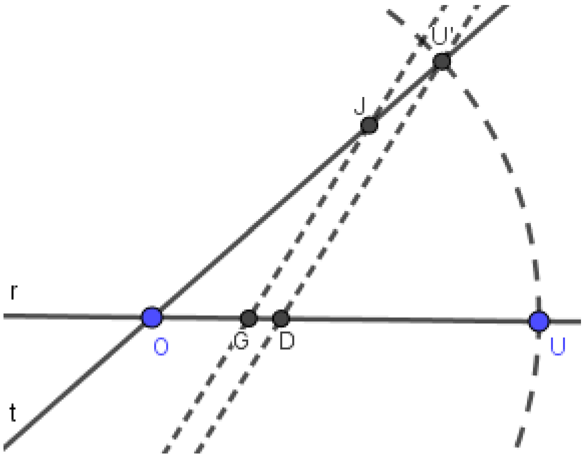


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

Compreensão e Dependência: Início do processo dedutivo, por meio da geometria euclidiana, mais especificamente, levando em consideração o postulado das paralelas.

- Traçar uma reta paralela à reta determinada pelos pontos D e U' passando pelo ponto G e marcar o ponto J de intersecção com a reta t.

Figura 80: Segmento OJ, resultado da divisão de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$ na reta suporte (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Note que os triângulos ODU' e OGJ são congruentes pelo caso ângulo, ângulo, pois possuem um ângulo em comum e, por construção, os ângulos $O\hat{J}G$ e $OU'D$ são correspondentes. A partir disso, tem-se que:

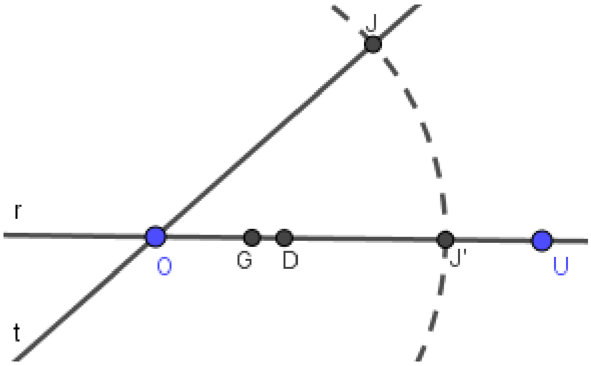
$$\frac{OJ}{OG} = \frac{OU'}{OD}$$

- Substituindo $OU' = 1$, $OD = \frac{1}{3}$ e $OG = \frac{1}{4}$ em $\frac{OJ}{OG} = \frac{OU'}{OD}$, obtêm-se:

$$\frac{OJ}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow OJ \times 1 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{3} \Rightarrow OJ = \frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$$

- Marcar um círculo de raio equivalente ao do segmento OJ com centro em O e marcar a intersecção J' com a reta r, ou seja, o segmento OJ', também representa a divisão $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$.

Figura 81: Segmento OJ', resultado da divisão $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$ (Divisão)

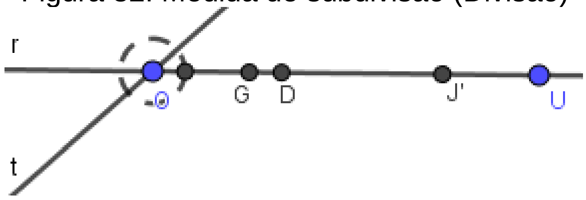


Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra

Revelação: Por meio do processo abdutivo de tomar uma circunferência específica e por meio de realizações de alguns processos dedutivos, pode-se revelar quanto mede o segmento equivalente à divisão de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$.

- Marcar um círculo com centro em O e raio equivalente a diferença entre os segmentos OD e OG e marcar a interseção com a reta r (Processo abdutivo).

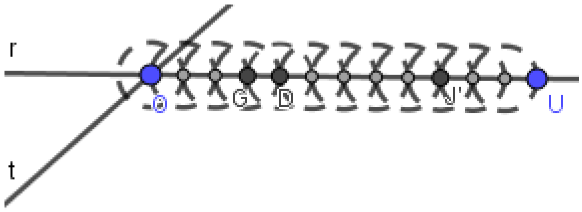
Figura 82: Medida de subdivisão (Divisão)



Fonte: Elaborada pela autora em 2025 no Geogebra.

- Por meio de um processo dedutivo, replicar circunferências de raio equivalente a diferença entre os segmentos OD e OG de forma a dividir todo o segmento OU. Essa divisão deve ser feita por meio de pontos que são intersecção da circunferência com a reta r. A primeira circunferência será centralizada no ponto marcado no passo anterior e as subsequentes nos próximos pontos até que a intersecção da última circunferência seja o ponto U.

Figura 83: $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$



Fonte: Elaborada pela autora em 2023 no Geogebra.

- Note que o segmento unidade está dividido em 12 partes iguais, como a fração OG é composta por três partes dessa, então, OG é $\frac{3}{12}$ da unidade OU. Já a fração OD é composta por 4 partes, logo OD é $\frac{4}{12}$ da unidade e a fração OJ' é composta por 9 partes, ou seja, OJ' e $\frac{9}{12}$ da unidade.

- Com isso, conclui-se que $OG \div OD = OJ' \therefore \frac{4}{12} \div \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$.