



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

*Instituto de Ciências Exatas - ICE*

*Departamento de Física*

*Tese*

---

---

ABORDAGEM EFETIVA EM GRAVITAÇÃO  
QUÂNTICA COM APLICAÇÃO EM COSMOLOGIA  
PRIMORDIAL

---

---

WAGNO CESAR E SILVA

JULHO 2024  
JUIZ DE FORA - MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

*Instituto de Ciências Exatas - ICE*

*Departamento de Física*

---

ABORDAGEM EFETIVA EM GRAVITAÇÃO  
QUÂNTICA COM APLICAÇÃO EM COSMOLOGIA  
PRIMORDIAL

---

TESE SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE JUIZ DE FORA (UFJF) COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM FÍSICA.

AUTOR

WAGNO CESAR E SILVA

ORIENTADOR

ILYA L. SHAPIRO

JULHO 2024

JUIZ DE FORA - MG

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

e Silva, Wagno Cesar.

Abordagem efetiva em gravitação quântica com aplicação em cosmologia primordial / Wagno Cesar e Silva. -- 2024.

115 p. : il.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2024.

1. Gravidade quântica. 2. Anomalia conforme. 3. Ação efetiva do vácuo. 4. Desacoplamento quântico. 5. Universo primordial. I. Shapiro, Ilya Lvovich, orient. II. Título.

Wágno Cesar e Silva

**Título: Abordagem efetiva em gravitação quântica com aplicação em cosmologia primordial**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 22 de julho de 2024.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

**Prof. Dr. Gustavo Pazzini de Brito**

Universidade Estadual Paulista (UNESP)

**Prof. Dr. Antônio Duarte Pereira Junior**

Universidade Federal Fluminense (UFF)

**Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes**

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

Juiz de Fora, 09/07/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Ilya Chapiro, Membro**, em 22/07/2024, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 22/07/2024, às 18:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Pazzini de Brito, Usuário Externo**, em 23/07/2024, às 09:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Abdalla Helayêl Neto, Usuário Externo**, em 23/07/2024, às 10:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Antônio Duarte Pereira Junior, Usuário Externo**, em 23/07/2024, às 10:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel Santos Menezes, Usuário Externo**, em 23/07/2024, às 16:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uff (www2.uff.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1852996** e o código CRC **2477C7FD**.

---

## AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

- Ao meu orientador, Prof. Ilya Shapiro, pela valiosa colaboração e sugestão dos temas de pesquisa que compõem os alicerces desta tese. Agradeço por sua atenção sempre prestativa e gentil, pelos conselhos, pela paciência e, sobretudo, pela confiança depositada em mim durante esses anos de doutorado;
- Aos professores Manuel Asorey e Lesław Rachwał, pela indispensável colaboração nos trabalhos apresentados nesta tese;
- Aos professores José Helayël-Neto, Antônio Duarte, Gustavo Pazzini, Gabriel Menezes, Gil de Oliveira Neto e Tibério de Paula Netto, por terem aceitado gentilmente o convite para a banca examinadora e disporem do seu tempo para avaliar esta tese;
- Aos demais professores do programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, especialmente ao Prof. Wilson de Melo, que, juntamente com o Prof. Gil de Oliveira Neto, participou da minha banca de qualificação e contribuiu com boas sugestões para a montagem desta tese; e ao coordenador, Prof. Maikel Ballester, por toda atenção e apoio;
- À física teórica mais incrível que já conheci, Hemily Gomes. Muito obrigado pelo apoio, incentivo e companheirismo nos últimos anos. Tenho muita sorte em conhecer uma pessoa tão especial como você;
- Aos colegas e, sobretudo, grandes amigos, que conheci durante o mestrado e o doutorado: Públio Rwany e Nicolás Bertini (o cosmólogo do grupo), pelos estudos, colaborações e pelas inúmeras discussões sobre vários tópicos de Física; Vítor Barra, Felipe Augusto, Cleber Nascimento, Samuel William e Yoshi Oyadomari, pelas conversas e bons momentos de descontração;
- Aos companheiros do CBPF: João Paulo, pela colaboração; Mirian Reetz, Philipe de Fabritiis, Herus Lopes e Matheus Paixão, pela receptividade sempre amigável;
- Aos demais alunos do nosso grupo de Teoria Quântica de Campos, pela boa convivência e pela participação nos seminários que organizei nos últimos anos;
- À minha família, em especial aos meus pais, pelo constante apoio e incentivo desde o início dos meus estudos acadêmicos até os dias atuais;
- Aos secretários do programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, Sr. Domingos e Sr. Gustavo, sempre prestativos e eficientes com assuntos burocráticos;
- Por fim, agradeço à UFJF pela oportunidade, à CAPES pelo apoio financeiro no doutorado, e também ao programa de Pós-Graduação em Física pelo suporte, que possibilitou a minha participação em vários eventos científicos.

## LISTA DE PUBLICAÇÕES

O conteúdo desta tese está associado aos seguintes artigos publicados:

- W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Bounce and Stability in the Early Cosmology with Anomaly-Induced Corrections*, *Symmetry* **13** (2021) 50, arXiv:2012.10554.
- M. Asorey, L. Rachwał, I.L. Shapiro and W.C. e Silva, *On the vector conformal models in an arbitrary dimension*, *EPJ Plus* **136** (2021) 1043, arXiv:2107.13125.
- M. Asorey, W.C. e Silva, I.L. Shapiro and P.R.B. do Vale, *Trace anomaly and induced action for a metric-scalar background*, *EPJ C* **83** (2023) 157, arXiv:2202.00154.
- W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Effective approach to the Antoniadis-Mottola model: quantum decoupling of the higher derivative terms*, *JHEP* **2023** (2023) 97, arXiv:2301.13291.
- W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Semiclassical bounce with strong minimal assumptions*, *Phys. Rev.* **D110** (2024) 043540, arXiv:2402.18785.

Durante o período do doutorado, também tive a oportunidade de trabalhar em projetos paralelos envolvendo outros temas, resultando nos seguintes artigos:

- J.P.S. Melo, W.C. e Silva and J.A. Helayël-Neto, *SUSY QED with Lorentz-asymmetric fermionic matter and a glance at the electron's EDM*, arXiv:2312.11691. (Aceito para publicação no jornal "Fortschritte der Physik - Progress of Physics").
- W.C. e Silva, A.L. Mota and E.W. Dias, *Electromagnetic Form Factors in the Spectral Quark Model  $SU(3)_f$* . (Para ser submetido).

## RESUMO

Nesta tese, exploramos vários aspectos semiclássicos e quânticos da interação gravitacional por meio da ação efetiva induzida por anomalia. Considerando a importância da simetria conforme nas correções semiclássicas, abordamos a generalização conforme do campo vetorial de calibre para o caso de uma dimensão arbitrária e construímos quatro versões da teoria com simetria conforme em  $d$ -dimensões. Formulamos a ação induzida para um fundo métrico-escalar em duas formas covariantes padrão, e estendemos o estudo das ambiguidades nos termos de derivadas totais usando a regularização de Pauli-Villars. Nossa análise da ação induzida em baixas energias revela a conexão existente com o grupo de renormalização e o potencial efetivo. Investigamos o desacoplamento quântico do modo fantasma massivo na teoria quadridimensional do fator conforme da métrica. A análise dos fatores de forma não locais derivados na ordem de  $1$ -loop inclui seu comportamento assintótico nos limites UV (*ultraviolet*) e IR (*infrared*). No domínio UV, nossos resultados reproduzem as funções beta baseadas no esquema de Subtração Mínima. No IR, os diagramas com linhas internas de fantasma massivo colapsam em diagramas do tipo *snail* e tornam-se irrelevantes. Por outro lado, as estruturas que contribuem para o *running* dos parâmetros da ação completa, e que sobrevivem no IR, possuem correspondência com a parte divergente proveniente da teoria efetiva de baixas energias do fator conforme. Finalmente, discutimos se esses resultados podem lançar luz sobre um possível *running* da constante cosmológica em baixas energias. Em seguida, como aplicação adicional, exploramos a possibilidade de evitar a singularidade inicial com uma solução de ricochete no Universo primordial. A principal descoberta nesta parte da tese é que uma correção semiclássica simples e bem conhecida, que descreve a mistura de radiação e gravidade na ação efetiva, pode fornecer uma solução analítica com um ricochete. Essa solução requer uma função beta positiva para o termo anômalo da radiação e a contração do Universo no instante inicial. A estimativa numérica mostra que o ricochete pode ocorrer em uma faixa de energia aceitável, mas apenas sob fortes suposições sobre a física de partículas além do Modelo Padrão.

**Palavras-Chave:** Gravidade quântica; simetria conforme; desacoplamento quântico; anomalia conforme; ação efetiva do vácuo; ricochete semiclássico; universo primordial.



# ABSTRACT

In this thesis, we explore various semiclassical and quantum aspects of the gravitational interaction via the anomaly-induced effective action. Considering the importance of the conformal symmetry in the semiclassical contributions, we address the conformal generalization of the gauge vector field to the case of an arbitrary dimension and construct four versions of the theory with conformal symmetry in  $d$ -dimensions. We formulate the induced action with a metric-scalar background in two standard covariant forms and extend the study on ambiguities in the total derivative terms of the anomaly using Pauli-Villars regularization. Our analysis of induced action at low energies reveals existing connection to the renormalization group and effective potential. Subsequently, we investigate the decoupling of massive ghost mode in the four-dimensional theory of the conformal factor of the metric. The analysis of the derived one-loop nonlocal form factors includes their asymptotic behavior in the ultraviolet (UV) and infrared (IR) limits. In the UV domain, our results reproduce the Minimal Subtraction scheme-based beta functions. In the IR, the diagrams with massive ghost internal lines collapse into snail-type graphs and become irrelevant. On the other hand, those structures that contribute to the running of parameters of the full action, and survive in the IR, are well-correlated with the divergent part coming from the effective low-energy theory of the conformal factor. Finally, we discuss whether these results may shed light on the possible running of the cosmological constant at low energies. Next, as an additional application, we explore the possibility of avoiding cosmological singularity with a bounce solution in the early Universe. The main finding is that simple and well-known semiclassical correction, which describes the mixing of radiation and gravity in the effective action, may provide an analytic solution with a bounce. This solution requires a positive beta function for the total radiation term and the contraction of the Universe at the initial instant. The numerical estimate shows that the bounce may occur in an acceptable range of energies, but only under strong assumptions about the particle physics beyond the Standard Model.

**Keywords:** Quantum gravity; conformal symmetry; quantum decoupling; conformal anomaly; effective action of vacuum; semiclassical bounce; primordial universe.

# NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

Nesta tese, adota-se o sistema de unidades naturais no qual  $c = \hbar = 1$ . Conseqüentemente,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}.$$

As definições das quantidades geométricas utilizadas incluem a assinatura de Minkowski  $(+, -, -, -)$  para a métrica, o tensor de curvatura de Riemann,

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu},$$

e o escalar de curvatura  $R = g^{\mu\nu}R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ , sendo que o símbolo de Christoffel é dado por  $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\beta}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\beta} - \partial_{\lambda}g_{\beta\nu})$ . Os objetos com uma barra superior são calculados em termos da métrica fiducial  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e a massa de Planck é dada por  $M_P = 1/\sqrt{G}$ , onde  $G$  é a constante de Newton. No capítulo 4, os cálculos em *1-loop* são realizados na assinatura Euclidiana. Também usa-se notações pseudo-euclidianas, independentemente da rotação de Wick, para o espaço de assinatura Euclidiana, que é assumida quando nos referimos aos resultados obtidos via *heat kernel*. Além disso, para reduzir o tamanho das expressões, evita-se indicar o  $+i\epsilon$  nos denominadores dos propagadores. A notação compacta  $\int_x \equiv \int d^4x \sqrt{-g(x)}$  para as integrais no espaço-tempo curvo (quadridimensional) também é empregada em algumas partes desta tese.

## Lista de abreviações (em inglês):

|      |  |
|------|--|
| EH   | Einstein-Hilbert                             |
| GR   | <i>General Relativity</i>                    |
| GUT  | <i>Grand Unified Theory</i>                  |
| IR   | <i>Infrared</i>                              |
| MSM  | <i>Minimal Standard Model</i>                |
| MSSM | <i>Minimal Supersymmetric Standard Model</i> |
| NEC  | <i>Null Energy Condition</i>                 |
| QED  | <i>Quantum Electrodynamics</i>               |
| QFT  | <i>Quantum Field Theory</i>                  |
| SCM  | <i>Standard Cosmological Model</i>           |
| SM   | <i>Standard Model of particle physics</i>    |
| UV   | <i>Ultraviolet</i>                           |

# SUMÁRIO

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Sumário</b>  | <b>vi</b>   |
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>viii</b> |
| <b>Introdução</b>   | <b>2</b>    |
| <b>1 Fundamentos teóricos</b>   | <b>10</b>   |
| 1.1 Ação efetiva do vácuo . . . . .                                       | 10          |
| 1.2 Cálculo de divergências no espaço-tempo curvo . . . . .               | 11          |
| 1.2.1 Técnica de Schwinger-DeWitt . . . . .                               | 12          |
| 1.3 Simetria conforme . . . . .   | 12          |
| 1.4 Anomalia conforme . . . . .   | 13          |
| <b>2 Modelos vetoriais conformes em dimensões arbitrárias</b>             | <b>19</b>   |
| 2.1 O modelo conforme global com campo vetorial . . . . .                 | 19          |
| 2.2 Construção do operador vetorial conforme . . . . .                    | 20          |
| 2.3 Modelos conformes com escalares auxiliares . . . . .                  | 24          |
| 2.3.1 Conexão estendida . . . . .   | 24          |
| 2.3.2 Maneira mais simples de usar campo escalar . . . . .                | 25          |
| 2.4 Abordagem não analítica para modelos conformes . . . . .              | 26          |
| <b>3 Ação efetiva induzida por anomalia para um fundo métrico-escalar</b> | <b>28</b>   |
| 3.1 Integração da anomalia com um campo escalar . . . . .                 | 28          |
| 3.2 Ambiguidades nos termos de derivada total . . . . .                   | 31          |
| 3.3 Ação efetiva induzida por anomalia no IR . . . . .                    | 36          |
| <b>4 Desacoplamento quântico em teoria com derivadas superiores</b>       | <b>40</b>   |
| 4.1 Modelo de Antoniadis-Mottola . . . . .                                | 40          |
| 4.2 Correções de <i>1-loop</i> a partir de diagramas de Feynman . . . . . | 43          |
| 4.3 Comportamento assintótico . . . . .                                   | 49          |
| 4.4 Correções de <i>1-loop</i> na teoria efetiva . . . . .                | 51          |
| 4.5 Implicações para o problema da constante cosmológica . . . . .        | 53          |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5 Soluções de ricochete semiclássico</b>   | <b>55</b> |
| 5.1 Ação induzida por anomalia com radiação . . . . .   | 55        |
| 5.2 Universo primordial e correções induzidas por anomalia . . . . .  | 56        |
| 5.2.1 Estabilidade em soluções do tipo de Sitter . . . . .  | 58        |
| 5.2.2 Diagramas de fase . . . . .   | 61        |
| 5.2.3 Análise de estabilidade . . . . .   | 65        |
| 5.3 Solução de ricochete dirigida pelo setor anômalo da radiação . . . . .  | 66        |
| 5.3.1 Solução analítica para o ricochete . . . . .  | 68        |
| 5.3.2 Gráficos correspondentes ao ricochete . . . . .   | 69        |
| 5.4 Estimativas quantitativas e análise . . . . .   | 70        |
| <b>Conclusões gerais</b>  | <b>73</b> |
| <b>Perspectivas</b>   | <b>75</b> |
| <b>Apêndices</b>  |           |
| <b>A Diagramas de Feynman para a função de dois pontos</b>  | <b>78</b> |
| <b>B Resultados intermediários</b>  | <b>81</b> |
| B.1 Integrais de Feynman . . . . .  | 81        |
| B.2 Correções $\Sigma_{\zeta^2}$ , $\Sigma_{\gamma\zeta}$ e $\Sigma_{\gamma^2}$ para o caso de $m^2 = 0$ . . . . .                                      | 82        |
| <b>C Resultados das contribuições finitas <math>\Sigma_{\lambda\zeta}</math>, <math>\Sigma_{\lambda\gamma}</math> e <math>\Sigma_{\lambda^2}</math></b> | <b>83</b> |
| <b>D Correções de 1-loop para os vértices de três e quatro pontos.</b>  | <b>84</b> |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>90</b> |

## LISTA DE FIGURAS

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | A função <i>kernel</i> dos campos de matéria conecta-se às duas linhas de fótons e a um número ilimitado de linhas tracejadas da métrica linearizada. . . . . | 7  |
| 4.1 | Diagramas de Feynman associados aos vértices de interação. . . . .  | 44 |
| 4.2 | Estrutura geral dos diagramas <i>bubble</i> para funções de autoenergia $\Sigma$ . . . . .  | 45 |
| 4.3 | Diagramas <i>tadpole</i> associados com as correções $\tilde{\Sigma}$ . . . . .   | 46 |
| 4.4 | Diagramas <i>snail</i> associados às correções $\bar{\Sigma}$ . . . . .   | 46 |
| 4.5 | Representação diagramática do colapso das linhas de modos massivos em diagramas do tipo <i>bubble</i> no limite IR. . . . .                                   | 51 |
| 5.1 | Diagrama de fase para a Eq. (5.33) com o conteúdo de partículas do MSSM. . . . .  | 62 |
| 5.2 | Diagrama de fase para a Eq. (5.33) com o conteúdo de partículas MSM. . . . .  | 63 |
| 5.3 | Solução de ricochete sem radiação para o caso MSSM. . . . .   | 63 |
| 5.4 | Solução numérica para o fator conforme $\sigma(t)$ com pequena variação nas condições iniciais em $t = 0$ . . . . .   | 64 |
| 5.5 | Solução numérica para o fator conforme $\sigma(t)$ com densidade não nula de constante cosmológica. . . . .   | 64 |
| 5.6 | Solução numérica para o fator conforme $\sigma(t)$ na presença do termo de radiação anômala. . . . .  | 65 |
| 5.7 | Solução numérica para o fator de escala $a(t)$ na presença do termo de radiação anômalo. . . . .  | 69 |
| 5.8 | Solução numérica para o fator de escala $a(t)$ na presença do termo de radiação anômala e de constante cosmológica positiva. . . . .                          | 70 |
| A.1 | Diagramas para a função de dois pontos que fornecem contribuições de <i>1-loop</i> para a renormalização do acoplamento $\zeta$ . . . . .                     | 78 |
| A.2 | Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação $\gamma\zeta$ . . . . .   | 79 |
| A.3 | Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação $\gamma^2$ . . . . .  | 79 |
| A.4 | Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação $\gamma$ . . . . .  | 79 |
| A.5 | Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação $\lambda$ . . . . .   | 79 |
| A.6 | Diagramas ( <i>tadpole</i> ) para a função de dois pontos com o vértice de interação $\gamma\lambda$ . . . . .  | 80 |
| A.7 | Diagramas ( <i>tadpole</i> ) para a função de dois pontos com o vértice de interação $\lambda^2$ . . . . .  | 80 |
| A.8 | Diagramas livres de divergência para a função de dois pontos com o vértice $\lambda\zeta$ . . . . .   | 80 |
| A.9 | Diagramas livres de divergência para a função de dois pontos com o vértice $\lambda\gamma$ . . . . .  | 80 |

---

|      |  |    |
|------|--|----|
| A.10 | Diagramas livres de divergência para a função de dois pontos com o vértice $\lambda^2$ . | 80 |
| D.1  | Diagramas para a função de três pontos com o vértice de interação $\zeta^2$ .            | 84 |
| D.2  | Diagramas para a função de três pontos com o vértice de interação $\gamma\zeta$ .        | 84 |
| D.3  | Diagramas para a função de três pontos com o vértice de interação $\gamma^2$ .           | 85 |
| D.4  | Diagramas para a função de quatro pontos com o vértice de interação $\zeta^2$ .          | 86 |
| D.5  | Diagramas para a função de quatro pontos com o vértice de interação $\gamma\zeta$ .      | 87 |
| D.6  | Diagramas para a função de quatro pontos com o vértice de interação $\gamma^2$ .         | 87 |

# INTRODUÇÃO

A busca por uma teoria consistente de gravitação quântica configura um dos maiores desafios da física teórica. Nas últimas décadas, diferentes abordagens foram desenvolvidas com o objetivo de quantizar a gravidade. Isso inclui métodos covariantes como a quantização por integrais de caminho, bem como métodos canônicos como é o caso da abordagem de Wheeler-DeWitt. Apesar dos inúmeros esforços empregados na abordagem comum perturbativa, os problemas fundamentais da gravitação quântica permanecem não resolvidos.

Certos desafios, como a não renormalizabilidade, já aparecem na tentativa de se construir uma formulação quântica para a teoria da Relatividade Geral (GR) de Einstein. A partir do cálculo da ação efetiva na ordem de *1-loop*, 't Hooft e Veltman mostraram que a GR é não renormalizável, quando acoplada a um campo escalar [1]. Esse resultado foi reforçado por Goroff e Sagnotti [2] e van de Ven [3], que demonstraram a existência de um termo divergente em *2-loops*, cúbico no tensor de Riemann. Ambos resultados indicam que os contratermos em GR quântica não se anulam *on-shell* (nas equações de movimento clássicas). Neste cenário, uma maneira natural de se evitar a questão da não renormalizabilidade é modificar a GR, introduzindo termos de derivadas superiores, como foi realizado por Stelle em 1977 [4].

De fato, a teoria renormalizável de campos de matéria no espaço-tempo curvo (gravidade semiclássica), ou mesmo a teoria de gravitação quântica, requer a inclusão dos termos de derivadas superiores na ação de vácuo, além do usual termo de Einstein-Hilbert (EH) com uma contribuição de constante cosmológica  $\Lambda$ ,

$$S_{\text{vac}} = S_{\text{EH}} + \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 C^2 + a_2 E_4 + a_3 \square R + a_4 R^2 \right\}, \quad (1)$$

onde

$$S_{\text{EH}} = - \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda). \quad (2)$$

Na parte de derivadas superiores da ação (1),

$$C^2 = C^2_{\alpha\beta\mu\nu}|_{(4)} = R^2_{\alpha\beta\mu\nu} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 \quad (3)$$

é o quadrado do tensor de Weyl<sup>1</sup> e  $E_4 = R^2_{\alpha\beta\mu\nu} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2$  é o integrando do termo de Gauss-Bonnet, que é topológico em quatro dimensões.

---

<sup>1</sup> É importante destacar que essa definição é válida para o caso quadridimensional. Para situação mais geral, em  $n$ -dimensões, o quadrado do tensor de Weyl assume a estrutura:  $C^2_{\alpha\beta\mu\nu}|_{(n)} = R^2_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{4}{n-2}R^2_{\mu\nu} + \frac{2}{(n-2)(n-1)}R^2$ .

Ao mesmo tempo, esses termos de derivadas superiores adicionam modos fantasmas massivos (estados não físicos de energia cinética negativa) ao espectro da teoria, induzindo instabilidades nas soluções clássicas e podendo levar a não unitariedade da matriz  $S$  gravitacional. No entanto, em certas situações, o problema da não unitariedade pode ser contornado<sup>2</sup>, como é o caso das teorias de gravidade super-renormalizáveis, nas quais pode-se recuperar a unitariedade da matriz  $S$ , no sentido de Lee-Wick [5, 6]. Uma versão super-renormalizável pode ser alcançada adicionando um conjunto completo de termos com seis ou mais derivadas na teoria (1).

Em geral, os maiores problemas de teorias com derivadas superiores estão ligados com quebra de unitariedade física no nível quântico e com instabilidades clássicas (veja, por exemplo, [7] para mais detalhes). No caso das instabilidades, os resultados de estudos envolvendo soluções de ondas gravitacionais em teoria de quatro derivadas [8] mostram que, para frequências iniciais sub-Planckianas, não há criação de fantasmas massivos e, conseqüentemente, as soluções não apresentam instabilidade. Este é um resultado particularmente interessante, no entanto, ainda não conhecemos um mecanismo que explique esse comportamento.

Na abordagem semiclássica e limite de altas energias (UV), existe um método simples e elegante de se calcular os efeitos quânticos para a gravitação que consiste em considerar a ação efetiva do vácuo para campos de matéria invariantes conformes. Neste cenário, a anomalia conforme [9–13] e ação efetiva induzida por anomalia [14, 15] (veja também [16] e [17] para revisão e mais referências) desempenham um papel importante na descrição das correções de  $1$ -loop e estão no cerne das aplicações mais importantes na cosmologia e na física de buracos negros (veja, por exemplo, [13, 17]). Mesmo no contexto do Modelo Padrão (SM), pode-se usar a anomalia conforme em energias altas o suficiente para a escala usual, mas que ainda podem ser consideradas muito abaixo da escala de Planck. Por exemplo, faixas de energia da inflação [18], da ordem de  $10^{11} - 10^{14}$  GeV, formam um cenário em que a anomalia conforme pode se aplicar perfeitamente bem, uma vez que as massas das partículas do SM são negligenciáveis enquanto as energias de Planck estão muito além.

Uma das características fundamentais do Modelo Padrão é o mecanismo de Higgs, que fornece massa aos bósons vetoriais,  $W^\pm$  e  $Z$ , e aos férmions. O uso da simetria conforme foi tradicionalmente invocado para melhorar a naturalidade do Modelo Padrão (veja, por exemplo, as referências [19] e [20]). Por outro lado, há um crescente interesse nos efeitos quânticos do escalar de Higgs relacionados à instabilidade do vácuo em altas energias, incluindo os efeitos do espaço-tempo curvo [21–23]. Embora vários mecanismos tenham sido propostos para resolver essa questão, o assunto não parece completamente claro. Portanto, pode ser interessante considerar detalhadamente as contribuições quânticas para a ação escalar no regime UV usando a existência da anomalia conforme e o formalismo de integração da anomalia. Por hipótese, estas considerações devem providenciar um mecanismo natural de quebra de simetria conforme com geração de massa necessária para o mecanismo de Higgs.

A anomalia em uma teoria métrico-escalar, incluindo auto-interação no setor escalar,

<sup>2</sup> No contexto de teorias com quatro derivadas, propostas alternativas recentes apresentam uma forma de preservar a unitariedade, mas, em contrapartida, levam a uma violação da microcausalidade [24, 25].



foi amplamente discutida na literatura usando diferentes métodos [26–29] (veja também referências relacionadas). Entretanto, a construção da ação efetiva induzida por anomalia ainda não foi bem explorada neste contexto; em particular, não se conhece uma forma covariante dessa ação. Além disso, não há conexão com outra maneira de quebrar simetria conforme por meio de termos logarítmicos no potencial efetivo do escalar. Esta questão é abordada em detalhes no capítulo 3.

De outro lado, na interface entre cosmologia e teoria quântica de campos (QFT), existe um intrigante e desafiador problema que consiste em formular uma maneira de se obter o *running* da constante cosmológica no regime de baixas energias (IR). Como veremos a seguir, este é um problema que envolve várias sutilezas e possui aplicações cosmológicas potencialmente relevantes.

O *running* da constante cosmológica em baixas energias representa uma alternativa interessante aos numerosos modelos de Energia Escura, pois fornece a equação de estado que é próxima, mas não idêntica a  $\omega_\Lambda = -1$ , da constante cosmológica. Por outro lado, não há compreensão completa se tal *running* é possível ou não, de modo que essa questão permanece incerta e é objeto de considerações fenomenológicas, conforme discutido em [30,31] e muitos trabalhos subsequentes. A principal dificuldade para a investigação teórica detalhada é que a abordagem tradicional para o desacoplamento quântico [32] implica calcular o fator de forma não local (ou seu equivalente) e levar em consideração seu limite de baixas energias. A constante cosmológica adquire sentido físico apenas no espaço-tempo curvo e, em princípio, os fatores de forma correspondentes devem ser construídos a partir de elementos covariantes e analisados no contexto deste espaço-tempo curvo. De acordo com o teorema de Appelquist-Carazzone [32], os graus de liberdade pesados se desacoplam no regime IR e suas correções de *loops* são suprimidas quadraticamente. O mesmo efeito deve ocorrer no espaço-tempo curvo, levando aos teoremas de desacoplamento correspondentes.

Estudos relacionados foram realizados em uma série de artigos [30,33–36], nos quais os fatores de forma não locais nas ações do vácuo (gravitacionais) foram calculados e analisados. O problema é que esses fatores de forma não locais descrevem o desacoplamento, mas apenas para os termos de quarta ordem em derivadas na ação. Devido à covariância, os fatores de forma dependem do operador d’Alembertiano. As potências positivas deste operador resultam em zero quando atuam na constante cosmológica e produzem termos de superfície quando atuam no escalar de curvatura. Nota-se que parte dos artigos mencionados, referências [34–36], incluem a discussão dos fatores de forma dos termos de superfície (veja [37] para as últimas discussões sobre aspectos matemáticos do problema), e pode haver até mesmo aplicações interessantes do *running* da constante de Newton relacionadas a esses termos de superfície. No entanto, não está claro como se pode obter informações sobre o *running* da constante cosmológica no tradicional *framework* covariante.

A situação muda drasticamente ao se realizar uma transformação conforme. Por exemplo, usando a parametrização

$$g_{\mu\nu} = \frac{\phi^2}{M^2} \exp \{ \bar{h}_{\mu\nu} \}, \quad \exp \{ \bar{h}_{\mu\nu} \} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{h}_{\mu\lambda} \bar{h}^\lambda{}_\nu + \frac{1}{3!} \bar{h}_{\mu\lambda} \bar{h}^\lambda{}_\tau \bar{h}^\tau{}_\nu + \dots, \quad (4)$$

sendo  $\bar{h}_{\mu\nu}$  a métrica com traço nulo e  $M$  um parâmetro de escala constante, o termo de

constante cosmológica  $\sqrt{-g}$  transforma-se em vértices  $\phi^4$  mais  $\phi^4\bar{h}^n$ . Sabe-se que não há problema em encontrar um fator de forma não local e verificar o desacoplamento no IR para o termo  $\phi^4$  na teoria escalar [38], e pode-se esperar que isso seja igualmente fácil na versão gravitacional da teoria.

Infelizmente, a abordagem descrita não constitui uma solução abrangente para o problema do *running* da constante cosmológica. Em particular, não é óbvio que tal *running* não covariante preserve a estrutura dos vértices  $\phi^4\bar{h}^n$  de modo que o *running* possa ser atribuído com segurança à constante cosmológica e não ao esquema artificial de reparametrização. De qualquer forma, o *running* do termo cosmológico na teoria quadridimensional do fator conforme da métrica é um atraente objeto de estudo, iniciando-se pela primeira proposta [39] e sua realização por Antoniadis e Mottola [16]. O modelo do fator conforme quântico segue a ideia de realizar uma segunda quantização da ação efetiva do vácuo induzida por anomalia. Essa ação surge como resultado da integração da anomalia conforme [14, 15] proveniente dos efeitos quânticos dos campos de matéria (veja, por exemplo, [13] para uma revisão ou [40] para uma introdução no nível de livro-texto). A realização mais simples da ação induzida por anomalia é uma teoria de um único campo escalar com derivadas de quarta ordem, em um fundo plano. Esse procedimento corresponde a “desligar” o modo  $\bar{h}_{\mu\nu}$  na parametrização (4).

No artigo [16] foi demonstrado que tal modelo, com termos adicionais de EH e de constante cosmológica, é renormalizável e, em particular, descreve o *running* do termo cosmológico em função da energia. A questão restante é se esse *running* ocorre no domínio de baixas energias ou apenas no UV. De fato, esta é uma questão geral que é bastante relevante para todos os modelos de gravidade quântica com derivadas superiores. Como mencionado anteriormente, esses modelos podem ser renormalizáveis [4], ou até mesmo super-renormalizáveis [41], o que permite derivar consistentemente as equações do grupo de renormalização para as cargas efetivas. No caso com quatro derivadas, as funções beta são parcialmente ambíguas [42–44], enquanto nos modelos com seis ou mais derivadas, todas as funções beta não dependem das condições de fixação de calibre [45]. No entanto, em quais situações físicas o correspondente comportamento pode ser aplicado? As correções de *1-loop* por trás das funções beta vêm de três tipos diferentes de diagramas: (i) com linhas internas de graus de liberdade sem massa (grávitons); (ii) com linhas internas de componentes massivos, ou seja, fantasmas de derivadas superiores (ou estados do tipo fantasma, táquions fantasmas, etc) e graus de liberdade normais; (iii) com linhas internas mistas (modos sem massa e modos massivos).

A abordagem padrão para a gravidade quântica efetiva [46], assume que apenas o primeiro e o terceiro tipo de diagramas dão contribuições relevantes no IR e que essas contribuições são as mesmas no modelo efetivo, onde os propagadores e vértices são construídos a partir da ação de EH. Como consequência, o limite IR de um modelo arbitrário de gravidade quântica corresponde à GR quântica, que não tem graus de liberdade massivos. Como ocorre com todas as suposições razoáveis, essa afirmação precisa ser verificada. Uma questão relevante, proposta em [47] e levantada de forma mais explícita em [48], é sobre a possibilidade de que, em vez de GR quântica, a teoria IR da gravidade quântica poder se fundamentar em outra teoria, por exemplo, baseada em uma ação não local que também não inclua graus de liberdade massivos propagando-se no IR. Responder a esta pergunta requer o cálculo de

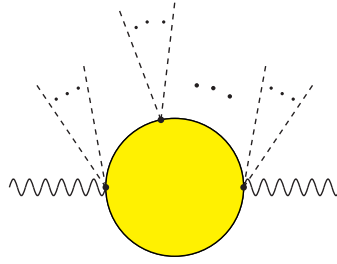
*1-loop* no esquema de renormalização dependente do momento, em uma teoria com derivadas superiores. Tal cálculo é muito complicado e parece razoável considerar um “modelo de brinquedo” (*toy model*) que possua as mesmas características principais (ou seja, conteúdo de partícula leve e de partícula pesada, devido às derivadas superiores, e interações não polinomiais). Esse tipo de modelo permitiria realizar o cálculo necessário de forma mais econômica.

Neste sentido, a teoria do fator conforme quântico [16] representa um *toy model* quase perfeito para a gravidade quântica de quatro derivadas. A Lagrangiana desta teoria inclui interações não polinomiais nos setores de zero e duas derivadas, semelhantes à gravidade quântica com quatro derivadas. Isso significa que a estrutura geral dos diagramas relevantes inclui todos os três tipos mencionados acima, isto é, (i), (ii) e (iii). Independentemente do cálculo dos fatores de forma no esquema de subtração de momento na teoria [16] ser bastante complexo (como veremos no capítulo 4 desta tese), eles ainda são menos complicados em comparação com os de uma versão completa da gravidade quântica, onde se tem que enfrentar um conjunto mais extenso de graus de liberdade e estruturas tensoriais complicadas, típicas para o tratamento diagramático da gravidade quântica.

Outro problema de muita importância no âmbito de gravitação quântica diz respeito à existência de singularidades no contexto cosmológico, tais como o centro de buracos negros, formados a partir de matéria em colapso, e a singularidade inicial no Modelo Padrão Cosmológico (SCM) (veja, por exemplo, [49–51] para uma introdução). Em particular, a singularidade cosmológica inicial é considerada uma indicação importante para se modificar a Relatividade Geral ou introduzir formas exóticas de “matéria” com uma equação de estado incomum (veja, por exemplo, [52]). Também se pode pensar em levar em conta os efeitos da gravidade quântica. Este último é uma consequência direta de que a densidade de Planck da matéria é alcançada nas proximidades de uma singularidade. Nesse sentido, a singularidade pode ser uma espécie de janela para observar os efeitos da gravidade quântica.

Uma das maneiras mais seguras de evitar a singularidade é ter uma solução cosmológica com um ricochete, como primeiramente proposto por Tolman em 1931 [53]. A partir da década de 1970, surgiram numerosos modelos de ricochete [54,55], parcialmente relacionados ao interesse em se levar em conta os efeitos quânticos. Desde então, diferentes cenários cosmológicos de ricochete têm atraído muita atenção (veja [56,57] para revisões da literatura). Na maioria dos modelos existentes, o ricochete é alcançado usando um campo escalar com um potencial especialmente projetado ou usando ações de gravidade modificada. Uma nova tendência recente está relacionada à introdução de não localidades na ação gravitacional (veja, por exemplo, [58,59]). O mesmo propósito pode ser alcançado levando em conta as correções semiclássicas não locais [60–62].

A suposição convencional é que uma teoria consistente da gravidade quântica seria uma solução definitiva para o problema das singularidades. Os argumentos dimensionais indicam que os efeitos da gravidade quântica devem se tornar relevantes na escala de Planck ( $M_p \approx 10^{19}$  GeV). Por outro lado, os efeitos quânticos dos campos de matéria no fundo gravitacional clássico podem produzir mudanças na ação da gravidade e da matéria de modo que a solução das equações efetivas seja livre de singularidades. Nesta tese, vamos



**Figura 1:** A função kernel dos campos de matéria conecta-se às duas linhas de fótons e a um número ilimitado de linhas tracejadas da métrica linearizada  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ .

explorar essa possibilidade construindo a solução com um ricochete cosmológico, onde a contração do Universo continua até um ponto mínimo, após o qual a expansão começa. Este ponto mínimo deve corresponder a densidades de energia muito abaixo da densidade de Planck  $M_p^4$ , de modo que os efeitos da gravidade quântica e também os possíveis termos de derivadas superiores na ação gravitacional sejam suprimidos pela escala de Planck e, portanto, tornem-se irrelevantes. Assim, pode-se levar em conta apenas os efeitos quânticos dos campos de matéria.

A primeira condição necessária para ocorrer um ricochete é ter um fator conforme da métrica,  $a(t)$ , decrescente em algum instante inicial antes do ricochete. Como o ricochete é uma forma de remover a singularidade, em sua vizinhança podemos assumir que as distâncias típicas são pequenas, a densidade de energia é alta e os efeitos quânticos dos campos de matéria são relevantes. Nesse regime UV, as energias típicas são tais que todos os campos são aproximadamente sem massa. Essa característica tem duas consequências:

1) Pode-se usar uma aproximação sem massa para, pelo menos, a maioria dos campos de matéria no limite UV. Para simplificar, é assumido aqui que o conteúdo não gravitacional do Universo é puramente radiação eletromagnética e discutido como outros tipos de matéria podem alterar as condições do ricochete;

2) Uma vez que o conteúdo de matéria pode ser descrito por radiação pura, os diagramas semiclássicos relevantes são aqueles com duas linhas externas de fótons e um número arbitrário de linhas externas de gravidade linearizada, como mostrado na Figura 1.

No UV distante, quando as massas de todos os campos quânticos são pequenas em comparação com as energias dos fótons (importante: sem grávitons), pode-se ignorar o efeito do desacoplamento quântico, ou seja, o teorema de Appelquist-Carazzone, e levar em conta os efeitos quânticos dos campos de matéria usando o esquema de Subtração Mínima (MS) de renormalização. Neste caso, o efeito quântico principal é a anomalia conforme. Enquanto a radiação clássica se desacopla da equação de movimento para  $a(t)$  e afeta apenas a condição inicial, no nível quântico, o conteúdo de matéria do Universo contribui diretamente para a dinâmica de  $a(t)$ .

Existe uma extensa literatura sobre os modelos cosmológicos baseados na anomalia conforme, iniciando em [63] e [64], onde a ação efetiva induzida por anomalia serviu como um caso extremo do primeiro modelo inflacionário. Como veremos mais adiante, o propósito aqui é diferente, pois estamos interessados apenas na parte de radiação da anomalia, que

pode se tornar relevante em energias mais baixas. A explicação é que as energias típicas dos fótons na Figura 1 são muito maiores do que as dos grávitons, que definem a escala de energia dos efeitos quânticos do vácuo. A parte eletromagnética da anomalia já foi utilizada anteriormente em [65] para explicar as sementes de campos magnéticos na época da formação de galáxias.

Diante do importante papel desempenhado pela anomalia conforme e pela ação efetiva induzida na abordagem semiclássica, torna-se interessante construir novos modelos conformes. De fato, este é um problema que tem atraído atenção há muito tempo [66,67] (veja também os trabalhos [68–71] e referências relacionadas). A generalização das ações conformes conhecidas para outras dimensões representa parte deste estudo geral. Dessa forma, dedicamos também um capítulo desta tese à discussão desse problema para o caso do campo vetorial com duas derivadas na ação.

## Organização da Tese

**Capítulo 1:** Introduzimos alguns elementos importantes de teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo úteis para a nossa abordagem.

**Capítulo 2:** Discutimos como superar as restrições na generalização conforme do modelo convencional do campo vetorial para uma dimensão arbitrária e, eventualmente, construir quatro ações conformes. Um desses modelos é o caso particular da teoria conforme de  $n$ -formas previamente conhecida, e os outros são novos.

**Capítulo 3:** Considerando a anomalia no caso em que o fundo é formado por campos métricos e escalares, formulamos a ação induzida em duas formas covariantes padrão. Estudamos a classificação dos termos anômalos ao fundo escalar e mostramos como avaliar as ambiguidades nos termos de derivadas totais na anomalia utilizando a regularização de Pauli-Villars. Também apresentamos uma forma consistente de avaliar o limite de baixas energias na ação induzida, resultando em uma interessante conexão com o grupo de renormalização e o potencial efetivo.

**Capítulo 4:** Investigamos o desacoplamento quântico do modo fantasma massivo na teoria quadridimensional do fator conforme da métrica. Para isso, consideramos o modelo introduzido por Antoniadis e Mottola em [16] e calculamos as correções quânticas completas na ordem de  $1$ -loop por meio de diagramas de Feynman. A partir da análise dos fatores de forma não locais nos limites UV e IR, apresentamos importantes correspondências entre os resultados obtidos, inclusive com relação à teoria efetiva do fator conforme, e mostramos o que acontece com os diagramas *bubble* envolvendo linhas internas de fantasma massivo. Finalmente, discutimos se esses resultados podem lançar luz sobre o possível *running* da constante cosmológica em baixas energias.

**Capítulo 5:** Exploramos a possibilidade de evitar a singularidade cosmológica com uma



solução de ricochete no Universo primordial. Neste contexto, mostramos que uma correção semiclássica simples, que descreve a mistura de radiação e gravidade na ação efetiva, pode fornecer uma solução analítica com um ricochete. Discutimos as suposições mínimas necessárias para se alcançar tal solução e verificamos que a estimativa numérica implica em fortes restrições sobre a física de partículas além do Modelo Padrão.

**Conclusões gerais:** Resumimos os principais resultados obtidos nesta tese.

**Perspectivas:** Discutimos possíveis extensões de alguns dos resultados obtidos e expectativas de novos projetos.

**Apêndices:** No Apêndice **A**, pode-se encontrar o conjunto de diagramas de Feynman, na ordem de  $1$ -loop, que fornecem correções quânticas para a função de dois pontos, enquanto no Apêndice **B**, coletamos os resultados intermediários relacionados ao cálculo de integrais de Feynman na regularização dimensional. As contribuições para a função de dois pontos provenientes de diagramas livres de divergências são mostradas no Apêndice **C**, e no Apêndice **D** apresentamos as expressões completas das correções em  $1$ -loop para os vértices de três e quatro pontos.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, revisamos brevemente alguns aspectos de teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo, em particular, no que concerne ao cálculo de divergências na ordem de *1-loop* por meio da técnica de Schwinger-DeWitt (*heat kernel*) e à anomalia conforme. Dessa forma, exceto pela seção 1.4, que foi baseada em nosso trabalho [72], o conteúdo deste capítulo é fortemente influenciado por referências padrão sobre o assunto, principalmente, pelas notas de aula do Prof. Ilya Shapiro e pelo seu recente livro com o Prof. Iosif Buchbinder [40]. Além disso, várias outras referências igualmente importantes são indicadas ao longo do texto. O leitor interessado em uma apresentação mais detalhada e sistemática dos assuntos aqui abordados é convidado a consultar essas referências.

### 1.1 Ação efetiva do vácuo

Na abordagem semiclássica da gravidade, os campos de matéria são quantizados em um fundo métrico clássico [40]. Embora a métrica não seja quantizada neste cenário, a dinâmica da gravidade é afetada pelos efeitos quânticos dos campos de matéria no espaço-tempo curvo. No formalismo de integrais de caminho, isso significa que a ação efetiva do vácuo, denotada por  $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ , pode ser definida através do funcional gerador [40, 73]

$$e^{i\Gamma[g_{\mu\nu}]} = \frac{e^{iS[g_{\mu\nu}]}}{\mathcal{N}_0} \int \mathcal{D}\varphi e^{iS_m[\varphi, g_{\mu\nu}]}, \quad (1.1)$$

onde a constante de normalização é dada por  $\mathcal{N}_0 = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi, g_{\mu\nu}]} \Big|_{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}}$ . Aqui,  $\varphi$  representa os campos de matéria e as quantidades dependentes apenas da métrica pertencem ao setor de vácuo. Neste caso, a ação completa em (1.1) pode ser escrita como a combinação do setor de vácuo puro com o setor de matéria acoplado ao campo gravitacional, isto é,  $S[\varphi, g_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] + S_m[\varphi, g_{\mu\nu}]$ .

Assim como em QFT no espaço-tempo plano, a ação efetiva  $\Gamma[g_{\mu\nu}]$  também admite uma expansão em *loops*, na forma

$$\Gamma[g_{\mu\nu}] = S[g_{\mu\nu}] + \sum_{l=1}^{\infty} \hbar^l \bar{\Gamma}^{(l)}, \quad (1.2)$$

onde o número de *loops* é denotado pelo parâmetro  $l$ . A contribuição de  $1$ -loop é dada pela estrutura padrão [73]

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{sTr} \ln \hat{H}, \quad (1.3)$$

com  $\hat{H} = \hat{H}(x, y)$  sendo o operador bilinear nos campos quânticos,

$$\hat{H} = \frac{\delta^2 S[\varphi, g_{\mu\nu}]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (1.4)$$

A notação  $\text{sTr}$  representa a operação de supertraço, que leva em conta a paridade Grassmanniana dos campos. Considerando as propriedades do traço funcional de um operador arbitrário  $\hat{A}$ , pode-se escrever

$$\text{sTr} \hat{A} = \int d^4x \sqrt{-g} \text{str} \hat{A}(x, y) \Big|_{x \rightarrow y}. \quad (1.5)$$

## 1.2 Cálculo de divergências no espaço-tempo curvo

Em teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo, existem três principais métodos para se calcular as divergências da ação efetiva. A saber,

- **Expansão da métrica em torno de um fundo plano:** Neste método, a métrica é perturbada em torno do espaço-tempo plano de Minkowski,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ . Isso permite expressar o setor de matéria, acoplado ao campo gravitacional, como uma série de potências nas perturbações  $h_{\mu\nu}$  [74, 75]. Neste caso, o cálculo das divergências é feito da mesma forma que em QFT no espaço-tempo plano, com os usuais diagramas de Feynman. No entanto, a falta de covariância explícita no cálculo dos contratermos representa um grande obstáculo no uso prático deste método.
- **Representação local de momentos:** No espaço-tempo curvo, este é um método covariante que consiste em escrever os propagadores em termos de uma expansão nas coordenadas normais de Riemann [76, 77] (veja, por exemplo, [78, 79] para uma introdução às coordenadas normais de Riemann). Neste caso, para derivar as divergências é suficiente considerar os primeiros termos dessa expansão. Assim como a primeira abordagem, esse método também pode ser aplicado em loops de ordens superiores.
- **Heat kernel (técnica de Schwinger-DeWitt):** Este é um dos métodos mais eficientes para o cálculo de divergências na ordem de  $1$ -loop. Neste método, o uso da representação do tempo próprio de Schwinger [80] desempenha papel central na construção de uma formulação da ação efetiva em termos dos chamados coeficientes de DeWitt (escalares locais construídos a partir de invariantes de curvatura). Além de garantir a covariância geral em todas as etapas dos cálculos, esse método pode também ser empregado para calcular divergências UV em teorias sem massa.

As duas últimas abordagens estão relacionadas ao método de campo de fundo (*background field method*). Nesta tese, usaremos a técnica de Schwinger-DeWitt. A demonstração sistemática desse método é extensa e pode ser encontrada, em detalhes, nos livros [81, 82] e, mais recente, [40]. A seguir, apresentamos apenas os resultados principais.



### 1.2.1 Técnica de Schwinger-DeWitt

Considerando que o operador  $\hat{H}$  possa ser escrito na forma mínima, isto é,  $\hat{H} = \hat{\mathbb{1}}\square + 2\hat{h}^\mu\nabla_\mu + \hat{\mathbb{I}}$ , é possível mostrar que a parte divergente da ação efetiva (1.2), na regularização dimensional, assume a seguinte estrutura geral [40]

$$\bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \text{str} \lim_{x' \rightarrow x} \hat{a}_2(x, x'), \quad (1.6)$$

onde  $\varepsilon = (4\pi)^2(n-4)$  é o parâmetro divergente no esquema de regularização dimensional,  $\mu$  é um parâmetro de massa arbitrário<sup>1</sup>, introduzido no processo de regularização para corrigir as dimensões canônicas dos campos, e  $\hat{a}_2$  é o coeficiente de DeWitt, que no limite de coincidência  $x' \rightarrow x$  é dado por

$$\lim_{x' \rightarrow x} \hat{a}_2(x, x') = \frac{\hat{\mathbb{1}}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}(\square\hat{P}) + \frac{1}{12}\hat{S}_{\mu\nu}^2. \quad (1.7)$$

Os operadores  $\hat{P}$  e  $\hat{S}_{\mu\nu}$  podem ser escritos, respectivamente, como

$$\hat{P} = \hat{\mathbb{I}} + \frac{\hat{\mathbb{1}}}{6}R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu \quad (1.8)$$

e

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{\mathbb{1}}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + (\nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu) + (\hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu). \quad (1.9)$$

Aqui,  $\hat{\mathbb{1}}$  é a matriz unitária atuando no espaço dos campos.

A estrutura (1.6) configura um poderoso algoritmo que permite derivar as divergências de 1-loop em vários modelos de teoria de campos nos espaços-tempo plano e curvo, ou mesmo em gravitação quântica. No caso das teorias em que o operador bilinear  $\hat{H}$  assume uma forma não mínima, é necessário utilizar a versão generalizada da técnica de Schwinger-DeWitt proposta por Barvinsky e Vilkovisky [83] (veja também o livro [73] para mais detalhes).

## 1.3 Simetria conforme

A simetria conforme desempenha um papel muito proeminente tanto em teorias clássicas quanto semiclássicas da gravidade. Em particular, no segundo caso, veremos que a violação da simetria conforme no nível quântico fornece uma classificação dos possíveis termos que satisfazem as identidades conformes de Noether.

Podemos entender a transformação conforme como sendo um reescalonamento da métrica do espaço-tempo,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

<sup>1</sup> Importante não confundir esse parâmetro com a escala de renormalização  $\mu_R$ , isto é, o ponto onde se define as quantidades renormalizáveis. Aqui, nosso maior interesse gira em torno dos fatores de forma não locais; portanto, usaremos a mesma notação para os dois parâmetros.

onde  $\sigma \equiv \sigma(x)$  é o fator conforme.<sup>2</sup> A lei de transformação para a métrica inversa e para o determinante da métrica tem a forma

$$g^{\mu\nu} = e^{-2\sigma} \bar{g}^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \det(g_{\mu\nu}) \equiv g = e^{2n\sigma} \bar{g}, \quad (1.11)$$

uma vez que  $\bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ . Nestas expressões,  $n$  é o número de dimensões do espaço-tempo. Uma interessante consequência da simetria conforme é a nulidade do traço do tensor energia-momento. Por exemplo, para a parte do setor de vácuo conformalmente invariante (que será apresentada em detalhes mais adiante), pode-se verificar que

$$T_\mu^\mu = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_{cv}[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (1.12)$$

Essa identidade de Noether, que corresponde a (1.10), será modificada com a introdução dos campos de matéria conformes no modelo, como veremos na próxima seção. No entanto, para o caso *on-shell*, isto é, considerando que as equações dinâmicas dos campos de matéria são satisfeitas, a identidade de Noether correspondente também implicará que o traço do tensor energia-momento seja nulo, no nível clássico.

## 1.4 Anomalia conforme

Existem diferentes esquemas de regularização no contexto da teoria quântica de campos, tais como *cut-off*, dimensional, Pauli-Villars e *zeta function*. Dentre outros motivos, a escolha ou não de um determinado método de regularização está intimamente ligada à preservação de certas simetrias; por exemplo, é comum evitarmos o uso da regularização *cut-off* em teorias de calibre, uma vez que esse método quebra a invariância de calibre. Em geral, buscamos por cenários que consigam manter intactas o máximo de simetrias da ação clássica no nível quântico. Por outro lado, existem situações nas quais não é possível preservar uma simetria na teoria quântica, independente da escolha do regulador. Esse fenômeno é conhecido como anomalia quântica.

A invariância conforme é uma das simetrias que geralmente são quebradas de forma anômala. Essa quebra (denominada de anomalia conforme ou do traço) é amplamente estudada desde 1970 [9–13] e, como mencionado na Introdução, tem importantes implicações nas correções semiclássicas e quânticas para a gravitação.

Como mostraremos mais adiante, a anomalia conforme se manifesta como uma violação da identidade de Noether no nível quântico. Neste cenário, onde a ação clássica é substituída pela ação efetiva  $\bar{\Gamma}^{(1)}$  (na ordem de *1-loop*), temos

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \left. \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}}{\delta g_{\mu\nu}} \right|_{n=4} \neq 0, \quad (1.13)$$

com  $\langle T_\mu^\mu \rangle$  denotando o valor esperado no vácuo do traço do tensor energia-momento. A anomalia conforme pode ser derivada por diferentes caminhos. Aqui, usaremos o esquema

<sup>2</sup> Na literatura, é comum que o fator conforme também seja apresentado na forma equivalente  $\Omega(x) = e^{\sigma(x)}$ . Ambas as definições podem ser convenientes em diferentes aplicações.

de regularização dimensional na maior parte do tempo, com exceção da seção (3.2), onde consideraremos a regularização de Pauli-Villars para o estudo de ambiguidades.

Antes disso, é interessante ver como a anomalia conforme surge a partir dos fatores de forma não locais, ou seja, da parte finita das correções. Considere a contribuição quântica não local proveniente do termo  $C^2$  no setor de vácuo, obtida por exemplo a partir de diagramas de Feynman na ordem de *1-loop*,

$$\bar{\Gamma}_{\text{vac}}^{(1)} \Big|_{C^2} \sim \int d^4x \sqrt{-g} \beta_w C^{\mu\nu\alpha\beta} \ln\left(\frac{\square}{\mu^2}\right) C_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (1.14)$$

onde  $\beta_w$  é a função beta para o quadrado do tensor de Weyl. Aplicando a transformação conforme (1.10) na expressão (1.14), temos que<sup>3</sup>

$$\sqrt{-g} = e^{4\sigma} \sqrt{-\bar{g}}, \quad C^{\mu\nu\alpha\beta} C_{\mu\nu\alpha\beta} = e^{-4\sigma} \bar{C}^{\mu\nu\alpha\beta} \bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \square = e^{-2\sigma} (\bar{\square} + \text{derivadas de } \sigma). \quad (1.15)$$

Isso nos permite expressar a estrutura complicada do logaritmo na forma

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu\alpha\beta} \ln\left(\frac{\square}{\mu^2}\right) C_{\mu\nu\alpha\beta} &= \bar{C}^{\mu\nu\alpha\beta} \ln\left[\frac{e^{-2\sigma}(\bar{\square} + \text{derivadas de } \sigma)}{\mu^2}\right] \bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= -2\sigma \bar{C}^2 + \bar{C}^{\mu\nu\alpha\beta} \ln\left(\frac{\bar{\square} + \text{derivadas de } \sigma}{\mu^2}\right) \bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Usando uma importante relação, que é válida para qualquer funcional  $S[g_{\mu\nu}]$ ,

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \frac{\delta S[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-4\sigma} \frac{\delta S[e^{-2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu}]}{\delta \sigma} \Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0} \quad (1.17)$$

e considerando os termos de ordem relevante no logaritmo, podemos escrever a anomalia (1.13), para o caso da correção (1.14), como

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle \Big|_{C^2} = -\beta_w \bar{C}^2. \quad (1.18)$$

Essa é uma maneira econômica e útil de parametrizar a contribuição dos fatores de forma não locais, para que possa ser usada como aplicação em cosmologia e física de buracos negros, por exemplo. Considerando que os termos logarítmicos relevantes no fator de forma acompanham as divergências UV, espera-se que seja possível relacionar a anomalia com essas divergências. De fato, no que segue, mostraremos uma forma ainda mais simples de derivar a anomalia conforme por meio da parte divergente das correções de *1-loop*.

Para exemplificar a obtenção da anomalia conforme, vamos calcular as contribuições dos campos de matéria para um fundo métrico-escalar. Neste caso, para simplificar a tarefa, considere primeiro o modelo mais simples com  $N$  cópias de campos de spinor de Dirac  $\Psi_k$  e um único campo escalar real  $\Phi$  no espaço-tempo curvo,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \sum_{k=1}^N \bar{\Psi}_k (i\gamma^{\mu} \nabla_{\mu} - h\Phi) \Psi_k + \frac{1}{2} (\nabla_{\mu} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \xi R \Phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 + \tau \square \Phi^2 \right\}, \quad (1.19)$$

<sup>3</sup> Para o leitor interessado, a transformação conforme de outras estruturas quadráticas na curvatura pode ser encontrada em detalhes no livro [40].

com o parâmetro não mínimo  $\xi = \frac{1}{6}$ . Outros acoplamentos incluem a auto-interação escalar, com constante de acoplamento  $\lambda$ , e a interação de Yukawa, com a constante  $h$ . Nossas convenções para as matrizes gamma de Dirac e derivadas covariantes seguem as definições do livro [40]. O modelo (1.19) é útil devido à sua simplicidade e generalidade. Esta última característica significa que a presença de férmions com interação de Yukawa proporciona a renormalização do termo cinético para o campo escalar já no nível de *1-loop*. O termo de derivada total  $\square \Phi^2$  com parâmetro arbitrário  $\tau$  é necessário para ter uma teoria renormalizável. A renormalização deste termo é muito importante, como veremos a seguir.

A generalização para um modelo conforme multiescalar arbitrário com campos espinoriais, vetoriais e um grupo de calibre arbitrário não é complicada. A ação geral tem a forma  $S(\Phi, \Psi, A, g)$ , onde  $\Phi, \Psi, A$  e  $g$  são escalares, férmions, vetores e métrica, respectivamente.

Além da covariância geral, este modelo também é invariante sob transformação de simetria conforme local,

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \Phi = e^{-\sigma} \bar{\Phi}, \quad \Psi = e^{-\frac{3}{2}\sigma} \bar{\Psi}_*, \quad \bar{\Psi} = e^{-\frac{3}{2}\sigma} \bar{\Psi}_*, \quad A_\mu = \bar{A}_\mu, \quad \sigma = \sigma(x). \quad (1.20)$$

Neste caso, a teoria renormalizável no fundo curvo (veja, por exemplo, os livros [40, 73] para uma introdução) requer o termo de vácuo conforme

$$S_{cv} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ a_1 C^2 + a_2 E_4 + a_3 \square R \right\}, \quad (1.21)$$

onde o quadrado do tensor de Weyl e o integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet foram definidos na Introdução.

Independentemente dos termos de superfície  $\square \Phi^2$ ,  $E_4$ , e  $\square R$  não serem conformes, a simetria se mantém na identidade de Noether correspondente a (1.20),

$$\mathcal{T} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S(g_{\mu\nu}, \Phi)}{\delta g_{\mu\nu}} - \frac{d_\Phi}{\sqrt{-g}} \Phi \frac{\delta S(g_{\mu\nu}, \Phi)}{\delta \Phi} = 0, \quad (1.22)$$

em que  $d_\Phi = -1$  é o peso conforme do campo escalar de fundo. Incluindo férmions e vetores, os pesos são  $d_\Psi = -\frac{3}{2}$  e  $d_A = 0$ .

De acordo com a prova geral existente [84] (veja também [40] para uma versão simplificada), a divergência de *1-loop*  $\bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)}$  na teoria (1.19) é invariante conforme. Isso significa, na regularização dimensional, que

$$\bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \Delta \mathcal{L}_c, \quad (1.23)$$

onde o funcional local  $\int d^4x \sqrt{-g} \Delta \mathcal{L}_c$  é conforme, ou seja, satisfaz (1.22).

Por outro lado, a ação efetiva de *1-loop* renormalizada

$$\Gamma_{\text{ren}}^{(1)} = S + S_{cv} + \bar{\Gamma}^{(1)} + \Delta S^{(1)}, \quad (1.24)$$

viola a identidade de Noether. Aqui  $\bar{\Gamma}^{(1)} = \bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} + \bar{\Gamma}_{\text{fin}}^{(1)}$  é a contribuição de *1-loop* não renormalizada e  $\Delta S^{(1)}$  inclui contratermos locais introduzidos para cancelar as divergências UV. A quebra da simetria devido às correções quânticas caracteriza a anomalia conforme [9–12].

A expressão para as divergências no modelo (1.19) pode ser diretamente calculada usando a técnica de Schwinger-DeWitt, Eq. (1.6), e o método do campo de fundo. O resultado é

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} = & -\frac{\mu^{n-4}}{\varepsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1+6N}{120} C^2 - \frac{1+11N}{360} E_4 + 2Nh^2 \left[ (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6} R\Phi^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{1+6N}{180} \square R + \left( \frac{\lambda^2}{8} - 2Nh^4 \right) \Phi^4 + \left( \frac{\lambda}{12} - \frac{4Nh^2}{3} \right) \square \Phi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

com  $(\nabla\Phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$ . No limite  $n \rightarrow 4$ , a integral na expressão (1.25) satisfaz (1.22).

Na situação geral, quando a teoria inclui escalares, espinores e vetores, a invariância conforme implica que as divergências de 1-loop possuem a forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} = & -\frac{\mu^{n-4}}{n-4} \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ wC^2 + bE_4 + c \square R \right. \\ & \left. - \gamma_\Phi \left[ (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6} R\Phi^2 \right] + \frac{1}{4!} \tilde{\beta}_\lambda \Phi^4 + \beta_\tau \square \Phi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

sendo  $\tilde{\beta}_\lambda = \beta_\lambda + 4\lambda\gamma_\Phi$ . A função gama  $\gamma_\Phi$  e as funções beta  $w$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\beta_\lambda$  e  $\beta_\tau$  dependem do conteúdo de partículas da teoria.

Os coeficientes  $w$ ,  $b$  e  $c$  são as funções beta de 1-loop no setor de vácuo. Eles dependem apenas do número de campos com diferentes spins [40, 85],

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{120(4\pi)^2} (N_s + 6N_f + 12N_v), \\ b &= -\frac{1}{360(4\pi)^2} (N_s + 11N_f + 62N_v), \\ c &= \frac{1}{180(4\pi)^2} (N_s + 6N_f - 18N_v), \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde  $N_s$ ,  $N_f$ ,  $N_v$  são as multiplicidades dos campos quânticos de matéria conformes de spins zero, meio e um, respectivamente. No caso particular de (1.25),  $N_s = 1$ ,  $N_f = N$  e  $N_v = 0$ . No setor escalar,  $\beta_\lambda$ ,  $\gamma_\Phi$  e  $\beta_\tau$  dependem do grupo de calibre, das constantes de acoplamento e de outros detalhes do modelo. No exemplo simples (1.25) considerado acima,

$$\gamma_\Phi = -\frac{1}{(4\pi)^2} 2Nh^2, \quad (1.28)$$

$$\tilde{\beta}_\lambda = \frac{1}{(4\pi)^2} (3\lambda^2 - 48h^4N), \quad (1.29)$$

$$\beta_\tau = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{\lambda}{12} - \frac{4Nh^2}{3} \right). \quad (1.30)$$

A anomalia não pode ser derivada completamente usando a versão “quântica” da identidade (1.22) devido aos problemas com os termos de superfície [13, 85]. No entanto, seguindo o esquema de [17, 86], pode-se obter a anomalia tomando a derivada variacional em relação ao fator conforme,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \left. \frac{\delta \bar{\Gamma}_{\text{ren}}^{(1)}}{\delta \sigma} \right| = -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \left. \frac{\delta \Delta S^{(1)}}{\delta \sigma} \right| \\ &= -wC^2 - bE_4 - c \square R - \frac{1}{4!} \tilde{\beta}_\lambda \Phi^4 - \beta_\tau \square \Phi^2 + \gamma_\Phi \left[ (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6} R\Phi^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Aqui o símbolo  $|$  significa a substituição  $\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ ,  $\bar{\Phi} \rightarrow \Phi$  e  $\sigma \rightarrow 0$ .

É notável que a forma geral das divergências no setor escalar permaneça qualitativamente a mesma (1.25) em qualquer outro modelo conforme com um ou mais campos escalares. Assim, a estrutura geral da anomalia (1.31) se mantém. A principal modificação diz respeito às correspondentes funções do grupo de renormalização. Em particular, não há mudanças drásticas se o escalar for complexo e multi-componente. Para o Higgs do Modelo Padrão Mínimo (MSM), temos que fazer as seguintes substituições, tanto nas divergências quanto na anomalia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 &\rightarrow g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu H^\dagger\mathcal{D}_\nu H, & \frac{1}{12}R\Phi^2 &\rightarrow \frac{1}{6}RH^\dagger H, \\ \frac{1}{4!}\Phi^4 &\rightarrow \frac{1}{8}(H^\dagger H)^2, & \square\Phi^2 &\rightarrow \square(H^\dagger H) \end{aligned} \quad (1.32)$$

e as outras estruturas são as mesmas. A derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$  é definida abaixo.

Como outro exemplo, considere o modelo  $SU(2)$  [87]

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \sqrt{-g} &\left\{ -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + i\bar{\Psi}^a \left( \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu^{ab} - h\varepsilon^{acb}\Phi^c \right) \Psi^b \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\Phi)^a(\mathcal{D}_\nu\Phi)^a + \frac{1}{12}R\Phi^a\Phi^a - \frac{1}{4!}\lambda(\Phi^a\Phi^a)^2 + \tau\square(\Phi^a\Phi^a) \right\}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

onde escalares e espinores estão na representação adjunta do grupo de calibre,  $G_{\mu\nu}^a = \nabla_\mu A_\nu^a - \nabla_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ , e  $(\mathcal{D}_\mu\Phi)^a = \delta^{ab}\nabla_\mu\Phi^b + ig\varepsilon^{acb}A_\mu^c\Phi^b$  é a derivada covariante dos escalares (ou o mesmo para os espinores). Nesta teoria, os coeficientes no setor escalar são [73]

$$\gamma_\Phi = -\frac{4}{(4\pi)^2}(h^2 - g^2), \quad (1.34)$$

$$\tilde{\beta}_\lambda = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3}\lambda^2 - 8\lambda g^2 + 72g^4 - 96h^4 \right), \quad (1.35)$$

$$\beta_\tau = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{5}{36}\lambda + \frac{2}{3}g^2 - \frac{8}{3}h^2 \right). \quad (1.36)$$

Pode-se também encontrar os coeficientes para outros casos, como modelos do tipo GUT (por exemplo, [88]) e o Modelo Padrão Mínimo [89]. Como mencionado anteriormente, a estrutura geral da anomalia (1.31) é mantida e apenas os coeficientes são modificados.

Neste ponto, podemos fazer uma classificação das estruturas dependentes de escalares na anomalia (1.31), similar àquela de [12] e [90], no caso puramente métrico:

*i) Termos conformes genuínos*, como  $C^2$ ,  $\Phi^4$  e  $(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}R\Phi^2$ . Mostra-se útil introduzir uma notação especial para as estruturas conformes generalizadas na anomalia,

$$\begin{aligned} X_c &= (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{6}R\Phi^2, \\ Y(g_{\mu\nu}, \Phi) &= wC^2 - \gamma_\Phi X_c + \frac{1}{4!}\tilde{\beta}_\lambda\Phi^4. \end{aligned} \quad (1.37)$$

*ii) Termo topológico único*  $E_4$ , independente dos campos extras como escalares.

*iii) Derivadas totais*,  $\square R$  e  $\square\Phi^2$ . No capítulo 3, veremos que esses termos são gerados por estruturas locais na ação induzida. Dependendo do modelo estes termos podem ou não ser considerados irrelevantes.

É importante mencionar que o termo topológico permanece único em dimensões superiores (pares, pelo menos) [91]. No entanto, não há uma prova geral de que as derivadas totais na anomalia possam sempre ser geradas por ações locais, independentemente de este ser o caso na dimensão seis e, em geral, para todos os exemplos disponíveis na literatura.

No capítulo 3, retomaremos os resultados desta seção com o objetivo de integrar a anomalia conforme em um fundo métrico-escalar e, a partir disso, explorar importantes questões relacionadas à abordagem da ação induzida por anomalia.

# MODELOS VETORIAIS CONFORMES EM DIMENSÕES ARBITRÁRIAS

Neste capítulo, estudamos a generalização da ação conforme do campo vetorial de calibre para uma dimensão arbitrária  $d$ . Tal generalização é de grande importância, especialmente para a abordagem semiclássica, pois possibilita tratar o campo vetorial abeliano livre da mesma forma que o campo escalar e o campo fermiônico na análise da renormalização de *1-loop* [84]. Além disso, para situações com simetria de calibre preservada, também é possível construir uma fixação de calibre invariante conforme de modo semelhante ao que foi feito em [92,93]. Este capítulo é baseado no artigo [95].

Na seção 2.1, realizamos uma breve introdução ao problema. A seção 2.2 é dedicada à busca direta do operador vetorial conforme  $d$ -dimensional. Como resultado, descobrimos que tal operador existe, mas a simetria de calibre deve ser sacrificada a fim de que o modo longitudinal do campo vetorial se torne propagante. Um detalhe interessante é que essa propagação está relacionada ao operador de Paneitz [94] em quatro dimensões. Na seção 2.3, apresentamos dois modelos de operadores vetoriais conformes  $d$ -dimensionais com a simetria de calibre preservada, mas campos escalares auxiliares são necessários para a sua construção. Na seção 2.4, discutimos a prescrição universal para se construir modelos conformes  $d$ -dimensionais não analíticos, introduzida originalmente no Apêndice da referência [86]. É mostrado que este modelo, e seu análogo puramente gravitacional, são equivalentes *on-shell* ao modelo métrico-escalar da seção 2.3.

## 2.1 O modelo conforme global com campo vetorial

A ação de um campo vetorial em quatro dimensões do espaço-tempo tem a forma

$$S_4(A, g) = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} A_\mu (g^{\mu\nu} \square - \nabla^\mu \nabla^\nu - R^{\mu\nu}) A_\nu, \quad (2.1)$$

onde restringimos nossa atenção ao modelo abeliano por questões de simplicidade. Ao lidarmos com a generalização para uma dimensão  $d$  arbitrária, o caso de um campo não abeliano será considerado separadamente.



Sob a transformação conforme local (1.20), mais especificamente,

$$A_\mu = \bar{A}_\mu, \quad g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \sigma = \sigma(x), \quad (2.2)$$

a ação (2.1) permanece invariante, ou seja,  $S_4(A, g) = S_4(\bar{A}, \bar{g})$ . O objetivo aqui é formular a generalização da transformação (2.2) que proporciona a invariância da versão  $d$ -dimensional da ação (2.1).

A generalização direta de (2.1) leva ao funcional

$$S_d(A, g) = -\frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (2.3)$$

Assumindo que a métrica ainda se transforma como em (2.2)<sup>1</sup>, o problema se reduz a saber se existe algum número real  $w$  e/ou uma modificação na transformação de  $A_\mu$  que deixa a ação (2.3) invariante sob

$$A_\mu = e^{w\sigma} \bar{A}_\mu, \quad g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

A versão mais simples diz respeito à transformação global, com  $\sigma = \text{constante}$ . A substituição direta de (2.4) em (2.3) mostra que a simetria é alcançada para

$$w = \frac{4-d}{2}. \quad (2.5)$$

O caso de uma transformação local é mais complicado. É fácil verificar que para  $\sigma = \sigma(x)$  a transformação de  $F_{\mu\nu}$  não tem a forma desejada

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \neq e^{w\sigma} \bar{F}_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

que é uma condição necessária para a simetria conforme global de (2.3) (sendo o requisito da simetria local). Nesta equação,  $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu$  e  $\bar{A}_\mu$  são provenientes de (2.4). Assim, a invariância sob a simetria conforme local requer a mudança na estrutura da ação e na regra de transformação para  $A_\mu$ .

## 2.2 Construção do operador vetorial conforme

Como primeiro passo, consideramos a construção direta de um operador vetorial conforme. Nesta seção, é derivado o modelo conforme conhecido pelo trabalho de Deser e Nepomechie [66].

O ponto de partida é a ação com duas derivadas, quadrática no campo vetorial  $V_\mu$  e sem auto-interações, cuja base consiste em uma combinação geral de possíveis invariantes escalares que podem ser construídos usando um campo vetorial covariante  $V_\mu$  em um espaço-tempo de fundo geral. A ação correspondente é definida como

$$S = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} V_\mu O^{\mu\nu} V_\nu, \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Nota-se que isso não reduz a generalidade.

onde o operador com dimensão de [energia]<sup>2</sup> tem a forma

$$O^{\mu\nu} = a_1 \nabla^\mu \nabla^\nu + a_2 g^{\mu\nu} \square + a_3 g^{\mu\nu} R + a_4 R^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

e  $a_i$  são coeficientes reais arbitrários. Reservamos a notação  $A_\mu$  para o campo de calibre e, portanto, usamos  $V_\mu$  aqui, já que a simetria de calibre não é exigida, em geral. Assumimos que o peso conforme do campo vetorial covariante  $V_\mu$  é  $w$ , de modo que a transformação conforme seja (compare com (2.4))

$$V_\mu \longrightarrow \bar{V}_\mu = e^{-w\sigma} V_\mu, \quad g_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^{-2\sigma} g_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Sob a transformação conforme infinitesimal (primeira ordem em  $\sigma$ ), a ação (2.7) se transforma como

$$\bar{S} = S(\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{V}_\mu) = S + \delta_c S, \quad (2.10)$$

sendo

$$\begin{aligned} \delta_c S = & \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ (d-4+2w)\sigma V_\mu O^{\mu\nu} V_\nu + [(d-2+w)a_1 \right. \\ & - (d-2)a_4] V_\mu (\nabla^\mu \nabla^\nu \sigma) V_\nu - [(1-w)a_2 + 2(d-1)a_3 + a_4] V_\mu g^{\mu\nu} (\square\sigma) V_\nu \\ & + [(d-2+w)a_1 + 2a_2] V_\mu (\nabla^\nu \sigma) \nabla^\mu V_\nu + [(d-4+2w)a_2] V_\mu g^{\mu\nu} (\nabla_\tau \sigma) \nabla^\tau V_\nu \\ & \left. - [(2-w)a_1 + 2a_2] V_\mu (\nabla^\mu \sigma) \nabla^\nu V_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nesta e em fórmulas subsequentes, os parênteses restringem a ação das derivadas covariantes, por exemplo,  $\nabla A = A\nabla + (\nabla A)$ .

A invariância conforme requer  $\delta_c S = 0$ , ou seja, o integrando em (2.11) deve se anular. Esta condição fornece o sistema de equações para os coeficientes

$$\begin{aligned} d-4+2w &= 0, \\ (d-2+w)a_1 - (d-2)a_4 &= 0, \\ (1-w)a_2 + 2(d-1)a_3 + a_4 &= 0, \\ (d-2+w)a_1 + 2a_2 &= 0, \\ (2-w)a_1 + 2a_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observa-se que algumas equações são degeneradas para as dimensões  $d = 1$  e  $d = 2$ . Vamos primeiro analisar essas dimensões especiais.

- No caso  $d = 1$ , obtemos  $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ . Como, além disso,  $R = 0$ , o operador é geometricamente irrelevante em  $d = 1$ .
- Para  $d = 2$  encontramos  $w = 1$ ,  $a_1 = a_2 = 0$  e  $a_3 = -\frac{a_4}{2}$ . Assim,

$$O^{\mu\nu}|_{d=2} = a_4 \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \Big|_{d=2} = 0. \quad (2.13)$$

Portanto, em dimensões  $d = 1$  e  $d = 2$ , o operador vetorial conforme que buscamos não existe. Em outras dimensões, é fácil ver que o sistema de equações em (2.12) pode ser resolvido com  $w$  de (2.5) e com os seguintes coeficientes:

$$a_2 = -\frac{d}{4}a_1, \quad a_3 = \frac{(d-4)d^2}{16(d-2)(d-1)}a_1 \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{d}{2(d-2)}a_1. \quad (2.14)$$

O operador conforme resultante é unicamente definido, a menos de um coeficiente real arbitrário global  $a_1$ , isto é,<sup>2</sup>

$$O^{\mu\nu} = a_1 \left[ \nabla^\mu \nabla^\nu - \frac{d}{4} g^{\mu\nu} \square + \frac{(d-4)d^2}{16(d-2)(d-1)} g^{\mu\nu} R + \frac{d}{2(d-2)} R^{\mu\nu} \right]. \quad (2.15)$$

Como era de se esperar, esta expressão se torna singular em  $d \rightarrow 1$  ou  $d \rightarrow 2$ ; portanto, essas dimensões não serão consideradas aqui. Por outro lado, em  $d = 4$ , o coeficiente  $a_3 = 0$  e chegamos ao operador bem conhecido para o campo de Maxwell em um fundo geral,

$$O^{\mu\nu}|_{d=4} = a_1 (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square + R^{\mu\nu}). \quad (2.16)$$

Escolhendo  $a_1 = 1$ , obtém-se a ação (2.1). É notável que é possível recuperar a ação da teoria do campo eletromagnético em  $d = 4$ , usando apenas o requisito da invariância conforme local em espaço curvo, ou seja, sem exigir a simetria de calibre. Vamos ressaltar que essa característica é típica apenas para essa dimensão especial.

Retomando o caso da dimensão geral  $d$ , cálculos diretos demonstram que a ação (2.7) também é invariante sob as transformações conformes finitas (2.9). Pode-se observar que o operador em (2.15) é único e que a invariância conforme não diz respeito a termos de superfície.

Como derivamos a ação (2.7) com (2.15) sem exigir invariância de calibre, o próximo passo é verificar como ela se comporta sob a transformação de calibre abeliana, ou seja,

$$V_\mu \rightarrow V'_\mu = V_\mu + \nabla_\mu f, \quad (2.17)$$

onde  $f = f(x)$  é um campo escalar arbitrário.

Realizando a transformação (2.17), após algumas integrações por partes, e utilizando a identidade de Bianchi contraída, descobrimos que a ação conforme se transforma como

$$\begin{aligned} S' = S - \frac{1}{2} a_1 \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ \frac{(d-4)}{2} \nabla_\nu V_\mu \left[ g^{\mu\nu} \square - \frac{d^2}{4(d-2)(d-1)} g^{\mu\nu} R \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d}{(d-2)} R^{\mu\nu} \right] f + \frac{d(d-4)}{8(d-1)} V_\mu (\nabla^\mu R) f + \frac{d-4}{4} f \left[ \square^2 + \frac{d}{d-2} R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d^2}{4(d-2)(d-1)} R \square + \frac{d}{4(d-1)} (\nabla^\mu R) \nabla_\mu \right] f \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim, para  $d \neq 4$ , a ação não é invariante de calibre.

Como a invariância de calibre da ação (2.1) significa a ausência de um modo longitudinal, vale a pena explorar este modo no modelo com o operador (2.15). Vamos realizar uma

<sup>2</sup> Este operador foi originalmente encontrado em [66]. Além disso, ele é o caso particular  $n = 2$  do operador conforme para as  $n$ -formas do tensor de intensidade do campo de calibre conforme descrito nas referências [69,71].

decomposição de York do campo vetorial,  $V_\mu = V_\mu^\perp + V_\mu^\parallel$ . Aqui, a componente  $V_\mu^\parallel$  é dada pelo gradiente de um campo escalar  $V_\mu^\parallel = \nabla_\mu \varphi$  e a condição de transversalidade é expressa como  $\nabla^\mu V_\mu^\perp = 0$ .<sup>3</sup>

Nas novas variáveis, a ação assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
S = & -\frac{a_1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ V_\mu^\perp \left[ -\frac{d}{4} g^{\mu\nu} \square + \frac{d^2(d-4)}{16(d-1)(d-2)} g^{\mu\nu} R + \frac{d}{2(d-2)} R^{\mu\nu} \right] V_\nu^\perp \right. \\
& + \frac{d-4}{4} \varphi \left[ \square^2 + \frac{d}{d-2} R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{d^2}{4(d-1)(d-2)} R \square + \frac{d}{4(d-1)} (\nabla^\mu R) \nabla_\mu \right] \varphi \\
& \left. + \frac{d(d-4)}{2(d-2)} \left[ (\nabla_\nu V_\mu^\perp) R^{\mu\nu} \varphi + \frac{d-2}{4(d-1)} V_\mu^\perp (\nabla^\mu R) \varphi \right] \right\}. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

É fácil ver que o modo longitudinal se desacopla do modo transversal apenas em  $d = 4$ , onde ele desaparece. Assim, podemos concluir que a generalização da ação  $d = 4$ , Eq. (2.1), para uma dimensão arbitrária faz com que a parte longitudinal do campo vetorial se torne propagante. Isso significa que ganhamos um novo grau de liberdade em comparação com a ação original invariante de calibre. Este é o preço que se deve pagar pela simetria conforme neste modelo. Pode-se dizer que isso é uma espécie de procedimento de Stückelberg conforme, sendo, no entanto, bastante diferente da bem conhecida abordagem de Deser [96].

Um detalhe interessante é a semelhança entre o modo longitudinal  $\varphi\varphi$  em (2.19) e o operador conforme de Paneitz [94] (veja também [97]),

$$\begin{aligned}
\Delta_4 = & \square^2 + \frac{4}{d-2} R_{\mu\nu} \nabla^\mu \nabla^\nu - \frac{d-6}{2(d-1)} (\nabla_\mu R) \nabla^\mu - \frac{d^2-4d+8}{2(d-1)(d-2)} R \square \\
& + (d-4) \left[ \frac{d^3-4d^2+16d-16}{16(d-1)^2(d-2)^2} R^2 - \frac{1}{(d-2)^2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{4(d-1)} (\square R) \right]. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Nota-se que os termos de ordem  $\varphi\varphi$  nos colchetes da expressão (2.19) coincidem com (2.20) no limite  $d = 4$ . Essa coincidência não se mantém em outras dimensões, no entanto, isso pode ser visto como um atalho para o operador de Paneitz em  $d = 4$  (outro vínculo entre os dois operadores foi discutido na referência [93]). A origem dessa relação parece incerta, e talvez possa ser adicionada à lista de problemas em aberto sobre operadores conformes. Outro aspecto interessante é que o setor  $V_\mu^\perp \varphi$  da Eq. (2.19) também inclui o coeficiente  $\frac{d-2}{d(d-1)}$ , que é um valor típico para o operador escalar de duas derivadas [97].

Todas as considerações apresentadas acima abordam apenas o modelo de campo livre (2.7). Pode-se considerar várias possíveis extensões, incluindo termos de interação. A adição desses termos pode ser vista como uma espécie de analogia com a simetria de calibre não abeliana, mas para apenas um único campo vetorial. A primeira opção é o termo  $(V^\mu V_\mu)^m$ . Este termo de interação em  $d = 4$  e, respectivamente para  $m = 2$ , foi introduzido na Eq. (8.122) de [73] para o campo vetorial axial relacionado à torção (veja também a discussão relacionada às transformações conformes com torção em [98] e [99]). A ação  $d$ -dimensional com tal termo

<sup>3</sup> Não pretendemos discutir a implementação prática desses requisitos em um fundo métrico arbitrário, mas simplesmente supor que isso pode ser feito.

tem a forma<sup>4</sup>

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ V_\mu O^{\mu\nu} V_\nu + \lambda (V^\mu V_\mu)^m \right\}, \quad (2.21)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento. Tomando a variação conforme infinitesimal da ação (2.21) e exigindo que  $\delta_c S_2 = 0$ , chegamos ao valor de  $m$ ,

$$m = \frac{d}{d-2}, \quad (2.22)$$

independente do acoplamento  $\lambda$ . As condições para a parte quadrática da ação são as mesmas que em (2.14), com  $w = 2 - d/2$ .

## 2.3 Modelos conformes com escalares auxiliares

Nesta seção, consideramos algumas maneiras mais simples de generalizar a ação (2.1) para uma dimensão arbitrária  $d$ , preservando a invariância sob a simetria conforme local.

### 2.3.1 Conexão estendida

Uma possível solução para o problema é baseada na modificação da definição de  $F_{\mu\nu}$  em (2.6). Essa solução está enraizada na abordagem semelhante usada para explorar as transformações conformes nos modelos de gravidade com torção (veja, por exemplo, [99] e referências relacionadas, o trabalho pioneiro [96] e também artigos subsequentes com um procedimento similar [100–102] e [103, 104]). Assumimos que a derivada covariante do campo vetorial é construída com uma conexão afim modificada, na forma

$$D_\mu A_\nu = \nabla_\mu A_\nu - K^\lambda_{\nu\mu} A_\lambda, \quad K^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\lambda \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\lambda \partial_\mu \varphi), \quad (2.23)$$

em que  $\varphi$  é um campo escalar adicional (também pode ser chamado de auxiliar). Neste caso, consideramos que a regra de transformação para este campo é dada por

$$\varphi = \bar{\varphi} + \gamma \sigma, \quad (2.24)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro a ser encontrado a partir da versão modificada no lado esquerdo de (2.6), com uma nova versão do tensor de campo  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , baseada em uma nova derivada covariante  $D_\mu$ . A equação (2.24) é usada para complementar as transformações da métrica e do campo vetorial de calibre (2.4).

Substituindo (2.23) na nova definição do tensor de campo

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \varphi - A_\mu \partial_\nu \varphi, \quad (2.25)$$

e após uma pequena álgebra, encontramos que a condição

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = e^{w\sigma} \bar{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

<sup>4</sup> Nas dimensões  $d \geq 6$  pode-se construir mais interações conformes, por exemplo, utilizando os produtos de  $V^\mu V_\mu$  e  $(\nabla_a V_\beta - \nabla_\beta V_a)^2$ .

é satisfeita para

$$\gamma = -w = \frac{d-4}{2}. \quad (2.27)$$

Finalmente, a ação conformalmente simétrica tem a forma

$$\tilde{S}_d(A, g) = -\frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

que coincide com (2.1) no limite  $d = 4$  e  $\varphi = 0$ . Uma das principais características de (2.25) e (2.28) é que esses dois objetos não possuem simetria de calibre, pelo menos não sob a transformação de calibre usual. Pode-se, é claro, tentar procurar pela forma modificada dessa transformação. No entanto, essa questão foi explorada nos modelos com torção [105, 106], portanto, não será considerada aqui.

Assim, chegamos à nova forma da ação do campo vetorial, permanecendo invariante conforme em uma dimensão arbitrária  $d$ . O preço a ser pago é a modificação de  $\mathcal{O}(d-4)$  da conexão afim para um campo escalar e a violação de  $\mathcal{O}(d-4)$  da invariância de calibre. De fato, ambas as questões não contradizem o esquema da prova de renormalizabilidade na ordem de 1-loop, dada em [40] (e de forma mais completa em [84]).

Além disso, permanece obscuro como fazer uma generalização para um campo vetorial não abeliano, devido à não linearidade no tensor de campo  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  e a respectiva não homogeneidade de  $G_{\mu\nu}^a$  em relação a  $A_\mu^a$ .

### 2.3.2 Maneira mais simples de usar campo escalar

Consideremos uma forma alternativa de fornecer simetria conforme na versão modificada da ação do campo vetorial abeliano (2.1). Neste caso, não alteramos a regra de transformação para o campo vetorial em (2.2), mas inserimos em vez disso o escalar auxiliar na ação. Neste caso, não há problema com a invariância de calibre e com a versão não abeliana do modelo. Assim, consideramos diretamente a ação  $d$ -dimensional

$$S_d^*(A, g) = -\frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-g} \Phi^\lambda G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}, \quad (2.29)$$

onde  $\lambda = \frac{4-d}{2-d}$ . Na verdade, pensando na teoria quântica, é útil ter uma parte livre da ação do campo vetorial que permite construir o propagador e separar os vértices. Para conseguir isso, vamos configurar  $\Phi = \chi_0 + \chi$ , com  $\chi_0$  sendo uma constante de dimensão de massa  $(d-2)$ , e considerar  $\chi$  como um novo campo escalar. Para alcançar a invariância conforme de (2.29), a lei de transformação para os novos escalares assume a forma

$$\Phi = \bar{\Phi} e^{(2-d)\sigma} \quad \text{ou} \quad \chi_0 + \chi = (\chi_0 + \bar{\chi}) e^{(2-d)\sigma}. \quad (2.30)$$

Com essas definições, a combinação  $\sqrt{-g} \Phi^\lambda g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$  é invariante conforme, proporcionando assim a invariância da ação em (2.29).

Para facilitar os cálculos práticos no modelo e também evitar que a quebra da simetria de calibre induza uma quebra de simetria conforme, é conveniente escolher o operador de peso

no procedimento de Faddeev-Popov de tal forma que a ação de fixação de calibre seja escrita como

$$S_{\text{gf},d}^*(A, g) = -\frac{1}{2\omega} \int d^d x \sqrt{-g} t^a \Phi^\lambda t^a = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} t^a Y_{ab} t^b, \quad t^a = \nabla_\mu A^{a\mu}. \quad (2.31)$$

Assim, a mudança diz respeito apenas ao operador de peso  $Y_{ab}$  e não às condições de calibre. O novo operador de peso é local e, portanto, não contribui para as divergências. O coeficiente  $\omega$  que aparece no denominador de (2.31) é o parâmetro fixador de calibre. A ação dos fantasmas de calibre construídos neste modelo possui uma forma padrão que não é invariante conforme, mas isso é verdade mesmo em  $d = 4$ . Esse fato não influencia a invariância das divergências de *1-loop* [84]. Em geral, como  $\lambda = \mathcal{O}(d - 4)$ , todos os diagramas com o campo  $\chi$  vêm com os fatores  $(d - 4)$ , portanto, não se espera que as divergências na ordem de *1-loop* mudem.

## 2.4 Abordagem não analítica para modelos conformes

Para fins de completeza, vamos mencionar o método existente, embora não muito discutido (exceto no apêndice de [86]), para se construir ações conformes em uma dimensão arbitrária. Seguindo essa abordagem não analítica, é possível propor um modelo conforme  $d$ -dimensional para o campo vetorial sem massa na forma

$$S_d^*(A, g) = -\frac{1}{4} \int d^d x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu})^{\frac{d}{4}}. \quad (2.32)$$

Na referência mencionada [86], a mesma ideia foi usada com o quadrado do tensor de Weyl  $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}$  em vez do quadrado  $G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$  na Eq. (2.32).

Pensando nas aplicações para a gravidade quântica, até certo ponto, essa solução parece menos interessante e menos útil em comparação com as três outras discutidas acima. A razão é que, neste caso, não está claro como utilizar o procedimento de Faddeev-Popov. Como mencionado em [86], o termo gravitacional similar também possui interesse restrito, pois, por exemplo, ele não pode dar origem à propagação livre de grávitons em torno do espaço-tempo plano para  $d > 4$ .

Por outro lado, a situação pode ser diferente se trocarmos a ação (2.32) por uma versão estendida do modelo. Introduzindo mais um termo dependente de um escalar em (2.29), obtemos

$$S_{d,\text{ext}}^*(A, g) = \int d^d x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} \Phi^\lambda G^2 + \frac{\tau}{4} \Phi^\alpha \right\}, \quad (2.33)$$

onde  $\tau$  é uma nova constante de acoplamento e  $\lambda$  foi definido em (2.29). Aqui, usamos a notação condensada  $G^2 = G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$ . A partir da Eq. (2.30), é fácil verificar que a transformação conforme do novo termo é dada por  $\sqrt{-g} \Phi^\alpha = e^{[d+(2-d)\alpha]\sigma} \sqrt{-\bar{g}} \bar{\Phi}^\alpha$ . Isso mostra que a invariância conforme local da expressão (2.33) requer fixar  $\alpha = \frac{d}{d-2}$ . O ponto é que, usando a equação de movimento para  $\Phi$ , o modelo (2.33) é equivalente a (2.32). Em detalhes, a condição sobre a solução (*on-shell*) fornece

$$\Phi = \left( \frac{\lambda}{\alpha\tau} G^2 \right)^{1/(\alpha-\lambda)}. \quad (2.34)$$



Após alguma álgebra, a ação *on-shell* é encontrada na forma

$$S_{d,\text{ext}}^*(A, g) \Big| = \int d^d x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} + \frac{d-4}{4d} \right) \left( \frac{d-4}{\tau d} \right)^{\frac{d}{4}-1} (G^2)^{\frac{d}{4}}. \quad (2.35)$$

Após uma reparametrização constante do campo de calibre  $A_\mu^a$  e do acoplamento de calibre  $g$ , essa expressão coincide com (2.32). Note que no limite  $\tau \rightarrow 0$  e para  $d > 4$ , a ação *on-shell* (2.35) é singular, como deveria ser, pois quando o último termo na ação (2.33) se anula, não há equivalência entre os dois modelos.

O procedimento descrito acima pode ser usado também na ação puramente gravitacional [86], com o tensor de Weyl sendo utilizado em vez do tensor de campo de Yang-Mills,

$$S_d^*(g) = -\frac{1}{2\lambda} \int d^d x \sqrt{-g} (C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma})^{\frac{d}{4}}. \quad (2.36)$$

Neste caso, o procedimento (incluindo os valores de  $\alpha$ ,  $\lambda$  e outros coeficientes) permanece o mesmo e, como resultado, chegamos à representação equivalente *on-shell* da ação conforme.

A Lagrangiana em (2.32) e a versão gravitacional similar (2.36) são não analíticas para dimensões ímpares. No entanto, mostramos que elas dão origem a uma dinâmica clássica que pode ser descrita por modelos equivalentes que são locais e analíticos.

A última observação diz respeito à extensão conforme, invariante por dualidade, de uma teoria de Maxwell modificada com auto-interações [107]. A abordagem análoga a (2.32) pode certamente ser aplicada para generalizá-la para dimensões  $d \neq 4$ , mas essa extensão pode não ser única. Seria interessante encontrar um mapeamento escalar para ambos os modelos conformes (2.32), (2.36), e também para o apresentado em [107], usando o procedimento descrito em [108]. Sugerimos também a leitura dos trabalhos [109–111] e referências relacionadas, para diferentes aplicações dos modelos Power-Maxwell, tais como (2.32).



## AÇÃO EFETIVA INDUZIDA POR ANOMALIA PARA UM FUNDO MÉTRICO-ESCALAR

Neste capítulo, derivamos e discutimos a ação efetiva induzida por anomalia para o caso em que o fundo é formado por campos métricos e escalares. Nossas considerações abrangem os limites de consistência da abordagem baseada em anomalia, que inclui a discussão de ambiguidades na anomalia conforme e na ação efetiva induzida. Por último, mas não menos importante, mostramos como avaliar as contribuições derivadas da anomalia conforme no regime de baixas energias. Este capítulo é baseado no artigo [72].

Na seção 3.1, formulamos a ação efetiva induzida por anomalia com campos métrico e escalar. A seção 3.2 é dedicada à análise da ambiguidade na anomalia, estendendo os resultados de trabalhos anteriores sobre o assunto [86, 112]. Na seção 3.3, consideramos o limite de baixas energias da ação induzida e a conexão com o grupo de renormalização e o potencial efetivo dos campos escalares.

### 3.1 Integração da anomalia com um campo escalar

Neste capítulo, considera-se os principais resultados obtidos na seção 1.4 para a anomalia conforme no caso de um fundo métrico-escalar.

A ação efetiva induzida por anomalia dos campos de fundo  $g_{\mu\nu}$  e  $\Phi$  é uma solução para a equação

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \Phi \frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta\Phi} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} e^{-4\sigma} \frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta\sigma} \Big| = \langle \mathcal{T} \rangle. \quad (3.1)$$

Uma solução desse tipo para um caso puramente gravitacional foi encontrada em [14, 15] e representa uma generalização em quatro dimensões da ação de Polyakov [113] (originalmente construída em duas dimensões). Existem generalizações que incluem torção [114, 115] e o termo de violação de paridade [116]. Além disso, a solução geral para uma dimensão arbitrária par foi obtida em [91].

A primeira observação é que os termos de derivada total na anomalia  $\langle \mathcal{T} \rangle$  podem ser

obtidos usando as relações

$$-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}R^2=12\Box R, \quad (3.2)$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\Phi\frac{\delta}{\delta\Phi}\right)\int d^4x\sqrt{-g}R\Phi^2=6\Box\Phi^2. \quad (3.3)$$

Os invariantes conformes podem ser mantidos juntos com  $C^2$  como na Eq. (1.37), simplificando bastante a derivação da ação induzida por anomalia. Além disso, é preciso da relação

$$\sqrt{-g}\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)=\sqrt{-\bar{g}}\left(\bar{E}_4-\frac{2}{3}\bar{\Box}\bar{R}+4\bar{\Delta}_4\sigma\right), \quad (3.4)$$

onde  $\Delta_4$  é o operador de Paneitz [94, 117]

$$\Delta_4=\Box^2+2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu-\frac{2}{3}R\Box+\frac{1}{3}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu, \quad (3.5)$$

satisfazendo  $\sqrt{-g}\Delta_4=\sqrt{-\bar{g}}\bar{\Delta}_4$ . A relação fundamental (3.4) é o principal elemento que possibilita a integração da anomalia, pois fornece a expressão

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\int_x A\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)=4\sqrt{-g}\Delta_4 A, \quad (3.6)$$

que é válida para um funcional conforme arbitrário  $A[g_{\mu\nu}, \Phi]=A[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\Phi}]$ .

A solução mais simples para a ação induzida pode ser obtida diretamente de (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4), na forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ind}} &= S_c[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\Phi}]-\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{2b+3c}{36}R^2+\frac{\beta_\tau}{6}R\Phi^2\right\} \\ &+ \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\sigma Y(\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\Phi})+b\sigma\left(\bar{E}-\frac{2}{3}\bar{\Box}\bar{R}\right)+2b\sigma\bar{\Delta}_4\sigma\right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

com  $\sqrt{-g}=\sqrt{-\bar{g}}e^{4\sigma}$  e  $R=e^{-2\sigma}[\bar{R}-6(\bar{\nabla}\sigma)^2-6\bar{\Box}\sigma]$ . Nota-se que  $S_c[\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\Phi}]=S_c[g_{\mu\nu}, \Phi]$  é uma “constante de integração” para a equação (3.7), ou seja, um funcional conforme que não pode ser obtida a partir da anomalia e, portanto, não possui relação direta com as divergências UV.

Uma solução alternativa, covariante e não local, da equação (3.1) requer a introdução da função de Green para o operador de Paneitz,

$$(\sqrt{-g}\Delta_4)_x G(x, y)=\delta(x, y). \quad (3.8)$$

Usando (3.6) e o esquema geral [91], obtém-se (veja, por exemplo, [40] para os detalhes)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ind}} &= S_c+\frac{b}{8}\int_x\int_y\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)_x G(x, y)\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)_y \\ &+\frac{1}{4}\int_x\int_y Y(x) G(x, y)\left(E_4-\frac{2}{3}\Box R\right)_y-\int_x\left(\frac{2b+3c}{36}R^2+\frac{\beta_\tau}{6}R\Phi^2\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Esta expressão pode também ser escrita em sua forma simétrica,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ind}} = & S_c - \int_x \left( \frac{2b+3c}{36} R^2 + \frac{\beta_\tau}{6} R \Phi^2 \right) - \frac{1}{8b} \int_x \int_y Y(x) G(x, y) Y(y) \\ & + \frac{b}{8} \int_x \int_y \left( E_4 - \frac{2}{3} \square R + \frac{1}{b} Y \right)_x G(x, y) \left( E_4 - \frac{2}{3} \square R + \frac{1}{b} Y \right)_y. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Finalmente, é possível reescrever o resultado (3.10) na representação local por meio da introdução de dois campos auxiliares  $\varphi$  e  $\psi$  [44] (veja também [116,118] para uma apresentação alternativa). O resultado é

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ind}} = & S_c[g_{\mu\nu}, \Phi] - \int_x \left\{ \frac{2b+3c}{36} R^2 + \frac{\beta_\tau}{6} R \Phi^2 \right\} + \int_x \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Delta_4 \varphi - \frac{1}{2} \psi \Delta_4 \psi \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{-b}}{2} \varphi \left( E_4 - \frac{2}{3} \square R + \frac{1}{b} Y \right) + \frac{1}{2\sqrt{-b}} \psi Y \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nota-se que a expressão covariante não local (3.9) é um caso particular da fórmula apresentada no trabalho recente [119] (exemplos particulares para outros campos também foram fornecidos, por exemplo, nas referências [116,120]). Como já mencionado anteriormente, essa estrutura é bastante geral e, de fato, vale em qualquer espaço-tempo de dimensão par [91]. Uma característica notável das soluções (3.9) e (3.11) é que a ação efetiva induzida, como dada nessas equações, é invariante sob transformações conformes globais (1.20), ou seja, com  $\sigma$  constante. No entanto, essa invariância não contradiz o fato de que a simetria conforme local da teoria é anômala.

As formas (3.7), (3.9) e (3.11) são equivalentes, independentemente das aplicações não cosmológicas (veja, por exemplo, [17] e referências relacionadas). A forma (3.11) é mais útil devido à covariância e localidade. A generalização fenomenológica para campos quânticos com massas leves foi construída em [101,102] para a forma mais simples (3.7).

No que diz respeito à cosmologia de ordem zero, ou seja, para a dinâmica do fator conforme da métrica, nota-se que há uma diferença significativa entre o fundo puramente métrico e a solução com campo escalar, como (3.11). No caso métrico, o funcional  $S_c$  é irrelevante uma vez que a métrica é definida por (1.20) com  $e^\sigma = a(\eta)$ , em que  $\eta$  é o tempo conforme. Como resultado,  $S_c$  não depende de  $a(\eta)$  e a ação efetiva induzida por anomalia parece uma forma exata de correções quânticas no nível de *1-loop*. Além disso, assumindo que a estrutura geral da anomalia se mantém em *loops* superiores, o único detalhe que pode mudar além da ordem de *1-loop* são as funções beta. No caso do campo escalar, a anomalia inclui termos extras (1.31) e, por outro lado, o funcional  $S_c$  depende dos campos escalares  $\Phi$ . Assim, a solução (3.11) não pode mais ser considerada exata. O status desta solução é como o de um fundo puramente métrico no caso da solução de buraco negro ou outras situações semelhantes [17].

Outra questão importante é se a forma da anomalia pode ser a mesma em *loops* mais altos se a teoria quântica inicial inclui campos escalares. Para abordar essa questão, é preciso explorar em detalhe a ação efetiva do campo escalar em *1-loop*, incluindo as ambiguidades correspondentes. Este é o assunto da próxima seção.

O último item importante a ser observado é que as expressões (3.7), (3.9) e (3.11) são válidas apenas para campos conformes sem massa. No caso de campos de Higgs massivos ou outros campos massivos que contribuem para  $\tilde{\beta}_\lambda$ ,  $\gamma_\Phi$ ,  $w$ ,  $b$ ,  $c$  e  $\beta_\tau$ , esses resultados podem ser considerados como uma aproximação UV. Em particular para  $\tilde{\beta}_\lambda$ ,  $\gamma_\Phi$ ,  $w$  e  $c$ , esse fato pode ser confirmado pela análise direta dos fatores de forma não locais [30, 33, 38].

## 3.2 Ambiguidades nos termos de derivada total

Nesta seção, é discutida a existência de ambiguidades nas funções beta dos termos de superfície  $c$  e  $\beta_\tau$  de (1.31). Já se sabe de (3.2) e (3.3) que esses termos produzem termos finitos  $\int d^4x \sqrt{-g} R^2$  e  $\int d^4x \sqrt{-g} R \Phi^2$  na ação induzida.

O caso do termo  $c \square R$  foi extensivamente discutido na literatura como um problema principal não resolvido decorrente da escolha de regularização. Nesse sentido, vale mencionar o livro [85] e o importante artigo de revisão [13]. De maneira mais conclusiva, o problema foi considerado em [86] para o exemplo particular de um campo escalar real. A ambiguidade no coeficiente  $\beta_\tau$  foi abordada em [112] para dois exemplos: o escalar com auto-interação e o modelo de Yukawa. No último caso, a teoria tinha um campo escalar de fundo puro e levava em conta os efeitos quânticos de um férmion. A análise da referência [86] incluiu vários tipos de regularização. Um dos pontos principais foi que há uma ambiguidade na escolha do contratermo de Weyl ao quadrado, relacionada à possibilidade de escolher o contratermo com  $C^2(d)$  onde  $d = n + \gamma(n - 4)$ , em vez de  $C^2(4)$  [11] ou uma versão mais simples com  $C^2(n)$ . Foi mostrado que essa ambiguidade é completamente equivalente à liberdade de introduzir um termo finito  $\int d^4x \sqrt{-g} R^2$  na ação clássica de vácuo (1.21). Como esse termo produz  $\square R$  na identidade de Noether (1.22), o termo  $\square R$  na anomalia é modificado e parece ambíguo. Outro exemplo de uma ambiguidade qualitativamente similar, não relacionada à escolha de  $C^2(d)$ , é a regularização de Pauli-Villars, que mostra uma ambiguidade para a função beta  $c$  [112].

A importante diferença entre  $c$  e  $\beta_\tau$  é que a introdução de um termo  $R^2$  no lagrangiano do vácuo não compromete a simetria dos campos quânticos e pode ser considerada uma espécie de procedimento “legítimo”. A situação é oposta para o termo  $\Phi^2$ . Alterar o coeficiente deste termo no lagrangiano clássico de  $\frac{1}{6}$  para qualquer  $\xi \neq \frac{1}{6}$  quebra a simetria conforme no setor dos campos quânticos. Então, as divergências de  $1$ -loop tornam-se não invariantes conforme, ou seja, elas não têm a estrutura especial de (1.26). Nesse caso, é necessário uma renormalização independente de  $\xi$  na ação (1.19), portanto, o valor conforme  $\xi = \frac{1}{6}$  não pode ser um ponto fixo do fluxo do grupo de renormalização. Estritamente falando, sem simetria conforme não faz sentido falar sobre anomalia. Assim, a ambiguidade do tipo  $\square \Phi^2$  é uma questão crítica para a quantização de qualquer teoria quântica com campos escalares.

Uma vez que não há ambiguidade para o termo  $\square \Phi^2$  na regularização dimensional, a análise baseada em Pauli-Villars [86, 112] é estendida a seguir para um modelo arbitrário com escalares, férmions e vetores. Como antes, assume-se que há apenas um único escalar real  $\Phi$ , mas sem impor restrições nas funções gama e beta nas divergências (1.26).

A regularização de Pauli-Villars requer a introdução de um conjunto de campos escalares

ou espinoriais (reguladores) [121–123] com massas especialmente escolhidas  $m_i$  e com paridade de Grassmann indefinida. Neste caso, são necessárias as contribuições de  $1$ -loop de um regulador escalar individual  $\varphi_i$ , com massa  $m_i$ , no fundo externo do campo escalar  $\Phi$  e da métrica,

$$S_{\text{reg}}^{(i)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_i \partial_\nu \varphi_i + \frac{\xi_i}{2} R \varphi_i^2 - \frac{m_i^2}{2} \varphi_i^2 - \frac{\tilde{\kappa}}{2} \Phi^2 \varphi_i^2 \right\}, \quad (3.12)$$

onde  $\tilde{\kappa}$  é um acoplamento artificial que será útil posteriormente, enquanto  $m_i$  e  $\xi_i$  são massas e parâmetros não mínimos para os reguladores escalares.

A contribuição do regulador pode entrar com sinal positivo ou negativo, dependendo da estatística de  $\varphi_i$ . Em ambos os casos, pode-se usar a expressão para a ação efetiva que foi calculada por meio do método de *heat kernel* [124, 125] em [33, 126], incluindo para o fundo métrico-escalar [38] (um cálculo equivalente foi apresentado de forma independente em [127]) e também usando diagramas de Feynman [30, 40, 128]. O resultado, para a estatística bosônica, tem a forma

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_s^{(1)} = & \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ m_i^4 \left( \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} + \frac{3}{4} \right) + \tilde{\xi}_i m_i^2 R \left( \frac{1}{\tilde{\epsilon}} + 1 \right) \right. \\ & + C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ \frac{1}{120\tilde{\epsilon}} + \frac{1}{2} k_W(\tau_i) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} + R \left[ \frac{1}{2\tilde{\epsilon}} \tilde{\xi}_i^2 + k_R(\tau_i) \right] R \\ & \left. - \frac{\tilde{\kappa}}{2\tilde{\epsilon}} m_i^2 \Phi^2 + \Phi^2 \left[ \frac{\tilde{\kappa}^2}{8\tilde{\epsilon}} + k_{\tilde{\kappa}}(\tau_i) \right] \Phi^2 + \Phi^2 \left[ -\frac{\tilde{\kappa}}{2\tilde{\epsilon}} \tilde{\xi}_i + k_\xi(\tau_i) \right] R \right\}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

onde  $\tau_i = \square/m_i^2$  e são empregadas notações compactas

$$\tilde{\xi}_i = \left( \xi_i - \frac{1}{6} \right), \quad \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \equiv \frac{2}{4-n} + \ln \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) - \gamma_E, \quad (3.14)$$

em que  $\gamma_E \approx 0.577$  é a constante de Euler-Mascheroni. As expressões para os fatores de forma não locais  $k_W$ ,  $k_R$ ,  $k_{\tilde{\kappa}}$  e  $k_\xi$  podem ser encontradas em [38]. Aqui, é suficiente lembrar que (i) os fatores logarítmicos UV são sempre proporcionais a  $\ln \mu^2$ , como mostrado abaixo; (ii) no limite IR,  $m_i \rightarrow \infty$ , todos esses fatores de forma desaparecem como  $\mathcal{O}(\tau_i)$ .

No limite conforme,  $m_i \rightarrow 0$  e  $\tilde{\xi}_i \rightarrow 0$ , a parte finita em (3.13) se reduz a

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{UV}}^{(1)} = & -\frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{120} C_{\mu\nu\alpha\beta} \ln \left( -\frac{\square}{4\pi\mu^2} \right) C^{\mu\nu\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \frac{\kappa^2}{8} \Phi^2 \ln \left( -\frac{\square}{4\pi\mu^2} \right) \Phi^2 + \frac{1}{1080} R^2 + \frac{\tilde{\kappa}}{36} \Phi^2 R \right\}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Todos os termos aqui violam a simetria conforme local. Os dois primeiros termos no integrando são não locais e correspondem às divergências de  $1$ -loop nos termos do Weyl ao quadrado e  $\Phi^4$ , respectivamente. Os dois últimos termos são locais e correspondem à derivada total (termos  $\square R$  e  $\square \Phi^2$ ) na anomalia via (3.2) e (3.3). Pode-se dizer que (3.15) é uma alternativa à forma (3.10) da ação efetiva responsável pela anomalia [129, 130], mas essa expressão será usada como um instrumento para explorar a ambiguidade.

O procedimento de regularização de Pauli-Villars começa a partir de (3.13) e requer o conjunto de campos auxiliares (reguladores) (3.12) com  $i = 1, \dots, N_s$ . Para explorar a

ambiguidade, esses campos devem ter  $\tilde{\xi}_i$  gerais. Cada campo tem uma degenerescência  $s_i$  multiplicada por 1 no caso bosônico, ou  $-2$  para a estatística fermiônica. Começando pelo caso mais simples de um único escalar  $\Phi$ , rotulado como  $\varphi_0$  (assumindo  $\tilde{\xi}_0 = 0$  e  $s_0 = 1$ ). Então, a ação efetiva regularizada de Pauli-Villars pode ser definida como

$$\bar{\Gamma}_{\text{reg}}^{(1)} = \sum_{i=0}^{N_s} s_i \bar{\Gamma}_i^{(1)}(m_i, \tilde{\xi}_i, n). \quad (3.16)$$

O termo  $i = 0$  é dado por (3.15) mais a parte divergente  $\mathcal{O}(1/\tilde{\epsilon})$ . Considere  $m_i = \mu_i M$ , onde  $M$  é o parâmetro dimensional de regularização e  $\mu_i$  são coeficientes adimensionais a serem definidos. Pode-se escolher  $\mu_i$  de tal forma que os termos  $\mathcal{O}(1/\tilde{\epsilon})$  em (3.16) se cancelem e a regularização dimensional auxiliar se torne irrelevante. De fato, essa regularização auxiliar poderia ser substituída pelo *cut-off* covariante na integral do *heat kernel*, como foi feito em [86, 112].

As condições de Pauli-Villars que eliminam os termos  $\mathcal{O}(1/\tilde{\epsilon})$  e (no caso do *cut-off* covariante) também as divergências quadráticas e quárticas, têm a forma

$$\sum_{i=1}^{N_s} s_i = -s_0 = -1; \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^{N_s} s_i \mu_i^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{N_s} s_i \tilde{\xi}_i = 0; \quad (3.18)$$

$$\sum_{i=1}^{N_s} s_i \mu_i^4 = 0, \quad \sum_{i=1}^{N_s} s_i \tilde{\xi}_i^2 = 0. \quad (3.19)$$

A condição (3.17) proporciona o cancelamento das divergências quárticas e também dos termos  $\mathcal{O}(1/\tilde{\epsilon})$  em Weyl ao quadrado. As duas condições (3.18) eliminam as divergências quadráticas no esquema *cut-off*. Por fim, as condições (3.19) eliminam as divergências logarítmicas,  $\mathcal{O}(1/\tilde{\epsilon})$ , da constante cosmológica e  $R^2$ .

Uma possível solução para essas condições corresponde a  $N_s = 5$  e

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 4, \quad s_3 = s_4 = s_5 = -2; \quad (3.20)$$

$$\mu_1^2 = \mu_5^2 = 4, \quad \mu_2^2 = \mu_4^2 = 3, \quad \mu_3^2 = 1; \quad (3.21)$$

$$\tilde{\xi}_i = \mu_i^2. \quad (3.22)$$

Esta solução também é válida para combinações das condições em (3.18) e (3.19), ou seja,

$$\sum_{i=1}^{N_s} s_i \mu_i^2 \tilde{\xi}_i = 0, \quad (3.23)$$

necessária para a divergência  $R\Phi^2$ . Usando a equação (3.16), chegamos à seguinte expressão para a anomalia conforme na regularização covariante de Pauli-Villars para um único campo escalar,

$$\langle \mathcal{T} \rangle = -\frac{\beta\lambda}{4!} \Phi^4 + \gamma_\Phi X_c - wC^2 - bE_4 - (c - 6\delta)\square R - (\beta_\tau + 3\rho)\square\Phi^2, \quad (3.24)$$

onde  $\gamma_\Phi = 0$  e definimos

$$\rho = \frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_{i=1}^{N_s} s_i \tilde{\xi}_i \ln \mu_i^2; \quad (3.25)$$

$$\delta = \frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_{i=1}^{N_s} s_i \tilde{\xi}_i^2 \ln \mu_i^2. \quad (3.26)$$

Assim como em [112], encontramos uma dependência nos parâmetros de Pauli-Villars para os coeficientes dos termos de derivada total  $\square\Phi^2$  e  $\square R$ .

Pode-se observar que há uma ambiguidade em ambos os termos  $\square\Phi^2$  e  $\square R$ , relacionada à escolha de  $\xi_i$  nos reguladores escalares. O ponto é que podemos escolher  $\tilde{\xi}_i = \mu_i^2$  como é feito na relação (3.22) ou, alternativamente, tomar  $\tilde{\xi}_i \equiv 0$ , que também resolve o sistema de equações (3.17), (3.18) e (3.19). Neste último caso, recuperamos o valor padrão para aqueles termos de anomalia que são comuns a todas as regularizações que não quebram explicitamente a invariância conforme.

A questão restante é se podemos remover todas as divergências (1.26) na teoria geral usando os reguladores de Pauli-Villars. Isso não pode ser feito apenas com reguladores do tipo escalar, pois estes não cancelam o termo  $X_c$ , ausente na Eq. (3.13). Assim, precisamos adicionar reguladores de outro tipo, produzindo o contratermo cinético no setor escalar.

Portanto, vamos introduzir reguladores espinoriais com paridade de Grassmann indefinida, como sugerido em [112]. Neste caso, o operador colocado na forma bilinear é

$$O_j = \hat{H}_j \hat{H}_j^*, \quad \hat{H}_j = \gamma^\mu \nabla_\mu - i\varphi_j, \quad \hat{H}_j^* = \gamma^\nu \nabla_\nu + i\varphi_j, \quad (3.27)$$

em que  $\varphi_j = \tilde{m}_j + h\Phi$ ,  $\tilde{m}_j = v_j M$  é a massa do regulador e  $\Phi$  é o escalar de fundo (com generalizações para o caso multiescalar descrito na seção 1.4). A partir da relação  $\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu \nabla_\nu = \square - R/4$ , é fácil verificar que

$$O_j = \square + i\gamma^\alpha (\nabla_\alpha \varphi_j) - \frac{1}{4} R + \varphi_j^2. \quad (3.28)$$

A analogia de (3.13) no caso fermiônico descrito tem a forma [38, 112]

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_f^{(1)} = & \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \left\{ -\tilde{m}_j^4 \left( \frac{1}{\tilde{\epsilon}} + \frac{3}{2} \right) + \left( \frac{1}{6} R - 2h^2 \Phi^2 \right) \tilde{m}_j^2 \left( \frac{1}{\tilde{\epsilon}} + 1 \right) \right. \\ & + \frac{1}{4} C_{\mu\nu\alpha\beta} \left[ \frac{1}{10\tilde{\epsilon}} + k_W^f(a) \right] C^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2} h^2 (\nabla_\alpha \Phi) \left( \frac{2}{\tilde{\epsilon}} + 4\tilde{A} \right) (\nabla^\alpha \Phi) \\ & \left. + \frac{1}{2} h^2 \Phi^2 \left( \frac{1}{3\tilde{\epsilon}} + \frac{2}{9} + \frac{8\tilde{A}}{3a^2} \right) R - \frac{1}{2} h^4 \Phi^2 \left( \frac{2}{\tilde{\epsilon}} + 4\tilde{A} \right) \Phi^2 + \frac{1}{2} R k_R^f(a) R \right\}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Os fatores de forma não locais finitos  $k_W^f$  e  $k_R^f$  podem ser encontrados na referência [33] e as notações utilizadas são

$$\tilde{A} = 1 - \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1+a/2}{1-a/2} \right), \quad a^2 = \frac{4\square}{\square - 4m^2}. \quad (3.30)$$



O cancelamento da parte dependente do vácuo  $N_f$  de (1.26) pode ser feita utilizando reguladores (3.28) e a ação

$$\bar{\Gamma}_{\text{reg},f}^{(1)} = \sum_{j=0}^{N_f} t_j \bar{\Gamma}_j^{(1)}(\tilde{m}_j), \quad (3.31)$$

onde  $j = 0$  corresponde a cada um dos férmions físicos. Isso significa que precisaremos de  $N_f$  cópias de cada um desses reguladores, exatamente como precisamos de  $N_s$  cópias no caso escalar. As condições para os coeficientes  $t_j$  e  $v_j$  são completamente similares a (3.17), (3.18) e (3.19) se assumirmos  $N_f = 5$  e substituirmos  $s_i \rightarrow t_j$  e  $\mu_i \rightarrow v_j$ , desta vez com  $\tilde{\xi}_j \equiv 0$ . Correspondentemente, a solução é dada por (3.20) e (3.21) com as mesmas substituições.

Neste ponto, pode-se fazer duas observações relevantes. A primeira é que o cancelamento dos termos dependentes de  $\Phi$  em (1.26) pode ser providenciado pelo ajuste dos acoplamentos artificiais  $\kappa$  e  $h$  nas ações de regularização (3.16) e (3.31). Isso pode ser fornecido para qualquer conteúdo escalar  $e$ , correspondentemente, para qualquer  $\beta_\lambda$  e  $\gamma_\Phi$ , mesmo sem considerar a possível ambiguidade na fixação de calibre na última quantidade. Assim, não é necessário se preocupar com a dependência do escalar  $\Phi$  no restante de nossa consideração.

O segundo ponto é o seguinte. Ao olhar para as expressões em (1.27), fica claro que o cancelamento das divergências para um conjunto geral  $N_{s,f,v}$  não pode ser feito apenas com reguladores escalares e fermiônicos. Portanto, precisamos introduzir reguladores vetoriais para lidar com a parte dependente de  $N_v$ . Este regulador não precisa depender de  $\Phi$  devido à primeira observação. Neste ponto surge um problema aparente porque o regulador deve ser massivo e é conhecido que o limite sem massa nos fatores de forma gravitacionais manifesta descontinuidade [131]. No entanto, a solução desse problema é conhecida há muito tempo [121–123]. Os campos reguladores são não físicos e não precisam satisfazer as mesmas condições de consistência que os campos físicos, como a correspondência entre spin e estatísticas, ou a ausência dos modos não físicos. Portanto, podemos definir os reguladores para a parte vetorial na forma

$$\bar{\Gamma}_{\text{reg},v}^{(1)} = \sum_{k=0}^{N_v} r_k \bar{\Gamma}_k^{(1)}(\tilde{m}_k), \quad (3.32)$$

onde

$$\bar{\Gamma}_k^{(1)}(\tilde{m}_k) = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\delta_\beta^\alpha \square - R_\beta^\alpha + \tilde{m}_k^2 \delta_\beta^\alpha) - i \text{Tr} \ln (\square + \tilde{m}_k^2) \quad (3.33)$$

e  $\tilde{m}_k^2 = \rho_k M$  é a massa do regulador. É importante que em (3.33) tenhamos a contribuição dupla do modo escalar, como nos casos de fantasmas de Faddeev-Popov sem massa (isso difere da contribuição única no caso de um vetor massivo [83, 131]). Essa característica garante o cancelamento das divergências na parte do vácuo  $N_v$  de (1.26) se escolhermos condições semelhantes a (3.17), (3.18) e (3.19) para os coeficientes  $r_k$  e  $\rho_k$ , tomarmos  $N_v = 5$  e substituirmos  $s_i \rightarrow r_k$  e  $\mu_i \rightarrow \rho_k$ , é claro, com  $\tilde{\xi}_k \equiv 0$ , como no caso dos férmions. A solução é (3.20) e (3.21) com as substituições apropriadas. A forma explícita de (3.33), com o conjunto completo de fatores de forma não locais, pode ser encontrada na referência [33] ou facilmente extraída de [131].



Assim, provamos que o cancelamento das divergências é possível para qualquer conteúdo de partículas e funções beta do modelo subjacente. A ambiguidade está presente e é dada por (3.24). É importante enfatizar que, apesar dos termos locais satisfazerem a contagem de potência na teoria, a ambiguidade descrita acima não pode ser resolvida pela mudança do parâmetro de renormalização  $\mu$ , pois os termos correspondentes não estão presentes na ação clássica inicial e não são objeto de renormalização UV. Este aspecto da teoria foi discutido anteriormente no artigo clássico [132] e mais recentemente em [112]. A ambiguidade nos termos locais só pode ser resolvida introduzindo esses termos não conformes desde o início, com coeficientes arbitrários, que podem ser fixados por experimentos e não por um esquema particular de regularização.

### 3.3 Ação efetiva induzida por anomalia no IR

Nesta seção, exploramos a ação induzida por anomalias em baixas energias, ou seja, no IR. O esquema que utilizaremos é parcialmente semelhante ao apresentado em [120, 133] para o fundo eletromagnético e métrico. A seguir, veremos que o caso escalar proporciona novidades interessantes e uma conexão inesperada com outras abordagens.

Para os propósitos desta seção, a versão mais útil da ação efetiva é a forma não local (3.9). As aproximações são as seguintes:

*i)* Todos os campos de matéria são, pelo menos, aproximadamente sem massa e todos os parâmetros não mínimos são  $\xi_i \approx \frac{1}{6}$ , de modo que a simetria conforme se mantém no nível clássico. Nesse caso, a ação induzida por anomalia é uma boa aproximação.

*ii)* Os termos escalares  $\Phi^4$  e  $X_c$  dominam sobre os termos de curvatura, ou seja,

$$|\Phi^2| \gg |R_{\dots}| \quad \text{e} \quad |(\nabla\Phi)^2| \gg |R^2_{\dots}| \quad (3.34)$$

para todas as componentes do tensor de curvatura  $R_{\dots}$ .

*iii)* Como sempre na Relatividade Geral, o limite IR significa que o campo gravitacional é fraco.<sup>1</sup> De acordo essa suposição, as quantidades dominantes dependentes da métrica são aquelas que não se anulam na ordem linear nas perturbações da métrica  $h_{\mu\nu}$  sob o fundo plano. Em particular, isso implica que  $|\square R| \gg |R^2_{\dots}|$  para todas as contrações de curvatura. Assim, os termos dependentes do escalar e o termo  $\square R$  representam a parte mais relevante da ação efetiva induzida por anomalia. Em geral, a anomalia no setor do vácuo é uma parte subdominante na aproximação dada e deve ser tratada como um elemento auxiliar para chegar às contribuições dependentes do escalar.

As estruturas não locais na ação induzida são reduzidas a uma forma mais simples, pois

$$G = \Delta_4^{-1} = \left[ \square^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\square + \frac{1}{3}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu \right]^{-1} \approx \frac{1}{\square^2}. \quad (3.35)$$

Os termos principais na expressão (1.37) são aqueles com  $\Phi$  e  $\square R$ , portanto

$$E_4 - \frac{2}{3}\square R + \frac{1}{b}Y \approx -\frac{2}{3}\square R - \frac{1}{b}\left(\gamma_\Phi X_c - \frac{1}{4!}\tilde{\beta}_\lambda\Phi^4\right), \quad (3.36)$$

<sup>1</sup> Isso significa que em GR a aproximação de baixas energias é na verdade um limite de curvatura fraca.

onde  $Y$  é dividido em duas partes de acordo com (1.37).

Após uma pequena álgebra, a parte não local da expressão (3.9) pode ser escrita como<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ind}}^{(\text{nonloc})} &\approx \frac{b}{18} \int_x R^2 - \frac{1}{6} \int_x \int_y \left( \frac{1}{4!} \tilde{\beta}_\lambda \Phi^4 - \gamma_\Phi X_c \right)_x \left( \frac{1}{\square^2} \right)_{x,y} (\square R)_y \\ &= \frac{b}{18} \int_x R^2 - \frac{1}{6} \int_x \int_y \left( \frac{1}{4!} \tilde{\beta}_\lambda \Phi^4 - \gamma_\Phi X_c \right)_x \left( \frac{1}{\square} \right)_{x,y} (R)_y.\end{aligned}\quad (3.37)$$

A última fórmula é interessante e merece algumas observações.

*i)* A primeira integral nesta expressão mostra que há um coeficiente modificado do termo local  $R^2$  no IR. Observe que essa modificação é uma consequência direta do fato de que o termo  $R^2$  estava oculto na primeira linha da Eq. (3.9) sob o limite de espaço plano. Dessa forma, nós apenas recuperamos o termo  $b$  na ação induzida por anomalia nesse limite. De acordo com (1.27), a adição ao coeficiente de  $R^2$  tem o valor de  $b/18$ , portanto é negativa e sua magnitude é cerca de  $0.01 - 1$ . O efeito é insuficiente para explicar o enorme coeficiente (cerca de  $5 \times 10^8$ ) do termo  $R^2$  no modelo de Starobinsky [64, 134] e ainda temos o desafiante problema de derivar esse coeficiente, como discutido recentemente em [135].

Vale notar que o termo clássico  $R^2$  necessário para explicar as observações no modelo inflacionário [64, 134] leva ao modo escalar propagante da métrica no limite de espaço plano, exatamente como ocorre com a gravidade de Einstein corrigida pela anomalia [119]. De qualquer forma, é bastante interessante, do ponto de vista teórico, que os efeitos quânticos possam ampliar o espectro das ondas gravitacionais na teoria inicialmente conforme, onde o modo escalar está ausente.

*ii)* No regime de quebra de simetria o campo escalar  $\Phi$  é aproximadamente uma constante, que aqui denotaremos por  $v$ . Então, a segunda integral em (3.37) assume a forma

$$-\frac{1}{6} \int_x \int_y \left( \frac{1}{4!} \tilde{\beta}_\lambda v^4 - \frac{1}{6} \gamma_\Phi R v^2 \right)_x \left( \frac{1}{\square} \right)_{x,y} R(y).\quad (3.38)$$

Na última parte, encontramos o termo de primeira ordem  $R \square^{-1} R$  da expressão não local conhecida [136]. Fisicamente, isso pode ser o caso do escalar de Higgs do Modelo Padrão, nas energias maiores que o valor típico  $v = 246$  GeV. Nessa escala, a anomalia é uma aproximação apropriada e, comparada à energia de Planck ou à escala GUT, esta pode ser uma região IR.

Observe que os termos  $R \square^{-1} R$ ,  $R (\square^{-1} R)^2$ , etc, têm a mesma escala global que o termo  $R$  usual. Por essa razão, incluir esses termos com coeficientes escolhidos adequadamente pode produzir um pequeno desvio de GR no cenário cosmológico. Em particular, esses termos podem servir como substituição de uma pequena constante cosmológica na descrição fenomenológica da aceleração do Universo. Notavelmente, pode-se chegar a esses termos a partir da anomalia conforme e tomando a aproximação de baixas energias como descrito acima.

É notável que mesmo nas próximas ordens da aproximação IR, não encontramos os termos  $\mathcal{O}(Y^2)$  pois essas estruturas não aparecem na expressão (3.9). Como consequência,

<sup>2</sup> Nota-se que também há uma parte local usual, isto é,  $-\int_x \left( \frac{2b+3c}{36} R^2 + \frac{\beta_\tau}{6} R \Phi^2 \right)$ .

a ação induzida por anomalia não gera termos do tipo  $R\Box^{-2}R$ . É conhecido que esses termos também não podem ser obtidos a partir da quebra espontânea de simetria pela expansão da curvatura [137]. O interesse em derivar tal estrutura é porque ela é usada para a descrição fenomenológica da expansão acelerada do Universo [138] (veja também as referências relacionadas), substituindo o termo cosmológico. No entanto, não é fácil obtê-lo a partir das considerações quânticas, pelo menos na ordem de  $1$ -loop.

iii) Vamos voltar para a fórmula (3.37) e considerar  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}e^{2\sigma}$  e  $\Phi = \bar{\Phi}e^{-\sigma}$ . Assumindo um campo gravitacional fraco, na aproximação linear em  $\sigma$ , obtemos

$$\frac{1}{\Box} = e^{2\sigma} \frac{1}{\bar{\Box}}, \quad R = e^{-2\sigma} [\bar{R} - 6\bar{\Box}\sigma + O(\sigma^2)], \quad (3.39)$$

onde  $\bar{\Box} = \bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ . Então, após a integração com a função delta, chegamos a

$$\Gamma_2 = \int_x \left( \frac{1}{4!} \tilde{\beta}_\lambda \bar{\Phi}^4 - \gamma_\Phi \bar{X}_c \right) \sigma, \quad (3.40)$$

com uma expressão local no integrando. Esse resultado confirma explicitamente que a ação induzida por anomalia é, de fato, uma versão local da ação clássica corrigida pelo grupo de renormalização. O parâmetro de escala constante usual no espaço curvo [73, 84] é substituído pela função local  $\sigma$ , tornando o grupo de renormalização do espaço-tempo curvo mais próximo das aplicações [17].

Considerando (3.40) como uma correção de *loop* para a ação clássica do campo escalar, a ação efetiva correspondente pode ser obtida pelas mudanças

$$X_c \longrightarrow (1 + \gamma_\Phi \sigma) \bar{X}_c, \quad \lambda \Phi^4 \longrightarrow (\lambda + \tilde{\beta}_\lambda \sigma) \bar{\Phi}^4, \quad (3.41)$$

como deveria ser sob a correção baseada no grupo de renormalização. Em particular, pode-se usar essa abordagem para recuperar o potencial efetivo na ordem de  $1$ -loop. Para isso, é necessário seguir o procedimento:

$$\bar{\Phi} \longrightarrow \Phi, \quad \sigma \longrightarrow \ln \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.42)$$

que é coerente com a parte escalar de (1.20). No final, é necessário substituir  $\bar{\Phi}$  por  $\Phi$  e  $\bar{g}_{\mu\nu}$  por  $g_{\mu\nu}$ , como realizado nas seções anteriores.

Dessa forma, para o potencial efetivo de  $1$ -loop, tem-se

$$V_{\text{eff}}^{(1)} = \frac{1}{4!} \left( \lambda + \frac{1}{2} \tilde{\beta}_\lambda \ln \frac{\Phi^2}{\mu^2} \right) \Phi^4 - \frac{1}{12} \left( 1 + \gamma_\Phi \ln \frac{\Phi^2}{\mu^2} \right) R \Phi^2, \quad (3.43)$$

com  $\tilde{\beta}_\lambda = \beta_\lambda + 4\lambda\gamma_\Phi$ . O resultado (3.43) requer apenas as condições de renormalização para se tornar a expressão padrão para a teoria conforme sem massa em um espaço-tempo curvo [73], que é uma extensão direta do potencial de Coleman-Weinberg [139]. Pode-se incluir o termo  $X_c$  juntamente com  $R\Phi^2$  e obter o primeiro termo na expansão em derivadas da ação efetiva. Isso seria completamente equivalente ao método baseado no grupo de renormalização [73, 140]. Esta equivalência pode ser observada no espalhamento de perturbações gravitacionais em um fundo plano, como foi recentemente considerado em [119]. A relação entre a ação induzida

---

por anomalia e o potencial efetivo (3.43) mostra que essa equivalência pode ser estendida a outras aplicações.

O procedimento de derivar o potencial efetivo e outros termos na ação efetiva a partir da anomalia é esperado funcionar apenas para aqueles termos que possuem divergências logarítmicas no UV e não estão relacionados às massas dos campos quânticos. A anomalia captura o setor UV das correções quânticas e não é surpresa que se possa recuperar os termos correspondentes, por exemplo, no potencial.

## DESACOPLAMENTO QUÂNTICO EM TEORIA COM DERIVADAS SUPERIORES

Neste capítulo, derivamos os fatores de forma não locais no modelo de quatro derivadas do fator conforme quântico e realizamos a análise do comportamento assintótico em UV e IR dessas correções quânticas. Este capítulo é baseado no artigo [141].

Na seção 4.1, revisamos brevemente o modelo de quatro derivadas para o fator conforme e apresentamos a derivação de suas divergências UV usando o método de *heat kernel*. A expressão correspondente é utilizada, posteriormente, como referência para verificar o resultado principal no cálculo de diagramas. Na seção 4.2, formulamos os elementos da técnica de Feynman, ou seja, o propagador e os vértices para o modelo e consideramos os diagramas que produzem divergências UV. Além disso, derivamos as correções de *1-loop*, incluindo os fatores de forma não locais no setor do propagador. A seção 4.3 inclui uma descrição do comportamento assintótico das contribuições não locais para a função de dois pontos nos limites UV e IR. Na seção 4.4, discutimos a conexão entre a dependência do momento no regime IR da teoria fundamental e as divergências no modelo efetivo de baixas energias contendo apenas o modo leve (ou sem massa). Como é comum em teorias sem massa, as divergências definem não apenas o comportamento UV, mas também o comportamento IR da teoria e podem ser usadas para comparação com o limite IR da teoria completa. Na seção 4.5, apresentamos uma discussão sobre as implicações do desacoplamento IR para os problemas da constante cosmológica.

### 4.1 Modelo de Antoniadis-Mottola

Vamos começar com uma breve revisão do modelo que utilizaremos neste capítulo. A ação do modelo de Antoniadis-Mottola [16] é uma forma mais simples da solução para a ação induzida por anomalia [14, 15], com a métrica de fundo plana, além dos termos de EH e de constante cosmológica,

$$S_{\text{cf}} = \int d^4x \left\{ 2b(\square\sigma)^2 - (2w + 2b + 3c) [\square\sigma + (\partial\sigma)^2]^2 + \frac{3}{\kappa} e^{2\sigma} (\partial\sigma)^2 - \frac{\Lambda}{\kappa} e^{4\sigma} \right\}. \quad (4.1)$$

Aqui  $\kappa = 8\pi G$  e as funções beta semiclássicas de *1-loop* no setor de vácuo são definidas na equação (1.27). Basicamente, esta é a mesma ação (parte sem o escalar  $\Phi$ ) que foi considerada no capítulo 3, mas em uma representação mais simples e com métrica de base particular (plana). De fato, a anomalia conforme que produz a parte induzida da ação (4.1) é

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle = -(wC^2 + bE_4 + c \square R). \quad (4.2)$$

Como vimos em detalhes no capítulo anterior, o coeficiente  $c$  pode ser modificado adicionando um termo local finito  $R^2$  à ação  $S_{anom}$ . Esta característica não afetará nossas considerações, especialmente porque não precisaremos de versões específicas das funções beta (1.27) e concentraremos nas características gerais da teoria quântica do fator conforme baseada em (4.1).

Além da parte induzida, a ação inclui termos de EH e de constante cosmológica, que não são renormalizados na teoria semiclássica inicial, mas se tornam muito relevantes na segunda etapa, quando o fator conforme for quantizado.

A ideia de que o fator conforme pode ser quântico, apesar de emergir como um modo efetivo na integração dos campos de matéria, vem da abordagem de Polyakov em  $2D$ , relacionada à teoria de cordas [142]. A noção de utilizar o modelo equivalente métrico-escalar (Liouville) como base para a gravidade quântica em  $2D$  foi bastante popular na década de 90. O uso da teoria análoga (em espaço-tempo curvo) como modelo para a gravidade quântica em  $4D$  foi proposto em [39]. Em quatro dimensões, a teoria do fator conforme pode ser considerada como uma versão truncada da gravidade quântica de quatro derivadas em grandes distâncias (ou seja, para baixas energias, ou IR), fornecendo um mecanismo de blindagem para a constante cosmológica [16]. Uma diferença importante em relação à gravidade induzida em  $2D$  é que, em  $4D$ , é possível adicionar termos clássicos. Alternativamente, pode-se fazer com que os termos de EH e de constante cosmológica sejam gerados no esquema de gravidade induzida [143], mas isso requer um campo escalar independente e não se adequa ao nosso propósito de construir um modelo simplificado para explorar o desacoplamento em uma teoria de gravidade quântica com derivadas superiores.

Ao contrário de qualquer modelo de gravidade quântica de quatro derivadas, o modelo de nosso interesse possui modos massivos, os quais podem ser fantasmas ou fantasmas taquiônicos.<sup>1</sup> A questão de interesse aqui é o que acontece com as contribuições desses modos massivos em baixas energias.

É útil introduzir notações semelhantes à referência [16],

$$\theta^2 \equiv (2w + 3c), \quad \zeta \equiv (2w + 2b + 3c), \quad \gamma \equiv \frac{3}{\kappa} \quad \text{e} \quad \lambda \equiv \frac{\Lambda}{\kappa}, \quad (4.3)$$

de modo que a ação (4.1) torna-se

$$S_{cf} = \int d^4x \left\{ -\theta^2 (\square\sigma)^2 - \zeta [2(\partial\sigma)^2 \square\sigma + (\partial\sigma)^4] + \gamma e^{2\sigma} (\partial\sigma)^2 - \lambda e^{4\sigma} \right\}. \quad (4.4)$$

<sup>1</sup> Vale mencionar que na referência [144] é argumentado que os fantasmas são eliminados na teoria pura de anomalias, que é equivalente a (4.1), pela imposição das restrições de invariância de difeomorfismo. Isso pode ser uma indicação de que em qualquer teoria da gravidade, a invariância de difeomorfismo e as restrições que ela impõe devem desempenhar um papel importante.

A diferença nas notações com o artigo de Antoniadis e Mottola é o coeficiente do setor cinético dos termos de derivadas superiores  $\theta^2$ , que é denotado por  $Q^2/(4\pi)^2$  em [16]. Além disso, fixamos a dimensão de escala anômala  $\alpha = 1$  para evitar complicações adicionais nas expressões.

Os últimos dois termos em (4.4) vêm dos termos de EH e de constante cosmológica. No IR, esses termos dominam sobre os termos de derivadas superiores e é útil dividir a Lagrangiana em duas partes, ou seja,

$$\mathcal{L}_{\text{IR}} = \gamma e^{2\sigma} (\partial\sigma)^2 - \lambda e^{4\sigma} \quad (4.5)$$

e

$$\mathcal{L}_{4\text{der}} = -\theta^2 (\square\sigma)^2 - \zeta [2(\partial\sigma)^2 \square\sigma + (\partial\sigma)^4]. \quad (4.6)$$

O plano é avaliar as correções quânticas na teoria completa (4.4) e, separadamente, para a teoria baseada no termo IR (4.5). Devido à presença de termos de derivadas superiores, as divergências de *1-loop* na teoria completa são obtidas usando a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt [42, 83].

Usando o método do campo de fundo, o fator conforme é decomposto em suas contrapartes clássica  $\sigma$  e quântica  $\rho$ ,  $\sigma \rightarrow \sigma + \rho$ . Em seguida, obtemos as formas bilineares nos campos quânticos para as duas partes,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4\text{der}}^{(2)} = & - \int d^4x \left\{ \theta^2 (\square\rho)^2 + 2\zeta [(\partial\rho)^2 \square\sigma + 2(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\sigma)\square\rho + (\partial\sigma)^2(\partial\rho)^2 \right. \\ & \left. + 2(\partial_\mu\rho)(\partial_\nu\rho)(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma) \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\mathcal{S}_{\text{IR}}^{(2)} = \int d^4x \left\{ \gamma e^{2\sigma} [(\partial\rho)^2 + 4\rho(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\sigma) + 2\rho^2(\partial\sigma)^2] - 8\lambda\rho^2 e^{4\sigma} \right\}. \quad (4.8)$$

As formas Hermitianas para as estruturas (4.7) e (4.8) são obtidas como

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \mathcal{S}_{4\text{der}}^{(2)}}{\delta\rho(y)\delta\rho(z)} &= -2\theta^2 \square^2 + 4\zeta [2(\square\sigma)\square - 2\partial^\mu(\partial^\nu\sigma)\partial_\mu\partial_\nu + 4(\partial_\nu\sigma)\partial^\mu(\partial^\nu\sigma)\partial_\mu \\ &\quad + (\partial\sigma)^2 \square + 2(\square\sigma)(\partial^\mu\sigma)\partial_\mu + 2(\partial^\mu\sigma)(\partial^\nu\sigma)\partial_\mu\partial_\nu], \\ \frac{\delta^2 \mathcal{S}_{\text{IR}}^{(2)}}{\delta\rho(y)\delta\rho(z)} &= -2\gamma e^{2\sigma} [\square + 2(\partial^\mu\sigma)\partial_\mu + 2(\partial\sigma)^2 + 2\square\sigma] - 16\lambda e^{4\sigma}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Então, para o modelo completo (4.4), temos

$$\frac{\delta^2 \mathcal{S}^{(2)}}{\delta\rho(y)\delta\rho(z)} = -2\theta^2 \hat{H}, \quad (4.10)$$

onde o operador mínimo auto-adjunto de quatro derivadas é

$$\hat{H} = \square^2 + V^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + N^\mu\partial_\mu + U, \quad (4.11)$$



com os elementos

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu} &= -\frac{2\zeta}{\theta^2} [2\eta^{\mu\nu}\square\sigma - 2\partial^\mu\partial^\nu\sigma + \eta^{\mu\nu}(\partial\sigma)^2 + 2(\partial^\mu\sigma)\partial^\nu\sigma] + \frac{\gamma}{\theta^2} e^{2\sigma}\eta^{\mu\nu}, \\ N^\mu &= -\frac{4\zeta}{\theta^2} [2(\partial_\nu\sigma)\partial^\mu\partial^\nu\sigma + (\square\sigma)\partial^\mu\sigma] + \frac{2\gamma}{\theta^2} e^{2\sigma}(\partial^\mu\sigma), \\ U &= \frac{2\gamma}{\theta^2} e^{2\sigma} [(\partial\sigma)^2 + \square\sigma] + \frac{8\lambda}{\theta^2} e^{4\sigma}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Usando o algoritmo padrão para operadores de quarta ordem [42, 83], chegamos à expressão para as divergências

$$\bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ \frac{5\zeta^2}{\theta^4} [\square\sigma + (\partial\sigma)^2]^2 + \frac{\gamma}{\theta^2} \left( \frac{3\zeta}{\theta^2} + 2 \right) (\partial\sigma)^2 e^{2\sigma} - \left( \frac{8\lambda}{\theta^2} - \frac{\gamma^2}{2\theta^4} \right) e^{4\sigma} \right\}, \quad (4.13)$$

onde negligenciamos os termos de superfície irrelevantes. Este resultado concorda com os cálculos anteriores [16, 145], exceto por um erro aparente de sinal na Eq. (4) de [145]. Uma verificação adicional pode ser encontrada no artigo recente [146].

Na sequência, vamos confirmar a expressão (4.13) pelo cálculo das partes divergentes e finitas não locais (logaritmos relevantes) dos diagramas de Feynman. Ao considerar o esquema de Subtração Mínima (MS), pode-se facilmente derivar as funções beta UV para a teoria (4.4). Na próxima seção, são determinadas as partes finitas dos diagramas de 1-loop que produzem essas divergências. Nesse caso, a estrutura (4.13) será útil para identificar os diagramas relevantes para os nossos propósitos. Por exemplo, a partir dos coeficientes dos termos  $(\partial\sigma)^2 e^{2\sigma}$  e  $e^{4\sigma}$ , podemos esperar que os diagramas envolvendo vértices de interação  $\gamma$  e  $\gamma\zeta$  contribuam para o setor de EH, enquanto os diagramas com vértices  $\lambda$  e  $\gamma^2$  estejam associados às correções para o setor de constante cosmológica. Mais adiante, veremos que essa identificação pode não se manter no modelo efetivo de baixas energias com duas derivadas.

Por questão de completeza, também derivamos as divergências da teoria efetiva baseada na parte IR, Eq. (4.5), separadamente. O resultado é

$$\bar{\Gamma}_{\text{div,IR}}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} [\square\sigma + (\partial\sigma)^2]^2 - \frac{8}{3} \Lambda e^{2\sigma} (\partial\sigma)^2 + \frac{32}{9} \Lambda^2 e^{4\sigma} \right\}. \quad (4.14)$$

Como esperado pela contagem de potências dos momentos (*power counting*), os contratermos de quarta ordem em derivadas são necessários nesta teoria, pois ela não é renormalizável. Ao mesmo tempo, negligenciando tais termos de acordo com a abordagem efetiva, chegamos à expressão de referência para comparar com o limite IR da teoria completa.

## 4.2 Correções de 1-loop a partir de diagramas de Feynman

Para explorar o desacoplamento nas correções de 1-loop em um modelo com derivadas superiores, é necessário separar os graus de liberdade sem massa e massivos. Em muitos casos, isso pode ser alcançado introduzindo campos auxiliares (veja, por exemplo, [147]). No entanto, no caso da teoria (4.4), essa abordagem não é operacional devido ao nosso interesse nas correções quânticas para uma teoria que possui derivadas de ordem superior tanto nos termos cinéticos quanto nas interações. Portanto, aqui é feita a separação no nível do



propagador e dos vértices nos diagramas de Feynman, seguindo um método semelhante ao de [148].

A estrutura dos vértices e do propagador para a teoria fundamental (4.4) pode ser calculada usando a parametrização  $\sigma \rightarrow \sigma + \rho$ , onde  $\rho$  é uma pequena perturbação, e expandindo os termos exponenciais em série de potências de  $\rho$ . Coletando os termos quadráticos, encontramos que o propagador satisfaz a equação

$$2[\theta^2 \square^2 + \gamma \square + 8\lambda]G(x, y) = i\delta^4(x - y). \quad (4.15)$$

Realizando a transformada de Fourier,

$$G(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \tilde{G}(k) \quad (4.16)$$

e assumindo  $\Lambda \ll \gamma^2/\theta^2$ , obtemos

$$\tilde{G}(k) = \frac{i}{2[\theta^2 k^4 - \gamma k^2 + 8\lambda]} \simeq \frac{i}{2\theta^2(k^2 - \frac{\gamma}{\theta^2})(k^2 - \frac{8}{3}\Lambda)}. \quad (4.17)$$

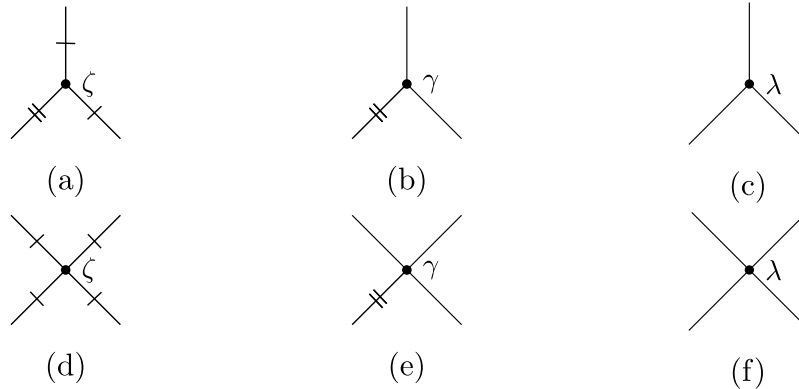
Finalmente, na mesma aproximação, o propagador pode ser escrito como

$$\tilde{G}(k) = \frac{i}{2\theta^2(m^2 - M^2)} \left[ \frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{k^2 - M^2} \right]. \quad (4.18)$$

É fácil identificar um grau de liberdade saudável com massa  $m^2 = 8\Lambda/3$  e um modo fantasma com massa na ordem da escala de Planck,  $M^2 = \gamma/\theta^2$ .

Precisamos considerar apenas aqueles vértices de interação que são relevantes para as correções de *1-loop* para o propagador. Os vértices para as funções de 3 e 4 pontos surgem dos termos de interação com derivadas na parte  $\mathcal{L}_{4\text{der}}$  e dos termos de ordem superior na expansão exponencial em  $\mathcal{L}_{\text{IR}}$ ,

$$\zeta[2(\partial\rho)^2 \square \rho + (\partial\rho)^4], \quad 2\gamma(\partial\rho)^2[\rho + \rho^2], \quad \frac{32\lambda}{3}[\rho^3 + \rho^4]. \quad (4.19)$$



**Figura 4.1:** Diagramas de Feynman associados aos vértices de interação. Os “cortes” denotam derivadas atuando nos propagadores.

Na Fig. 4.1, apresentamos os vértices correspondentes a esses termos de interação. As expressões analíticas têm a forma

$$\begin{aligned} V_\zeta^{(3)}(p, k, q) &= -4i\zeta [p^2(k \cdot q) + q^2(k \cdot p) + k^2(p \cdot q)], \\ V_\gamma^{(3)}(p, k, q) &= 2i\gamma(k^2 + p^2 + q^2), \\ V_\lambda^{(3)} &= -64i\lambda \end{aligned} \quad (4.20)$$

e

$$\begin{aligned} V_\zeta^{(4)}(p, k, q, r) &= -8i\zeta [(k \cdot q)(p \cdot r) + (k \cdot p)(q \cdot r) + (k \cdot r)(p \cdot q)], \\ V_\gamma^{(4)}(p, k, q, r) &= 4i\gamma(k^2 + p^2 + q^2 + r^2), \\ V_\lambda^{(4)} &= -256i\lambda, \end{aligned} \quad (4.21)$$

com  $(k \cdot p) = k_\mu p^\mu$ .

Agora estamos em posição de determinar as contribuições de 1-loop para a autoenergia (correção para o propagador) do modo saudável (leve). Primeiro, considere os diagramas que produzem as divergências UV (4.13), derivadas anteriormente usando o método de *heat-kernel*. Essas divergências são responsáveis pelas funções beta baseadas no esquema MS e servem como referências UV para as expressões completas.

Na teoria (4.4), a expressão para a função de dois pontos é

$$G_{1\text{-loop}}^{(2)}(p, -p) \propto \frac{i}{(p^2 - m^2)} (\bar{\Sigma}_\gamma + \bar{\Sigma}_\lambda + \tilde{\Sigma}_{\gamma\lambda} + \tilde{\Sigma}_{\lambda^2} + \Sigma_{\zeta^2} + \Sigma_{\gamma\zeta} + \Sigma_{\gamma^2} + \dots) \frac{i}{(p^2 - m^2)}, \quad (4.22)$$

onde os termos omitidos (...) denotam contribuições dos diagramas livres de divergências. Essas contribuições finitas, descritas por  $\Sigma_{\lambda\zeta}$ ,  $\Sigma_{\gamma\lambda}$  e  $\Sigma_{\lambda^2}$ , são proporcionais à massa  $m^2$  (conforme mostrado no Apêndice C). Como veremos na Secção 4.3, esses termos podem ser negligenciados em nossa análise do limite IR, quando consideramos  $m^2 = 0$ .

Podemos escrever a expressão simbólica geral para a função de autoenergia, na aproximação de segunda ordem (nas constantes de acoplamento), conforme apresentado na Figura 4.2 para correções do tipo  $\Sigma$  e na Fig. 4.3 para correções  $\tilde{\Sigma}$ .

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{bubble}(solid) + \text{bubble}(dotted) - 2 \times \text{bubble}(mixed) \\ &= \Sigma_{\text{light}} + \Sigma_{\text{ghost}} - 2 \Sigma_{\text{mixed}} \end{aligned}$$

**Figura 4.2:** Estrutura geral dos diagramas bubble para funções de autoenergia  $\Sigma$ . Linhas sólidas indicam o grau de liberdade leve (*light*) enquanto linhas tracejadas representam o fantasma massivo (*ghost*).

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\
&= \Sigma_{\text{light}}|_{q=0} + \Sigma_{\text{ghost}}|_{q=0} - \Sigma_{\text{mixed}}|_{q=0} - \Sigma_{\text{mixed}}|_{m^2 \leftrightarrow M^2, q=0}
\end{aligned}$$

**Figura 4.3:** Diagramas tadpole associados com as correções  $\tilde{\Sigma}$ .

Além disso, nas Figuras 4.2 e 4.3, as expressões para os setores leve (*light*), fantasma (*ghost*) e misto (*mixed*) são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\text{light}} &\propto \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2)} V^{(3)}(p, -k, k - p) \frac{i}{[(k - p)^2 - m^2]} V^{(3)}(-p, k, p - k), \\
\Sigma_{\text{ghost}} &\propto \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - M^2)} V^{(3)}(p, -k, k - p) \frac{i}{[(k - p)^2 - M^2]} V^{(3)}(-p, k, p - k), \\
\Sigma_{\text{mixed}} &\propto \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2)} V^{(3)}(p, -k, k - p) \frac{i}{[(k - p)^2 - M^2]} V^{(3)}(-p, k, p - k), \quad (4.23)
\end{aligned}$$

enquanto as contribuições de primeira ordem nas constantes de acoplamento têm a estrutura geral mostrada na Fig. 4.4,

$$\begin{aligned}
\bar{\Sigma} &= \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \\
&= \bar{\Sigma}_{\text{light}} + \bar{\Sigma}_{\text{ghost}}
\end{aligned}$$

**Figura 4.4:** Diagramas snail associados às correções  $\bar{\Sigma}$ . Neste caso, obviamente, não há contribuições do setor misto.

com

$$\begin{aligned}
\bar{\Sigma}_{\text{light}} &\propto \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m^2)} V^{(4)}(p, k, -p, -k), \\
\bar{\Sigma}_{\text{ghost}} &\propto \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - M^2)} V^{(4)}(p, k, -p, -k). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

A representação diagramática das contribuições para a função de dois pontos com diferentes acoplamentos é apresentada no Apêndice A. Os diagramas na Fig. A.1 correspondem ao quinto termo em (4.22), e o último termo está associado aos diagramas na Fig. A.3. Na Fig. A.2 são mostrados os diagramas que correspondem ao termo proporcional a  $\gamma\zeta$ . Os diagramas para os termos de primeira ordem nos acoplamentos  $\gamma$  e  $\lambda$  são representados nas Figuras A.4 e A.5, respectivamente. Além disso, o terceiro e quarto termos em (4.22) estão associados aos diagramas *tadpole* com vértices de interação  $\gamma\lambda$  mostrados na Fig. A.6, e  $\lambda^2$  mostrados na Fig. A.7.

É importante observar que cada diagrama aqui representa a soma sobre todos os diagramas topologicamente equivalentes com diferentes permutações sobre os momentos externos e

com todos os possíveis arranjos de derivadas nas linhas internas e externas. Além disso, omitimos alguns diagramas do tipo *tadpole* que não contribuem para  $G^{(2)}(p, -p)$ , pois incluem derivadas do propagador em um único ponto do espaço-tempo, e portanto se anulam.

Para avaliar as integrais em (4.22), utilizamos a regularização dimensional. No modelo em consideração, isso requer estender a lista padrão de expressões divergentes [149] para as integrais no espaço-tempo de  $2\omega$  dimensões complexas. As integrais proporcionais a  $\zeta^2$ ,  $\gamma\zeta$  e  $\gamma^2$  são escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \Sigma_{\zeta^2}^{(2\omega)}(p) &= -\frac{8\zeta^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\zeta^2}^{(3,3)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma\zeta}^{(2\omega)}(p) &= -\frac{4\gamma\zeta}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\gamma\zeta}^{(3,3)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma^2}^{(2\omega)}(p) &= -\frac{2\gamma^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\gamma^2}^{(3,3)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde usamos as seguintes combinações dos fatores de vértice:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\zeta^2}^{(3,3)} &= p^4 k^4 - 2p^2 k^2 (p \cdot k)^2 + (p \cdot k)^4, \\ \Gamma_{\gamma\zeta}^{(3,3)} &= p^4 k^2 - (p^2 + k^2)(p \cdot k)^2 + (p \cdot k)^3 - p^2 k^2 (p \cdot k) + k^4 p^2, \\ \Gamma_{\gamma^2}^{(3,3)} &= p^4 + k^4 + (p \cdot k)^2 + 2p^2 k^2 - 2(p^2 + k^2)(p \cdot k). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Os resultados das integrações no espaço euclidiano são<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \Sigma_{\zeta^2}(p) &= \frac{i\zeta^2 p^4}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 5 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] - \frac{1}{4} [9A^2 - 5(ab)^2 - 37] - \frac{1}{2(ab)^2 c^5} \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2(ab)^2 d^5} \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) - \left[ \frac{1}{2}(ab)^3 + \frac{5}{2}ab \left( ab + \frac{a}{2} + 2 \right) + \frac{15a}{4} \left( 1 + \frac{1}{4b} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + 5 \left( 2 + \frac{3}{4b} + \frac{1}{2ab} \right) \right] \ln(1+4b) + \frac{A^5}{2(ab)^2} \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

<sup>2</sup> Alguns detalhes intermediários dos cálculos podem ser encontrados no Apêndice B.1. Os cálculos foram verificados usando o *Package-X* [150] no Mathematica [151].

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\gamma\zeta}(p) = & -\frac{i\gamma\zeta p^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 3\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right] + \frac{1}{2c(ab)^2} \left[\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{c^2}\right) + 1\right] \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \right. \\
& + \frac{1}{2d(ab)^2} \left[\frac{a}{2}(4b+1)\left(2 - \frac{1}{d^2}\right) + 1\right] \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) - \left(ab + \frac{a}{2} - 6\right) \\
& - \frac{A}{2} \left[\left(\frac{1}{ab} - ab\right)\left(1 + \frac{1}{2b} + \frac{1}{ab}\right) - \frac{2}{b}\left(1 + \frac{1}{4b}\right)\right] \ln\left[\frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2}\right] \\
& \left. - \left[\frac{ab}{2}\left(ab + \frac{a}{2} + 2\right) + 3\left(1 + \frac{a}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4b}\right) - \frac{1}{ab}\right] \ln(1+4b) \right\}, \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\gamma^2}(p) = & \frac{i\gamma^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 2\left[\frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right] + 3 - \frac{1}{2c(ab)^2} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{c^2} + 2\right) \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \right. \\
& + \frac{A}{2(ab)^2} \left(ab + \frac{a}{2} - 1\right)^2 \ln\left[\frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2}\right] - \frac{1}{2} \left[ab + a\left(1 + \frac{1}{4b}\right) + 3 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2b}\left(1 - \frac{2}{a}\right)\right] \ln(1+4b) - \frac{1}{2d(ab)^2} \left[\frac{a^2}{4}(4b+1)^2 - \frac{1}{d^2} + 2\right] \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) \right\}, \quad (4.31)
\end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{\epsilon} \equiv \frac{1}{2-\omega} - \gamma_E + \ln(4\pi), \quad a = \frac{4m^2}{p^2}, \quad b = \frac{M^2 - m^2}{4m^2} \quad (4.32)$$

e, como já definido em (3.14),  $\gamma_E$  é a constante de Euler-Mascheroni. No limite  $\omega \rightarrow 2$ , os resultados (4.29), (4.30) e (4.31) representam partes divergentes e finitas. Note que a parte finita dessas expressões tem uma dependência muito complicada do momento externo. Para essas estruturas não locais, no setor misto, usamos a notação

$$A = \sqrt{(1+ab)^2 + a}. \quad (4.33)$$

Além disso, as notações utilizadas nos setores leve e fantasma, incluem, respectivamente,

$$c^2 = \frac{p^2}{p^2 + 4m^2}, \quad d^2 = \frac{p^2}{p^2 + 4M^2}. \quad (4.34)$$

Vale a pena explicar como as definições (4.33) e (4.34) podem ser usadas para identificar as contribuições provenientes dos diferentes setores. Por exemplo, os fatores de forma logarítmicos envolvendo  $c$ , nos resultados apresentados acima, vêm dos *loops* “puros” contendo apenas os propagadores dos graus de liberdade leves (equivalentemente, para as outras estruturas logarítmicas dependentes do momento). Naturalmente, existem termos que resultam da combinação de contribuições dos três setores (ou seja, leve, fantasma massivo e misto), como  $\ln(1+4b)$  e aqueles com dependências apenas polinomiais no momento externo.

Além disso, as correções relevantes envolvendo os vértices quárticos são fornecidas por

$$\bar{\Sigma}_\gamma(p) = \frac{2i\gamma p^2}{\theta^2} I_{\text{quad}} \quad \text{e} \quad \bar{\Sigma}_\lambda(p) = \frac{64i\lambda}{\theta^2} I_{\text{quad}}, \quad (4.35)$$

onde a integral é

$$\begin{aligned}
I_{\text{quad}} &= \frac{1}{(m^2 - M^2)} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ \frac{1}{(k^2 + m^2)} - \frac{1}{(k^2 + M^2)} \right\} \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + 1 - \frac{M^2}{(m^2 - M^2)} \ln\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right]. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Os resultados (4.35) são contribuições do tipo *snail*, que não produzem um fator de forma não local. Portanto, essas correções não são relevantes para a análise em baixas energias e foram incluídas apenas por questão de completeza. Claro, a mesma consideração se aplica às correções do tipo *tadpole*, que em princípio contribuem para as divergências nos setores de EH e de constante cosmológica,

$$\tilde{\Sigma}_{\gamma\lambda}(p) = -\frac{16i\gamma\lambda p^2}{\theta^4 m^2 M^2} I_{\text{quad}} \quad \text{e} \quad \tilde{\Sigma}_{\lambda^2}(p) = -\frac{512i\lambda^2}{\theta^4 m^2 M^2} I_{\text{quad}}, \quad (4.37)$$

com  $m^2 M^2 = 8\lambda/\theta^2$ . Na verdade, as correções em (4.37) podem ser ignoradas porque diagramas *tadpole*, como os apresentados nas Figuras A.6 e A.7, normalmente são eliminados usando condições de renormalização (veja, por exemplo, [152] ou o Capítulo 11 de [153] para mais detalhes).

Observe que aqui apresentamos apenas os resultados para a autoenergia. As correções para os vértices de três e quatro pontos também foram derivadas e produzem qualitativamente o mesmo cenário. As partes não locais dessas contribuições seguem uma estrutura logarítmica padrão, como aquelas para as correções do propagador. Como as expressões correspondentes são relativamente volumosas, elas estão separadas no Apêndice D.

### 4.3 Comportamento assintótico

Nesta seção, é explorado o comportamento assintótico das contribuições de *1-loop* (4.29), (4.30) e (4.31). O principal interesse é verificar como essas expressões interpolam entre as regiões UV e IR da teoria fundamental. Dessa forma, temos a chance de entender o que acontece com os fatores de forma não locais da contribuição de *loops* com os graus de liberdade massivos (*ghosts*) no IR.

Começamos com o limite  $p^2 \rightarrow \infty$  que corresponde ao regime UV ( $p^2 \gg M^2 \gg m^2$ ). Neste caso, as equações (4.30), (4.29) e (4.31) simplificam e chegamos às expressões

$$\begin{aligned} \Sigma_{\zeta^2}^{\text{UV}}(p^2 \rightarrow \infty) &= \frac{i\zeta^2 p^4}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 5 \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right) \right] + 3 - \frac{15(M^2 + m^2)}{p^2} \right. \\ &\quad + \frac{10(m^4 + m^2 M^2 + M^4)}{p^4} \ln \left( \frac{p^2}{M^2} \right) + \frac{35(M^2 + m^2)}{6p^4} \\ &\quad \left. + \frac{40M^2 m^2}{3p^4} + \frac{10m^6}{p^4 M^2} \ln \left( \frac{m^2}{M^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{M^6}{p^6} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma\zeta}^{\text{UV}}(p^2 \rightarrow \infty) &= -\frac{i\gamma\zeta p^2}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 3 \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right) \right] + 7 - \frac{9(M^2 + m^2)}{p^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6(M^2 + m^2)}{p^2} \ln \left( \frac{p^2}{M^2} \right) - \frac{6m^4}{p^2 M^2} \ln \left( \frac{m^2}{M^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{M^4}{p^4} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma^2}^{\text{UV}}(p^2 \rightarrow \infty) &= \frac{i\gamma^2}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right) + 2 \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] + 5 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m^2}{M^2} \ln \left( \frac{m^2}{M^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{M^2}{p^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como esperado no regime UV, os termos logarítmicos relevantes (*leading logarithms*) no fator de forma, ou seja, os termos com  $\ln(p^2/\mu^2)$ , são proporcionais às divergências correspondentes. É fácil verificar que, ao retornar à representação de coordenadas, a parte divergente das expressões acima, juntamente com (4.35) no UV, corresponde ao resultado (4.13), obtido a partir da técnica de *heat kernel*.

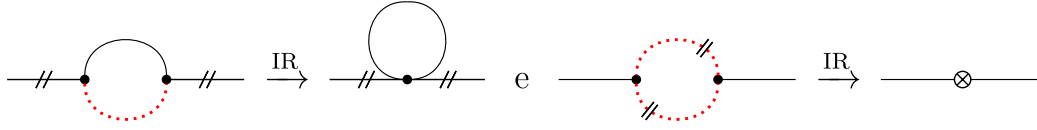
Por outro lado, assumindo  $m^2 = 0$  nas fórmulas de  $\Sigma_{\zeta^2}$ ,  $\Sigma_{\gamma\zeta}$  e  $\Sigma_{\gamma^2}$  (veja a parte B.2 do Apêndice B), a análise do regime IR  $M^2 \gg p^2$  dessas correções fornece

$$\begin{aligned} \Sigma_{\zeta^2}^{\text{IR}}(M^2 \gg p^2) \Big|_{m^2=0} &= \frac{i\zeta^2 p^4}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 5 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] - \frac{1}{6} \left( 7 + \frac{35p^2}{2M^2} - \frac{9p^4}{2M^4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^4}{2M^4} \ln \left( \frac{M^2}{p^2} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{p^6}{M^6} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma\zeta}^{\text{IR}}(M^2 \gg p^2) \Big|_{m^2=0} &= -\frac{i\gamma\zeta p^2}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 3 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] - \frac{1}{2} + \frac{2p^2}{3M^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^4}{M^4} \left[ \frac{7}{20} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p^2}{M^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{p^6}{M^6} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma^2}^{\text{IR}}(M^2 \gg p^2) \Big|_{m^2=0} &= \frac{i\gamma^2}{(4\pi)^2 \theta^4} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] + \frac{13}{6} \frac{p^2}{M^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^4}{2M^4} \left[ \frac{8}{5} + \ln \left( \frac{p^2}{M^2} \right) \right] + \mathcal{O} \left( \frac{p^6}{M^6} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

As últimas expressões mostram que, no limite IR, as divergências e a dependência do momento não se correlacionam entre si, exatamente como é esperado [32] (veja também [30, 33, 35] para a teoria semiclássica). Descobrimos que essa característica básica também se mantém para os diagramas mistos, de modo que o teorema de Appelquist-Carazzone é válido para o modelo de quatro derivadas com interações não polinomiais. Nas expressões (4.41) e (4.42), a parte não local com fator de forma logarítmico  $\ln(p^2/M^2)$  é suprimida por potências de  $M^2$ , enquanto em (4.43) este não é o caso, já que o fator  $\gamma^2$  (lembre-se de que  $\gamma = \theta^2 M^2$ ) evita essa supressão nos termos proporcionais a  $p^4$ . Embora possa não ser óbvio, pode-se verificar que essas estruturas não locais representam as contribuições apenas do setor leve. Os diagramas *bubble* com linhas internas mistas (*light + ghost*) e, claro, as contribuições puras do fantasma colapsam e produzem apenas dependências triviais no momento externo, como representado pela Fig. 4.5 no nível da função de dois pontos (caso das correções envolvendo  $\gamma^2$ ). No geral, verificamos o desacoplamento quadrático do modo pesado nos diagramas de Feynman com conteúdos mistos.



**Figura 4.5:** Representação diagramática do colapso das linhas de modos massivos (destacadas na cor vermelha) em diagramas do tipo bubble no limite IR.

#### 4.4 Correções de 1-loop na teoria efetiva

O último elemento desta investigação é a comparação entre o que permanece dos fatores de forma logarítmicos da teoria completa no IR e os logaritmos relevantes na teoria efetiva (inicialmente local) sem graus de liberdade pesados. De acordo com as expectativas existentes [46], as duas expressões deveriam demonstrar uma correlação perfeita. Esse resultado significaria, em particular, que a Relatividade Geral quântica pode servir como um modelo universal de baixas energias em qualquer abordagem renormalizável ou super-renormalizável da gravidade quântica.

Portanto, nesta seção são avaliadas as correções quânticas para o propagador no modelo efetivo de baixas energias de (4.4), contendo apenas o modo leve. Consideramos um cenário em que a escala de energia é muito menor do que a massa de Planck. Portanto, pode-se assumir que os termos de EH e de constante cosmológica dominam sobre os termos de derivadas superiores, restando apenas a parte  $\mathcal{L}_{\text{IR}}$ . Sob essas considerações, o propagador *tree-level* do fator conforme se reduz a

$$\tilde{G}_{\text{eff}}(k) = -\frac{i}{2\gamma(k^2 - m^2)}, \quad (4.44)$$

onde  $m^2$  é definido em (4.18). Os vértices são os mesmos que em (4.20) e (4.21). Como estamos lidando com um modelo efetivo, não nos preocupamos com o fato de que  $\mathcal{L}_{\text{IR}}$  é não renormalizável, pois podemos ignorar as divergências de derivadas superiores.<sup>3</sup> Assim, o interesse aqui é explorar as contribuições para os termos de constante cosmológica e de EH. Essas fórmulas podem ser comparadas com as estruturas encontradas no limite IR da teoria completa (4.4).

Na teoria efetiva de baixas energias, a contribuição relevante é dada por

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma^2}^{\text{eff}}(p) = & \frac{ip^4}{(4\pi)^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{4}a + \frac{3}{8}a^2 \right) \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] + \left( 1 - \frac{7}{4}a + \frac{1}{2}a^2 \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2c} \left( \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{c^2} + 2 \right) \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

<sup>3</sup> De acordo com a lógica do trabalho pioneiro [46] (veja também [154]), as divergências na gravidade quântica são expressões locais e, portanto, não têm relação direta com o regime de longas distâncias correspondente ao limite IR.



Para tornar a comparação mais explícita, considere o caso particular  $\Lambda = 0$  (ou, equivalentemente,  $p^2 \rightarrow \infty$ ). Então, a última expressão se reduz a uma forma mais simples,

$$\Sigma_{\gamma^2}^{\text{eff}} \Big|_{\Lambda=0} = \frac{ip^4}{2(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln \left( \frac{p^2}{\mu^2} \right) + 2 \right]. \quad (4.46)$$

Note que a contribuição não local  $\ln(p^2/M^2)$  envolvendo o vértice de interação  $\gamma^2$  no regime de baixas energias (IR) da teoria “fundamental” (4.4), Eq. (4.43), correlaciona-se com o termo logarítmico do resultado (4.46), independentemente de no regime de baixas energias (IR) da teoria fundamental não haver divergência UV. A partir desses resultados, é possível estabelecer a correspondência de *1-loop* entre esses dois cenários, isto é, fundamental e efetivo. Observemos que o surgimento do fator  $p^4$  na abordagem efetiva e sua identificação com o termo de constante cosmológica tem sido discutido na literatura recente. Em particular, essa questão foi descrita em detalhes, exatamente como uma reação à atribuição de parte do fator de forma gravitacional à constante cosmológica em [155]. Na realidade, os termos correspondentes aparecem como parte da expansão dos fatores de forma não locais dos termos  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  e  $R^2$ , e não têm relação direta com o termo de constante cosmológica [156].

Para estabelecer a correspondência entre os cenários fundamental e efetivo, introduzimos a relação

$$\Sigma_{\gamma^2}^{\text{IR}} = \Sigma_{\gamma^2}^{\text{eff}} + \delta_{\gamma^2}^{\text{eff}}, \quad (4.47)$$

onde  $\delta_{\gamma^2}^{\text{eff}}$  é um termo adicional que representa, no nível de *1-loop*, a diferença entre a correção da teoria fundamental em baixas energias e a correção da teoria efetiva. Considerando o colapso dos diagramas com linhas internas de fantasma massivo no regime de IR da teoria fundamental, como vimos na seção anterior, podemos identificar que o termo adicional em (4.47) é composto de contribuições provenientes do colapso de *loops* no setor misto. Esses diagramas colapsados se reduzem aos diagramas do tipo *snail*, e a parte restante, relacionada aos *loops* de fantasma puro, ou seja,

$$\delta_{\gamma^2}^{\text{eff}} = c_{\gamma^2, \text{mixed}}^{(1)} + c_{\gamma^2, \text{ghost}}^{(1)}. \quad (4.48)$$

A contribuição do tipo *snail* em (4.48) é proporcional à massa  $m^2$ , e, portanto, desaparece na simplificação adotada para o IR, ou seja, assumindo  $c_{\gamma^2, \text{mixed}}^{(1)} \Big|_{m^2=0} = 0$ . Usando os resultados (4.43) e (4.46) na relação (4.47), encontramos os termos logarítmicos dominantes na forma

$$\delta_{\gamma^2}^{\text{eff}} \Big|_{m^2=0} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ 2M^4 \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \frac{13}{6} p^2 M^2 - \frac{p^4}{2} \left[ \frac{18}{5} + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.49)$$

Na expressão acima, apresentamos apenas a parte finita, uma vez que as divergências podem ser removidas por um procedimento de renormalização adequado. Como era de se esperar, a parte não local com fator de forma logarítmico dependente do momento é cancelada e a condição de correspondência no IR, que garante a equivalência com o resultado (4.43), é satisfeita com  $\delta_{\gamma^2}^{\text{eff}}$  contendo apenas termos com dependências triviais no momento externo.

## 4.5 Implicações para o problema da constante cosmológica

O problema da constante cosmológica é uma das principais questões não resolvidas na física teórica atual. O problema foi formulado por Weinberg em [157] como a necessidade de explicar o ajuste fino extremamente preciso entre a densidade de constante cosmológica na ação do vácuo e as enormes contribuições induzidas. Pode-se reformular o problema em termos da renormalização do termo de vácuo [158], mas isso não ajuda muito na sua resolução. Há também muitos outros aspectos interessantes do problema, relacionados à cosmologia (veja, por exemplo, [159, 160]). Junto com o problema principal, no contexto da teoria quântica de campos, precisamos entender se a densidade de constante cosmológica e a constante de Newton são realmente constantes ou se esses parâmetros podem variar lentamente com a escala de energia, como previsto, por exemplo, pelo modelo de quatro derivadas de [16] (veja também os exemplos de discussões baseadas nos modelos estendidos [145, 161, 162] e na generalização supersimétrica [163]) e, é claro, nos modelos completos de quatro derivadas [42, 43, 47] ou até mesmo em modelos de gravidade quântica com derivadas superiores [45].

Como vimos nas seções anteriores, a abordagem baseada na Subtração Mínima para o grupo de renormalização do termo de constante cosmológica não é operacional, pois ignora o desacoplamento dos graus de liberdade massivos (fantasmas ou saudáveis, em alguns modelos). Assumindo que todos os graus de liberdade massivos têm massas típicas da ordem de magnitude de Planck, todas as aplicações cosmológicas ocorrem no IR, onde o desacoplamento do tipo Appelquist-Carazzone altera as funções beta. A questão é o que permanece dessas funções beta na teoria com graus de liberdade tanto massivo quanto sem massa [47, 48]?

O resultado que obtivemos para a teoria quântica do fator conforme é que, no regime IR, permanecem as contribuições (4.41), (4.42) e (4.43), que correspondem às da teoria quântica efetiva de baixas energias baseada no modelo local. Isso fornece uma resposta positiva para uma das principais questões levantadas em [48] e confirma a hipótese de [46]. Obtivemos uma forte confirmação de que o limite IR de um modelo de gravidade quântica com derivadas superiores, que possui graus de liberdade massivos (que podem ser modos saudáveis ou fantasmas), corresponde às correções de *loop* na gravidade quântica efetiva baseada na Relatividade Geral. O resultado provém do modelo de [16], que possui interações não polinomiais, muito próximo ao caso de modelos reais de gravidade quântica. Nesse sentido, a nova confirmação é mais explícita do que os resultados obtidos anteriormente no contexto de modelos simplificados, como [164].

Observando as expressões remanescentes dos fatores de forma no IR, nota-se que os termos sem  $p^4$  ou  $p^2$  têm apenas coeficientes de  $\log(\mu^2/M^2)$  e nenhum termo logarítmico dependente do momento. Isso é consistente com a análise anterior das possíveis correções quânticas, indicando que os fatores de forma logarítmicos (no momento euclidiano) não podem ser inseridos no termo da constante cosmológica [30]. Recentemente, observações semelhantes foram feitas, por exemplo, em [119, 165, 166]. Esta situação confirma a expectativa geral de que não pode haver um *running* físico da constante cosmológica, detectável por meio de cálculos no espaço-tempo plano, conforme discutido em [30] e mais recentemente em [156].

Ressaltamos que isso não significa que o *running* da constante cosmológica seja impossível em geral, apenas que não pode ser detectado em cálculos no espaço-tempo plano [31].

Vale notar que se pode observar o *running* do termo de constante cosmológica usando a parametrização não covariante, como (4), da mesma forma que o desacoplamento na função beta da interação  $\phi^4$ . Até certo ponto, os cálculos correspondentes já foram desenvolvidos em [38] e podem ser generalizados para outras teorias, incluindo a gravidade quântica. Certamente, essa seria uma maneira interessante de estender o estudo apresentado neste capítulo. No entanto, é importante ter cuidado com as expectativas em relação aos resultados de tal extensão, pois sempre haverá uma questão sobre a interpretação física do resultado obtido por meio de métodos não covariantes.

## SOLUÇÕES DE RICOCHETE SEMICLÁSSICO

Neste capítulo, aplicamos a abordagem da ação efetiva induzida [60], incluindo o efeito anômalo da radiação, para descrever a dinâmica do fator de escala e discutir se isso é suficiente para evitar a singularidade no Universo em contração. Este capítulo é baseado nos artigos [61] e [62].

A seção 5.1 contém uma breve revisão da ação induzida por anomalia no setor de radiação. Na seção 5.2, estendemos os resultados envolvendo correções induzidas por anomalia no cenário pré-inflacionário e apresentamos uma solução numérica de ricochete com contribuições anômalas dos setores de derivadas superiores e radiação. Além disso, avaliamos a estabilidade de tais soluções sob pequenas perturbações das condições iniciais. Na seção 5.3, derivamos a solução de ricochete analítica em uma teoria formada pela ação de Einstein-Hilbert com a contribuição anômala misturando o termo de radiação com a gravidade. Esta solução é suportada pelos gráficos obtidos usando a solução numérica, que também inclui o caso de constante cosmológica não nula. Na seção 5.4, apresentamos as estimativas numéricas para o ricochete e discutimos a possibilidade de superar a dramática inconsistência física encontrada no caso mais simples de radiação eletromagnética.

### 5.1 Ação induzida por anomalia com radiação

A função beta para o quadrado do acoplamento de calibre  $g$  pode ser escrita na forma não convencional  $\beta g^4$ , onde<sup>1</sup>

$$\beta = -\frac{2}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C_1 - \frac{1}{6} N_{cs} - \frac{4}{3} N_f \right). \quad (5.1)$$

Aqui  $N_{cs}$  e  $N_f$  são os números de escalares complexos e férmions acoplados a um dado campo vetorial.  $C_1$  é o operador de Casimir do grupo de calibre correspondente, que é zero no caso abeliano. O fator  $g^4$  foi separado da função beta para conveniência posterior. No contexto da teoria não abeliana,  $C_1$  é positivo e isso abre a possibilidade de liberdade assintótica na teoria [167,168]. Em energias relativamente baixas, para o campo eletromagnético, obviamente  $C_1 = 0$ . Assim, dependendo da escala de energia, ambos os sinais são, em princípio, possíveis.

<sup>1</sup> A derivação detalhada desta expressão pode ser encontrada em muitos livros sobre QFT, inclusive na Ref. [40].

Assumimos que os efeitos de *1-loop* dominam e ignoramos os efeitos de *loops* superiores, exceto para a discussão nas últimas seções deste capítulo.

A anomalia do traço no setor de radiação tem a forma (veja, por exemplo, [169] e [40] para mais detalhes)

$$\langle T_{\mu}^{\mu} \rangle \Big|_r = -\frac{2}{\sqrt{-\bar{g}}} g_{\alpha\beta} \frac{\delta \Gamma_r}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta \Gamma_r[\bar{g}_{\alpha\beta} e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \Big|_{\bar{g}_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta}, \sigma \rightarrow 0} = \frac{\beta}{4} g^2 F^2, \quad (5.2)$$

onde  $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  é o quadrado do tensor de intensidade do campo de calibre e  $\Gamma_r$  é a ação efetiva renormalizada de *1-loop* no setor de radiação. Além disso, introduzimos a parametrização da métrica

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta} e^{2\sigma} = \bar{g}_{\alpha\beta} a^2, \quad (5.3)$$

que será útil abaixo. Na evolução dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico, a única coordenada do espaço-tempo que pode variar é o tempo. Em (5.3), o fator de escala  $a$  depende da coordenada de tempo conforme  $\eta$ , que se relaciona com o tempo físico  $t$  por meio da expressão  $dt = a(\eta)d\eta$ .

A Eq. (5.2) pode ser usada para encontrar uma solução para a ação efetiva, e sua forma covariante não local [14, 15] (veja também desenvolvimentos adicionais em [170] e [169]) é

$$\Gamma_r = -\frac{\beta g^2}{16} \iint_{x,y} \left( E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x,y) F^2(y), \quad (5.4)$$

onde o invariante de Gauss-Bonnet foi definido na Introdução e  $G(x,y)$  é a função de Green conformalmente covariante do operador de Paneitz, dada na Eq. (3.8). É possível formular a ação induzida na forma local covariante [14], incluindo dois campos escalares auxiliares [44]. Esta última é a formulação mais útil para muitas aplicações, como a classificação dos estados de vácuo [171] ou o estudo de ondas gravitacionais na presença de derivadas de ordem superior [172]. Uma representação qualitativamente semelhante, com certas simplificações [169, 170], deve ser mais útil para a análise das perturbações cosmológicas. Deixamos esta parte para trabalhos futuros e, no restante deste capítulo, as considerações estão restritas aos elementos básicos do modelo cosmológico, ou seja, à dinâmica do Universo homogêneo e isotrópico. Neste caso, pode-se usar uma forma muito mais simples da ação induzida, que é equivalente a (5.4) para esta métrica especial.

## 5.2 Universo primordial e correções induzidas por anomalia

Na época primordial do Universo, é esperado que a escala de energia típica tenha sido muito alta. Neste cenário, diferentes modelos de física de partículas fornecem diferentes estimativas para os limites superiores das massas das partículas, mas geralmente esses limites superiores estão na ordem de grandeza, ou abaixo, da escala da teoria de grande unificação (GUT)  $M_X \propto 10^{16}$  GeV, que é algumas ordens abaixo da escala de Planck. A equação de Friedmann, baseada na Relatividade Geral, prediz um crescimento ilimitado do parâmetro de Hubble próximo ao início do tempo  $t = 0$ , e a singularidade emerge com  $H \sim t^{-1}$ . Assim,

na região próxima à singularidade do espaço-tempo, o campo gravitacional é tão intenso que todas as partículas reais podem ser consideradas sem massa. O mesmo se aplica às partículas virtuais, que estão interagindo com o forte campo gravitacional de fundo. Portanto, os efeitos quânticos relevantes nas proximidades da singularidade cosmológica podem ser limitados aos efeitos dos campos sem massa, que é, de fato, o caso mais simples. Nesta seção, investigamos as consequências desses efeitos na dinâmica do fator de escala. Para isso, consideramos as correções induzidas por anomalia nos setores de derivadas superiores e radiação.

A base do modelo cosmológico para o Universo primordial é a ação total, incluindo (1), matéria e as correções quânticas descritas por (3.7), com  $\Phi = 0$ , e (5.4), na forma local e não covariante,

$$S_t = S_{\text{vac}} + S_m + \Gamma_{\text{ind}}. \quad (5.5)$$

Vamos lembrar que a matéria corresponde à radiação pura, sua ação é invariante conforme e, portanto, não afeta a equação dinâmica para  $a(\eta)$ .

Como discutido no capítulo 3, a forma das Eqs. (1.31) e (3.7) demonstra que o termo  $\square R$  na anomalia contribui para o termo local covariante  $R^2$  na ação induzida. Vimos que o coeficiente deste termo depende da regularização [13, 85]. Em particular, mostramos que essa dependência é equivalente a modificar o termo finito  $a_4$  na parte não conforme da ação clássica (1).

Diferentemente do termo  $C^2$  na ação (1.21), o termo  $R^2$  afeta a equação para o fator de escala  $a(\eta)$ . Portanto, é importante fixar o valor de  $a_4$  por alguma condição física. Na literatura, há duas escolhas principais para tal condição. A mais importante é  $a_4 \approx 5 \times 10^8$ , proporcionando o modelo inflacionário consistente de Starobinsky [64, 134]. A grande magnitude deste coeficiente, comparada à função beta (1.27), torna as contribuições quânticas para o termo  $R^2$  completamente irrelevantes. Outra escolha interessante é  $a_4 \approx 0$ , de modo que o conteúdo de partículas  $N_s, N_f, N_v$  em (1.27) se torna uma questão importante. No que se segue, adotaremos essa segunda opção e discutiremos como a escolha do conteúdo de partículas define a estabilidade das soluções cosmológicas.

Tomando a derivada variacional de (5.5) com respeito a  $a(\eta)$ , chegamos à equação de movimento na forma

$$T_{EH} + T_{HD} = T_r, \quad (5.6)$$

onde os traços das equações de movimento para os termos correspondentes na ação são [169]

$$T_{EH} = \frac{3}{4\pi G} \left( \frac{a''}{a^3} + \frac{k}{a^2} - \frac{2\Lambda}{3} \right), \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{HD} = 6c & \left[ \frac{4a'''a'}{a^6} - \frac{a^{(4)}}{a^5} + \frac{3a''^2}{a^6} - \frac{6a''a'^2}{a^7} + 2k \left( \frac{a''}{a^5} - \frac{a'^2}{a^6} \right) \right] \\ & + 24b \left[ \frac{a''a'^2}{a^7} - \frac{a'^4}{a^8} + k \left( \frac{a''}{a^5} - \frac{a'^2}{a^6} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$T_r = \frac{\beta g^2 \bar{F}^2}{4a^4}, \quad (5.9)$$

onde  $k = 0$  ou  $k = \pm 1$  para diferentes geometrias espaciais.

A Eq. (5.6) representa o traço das equações de movimento e pode ser usada para o estudo analítico e numérico do sistema. No entanto, é mais útil derivar a componente (00),  $\rho_i$ , usando a lei de conservação para cada uma das componentes  $T_{EH}$ ,  $T_{HD}$  e  $T_r$ ,

$$d(\rho_i a^3) = -p_i d(a^3), \quad \text{onde } T_i = \rho_i - 3p_i. \quad (5.10)$$

No que se segue, usamos as notações e a abordagem geral dos trabalhos anteriores, por exemplo, [63, 173]. É importante salientar que esta consideração implica que omitimos o funcional invariante conforme  $S_c[g_{\mu\nu}]$  na parte puramente gravitacional da expressão (3.7). Esta aproximação é necessária aqui, pois todas as informações que temos vêm da anomalia e refletem apenas o traço das equações de movimento. Da Eq. (5.10), segue que

$$\frac{d\rho_i}{da^3} + \frac{4}{3} \frac{\rho_i}{a^3} = \frac{T_i}{3a^3}, \quad (5.11)$$

sendo a solução geral definida por

$$\rho_i(a) = C(a)a^{-4}, \quad \text{com } \frac{dC}{d\eta} = T_i a^3 a'. \quad (5.12)$$

Integrando (5.12) para cada uma das componentes, chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \rho_{EH} &= \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{a'^2}{a^4} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} \right) = \frac{3M_P^2}{8\pi} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} \right) \\ &= \frac{3M_P^2}{8\pi} \left( \dot{\sigma}^2 + ke^{-2\sigma} - \frac{\Lambda}{3} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{HD} &= \frac{6b(a'^4 + 2ka^2a'^2)}{a^8} + \frac{3c(aa''^2 - 2aa'''a' + 4a''a'^2 + 2kaa'^2)}{a^7} \\ &= (6b + 9c) \frac{\dot{a}^4}{a^4} + 6k(2b + c) \frac{\dot{a}^2}{a^4} + 3c \left( \frac{\ddot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}\dot{a}}{a^2} \right) \\ &= 6b\dot{\sigma}^4 + 6k(2b + c)\dot{\sigma}^2 e^{-2\sigma} + 3c \left( \ddot{\sigma}^2 - 2\ddot{\sigma}\dot{\sigma} - 6\ddot{\sigma}\dot{\sigma}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4} + \frac{\beta g^2}{4a^4} \bar{F}^2 \ln a = \left( \rho_{r0} + \frac{\beta g^2}{4} \bar{F}^2 \sigma \right) e^{-4\sigma}. \quad (5.15)$$

Nessas expressões, mudamos do tempo conforme  $\eta$  para o tempo cosmológico  $t$ , de  $a(t)$  para  $\sigma(t) = \ln a(t)$  e usamos a definição da massa de Planck (conforme estabelecido na parte de Notações e Convenções). Uma das vantagens da componente (00) das equações de movimento em comparação com o traço é que, na expressão (5.15), podemos incluir o termo clássico de radiação. Como o termo correspondente é conforme, ele estava oculto no traço das equações (5.6).

### 5.2.1 Estabilidade em soluções do tipo de Sitter

Agora estamos em posição de escrever a equação dinâmica para  $\sigma(t)$  na forma

$$\rho_{EH} + \rho_{HD} = \rho_r, \quad (5.16)$$



onde os  $\rho_i$  são definidos nas equações (5.14), (5.13) e (5.15). A maior parte da discussão adicional será baseada na equação (5.16). Por questão de simplicidade, restringimos nossa atenção ao caso  $k = 0$ .

É mais econômico escrever a parte puramente gravitacional da equação em termos do parâmetro de Hubble  $H = \dot{\sigma}$ . Dessa forma, obtemos

$$\frac{3M_P^2}{8\pi} H^2 - \frac{\Lambda M_P^2}{8\pi} + 6bH^4 + 3c(\dot{H}^2 - 2H\ddot{H} - 6H^2\dot{H}) = (\rho_{r0} + \beta g^2 \bar{F}^2 \sigma) e^{-4\sigma}. \quad (5.17)$$

Como primeiro passo, considere a equação sem o termo de radiação. Procurando pela solução com uma constante  $H$ , nos deparamos com uma equação biquadrática

$$6bH^4 + \frac{3M_P^2}{8\pi} H^2 - \frac{\Lambda M_P^2}{8\pi} = 0, \quad (5.18)$$

com as seguintes quatro soluções [102]:

$$H = \pm \frac{M_P}{\sqrt{-32\pi b}} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{64\pi b}{3} \frac{\Lambda}{M_P^2}} \right)^{1/2}. \quad (5.19)$$

As soluções com  $H$  positivo correspondem a Universos em expansão, e aquelas com  $H$  negativo, a Universos em contração. Da Eq. (1.27) segue que  $b < 0$  para qualquer conteúdo de partícula da teoria subjacente, de modo que  $\sqrt{-32\pi b}$  seja sempre real. Considere o sinal no parêntese, tomando  $H > 0$  e  $\Lambda > 0$  para a definição. Levando em conta que  $\Lambda \ll M_P^2$ , obtemos as duas soluções aproximadas:

$$H_1 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad \text{e} \quad H_2 = \frac{M_P}{\sqrt{-16\pi b}}. \quad (5.20)$$

A primeira delas,  $H_1$ , é a solução clássica de de Sitter onde os termos induzidos pela anomalia não desempenham nenhum papel. A segunda solução,  $H_2$ , é a solução correspondente ao equilíbrio entre a parte quântica, induzida por anomalia, e a parte clássica da Eq. (5.17). Esta solução não pode ser obtida na abordagem em que a parte quântica é tratada como uma pequena perturbação. Por outro lado, ela pode ser derivada de diferentes abordagens para correções quânticas em espaços-tempos curvos [174, 175].

Vamos considerar a estabilidade dessas soluções. Nosso objetivo é explorar a estabilidade assintótica e, devido à dependência temporal exponencial de  $a(t)$ , é importante realizar a variação de  $\sigma(t)$  ou  $H(t)$ , ao invés de  $a(t)$  [102]. Para a variação de  $H(t) \rightarrow H(t) + X(t)$ , sem o termo de radiação em (5.17) e na aproximação linear, obtemos

$$24bH^3X + 6c\dot{H}\dot{X} - 6c\ddot{H}X - 6c\dot{X}\dot{H} - 18c\dot{X}H^2 - 36c\dot{H}HX + \frac{3M_P^2}{4\pi}HX = 0. \quad (5.21)$$

Para um  $H = H_0$  constante, como os presentes em (5.20), esta equação se reduz a

$$\ddot{X} + 3H_0\dot{X} - \left( \frac{4bH_0^2}{c} + \frac{M_P^2}{8\pi c} \right) X = 0. \quad (5.22)$$



No caso da solução inflacionária extrema com  $H_0 = H_2$  em (5.20), temos  $-\frac{4bH_0^2}{c} = \frac{M_P^2}{4\pi c}$  e então a solução de (5.22) tem a forma

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (5.23)$$

onde

$$\lambda_{1/2} = -\frac{3H_0}{2} \pm \frac{3H_0}{2} \sqrt{1 + \frac{8b}{9c}}. \quad (5.24)$$

Uma vez que sempre temos  $b < 0$ , para  $c > 0$  não existem autovalores com parte real positiva, logo não há modos crescentes e a solução com  $H_0 = H_2$  é estável [60, 64]. Utilizando a equação para o traço, pode-se mostrar que no modelo com  $c < 0$  a mesma solução é instável.

É instrutivo considerar a estabilidade da solução clássica com  $H_0 = H_1$ . Nesse caso, a equação para a perturbação linear tem a forma

$$\ddot{X} + 3H_0 \dot{X} - \frac{M_P^2}{8\pi c} X = 0 \quad (5.25)$$

e os autovalores em (5.23) são

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \pm \frac{M_P}{\sqrt{8\pi c}} \left( 1 + \frac{6\pi c \Lambda}{M_P^2} \right)^{1/2} \approx -\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \pm \frac{M_P}{\sqrt{8\pi c}}. \quad (5.26)$$

Obviamente, para  $c > 0$  existe um autovalor positivo da ordem de Planck e, portanto, um modo que cresce muito rápido. Para  $c < 0$  existem oscilações com frequência da ordem de magnitude de Planck, suprimidas por um amortecimento relativamente lento. Qualitativamente, os resultados para a estabilidade são os mesmos que os derivados anteriormente da equação do traço (5.6) em [102].

A ação induzida por anomalia (3.7) inclui as correções semiclássicas à ação gravitacional que são corretas, no sentido de que não dependem da forma como pretendemos quantizar a gravidade, usar teoria das cordas, etc. Assim, devemos interpretar corretamente os resultados de estabilidade formulados acima. O modelo de inflação de Starobinsky [64, 134] é baseado na versão instável e requer condições iniciais especialmente escolhidas. Como mencionamos anteriormente, a consistência fenomenológica requer a adição de um termo clássico  $R^2$  com  $a_4 \approx 5 \times 10^8$  na ação (1). Por outro lado, a versão estável está livre das restrições às condições iniciais.

Conforme discutido anteriormente, sem o termo clássico  $a_4$ , a estabilidade é definida pelo sinal de  $c$  e esse sinal depende do conteúdo de partículas, de acordo com a Eq. (1.27). A estabilidade da solução  $H_1$  é alcançada para  $N_v > 18N_s + 3N_f$ . Essa desigualdade vale para o modelo padrão mínimo da física de partículas (MSM) com  $N_v = 12$ ,  $N_s = 4$  e  $N_f = 24$ , mas não vale para extensões supersimétricas, como o modelo padrão mínimo supersimétrico (MSSM), ou para o modelo padrão estendido com  $N_v = 12$ ,  $N_s = 8$  e  $N_f = 48$ . No que segue, usaremos a última versão para a análise numérica, mas é importante lembrar que não há diferença real entre o comportamento de diferentes modelos com  $c > 0$ . Observa-se que o caso  $c = 0$ , que ocorre na teoria de Yang-Mills supersimétrica  $\mathcal{N} = 4$  [176], fornece uma solução instável com  $H_2$ .

É evidente que, no Universo tardio, deve haver  $c < 0$  ou um  $a_4$  clássico suficientemente grande, caso contrário o espaço plano seria instável.<sup>2</sup> Assim, utilizar a versão estável no início da inflação requer o esquema de transição entre conteúdos de partículas estáveis e instáveis. Uma das possibilidades para tal transição está relacionada ao desacoplamento de baixas energias dos graus de liberdade pesados além do MSM, por exemplo, as partículas  $s$  no caso do MSSM [177]. Uma possível explicação desse desacoplamento é baseada na desaceleração da expansão exponencial com  $a(t) \sim \exp\{H_2 t\}$  devido às massas das partículas  $s$  quânticas [101, 102]. Descobre-se que o processo de desaceleração da inflação leva muito tempo e, como resultado, os efeitos observáveis da inflação vêm dos últimos 60 – 70  $e$ -folds de uma taxa de inflação muito maior.

A próxima questão relacionada a essa transição é como fornecer um coeficiente suficientemente grande  $a_4$  nos últimos 60 – 70  $e$ -folds, que são relevantes fisicamente. Esse problema foi abordado em [135].

### 5.2.2 Diagramas de fase

Antes de iniciar a análise de estabilidade das soluções em relação às pequenas perturbações, é interessante considerar os diagramas de fase para a Eq. (5.17). Sem o termo de radiação, a equação de interesse é

$$2H\ddot{H} + 6H^2\dot{H} - \dot{H}^2 - \frac{2b}{c}H^4 - \frac{M_P^2}{8\pi c} \left( H^2 - \frac{\Lambda}{3} \right) = 0. \quad (5.27)$$

Seguiremos a análise do artigo original de Starobinsky [64], e também aquelas em [135, 178] para o caso estável. A principal diferença com relação a esses trabalhos é que aqui incluímos o termo de constante cosmológica. Como antes, restringimos a atenção ao caso de curvatura espacial nula  $k = 0$ . De fato, não há argumentos convincentes sobre por que a curvatura do espaço poderia ser importante no Universo primordial.

Por outro lado, a constante cosmológica pode ser relevante nas proximidades da singularidade inicial, uma vez que o seu valor pode ser dramaticamente diferente do valor no Universo tardio. A razão é que, neste último caso, o valor observado da densidade de energia do vácuo  $\rho_\Lambda^{(obs)} = \frac{\Lambda^{(obs)}}{16\pi G^{(obs)}}$  é uma soma do termo de vácuo  $\rho_\Lambda^{(vac)}$  e da contribuição  $\rho_\Lambda^{(ind)}$ , induzida a partir da quebra de simetria no setor de campos de matéria, por exemplo, a partir da quebra espontânea no potencial de Higgs [157] (veja também [158]). Na época inicial, essa simetria pode ser (e muito provavelmente é) restaurada devido às altas temperatura e/ou efeitos de alta curvatura. Como resultado,  $\rho_\Lambda^{(obs)}$  adquire o valor que é típico para a transição de fase correspondente. Por exemplo, no caso da transição de fase eletrofraca, esse valor é cerca de 56 ordens de magnitude maior do que o no Universo presente, mas ainda assim negligenciavelmente pequeno em comparação com a escala de Planck nas proximidades da singularidade. No entanto, no caso da possível transição de fase da escala GUT, a diferença entre  $\rho_\Lambda^{(obs)} \propto M_X^4$  e  $M_P^4$  pode ser apenas algumas ordens, e no caso da transição de fase da escala de Planck, as duas quantidades podem ter a mesma ordem de magnitude. A seguir, consideramos as duas últimas possibilidades.

<sup>2</sup> Como já mencionado acima, essas duas possibilidades são equivalentes [13, 85, 86].

A ordem da Eq. (5.27) pode ser reduzida usando a seguinte mudança de variáveis [64]:

$$x = \left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\dot{H}}{2H_0^{\frac{3}{2}}} H^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.28)$$

Na verdade, a redução pode ser alcançada por uma transformação mais simples  $\dot{H} = x(H)$ , mas a equação resultante é mais complicada. A Eq. (5.27) pode ser elaborada usando (5.28) como

$$\dot{H} = \frac{2}{3} H_0 x^{-\frac{1}{3}} \dot{x} \quad \text{e} \quad \ddot{H} = -\frac{2}{9} H_0 x^{-\frac{4}{3}} \dot{x}^2 + \frac{2}{3} H_0 x^{-\frac{1}{3}} \ddot{x}. \quad (5.29)$$

Dessa forma, chegamos a

$$\ddot{x} - \frac{2}{3} x^{-1} \dot{x}^2 + 3H_0 x^{\frac{2}{3}} \dot{x} - \frac{3b}{2c} H_0^2 x^{\frac{7}{3}} + \frac{3b}{2c} \left( H_0^2 x - \frac{\Lambda}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) = 0. \quad (5.30)$$

A segunda mudança de variáveis em (5.28) resulta em

$$\dot{x} = 3H_0 x^{\frac{2}{3}} y \quad \text{e} \quad \ddot{x} = 2H_0 x^{-\frac{1}{3}} \dot{x} y + 3H_0 x^{\frac{2}{3}} \dot{y}, \quad (5.31)$$

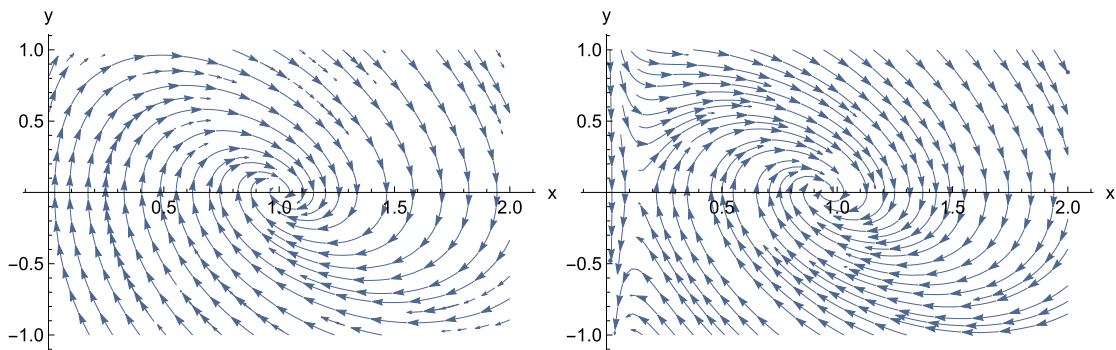
tal que a última relação torna-se

$$\ddot{x} = 6H_0^2 x^{\frac{1}{3}} y^2 + 3H_0 x^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dx} = 6H_0^2 x^{\frac{1}{3}} y^2 + 9H_0^2 x^{\frac{4}{3}} \frac{y dy}{dx}. \quad (5.32)$$

Inserindo essas relações em (5.30), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{6yc} \left[ x - x^{-\frac{1}{3}} - \frac{16\pi b}{3M_p^2} \Lambda x^{-\frac{5}{3}} \right] - 1, \quad (5.33)$$

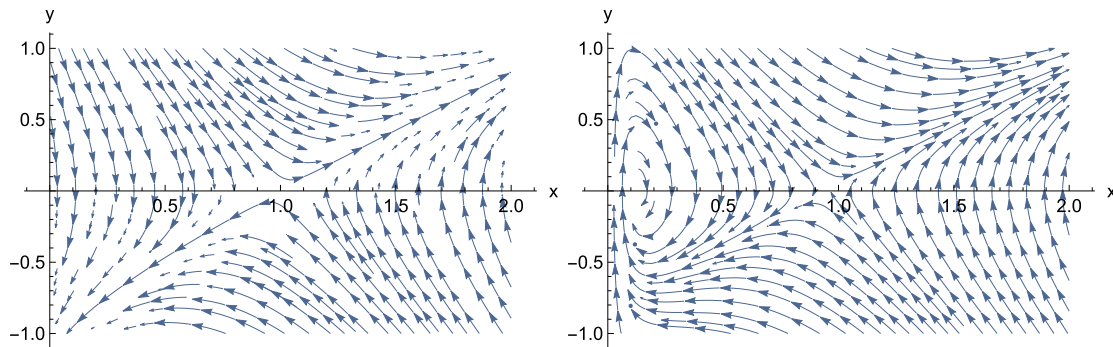
onde a fórmula análoga de [135] pode ser reproduzida no limite  $\Lambda = 0$ . Utilizando a equação (5.33), chegamos aos diagramas de fase para os dois valores diferentes de  $\Lambda$ , como mostrado na Fig. 5.1 para a versão estável e na Fig. 5.2 para a versão instável da teoria.<sup>3</sup>



**Figura 5.1:** Diagrama de fase para a Eq. (5.33) com o conteúdo de partículas do MSSM. No gráfico à esquerda, escolhemos  $\Lambda = 0.001H_0^2$  e no gráfico à direita,  $\Lambda = 0.2H_0^2$ .

Pode-se facilmente notar que uma constante cosmológica pequena não produz modificações essenciais em comparação com os diagramas previamente conhecidos de  $\Lambda = 0$  [64]

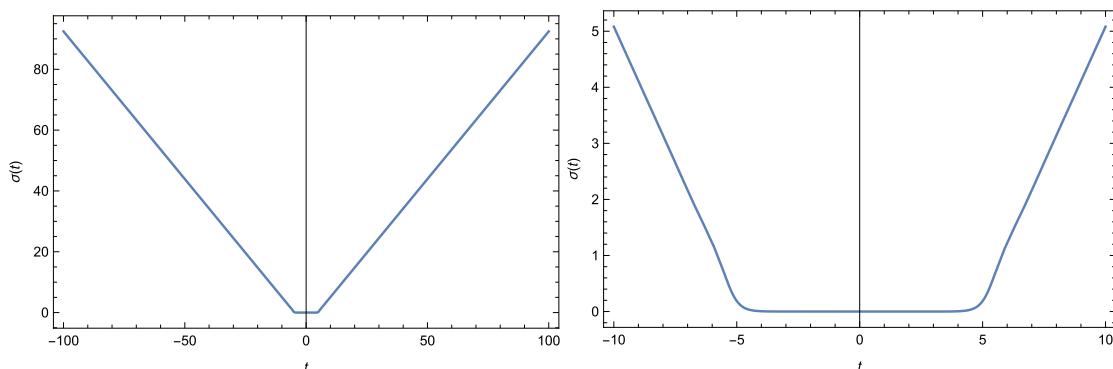
<sup>3</sup> Todas os cálculos numéricos e gráficos deste capítulo foram feitos utilizando o programa *Wolfram Mathematica* [151].



**Figura 5.2:** Diagrama de fase para a Eq. (5.33) com o conteúdo de partículas MSM, correspondente à solução exponencial instável. No gráfico à esquerda, temos  $\Lambda = 0.001H_2^2$  e no gráfico à direita,  $\Lambda = 0.2H_2^2$ .

e [178]. Ao mesmo tempo, a constante cosmológica da ordem de magnitude de Planck transforma significativamente o diagrama de fase do caso estável, tornando-o qualitativamente similar ao do caso instável com uma constante cosmológica pequena. Essa característica sugere um novo mecanismo de transição entre as fases estáveis e instáveis (diferente do descrito em [101, 177] e [135]) e talvez mereça investigação adicional no futuro.

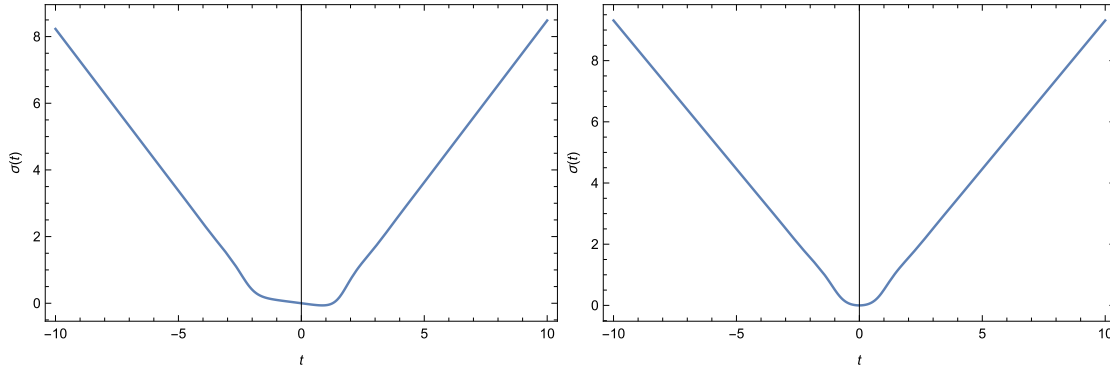
Impondo condições iniciais particulares em  $t = 0$ , pode-se chegar às soluções de ricochete, com a expansão exponencial (para  $a(t)$ ) após a contração exponencial e a transição suave entre essas duas fases. Um exemplo básico desse tipo é mostrado na Fig. 5.3. É importante observar que não podemos definir  $\dot{\sigma}(0) = 0$ , pois, caso contrário, a solução será  $\sigma(t) \equiv 0$ .



**Figura 5.3:** Solução de ricochete sem radiação para o caso MSSM e, portanto,  $c > 0$ . As condições iniciais são  $\sigma(0) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(0) = -10^{-4}H_2$ ,  $\ddot{\sigma}(0) = 0$  e  $\ddot{\sigma}(0) = 0$ . No gráfico à esquerda, mostramos o intervalo  $-100 \leq t \leq 100$  em unidades de Planck e no gráfico à direita o intervalo é dez vezes menor.

Mais detalhes sobre as soluções de ricochete são apresentadas com base na análise numérica. A Fig. 5.4 demonstra o resultado das pequenas variações nas condições iniciais. Aqui ainda se mantém a constante cosmológica nula. Esses gráficos mostram claramente que o ricochete sobrevive a essas pequenas mudanças. No entanto, descobrimos que modificações maiores podem excluir as soluções de ricochete.

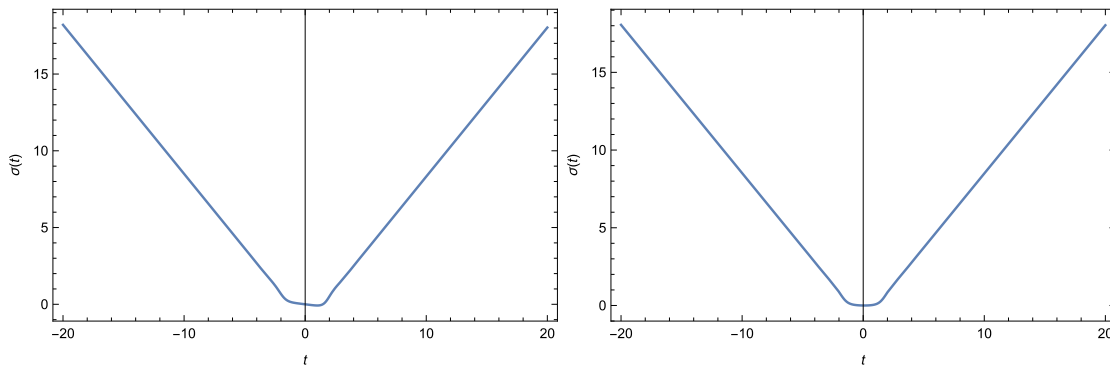
Outros dois aspectos relevantes dizem respeito à escolha das condições iniciais. Como já sabemos, ao alterar essas condições, podemos produzir soluções sem ricochete. É especialmente importante que essas condições sejam impostas nas proximidades do mínimo da curva em  $t = 0$ . Este ponto está no passado para a região de expansão  $t > 0$ , mas, ao mesmo



**Figura 5.4:** Solução numérica para o fator conforme  $\sigma(t)$  com pequena variação nas condições iniciais em  $t = 0$ . O gráfico à esquerda mostra o comportamento do fator conforme sob variações de  $\dot{\sigma}(0)$  e  $\ddot{\sigma}(0)$ . Neste caso, as condições iniciais tornam-se  $\sigma(0) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(0) = -0.1H_2$ ,  $\ddot{\sigma}(0) = 0$  e  $\ddot{\sigma}(0) = 0.05$ . No gráfico à direita, a variação foi realizada em relação a  $\ddot{\sigma}(0)$ , de modo que as novas condições iniciais são  $\sigma(0) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(0) = -10^{-4}H_2$ ,  $\ddot{\sigma}(0) = 0.6$  e  $\ddot{\sigma}(0) = 0$ . Em ambos os casos, a solução de ricochete é mantida.

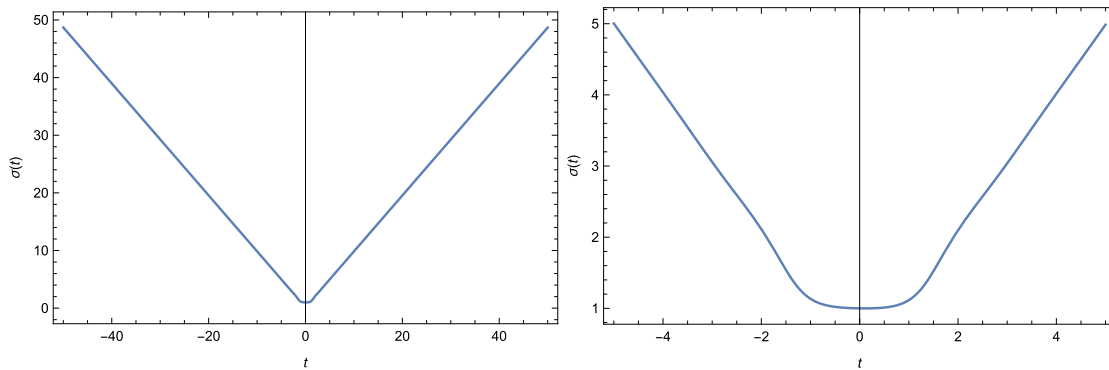
tempo, está no futuro para a região  $t < 0$ , onde se encontra uma contração. Mais adiante, o sentido qualitativo dessa restrição é elaborado em detalhes.

O próximo passo é ligar a constante cosmológica. Como mencionado anteriormente, na região próxima à singularidade, a magnitude da densidade correspondente  $\rho_\Lambda^{(obs)}$  pode ser algumas (até muitas, na verdade) ordens de magnitude menor que  $M_p^4$ , ou até mesmo da mesma ordem de magnitude que  $M_p^4$ , se o Universo estiver se aproximando da singularidade após a transição de fase correspondente. O exemplo dos gráficos correspondentes é mostrado na Fig. 5.5. Nota-se que o ricochete pode ocorrer mesmo para uma constante cosmológica relativamente grande. Na verdade, a constante cosmológica da ordem dada não altera, qualitativamente, o comportamento próximo à singularidade, embora o diagrama de fase seja modificado.



**Figura 5.5:** Solução numérica para o fator conforme  $\sigma(t)$  com densidade não nula de constante cosmológica. No gráfico à esquerda, considera-se  $\Lambda = 0.001H_2^2$  e as condições iniciais  $\sigma(0) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(0) = -0.1H_2$ ,  $\ddot{\sigma}(0) = 0$  e  $\ddot{\sigma}(0) = 0$ . No gráfico à direita, o valor é maior,  $\Lambda = 0.1H_2^2$ , e as condições iniciais são  $\sigma(0) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(0) = -0.01H_2$ ,  $\ddot{\sigma}(0) = 0.1$  e  $\ddot{\sigma}(0) = 0$ .

O último exemplo da análise numérica é incluído para ilustrar o ricochete na presença de radiação. Este é um aspecto importante a ser explorado, pois na região próxima ao ricochete, a solução está rapidamente se desviando de de Sitter e, como consequência, há uma intensa



**Figura 5.6:** Solução numérica para o fator conforme  $\sigma(t)$  na presença do termo de radiação anômala. Aqui, usamos o valor  $\beta g^2 \bar{F}^2 = -0.1$  e as seguintes condições iniciais:  $\sigma(0) = 1$ ,  $\dot{\sigma}(0) = -0.01H_0$ ,  $\ddot{\sigma}(0) = 0.1$ , e  $\ddot{\sigma}(0) = 0$ . No gráfico à esquerda, mostramos o intervalo  $-50 \leq t \leq 50$  em unidades de Planck e no gráfico à direita o intervalo é dez vezes menor. Pode-se observar que, mesmo considerando a contribuição quântica para a radiação, a solução de ricochete ainda está presente.

criação de partículas e radiação a partir do vácuo (ver, por exemplo, [179–181] e referências relacionadas). Assim, pode haver uma grande quantidade de radiação nas proximidades do ricochete, e isso deve ser levado em conta. No entanto, como usamos a equação para o traço (5.6), a radiação clássica não é “visível” para a equação. Por outro lado, ainda podemos modelar a presença de radiação com a contribuição anômala, e o resultado disso é mostrado na Fig. 5.6. A partir da seção 5.3 será explorada a possibilidade de soluções de ricochete em um modelo contendo apenas a contribuição da radiação.

### 5.2.3 Análise de estabilidade

É interessante explorar a estabilidade das soluções de ricochete em relação a pequenas perturbações das condições iniciais. A análise pode ser facilmente realizada analiticamente usando os resultados anteriores (5.23) e (5.24) para o comportamento exponencial.

De acordo com a Eq.(5.19), existem dois pares de soluções correspondendo a cada um dos valores (5.20) com sinais positivos e negativos. A expansão exponencial “pré-inflacionária” corresponde ao valor de  $H_2 > 0$ . Em seguida, a partir dos diagramas nas Figuras 5.4, 5.5 e 5.6, segue-se que a fase de contração corresponde à mudança de sinal  $H_2 \rightarrow -H_2$ .

Partindo deste ponto, podemos abordar a questão da estabilidade no regime linear de contração  $\sigma(t) = -H_2 t$  usando os autovalores (5.24) da solução (5.23) para pequenas perturbações. Uma vez que assumimos que  $a_4$  na Eq.(1) é zero, o valor de  $c$  deve ser definido a partir da contribuição quântica (1.27). É fácil ver que  $1 + 8b/c < 0$  para o conteúdo de partículas do MSSM, quando  $c > 0$ . Então, as partes reais de ambas as raízes  $\lambda_{1/2}$  na Eq.(5.24) são definidas pelo sinal de  $H_0$ . Na fase de expansão,  $H_0 = H_2 > 0$ , e ambas as raízes têm partes reais negativas. Por outro lado, no caso da contração, temos  $H_0 = -H_2 < 0$  e a solução  $\sigma(t) \approx -H_2 t$  é instável sob pequenas perturbações de  $\sigma(t)$ . Portanto, a partir desta análise, o ricochete estável devido às correções semiclássicas induzidas por anomalias é impossível.

Uma pergunta natural e importante é como aconteceu de encontrarmos as soluções de ricochete, conforme mostrado nos gráficos acima, se o ricochete não pode ser estável? Como



discutimos na seção anterior, não há uma dependência forte das condições iniciais nessas soluções. A análise numérica mostra que o ricochete sobrevive a pequenas variações dessas condições, o que é típico para o caso estável. Sabemos que tipicamente, para as soluções linearmente instáveis, deve-se esperar que a solução do tipo desejado só possa ser alcançada com um ajuste fino absolutamente preciso das condições iniciais.

A resposta para esta questão é a seguinte. De fato, a estabilidade ou instabilidade dependem da forma como interpretamos a dinâmica do sistema, ou, em outras palavras, dependem do nosso ponto de vista. Definindo as condições iniciais no ponto de ricochete  $t = 0$  e escolhendo  $|\dot{\sigma}(0)|$  suficientemente pequeno, estamos explorando a fase de contração ao olhar “para trás” no tempo  $t$ . Neste caso, para a contração há um  $t$  negativo e, portanto, um produto positivo  $H_0 t$ . Então, a Eq. (5.23) nos diz que a fase de contração é estável. No entanto, se olharmos “para a frente” no tempo, ou seja, escolher o ponto inicial em algum  $t_0 < 0$  próximo da mesma linha decrescente no gráfico, a solução é instável.

Vale ressaltar que a situação em muitos outros modelos de ricochete (veja, por exemplo, a revisão [56]) é diferente. Nestes modelos, há uma relação típica  $H \sim 1/t$ , de modo que o sinal do produto  $Ht$  não muda na transição entre as fases de expansão e contração, quando consideramos a dinâmica “para a frente” no tempo.

### 5.3 Solução de ricochete dirigida pelo setor anômalo da radiação

A partir desta seção, exploramos a possibilidade de obter uma solução analítica para o ricochete semiclássico, considerando apenas a contribuição do setor de radiação. Assim como no caso anterior, assumimos que a métrica fiducial é plana, ou seja,  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} a^2(\eta)$ . Neste caso, a parte induzida por anomalia (5.4), com termo adicional de Einstein-Hilbert e de constante cosmológica, se reduz à forma local não covariante

$$\Gamma = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (R + 2\Lambda) - \frac{\beta g^2}{4} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{F}^2 \sigma. \quad (5.34)$$

Lembrando que as quantidades barradas são definidas usando a métrica fiducial,  $\bar{g} = \det(\bar{g}_{\mu\nu})$  e  $\bar{F}^2 = \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ . É relativamente fácil verificar que o último termo em (5.34) é uma solução de (5.2).

Tomando a derivada variacional em relação a  $\sigma(\eta)$  e mudando as variáveis para o tempo físico  $t$  e  $a(t) = \exp\{\sigma(t)\}$ , chegamos à equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\mathcal{M}}{2a^4} + \frac{16\pi}{3M_p^2} \rho_\Lambda. \quad (5.35)$$

Nesta expressão e no restante deste capítulo, usamos as seguintes notações

$$\mathcal{M} = \frac{2\pi\beta g^2}{3M_p^2} \bar{F}^2, \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (5.36)$$

Em trabalhos anteriores, o ricochete com uma constante cosmológica foi considerado, por exemplo, em [182]. A expressão (5.36) inclui o termo de constante cosmológica e a parte

anômala descrita acima. Geralmente, pode-se assumir que a constante cosmológica é irrelevante em energias extremamente altas, onde a singularidade cosmológica ou um ricochete deveria ocorrer. Por outro lado, em energias acima da escala de transição de fase eletrofraca, supõe-se que a constante cosmológica mude sua magnitude por muitas ordens [157]. Independentemente do termo cosmológico  $\rho_\Lambda$  fornecer contribuições pequenas [183] em comparação com a densidade de energia da radiação, levamos esse termo em conta. Isso é especialmente importante porque a radiação clássica não entra diretamente na Eq. (5.35) e, como veremos mais adiante, só aparece após a primeira integração.

A primeira integração, ou redução de ordem, pode ser feita ao se tomar o parâmetro de Hubble como uma função do fator conforme  $H(a) = \dot{a}/a$ . Esta abordagem traz a relação

$$H^2 = \frac{C}{a^4} + \frac{\mathcal{M}}{a^4} \log \frac{a}{a_0} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.37)$$

Vale notar que, na abordagem clássica, há tanto uma equação dinâmica para o fator de escala quanto uma equação de vínculo. No caso dos termos gerados pela anomalia do traço nos setores gravitacional e de radiação, a equação de vínculo também aparece na forma  $\langle \nabla_\mu T^{\mu\nu} \rangle = 0$ , refletindo a covariância geral da ação induzida por anomalia, incluindo o termo não local (5.2). Esta parte foi elaborada na Ref. [173], então podemos pular os detalhes e apenas apresentar a equação para a pressão da radiação na presença da anomalia, complementando a densidade de energia equivalente a (5.37),

$$p_r = \frac{1}{3} \left( \rho_r - \frac{1}{4} \frac{|\beta| g^2 \bar{F}^2}{a^4} \right). \quad (5.38)$$

A última expressão no lado direito de (5.38) representa uma correção quântica para a equação de estado da radiação. Não utilizaremos aqui essa expressão, mas ela pode ser útil para a análise de perturbações cósmicas. Por outro lado, uma abordagem mais sólida deve ser baseada na versão local da expressão covariante (5.4).

Voltando à nossa consideração, o segundo termo no lado direito de (5.37) desaparece no limite clássico, e isso nos permite identificar a constante de integração  $C$  com o produto  $\rho_{r0} a_0^4 M_p^{-2}$ , onde  $\rho_{r0}$  é a densidade de energia da radiação em  $a = a_0$ . A comparação com nossa parametrização anterior da métrica (5.3) nos faz assumir que  $\bar{g}_{\mu\nu}$  corresponde ao valor de  $a_0$ . Consequentemente, substituímos  $\bar{F}^2 \rightarrow F_0^2 a_0^4$  na fórmula para  $\mathcal{M}$  em (5.36). Depois disso, a relação (5.37) é expressa na forma

$$H^2 = \frac{a_0^4}{a^4} \left( \frac{\rho_{r0}}{M_p^2} + \mathcal{M} \log \frac{a}{a_0} \right) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (5.39)$$

Em todas essas relações, o valor  $a_0$  corresponde ao tamanho do Universo no qual nossas aproximações se aplicam. Isso significa que  $a_0$  deve fornecer energias suficientemente altas para ter *i*) um regime dominado por radiação, quando o papel das partículas massivas (na forma de poeira ou objetos maiores) é irrelevante em comparação com a radiação; ou *ii*) todas as partículas de matéria estão em temperaturas tão altas que suas massas são desprezíveis.

Assim, as questões a serem abordadas são as seguintes: *a*) se a Eq. (5.39) admite uma solução analítica correspondente a um ricochete e *b*) se a diferença de magnitude necessária



entre  $a_0$  e o valor  $a_m$  correspondente a um ricochete nos leva a energias trans-Planckianas. O modelo de ricochete bem-sucedido deve responder negativamente à última questão, pois, caso contrário, não podemos ignorar os efeitos de gravidade quântica. A seguir consideramos a parte *a*) e deixamos a questão mais complicada *b*) para a próxima seção.

### 5.3.1 Solução analítica para o ricochete

Como sabemos [183], para um fator de escala  $a_m$  suficientemente pequeno ( $a_m \ll a_0$ ), o termo cosmológico é pequeno em comparação com outros termos no lado direito de (5.39). Assim, podemos explorar a solução de ricochete para  $\Lambda = 0$  e então incluir um termo  $\Lambda$  não nulo, tratando-o como uma pequena perturbação. Dessa forma, usando (5.36), chegamos à condição de  $H(a_m) = 0$  na forma

$$\rho_{r0} = -\mathcal{M}M_p^2 \log \frac{a_m}{a_0} = \frac{2\pi}{3} \beta g^2 F_0^2 \log \frac{a_0}{a_m}. \quad (5.40)$$

Como supomos que o universo está inicialmente em contração,  $a_0 > a_m$ , e portanto a condição necessária para o ricochete é que  $\beta F_0^2 > 0$ .

Como primeiro exemplo, considere o caso mais simples quando o Universo está muito quente e seu conteúdo pode ser descrito pela densidade de energia da radiação  $\rho_r$ . Por outro lado, o espaço é condutor devido à presença de um gás quente de partículas carregadas. Para simplificar, assumimos que, no ponto inicial da fase relevante do Universo em contração, a maior parte de  $\rho_{r0}$  consiste de radiação eletromagnética [65]. Neste caso, temos

$$\rho_r \approx \frac{\vec{H}^2 + \vec{E}^2}{2} \quad \text{e} \quad F^2 \approx \frac{\vec{H}^2 - \vec{E}^2}{2}. \quad (5.41)$$

Devido ao meio condutor,  $\vec{E}^2 \approx 0$  e chegamos à estimativa  $\rho_{r0} \approx F_0^2$ . Assim, obtemos a solução para  $a_m$  na forma

$$a_m = a_m(\Lambda = 0) = a_0 \exp \left\{ -\frac{3}{2\pi\beta g^2} \right\}. \quad (5.42)$$

Outra possibilidade é utilizar a relação (5.39) com  $\Lambda = 0$  e obter a solução analítica geral

$$(t - t_0) = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2\mathcal{M}}} e^{-2C/\mathcal{M}} \left[ \operatorname{erfi} \left( \sqrt{2 \log a + 2C/\mathcal{M}} \right) - \operatorname{erfi} \left( \sqrt{2C/\mathcal{M}} \right) \right], \quad (5.43)$$

onde  $\operatorname{erfi}(x) = -i \operatorname{erf}(ix)$  é a função erro imaginária. Tratando  $\mathcal{M}$  como uma pequena perturbação, podemos usar a expansão assintótica

$$\operatorname{erfi}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} \simeq -i + \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi} x} + O(x^{-1}), \quad (5.44)$$

e derivar a seguinte solução aproximada

$$t \simeq \pm \frac{1}{2\sqrt{C}} \left[ a^2 \left( 1 - \frac{\mathcal{M}}{2C} \log a \right) - 1 \right], \quad t_0 = 0. \quad (5.45)$$

No limite  $t \rightarrow 0$ , verificamos que  $a(t) \rightarrow 1$ , o que é consistente com as soluções numéricas, como veremos na próxima subseção. Adicionalmente, tomando os limites  $t \rightarrow \pm\infty$ , encontramos  $a(t) \rightarrow +\infty$ .

Nota-se que este esquema é oposto ao necessário para o ricochete, uma vez que, no último caso,  $\mathcal{M}$  não pode ser considerado pequeno.

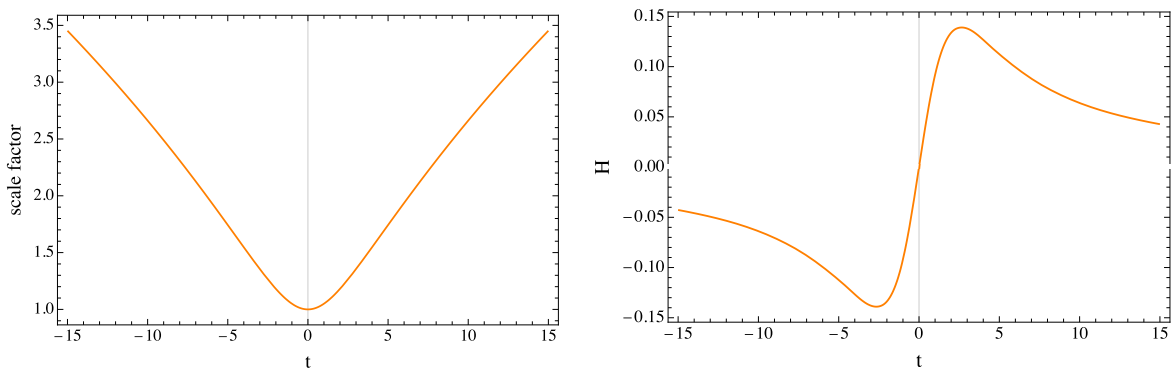
Tomar o termo de constante cosmológica como uma pequena perturbação na Eq. (5.39) é um exercício tecnicamente simples e apresentamos apenas o resultado final:

$$a_m(\Lambda) = a_m \left( 1 - \frac{4\pi \rho_\Lambda}{\beta g^2 F_0^2} \frac{a_m^4}{a_0^4} \right). \quad (5.46)$$

Tipicamente, esta fórmula descreve uma pequena correção para a solução básica (5.42).

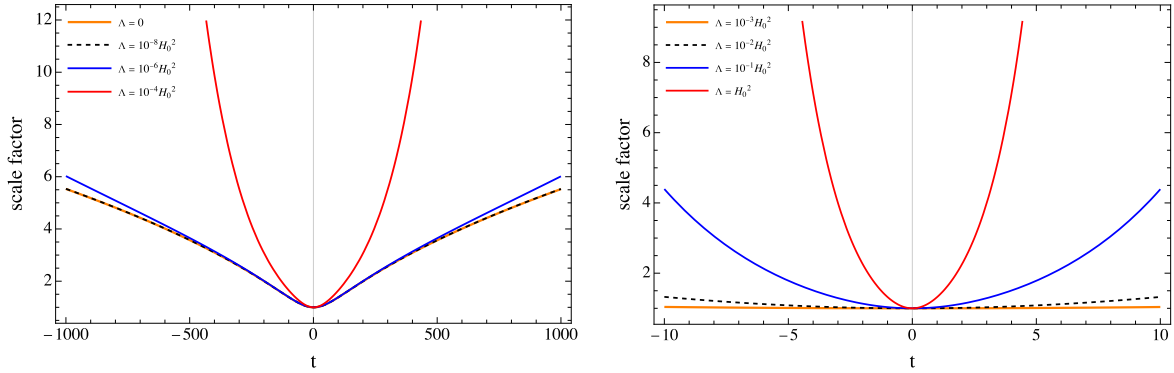
### 5.3.2 Gráficos correspondentes ao ricochete

Vamos primeiro ilustrar a solução analítica apresentada acima com alguns gráficos obtidos pela solução numérica da Eq. (5.35) com  $\rho_\Lambda = 0$  usando o Mathematica [151]. Impomos as condições iniciais correspondentes à contração e obtemos gráficos do tipo ricochete para  $a(t)$ , com uma transição suave entre as fases de contração e expansão. Esses gráficos são mostrados na Fig. 5.7. A última curva mostra claramente que o parâmetro de Hubble  $H$  evolui suavemente através da região de ricochete.



**Figura 5.7:** Solução numérica para o fator de escala  $a(t)$  na presença do termo de radiação anômalo. Assumimos o valor  $\beta g^2 F_0^2 = 0.1$  em unidades de Planck e as condições iniciais  $a(0) = 1$  e  $\dot{a}(0) = -10^{-3}H_0$ . O gráfico à esquerda mostra  $a(t)$  no intervalo  $-15 \leq t \leq 15$ . O gráfico à direita mostra o parâmetro de Hubble  $H(t)$ .

O último ponto sobre as soluções sem a constante cosmológica é que a forma geral das soluções de ricochete não depende dos valores dos parâmetros e dos detalhes das condições iniciais. Assim, os resultados analíticos da subseção anterior são perfeitamente bem confirmados e não há problemas com a estabilidade neste modelo de ricochete. Quando o termo de constante cosmológica é positivo, a análise numérica mostra que as soluções do tipo ricochete permanecem. No entanto, com o aumento da magnitude de  $\Lambda$ , os gráficos se tornam mais estreitos. Os gráficos obtidos com diferentes valores de  $\Lambda$  e intervalos de  $t$  são apresentados na Fig. 5.8. Aqui, adotamos  $t$  em unidades de massa de Planck para todos os gráficos.



**Figura 5.8:** Solução numérica para o fator de escala  $a(t)$  na presença do termo de radiação anômala e uma constante cosmológica positiva. Os valores utilizados para obter as soluções numéricas são indicados nos gráficos.

Todas as características mencionadas dizem respeito apenas à constante cosmológica positiva. É importante destacar que, no caso da constante cosmológica negativa, há um comportamento cíclico não singular para  $a(t)$ . A diferença com os modelos cíclicos conhecidos (veja, por exemplo, [184], também [185, 186] e referências relacionadas) é que, no caso presente, a frequência das oscilações é muito alta. Como não temos interpretação física deste tipo de solução, ela não será discutida em detalhes aqui.

## 5.4 Estimativas quantitativas e análise

A consideração do significado físico da solução de ricochete começa com a observação de que, no Universo em expansão ou contração, a energia típica de um fóton, ou a temperatura da radiação de fundo, é inversamente proporcional ao fator de escala, ou seja,

$$\frac{a}{a_0} = \frac{T_0}{T}. \quad (5.47)$$

Portanto, a solução (5.42) implica na seguinte estimativa para a energia no ponto de ricochete:

$$T_m = T_0 \exp \left\{ \frac{3}{2\pi\beta g^2} \right\}. \quad (5.48)$$

Tomando os valores correspondentes à Eletrodinâmica Quântica (QED), o acoplamento satisfaz  $\alpha = g^2/(4\pi) \approx 1/137$ , o que fornece uma estimativa muito pessimista de  $T_m \gg 10^{100} GeV$ . Isso significa que a solução de ricochete ocorre em energias no regime trans-Planckiano muito alto, ou seja, muito além do *framework* da aproximação usada. A conclusão é que a consideração baseada na QED não constitui uma base sólida para o modelo de ricochete semiclássico sem suposições adicionais. É possível obter uma estimativa melhor em teorias mais gerais?

A expressão (5.48) é muito sensível à magnitude do produto  $\beta g^2$ , devido à dependência exponencial. A estimativa numérica para o ricochete pode ser melhorada aumentando os valores de  $g$  e de  $\beta$ , de acordo com a expressão geral (5.1), e indo além dela. De acordo com a interpretação *ii*) na seção 5.3, podemos assumir que a temperatura  $T_0$  é da ordem da escala de grande unificação  $M_X$  ou ligeiramente inferior, de modo que todas as partículas de matéria tenham altas energias cinéticas e suas massas sejam desprezíveis. Então, a definição (5.36)

deve ser modificada. Na verdade, não é suficiente substituir  $\bar{F}^2 \rightarrow \bar{\mathcal{L}}$ , onde o último símbolo indica a Lagrangiana covariante de toda a teoria, incluindo férmions, escalares e vetores, no ponto  $a_0$ . O motivo é que o termo  $\rho_{r_0}$  na equação principal (5.39) deve ser interpretado como a densidade de energia de todo o conteúdo do Universo em uma escala de energia correspondentemente alta. O produto  $\beta g^2 F^2$  deve ser substituído pela soma dos termos correspondentes às diferentes partes da Lagrangiana. Então, a expressão (5.48) deve ser substituída por

$$T_m = T_0 \exp \left\{ \frac{3 \sum_k \bar{\rho}_k}{2\pi \sum_k \beta_k g_k^2 \bar{\mathcal{L}}_k} \right\}, \quad (5.49)$$

onde o índice  $k$  percorre todos os campos na Lagrangiana. Esta expressão depende do modelo e sua avaliação está além do escopo desta tese. No entanto, vamos listar os requisitos para o ricochete aceitável neste *framework*.

1. Para que a razão seja suficientemente pequena na exponencial em (5.49), pelo menos algumas das constantes de acoplamento devem ser grandes. Isso significa que um ricochete fenomenologicamente bem-sucedido, sem modificação da gravidade ou inclusão de um campo escalar especial, requer que pelo menos parte dos acoplamentos sejam fortes e, conseqüentemente, leve em consideração efeitos não perturbativos na QFT correspondente.

2. O sinal do denominador na exponencial em (5.49) deve ser positivo, caso contrário a equação (5.39) não teria soluções de ricochete.

3. A magnitude da razão na exponencial em (5.49) deve ser tal que  $T_m$  pertença ao intervalo entre as massas de pelo menos algumas das partículas quânticas e a escala de Planck, onde assumimos modificações na ação da gravidade e, provavelmente, efeitos gravitacionais quânticos.

4. Para fornecer uma correspondência com os dados observacionais referentes à inflação, é importante que a região de ricochete comece e termine com um  $|H_0|$  muito alto, por exemplo, no intervalo de  $10^{11} - 10^{13}$  GeV. Sem modificar a ação gravitacional, isso significa que o ponto inicial  $a_0$  corresponde à temperatura (energia típica)  $T_0 \sim [H_0^2 M_p^2]^{1/4}$ . Por outro lado, a descrição mais simples da inflação é o modelo de Starobinsky [64], que corresponde à adição do termo  $R^2$  com o coeficiente aproximado de  $5 \times 10^8$  [134]. Planejamos explorar essa extensão do modelo descrito acima em trabalhos futuros [187], mas assumindo que esse termo extra não tenha um efeito dramático no valor de  $T_0$ , chegamos ao intervalo estreito para o parâmetro de Hubble  $-|H_0| < H < |H_0|$  e a temperatura  $T_0 < T < M_p$ .

A última observação diz respeito ao primeiro dos pontos listados. No caso do acoplamento forte, a aproximação de *1-loop* que usamos aqui não é apropriada. As modificações necessárias não se reduzem à mudança das funções beta e às modificações correspondentes na anomalia. O ponto é que a primeira ordem em  $\sigma$ , na Eq. (5.34) e nas fórmulas estendidas similares relacionadas a (5.49), reflete apenas a violação da simetria conforme local correspondente aos primeiros logaritmos, como termos proporcionais a  $L = \log(\square/\mu^2)$  nos fatores de forma do UV (veja, por exemplo, [40] para uma explicação detalhada).

Vamos usar essa informação como uma pista do que pode acontecer em *loops* superiores. No segundo *loop*, certamente haverá adição do tipo  $L^2$  no fator de forma do termo  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  no

setor eletromagnético; no terceiro *loop*, haverá uma adição do tipo  $L^3$ , etc. Destacamos que esses logaritmos extras acompanham as divergências da teoria antes que a renormalização seja aplicada. Assim, dado que a teoria subjacente é renormalizável, a estrutura dos termos na ação permanece a mesma, e as mudanças dizem respeito apenas aos fatores de forma. Como resultado, os termos logarítmicos relevantes no regime não perturbativo tornam a ação (5.34) mais complicada,

$$\Gamma_{np} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \bar{F}^2 \sigma B(g^2 \sigma), \quad (5.50)$$

onde  $B(x)$  é alguma função desconhecida correspondente à soma da série perturbativa.<sup>4</sup> Nota-se que, neste caso, os termos logarítmicos sempre entram na ação com o coeficiente  $g^2$  e o mesmo acontece para as potências de  $\sigma$ , de modo que o argumento de  $B$  deve ser o produto  $g^2 \sigma$ . É claro que essa modificação pode alterar a solução, como (5.42), incluindo a possibilidade de eliminar o ricochete, ou modificar a forma das dependências de  $a(t)$ , etc. A única coisa que podemos dizer neste ponto é que o ricochete do tipo descrito, completamente baseado na física de partículas e sem suposições adicionais, é possível. Por outro lado, sua investigação detalhada requer um melhor conhecimento de muitas questões, como a completude UV do Modelo Padrão e a soma dos logaritmos relevantes no regime UV.

<sup>4</sup> Assumindo que essa série seja convergente, em algum sentido.

## CONCLUSÕES GERAIS

Nesta tese, estudamos vários aspectos teóricos de gravitação quântica e semiclássica de uma perspectiva moderna da teoria de campo efetiva, resultando nas seguintes contribuições originais:

- Apresentamos quatro maneiras diferentes de fornecer a invariância sob transformação conforme local para a ação do campo vetorial em uma dimensão arbitrária  $d$ . No primeiro caso, revisitamos o modelo conforme [66] e descobrimos que, para  $d = 4 + \epsilon$ , a violação da simetria de calibre nos termos de ordem mais baixa  $\mathcal{O}(\epsilon)$  está parcialmente relacionada ao operador escalar de Paneitz em quatro dimensões [94, 117]. Em duas das outras três abordagens, mostramos que a generalização desejada do modelo conforme para  $d \neq 4$  é sempre alcançada por meio da introdução de um campo escalar extra. Por fim, formulamos uma alternativa não analítica para o campo vetorial e demonstramos que a versão estendida de um dos modelos conformes com campo escalar possui equivalência *on-shell* com o modelo construído nesta última abordagem.
- Construímos a ação efetiva induzida por anomalia, na forma covariante não local. Esta ação pode também ser formulada em uma representação local usando campos auxiliares. Mostramos que isso pode ser feito considerando um espaço-tempo curvo com escalares adicionais de fundo. Neste contexto, usando a regularização de Pauli-Villars, estendemos a análise das ambiguidades nos termos locais da ação efetiva e mostramos que sempre existe uma ambiguidade na correção quântica finita de *1-loop* do tipo  $R\Phi^2$ . Nossos resultados também indicam que, a partir da aproximação de *2-loops*, preservar a estrutura da anomalia requer um ajuste fino dos reguladores de Pauli-Villars, de modo que o coeficiente do termo  $\square\Phi^2$  na anomalia se anule. Além disso, formulamos o limite de baixas energias na ação efetiva induzida. Esta abordagem nos levou a uma forma reduzida da ação, que manifestou algumas propriedades qualitativamente novas. Primeiramente, encontramos uma nova contribuição para o termo local  $R^2$  no IR. Em segundo lugar, conseguimos reproduzir, a partir da ação induzida, a estrutura não local  $R\square^{-1}R$  introduzida anteriormente na literatura [30], e utilizada na cosmologia com base puramente fenomenológica *ad hoc* [136]. Em terceiro lugar, confirmamos que a ação induzida por anomalia representa uma versão local do grupo de renormalização no espaço-tempo curvo. Em particular, mostramos que torna-se possível recuperar o potencial efetivo do campo escalar conforme a partir da ação induzida.
- Derivamos as correções completas para a teoria quadridimensional do fator conforme quântico e, a partir da análise dos fatores de forma não locais no UV, encontramos

uma correspondência com os resultados do esquema de Subtração Mínima, obtidos por meio do método de *heat kernel*. Por outro lado, no IR, mostramos que os diagramas com linhas internas de fantasmas massivos colapsam e se tornam irrelevantes. Este resultado confirma o teorema de Appelquist-Carazzone no cenário de um modelo de derivadas superiores com interações não polinomiais. Além disso, encontramos a correspondência entre o limite IR da teoria completa (fundamental), com graus de liberdade sem massa e massivo, e o limite UV da teoria efetiva, sem o modo massivo. Esta correspondência se estende às contribuições no setor da constante cosmológica da ação gravitacional. No entanto, tais contribuições não são dependentes do momento, confirmando a afirmação geral de impossibilidade [30] referente à detecção de *running* da constante cosmológica por meio de cálculos no espaço-tempo plano.

- Encontramos uma solução analítica que descreve o ricochete cosmológico sem modificar a ação da gravidade, introduzir campos escalares ou considerar efeitos quânticos do vácuo no setor de derivadas superiores. Mostramos que a energia típica do ricochete está associada ao equilíbrio entre o termo de radiação clássica e a correção quântica no setor radiação-gravidade. Além disso, no contexto da QED, descobrimos que o ricochete ocorre em energias trans-Planckianas, tornando a solução analítica mencionada fisicamente inviável. Por outro lado, essa estimativa depende exponencialmente do valor da constante de acoplamento da teoria. Neste caso, a conclusão é que o ricochete fisicamente aceitável é possível, mas isso impõe restrições severas para modelos de física de partículas além do SM.



# PERSPECTIVAS

Este capítulo é dedicado às perspectivas acerca de alguns dos resultados obtidos nesta tese e também sobre um dos trabalhos que desenvolvi durante o doutorado em colaboração com o Prof. José Helayël-Neto e meu colega, aluno de doutorado do CBPF, João Paulo Melo. Embora o referido trabalho não tenha sido incluído nesta tese, trata-se de um estudo que, assim como os assuntos aqui abordados, também está ligado ao regime de altas energias (nas proximidades da escala de Planck) e tem grande relevância para a minha formação.

## 1) Supersimetria e violação da simetria de Lorentz

No trabalho recente [188], estudamos as implicações da violação da simetria de Lorentz (LSV) no setor de matéria de uma teoria de calibre supersimétrica e, além de reproduzirmos naturalmente os termos CPT-ímpar do Modelo Padrão Estendido e derivarmos relações de dispersão modificadas para o setor de matéria, conseguimos gerar um momento de dipolo elétrico para o férmion carregado. Neste contexto, a introdução de termos adicionais que violam Lorentz no setor de calibre, os quais induzem modificações significativas para o setor fóton-fotino, é um caminho natural a ser seguido como um passo adiante. A motivação para fazer isso é acompanhar a interferência entre os efeitos dos diferentes termos de violação da simetria de Lorentz presentes nos setores de matéria e calibre. Além disso, as relações de dispersão fotônica e eletrônica modificadas, incluindo ambos os efeitos de supersimetria (SUSY) e LSV, podem ser estudadas em conexão com espalhamentos fóton-fóton, Breit-Wheeler e Compton. Os resultados deste estudo podem ser usados para impor limites superiores aos parâmetros da teoria com a ajuda de dados astrofísicos, tais como medições de (não-)atenuação de raios gama de núcleos ativos de galáxias (AGNs), explosões de raios gama (GRBs) e luz de fundo extragaláctica (EBL).

## 2) Desacoplamento em gravitação quântica

Certamente seria interessante estender a nossa análise apresentada na teoria quadridimensional do fator conforme quântico para os modelos de "gravidade quântica real", ou seja, a teoria da métrica quântica. Como mencionamos na Introdução, este é um problema tecnicamente mais desafiador uma vez que, neste caso, a teoria possui invariância de calibre e estruturas tensoriais complicadas nos setores da métrica quântica e dos fantasmas. No entanto, os resultados apresentados nesta tese mostram que há boas chances de se atender à expectativa de universalidade da Relatividade Geral quântica como uma teoria efetiva da gravidade quântica, pelo menos no modelo de quatro derivadas [4] e, provavelmente, em



todos os modelos polinomiais introduzidos em [41], onde todos os graus de liberdade extras têm massas da ordem de magnitude de Planck [189].

Ao mesmo tempo, a situação pode ser mais complicada nas teorias não locais de gravidade quântica [190–194] (muitas outras referências podem ser encontradas nesses artigos). A versão mais popular dos modelos não locais é livre de graus de liberdade massivos em *tree-level*. Por outro lado, a partir da ordem de *1-loop*, a estrutura do propagador muda e há infinitos estados tipo fantasma de energia e massa complexas com um espectro de massa quase contínuo [195]. Nesse caso, a universalidade da Relatividade Geral como a teoria de gravidade quântica no IR é bastante incerta. Isso significa que ainda há muitas questões interessantes a serem exploradas nesta direção.

### 3) Solução de ricochete com correção anômala da radiação

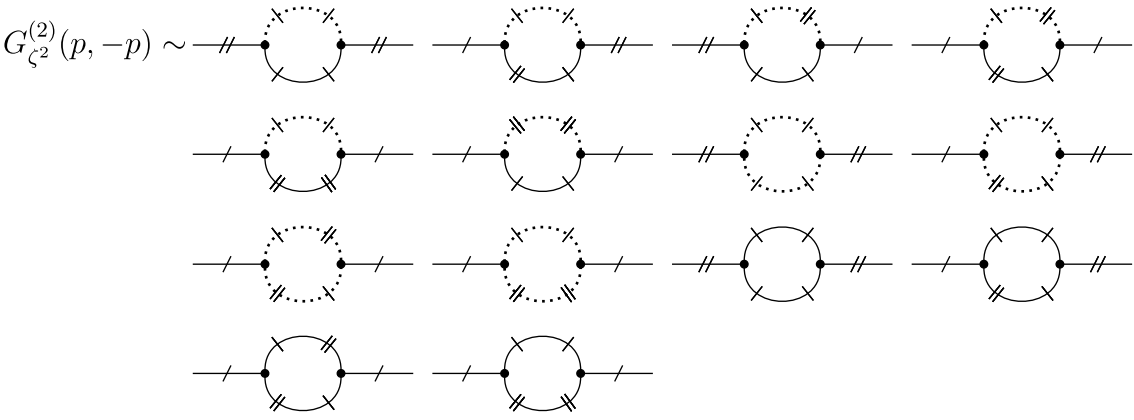
Além da busca por um acoplamento no regime UV que seja forte o suficiente para fornecer energias típicas aceitáveis para a solução de ricochete com contribuição anômala da radiação, uma outra questão em aberto é a estabilidade do modelo de ricochete em discussão sob perturbações de densidade e métrica. Essa questão é tipicamente complicada em todos os modelos de ricochete. A razão é que, nas proximidades do ricochete, a derivada temporal  $\dot{H}$  é necessariamente positiva e isso leva à violação da condição de energia nula (NEC). Essa característica pode levar a instabilidades em perturbações cósmicas [56, 196] (veja também [197] para uma discussão alternativa). Em geral, a análise das perturbações em modelos cosmológicos é um elemento necessário para o seu desenvolvimento, especialmente para modelos com um ricochete [57]. Apenas a análise das perturbações pode mostrar se o modelo é viável ou possui inconsistências.

Na literatura, existem fortes indicações de que a violação da NEC por correções quânticas pode não levar a inconsistências [198] e que o mesmo é verdadeiro nas teorias com campos escalares [199, 200]. Ambos os argumentos se aplicam ao nosso caso. É importante notar que as perturbações devem ser analisadas usando a forma covariante da ação induzida (5.4), na representação local. Nesse caso, a teoria sempre inclui campos escalares auxiliares [44, 171, 172] e, portanto, há chances de chegarmos ao modelo consistente de ricochete, incluindo as perturbações livres de patologias, de acordo com o critério de [57]. Esperamos retornar à consideração detalhada deste problema e, como primeiro passo, construir uma nova formulação simplificada da ação induzida com campos auxiliares.

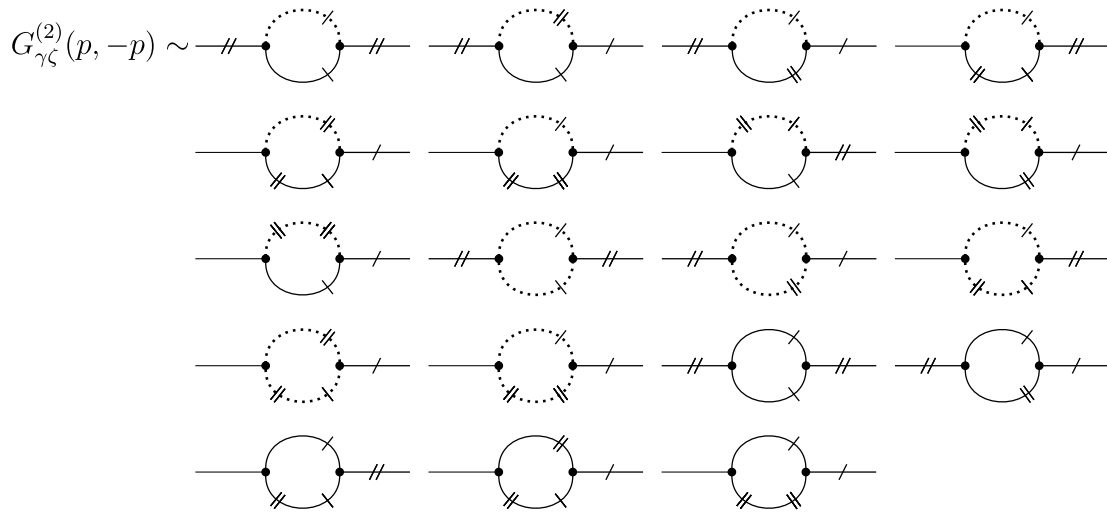
## APÊNDICES

# DIAGRAMAS DE FEYNMAN PARA A FUNÇÃO DE DOIS PONTOS

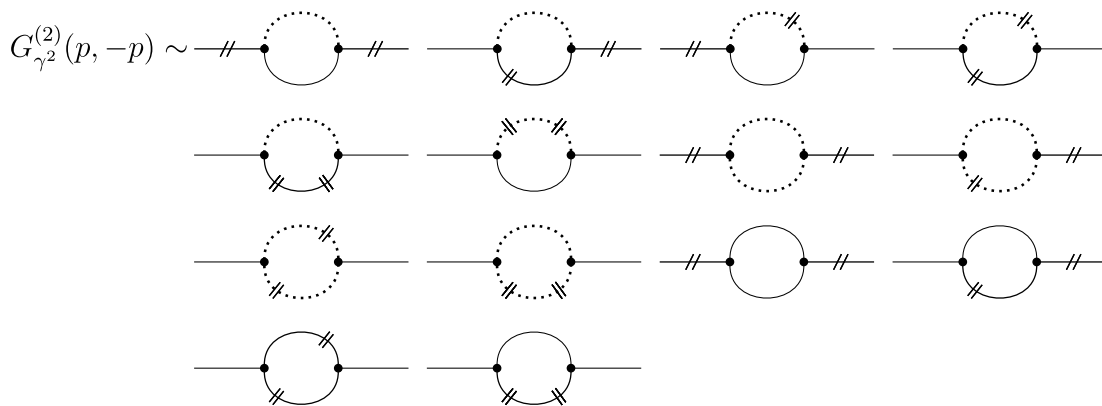
Neste apêndice, apresentamos o conjunto de diagramas de Feynman de 1-loop que correspondem às correções para as função de dois pontos.



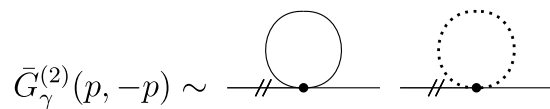
**Figura A.1:** Diagramas para a função de dois pontos que fornecem contribuições de 1-loop para a renormalização do acoplamento  $\zeta$ . Linhas sólidas indicam graus de liberdade leves, linhas tracejadas representam os fantasmas massivos, e os "cortes" denotam derivadas atuando nos propagadores.



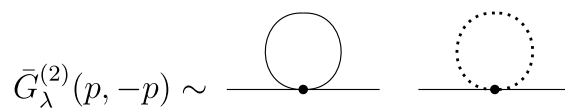
**Figura A.2:** Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação  $\gamma\zeta$ .



**Figura A.3:** Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação  $\gamma^2$ .



**Figura A.4:** Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação  $\gamma$ .



**Figura A.5:** Diagramas para a função de dois pontos com o vértice de interação  $\lambda$ .

$$\tilde{G}_{\gamma\lambda}^{(2)}(p, -p) \sim \text{---} // \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} // \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} // \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} // \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} // \bullet \text{---}$$

**Figura A.6:** Diagramas (tadpole) para a função de dois pontos com o vértice de interação  $\gamma\lambda$ .

$$\tilde{G}_{\lambda^2}^{(2)}(p, -p) \sim \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \text{---} \bullet \text{---}$$

**Figura A.7:** Diagramas (tadpole) para a função de dois pontos com o vértice de interação  $\lambda^2$ .

Diagramas que contribuem apenas com correções finitas para a função de dois pontos são mostrados nas Figs. A.8, A.9 e A.10.

$$G_{\lambda\zeta}^{(2)}(p, -p) \sim \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet // \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet / \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet / \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet // \text{---}$$

$$\text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet / \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet // \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet / \text{---}$$

**Figura A.8:** Diagramas livres de divergência para a função de dois pontos com o vértice  $\lambda\zeta$ .

$$G_{\lambda\gamma}^{(2)}(p, -p) \sim \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet // \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet // \text{---}$$

$$\text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet // \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---}$$

**Figura A.9:** Diagramas livres de divergência para a função de dois pontos com o vértice  $\lambda\gamma$ .

$$G_{\lambda^2}^{(2)}(p, -p) \sim \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} \bullet \text{---}$$

**Figura A.10:** Diagramas livres de divergência para a função de dois pontos com o vértice  $\lambda^2$ .

## RESULTADOS INTERMEDIÁRIOS

Neste apêndice, apresentamos alguns resultados intermediários relacionados ao cálculo de integrais de Feynman na seção 4.2.

### B.1 Integrais de Feynman

Ao utilizar a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[(a-b)x+b]^2}, \quad (\text{B.1})$$

e realizar a seguinte mudança na variável de integração  $k = q + px$ , podemos reescrever as integrais relacionadas ao setor misto nas expressões (4.25), (4.26) e (4.27), respectivamente, como

$$\Sigma_{\text{mixed}, \zeta^2}^{(2\omega)}(p) = -\frac{2\zeta^2 p^4}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \frac{(4\omega^2 - 1)}{\omega(1 + \omega)} \int_0^1 dx I_4, \quad (\text{B.2})$$

$$\Sigma_{\text{mixed}, \gamma\zeta}^{(2\omega)}(p) = -\frac{2\gamma\zeta p^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \frac{(2\omega - 1)}{\omega} \int_0^1 dx \left[ (x^2 - x + 1)p^2 I_2 + I_4 \right] \quad (\text{B.3})$$

e

$$\Sigma_{\text{mixed}, \gamma^2}^{(2\omega)}(p) = -\frac{2\gamma^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int_0^1 dx \left[ I_4 + \frac{1 + 4\omega + 4(x^2 - x)(\omega + 1)}{2\omega} p^2 I_2 + (x^2 - x + 1)^2 p^4 I_1 \right], \quad (\text{B.4})$$

onde, no espaço de Minkowski,

$$I_1 = \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \Gamma(2 - \omega) \Delta^{\omega-2}, \quad (\text{B.5})$$

$$I_2 = \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q^2}{(q^2 - \Delta)^2} = -\frac{i}{(4\pi)^\omega} \omega \Gamma(1 - \omega) \Delta^{\omega-1}, \quad (\text{B.6})$$

$$I_4 = \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q^4}{(q^2 - \Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^\omega} \omega(1 + \omega) \Gamma(-\omega) \Delta^\omega. \quad (\text{B.7})$$

Aqui definimos  $\Delta \equiv p^2x(x-1) + (M^2 - m^2)x + m^2$ . Para as integrais nos outros setores, temos os mesmos resultados acima com  $\Delta = \Delta_{\text{ghost}} = p^2x(x-1) + M^2$  no caso do setor fantasma, e  $\Delta = \Delta_{\text{light}} = p^2x(x-1) + m^2$  para o setor leve.

## B.2 Correções $\Sigma_{\zeta^2}$ , $\Sigma_{\gamma\zeta}$ e $\Sigma_{\gamma^2}$ para o caso de $m^2 = 0$

As contribuições dos diagramas mostrados nas Figuras A.1, A.2 e A.3, assumindo  $m^2 = 0$ , podem ser escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \Sigma_{\zeta^2}(p) \Big|_{m^2=0} &= \frac{i\zeta^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ \frac{5p^4}{\epsilon} + \alpha_{\zeta}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) + \xi_{\zeta}^{(2)}(p) + \beta_{\zeta, \text{light}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{\zeta, \text{ghost}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) + \beta_{\zeta, \text{mixed}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{M^2}{M^2+p^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma\zeta}(p) \Big|_{m^2=0} &= -\frac{i\gamma\zeta}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ \frac{3p^2}{\epsilon} + \alpha_{\gamma\zeta}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) + \xi_{\gamma\zeta}^{(2)}(p) + \beta_{\gamma\zeta, \text{light}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{\gamma\zeta, \text{ghost}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) + \beta_{\gamma\zeta, \text{mixed}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{M^2}{M^2+p^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e

$$\begin{aligned} \Sigma_{\gamma^2}(p) \Big|_{m^2=0} &= \frac{i\gamma^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \alpha_{\gamma}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) + \xi_{\gamma}^{(2)} + \beta_{\gamma, \text{light}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{\gamma, \text{ghost}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) + \beta_{\gamma, \text{mixed}}^{(2)}(p) \ln\left(\frac{M^2}{M^2+p^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

onde  $\beta$ 's são os coeficientes da parte não local com fator de forma logarítmico dependente do momento, decompostos de acordo com os setores leve, fantasma e misto, enquanto  $\alpha$ 's e  $\xi$ 's são coeficientes de contribuições envolvendo a combinação de diferentes setores:

$$\begin{aligned} \beta_{\zeta, \text{light}}^{(2)}(p) &= \frac{p^8}{2M^4}, & \beta_{\gamma\zeta, \text{light}}^{(2)}(p) &= -\frac{p^6}{2M^4}, & \beta_{\gamma, \text{light}}^{(2)}(p) &= \frac{p^4}{2M^4}, \\ \beta_{\zeta, \text{ghost}}^{(2)}(p) &= -\frac{p^8}{2M^4d^5}, & \beta_{\gamma\zeta, \text{ghost}}^{(2)}(p) &= -\frac{p^2(8M^4 - 2M^2p^2 - p^4)}{2M^4d}, \\ \beta_{\gamma, \text{ghost}}^{(2)}(p) &= -\frac{(2M^2 - p^2)^2}{2M^4d}, & \beta_{\zeta, \text{mixed}}^{(2)}(p) &= -\frac{(M^2 + p^2)^5}{M^4p^2}, \\ \beta_{\gamma\zeta, \text{mixed}}^{(2)}(p) &= -\frac{(M^2 - p^2)(M^2 + p^2)^3}{M^4p^2}, & \beta_{\gamma, \text{mixed}}^{(2)}(p) &= -\frac{(M^2 + p^2)(M^2 - p^2)^2}{M^4p^2}, \\ \alpha_{\zeta}^{(2)}(p) &= p^4\left(5 - \frac{p^4}{2M^4}\right), & \alpha_{\gamma\zeta}^{(2)}(p) &= p^2\left(3 + \frac{p^4}{2M^4}\right), & \alpha_{\gamma}^{(2)}(p) &= 2 - \frac{p^4}{2M^4}, \\ \xi_{\zeta}^{(2)}(p) &= 7p^4 - \frac{9M^2p^2}{2} - M^4, & \xi_{\gamma\zeta}^{(2)}(p) &= 6p^2 - M^2, & \xi_{\gamma}^{(2)} &= 3. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

## RESULTADOS DAS CONTRIBUIÇÕES FINITAS $\Sigma_{\lambda\zeta}$ , $\Sigma_{\lambda\gamma}$ E $\Sigma_{\lambda^2}$

Coletamos aqui os resultados das correções de autoenergia que são livres de divergências. As contribuições dos diagramas mostrados nas Figuras A.8, A.9 e A.10 são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\lambda\zeta}(p) = & -\frac{16i\lambda\zeta}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 2 + \frac{1}{(ab)^2c^3} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) + \frac{1}{(ab)^2d^3} \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{ab} \left( A^2 + ab + \frac{a}{2} + 2 \right) \ln(1+4b) - \frac{A^3}{(ab)^2} \ln\left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \right\}, \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\lambda\gamma}(p) = & \frac{16i\lambda\gamma}{(4\pi)^2\theta^4p^2} \left\{ \frac{1}{(ab)^2c} \left( \frac{a}{2} - 1 \right) \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) + \frac{1}{(ab)^2d} \left( 2ab + \frac{a}{2} - 1 \right) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) \right. \\ & \left. + \left( 1 + \frac{1}{2b} \right) \ln(1+4b) - \frac{A}{(ab)^2} \left( ab + \frac{a}{2} - 1 \right) \ln\left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \right\} \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

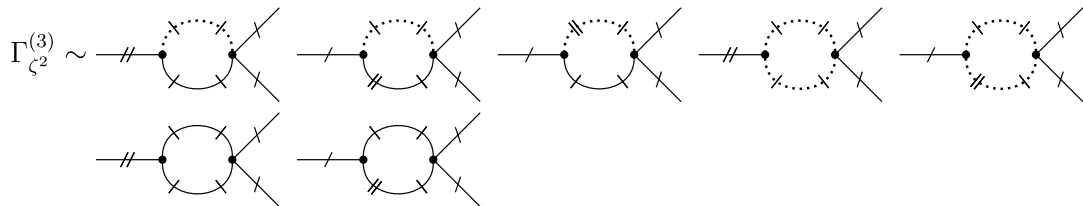
e

$$\begin{aligned} \Sigma_{\lambda^2}(p) = & -\frac{512i\lambda^2}{(4\pi)^2\theta^4p^4} \left\{ \frac{1}{ab} \ln(1+4b) + \frac{1}{(ab)^2c} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) + \frac{1}{(ab)^2d} \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) \right. \\ & \left. - \frac{A}{(ab)^2} \ln\left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \right\}. \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

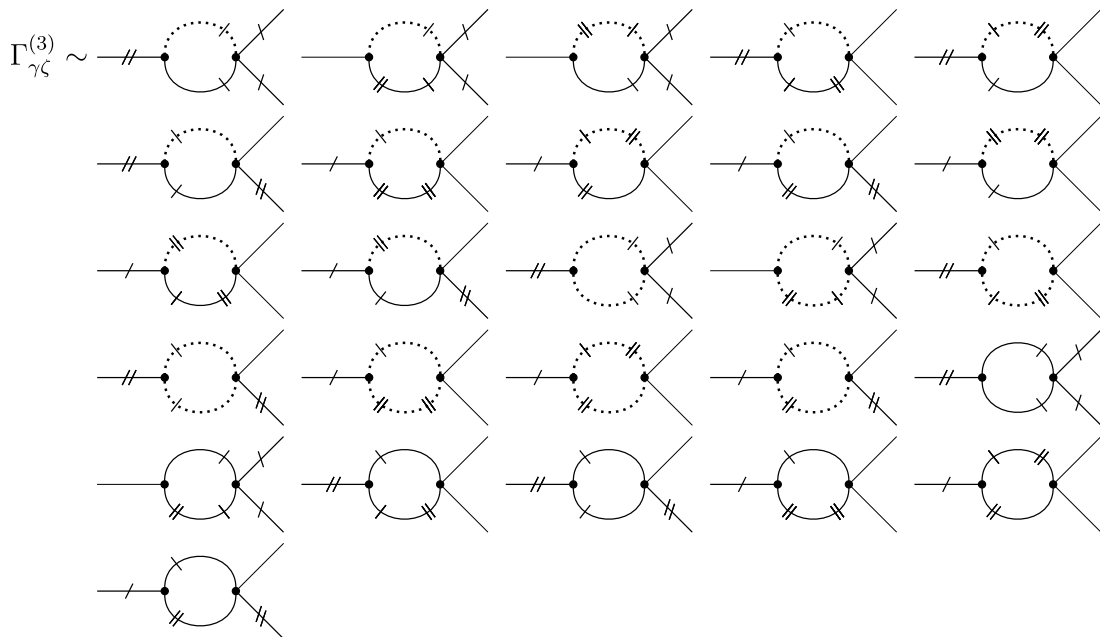


## CORREÇÕES DE 1-LOOP PARA OS VÉRTICES DE TRÊS E QUATRO PONTOS.

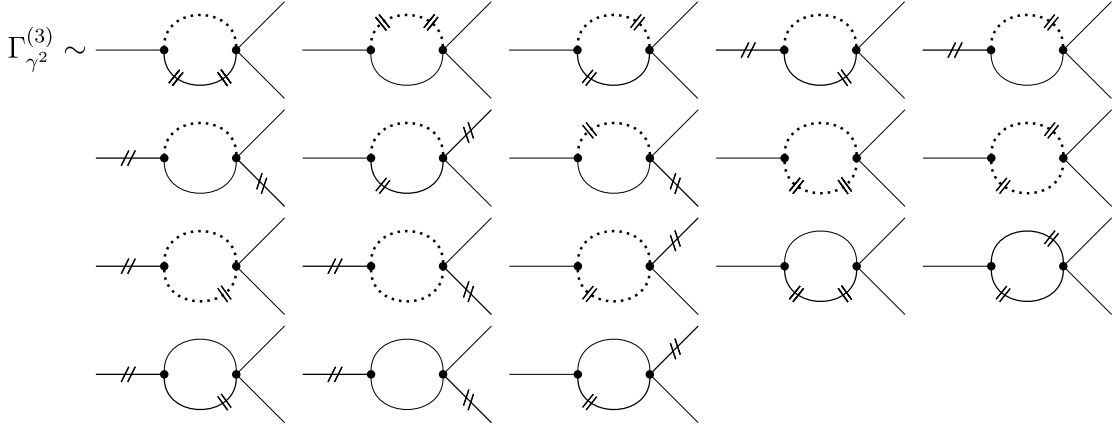
Este apêndice é dedicado às correções quânticas dos vértices na ordem de 1-loop. No caso da função de três pontos, as correções relevantes estão associadas aos diagramas nas Figuras D.1, D.2 e D.3.



**Figura D.1:** Diagramas para a função de três pontos com o vértice de interação  $\zeta^2$ .



**Figura D.2:** Diagramas para a função de três pontos com o vértice de interação  $\gamma\zeta$ .



**Figura D.3:** Diagramas para a função de três pontos com o vértice de interação  $\gamma^2$ .

No cenário da regularização dimensional, essas correções são dadas pelas seguintes integrais,

$$\Gamma_{\zeta^2}^{(3)}(p, r)|^{(2\omega)} = -\frac{4\zeta^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\zeta^2}^{(3,4)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - M^2]} - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right\} + \text{contribuições dos canais } t \text{ e } u, \quad (\text{D.1})$$

$$\Gamma_{\gamma\zeta}^{(3)}(p, r)|^{(2\omega)} = \frac{2\gamma\zeta}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \left[ \Gamma_{\gamma\zeta}^{(3,4)} + \Gamma_{\zeta\gamma}^{(3,4)} \right] \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - M^2]} - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right\} + \text{contribuições dos canais } t \text{ e } u \quad (\text{D.2})$$

e

$$\Gamma_{\gamma^2}^{(3)}(p, r)|^{(2\omega)} = -\frac{\gamma^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\gamma^2}^{(3,4)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - M^2]} - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k-p)^2 - M^2]} \right\} + \text{contribuições dos canais } t \text{ e } u, \quad (\text{D.3})$$

onde as combinações dos fatores de vértice (para os diagramas do canal  $s$ ) são

$$\begin{aligned} \Gamma_{\zeta^2}^{(3,4)} &= -2[k^2(p \cdot r) - k^2r^2 - 2(k \cdot p - k \cdot r)(p \cdot r - k \cdot r) - p^2(k \cdot r) + r^2(k \cdot p)] \\ &\quad \times [(p \cdot k)^2 - p^2k^2], \\ \Gamma_{\gamma\zeta}^{(3,4)} + \Gamma_{\zeta\gamma}^{(3,4)} &= 4[(k \cdot p)^2 - k^2p^2](k^2 - k \cdot p + p^2 - p \cdot r + r^2) - 2[k^2(p \cdot r - r^2) \\ &\quad - p^2(k \cdot r) - 2(k \cdot r)(k \cdot r - p \cdot r) + r^2(k \cdot p) + 2(k \cdot p)(k \cdot r - p \cdot r)] \\ &\quad \times (k^2 - k \cdot p + p^2), \\ \Gamma_{\gamma^2}^{(3,4)} &= 4[k^2 - (k \cdot p) + p^2](k^2 - k \cdot p + p^2 - p \cdot r + r^2). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Tomando essas integrais, pode-se escrever as contribuições para a função de três pontos como

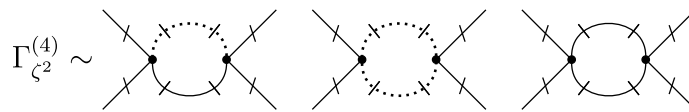
$$\begin{aligned} \Gamma_{\zeta^2}^{(3)}(p, r) = & \frac{i\zeta^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 20[(p \cdot r)^2 - p^2 r^2] \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] + \alpha_{\zeta^2}^{(3)}(p, r) \ln(1 + 4b) \right. \\ & + \xi_{\zeta^2}^{(3)}(p, r) + \left[ \beta_{\zeta^2, \text{light}}^{(3)}(p, r) \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) + \beta_{\zeta^2, \text{ghost}}^{(3)}(p, r) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) \right. \\ & \left. \left. + \beta_{\zeta^2, \text{mixed}}^{(3)}(p, r) \ln\left[\frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2}\right] + (p \leftrightarrow -r) + (p \leftrightarrow r-p) \right] \right\}, \quad (\text{D.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\zeta}^{(3)}(p, r) = & -\frac{i\gamma\zeta}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 6[p^2 + r^2 - (p \cdot r)] \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] + \alpha_{\gamma\zeta}^{(3)}(p, r) \ln(1 + 4b) \right. \\ & + \xi_{\gamma\zeta}^{(3)}(p, r) + \left[ \beta_{\gamma\zeta, \text{light}}^{(3)}(p, r) \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) + \beta_{\gamma\zeta, \text{ghost}}^{(3)}(p, r) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) \right. \\ & \left. \left. + \beta_{\gamma\zeta, \text{mixed}}^{(3)}(p, r) \ln\left[\frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2}\right] + (p \leftrightarrow -r) + (p \leftrightarrow r-p) \right] \right\}, \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

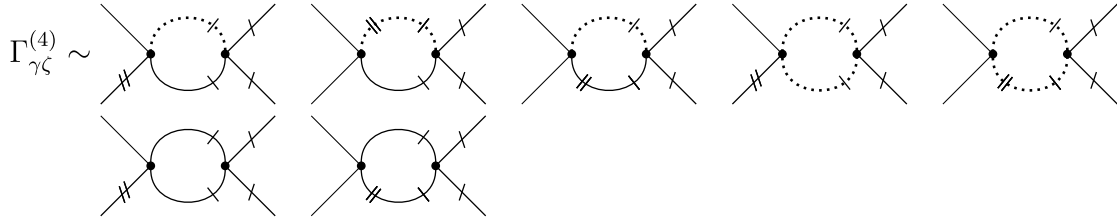
$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma^2}^{(3)}(p, r) = & \frac{i\gamma^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 12 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] + \alpha_{\gamma^2}^{(3)}(p, r) \ln(1 + 4b) + 18 \right. \\ & + \left[ \beta_{\gamma^2, \text{mixed}}^{(3)}(p, r) \ln\left[\frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2}\right] + \beta_{\gamma^2, \text{light}}^{(3)}(p, r) \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right) \right. \\ & \left. \left. + \beta_{\gamma^2, \text{ghost}}^{(3)}(p, r) \ln\left(\frac{1+d}{1-d}\right) + (p \leftrightarrow -r) + (p \leftrightarrow r-p) \right] \right\}, \quad (\text{D.7}) \end{aligned}$$

onde  $\alpha$ 's,  $\beta$ 's e  $\xi$ 's são coeficientes com dependências polinomiais nos momentos externos. A forma explícita completa dessas expressões é muito volumosa e, portanto, não será apresentada aqui. Por outro lado, uma vez que são polinômios, as contribuições correspondentes são locais e essa expressão explícita não é realmente importante para a análise do desacoplamento. As notações  $a, b, A, c, d$  são definidas nas equações (4.32), (4.33) e (4.34).

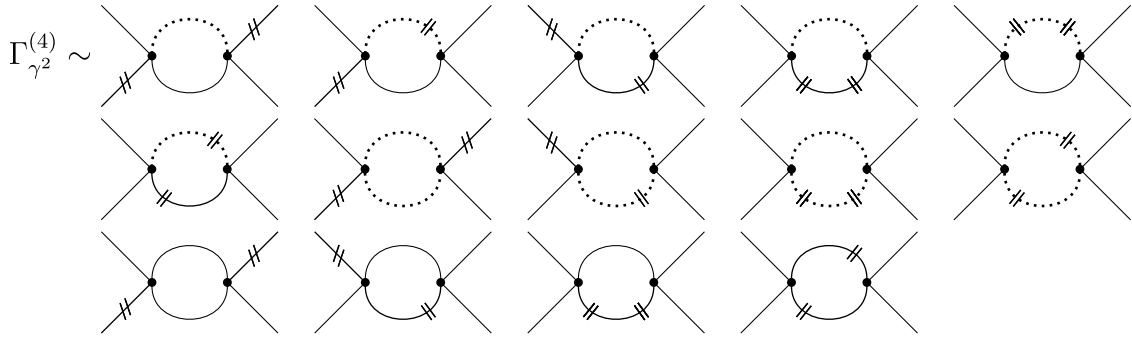
É importante que as partes mais essenciais e não locais das expressões tenham estruturas logarítmicas padrão, similares às já avaliadas na seção 4.3. Portanto, é de se esperar que as correções acima apresentem comportamento assintótico no IR, similar ao caso das correções do propagador consideradas na parte principal do capítulo 4. De fato, é possível verificar o desacoplamento quadrático do modo pesado nas contribuições para o vértice de três pontos. Além disso, o mesmo comportamento é observado nas correções do vértice de quatro pontos. Neste caso, os diagramas de interesse são mostrados nas Figuras D.4, D.5 e D.6.



**Figura D.4:** Diagramas para a função de quatro pontos com o vértice de interação  $\zeta^2$ .



**Figura D.5:** Diagramas para a função de quatro pontos com o vértice de interação  $\gamma\zeta$ .



**Figura D.6:** Diagramas para a função de quatro pontos com o vértice de interação  $\gamma^2$ .

As expressões analíticas correspondentes a esses diagramas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{\zeta^2}^{(4)}(p, r, q)|^{(2\omega)} &= -\frac{8\zeta^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\zeta^2}^{(4,4)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\ &\quad + \text{contribuições dos canais } t \text{ e } u \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\zeta}^{(4)}(p, r, q)|^{(2\omega)} &= \frac{4\gamma\zeta}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\gamma\zeta}^{(4,4)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\ &\quad + \text{contribuições dos canais } t \text{ e } u, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma^2}^{(4)}(p, r, q)|^{(2\omega)} &= -\frac{2\gamma^2}{\theta^4(m^2 - M^2)^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Gamma_{\gamma^2}^{(4,4)} \left\{ \frac{2}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k - p)^2 - m^2]} - \frac{1}{(k^2 - M^2)[(k - p)^2 - M^2]} \right\} \\ &\quad + \text{contribuições dos canais } t \text{ e } u, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

onde, para os diagramas do canal  $s$ ,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\zeta^2}^{(4,4)} &= [r^2(k \cdot q) - k^2(r \cdot q) + 2(k \cdot q)(r \cdot q) + q^2(k \cdot r) - 2(k \cdot r)(k \cdot q - r \cdot q)] \\
&\quad \times [k^2(p^2 - p \cdot r - p \cdot q) - p^2(k \cdot r + k \cdot q) + 2(k \cdot r + k \cdot q)(p \cdot r + p \cdot q) \\
&\quad + (r^2 + q^2)(k \cdot p) - 2(k \cdot p)(k \cdot r + k \cdot q + p \cdot r + p \cdot q - r \cdot q) + 2(k \cdot p)^2], \\
\Gamma_{\gamma\zeta}^{(4,4)} &= -2[k^2(r \cdot q) - r^2(k \cdot q) - 2(k \cdot q)(r \cdot q) + 2(k \cdot r)(k \cdot q - r \cdot q) - q^2(k \cdot r)] \\
&\quad \times [k^2 - k \cdot r - k \cdot q + p^2 - p \cdot r - p \cdot q + r^2 + 2(r \cdot q) + q^2], \\
\Gamma_{\gamma^2}^{(4,4)} &= 4[k^2 - k \cdot r - k \cdot q + p^2 - p \cdot r - p \cdot q + r^2 + 2(r \cdot q) + q^2] \\
&\quad \times (k^2 - k \cdot r - k \cdot q + r^2 + r \cdot q + q^2). \tag{D.11}
\end{aligned}$$

As expressões analíticas das correções do vértice de quatro pontos envolvendo os acoplamentos  $\zeta^2$ ,  $\gamma\zeta$  e  $\gamma^2$  são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\zeta^2}^{(4)}(p, r, q) &= -\frac{i\zeta^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 20[p^2(r \cdot q) - r^2(p \cdot q) - 2(p \cdot q)(r \cdot q) - q^2(p \cdot r) \right. \\
&\quad + 2(p \cdot r)(p \cdot q - r \cdot q)] \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] + \alpha_{\zeta^2}^{(4)}(p, r, q) \ln(1 + 4b) \\
&\quad + \beta_{\zeta^2, \text{mixed}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow r+q} + \xi_{\zeta^2}^{(4)}(p, r, q) \\
&\quad + \beta_{\zeta^2, \text{light}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r+q} + \beta_{\zeta^2, \text{ghost}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r+q} \\
&\quad + \beta_{\zeta^2, \text{light}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow q-p} + \beta_{\zeta^2, \text{ghost}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow q-p} \\
&\quad + \beta_{\zeta^2, \text{mixed}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow q-p} \\
&\quad + \beta_{\zeta^2, \text{light}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r-p} + \beta_{\zeta^2, \text{ghost}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \\
&\quad \left. + \beta_{\zeta^2, \text{mixed}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \right\}, \tag{D.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\gamma\zeta}^{(4)}(p, r, q) = & \frac{i\gamma\zeta}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 12(p \cdot r + p \cdot q - r \cdot q) \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] + \xi_{\gamma\zeta}^{(4)}(p, r, q) \right. \\
& + \alpha_{\gamma\zeta}^{(4)}(p, r, q) \ln(1 + 4b) + \beta_{\gamma\zeta, \text{light}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r+q} \\
& + \beta_{\gamma\zeta, \text{mixed}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow r+q} \\
& + \beta_{\gamma\zeta, \text{ghost}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r+q} + \beta_{\gamma\zeta, \text{light}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow q-p} \\
& + \beta_{\gamma\zeta, \text{mixed}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow q-p} \\
& + \beta_{\gamma\zeta, \text{ghost}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow s-p} + \beta_{\gamma\zeta, \text{light}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \\
& + \beta_{\gamma\zeta, \text{mixed}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \\
& \left. + \beta_{\gamma\zeta, \text{ghost}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \right\} \tag{D.13}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\gamma^2}^{(4)}(p, r, q) = & \frac{i\gamma^2}{(4\pi)^2\theta^4} \left\{ 24 \left[ \frac{1}{\epsilon} + \ln \left( \frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] + \alpha_{\gamma^2}^{(4)}(p, r, q) \ln(1 + 4b) + 36 \right. \\
& + \beta_{\gamma^2, \text{light}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r+q} + \beta_{\gamma^2, \text{ghost}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r+q} \\
& + \beta_{\gamma^2, \text{mixed}}^{(4, s)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow r+q} \\
& + \beta_{\gamma^2, \text{light}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow q-p} + \beta_{\gamma^2, \text{ghost}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow q-p} \\
& + \beta_{\gamma^2, \text{mixed}}^{(4, t)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow q-p} \\
& + \beta_{\gamma^2, \text{light}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+c}{1-c} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r-p} + \beta_{\gamma^2, \text{ghost}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left( \frac{1+d}{1-d} \right) \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \\
& \left. + \beta_{\gamma^2, \text{mixed}}^{(4, u)}(p, r, q) \ln \left[ \frac{(A+1)^2 - (ab)^2}{(A-1)^2 - (ab)^2} \right] \Big|_{p \leftrightarrow r-p} \right\}. \tag{D.14}
\end{aligned}$$

Os índices nos coeficientes  $\beta^{(4)}(p, r, q)$  denotam contribuições dos canais  $s$ ,  $t$  e  $u$ .

É fácil notar que essas expressões concordam qualitativamente com as correções de autoenergia e dos vértices de três pontos.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. 't Hooft and M.J.G. Veltman, *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. **A20** (1974) 69.
- [2] M.H. Goroff and A. Sagnotti, *Quantum gravity at two loops*, Phys. Lett. **B160** (1985) 81.
- [3] A.E.M. van de Ven, *Two-loop quantum gravity*, Nucl. Phys. **B378** (1992) 309.
- [4] K.S. Stelle, *Renormalization of higher derivative quantum gravity*, Phys. Rev. **D16** (1977) 953.
- [5] L. Modesto and I.L. Shapiro, *Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts*, Phys. Lett. **B755** (2016) 279, arXiv:1512.07600.
- [6] L. Modesto, *Super-renormalizable or finite Lee-Wick quantum gravity*, Nucl. Phys. **B909** (2016) 584, arXiv:1602.02421.
- [7] R.P. Woodard, *The Theorem of Ostrogradsky*, arXiv:1506.02210.
- [8] F.O. Salles and I.L. Shapiro, *Do we have unitary and (super)renormalizable quantum gravity below the Planck scale?*, Phys. Rev. **D89** (2014) 084054, [Erratum: Phys. Rev. **D90** (2014) 129903], arXiv:1401.4583;  
*Gravitational waves and perspectives for quantum gravity*, Mod. Phys. Lett. **A29** (2014) 1430034, arXiv:1410.2581.
- [9] D. M. Capper, M. J. Duff and L. Halpern, *Photon corrections to the graviton propagator*, Phys. Rev. **D10** (1974) 461.
- [10] D. M. Capper and M. J. Duff, *Neutrino corrections to the graviton propagator*, Nucl. Phys. **B82** (1974) 147.
- [11] M.J. Duff, *Observations On Conformal Anomalies*, Nucl.Phys. **B125** (1977) 334.
- [12] S. Deser, M.J. Duff and C. Isham, *Nonlocal conformal anomalies*, Nucl. Phys. **B111** (1976) 45.
- [13] M.J. Duff, *Twenty years of the Weyl anomaly*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1387, arXiv:hep-th/9308075.
- [14] R.J. Riegert, *A non-local action for the trace anomaly*, Phys. Lett. **B134** (1984) 56.
- [15] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories*, Phys. Lett. **B134** (1984) 187.

- 
- [16] I. Antoniadis and E. Mottola, *Four-dimensional quantum gravity in the conformal sector*, Phys. Rev. **D45** (1992) 2013.
- [17] I.L. Shapiro, *Effective action of vacuum: semiclassical approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001, arXiv:0801.0216.
- [18] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (CRC Press, 2019).
- [19] W.A. Bardeen, *On naturalness in the standard model*, FERMILAB-CONF-95-391-T.
- [20] K.A. Meissner and H. Nicolai, *Conformal symmetry and the Standard Model*, Phys. Lett. **B648** (2007) 312, arXiv:hep-th/0612165.
- [21] J. Elias-Miro, J.R. Espinosa, G.F. Giudice, G. Isidori, A. Riotto and A. Strumia, *Higgs mass implications on the stability of the electroweak vacuum*, Phys. Lett. **B709** (2012) 222, arXiv:1112.3022.
- [22] M. Holthausen, K.S. Lim and M. Lindner, *Planck scale boundary conditions and the Higgs mass*, JHEP **02** (2012) 037, arXiv:1112.2415.
- [23] J. Elias-Miro, J.R. Espinosa, G.F. Giudice, H.M. Lee and A. Strumia, *Stabilization of the Electroweak Vacuum by a Scalar Threshold Effect*, JHEP **06** (2012) 031, arXiv:1203.0237.
- [24] D. Anselmi and M. Piva, *Quantum gravity, fakeons and microcausality*, JHEP **11** (2018) 021, arXiv:1806.03605.
- [25] J.F. Donoghue and G. Menezes, *Unitarity, stability, and loops of unstable ghosts*, Phys. Rev. **D100** (2019) 105006, arXiv:1908.02416.
- [26] I.T. Drummond and G.M. Shore, *Conformal anomalies for interacting scalar fields in curved spacetime*, Phys. Rev. **D19** (1979) 1134.
- [27] S.J. Hathrell, *Trace anomalies and  $\lambda\phi^4$  theory in curved space*, Annals of Phys. **139** (1982) 136.
- [28] M.A. Valle and M.A. Goni, *Conformal transformation of the one-loop effective action for  $\lambda\phi^4$  theory*, Phys. Rev. **D36** (1987) 615.
- [29] M.S. Alves and J. Barcelos-Neto, *Path Integrals and the Trace Anomaly in a Self-Interacting Scalar Theory*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 115.
- [30] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space*, JHEP **02** (2003) 021, arXiv:hep-ph/0210388.
- [31] I.L. Shapiro and J. Solà, *On the possible running of the cosmological “constant”*, Phys. Lett. **B682** (2009) 105, hep-th/0910.4925.
- [32] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared singularities and massive fields*, Phys. Rev. **D11** (1975) 2856.



- [33] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space, II. The standard model and beyond*, JHEP **06** (2003) 004, arXiv:hep-ph/0303124.
- [34] A. Codello and O. Zanusso, *On the non-local heat kernel expansion*, J. Math. Phys. **54** (2013) 013513, arXiv:1203.2034.
- [35] S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, I.L. Shapiro, and O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity*, Phys. Lett. **B790** (2019) 229, arXiv:1812.00460.
- [36] S. A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, and O. Zanusso, *Vacuum effective actions and mass-dependent renormalization in curved space*, Universe **5** (2019) 67, arXiv:1902.03167.
- [37] S.A. Franchino-Viñas, *Resummed heat-kernel for surface contributions: Dirichlet semitransparent boundary conditions*, arXiv:2208.11979.
- [38] G. de Berredo-Peixoto, E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281, arXiv:hep-th/0311229.
- [39] S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Perturbative approach to induced quantum gravity*, Class. Quant. Grav. **8** (1991), L57-60.
- [40] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity* (Oxford University Press, 2021).
- [41] M. Asorey, J.L. López and I.L. Shapiro, *Some remarks on high derivative quantum gravity*, Int. Journ. Mod. Phys. **A12** (1997) 5711, arXiv:hep-th/9610006.
- [42] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Nucl. Phys. **B201** (1982) 469.
- [43] I.G. Avramidi and A.O. Barvinsky, *Asymptotic freedom In higher derivative quantum gravity*, Phys. Lett. **B159** (1985) 269.
- [44] I.L. Shapiro and A.G. Jacksenaev, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. **B324** (1994) 286.
- [45] L. Modesto, L. Rachwał and I.L. Shapiro, *Renormalization group in super-renormalizable quantum gravity*, Eur. Phys. J. **C78** (2018) 555, arXiv:1704.03988.
- [46] J.F. Donoghue, *Leading quantum correction to the Newtonian potential*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 2996, arXiv:gr-qc/9310024;  
*General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections*, Phys. Rev. **D50** (1994) 3874, arXiv:gr-qc/9405057.
- [47] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Higher derivative quantum gravity with Gauss-Bonnet term*, Phys. Rev. **D71** (2005) 064005, arXiv:hep-th/0412249.

- 
- [48] I.L. Shapiro, *Polemic notes on IR perturbative quantum gravity*, Int. J. Mod. Phys. **A24** (2009) 1557, arXiv:arXiv:0812.3521.
- [49] P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1993).
- [50] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press Inc., New York, 2008).
- [51] Yu. Baryshev and P. Teerikorpi, *Fundamental Questions of Practical Cosmology* (Springer Verlag, Dordrecht, 2012).
- [52] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure* (Wiley-VCH, Second edition, 2002).
- [53] R. C. Tolman, *On the problem of the entropy of the Universe as a whole*, Phys. Rev. **37** (1931) 1639.
- [54] T. Ruzmaikina and A.A. Ruzmaikin, *Quadratic corrections to the Lagrangian density of the gravitational field and the singularity*, JETP **30** (1970) 372.
- [55] A.A. Starobinsky, *On a singular isotropic cosmological model*, Sov. Astron. Lett. **4** (1978) 82.
- [56] M. Novello and S.E.P. Bergliaffa, *Bouncing cosmologies*, Phys. Rept. **463** (2008) 127, arXiv:0802.1634.
- [57] D. Battefeld and P. Peter, *A Critical review of classical bouncing cosmologies*, Phys. Rept. **571** (2015) 1, arXiv:1406.2790.
- [58] T. Biswas, A.S. Koshelev, A. Mazumdar and S.Y. Vernov, *Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology*, JCAP **08** (2012) 024, arXiv:1206.6374.
- [59] A.S. Koshelev, *Stable analytic bounce in non-local Einstein-Gauss-Bonnet cosmology*, Class. Quant. Grav. **30** (2013) 155001, arXiv:1302.2140.
- [60] J.C. Fabris, A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action for gravity and inflation*, Grav. Cosmol. **6** (2000) 59, arXiv:gr-qc/9810032; Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **95** (2001) 78, arXiv:gr-qc/9810032.
- [61] W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Bounce and Stability in the Early Cosmology with Anomaly-Induced Corrections*, Symmetry **13** (2021) 50, arXiv:2012.10554.
- [62] W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Semiclassical bounce with strong minimal assumptions*, Phys. Rev. **D110** (2024) 043540, arXiv:2402.18785.
- [63] M.V. Fischetti, J.B. Hartle and B.L. Hu, *Quantum effects in the early universe. I. Influence of trace anomalies on homogeneous, isotropic, classical geometries*, Phys. Rev. **D20** (1979) 1757.
- [64] A.A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. **B91** (1980) 99.

- [65] A.D. Dolgov, *Breaking of conformal invariance and electromagnetic field generation in the Universe*, Phys. Rev. **D48** (1993) 2499.
- [66] S. Deser and R.I. Nepomechie, *Gauge invariance versus masslessness in de Sitter space*, Annals Phys. **154** (1984) 396.
- [67] T. P. Branson, *Differential operators canonically associated to a conformal structure*, Math. Scand. **57** (1985) 293.
- [68] H. Osborn and A.C. Petkou, *Implications of conformal invariance in field theories for general dimensions*, Annals Phys. **231** (1994) 311, arXiv:hep-th/9307010.
- [69] J. Erdmenger, *Conformally covariant differential operators: Properties and applications*, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 2061, arXiv:hep-th/9704108.
- [70] J. Erdmenger and H. Osborn, *Conserved currents and the energy momentum tensor in conformally invariant theories for general dimensions*, Nucl. Phys. **B483** (1997) 431, arXiv:hep-th/9605009;  
*Conformally covariant differential operators: Symmetric tensor fields*, Class. Quant. Grav. **15** (1998) 273, arXiv:gr-qc/9708040.
- [71] H. Osborn and A. Stergiou,  $C_T$  for non-unitary CFTs in higher dimensions, JHEP **06** (2016) 079, arXiv:hep-th/1603.07307.
- [72] M. Asorey, W.C. e Silva, I.L. Shapiro and P.R.B. do Vale, *Trace anomaly and induced action for a metric-scalar background*, Eur. Phys. J. **C83** (2023) 157, arXiv:2202.00154.
- [73] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).
- [74] R. Utiyama and B.S. DeWitt, *Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields*, J. Math. Phys. **3** (1962) 608.
- [75] Ya.B. Zeldovich and A.A. Starobinsky, *Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field*, Sov. Phys. JETP **34** (1971) 1159; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61** (1971) 2161 (em Russo).
- [76] T.S. Bunch and L. Parker, *Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation*, Phys. Rev. **D20** (1979) 2499.
- [77] L. Parker and D.J. Toms, *Renormalization-group analysis of grand unified theories in curved spacetime*, Phys. Rev. **D29** (1984) 1584.
- [78] A.Z. Petrov, *Einstein Spaces* (Pergamon Press, Oxford, 1969).
- [79] I.L. Shapiro, *A Primer in Tensor Analysis and Relativity* (Springer, NY, 2019).
- [80] J. Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664.

- [81] B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Gordon and Breach, 1965).
- [82] B.S. DeWitt, *The Global Approach to Quantum Field Theory* (Clarendon Press, Oxford, Vol.1 and Vol.2 - 2003).
- [83] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity*, Phys. Repts. **119** (1985) 1.
- [84] I.L. Buchbinder, *On Renormalization group equations in curved space-time*, Theor. Math. Phys. **61** (1984) 393.
- [85] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- [86] M. Asorey, E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Universality and ambiguities of the conformal anomaly*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 163, arXiv:hep-th/0307187.
- [87] B.L. Voronov and I.V. Tyutin, *Models of asymptotically free massive fields*, Yad. Fiz. **23** (1976) 664.
- [88] I.L. Buchbinder, I.L. Shapiro and E.G. Yagunov, *The asymptotically free and asymptotically conformal invariant Grand Unification theories in curved space-time*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1599.
- [89] Y. Yoon and Y. Yoon, *Asymptotic conformal invariance of SU(2) and standard models in curved space-time*, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 2903, arXiv:hep-th/9612001.
- [90] S. Deser and A. Schwimmer, *Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions*, Phys. Lett. **B309** (1993) 279, arXiv:hep-th/9302047.
- [91] F.M. Ferreira and I.L. Shapiro, *Integration of trace anomaly in 6D*, Phys. Lett. **B772** (2017) 174, arXiv:1702.06892.
- [92] M.G. Eastwood and M. Singer, *A conformally invariant Maxwell gauge*, Phys. Lett. **A107** (1985) 73.
- [93] J. Quéva, *A conformally invariant gauge fixing equation and a field strength for the symmetric traceless field over four dimensional conformally flat Einstein spacetimes*, arXiv:1505.02106.
- [94] S. Paneitz, *A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo Riemannian manifolds*, MIT preprint - 1983; SIGMA **4** (2008) 036, arXiv:0803.4331.
- [95] M. Asorey, L. Rachwał, I.L. Shapiro and W.C. e Silva, *On the vector conformal models in an arbitrary dimension*, EPJ Plus **136** (2021) 1043, arXiv:2107.13125.
- [96] S. Deser, *Scale invariance and gravitational coupling*, Ann.Phys. (NY) **59** (1970) 248.
- [97] B. Ørsted, *Conformally invariant differential equations and projective geometry*, Journal of Functional Analysis **44** (1981) 1.

- [98] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the renormalization of models of quantum field theory in an external gravitational field with torsion*, Phys. Lett. **B151** (1985) 263.
- [99] I.L. Shapiro, *Physical aspects of the space-time torsion*, Phys. Rep. **357** (2002) 113, arXiv:hep-th/0103093.
- [100] I. L. Shapiro and H. Takata, *Conformal transformation in gravity*, Phys. Lett. **B361** (1995) 31, arXiv:hep-th/9504162.
- [101] I.L. Shapiro and Joan Solà, *Massive fields temper anomaly-induced inflation: the clue to graceful exit?*, Phys. Lett. **B530** (2002) 10, arXiv:hep-ph/0104182.
- [102] A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and F.I. Takakura, *On the stability of the anomaly-induced inflation*, Nucl. Phys. **B648** (2003) 417, arXiv:hep-ph/0208184.
- [103] R. Percacci, *Renormalization group flow of Weyl invariant dilaton gravity*, New J. Phys. **13** (2011) 125013, arXiv:1110.6758.
- [104] A. Codello, G. D’Odorico, C. Pagani and R. Percacci, *The Renormalization Group and Weyl-invariance*, Class. Quant. Grav. **30** (2013) 115015, arXiv:1210.3284.
- [105] M. Novello, *Scalar and Massless Vector Fields in Cartan Space*, Phys. Lett. **A59** (1976) 105.
- [106] S. Hojman, M. Rosenbaum and M.P. Ryan, *Gauge invariance, minimal coupling and torsion*, Phys. Rev. **D17** (1978) 3141.
- [107] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin and P.K. Townsend, *A non-linear duality-invariant conformal extension of Maxwell’s equations*, Phys. Rev. **D102** (2020) 121703, arXiv:2007.09092.
- [108] D.C. Rodrigues, F. de O. Salles, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *Auxiliary fields representation for modified gravity models*, Phys. Rev. **D83** (2011) 084028, arXiv:1101.5028.
- [109] M. Hassaine and C. Martinez, *Higher-dimensional black holes with a conformally invariant Maxwell source*, Phys. Rev. **D75** (2007) 027502, arXiv:hep-th/0701058.
- [110] Y. Li and Y.G. Miao, *Distinct thermodynamic and dynamic effects produced by scale factors in conformally related Einstein-power-Yang-Mills black holes*, Phys. Rev. **D104** (2021) 024002, arXiv:2102.12292.
- [111] J. Jing, Q. Pan and S. Chen, *Holographic Superconductors with Power-Maxwell field*, JHEP **11** (2011) 045, arXiv:1106.5181.
- [112] M. Asorey, G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Renormalization ambiguities and conformal anomaly in metric-scalar backgrounds*, Phys. Rev. **D74** (2006) 124011, arXiv:hep-th/0609138.
- [113] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B207** (1981) 211.
- [114] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Nonsingular cosmological model with torsion induced by vacuum quantum effects*, Phys. Lett. **B162** (1985) 92.

- [115] J.A. Helayel-Neto, A. Penna-Firme and I.L. Shapiro, *Conformal symmetry, anomaly and effective action for metric-scalar gravity with torsion*, Phys. Lett. **B479** (2000) 411, arXiv:gr-qc/9907081.
- [116] S. Mauro and I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action and Chern-Simons modification of general relativity*, Phys. Lett. **B746** (2015) 372, arXiv:1412.5002.
- [117] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Asymptotic freedom on extended conformal supergravities*, Phys. Lett. **B110** (1982) 117;  
*One-loop beta function in conformal supergravities*, Nucl. Phys. **B203** (1982) 157.
- [118] P.O. Mazur and E. Mottola, *Weyl cohomology and the effective action for conformal anomalies*, Phys. Rev. **D64** (2001) 104022, arXiv:hep-th/0106151.
- [119] E. Mottola, *Scalar gravitational waves in the effective theory of gravity*, JHEP **07** (2017) 043; Erratum: JHEP **09** (2017) 107, arXiv:1606.09220.
- [120] M. Giannotti and E. Mottola, *Trace anomaly and massless scalar degrees of freedom in gravity*, Phys. Rev. **D79** (2009) 045014, arXiv:0812.0351.
- [121] A.A. Slavnov, *The Pauli-Villars regularization for nonabelian gauge theories*, Theor. Math. Phys. **33** (1977) 210.
- [122] M. Asorey and F. Falceto, *Geometric regularization of gauge theories*, Nucl. Phys. **B327** (1989) 427.
- [123] T.D. Bakeyev and A.A. Slavnov, *Higher covariant derivative regularization revisited*, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 1539, arXiv:hep-th/9601092.
- [124] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms*, Nucl. Phys. **B333** (1990) 471.
- [125] I.G. Avramidi, *Covariant methods of study on the nonlocal structure of effective action*, Yad. Fiz. (Sov. Journ. Nucl. Phys.) **49** (1989) 1185.
- [126] S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, I.L. Shapiro and O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity*, Phys. Lett. **B790** (2019) 229, arXiv:1812.00460.
- [127] K.A. Meissner and H. Nicolai, *Effective action, conformal anomaly and the issue of quadratic divergences*, Phys. Lett. **B660** (2008) 260, arXiv:hep-th/0710.2840.
- [128] A. Codello and O. Zanusso, *On the non-local heat kernel expansion*, J. Math. Phys. **54** (2013) 013513, arXiv:1203.2034.
- [129] A.O. Barvinsky, Y.V. Gusev, G.A. Vilkovisky and V.V. Zhytnikov, *The one loop effective action and trace anomaly in four-dimensions*, Nucl. Phys. **B439** (1995) 561, arXiv:hep-th/9404187.

- [130] A.O. Barvinsky, A.G. Mirzabekian and V.V. Zhytnikov, *Conformal decomposition of the effective action and covariant curvature expansion*, arXiv:gr-qc/9510037.
- [131] I.L. Buchbinder, G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Quantum effects in softly broken gauge theories in curved spacetimes*. Phys. Lett. **B649** (2007) 454, arXiv:hep-th/0703189.
- [132] L.S. Brown and J.C. Collins, *Dimensional renormalization of scalar field theory in curved space-time*, Ann. Phys. **130** (1980) 215.
- [133] E. Mottola and R. Vaulin, *Macroscopic effects of the quantum trace anomaly*, Phys. Rev. **D74** (2006) 064004, arXiv:gr-qc/0604051.
- [134] A.A. Starobinsky, *The perturbation spectrum evolving from a nonsingular initially de-Sitter cosmology and the microwave background anisotropy*, Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302.
- [135] T.d.P. Netto, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation*, Eur. Phys. J. **C76** (2016) 544, arXiv:1509.08882.
- [136] S. Deser and R.P. Woodard, *Nonlocal Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 111301, arXiv:astro-ph/0706.2151.
- [137] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space 3. The case of spontaneous symmetry breaking*, JHEP **02** (2004) 060, arXiv:hep-ph/0311190.
- [138] M. Maggiore, L. Hollenstein, M. Jaccard and E. Mitsou, *Early dark energy from zero-point quantum fluctuations*. Phys. Lett. **B704** (2011) 102, arXiv:arXiv:1104.3797.
- [139] S.R. Coleman and E.J. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. **D7** (1973) 1888.
- [140] I.L. Buchbinder and J.J. Wolfengaut, *Renormalization group equations and effective action in curved space-time*, Class. Quant. Grav. **5** (1988) 1127.
- [141] W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Effective approach to the Antoniadis-Mottola model: quantum decoupling of the higher derivative terms*, JHEP **2023** (2023) 97, arXiv:2301.13291.
- [142] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B103** (1981) 207.
- [143] I.L. Shapiro and G. Cognola, *Interaction of low-energy induced gravity with quantized matter and phase transition induced to curvature*, Phys. Rev. **D51** (1995) 2775, arXiv:hep-th/9406027.
- [144] I. Antoniadis, P.O. Mazur and E. Mottola, *Physical states of the quantum conformal factor*, Phys. Rev. **D55** (1997) 4770, arXiv:hep-th/9509169.
- [145] I. Antoniadis and S.D. Odintsov, *Renormalization group and logarithmic corrections to scaling relations in the conformal sector of 4D gravity*, Phys. Lett. **B343** (1995) 76, arXiv:hep-th/9411012.
- [146] B. Holdom, *Running couplings and unitarity in a 4-derivative scalar field theory*, Phys. Lett. **B843** (2023) 138023, arXiv:2303.06723.

- [147] P. Creminelli, A. Nicolis, M. Papucci and E. Trincherini, *Ghosts in massive gravity*, JHEP **0509** (2005) 003, arXiv:hep-th/0505147.
- [148] J. Julve and M. Tonin, *Quantum gravity with higher derivative terms*, Nuovo Cim. **B46** (1978) 137.
- [149] G. Leibbrandt, *Introduction to the Technique of Dimensional Regularization*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 849.
- [150] H.H. Patel, *Package-X: A Mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals*, Comput. Phys. Commun. **197** (2015) 276, arXiv:1503.01469.
- [151] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, (Version 12.0, Champaign, IL, 2019).
- [152] J.C. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, 1984).
- [153] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).
- [154] C.P. Burgess, *Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory*, Living Rev. Rel. **7** (2004) 5, arXiv:gr-qc/0311082.
- [155] J.F. Donoghue, *Nonlocal partner to the cosmological constant*, Phys. Rev. **D105** (2022) 10, 105025 arXiv: 2201.12217.
- [156] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Nonlocality of quantum matter corrections and cosmological constant running*, JHEP **2022** (2022) 103, arXiv:2203.09232.
- [157] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.
- [158] I.L. Shapiro, J. Solà, *Scaling behavior of the cosmological constant: Interface between quantum field theory and cosmology*, JHEP **02** (2002) 006, arXiv:hep-th/0012227.
- [159] T. Padmanabhan, *Cosmological constant—the weight of the vacuum*, Phys. Rep. **380** (2003) 235, arXiv:hep-th/0212290.
- [160] V. Sahni and A.A. Starobinsky, *Reconstructing Dark Energy*, Int. J. Mod. Phys. D **15** (2006) 2105, arXiv:astro-ph/0610026.
- [161] I. Antoniadis, P.O. Mazur and E. Mottola, *Scaling behavior of quantum four-geometries*, Phys. Lett. **B323** (1994) 284, arXiv:hep-th/9301002.
- [162] E. Elizalde, A.G. Jacksenaev, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *One-loop renormalization and asymptotic behaviour of a higher-derivative scalar theory in curved spacetime*, Phys. Letters **B328** (1994) 297, arXiv:hep-th/9402154;  
*A four-dimensional theory for quantum gravity with conformal and non-conformal explicit solutions*, Class. Quant. Grav. **12** (1995) 1385, arXiv:hep-th/9412061.



- [163] I.L. Buchbinder and A.Yu Petrov, *Quantum dynamics of  $N=1$ ,  $D=4$  supergravity chiral compensator*, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 2081, arXiv:hep-th/9511205;  
*On quantum model of supergravity compensator*, *Mod. Phys. Lett.* **A11** (1996) 2159, arXiv:hep-th/9604154.
- [164] T.G. Ribeiro and I.L. Shapiro *Scalar model of effective field theory in curved space*, *JHEP* **2019** (2019) 163, arXiv:1908.01937.
- [165] J. Solà Peracaula, *The cosmological constant problem and running vacuum in the expanding universe*, *Phil. Trans. R. Soc. A.* **380** (2022) 20210182, arXiv:2203.13757.
- [166] E. Mottola, *The effective theory of gravity and dynamical vacuum energy*, *JHEP* **2022** (2022) 37, arXiv:2205.04703.
- [167] D.J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343.
- [168] H.D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346.
- [169] A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *On the scaling rules for the anomaly-induced effective action of metric and electromagnetic field*, *Phys. Lett.* **B694** (2011) 467, arXiv:1005.1313.
- [170] M. Giannotti and E. Mottola, *The trace anomaly and massless scalar degrees of freedom in gravity*. *Phys. Rev.* **D79** (2009) 045014, arXiv:0812.0351.
- [171] R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Anomaly induced effective actions and Hawking radiation*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1494, hep-th/9904074;  
*Vacuum polarization in Schwarzschild space-time by anomaly induced effective actions*, *Nucl. Phys.* **B559** (1999) 301, arXiv:hep-th/9904162.
- [172] J.C. Fabris, A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation*, *Nucl. Phys.* **B597** (2001) 539, arXiv:hep-ph/0208184.
- [173] A.M. Pelinson and I.L. Shapiro, *On the scaling rules for the anomaly-induced effective action of metric and electromagnetic field*, *Phys. Lett.* **B694** (2011) 467, arXiv:1005.1313.
- [174] J.S. Dowker and R. Critchley, *Effective Lagrangian and energy-momentum tensor in de Sitter space*, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 3224.
- [175] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *One loop effective potential in gauged  $O(4)$  supergravity*, *Nucl. Phys.* **B234** (1984) 472.
- [176] M. Henningson and K. Skenderis, *The Holographic Weyl anomaly*, *JHEP* **07** (1998) 023, arXiv:hep-th/9806087.
- [177] I.L. Shapiro, *The graceful exit from the anomaly-induced inflation: Supersymmetry as a key*, *Int. Journ. Mod. Phys.* **D11** (2002) 1159, arXiv:hep-ph/0103128.

- [178] A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and F.I. Takakura, *Stability issues in the modified Starobinsky model*, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **127** (2004) 182, arXiv:hep-ph/0311308.
- [179] L. Parker, *Particle creation in expanding universes*, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 562; *Quantized fields and particle creation in expanding universes*, Phys. Rev. **183** (1969) 1057.
- [180] Ya. B. Zeldovich and A. A. Starobinsky, *Rate of particle production in gravitational fields*, JETP Lett. **26** (1977) 252.
- [181] A. Dobado and A.L. Maroto, *Particle production from nonlocal gravitational effective action*, Phys. Rev. **D60** (1999) 104045, arXiv:gr-qc/9803076.
- [182] R. Maier, S. Pereira, N. Pinto-Neto and B.B. Siffert, *Bouncing models with a cosmological constant*, Phys. Rev. **D85** (2012) 023508, arXiv:1111.0946.
- [183] S.A. Bludman and M.A. Ruderman, *Induced cosmological constant expected above the phase transition restoring the broken symmetry*, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 255.
- [184] P.J. Steinhardt and N. Turok, *Cosmic evolution in a cyclic universe*, Phys. Rev. **D65** (2002) 126003, arXiv:hep-th/0111098.
- [185] A. Ijjas and P.J. Steinhardt, *A new kind of cyclic universe*, Phys. Lett. **B795** (2019) 666, arXiv:1904.08022.
- [186] I. Torres, J.C. Fabris and O.F. Piattella, *Bouncing and cyclic quantum primordial universes and the ordering problem*, Class. Quantum Grav. **37** (2020) 105005, arXiv:1911.01487.
- [187] W.C. e Silva and I.L. Shapiro, *Work in progress*.
- [188] J.P.S. Melo, W.C. e Silva and J.A. Helayël-Neto, *SUSY QED with Lorentz-asymmetric fermionic matter and a glance at the electron's EDM*, arXiv:2312.11691.
- [189] A. Accioly, B.L. Giacchini and I.L. Shapiro, *On the gravitational seesaw in higher-derivative gravity*, Eur. Phys. J. **C77** (2017) 540, arXiv:gr-qc/1604.07348.
- [190] N.V. Krasnikov, *Nonlocal gauge theories*, Theor. Math. Phys. **73** (1987) 1184.
- [191] Y.V. Kuz'min, *The convergent nonlocal gravitation* (in Russian), Yad. Fiz. **50** (1989) 1630; [Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1989) 1011].
- [192] E.T. Tomboulis, *Superrenormalizable gauge and gravitational theories*, arXiv:hep-th/9702146; *Nonlocal and quasilocal field theories*, Phys. Rev. **D92** (2015) 125037, arXiv:1507.00981.
- [193] L. Modesto, *Super-renormalizable quantum gravity*, Phys. Rev. **D86** (2012) 044005, arXiv:1107.2403.
- [194] L. Modesto and L. Rachwał, *Super-renormalizable and finite gravitational theories*, Nucl. Phys. **B889** (2014) 228, arXiv:1407.8036; *Nonlocal quantum gravity: A review*, Int. J. Mod. Phys. **D26** (2017) 1730020.

- 
- [195] I.L. Shapiro, *Counting ghosts in the “ghost-free” non-local gravity*, Phys. Lett. **B744** (2015) 67, arXiv:1502.00106.
- [196] C. Molina-Paris and M. Visser, *Minimal conditions for the creation of a Friedman-Robertson-Walker universe from a “bounce”*, Phys. Lett. **B455** (1999) 90, arXiv:gr-qc/9810023.
- [197] P. Peter and N. Pinto-Neto, *Has the Universe always expanded?*, Phys.Rev. **D65** (2001) 023513, arXiv:gr-qc/0109038.
- [198] L.H. Ford, *The classical singularity theorems and their quantum loopholes*, Int. J. Theor. Phys. **42** (2003) 1219, arXiv:gr-qc/0301045.
- [199] V.A. Rubakov, *The null energy condition and its violation*, Phys. Usp. **57** (2014) 128, arXiv:1401.4024.
- [200] A. Ijjas and P.J. Steinhardt, *Classically Stable Nonsingular Cosmological Bounces*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016) 121304, arXiv:1606.08880.