POSSIBILIDADES DE EXPERIMENTOS MENTAIS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Cristiane Corrêa Amaral

Willian José da Cruz

APRESENTAÇÃO

Este material constitui o Produto Educacional, resultado da dissertação intitulada "Uma análise de obstáculos identificados por meio da aplicação de Experimentos Mentais a um grupo de licenciandos em Matemática", desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

A concepção deste material insere-se no campo da Educação Matemática e visa complementar as práticas de ensino já utilizadas pelos professores de Matemática, por meio de uma abordagem metodológica chamada Experimentos Mentais. Esta metodologia baseia-se principalmente nos trabalhos de Cruz (2024, 2023a, 2022a, 2022b, 2021a, 2021b, 2020a, 2018a), cuja fundamentação teórica é sustentada na semiótica do ponto de vista de Peirce (Cruz, 2023b, 2019, 2018b). Nos Experimentos Mentais, a representação do objeto do conhecimento é realizada por meio de diagramas, possibilitando a realização de deduções teoremáticas e abduções dentro desses diagramas. O objetivo subjacente a essa abordagem é a transformação desses diagramas, resultando em novos conceitos e/ou generalizações (Cruz, 2024).

Uma característica fundamental dos Experimentos Mentais, conforme destacado por Cruz (2019), é sua capacidade de criar e explorar contextos imaginários. Diferentemente das estruturas matemáticas tradicionais, que são tipicamente definidas de forma axiomática, formal e dedutiva, os Experimentos Mentais operam em um espaço mais flexível, onde a imaginação e a intuição desempenham papéis significativos. Isso implica uma abordagem menos restrita por regras rígidas, incentivando os envolvidos a explorar uma ampla gama de possibilidades.

O estudo de pesquisa que deu origem a este Produto Educacional identificou obstáculos de aprendizagem provenientes de diversas origens, abrangendo obstáculos epistemológicos, didáticos, ontogênicos e psicológicos, conforme delineados nos estudos de Brousseau (2002) e Almouloud (2007). Esses obstáculos foram observados durante a aplicação dos Experimentos Mentais em alunos do 9º ano do ensino fundamental do Colégio de Aplicação João XXIII e em estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora.

A razão para identificar tais obstáculos reside na importância de superar quaisquer barreiras que possam surgir no processo de aprendizagem. Como delimitação para a pesquisa, optamos por apresentar na dissertação apenas os obstáculos identificados no contexto do curso de Licenciatura em Matemática. Consequentemente, este Produto Educacional é composto por atividades previamente aplicadas, além de outras possibilidades e sugestões para os professores. Algumas das atividades são acompanhadas de indicações sobre os possíveis obstáculos que podem surgir durante o processo de ensino e aprendizagem. Esperamos que este material estimule um processo de aprendizagem dinâmico, investigativo e criativo.

Os autores

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática Mestrado Profissional em Educação Matemática Universidade Federal de Juiz de Fora

SUMÁRIO

1 A Matemática sob uma perspectiva semiótica

1839 - 1914

Para Charles Sanders Peirce, os objetos matemáticos são acessados mediante suas representações.

A Matemática para ele é desenvolvida por meio do raciocínio diagramático, que consiste em um processo composto por três etapas:

1. CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAMA
2. EXPERIMENTAÇÃO DO DIAGRAMA
3. OBSERVAÇÃO DOS RESULTADOS

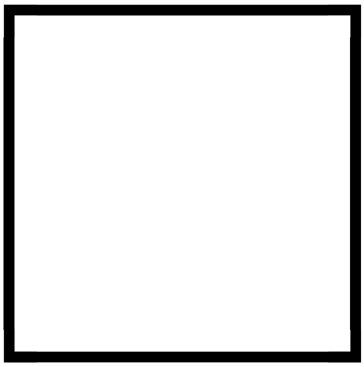
A concepção da Matemática como uma atividade semiótica nos permite acessar os objetos matemáticos por meio de suas representações, diferindo das outras correntes filosóficas. A partir desse ponto de partida, podemos investigar esses objetos usando o raciocínio diagramático e, é claro, os Experimentos Mentais.

O raciocínio diagramático é a base dos Experimentos Mentais na Educação Matemática, bem como a Semiótica fundamentada em Peirce.

2 Conceitos fundamentais na semiótica de Peirce

Para Peirce (2010), signo é aquilo que representa algo para alguém. O signo possui um sinal (representâmen), um objeto (representado pelo sinal) e um interpretante (o sentido feito pelo sinal).

Representa que os motoristas devem parar completamente o veículo.



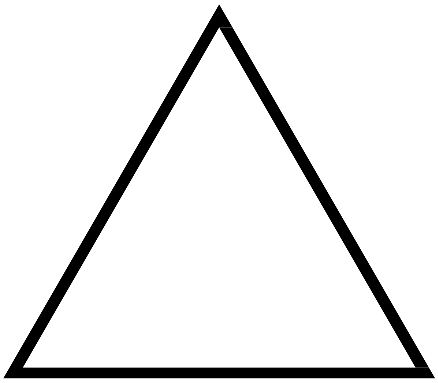
Representa um objeto matemático chamado quadrado.

Representa o conhecimento que pode ser adquirido.

Representa a chegada de uma forte chuva.

Representa felicidade, realização.

O signo se divide em ícone, índice e símbolo.



Este signo possui semelhança com um objeto matemático, por isso é um ícone.

Podemos especificar este signo ao nomeá-lo de △ ABC, tornando-o um índice.

Seu nome geral (triângulo) é um símbolo.

O PROCESSO DE RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO ENVOLVE O USO DE SIGNOS ICÔNICOS, ÍNDICES E SÍMBOLOS.

Durante o processo de raciocínio diagramático, ocorrem:

- deduções teoremáticas (modificam o diagrama)
- induções (generalizações)
- abduções (introdução de ideias novas)

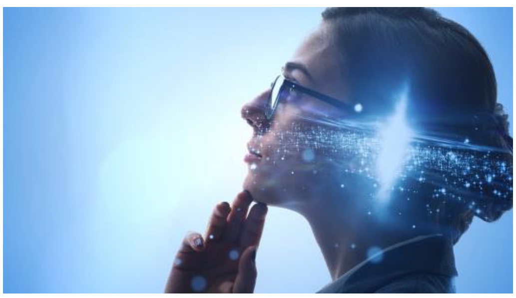
Acesse a dissertação "Uma análise de obstáculos identificados por meio da aplicação de Experimentos Mentais a um grupo de licenciandos em Matemática" para compreender a semiótica de Peirce mais a fundo.

3 Experimentos mentais

Os experimentos mentais são conhecidos como *Gedankenexperiment*, em alemão, e como *Thought Experiment*, em inglês.

Esses experimentos têm uma longa história, que remonta a filósofos renomados do passado, como Platão e Aristóteles.

Pensadores notáveis, como Newton, Descartes, Kant e Leibniz utilizaram experimentos mentais.



Essa abordagem era empregada para criar cenários imaginários que ajudassem a desenvolver modelos ideais do mundo físico.

4 Experimentos Mentais na Educação Matemática

Na Educação Matemática, de acordo com Cruz (2024, p. 5, **grifo nosso**), os Experimentos Mentais podem ser compreendidos como "formas de representar o objeto do conhecimento, por meio de um **diagrama**, e de desenvolver certas **deduções** e **abduções** no referido diagrama, a ponto de modificá-lo, para que seja possível chegar a novos **conceitos e/ou generalizações**".

A utilização dos Experimentos Mentais requer a adoção dos princípios do raciocínio baseado em diagramas.

Durante esses Experimentos, os estudantes são desafiados a refletir sobre as contradições que emergem das atividades propostas e dos dados que já conhecem, estimulando a formulação de hipóteses para explicar fenômenos matemáticos.

Características dos Experimentos Mentais

Na metodologia dos Experimentos Mentais dentro da Educação Matemática, surgem várias características fundamentais, que não se desenvolvem de maneira independente, mas estão interligadas.

FORMA

CONJECTURAS E HIPÓTESES REALIZADAS EM UMA REPRESENTAÇÃO PARTICULAR DO OBJETO

ESTRUTURA

USO DA ABDUÇÃO PARA GERAR IDEIAS NOVAS QUE NÃO SÃO EXPLICITAMENTE FORNECIDAS PELO PROBLEMA, O QUE MODIFICA O DIAGRAMA INICIAL

COMPREENSÃO

USO DA DEDUÇÃO DENTRO DO NOVO DIAGRAMA, O QUE PERMITE DESCOBRIR RESULTADOS E IDENTIFICAR CONTRADIÇÕES

DEPENDÊNCIA

ESTÁ RELACIONADA AO SISTEMA DE REPRESENTAÇÃO ESCOLHIDO NO INÍCIO DO EXPERIMENTO, O QUAL CARREGA CONHECIMENTOS ACEITOS PELA COMUNIDADE CIENTÍFICA

REVELAÇÃO

OCORRE QUANDO SE PERCEBEM CONTRADIÇÕES E/OU CONFUSÕES LÓGICAS DURANTE O PROCESSO

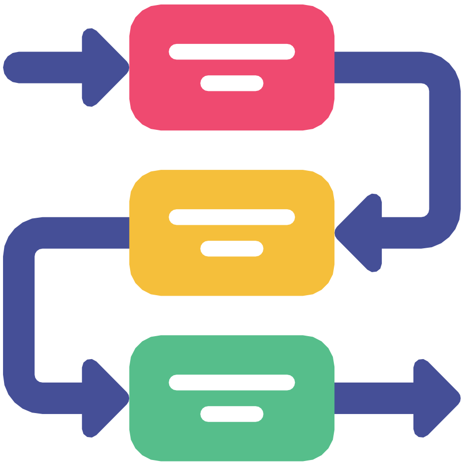
COMPARAÇÃO

É A EXPLORAÇÃO DE DIFERENTES ABORDAGENS PARA DESENVOLVER O PROBLEMA EM QUESTÃO

5 Possíveis obstáculos na aplicação dos Experimentos Mentais

Ao colocarmos em prática os Experimentos Mentais na Educação Matemática, é importante estarmos cientes de que podem surgir obstáculos de aprendizagem. Podemos discernir quatro categorias principais de obstáculos à aprendizagem:

OBSTÁCULOS	***CONCEITUAÇÃO***	***EXEMPLO***
Obstáculos Epistemológicos	"[...] são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontraram na história, para a compreensão e utilização desses conceitos" (Almouloud, 2007, p. 139).	Os antigos Pitagóricos resistiram à ideia de que a raiz quadrada de dois era irracional. Da mesma forma, Carnot e Stendhal mostraram hesitação em aceitar os números negativos como números válidos (Almouloud, 2007).
Obstáculos didáticos	"Eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculo ao desenvolvimento da conceituação" (Almouloud, 2007, p. 141).	A noção de que as frações podem representar um obstáculo no ensino deriva da forma comum de apresentá-las como uma mera divisão de figuras. Essa abordagem pode dar a impressão errônea de que frações estão invariavelmente associadas a partes de um todo (Almouloud, 2007).
Obstáculos psicológicos	"Esses obstáculos aparecem quando a aprendizagem contradiz as representações profundas do sujeito, ou quando induz uma desestabilização inaceitável" (Almouloud, 2007, p. 144).	Pode ocorrer quando o aluno nota que a lógica ensinada na escola não se alinha com a lógica que vivencia em seu dia a dia (Almouloud, 2007).
Obstáculo Ontogênicos	"[...] aparecem pelas limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em certo momento de seu desenvolvimento" (Almouloud, 2007, p. 145).	Um aluno que ainda não alcançou o estágio de desenvolvimento operatório-formal, conforme descrito na teoria genética de Piaget, pode enfrentar desafios na compreensão de conceitos matemáticos abstratos, como conjuntos de números inteiros negativos e irracionais.



Ao longo deste Produto Educacional, apresentaremos atividades baseadas na metodologia dos Experimentos Mentais, destacando diferentes tipos de obstáculos identificados em aplicações anteriores.

Partimos do princípio de que obstáculos são formas de signos, e, assim, ao analisar um signo produzido por um participante, podemos identificar diferentes tipos de obstáculos, como epistemológicos ou psicológicos, dependendo da perspectiva do intérprete.

Nossa meta é proporcionar aos educadores uma visão ampla e fundamentada sobre o uso desses Experimentos Mentais, incentivando a reflexão sobre os obstáculos que podem surgir em sala de aula durante o desenvolvimento das atividades propostas.

6

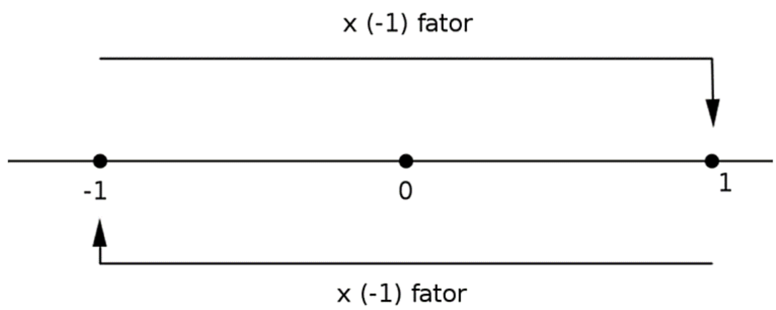
POSSIBILIDADES DE EXPERIMENTOS MENTAIS

PARA O PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA

ATIVIDADE 1: Investigando a multiplicação de números inteiros[1]

Objetivo	Construir explicações para o resultado das multiplicações de números inteiros.
Recursos necessários	Lápis, borracha e régua.
Orientações Gerais[2]	Neste Experimento, as transformações geométricas são utilizadas considerando os objetos matemáticos $+1$ e -1. Esses números são representados em uma reta como pontos simetricamente opostos em relação a um ponto central, Figura 1. A partir dessa representação, um processo para explicar como ocorrem as multiplicações de números inteiros é construído.

Figura 1: Investigação do diagrama para multiplicação de números inteiros



Fonte: Cruz, 2020b, p. 13.

Dessa forma, nota-se que ao multiplicar o objeto inicial por um número, que pode ser chamado de "fator de simetria", obtemos outro objeto, ou seja, $(objeto) \cdot (fator) = objeto$ ou $(fator) \cdot (objeto) = objeto$. Por exemplo, adotando a primeira opção, a multiplicação $(+1) \cdot (-1)$ significa encontrar o objeto simétrico a $+1$. Por outro lado, $(-1) \cdot (+1)$ significa manter o

[1] Experimento Mental adaptado de Cruz (2022, p. 98-101).
[2] Veja a nota ao professor no final deste Produto Educacional para compreender a heurística do Experimento Mental sobre a multiplicação de números inteiros.

objeto -1, uma vez que o fator de simetria é $+1$.

Ao explorar o diagrama construído, como mostrado na Figura 1, sugerimos discutir que a igualdade $(+1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (+1)$ só é possível porque geram o mesmo objeto, -1. No entanto, no processo criado, as multiplicações são diferentes. No primeiro membro da igualdade, o objeto é $+1$, e o fator de simetria é -1. No segundo membro, o objeto é -1, e o fator de simetria é $+1$, adotando $(objeto) \cdot (fator) = objeto$.

À medida que avançamos no Experimento, encontramos um processo que permite compreender a multiplicação de qualquer número inteiro. Por exemplo, usando a primeira regra, podemos reescrever a multiplicação $(+3) \cdot (-2)$ como $(+3) \cdot (-1) \cdot 2$, onde $+3$ é o objeto, -1 é o fator de simetria e 2 pode ser considerado um fator que dilata ou translada o resultado anterior.

Assim, essa atividade oferece a oportunidade de compreender que os resultados matemáticos não se baseiam exclusivamente em regras predefinidas, como as regras de sinais. Em vez disso, demonstra que podemos desenvolver processos que auxiliam na compreensão desses resultados.

Obstáculos identificados na aplicação a licenciandos em Matemática pela UFJF	• Obstáculo epistemológico e didático: Os licenciandos em Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) tiveram dificuldade em compreender por que $(-1) \times (-1) = +1$. A história da Matemática revela uma evolução gradual e complexa na compreensão dos números negativos, influenciando o ensino atual.

A metodologia de ensino pode agravar esse obstáculo, já que o conhecimento dos participantes se baseava em regras estabelecidas desde a década de 1970.

- Possível obstáculo psicológico: Um participante mostrou surpresa ao desvincular a ideia de que o resultado matemático deve ser obtido apenas por uma regra pré-estabelecida, contrastando com a construção de um processo mais flexível.

- Obstáculo metodológico: Muitos participantes ficaram confusos com a introdução da ideia do fator dilatador em um processo já consolidado.

- Obstáculo epistemológico e didático para professores: A ênfase em demonstrações algébricas e abordagens axiomáticas para justificar $(-1) \times (-1) = +1$ pode ser atribuída à marginalização histórica da geometria em favor da álgebra e análise matemática no século XIX, intensificada pelo Movimento da Matemática Moderna. Isso resulta em uma especialização excessiva e fragmentada, tanto nos aspectos pedagógicos quanto nos específicos da Matemática pura.

- Possível obstáculo relacionado ao pensamento matemático sob a perspectiva cartesiana: A crença de que a construção matemática depende exclusivamente das verdades já estabelecidas favorece um sistema axiomático.

INVESTIGANDO A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

1) Para você, por que $(-1) \times (-1) = +1$?

____

____

____

____

2) Como você explicaria as multiplicações $(-1) \times (+1), (+1) \times (-1)$ e $(-1) \times (-1)$?

a. Desenvolvendo um Experimento: fixar os números -1 e 1 como pontos opostos simetricamente em relação a um ponto central.

Considere que multiplicar por (-1) é encontrar o simétrico do número (ponto), e multiplicar por $(+1)$ é encontrar o próprio número (ponto).

b. Com base neste Experimento, o que pode ser dito sobre as multiplicações $(-1) \times (+1)$, $(+1) \times (-1)$ e $(-1) \times (-1)$?

____

____

____

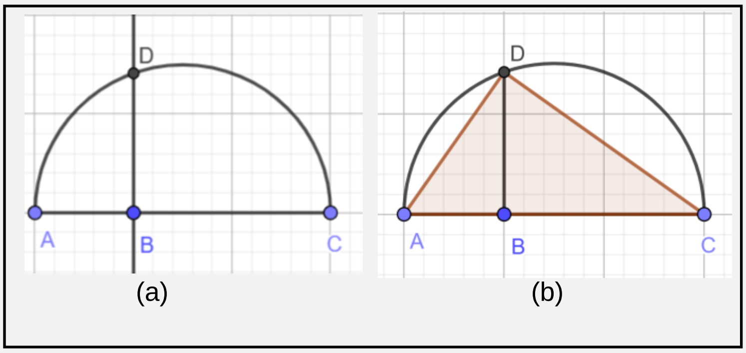
____

3) Convido você a investigar o resultado de outras multiplicações. Escolha os números e siga em frente!

a. (   ) × (   )

b. (   ) × (   )

ATIVIDADE 2: Investigando[3] a raiz quadrada de 2

Objetivo	Compreender a raiz quadrada de 2 por meio de duas perspectivas distintas: a geométrica e a algébrica.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/ambtnzyd (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção).
Orientações Gerais	Neste Experimento, exploramos a ideia de que a equação $x^2 = 2$ não tem solução nos números inteiros ou racionais. No entanto, podemos visualizar x como a altura BD relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo com projeções dos catetos medindo 1 (unidade de comprimento) e 2 (u.c.). Dessa forma, construímos uma representação desse triângulo no Geogebra para investigarmos o segmento BD por meio de medições, no primeiro momento (veja a figura 2). Figura 2: Experimento Mental sobre a raiz quadrada de dois  Fonte: Produzido pelos autores, 2023. Em um segundo momento, buscamos a representação algébrica do segmento, seja por meio do Teorema de Pitágoras ou explorando a semelhança entre triângulos. Encontramos que a medida do segmento BD pode ser expressa como

[3] Experimento Mental adaptado de Cruz (2023, p. 10-14).

	$\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \sqrt{1\cdot 2} = \sqrt{2}$. Ao compararmos os resultados da primeira e da segunda parte do Experimento, concluímos que o segmento medido de forma aproximada é a raiz quadrada de 2. Posteriormente, sugerimos questionar se um segmento pode representar um número decimal com infinitas casas decimais não periódicas. Para desenvolver essa ideia pode-se trabalhar com as noções de incomensurabilidade, comparando o segmento BD com a unidade, ou seja, se dividirmos a unidade em n partes inteiras iguais, é possível encontrar uma quantidade inteira m dessas partes que caibam no segmento BD? Se não, onde esse número estaria localizado na reta numérica, já que não pode ser um número inteiro ou racional? Na última parte da atividade, pode-se discutir sobre a representação decimal da raiz quadrada de dois exemplificando o notável cálculo realizado pelo matemático Jacques Dutka, que resultou em 1.000.082 casas decimais (acesse a história em: https://content.time.com/time/subscriber/article/0,33009,877331,00.html).
Obstáculos identificados na aplicação a estudantes do Colégio de Aplicação João XXIII/UFJF	• Obstáculo epistemológico: O conceito de números irracionais gerou questões ao longo de séculos na história da Matemática. Muitos participantes tiveram dificuldade em progredir porque aplicaram o raciocínio usado para a raiz quadrada de quatro, baseada na multiplicação de fatores iguais. • Obstáculo didático e possível obstáculo ontogênico: O uso frequente de letras convencionais como x, y e z pelo

professor durante o Experimento Mental pode resultar na falta de reconhecimento do significado quando os alunos se deparam com letras diferentes. Isso também pode ocorrer se os alunos não alcançaram um nível de abstração e generalização suficiente para identificar padrões e estabelecer conexões entre diferentes formas de expressões algébricas.

- Alguns participantes demonstraram surpresa e inquietação, pois o novo conhecimento conflitava com suas concepções prévias. Eles acreditavam que $\sqrt{2}$ era um número que, quando multiplicado por si mesmo, resultava em dois, mas não conseguiram encontrar tal número por ser irracional. Também enfrentaram dificuldades ao compreender que $\sqrt{2}$ pode ser representada por um segmento de reta na atividade realizada.

INVESTIGANDO A RAIZ QUADRADA DE DOIS

1) O que é $\sqrt{4}$ para você?

____

____

2) O que é $\sqrt{2}$ para você?

____

____

3) Convido você a fazer um Experimento que busca algumas relações envolvendo a $\sqrt{2}$. Este Experimento será dividido em quatro partes.

Primeira parte

a. Iniciamos construindo no Geogebra um segmento AB de 1 unidade de comprimento (u.c.) e um segmento adjacente BC de 2 (u.c.).

b. Traçamos uma semicircunferência de diâmetro AC, e por B construímos uma perpendicular a AC até encontrar a semicircunferência em um ponto que pode ser indicado por D.

c. Agora, vamos medir o segmento BD construído e indicar o resultado com 2, 3, 5, 10 e 15 casas decimais (clique nas três barras no canto superior direito > configurações > arredondamento > selecione o número de casas decimais).

Casas decimais	**Resultado**
Duas	
Três	
Cinco	
Dez	
Quinze	

d. O que será que os resultados encontrados no item *c* querem dizer?

Segunda parte

e. Ao unir os pontos A, D e C qual figura é formada? Tente justificar a sua resposta.

f. Quais relações envolvem as partes da figura que construímos? É possível encontrar uma relação geral usando o segmento BD?

g. Quando comparamos os resultados encontrados na letra *c* com a relação estabelecida na letra *f*, o que podemos concluir? Existe alguma contradição?

Terceira parte

h. Nos ajude a construir uma reta numérica que passa pelos pontos A e C, de modo que o ponto B seja o número zero.

i. Transporte a medida do segmento BD para reta traçada.

j. O que podemos dizer sobre o ponto marcado na questão anterior?

____

____

____

____

Quarta parte

k. Transporte a medida do segmento AB para a perpendicular BD e repita o processo da letra ***b***. Continue repetindo o processo sucessivamente, sempre transportando a medida do segmento menor para a perpendicular.

l. O que podemos dizer sobre a construção anterior?

____

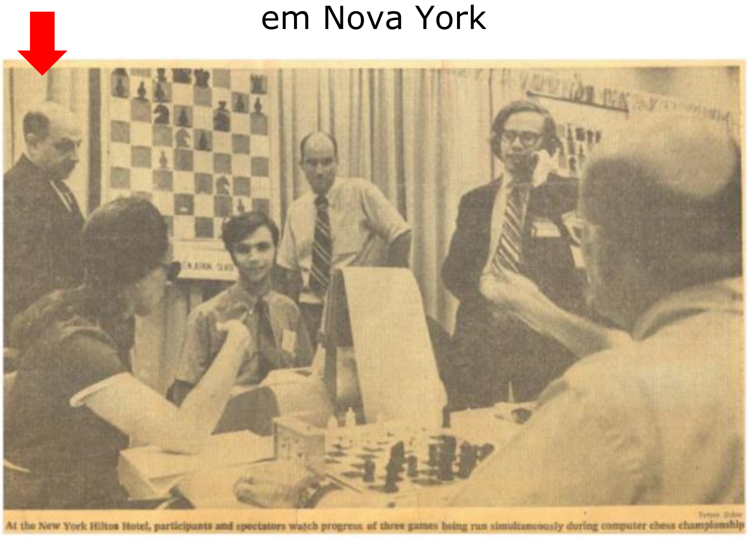
____

____

____

4) Agora vamos trazer um pouco de história: Você conhece a história sobre a representação decimal da $\sqrt{2}$ encontrada por Harold Jacques Dutka (1919 - 2002)?

Primeiro Campeonato de Xadrez Computacional dos Estados Unidos de 1970 em Nova York



Fonte: Chess Programming Wiki, disponível em https://www.chessprogramming.org/Jacques_Dutka#cite_note-4.

5) Tente apresentar a sua conclusão geral sobre $\sqrt{2}$.

____

____

____

____

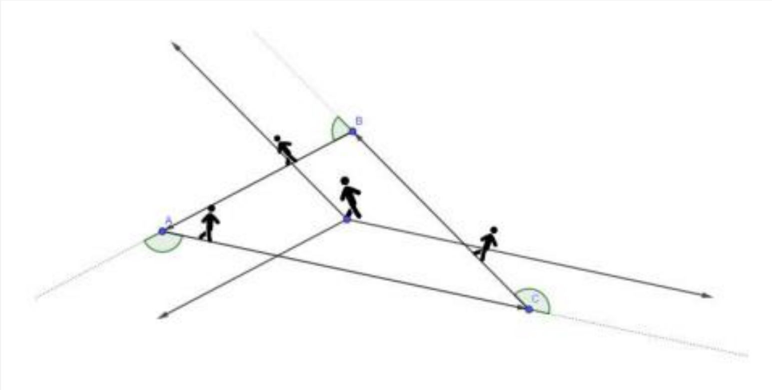
____

ATIVIDADE 3: A soma dos ângulos externos de um polígono[4]

Objetivo	Investigar a soma dos ângulos externos de um polígono.
Recursos necessários	Lápis, borracha, régua e fita adesiva.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/kkub77er (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção).
Orientações Gerais	Neste Experimento, exploramos a ideia de que a soma dos ângulos externos de um polígono é igual a 360°. Inicialmente, começamos com a representação de um triângulo. Para construir essa ideia de forma coletiva, sugerimos o uso de fitas adesivas no chão. Os alunos podem caminhar ao redor do triângulo, com os braços estendidos, para compreender que percorrer todo o contorno do triângulo é o mesmo que dar uma volta completa em torno de si mesmo. Em seguida, o professor pode levar essa discussão do espaço físico para a atividade no papel, incentivando os alunos a perceberem que ao traçar segmentos equipolentes aos lados do triângulo, a partir de um ponto em seu interior, um ângulo de 360° é formado (Figura 3). Essa mesma abordagem pode ser aplicada a outros polígonos com o objetivo de generalização.

[4] Experimento Mental adaptado de Cruz (2022, p. 81-85).

Figura 3: Experimento Mental sobre a soma dos ângulos externos de um polígono



Fonte: Cruz, 2022a, p. 83.

Quais obstáculos você identificou na aplicação do Experimento?

A SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO

1) Neste Experimento, vamos investigar a soma dos ângulos externos dos triângulos. Nos mostre como você entende esta soma.

a. Pense em um triângulo para representá-lo abaixo.

- Agora, imagine que você está caminhando ao redor de toda a volta do triângulo. Você deve ter girado um total de quantos graus?

____

b. Busque representar a trajetória que você realizou no triângulo por meio de segmentos orientados.

c. Vamos imaginar que você esteja em um ponto no interior do triângulo! Volte em sua representação e, nesse ponto, trace segmentos equipolentes aos segmentos orientados que você traçou no item anterior.

O que são segmentos equipolentes?

____

____

d. Você consegue encontrar alguma relação entre os ângulos formados pelos segmentos orientados e os ângulos externos do triângulo? Qual (is)?

____

____

____

____

e. E se você estiver caminhando ao redor de um quadrilátero, qual será a soma dos seus ângulos externos?

2) O que podemos concluir sobre a soma dos ângulos externos de qualquer polígono?

____

____

____

____

____

ATIVIDADE 4: Menor distância percorrida entre dois pontos

Objetivo	Encontrar o menor caminho que pode ser percorrido entre dois pontos.
Recursos necessários	Lápis, borracha e régua.
Construção da atividade	https://www.geogebra.org/m/cbbvhpmv (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção).
Orientações Gerais	Neste Experimento, buscamos criar uma representação da rota percorrida pelo aluno desde a sua residência até a escola, a fim de explorar o trajeto mais curto entre todos os pontos de referência mencionados por ele ao longo da jornada. Para isso, pode-se utilizar vetores que representem o trajeto percorrido entre os pontos. Além disso, sugerimos discutir a ideia de soma de vetores ao traçar um novo trajeto que seja menor que os anteriores, sempre verificando e refletindo sobre a viabilidade desses caminhos.
Quais obstáculos você identificou na aplicação do Experimento?	

A MENOR DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

1) Você sabe qual é a menor distância entre dois pontos? Vamos descobrir?

a. Para começar este Experimento, vamos pensar e representar a trajetória que fazemos até chegar à escola. Escolha alguns pontos de referência no decorrer do caminho traçado e marque-os.

b. Escolha dois pontos de referência que você marcou e pense: “Como posso percorrer o menor caminho entre eles?”. Represente isso na questão anterior para todos os pontos de referência, utilize segmentos orientados.

Que outro nome podemos atribuir a esses segmentos orientados?

c. O que você encontra quando soma todos os menores caminhos entre os pontos de referência?

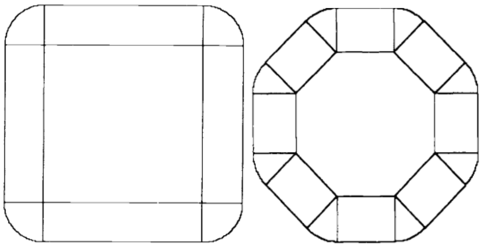
2) Qual a sua conclusão sobre a menor distância entre dois pontos?

ATIVIDADE 5: Problema de Papert[5]

Objetivo	Desenvolver o raciocínio para resolver problemas.
Recursos necessários	Lápis, compasso, borracha e régua.
Orientações Gerais	Neste Experimento, exploramos o desafio apresentado pelo matemático Papert (1980, p. 146), que consiste em calcular o comprimento extra de corda necessário para circundar a Terra, levando em consideração hastes de 2 metros de comprimento: Imagine que uma corda foi colocada ao redor da circunferência da Terra, considerando-a uma esfera perfeita de raio igual a 6 km. Uma pessoa propõe que sejam colocadas barras verticais de 2m de comprimento ao redor da Terra. Qual deverá ser o comprimento adicional de corda? (Cruz, 2022) Papert adota uma abordagem não convencional, distanciando-se da resolução tradicional, isto é, $C = C_{com\ barra} - C_{sem\ barra} = 2\pi(r+b) - 2\pi r = 2\pi b = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56m$. Em vez disso, ele imagina cenários alternativos, como a Terra sendo quadrada ou octogonal (figura 4), e observa que o comprimento adicional da corda pode ser determinado pela combinação de arcos de circunferência, resultando em $2 \cdot \pi \cdot (comprimento\ da\ haste)$.

[5] Experimento Mental adaptado de Cruz (2018, p. 198-203).

Figura 4: Representação da Terra quadrada e octogonal



Fonte: Papert (1980, p. 148, 149)

Quais obstáculos você identificou na aplicação do Experimento?	

INVESTIGANDO O PROBLEMA DE PAPERT

1) Veja o problema proposto pelo matemático e educador Seymour Papert (1980, p. 146), publicado em seu livro "Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas":

Imagine que uma corda foi colocada ao redor da circunferência da Terra, considerando-a uma esfera perfeita de raio igual a 6 km. Uma pessoa propõe que sejam colocadas barras verticais de 2m de comprimento ao redor da Terra. Qual deverá ser o comprimento adicional de corda?

a. Convido você a fazermos um Experimento, iniciando com a representação da situação proposta por Papert.

➢ Como você encontraria o comprimento adicional da corda?

____

____

c. Agora, imagine que a Terra seja quadrada! Vamos representar a situação do problema de Papert abaixo.

c. Com base no item anterior, qual o comprimento adicional de corda que será utilizado ao redor da Terra?

____

____

____

d. Vamos supor que a Terra seja um octógono! Represente a situação proposta por Papert abaixo.

e. Qual o comprimento adicional de corda que será utilizado ao redor da Terra?

____

____

____

____

f. Você consegue encontrar uma relação geral para a quantidade adicional de corda? Qual?

____

____

____

____

ATIVIDADE 6: Questão do Enem 2019

Objetivo	Compreender a propriedade das inequações exponenciais por meio de construções geométricas.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade no Geogebra	https://www.geogebra.org/m/kkrcvqw5 (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção).
Orientações Gerais	Neste Experimento, investigamos a questão 163 do caderno azul do Enem 2019, que aborda as propriedades das inequações exponenciais, a saber, $0 < a < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$, $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$. Utilizamos o Geogebra para construir os segmentos que representam $x^{1/2}, x, x^2, x^3$ possibilitando compará-los e induzir a generalização de $x^{1/3}$. Além disso, a atividade também investiga a propriedade quando a base $a > 1$, basta arrastar o ponto C da construção. Sugerimos discutir sobre a construção dos segmentos e a aplicação de proporções para encontrá-los no Geogebra, além de abordar os aspectos e os impactos sociais do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de diferentes localidades.
Quais obstáculos você identificou na aplicação do Experimento?	

QUESTÃO DO ENEM 2019

1) Veja a questão 163 do caderno azul do Enem 2019:

Questão 163. *O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda per capita, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3. Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo. Qual desses países obteve o maior IDH?*

A. *O primeiro.*
B. *O segundo.*
C. *O terceiro.*
D. *O quarto.*
E. *O quinto.*

a. Como você resolveria essa questão?

____
____
____
____
____
____
____

2) Vamos investigá-la por meio de um Experimento Mental. Para isso, iremos realizar uma construção geométrica. Veja os passos a seguir:

a. Com o auxílio do Geogebra, vamos traçar um segmento AB de comprimento 1 (u.c) e um segmento adjacente BC de comprimento menor que 1(u.c.).

b. Descreva uma semicircunferência de diâmetro AC e por B busque traçar uma perpendicular a AC até encontrar a semicircunferência em um ponto que pode ser indicado por D.

c. Trace uma reta *i* que passe por A e transporte sob ela, a partir do ponto A, a medida de BC, encontrando um ponto que pode ser chamado de F. Construa uma reta *j* que passe pelos pontos B e F. Trace uma paralela a *j* que passe por C, intersectando a reta *i* no ponto G.

d. Repita o procedimento anterior:

$\mathbf{d_1}$**:** Busque traçar uma reta qualquer *l* que passe por F, transporte a medida de AB, partindo de F, para a reta *l,* encontrando o ponto I.

$\mathbf{d_2}$**:** Agora, transporte a medida de BC, a partir do ponto I, para encontrar o ponto J.

$\mathbf{d_3}$**:** Trace uma reta *m* que passe por I e G e uma reta paralela a *m* que passe por J, podendo ser chamada de *n*.

$\mathbf{d_4}$**:** Marque o ponto de interseção K entre as retas *n* e *i.*

3) Se a medida de BC vale *x*, você consegue descobrir a medida de BD e de todos os segmentos construídos sob a reta *i* (AF, FG e GK)?

a. O que dizer dos resultados encontrados na questão anterior?

____

____

____

O que o IDH da cidade que você mora, do estado e do Brasil, dizem sobre essas localidades?

____

____

____

____

____

4) O que acontece quando o segmento BC tem comprimento maior que (1 u.c.)?

____

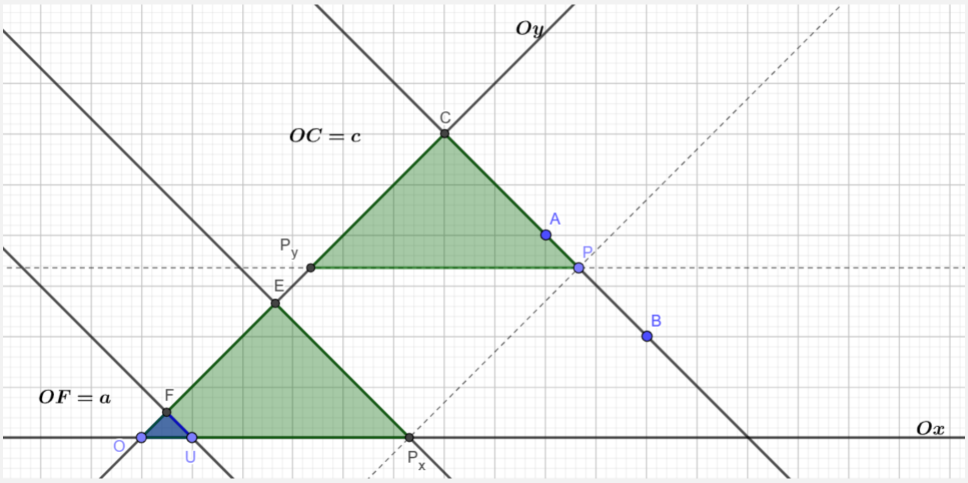
____

____

____

____

ATIVIDADE 7: Equação da reta que passa por dois pontos quaisquer[6]

Objetivo	Construir a equação da reta que passa por dois pontos em distintos sistemas de coordenadas Oxy.
Recursos necessários	Geogebra, lápis e borracha.
Construção da atividade no Geogebra	https://www.geogebra.org/m/zc2vyhce (Utilize as setas no canto inferior direito para avançar o protocolo de construção).
Orientações Gerais	Neste Experimento, construímos a equação da reta que passa por dois pontos em sistemas de coordenadas que não são necessariamente cartesianos, ou seja, que não possuem eixos perpendiculares. Veja um exemplo de construção na figura 5. Figura 5: Reta que passa por dois pontos  Fonte: Produzido pelos autores. Depois de realizada a construção no Geogebra, encontramos a equação da reta ao perceber que: $\frac{a}{1} = \frac{OE}{x} \Leftrightarrow OE = ax$

[6] Experimento Mental adaptado de Cruz (2022, p. 69-74).

Como os dois triângulos verdes são congruentes:

$$m(\overline{OP_x}) \equiv m\left(\overline{P_yP}\right)$$

$$O\widehat{P_x}E \equiv P_y\hat{P}C$$

$$m(\overline{EP_x}) \equiv m(\overline{CP})$$

Temos que:

$$m(\overline{OE}) \equiv m\left(\overline{P_yC}\right)$$

$$m(\overline{OC}) = m\left(\overline{OP_y}\right) + m\left(\overline{P_yC}\right)$$

$$c = y + ax$$

$$y = -ax + c$$

Quais obstáculos você identificou na aplicação do Experimento?

EQUAÇÃO DA RETA QUE PASSA POR DOIS PONTOS

1) Como podemos encontrar a equação da reta que passa pelos pontos *A(0, 6)* e *B(8, 2)*?

____

____

____

____

2) Vamos construir a equação da reta que passa por dois pontos quaisquer?

a. Para isso, iremos representar um sistema de coordenadas *Oxy* **qualquer**.

Você lembra o que é um sistema de coordenadas cartesianas?

____

____

b. Agora, escolha dois pontos do sistema *OXY* para traçar uma reta *h*. O ponto de intersecção da reta com o eixo *y* pode ser chamado de *C*, por exemplo. Também marque sob a reta *h* um ponto *P (x, y)* qualquer, a unidade *U (1,0)* e a origem *O (0, 0)*.

c. Trace duas retas paralelas a *h*, uma passando pela coordenada *x* do ponto *P* e a outra passando pelo ponto *U*, intersectando o eixo *y* em *E* e *F*, respectivamente.

d. Vamos supor que a medida de $OF = a$ e $OC = c$. Você consegue encontrar relações que envolvam as partes da figura construída no intuito de escrever a equação da reta h? Quais?

e. O que dizer dos resultados encontrados na questão anterior?

f. Agora, vamos considerar o sistema de coordenadas ortogonais para encontrarmos a equação da reta que passa por dois pontos quaisquer.

7 Considerações

Concluímos este Produto Educacional com a expectativa de que as atividades apresentadas exerçam um papel enriquecedor em sua prática docente, oferecendo um suporte valioso para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os Experimentos Mentais, que constituem a metodologia central deste material, surgem como uma alternativa complementar ao ensino, questionando a concepção convencional ao enfatizar que a Matemática está longe de ser uma entidade estática; ela está em constante evolução.

Cada atividade foi desenvolvida como uma tentativa de estabelecer um ambiente propício, no qual o estudante é instigado a assumir um papel de protagonismo em sua jornada de aprendizagem na sala de aula de Matemática. Incentivamos o aluno a se engajar em uma relação dialética com o conhecimento, em que a Matemática não é encarada como um conjunto monótono de fórmulas a serem memorizadas. Pelo contrário, ela se revela como uma ferramenta poderosa que, de acordo com Miguel (1994), capacita as mentes a pensar de maneira independente, criativa e crítica.

Nossa intenção transcende os limites da sala de aula, pois visamos desenvolver habilidades que vão além do contexto educacional. Buscamos encorajar os estudantes a aplicarem suas capacidades críticas e criativas de maneira ativa na sociedade, com o objetivo de contribuir para o aperfeiçoamento da democracia, conforme destacado por Miguel (1994). Desejamos que este material não apenas sirva de inspiração para novas abordagens no ensino da Matemática, mas também proporcione aos professores e alunos a liberdade de explorar além das fronteiras da gaiola epistemológica, identificando e enfrentando problemas de maior magnitude (D’Ambrosio; Lopes, 2015).

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

AMARAL, C. C. **Uma análise de obstáculos identificados por meio da aplicação de Experimentos Mentais a um grupo de licenciandos em Matemática.** 2024. 120f. Dissertação (Mestrado profissional) — Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

BROUSSEAU, G. P. **Theory of didactical situations in mathematics:** didactique des mathématiques, 1970 - 1990; ed. and translated by Nicolas Balacheff et al. Dordrecht: Kluwer, 2002.

CRUZ, W. J. da. Por que √2 é irracional? Buscando explicações nos processos de experimentação mental. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 79, p. 1-15, 15 maio 2023a. Disponível em:http://www.sbemrevista.com.br/revista/index.php/emr/article/view/3007. Acesso em 06 jun. 2023.

CRUZ, W. J. da. Experimentos mentais na multiplicação de números naturais: reflexões teóricas por meio de uma metodologia alternativa. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 18, p. 01-21, jan./dez., 2023b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/92299. Acesso em: 28 maio 2024.

CRUZ, W. J. da. **Experimentos Mentais:** uma nova metodologia para o ensino de Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2022a.

CRUZ, W. J. da. Retângulo que não é retângulo? A aplicação dos experimentos mentais no Quadrilátero de Saccheri. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Brasília, v. 12, n. 4, p. 1-16, set./dez. 2022b. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/2920. Acesso em 28 maio 2024.

CRUZ, W. J. da. O uso dos Experimentos Mentais como possível metodologia de Ensino da Matemática: um olhar epistemológico. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-26, jan./dez., 2021a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/79205. Acesso em: 27 out. 2021.

CRUZ, W. J. O que é √(-1)?. **UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, v. 17, n. 62, 17 jun. 2021b. Disponível em:

https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/261. Acesso em 21 maio 2024.

CRUZ, W. J. da. Objetos e processos: aspectos complementares na multiplicação de número inteiros negativos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, p. 01-17, 2020a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e70984. Acesso em: 12 ago. 2023.

CRUZ, W. J. da. Matemática é criação ou descoberta?. **UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 15, n. 57, p. 121-137, 2020b. Disponível em: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/70. Acesso em: 02 jun. 2023.

CRUZ, W. J. da. O raciocínio diagramático e os Experimentos Mentais numa perspectiva semiótica. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 24, n. 62, abr./jun. 2019.

CRUZ, W. J. da. **Experimentos Mentais na Educação Matemática:** uma analogia com provas matemáticas formais. Curitiba: Appris, 2018a.

CRUZ, W. J. da. A Hipótese dos Experimentos Mentais na Construção de Conceitos em Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [S. l.], v. 11, n. 2, p. 104–110, 2018b. DOI: 10.17921/2176-5634.2018v11n2p104-110. Disponível em: https://jieem.pgsscogna.com.br/jieem/article/view/4328. Acesso em: 28 maio. 2024.

CRUZ, W. J. DA. Experimentos mentais como metodologia de ensino: perspectivas teóricas para a soma dos ângulos externos de um triângulo euclidiano. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 1-15, 24 ago. 2024. Acesso em 29 ago. 2024.

D'AMBROSIO, B. D.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 1-17, abr. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/XZV4K4mPTfpHPRrCZBMHxLS/?lang=pt. Acesso em: 24 set. 2022.

MIGUEL, A. Reflexão acerca da Educação Matemática Contemporânea. **A educação matemática em revista**, v. 1, n. 2, p. 7-17, 1º sem. 1994.

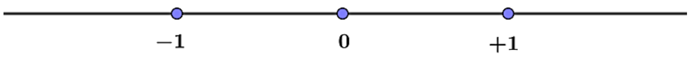
PAPERT, S. **Mindstorms:** children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books, 1980.

PEIRCE, C.S. **Semiótica**. Trad. José Teixeira Coelho Neto. 4 ed. São Paulo: Perspectiva, 2010.

Nota ao professor: Heurística do Experimento Mental sobre a multiplicação de números inteiros

Identificaremos a seguir as características do Experimento Mental sobre a multiplicação dos números inteiros para o conhecimento do professor.

Forma: construir o diagrama que será utilizado no Experimento Mental, que é uma reta com os números -1 e $+1$ posicionados simetricamente em relação ao ponto 0.



Estrutura e Compreensão: utilizar transformações geométricas para encontrar o simétrico de um número (ponto) ao multiplicá-lo por -1, conhecido como fator de simetria, mantendo o número inalterado ao multiplicá-lo por $+1$. Uma dinâmica possível é estabelecer que ao multiplicar um objeto por um fator de simetria, o resultado seja novamente um objeto, ou seja, $(objeto) \cdot (fator) = objeto$. Alternativamente, podemos adotar a convenção de que $(fator) \cdot (objeto) = objeto$.

Dependência: o Experimento depende da noção de geometria plana para o seu desenvolvimento.

Revelação: identificar que a igualdade $(+1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (+1)$ é possível porque produzem o mesmo objeto, ou seja, o -1. No entanto, as multiplicações são diferentes nesse Experimento, já que no primeiro caso o objeto é $+1$ e o fator de simetria é -1, enquanto no segundo caso o objeto é -1 e o fator de simetria é $+1$, seguindo a primeira regra, a saber, $(objeto) \cdot (fator) = objeto$.

Comparação: expandir o processo ao analisar a multiplicação $(+3) \cdot (-2)$ usando essa dinâmica de transformações geométricas para criar o fator dilatador.