UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Yago Pereira dos Anjos Santos

Álgebras de Banach zLpd

Juiz de Fora
2024

Yago Pereira dos Anjos Santos

Álgebras de Banach zLpd

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Orientador: Prof. Dr. Willian Versolati França

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Yago Pereira dos Anjos.
Álgebras de Banach zLpd / Yago Pereira dos Anjos Santos. – 2024.
83 f.

Orientador: Willian Versolati França
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1. Álgebras zero product detemined. 2. Álgebras zero Lie product determined. 3. Álgebras de Banach. I. Versolati França, Willian, orient. II. Título.

Yago Pereira dos Anjos Santos

Álgebras de Banach zLpd

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 14 de agosto de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Willian Versolati França - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Pedro Souza Fagundes
Universidade Federal de São Carlos

Prof^a. Dr^a. Ana Tércia Monteiro Oliveira
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 19/08/2024.

Dedico este trabalho ao meu pai Paulo Roberto (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela experiência gratificante que foi desenvolver este trabalho, pela força necessária para manter corpo e mente minimamente saudáveis para que eu pudesse chegar até à conclusão desta dissertação, apesar de todos os obstáculos e dificuldades que envolveram não apenas o desenvolvimento deste trabalho como também outros aspectos da vida.

Agradeço também ao meu pai, Paulo Roberto (in memoriam), aos meus irmãos e à minha mãe Eunice por todo apoio durante mais esta etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Willian Versolati França, pela excelência nas disciplinas ministradas, pela experiência, sabedoria e paciência na orientação deste trabalho e por ter apresentado-me ao fascinante universo das álgebras de Banach. Um agradecimento à banca, composta pelo Prof. Dr. Pedro Souza Fagundes e pela Profa. Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira. Muito obrigado pela disponibilidade e pelo interesse.

A todos os meus amigos e amigas pelas boas conversas e bons momentos. Em particular ao grupo Panelinha por estar sempre presente e por aturar as minhas descontraídas loucuras non-sense.

À Universidade Federal de Juiz de Fora pela estrutura e pela excelência do ensino público, gratuito e de qualidade.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

“There was a young lady of Wight; Who travelled much faster than light; She departed one day; In a relative way; And arrived on the previous night. The point is that the theory of relativity says that there is no unique measure of time that all observers will agree on”. (Stephen Hawking, A Brief History of Time).

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é o estudo das álgebras *zero Lie product determined*, conceito que se divide em duas perspectivas paralelas: uma perspectiva estritamente algébrica e outra perspectiva analítica. No contexto algébrico, nosso principal foco será exibir um exemplo de álgebra de matrizes triangulares que não é *zLpd*. No percurso em direção a este objetivo, apresentaremos o seguinte fato: para $n \geq 2$, a álgebra de matrizes $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é uma álgebra *zLpd*, desde que $\mathcal{B}$ seja uma álgebra *zLpd* com unidade. Para a teoria analítica nos concentraremos no estudo das álgebras de Banach e veremos como o conceito das álgebras de Banach zLpd se relaciona com importantes resultados da Análise Funcional como o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema do Gráfico Fechado. Outro objetivo consiste em demonstrar que a classe das álgebras de Banach *zLpd* é bastante ampla. Mais precisamente, nós apresentaremos o seguinte resultado: toda C*-álgebra é uma álgebra de Banach *zLpd*. Uma aplicação do conceito tratado neste trabalho, no contexto analítico, também será apresentada, envolvendo o conceito das aplicações lineares *comutantes*.

Palavras-chave: álgebras de Banach; zero product determined; zero Lie product determined.

ABSTRACT

The main purpose of this work is the study of the *zero Lie product determined* algebras, a concept which is divided into two parallel perspectives: a strictly algebraic perspective and an analytical one. In the algebraic context, our main focus will be to show an example of triangular matrix algebra that is not *zLpd*. On the way towards this end, we will present the following fact: for $n \geq 2$, the matrix algebra $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ is a *zLpd* algebra, as long as $\mathcal{B}$ is a *zLpd* algebra with unity. For the analytical theory, we will focus on the study of Banach algebras and we will see how the concept of a zLpd Banach algebra relates with classical results from Functional Analysis such as the Hahn-Banach Theorem and the Closed Graph Theorem. The other purpose is to demonstrate that the class of *zLpd* Banach algebras is quite large, that is, we will present the following result: every C*-algebra is a *zLpd* Banach algebra. An application of the concept discussed in this work, in the analytical context, will also be presented, involving the concept of *commuting* linear maps.

Keywords: Banach algebras; zero product determined; zero Lie product determined.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre as álgebras *zero product determined* (de maneira abreviada *zpd*). Este conceito foi introduzido nos trabalhos [10] (por M. Brešar et P. Šemrl) e [3] (por J. Alaminos, M. Brešar, J. Extremera et A. Villena). O primeiro concentra-se no estudo de aplicações bilineares em álgebras de matrizes e aplicações, enquanto o segundo dedica-se à caracterização de homomorfismos e derivações em C*-álgebras. Estes dois trabalhos compartilham uma característica em comum, a saber, alguns resultados em certas aplicações lineares são obtidos considerando-se aplicações bilineares que se anulam em pares de elementos cujo produto é zero. De acordo com [8], as álgebras zero product determined constituem uma classe de álgebras nas quais diferentes tipos de problemas podem ser resolvidos e muitas propriedades sobre as álgebras em estudo podem ser determinadas por pares de elementos cujo produto é zero. O estudo das álgebras zpd se desenvolveu e evoluiu em duas direções paralelas, uma estritamente algébrica e outra analítica.

No que diz respeito à abordagem algébrica, o trabalho [9], por M. Brešar et al., apresenta o conceito das álgebras zpd tratando de álgebras de matrizes. Tomando como base este artigo, apresentamos a demonstração do seguinte fato: se $\mathcal{B}$ é uma álgebra com unidade, então a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathcal{B}$, isto é $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$, é *zpd* para todo $n \geq 2$ (Proposição 5.1.2). Além disso, apresentamos um exemplo de álgebra de matrizes triangulares superiores que não é zpd. Neste mesmo artigo, apresenta-se a definição das álgebras *zero Lie product determined* (de forma abreviada *zLpd*). Neste caso, veremos que é preciso impor uma hipótese a mais sobre a álgebra $\mathcal{B}$, obtendo assim o seguinte resultado: se $\mathcal{B}$ é uma álgebra *zLpd* com unidade, então $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é uma álgebra *zLpd* para todo $n \geq 2$ (Teorema 5.1.2). Ainda no artigo [9], os autores trazem ao conhecimento do leitor que encontrar álgebras que não são *zLpd* é uma tarefa difícil porque em qualquer álgebra podem existir muitos elementos que comutam entre si. Neste mesmo trabalho, apresenta-se um exemplo de álgebra que não é *zLpd*. Diante disso, apresentamos um exemplo de álgebra de matrizes triangulares que não é zLpd. Posteriormente, no artigo [1], os autores introduzem o aspecto analítico da teoria, isto é, o conceito das *álgebras de Banach zLpd*. Além disso, no livro [8] aborda-se as álgebras de Banach zpd. No decorrer do trabalho, apresentamos três maneiras equivalentes de se definir as álgebras de Banach zpd (zLpd) e veremos como esses conceitos se relacionam com resultados clássicos da Análise Funcional como o Teorema de Hahn-Banach (Teorema 3.1.2) e o Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 3.2.3). Ademais, fazendo um paralelo com a teoria algébrica, veremos que as álgebras de Banach $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ das matrizes $n \times n$ e entradas em uma álgebra de Banach com unidade $\mathcal{B}$ são álgebras de Banach zpd para todo $n \geq 2$ (Proposição 5.2.2). Por fim, com base no trabalho [2] apresentamos uma prova do fato que toda C*-álgebra é uma álgebra de Banach zLpd (Corolário 5.2.2).

2 PRELIMINARES

Neste capítulo nós apresentaremos alguns pré-requisitos, e aproveitaremos este momento para fixar a notação básica a ser utilizada ao longo deste trabalho.

2.1 TOPOLOGIA GERAL

Definição 2.1.1. Uma ***topologia*** em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

(1) Os conjuntos $\emptyset$ e X pertencem a τ.

(2) A união de uma família arbitrária de elementos de τ pertence a τ.

(3) A interseção de qualquer coleção finita de elementos de τ pertence a τ.

De agora em diante, nós entendemos que um ***espaço topológico*** é um par (X, τ) consistindo de um conjunto X e uma topologia τ em X. Os elementos de τ são chamados de ***abertos*** de X. Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é ***fechado*** em X se o seu complementar $X \backslash A$ é aberto em X. A coleção dos subconjuntos fechados de X possui as seguintes propriedades:

Teorema 2.1.1. *Seja $X = (X, \tau)$ um espaço topológico. Então, valem os seguintes resultados:*

(1) Os conjuntos $\emptyset$ e X são fechados.

(2) A interseção de uma família arbitrária de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X.

(3) A união de qualquer coleção finita de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado em X.

Demonstração. Vide [24, Teorema 17.1]. □

Definição 2.1.2. Dado um subconjunto A de um espaço topológico X, o ***interior*** de A em X é definido como a união de todos os subconjuntos abertos de X contidos em A. O ***fecho*** de A em X é definido como a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contém A.

Notação: O interior de A será denotado por $Int\, A$ e o fecho de A por $\overline{A}$.

Observação 2.1.1. Sabemos que $Int\, A$ é um conjunto aberto de X e que $\overline{A}$ é um conjunto fechado de X. Além disso, valem as inclusões: $Int\, A \subset A \subset \overline{A}$. Ainda diante das definições de interior e fecho, para um subconjunto A de X, temos: A é aberto se, e somente se, $A = Int\, A$; A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$.

Definição 2.1.3. Seja $X = (X, \tau)$ um espaço topológico. Dizemos que $A \subset X$ é um ***subconjunto denso*** em X quando $\overline{A} = X$.

Teorema 2.1.2. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $A \cap U \neq \emptyset$ para todo aberto U contendo x.*

Demonstração. Vide [24, Teorema 17.5]. □

Descrever em sua totalidade a coleção de abertos para uma determinada topologia em um conjunto pode ser uma tarefa muito difícil. Em geral, o que se faz é especificar uma coleção menor de subconjuntos que gera essa topologia. Nesse sentido, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.4. Se X é um conjunto, uma ***base*** para uma topologia em X é uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

(1) Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$.

(2) Se $x \in B_1 \cap B_2$, onde $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, então existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Os elementos de $\mathfrak{B}$ são denominados ***elementos básicos***. Quando uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X satisfaz as condições estabelecidas na Definição 2.1.4, definimos a ***topologia*** τ ***gerada por*** $\mathfrak{B}$ da seguinte maneira: Um subconjunto U de X é dito um aberto de X, isto é $U \in \tau$, se para cada $x \in U$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset U$. Uma prova do fato que τ é uma topologia em X pode ser encontrada em [24, Definição 13.1].

Definição 2.1.5. Sejam $X = (X, \tau_X)$ e $Y = (Y, \tau_Y)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Dizemos que f é uma ***aplicação aberta*** quando $f(A)$ é um subconjunto aberto de Y sempre que A é um subconjunto aberto de X.

Definição 2.1.6. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to Y$ é ***contínua*** no ponto $a \in X$ quando para todo aberto V de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua quando f é contínua em todos os pontos de X.

Teorema 2.1.3. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é contínua.

(2) Para todo subconjunto A de X, tem-se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(3) Para todo subconjunto fechado B de Y, o conjunto $f^{-1}(B)$ é um subconjunto fechado de X.

(4) Para todo subconjunto aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.

Demonstração. Vide [24, Teorema 18.1]. □

Definição 2.1.7. Dizemos que um conjunto D é um ***conjunto dirigido*** quando existe uma relação $\preceq$ binária com as seguintes propriedades:

(1) $\alpha \preceq \alpha$ para todo $\alpha \in D$.

(2) Se $\alpha \preceq \beta$ e $\beta \preceq \gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in D$, então $\alpha \preceq \gamma$.

(3) Se $\alpha, \beta \in D$, então existe $\gamma \in D$ tal que $\alpha \preceq \gamma$ e $\beta \preceq \gamma$.

Denotaremos um conjunto dirigido D por $(D, \preceq)$.

Exemplo 2.1.1. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais com a relação de ordem usual é um conjunto dirigido.

Exemplo 2.1.2. Se X é um espaço topológico e $a \in X$, então o conjunto D constituído por todos os abertos de X que contêm a é um conjunto dirigido com a seguinte relação: $U \preceq V$ se, e somente se, $V \subseteq U$, onde $U, V \in D$. De fato, $U \subseteq U$ para todo aberto U contendo a. Logo, $U \preceq U$. Agora, fixados $U, V, W \in D$ tais que $U \preceq V$ e $V \preceq W$, temos $V \subseteq U$ e $W \subseteq V$. Logo, $W \subseteq U$, ou seja, $U \preceq W$. Por fim, se $U, V \in D$, então $W = U \cap V \in D$ é tal que $W \subseteq U$ e $W \subseteq V$. Logo, $U \preceq W$ e $V \preceq W$.

Definição 2.1.8. Sejam $D = (D, \preceq)$ um conjunto dirigido e $X = (X, \tau)$ um espaço topológico. Dizemos que uma aplicação $\psi : D \to X$ é uma ***rede*** em X e denotamos por $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. Além disso, dizemos que a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para $x \in X$ quando para todo aberto U contendo x, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Este fato será denotado por $\tau\text{-}\lim_\alpha x_\alpha = x$ ou simplesmente por $\lim_\alpha x_\alpha = x$ quando não houver dúvida sobre a topologia considerada em X.

Proposição 2.1.1. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$. Então, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma rede em A convergindo para x.*

Demonstração. Suponhamos que $x \in \overline{A}$. Pelo Exemplo 2.1.2, o conjunto D de todos os abertos contendo x é um conjunto dirigido. Para cada $U \in D$, escolhemos $x_U \in U \cap A$. Desta forma, $(x_U)_{U \in D}$ é uma rede em A. Além disso, essa rede converge para x. De fato, fixado V um aberto contendo x, como D é um conjunto dirigido, existe $U_0 \in D$ tal que $V \preceq U_0$. Logo, $x_U \in V$ para todo $U \in D$ tal que $U_0 \preceq U$.

Reciprocamente, seja $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ uma rede em A tal que $\lim_\alpha x_\alpha = x$, onde $x \in X$. Então, fixado $U \subset X$ um aberto contendo x, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Em particular, $x_{\alpha_0} \in U$. Portanto, $U \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto U contendo x. $\square$

Proposição 2.1.2. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Então, f é contínua num ponto $a \in X$ se, e somente se, para cada rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ em X convergindo para a em X, a rede $(f(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ converge para $f(a)$ em Y.*

Demonstração. Suponhamos que f é contínua em $a \in X$ e seja $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ uma rede em X tal que $\lim_\alpha x_\alpha = a$. Então, fixado V um aberto de Y contendo $f(a)$, existe um aberto U de X contendo a tal que $f(U) \subset V$. Por outro lado, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Logo, $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \in D$ satisfazendo $\alpha_0 \preceq \alpha$. Portanto, $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(a)$.

Reciprocamente, se f não é contínua em $a \in X$, então existe um aberto V de Y contendo $f(a)$ tal que $f(U) \not\subset V$ para todo aberto U de X contendo a. Assim, para cada aberto U contendo a, tomamos $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin V$. Desta forma, obtemos uma rede $(x_U)_{U \in D}$ em X, onde D é a coleção de todos os abertos de X contendo a, tal que $x_U \to a$. No entanto, a rede $(f(x_U))_{U \in D}$ não converge para $f(a)$ em Y. Logo, por contra-positiva, segue o resultado. $\square$

Definição 2.1.9. Seja $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos. A ***topologia produto*** no produto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \mid x_\alpha \in X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\}$ é definida como a topologia τ dada pela base de abertos $\mathfrak{B}$ constituída pelos elementos $\prod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, em que $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ e $U_\alpha = X_\alpha$ exceto para um conjunto finito de índices em Λ.

Proposição 2.1.3. *Sejam $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos e (X, τ) como na Definição 2.1.9. Se $(x^\beta_\alpha)_{\beta \in D}$ é uma rede em X que converge para $y = (z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, então $\tau_\alpha\text{-}\lim_\beta x^\beta_\alpha = z_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstração. Fixemos $\alpha_0 \in \Lambda$ e tomemos U_{α_0} um aberto de X_{α_0} contendo z_{α_0}. Afirmamos que $\tau_{\alpha_0}\text{-}\lim_\beta x^\beta_{\alpha_0} = z_{\alpha_0}$. De fato, tomemos o aberto de X dado por $U = \prod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, com U_{α_0} dado e $U_\alpha = X_\alpha$ para $\alpha \neq \alpha_0$. Assim, $y = (z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in U$. Daí, existe $\beta_0 \in D$ tal que $y_\beta \in U$ para todo $\beta \in D$ tal que $\beta_0 \preceq \beta$. Logo, se $\beta \in D$ é tal que $\beta_0 \preceq \beta$, então $x^\beta_\alpha \in U_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Em particular, para $\alpha = \alpha_0$, temos $x^\beta_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$ para todo $\beta \in D$ tal que $\beta_0 \preceq \beta$. Portanto, $\tau_{\alpha_0}\text{-}\lim_\beta x^\beta_{\alpha_0} = z_{\alpha_0}$. Como α_0 foi tomado arbitrariamente, concluímos que $\tau_\alpha\text{-}\lim_\beta x^\beta_\alpha = z_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. $\square$

Definição 2.1.10. Dizemos que uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é uma ***cobertura*** para X se a união dos elementos de $\mathscr{C}$ é igual a X. Neste caso, dizemos que a coleção $\mathscr{C}$ cobre X. Uma subcoleção de $\mathscr{C}$ que cobre X é denominada uma ***subcobertura*** de X. Além disso, dizemos que $\mathscr{C}$ é uma ***cobertura aberta*** para X quando seus elementos são subconjuntos abertos de X.

Definição 2.1.11. Dizemos que um espaço topológico X é ***compacto*** quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Teorema 2.1.4. *Sejam $X = (X, \tau)$ um espaço topológico compacto e $A \subset X$. Se A é fechado em X, então A é compacto.*

Demonstração. Vide [24, Teorema 26.2]. □

Teorema 2.1.5. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se X é um espaço compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Vide [24, Teorema 26.5]. □

Teorema 2.1.6 (Tychonoff)**.** *Seja $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos compactos. Então, (X, τ) é um espaço topológico compacto, onde X e τ são como na Definição 2.1.9.*

Demonstração. Vide [24, Teorema 37.3]. □

Considerando-se espaços topológicos arbitrários, não é sempre verdade que cada subconjunto unitário é um conjunto fechado. Por exemplo, considere no conjunto $X = \{a, b, c\}$ a topologia $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, X\}$. Observe que o conjunto unitário $\{b\}$ não é fechado, pois o seu complementar $\{a, c\}$ não é um aberto de X. Outro fato que vale destacar é que, em espaços topológicos mais gerais, nem sempre é verdadeira a unicidade do limite de redes. De fato, basta considerarmos no espaço topológico (X, τ), definido anteriormente, a rede $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ dada por $x_\alpha = b$ para todo $\alpha \in D$. Esta rede converge para os pontos a, b e c. A fim de garantir que não nos deparemos com as patologias descritas anteriormente, costuma-se impor uma condição adicional sobre os espaços topológicos. Um axioma sugerido por Felix Hausdorff, que enunciaremos a seguir, garante que os conjuntos unitários em espaços topológicos sejam fechados e garante também a unicidade do limite de redes.

Definição 2.1.12. Dizemos que um espaço topológico X é um ***espaço de Hausdorff*** quando para cada par de pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos U e V contendo x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 2.1.7. *Se X é um espaço de Hausdorff, então todo subconjunto finito de X é um subconjunto fechado em X.*

Demonstração. Vide [24, Teorema 17.8]. □

Teorema 2.1.8. *Seja X um espaço de Hausdorff. Se $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ é uma rede convergente em X, então o seu limite é único.*

Demonstração. Seja $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \subset X$ uma rede tal que $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = a$ e $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = b$, onde $a, b \in X$ são tais que $a \neq b$. Como X é um espaço de Hausdorff, existem abertos U e V em X contendo a e b, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Por outro lado, existem $\alpha_1, \alpha_2 \in D$ tais que $x_\alpha \in U$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_1 \preceq \alpha$ e $x_\alpha \in V$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_2 \preceq \alpha$. Como D é um conjunto dirigido, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $\alpha_1 \preceq \alpha_0$ e $\alpha_2 \preceq \alpha_0$. Logo, se $\alpha \in D$ é tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$, então $x_\alpha \in U \cap V$. Absurdo. $\square$

2.2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 2.2.1. Uma ***métrica*** em um conjunto X é uma aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(1) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.

(2) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$ (Desigualdade triangular).

O número $d(x, y)$ é denominado a distância entre x e y na métrica d. Fixados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, o conjunto $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$, dos pontos de X cuja distância ao ponto x é menor que ε é denominada a ***bola aberta*** de raio ε e centro em x. Um conjunto X no qual está definida uma métrica d é denominado um ***espaço métrico*** e é denotado por $X = (X, d)$.

Proposição 2.2.1. *Se d é uma métrica em X, então a coleção τ de todas as bolas abertas $B_\varepsilon(x)$, onde $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, é uma base para uma topologia em X, chamada* ***topologia da métrica*** *induzida por d.*

Demonstração. Vide [24, Definição 20.2]. $\square$

Observação 2.2.1. Todo espaço métrico (X, d) é um espaço topológico. Além disso, vale ressaltar que todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff. Se $x, y \in X$ são tais que $x \neq y$, então, tomando $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$, vemos que $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Observação 2.2.2. Tendo em vista a Proposição 2.2.1, segue que $A \subset X$ é um aberto na topologia da métrica quando para cada $x \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x) \subset A$. Com efeito, sendo A um aberto, então para cada $x \in A$, existe um elemento base $B_\varepsilon(y)$ satisfazendo $x \in B_\varepsilon(y) \subset A$. Por outro lado, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset B_\varepsilon(y)$, de modo que $B_\delta(x) \subset A$.

A seguir, nós veremos como alguns dos resultados topológicos podem ser reeditados no contexto de espaços métricos.

Lema 2.2.1. *Sejam $X = (X, d)$ um espaço métrico e $A \subset X$. Então, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Demonstração. Vide [24, Lema 21.2]. □

Teorema 2.2.1. *Sejam $X = (X, d_X)$, $Y = (Y, d_Y)$ espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f é contínua em $a \in X$.

(2) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $d_X(x, a) < \delta$, então $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

(3) Para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, temos $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Demonstração. Vide [24, Teorema 21.1 e Teorema 21.3]. □

Definição 2.2.2. Sejam $X = (X, d_X)$ e $Y = (Y, d_Y)$ espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ é uma ***isometria*** quando $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ para todos $x, y \in X$.

Observação 2.2.3. Toda isometria $f : X \to Y$ é uma aplicação injetora, pois se $x, y \in X$ são tais que $f(x) = f(y)$, então $d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y)) = 0$. Logo, $x = y$.

Definição 2.2.3. Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de X é uma ***sequência de Cauchy*** quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$. No caso em que toda sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X converge para um ponto $x \in X$, dizemos que X é um ***espaço métrico completo***.

2.3 ESPAÇOS DE BANACH

Nós começaremos esta seção definindo o conceito de norma em um espaço vetorial. Neste trabalho nossos espaços vetoriais serão sempre sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 2.3.1. Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma função não negativa $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é uma ***norma*** em X quando satisfaz aos seguintes axiomas:

(1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$.

(2) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(3) $\|\lambda\, x\| = |\lambda| \|x\|$ para todos $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$ (Desigualdade triangular).

Uma aplicação $p : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo os itens (1), (3) e (4) da Definição 2.3.1 é denominada uma ***seminorma***. Um espaço vetorial X com uma norma $\|\cdot\|$ é dito um ***espaço vetorial normado*** e é denotado por $(X, +, \|\cdot\|)$.

Proposição 2.3.1. *Seja $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. A aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica no espaço X, de modo que $X = (X, d)$ torna-se um espaço métrico.*

Demonstração. Vide [23, Exemplo 1.1.6]. □

Observação 2.3.1. Para um espaço vetorial normado $X = (X, +, \|\cdot\|)$, a norma também satisfaz a desigualdade $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ para todos $x, y \in X$. Dessa forma, a norma $\|\cdot\|$ é uma aplicação contínua em X.

Exemplo 2.3.1. Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff. Consideremos o conjunto $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ é contínua}\}$, em que a topologia de $\mathbb{K}$ é a induzida pela norma. Então, $\mathcal{C}(X)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com a soma $(f+g) : X \to \mathbb{K}$ e multiplicação por escalar $\lambda f : X \to \mathbb{K}$ definidas por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para todos $f, g \in \mathcal{C}(X)$ e $x \in X$. Agora, observemos que, pelo Teorema 2.1.5, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$, onde $f \in \mathcal{C}(X)$, está bem definida. Além disso, $\|\cdot\|_\infty$ define uma norma em $\mathcal{C}(X)$, veja [16, Definição 1.3]. Logo, $\mathcal{C}(X) = (\mathcal{C}(X), +, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado.

Teorema 2.3.1 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Seja $p \in [1, \infty)$. Então, para todos $x_n, y_n \in \mathbb{K}$, onde $n = 1, \ldots, k$, temos*

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Vide [16, Teorema 1.7]. □

Definição 2.3.2. Seja $p \in [1, \infty)$. Denotaremos por ℓ_p o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ converge. Denotaremos por ℓ_∞ o conjunto de todas as sequências escalares limitadas em $\mathbb{K}$, isto é, sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que, para algum $M > 0$, $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A seguir, nós apresentaremos mais exemplos de espaços vetoriais normados.

Exemplo 2.3.2. Para todo $p \in [1, \infty)$, o conjunto ℓ_p é um espaço vetorial normado. De fato, fixemos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Pela desigualdade de Minkowski (Teorema 2.3.1), para todos $k, l \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k \leq l$, temos:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{l} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{l} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, quando $l \to \infty$, $\left(\sum_{n=1}^{k} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, quando $k \to \infty$, nós podemos ver que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p < \infty$. Definimos $x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\lambda\, x = (\lambda\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\lambda \in \mathbb{K}$. Dessa forma, as operações de soma e multiplicação por escalar estão bem definidas em ℓ_p. Além disso, para cada $x \in \ell_p$, $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ define uma norma nesse espaço. Logo, $\ell_p = (\ell_p, +, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado (ver [18, Teorema 2.28]).

Exemplo 2.3.3. Agora, consideremos o conjunto ℓ_∞ da Definição 2.3.2. Sabemos que a soma de duas sequências limitadas é uma sequência limitada e que o múltiplo escalar de uma sequência limitada também é uma sequência limitada. Desta forma, ℓ_∞ torna-se um espaço vetorial com as mesmas operações definidas no Exemplo 2.3.2. Além disso, de modo análogo ao Exemplo 2.3.1, definindo $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ para todo $x \in \ell_\infty$, obtemos uma norma nesse espaço. Portanto, $\ell_\infty = (\ell_\infty, +, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 2.3.4. Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $A \subset X$ um subespaço fechado. A relação $\sim$ em X definida por $x \sim y$ se, e somente se, $x - y \in A$, onde $x, y \in X$, é uma relação de equivalência. Denotaremos a classe de equivalência de um elemento $x \in X$ por $\hat{x} = \{y \in X \mid x - y \in A\}$. O conjunto de todas as classes de equivalência de X será denotado por $X/A = \{\hat{x} \mid x \in X\}$. O conjunto X/A torna-se um espaço vetorial com as operações $\hat{x} + \hat{y} := \widehat{x + y}$ e $\lambda\, \hat{x} := \widehat{\lambda\, x}$, onde $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ são arbitrários. Além disso, como $A \subset X$ é fechado, $\|\hat{x}\| = \inf\{\|y\|_X \mid y \in \hat{x}\}$ define uma norma em X/A, denominada a norma canônica em X/A, veja [16, Definição 1.20].

Definição 2.3.3. Seja X um espaço vetorial munido com duas normas $|||\cdot|||$ e $\|\cdot\|$. Dizemos que as normas $|||\cdot|||$ e $\|\cdot\|$ são ***equivalentes*** quando existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha\, \|x\| \leq |||x||| \leq \beta\, \|x\|$ para todo $x \in X$.

Exemplo 2.3.5. Seja $\{(X_i, \|\cdot\|_{X_i})\}_{i=1}^n$ uma coleção finita de espaços vetoriais normados. O produto cartesiano $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ torna-se um espaço vetorial com as operações usuais, isto é,

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda\, (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda\, x_1, \ldots, \lambda\, x_n),$$

onde, $x_i, y_i \in X_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Além do mais, para $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ arbitrário, definimos as seguintes normas no espaço X:

(1) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{X_i}$;

(2) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{X_i}^2}$;

(3) $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{X_i}$.

Vale ressaltar que as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes.

Notação: Seja $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Denotaremos a bola unitária fechada em X por $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$.

Definição 2.3.4. Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Dizemos que T é uma aplicação ***limitada*** quando $T(B_X)$ é um subconjunto limitado de Y.

A seguir, nós apresentaremos outras formas de se definir continuidade para o contexto das aplicações lineares entre espaços vetoriais normados.

Proposição 2.3.2. *Sejam $(X, +, \|\cdot\|_X)$, $(Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) T é contínua em X.

(2) T é contínua na origem.

(3) Existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

(4) $T(B_X)$ é limitado em Y.

Demonstração. Vide [16, Proposição 1.17]. □

Notação: O espaço das aplicações lineares contínuas entre espaços vetoriais normados será denotado por $B(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ é linear e limitada}\}$. Quando $X = Y$, denotaremos simplesmente $B(X) = B(X, X)$. No caso em que $Y = \mathbb{K}$, o espaço $B(X, \mathbb{K})$, denominado o dual topológico de X, será denotado por X^*. Além disso, um elemento $f \in X^*$ é denominado um funcional linear contínuo.

Proposição 2.3.3. *Se $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ são espaços vetoriais normados, então $\|T\|_\infty = \sup\limits_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y$, onde $T \in B(X, Y)$, define uma norma em $B(X, Y)$.*

Demonstração. Vide [25, Teorema 4.1]. □

Observação 2.3.2. Em espaços normados de dimensão finita nós sabemos que todo funcional linear é contínuo. Por outro lado, em espaços normados de dimensão infinita existem funcionais lineares que não são contínuos - veja Teorema 2.3.3.

Agora nós falaremos um pouco sobre conjuntos parcialmente ordenados e o Lema de Zorn - lema este que nos permite provar o famoso teorema de Hahn-Banach.

Definição 2.3.5. Uma ***ordem parcial*** em um conjunto X é uma relação binária $\preceq$ satisfazendo, para todo $x, y, z \in X$, as seguintes condições:

(1) Reflexividade: $x \preceq x$.

(2) Antissimetria: Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x = y$.

(3) Transitividade: Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.

Nesse contexto, um ***conjunto parcialmente ordenado*** é um par $(X, \preceq)$ em que X é um conjunto e $\preceq$ é uma ordem parcial em X. Dizemos que X é um ***conjunto totalmente ordenado*** quando, para todos $x, y \in X$, temos $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Definição 2.3.6. Seja $X = (X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que um subconjunto A de X é uma ***cadeia*** quando A é um conjunto totalmente ordenado com a ordem parcial induzida por X. Uma ***cota superior*** para um subconjunto A de um conjunto parcialmente ordenado X é um elemento $x \in X$ tal que $a \preceq x$ para todo $a \in A$. Dizemos que um elemento $m \in X$ é ***maximal*** quando $m = a$ sempre que $m \preceq a$, onde $a \in X$.

Lema de Zorn. Se $X = (X, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia A em X possui cota superior em X, então X possui um elemento maximal.

O Lema de Zorn nos permite provar o seguinte resultado:

Teorema 2.3.2. *Todo espaço vetorial não nulo possui uma base.*

Demonstração. Vide [26, Teorema 6.1.1]. $\square$

Como consequência do teorema acima, nós podemos provar o seguinte:

Teorema 2.3.3. *Se $X = (X, +, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, então existe um funcional linear descontínuo $f : X \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.2, X possui uma base. Tomamos $\mathscr{B} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma base de X constituída de vetores unitários, isto é, $\|x_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Como X tem dimensão infinita, a cardinalidade do conjunto $\mathscr{B}$ é infinita. Como todo conjunto infinito possui um subconjunto infinito enumerável (ver [24, Teorema 9.1]), podemos tomar $\mathscr{C} = \{x_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{B}$. Definimos $f : \mathscr{B} \to \mathbb{K}$ tal que $f(x_{\alpha_n}) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f(x_\alpha) = 0$ quando $x_\alpha \notin \mathscr{C}$. Passamos então para uma extensão linear $f : X \to \mathbb{K}$. No entanto, f não é contínua, pois $f(B_X)$ não é um subconjunto limitado de $\mathbb{K}$. $\square$

Definição 2.3.7. Seja $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Dizemos que X é um ***espaço de Banach*** quando $X = (X, d)$ é um espaço métrico completo, onde d é a métrica induzida pela norma, isto é, $d(x, y) = \|x - y\|$ para todos $x, y \in X$.

Neste contexto, nós temos, por exemplo, os seguintes resultados:

Teorema 2.3.4. *Um espaço vetorial normado $X = (X, +, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em X é convergente.*

Demonstração. Vide [16, Lema 1.15]. $\square$

Proposição 2.3.4. *Sejam X um espaço de Banach e $Y \subset X$ um subespaço. Então, Y é um espaço de Banach se, e somente se, Y é um subespaço fechado de X.*

Agora nós apresentaremos alguns espaços de Banach clássicos.

Exemplo 2.3.6. O espaço $\mathcal{C}(X) = (\mathcal{C}(X), +, \|\cdot\|_\infty)$, onde X um espaço topológico compacto de Hausdorff, é um espaço de Banach. Veja [16, Definição 1.3].

Exemplo 2.3.7. Para todo $p \in [1, \infty)$, o espaço $\ell_p = (\ell_p, +, \|\cdot\|_p)$, é um espaço de Banach. Veja [16, Proposição 1.11].

Exemplo 2.3.8. O espaço $\ell_\infty = (\ell_\infty, +, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Veja [16, Proposição 1.11].

Exemplo 2.3.9. Denotamos por c o espaço de todas as sequências escalares convergentes em $\mathbb{K}$ e por c_0 o espaço de todas as sequências escalares que convergem para $0 \in \mathbb{K}$. Então c e c_0 são subespaços fechados de ℓ_∞ na norma induzida e, portanto, pela Proposição 2.3.4, são espaços de Banach. Veja [16, Proposição 1.11].

Exemplo 2.3.10. Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $A \subset X$ um subespaço fechado. Então, o espaço quociente X/A com a norma canônica $\|\hat{x}\| = \inf\{\|y\|_X \mid y \in \hat{x}\}$, onde $\hat{x} \in X/A$, é um espaço de Banach. Veja [16, Proposição 1.21].

Exemplo 2.3.11. Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços vetoriais normados. Se Y é um espaço de Banach, então o espaço $B(X, Y)$, com a norma dada por $\|T\|_\infty = \sup\limits_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y$, é um espaço de Banach. Veja [16, Teorema 4.1]. Consequentemente, o espaço $X^* = B(X, \mathbb{K})$, o dual topológico de X, é um espaço de Banach.

Exemplo 2.3.12. Seja $\{(X_i, \|\cdot\|_{X_i})\}_{i=1}^n$ uma coleção finita de espaços de Banach. O espaço $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ é um espaço de Banach quando munido de qualquer uma das normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ definidas no Exemplo 2.3.5. Veja [23, Corolário 7.2.1].

Exemplo 2.3.13. Pelo Exemplo 2.3.6, tomando $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C}([0, 1])$ é um espaço de Banach. Consideremos $\mathcal{P}([0, 1]) = \{p : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ é um polinômio}\} \subset \mathcal{C}([0, 1])$. Então, $\mathcal{P}([0, 1])$ é um subespaço de $\mathcal{C}([0, 1])$. No entanto, $\mathcal{P}([0, 1])$ não é um espaço de Banach. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos um polinômio $p_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dado por $p_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Desta forma obtemos uma sequência de polinômios $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{P}([0, 1])$.

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. É bem conhecido que $f \in \mathcal{C}([0,1])$ e que a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Assim, $f \in \overline{\mathcal{P}([0,1])}$. Porém, $f \notin \mathcal{P}([0,1])$. Logo, $\mathcal{P}([0,1])$ não é um subespaço fechado de $\mathcal{C}([0,1])$. Portanto, pela Proposição 2.3.4, segue o resultado.

2.4 ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Definição 2.4.1. Seja X um espaço vetorial. Um ***produto interno*** em X é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ com as seguintes propriedades:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$.

(2) $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todos $x, y \in X$, onde $\overline{\lambda}$ representa a conjugação complexa.

(4) $\langle x + \lambda\, y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda\, \langle y, z \rangle$ para todos $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemplo 2.4.1. Se $X = \mathbb{R}^n$, o produto interno canônico é dado por $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. De modo análogo, definimos o produto interno canônico em $\mathbb{C}^n$ por $\langle z, w \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i\, \overline{w_i}$, onde $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.

Proposição 2.4.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se X é um espaço vetorial equipado com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\, \sqrt{\langle y, y \rangle}$ para todos $x, y \in X$.*

Demonstração. Vide [16, Teorema 1.29]. □

Como consequência da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4.2. *Seja X um espaço vetorial munido com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, a aplicação $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define uma norma em X.*

Demonstração. Vide [16, Teorema 1.29]. □

Definição 2.4.2. Dizemos que um espaço de Banach $\mathcal{H}$ é um ***espaço de Hilbert*** quando existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathcal{H}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Observação 2.4.1. Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, então a norma induzida pelo produto interno satisfaz a ***identidade do paralelogramo***, isto é, para todos $x, y \in \mathcal{H}$, temos:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Teorema 2.4.1. *Seja $X = (X, +, \| \cdot \|)$ um espaço vetorial normado. Então, sua norma $\| \cdot \|$ é proveniente de um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a identidade do paralelogramo.*

Demonstração. Vide [15, Teorema 18.1]. □

Exemplo 2.4.2. Consideremos o espaço de Banach $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n, +, \|\cdot\|_2)$ com a norma Euclidiana, isto é, com a norma definida por $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$, onde $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Então, $\mathbb{C}^n$ é um espaço de Hilbert. Com efeito, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos $|z_i|^2 = z_i\,\overline{z_i}$, de modo que $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} z_i\,\overline{z_i}}$. Considerando o produto interno canônico em $\mathbb{C}^n$, isto é, $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\,\overline{w_i}$, onde $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, temos $\langle z, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\,\overline{z_i} = \|z\|_2^2$. Logo, $\|z\|_2 = \sqrt{\langle z, z\rangle}$.

Exemplo 2.4.3. Seja $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, +, \|\cdot\|)$ um espaço de Hilbert. Denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno em $\mathcal{H}$ que induz a norma $\|\cdot\|$. Então, fixado $n \in \mathbb{N}$, pelo Exemplo 2.3.12, o espaço $\mathcal{H}^n$ é um espaço de Banach quando munido com a norma $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^n$. A aplicação $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle : \mathcal{H}^n \times \mathcal{H}^n \to \mathbb{K}$ definida por

$$\langle\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i\rangle, \tag{2.1}$$

define um produto interno em $\mathcal{H}^n$. Além disso, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^n$, nós temos $\langle\langle x, x\rangle\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$. Logo, $\sqrt{\langle\langle x, x\rangle\rangle} = \|x\|_2$. Desta forma, a norma $\|\cdot\|_2$ no espaço $\mathcal{H}^n$ provém do produto interno definido em (2.1).

No próximo exemplo, observamos que nem todo espaço de Banach é um espaço de Hilbert.

Exemplo 2.4.4. O espaço de Banach $\ell_\infty = (\ell_\infty, +, \|\cdot\|_\infty)$ não é um espaço de Hilbert. Com efeito, caso contrário existiria um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{K}$ tal que, para todo $x \in \ell_\infty$, $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Assim, a norma $\|\cdot\|_\infty$ satisfaz a identidade do paralelogramo. Tomemos $e_1 = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ definida por $x_1 = 1$ e $x_n = 0$ para $n \geq 2$. Tomemos também $e_2 = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ definida por $y_2 = 1$ e $y_n = 0$ se $n \neq 2$. Desta forma, nós temos $\|e_1 + e_2\|_\infty^2 = 1$, $\|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 1$, $\|e_1\|_\infty^2 = 1$ e $\|e_2\|_\infty^2 = 1$. Mas, pela identidade do paralelogramo, temos $\|e_1 + e_2\|_\infty^2 + \|e_1 - e_2\|_\infty^2 = 2\,(\|e_1\|_\infty^2 + \|e_2\|_\infty^2)$. Absurdo. Portanto, a norma $\|\cdot\|_\infty$ não satisfaz a identidade do paralelogramo e, pelo Teorema 2.4.1, não é proveniente de um produto interno.

Lema 2.4.1. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $x, y \in \mathcal{H}$. Então, $\langle x, y\rangle = 0$ se, e somente se, $\|x\| \leq \|x + t\,y\|$ para todo $t \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\langle x, y\rangle = 0$. Fixado $t \in \mathbb{K}$, nós temos

$$\|x + t\,y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,Re(\bar{t}\,\langle x, y\rangle) + |t|^2\,\|y\|^2. \tag{2.2}$$

Dessa forma, $\|x + t\,y\|^2 = \|x\|^2 + |t|^2\,\|y\|^2$, isto é, $\|x\| \leq \|x + t\,y\|$. Reciprocamente, suponhamos que $\|x\| \leq \|x + t\,y\|$ para todo $t \in \mathbb{K}$. Então, $\|x\|^2 \leq \|x + t\,y\|^2$. Em particular, utilizando (2.2) e tomando $t = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, temos $|\langle x, y\rangle|^2 \leq 0$. Logo, $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Definição 2.4.3. Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $A \subset \mathcal{H}$ um subespaço. O ***complemento ortogonal*** de A em $\mathcal{H}$ é definido por $A^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in A\}$.

Observação 2.4.2. O complemento ortogonal de um subespaço A de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um subespaço de $\mathcal{H}$. Com efeito, fixados $x, y \in A^{\perp}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, dado $z \in A$, $\langle x + \lambda\,y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\,\langle y, z\rangle = 0$. Logo, $x + \lambda\,y \in A^{\perp}$.

Definição 2.4.4. Sejam X um espaço vetorial e $A, B \subset X$ subespaços. Dizemos que X é a ***soma direta*** de A e B, o que denotaremos por $X = A \oplus B$, quando todo $x \in X$ possui uma representação única na forma $x = v + w$, onde $v \in A$ e $w \in B$.

Teorema 2.4.2. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $A \subset \mathcal{H}$ é um subespaço fechado, então $\mathcal{H} = A \oplus A^{\perp}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{H}$. Tomemos $\delta := \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$. Assim, obtemos uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - a_n\| = \delta$. Pela identidade do paralelogramo, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$2\,\|a_m - x\|^2 + 2\,\|a_n - x\|^2 = \|a_m - a_n\|^2 + \|a_m + a_n - 2\,x\|^2.$$

Como $\frac{a_m + a_n}{2} \in A$, segue que

$$\begin{aligned}\|a_m - a_n\|^2 &= 2\,\|a_m - x\|^2 + 2\,\|a_n - x\|^2 - 4\,\left\|\frac{a_m + a_n}{2} - x\right\|^2\\ &\leq 2\,\|a_m - x\|^2 + 2\,\|a_n - x\|^2 - 4\,\delta^2.\end{aligned}$$

Como a norma em $\mathcal{H}$ é contínua, quando $m \to \infty$ e $n \to \infty$, temos $\|a_m - a_n\| \to 0$. Desta forma, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em A. Como A é fechado, $a_n \to a$ para algum $a \in A$. Uma vez que $\|x - a_n\| \to \delta$, novamente pela continuidade da norma, temos $\|x - a\| = \|\lim\limits_{n\to\infty}(x - a_n)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - a_n\| = \delta$. Agora, fixemos $y \in A$. Então, para todo $t \in \mathbb{K}$, temos $\|(x - a) + t\,y\| = \|x + (t\,y - a)\| \geq \delta = \|x - a\|$. Pelo Lema 2.4.1, segue que $x - a \in A^{\perp}$. Portanto, $x = a + (x - a)$, onde $a \in A$ e $x - a \in A^{\perp}$. Por fim, suponhamos que $a' \in A$ e $z \in A^{\perp}$ são tais que $x = a' + z$. Então, $a' + z = a + (x - a)$. Dessa forma, $z - (x - a) = a - a' \in A \cap A^{\perp}$. Logo, $a' = a$ e $z = x - a$. $\square$

Definição 2.4.5. Sejam X e Y espaços vetoriais. Dizemos que uma aplicação $T : X \to Y$ é ***antilinear*** quando $T(x + \lambda\,y) = T(x) + \overline{\lambda}\,T(y)$ para todos $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Teorema 2.4.3 (Representação de Riesz)**.** *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{H}^*$ o seu dual topológico. A aplicação $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ que a cada $y \in \mathcal{H}$ associa $f(y) = T_y \in \mathcal{H}^*$, dada por $T_y(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, é uma isometria antilinear sobrejetora.*

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{H}$. Notemos que se $y = 0$, então $T_y \equiv 0$. Assim, suponhamos que $y \neq 0$, então $f(y) = T_y$ é um funcional linear e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|T_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Diante disso, $T_y \in \mathcal{H}^*$. Logo, a aplicação f está bem definida. Além disso, se $x \in \mathcal{H}$ é tal que $\|x\| \leq 1$, então $|T_y(x)| \leq \|y\|$. Assim, $\|T_y\| \leq \|y\|$. Por outro lado, $\|y\|^2 = |\langle y, y\rangle| = |T_y(y)| \leq \|T_y\|\,\|y\|$. Dessa forma, $\|y\| \leq \|T_y\|$. Logo, $\|f(y)\| = \|T_y\| = \|y\|$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Agora, dados $y, z \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $f(y + \lambda\, z)(x) = \langle x, y + \lambda\, z\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\,\langle x, z\rangle = f(y)(x) + \overline{\lambda}\, f(z)(x) = (f(y) + \overline{\lambda}\, f(z))(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Portanto, f é antilinear. Por fim, fixemos $T \in \mathcal{H}^*$. Se $T \equiv 0$, então $T = f(0)$. Suponhamos $T \not\equiv 0$. Como T é contínuo, o núcleo $\ker(T)$ é um subespaço próprio fechado em $\mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.4.2, $\mathcal{H} = \ker(T) \oplus \ker(T)^{\perp}$. Diante disso, existe $x \in \ker(T)^{\perp}$ tal que $\|x\| = 1$. Agora, observemos que para cada $y \in \mathcal{H}$, $(T(y)\, x - T(x)\, y) \in \ker(T)$. Assim, para todo $y \in \mathcal{H}$, tem-se $\langle x, T(y)\, x - T(x)\, y\rangle = 0$, ou seja, $\overline{T(y)} = \overline{\langle y, \overline{T(x)}\, x\rangle}$. Desta forma, $T(y) = \langle y, \overline{T(x)}\, x\rangle$. Tomando $u = \overline{T(x)}\, x$, temos $T = f(u)$. □

2.5 APLICAÇÕES BILINEARES

Definição 2.5.1. Sejam X, Y e Z espaços vetoriais. Dizemos que $\varphi : X \times Y \to Z$ é uma aplicação ***bilinear*** quando, para cada $a \in X$ e cada $b \in Y$, as aplicações $\varphi_a : Y \to Z$ e $\varphi_b : X \to Z$ definidas por $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ e $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$, são aplicações lineares. Quando $Z = \mathbb{K}$ é um corpo, dizemos que $\varphi : X \times Y \to \mathbb{K}$ é um ***funcional bilinear***.

Exemplo 2.5.1. O produto interno em um espaço vetorial real é uma aplicação bilinear.

Proposição 2.5.1. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ e $Z = (Z, +, \|\cdot\|_Z)$ espaços vetoriais normados. Se $\varphi : X \times Y \to Z$ é uma aplicação contínua, então para cada $a \in X$ e cada $b \in Y$, as aplicações φ_a e φ_b são contínuas.*

Demonstração. Fixemos $\varepsilon > 0$. Vamos considerar a norma $\|\cdot\|_\infty$ no espaço $X \times Y$. Seja $(a, b) \in X \times Y$. Como φ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $(x, y) \in X \times Y$ e $\|(x - a, y - b)\|_\infty < \delta$, então $\|\varphi(x, y) - \varphi(a, b)\|_Z < \varepsilon$. Assim, se $x \in X$ e $\|x - a\|_X < \delta$, temos $\|\varphi_b(x) - \varphi_b(a)\|_Z = \|\varphi(x, b) - \varphi(a, b)\|_Z < \varepsilon$. Por outro lado, se $y \in Y$ e $\|y - b\|_Y < \delta$, então $\|\varphi_a(y) - \varphi_a(b)\|_Z = \|\varphi(a, y) - \varphi(a, b)\|_Z < \varepsilon$. Logo, φ_a e φ_b são aplicações contínuas para todos $a \in X$ e $b \in Y$. □

No próximo exemplo, nós constatamos que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira.

Exemplo 2.5.2. Seja $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi(x, y) = \dfrac{x\, y}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\varphi(0, 0) = 0$. Então, φ é uma aplicação contínua em cada uma de suas coordenadas. Porém, observamos que φ não é contínua no ponto $(a, b) = (0, 0)$. De fato, seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dada por $z_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = (0,0)$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = \varphi(0,0)$.

Proposição 2.5.2. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ e $Z = (Z, +, \|\cdot\|_Z)$ espaços vetoriais normados e $\varphi : X\times Y \to Z$ uma aplicação bilinear contínua. Então, existe $M > 0$ tal que $\|\varphi(x,y)\|_Z \leq M\,\|x\|_X\,\|y\|_Y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$.*

Demonstração. Fixemos $x \in X$ e $y \in Y$. Suponhamos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Como φ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\|\varphi(v,w)\|_Z < 1$ sempre que $(v,w) \in X\times Y$ e $\|(v,w)\|_\infty < \delta$. Agora, tomamos $x_0 = \frac{\delta}{4\,\|x\|_X}\,x$ e $y_0 = \frac{\delta}{4\,\|y\|_Y}\,y$. Assim, $\|x_0\|_X < \frac{\delta}{2}$ e $\|y_0\|_Y < \frac{\delta}{2}$. Diante disso, temos $\|(x_0,y_0)\|_\infty < \delta$, o que implica $\|\varphi(x_0,y_0)\|_Z < 1$. Logo, $\|\varphi(x,y)\|_Z \leq \frac{16}{\delta^2}\,\|x\|_X\,\|y\|_Y$. Desta forma, basta tomarmos $M = \frac{16}{\delta^2}$. Agora, observemos que se $x = 0$ ou $y = 0$, então $\|\varphi(x,y)\|_Z = 0 = M\,\|x\|_X\,\|y\|_Y$. Portanto, $\|\varphi(x,y)\| \leq M\,\|x\|_X\,\|y\|_Y$ para todos $x \in X$ e $y \in Y$. $\square$

2.6 ANÁLISE COMPLEXA

Definição 2.6.1. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é ***diferenciável*** no ponto $a \in U$ quando existe o limite $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Quando f é diferenciável em todos os pontos de U, dizemos que f é diferenciável em U.

Observação 2.6.1. Se $f : U \to \mathbb{C}$ é uma função diferenciável em $U \subset \mathbb{C}$, então podemos definir a função $f' : U \to \mathbb{C}$. Neste caso podemos considerar $f^{(2)} = (f')'$ - desde que f' seja diferenciável. Indutivamente definimos: $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$ para todo $n \geq 2$. Neste contexto, f é dita ***infinitamente diferenciável*** em U quando $f^{(n)}$ existe para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.6.2. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é uma função ***analítica*** quando ela é diferenciável em U e a sua derivada f' é uma função contínua.

Proposição 2.6.1. *Seja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-a)^n$ com raio de convergência $R > 0$, ou seja, $f : B_R(a) \to \mathbb{C}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) Para cada $k \geq 1$ a série $\sum\limits_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n\,(z-a)^{n-k}$ tem raio de convergência R.

(2) A função f é infinitamente diferenciável em $B_R(a)$. Além disso, vale a seguinte igualdade

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n\,(z-a)^{n-k}$$

para todo $k \geq 1$ e $z \in B_R(a)$.

(3) Para todo n inteiro satisfazendo $n \geq 0$, temos $a_n = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)$.

Demonstração. Vide [13, Proposição 2.5]. $\square$

Definição 2.6.3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é uma função ***inteira*** quando ela é analítica em todo o plano complexo.

Teorema 2.6.1 (Liouville)**.** *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira e limitada, então f é constante.*

Demonstração. Vide [13, Teorema 3.4]. $\square$

3 ANÁLISE FUNCIONAL

O objetivo deste capítulo será o de apresentar três dos teoremas clássicos da Análise Funcional, a saber, Teorema de Hahn-Banach, Teorema do Gráfico Fechado, e por fim o Teorema de Banach-Alaoglu.

3.1 TEOREMA DE HAHN-BANACH

3.1.1 A versão real do Teorema de Hahn-Banach

A fim de provarmos a versão real do Teorema de Hahn-Banach, nós precisaremos apresentar uma definição preliminar e um lema técnico.

Definição 3.1.1. Sejam X um espaço vetorial real e $q : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que q é um ***funcional sublinear*** quando para todos $x, y \in X$ e $\lambda \geq 0$, temos:

(1) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

(2) $q(\lambda\, x) = \lambda\, q(x)$.

Observação 3.1.1. De acordo com a definição anterior, ressaltamos que não estamos excluindo a possibilidade de $q(x)$ ser negativo para algum $x \in X$. Quando $q(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, temos $q(\lambda\, x) = |\lambda|\, q(x)$. Nesse caso, q é uma seminorma.

Notação: Sejam X um espaço vetorial e M um subconjunto de X. Denotaremos por $\langle M \rangle$ o subespaço de X gerado pelo conjunto M.

Lema 3.1.1. *Sejam X um espaço vetorial real, $A \subset X$ um subespaço e $f : A \to \mathbb{R}$ um funcional linear satisfazendo $f(x) \leq q(x)$ para todo $x \in A$, onde $q : X \to \mathbb{R}$ é um funcional sublinear. Se $X = A \oplus \langle x_0 \rangle$, para algum $x_0 \in X$, então existe um funcional linear $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$ e $F|_A = f$.*

Demonstração. Como f é linear, temos $f(x) - f(y) \leq q(x + x_0) + q(-x_0 - y)$, isto é, $-f(y) - q(-x_0 - y) \leq -f(x) + q(x + x_0)$ para todos $x, y \in A$. Logo, fixado $x \in A$, segue que o conjunto $\mathscr{C}_x = \{-f(y) - q(-x_0 - y) \mid y \in A\}$ é limitado superiormente. Desta forma, existe $a = \sup \mathscr{C}_x$. De modo análogo, fixado $y \in A$, $\mathscr{C}_y = \{-f(x) + q(x + x_0) \mid x \in A\}$ é um conjunto limitado inferiormente. Assim, existe $b = \inf \mathscr{C}_y$. Consequentemente, $a \leq b$. Agora, fixemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$. Então,

$$-f(y) - q(-x_0 - y) \leq c \text{ para todo } y \in A, \tag{3.1}$$

$$c \leq -f(x) + q(x + x_0) \text{ para todo } x \in A. \tag{3.2}$$

Definimos $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x + \alpha\, x_0) = f(x) + \alpha\, c$ para todo $x \in A$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Afirmamos que F é linear. Com efeito, fixemos $x_1 + \alpha_1\, x_0, x_2 + \alpha_2\, x_0 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} F(x_1 + \alpha_1\, x_0 + \lambda\,(x_2 + \alpha_2\, x_0)) &= F(x_1 + \lambda\, x_2 + (\alpha_1 + \lambda\, \alpha_2)\, x_0) \\ &= f(x_1 + \lambda\, x_2) + (\alpha_1 + \lambda\, \alpha_2)\, c \\ &= f(x_1) + \alpha_1\, c + \lambda\,(f(x_2) + \alpha_2\, c) \\ &= F(x_1 + \alpha_1\, x_0) + \lambda\, F(x_2 + \alpha_2\, x_0). \end{aligned}$$

Além disso, fixado $x \in A$, temos $F(x) = F(x + 0\, x_0) = f(x)$. Assim, $F|_A = f$. Finalmente, afirmamos que $F(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$. De fato, fixemos $x \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Observamos que $\alpha^{-1}\, x \in A$. Se $\alpha < 0$, então, por (3.1) temos $-f(\alpha^{-1}\, x) - q(-x_0 - \alpha^{-1}\, x) \leq c$, ou seja, $f(x) + \alpha\, c \leq q(\alpha\, x_0 + x)$. Logo, $F(x + \alpha\, x_0) = f(x) + \alpha\, c \leq q(x + \alpha\, x_0)$. Por outro lado, se $\alpha \geq 0$, então, por (3.2) temos $c \leq -f(\alpha^{-1}\, x) + q(\alpha^{-1}\, x + x_0)$, ou seja, $f(x) + \alpha\, c \leq q(x + \alpha\, x_0)$. Logo, $F(x + \alpha\, x_0) = f(x) + \alpha\, c \leq q(x + \alpha\, x_0)$. □

Teorema 3.1.1 (Hahn-Banach - versão real)**.** *Sejam X um espaço vetorial real e $A \subset X$ um subespaço. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é um funcional linear satisfazendo $f(x) \leq q(x)$ para todo $x \in A$, onde $q : X \to \mathbb{R}$ é um funcional sublinear, então existe um funcional linear $F : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo $F(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$ e $F|_A = f$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{C}$ o conjunto de todos os funcionais lineares $g : M \to \mathbb{R}$ tais que $A \subseteq M$, $g|_A = f$ e $g(x) \leq q(x)$ para todo $x \in M$, onde M é subespaço de X. Denotaremos os elementos de $\mathscr{C}$ por (g, M). Como $f \in \mathscr{C}$, temos $\mathscr{C} \neq \emptyset$. Agora, introduzimos uma relação de ordem parcial em $\mathscr{C}$ da seguinte maneira: $(g, M) \preceq (g', M')$ se, e somente se, $M \subseteq M'$ e $g'|_M = g$, onde $(g, M), (g', M') \in \mathscr{C}$. Sejam $\mathscr{L} = \{(g_i, M_i)\}_{i \in \Omega}$ uma cadeia em $\mathscr{C}$ e $N = \bigcup\limits_{i \in \Omega} M_i$. Então, N é um subespaço de X e $M_i \subset N$ para todo $i \in \Omega$. Consequentemente, $A \subseteq N$. Definimos a aplicação $\Psi : N \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi(x) = g_i(x)$, onde $x \in M_i$ e $i \in \Omega$. Desta forma, como $\mathscr{L}$ é um conjunto totalmente ordenado, a aplicação Ψ está bem definida e é linear por construção. Agora, observemos que, para cada $x \in A$ fixado, temos $\Psi(x) = g_i(x) = f(x)$, $i \in \Omega$, ou seja, $\Psi|_A = f$. Além disso, dado $x \in N$, segue que $\Psi(x) = g_i(x)$, onde $x \in M_i$ e $i \in \Omega$. Assim, $\Psi(x) \leq q(x)$ para todo $x \in N$. Portanto, $(\Psi, N) \in \mathscr{C}$. Além do mais, $(g_i, M_i) \preceq (\Psi, N)$ para todo $i \in \Omega$. Pelo Lema de Zorn, $\mathscr{C}$ possui um elemento maximal $(F, \tilde{N}) \in \mathscr{C}$. Diante disto, afirmamos que $\tilde{N} = X$. Com efeito, suponhamos que exista $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \tilde{N}$. Consideremos o subespaço $W = \tilde{N} \oplus \langle x_0 \rangle$ de X. Então, $\tilde{N} \subsetneq W$ e $A \subset W$. Pelo Lema 3.1.1, existe um funcional linear $\varphi : W \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \leq q(x)$ para todo $x \in W$ e $\varphi|_{\tilde{N}} = F$. Consequentemente, $\varphi|_A = f$. Desta forma, $(\varphi, W) \in \mathscr{C}$ e $(F, \tilde{N}) \preceq (\varphi, W)$. Absurdo, pois $(F, \tilde{N})$ é maximal. □

3.1.2 A versão complexa do Teorema de Hahn-Banach

Agora, seja $X = (X, +)$ um espaço vetorial complexo. Em particular, X é um espaço vetorial real. Além disso, se $f : X \to \mathbb{C}$ é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear, então f também é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear. Além disso, nós podemos escrever f da seguinte forma: $f(x) = u(x) + i\, v(x)$, onde $u : X \to \mathbb{R}$ e $v : X \to \mathbb{R}$ são funções reais. Além do mais, existe uma relação intrínseca entre u e v. Com efeito, $f(i\,x) = i\, f(x) = i\, u(x) - v(x) = u(i\,x) + i\, v(i\,x)$. Logo, $v(x) = -u(i\,x)$ para todo $x \in X$. Assim, para cada $x \in X$, podemos escrever $f(x) = u(x) - i\, u(i\,x)$. A seguir, nós veremos como nós podemos "complexificar" um funcional linear real.

Lema 3.1.2. *Sejam X um espaço vetorial complexo e $u : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação $\mathbb{R}$-linear. Então, a aplicação $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ definida por $\tilde{f}(x) = u(x) - i\, u(i\,x)$ é $\mathbb{C}$-linear.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, $\tilde{f}(\lambda\, x) = \lambda\, u(x) - i\, \lambda\, u(i\,x) = \lambda\, \tilde{f}(x)$. Agora, para $i \in \mathbb{C}$, temos $\tilde{f}(i\,x) = u(i\,x) + i\, u(x) = i\, \tilde{f}(x)$. Além disso, fixados $x, y \in X$, temos $\tilde{f}(x + y) = u(x) + u(y) + [-i\, u(i\,x)] + [-i\, u(i\,y)] = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y)$. Logo, para todos $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, temos $\tilde{f}([\lambda + \beta\, i]x) = \tilde{f}(\lambda\, x + \beta\, i\, x) = \lambda\, \tilde{f}(x) + i\, \beta\, \tilde{f}(x) = (\lambda + i\, \beta)\, \tilde{f}(x)$. Portanto, $\tilde{f}$ é $\mathbb{C}$-linear. $\square$

Lema 3.1.3. *Sejam X um espaço vetorial complexo, $u : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação $\mathbb{R}$-linear e $p : X \to [0, \infty)$ uma seminorma. Se $|u(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$, então $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$, onde $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ é dada por $\tilde{f}(x) = u(x) - i\, u(i\,x)$.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Então, escrevemos $\tilde{f}(x) = e^{i\,\theta}\, |\tilde{f}(x)|$, onde $\theta \in \mathbb{R}$. Pelo Lema 3.1.2, como $\tilde{f}$ é $\mathbb{C}$-linear, temos $\tilde{f}(e^{-i\,\theta}\, x) = |\tilde{f}(x)| \in \mathbb{R}$. Desta forma,

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\,\theta}\, x) = u(e^{-i\,\theta}\, x) \leq p(e^{-i\,\theta}\, x) = |e^{-i\,\theta}|\, p(x).$$

Logo, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

Teorema 3.1.2 (Hahn-Banach - versão complexa)**.** *Sejam $A \subseteq X$ um subespaço de X, $f : A \to \mathbb{C}$ um funcional $\mathbb{C}$-linear e $p : X \to [0, \infty)$ uma seminorma. Suponhamos que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in A$. Então, existe um funcional $\mathbb{C}$-linear $F : X \to \mathbb{C}$ satisfazendo $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F|_A = f$.*

Demonstração. Escrevemos $f(x) = u(x) - i\, u(i\,x)$, onde $u : A \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$-linear. Desta forma, nós temos $u(x) \leq |u(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in A$. Pelo Teorema 3.1.1, existe um funcional $\mathbb{R}$-linear $u_1 : X \to \mathbb{R}$ tal que $u_1|_A = u$ e $u_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Além disso, para todo $x \in X$, temos $-u_1(x) = u_1(-x) \leq p(-x) = p(x)$, pois p é uma seminorma. Logo, $|u_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Definimos $F : X \to \mathbb{C}$ tal que $F(x) = u_1(x) - i\, u_1(i\,x)$ para todo $x \in X$. Então, F é $\mathbb{C}$-linear, pelo Lema 3.1.2. Agora, pelo Lema 3.1.3, $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$, pois $|u_1(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Finalmente, como $u_1|_A = u$, segue que $F|_A = f$. $\square$

Corolário 3.1.1. *Seja X um espaço vetorial normado. Para todo $x \in X \backslash \{0\}$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\|_\infty = 1$ e $f(x) = \|x\|$. Em particular, $\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Sejam $x \in X \backslash \{0\}$ e $A = \langle x \rangle$. Definimos $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $g(\alpha\, x) = \alpha\, \|x\|$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Desta forma, g é linear e contínua. Agora, observemos que $\|g\|_\infty = \sup\limits_{\|\alpha\, x\| \leq 1} |g(\alpha\, x)| = \sup\limits_{\|\alpha\, x\| \leq 1} \|\alpha\, x\| = 1$. Pela continuidade da g, temos $|g(\alpha\, x)| \leq \|\alpha\, x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Agora, definimos $p : X \to \mathbb{R}$ tal que $p(u) = \|u\|$ para todo $u \in X$. Então, p é uma seminorma e $|g(\alpha\, x)| \leq \|\alpha\, x\| = p(\alpha\, x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Pelo Teorema 3.1.2, existe $f \in X^*$ tal que $f|_A = g$ e $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Desta forma, se $u \in B_X$, então $|f(u)| \leq p(u) = \|u\| = 1$. Logo, $\|f\|_\infty \leq 1$. Por outro lado, como $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1$, pois $f|_A = g$, segue que $\|f\|_\infty = 1$ e $f(x) = \|x\|$. Agora, seja $x \in X$. Então, fixado $\varphi \in B_{X^*}$, temos $|\varphi(x)| \leq \|x\|$. Como $\|x\| = f(x)$ para algum $f \in X^*$ tal que $\|f\|_\infty = 1$, temos $\|x\| = \sup\limits_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|$. □

3.2 O TEOREMA DO GRÁFICO FECHADO

Nós iniciaremos esta seção apresentando alguns resultados e suas respectivas demonstrações com o objetivo de provar o famoso Teorema da Aplicação Aberta. Como aplicação deste Teorema, nós provaremos o Teorema do Gráfico Fechado.

Lema 3.2.1. *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico completo. Então, toda interseção enumerável de abertos densos em X é um subconjunto denso em X.*

Demonstração. Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma coleção enumerável de subconjuntos abertos e densos em X. Denotamos $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Fixemos B_1 uma bola aberta em X. Como A_1 é aberto e denso em X, temos $A_1 \cap B_1$ aberto e não vazio em X. Assim, existe uma bola aberta B_2 de raio $r_1 < \frac{1}{2}$ contida em $A_1 \cap B_1$ e tal que $\overline{B_2} \subset A_1 \cap B_1 \subset \overline{B_1}$. Da mesma forma, como A_2 é aberto e denso em X, temos $A_2 \cap B_2$ aberto e não vazio em X. Assim, existe uma bola aberta B_3 de raio $r_2 < \frac{1}{3}$ contida em $A_2 \cap B_2$ e tal que $\overline{B_3} \subset \overline{B_2}$. Prosseguindo desta maneira, obtemos uma sequência $\{\overline{B_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\overline{B_n} \supset \overline{B_{n+1}}$ e $\overline{B_{n+1}} \subset A_n \cap B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\lim\limits_{n \to \infty} diam\, B_n = 0$, onde $diam\, B_n = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in B_n\}$. Como X é um espaço métrico completo, existe $a \in X$ tal que $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $a \in \overline{B_{n+1}} \subset A_n \cap B_n$, ou seja, $a \in A \cap B_1$. □

Observação 3.2.1. Um subconjunto M de um espaço métrico $X = (X, d)$ possui interior vazio se, e somente se, $X \setminus M$ é denso em X.

Teorema 3.2.1 (Baire)**.** *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico completo. Se $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, onde A_n é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Int\, A_{n_0} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $Int\, A_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $X \backslash A_n$ é aberto em X para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, como $Int\, A_n = \emptyset$, segue que $X \backslash A_n$ é denso em

X. Logo, pelo Lema 3.2.1, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(X \backslash A_n)$ é denso em X. Portanto, $Int\,(X \backslash \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(X \backslash A_n)) = Int \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, um absurdo. $\square$

Notação: Seja $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach arbitrário. Para cada $r > 0$ fixado, nós denotaremos $B_r(0) = B(r) = \{x \in X \mid \|x\|_X < r\}$.

Lema 3.2.2. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear sobrejetora. Então, para cada $r > 0$, temos $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{T\left(B\left(k\,\frac{r}{2}\right)\right)}$*

Demonstração. Seja $y \in Y$. Como T é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $y = T(x)$. Além disso, como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2\,\frac{\|x\|_X}{r} < k_0$. Assim, $\|x\|_X < k_0\,\frac{r}{2}$. Consequentemente, $y \in T\left(B\left(k_0\,\frac{r}{2}\right)\right) \subset \overline{T\left(B\left(k_0\,\frac{r}{2}\right)\right)} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{T\left(B\left(k\,\frac{r}{2}\right)\right)}$. Por outro lado, como $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{T\left(B\left(k\,\frac{r}{2}\right)\right)} \subset Y$, temos o resultado. $\square$

Lema 3.2.3. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Então, para cada $r > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, temos $\overline{T\left(B\left(k\,\frac{r}{2}\right)\right)} = k\,\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$.*

Demonstração. Seja $y \in \overline{T\left(B\left(k\,\frac{r}{2}\right)\right)}$. Então $y = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$, onde $x_n \in B\left(k\,\frac{r}{2}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevemos $y = k \lim\limits_{n\to\infty} T\left(\frac{x_n}{k}\right)$. Assim, $\left\|\frac{x_n}{k}\right\|_X \leq \frac{r}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\frac{y}{k} = \lim\limits_{n\to\infty} T\left(\frac{x_n}{k}\right)$, temos $\frac{y}{k} \in \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Logo, $y \in k\,\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Agora, seja $y \in k\,\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Então, $y = k\,w$, onde $w \in \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Desta forma, $w = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$, onde $x_n \in B\left(\frac{r}{2}\right)$. Diante disso, $y = k \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} T(k\,x_n)$. Logo, $\|k\,x_n\|_X = k\,\|x_n\|_X < k\,\frac{r}{2}$, isto é, $y \in \overline{T\left(B\left(k\,\frac{r}{2}\right)\right)}$. $\square$

Lema 3.2.4. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear sobrejetora. Então, para cada $r > 0$, temos $0 \in Int\,\overline{T\,(B(r))}$.*

Demonstração. Pelos Lemas 3.2.2 e 3.2.3, temos $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} k\,\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Como Y é um espaço métrico completo com interior não vazio, pelo Teorema 3.2.1, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq 1$ e $Int\left(k_0\,\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}\right) \neq \emptyset$. Desta forma, $V = Int\,\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \neq \emptyset$. Seja $y_0 \in V$. Então, existe $s > 0$ tal que $\{y \in Y \mid \|y - y_0\|_Y < s\} \subseteq V \subseteq \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Além disso, como $y_0 \in V$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B\left(\frac{r}{2}\right)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = y_0$. Agora, fixemos $y \in Y$ tal que $\|y\|_Y < s$. Observamos que $y_0 + y \in V \subseteq \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Assim, existe uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B\left(\frac{r}{2}\right)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T(z_n) = y_0 + y$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n - z_n) = y$, onde $x_n - z_n \in B(r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\{y \in Y \mid \|y\|_Y < s\} \subset \overline{T(B(r))}$. $\square$

Lema 3.2.5. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Então, $(y_1 - \overline{T(B(2^{-2}\,r))}) \cap T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right) \neq \emptyset$ para todo $y_1 \in \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$, em que $y_1 - \overline{T(B(2^{-2}\,r))} = \{y_1 - z \mid z \in \overline{T(B(2^{-2}\,r))}\}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.2.4, $0 \in Int\,\overline{T(B(2^{-2}\,r))}$. Desta forma, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon) = \{y \in Y \mid \|y\|_Y < \varepsilon\} \subseteq \overline{T(B(2^{-2}\,r))}$. Assim, $(y_1 - B(\varepsilon)) \cap T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right) \neq \emptyset$, pois $y_1 \in \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. □

Lema 3.2.6. *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$ sobrejetora. Então, $\overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)} \subset T(B(r))$, para cada $r > 0$.*

Demonstração. Seja $y_1 \in \overline{T\left(B\left(\frac{r}{2}\right)\right)}$. Então, pelo Lema 3.2.5, existe $x_1 \in B\left(\frac{r}{2}\right)$ tal que $T(x_1) \in (y_1 - \overline{T(B(2^{-2}\,r))})$. Assim, $T(x_1) = y_1 - y_2$, onde $y_2 \in \overline{T(B(2^{-2}\,r))}$. Diante disto, por sucessivas aplicações do Lema 3.2.5, existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ tais que:

(1) $x_n \in B(2^{-n}\,r)$.

(2) $y_n \in \overline{T(B(2^{-n}\,r))}$.

(3) $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$.

Como $\|x_n\|_X < 2^{-n}\,r$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$. Como X é um espaço de Banach, pelo Teorema 2.3.4, existe $x \in X$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\|x\|_X < r$. Por (3), temos $\sum_{k=1}^{n} T(x_k) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1}) = y_1 - y_{n+1}$. Por outro lado, por (2), observamos que $\|y_n\|_Y \leq \|T\|\,2^{-n}\,r$. Logo, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Em particular, $y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$. Como T é contínua e linear, nós temos $\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$. Portanto $y_1 = T(x)$. □

Teorema 3.2.2 (Aplicação Aberta)**.** *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$ e $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$. Se T é sobrejetora, então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um aberto. Então, para cada $a \in A$, existe $r_a > 0$ tal que $B_{r_a}(a) = \{x \in X \mid \|x - a\|_X < r_a\} \subset A$. Pelo Lema 3.2.4, temos $0 \in Int\,\overline{T\left(B\left(\frac{r_a}{2}\right)\right)}$. Pelo Lema 3.2.6, $0 \in Int\,T(B(r_a))$. Agora, notamos que $B_{r_a}(a) = a + B(r_a)$. Daí, $T(B_{r_a}(a)) = T(a) + T(B(r_a))$. Logo, $T(a) \in Int\,T(B_{r_a}(a)) \subset T(A)$. Portanto, $T(A)$ é um conjunto aberto em Y. □

Teorema 3.2.3 (Gráfico Fechado)**.** *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|_X)$, $Y = (Y, +, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. Se $\mathcal{G}_T = \{(x, T(x)) \mid x \in X\}$ é fechado em $X \times Y$, então T é contínua.*

Demonstração. Vamos considerar a norma da soma $\|\cdot\|_1$ em $X \times Y$. Sabemos que $X \times Y$ é um espaço de Banach. Além disso, $\mathcal{G}_T$ é um subespaço de $X \times Y$. Com efeito, fixados

$(x, T(x)), (y, T(y)) \in \mathcal{G}_T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, nós temos

$$\begin{aligned}(x, T(x)) + \lambda\,(y, T(y)) &= (x, T(x)) + (\lambda\, y, \lambda\, T(y)) = (x + \lambda\, y, T(x) + \lambda\, T(y))\\ &= (x + \lambda\, y, T(x + \lambda\, y)).\end{aligned}$$

Logo, $(x, T(x)) + \lambda\,(y, T(y)) \in \mathcal{G}_T$. Como $\mathcal{G}_T$ é fechado em $X \times Y$, segue que $\mathcal{G}_T$ é um espaço de Banach. Diante disso, definimos a aplicação $p : \mathcal{G}_T \to X$ tal que $p(x, T(x)) = x$. Assim, p é sobrejetora por construção. Afirmamos que p é linear. De fato, fixados $(x, T(x)), (y, T(y)) \in \mathcal{G}_T$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}p((x, T(x)) + \lambda\,(y, T(y))) &= p(x + \lambda\, y, T(x + \lambda\, y)) = x + \lambda\, y\\ &= p(x, T(x)) + \lambda\, p(y, T(y)).\end{aligned}$$

Além disso, p é injetora. Com efeito, sejam $(x, T(x)), (y, T(y)) \in \mathcal{G}_T$ tais que $p(x, T(x)) = p(y, T(y))$. Então, temos $x = y$ e, consequentemente, $(x, T(x)) = (y, T(y))$. Agora, observamos que $\|p(x, T(x))\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|T(x)\|_Y = \|(x, T(x))\|_1$. Logo, p é contínua. Pelo Teorema 3.2.2, segue que p^{-1} é contínua. Do mesmo modo, definimos $q : \mathcal{G}_T \to Y$ tal que $q(x, T(x)) = T(x)$. Desta forma, q é uma aplicação linear contínua. Como $T = q \circ p^{-1}$, pois $(q \circ p^{-1})(x) = q(x, T(x)) = T(x)$ para todo $x \in X$, concluímos que T é uma aplicação contínua. $\square$

3.3 O TEOREMA DE BANACH-ALAOGLU

Encerraremos este capítulo apresentando o Teorema de Banach Alaoglu. Esse resultado afirma que a bola unitária fechada $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$ do dual de um espaço vetorial normado X é compacta[1] na topologia fraca-estrela de X^*.

Definição 3.3.1. Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e X^* o seu dual topológico. A ***topologia fraca estrela*** em X^* é a topologia que possui a seguinte base de abertos: $U(\varphi_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{\varphi \in X^* \mid |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$, onde $\varphi_0 \in X^*, x_1, \ldots, x_n \in X$, $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Notação: O espaço topológico X^* munido com a topologia fraca estrela será denotado por $(X^*, \sigma(X^*, X))$. O fecho de um conjunto $A \subset X^*$ na topologia fraca estrela será denotado por $\overline{A}^{\sigma(X^*, X)}$.

Proposição 3.3.1. *Seja $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e X^* o seu dual topológico. Então, $X^* = (X^*, \sigma(X^*, X))$ é um espaço de Hausdorff.*

[1] Lembramos que em um espaço de Banach X, a bola unitária fechada B_X é compacta (na topologia da norma) se, e somente se, o espaço X tem dimensão finita. Veja [16, Teorema 1.24].

Demonstração. Sejam $\varphi, \psi \in X^*$, com $\varphi \neq \psi$. Então, existe $x_0 \in X$ tal que $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$. Tomamos $\varepsilon = \frac{|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|}{4} > 0$. Assim, $U(\varphi, x_0, \varepsilon)$ e $U(\psi, x_0, \varepsilon)$ são vizinhanças de φ e ψ, respectivamente. Afirmamos que $U(\varphi, x_0, \varepsilon) \cap U(\psi, x_0, \varepsilon) = \emptyset$. De fato, suponhamos que exista $\xi \in U(\varphi, x_0, \varepsilon) \cap U(\psi, x_0, \varepsilon)$. Então, $|\varphi(x_0) - \xi(x_0)| < \varepsilon$ e $|\psi(x_0) - \xi(x_0)| < \varepsilon$. Diante disto, nós temos

$$|\varphi(x_0) - \psi(x_0)| \leq |\varphi(x_0) - \xi(x_0)| + |\xi(x_0) - \psi(x_0)| < \frac{|\varphi(x_0) - \psi(x_0)|}{2}.$$

Logo, $U(\varphi, x_0, \varepsilon) \cap U(\psi, x_0, \varepsilon) = \emptyset$, isto é, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ é um espaço de Hausdorff. □

Proposição 3.3.2. *Seja $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Então, uma rede $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D} \subset X^*$ converge para $\varphi \in X^*$ na topologia fraca estrela se, e somente se, $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. Suponhamos que $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para φ na topologia fraca estrela. Fixemos $x \in X$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $U(\varphi, x, \varepsilon)$ é uma vizinhança de φ na topologia fraca estrela. Assim, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $\varphi_\alpha \in U(\varphi, x, \varepsilon)$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Logo, $|\varphi_\alpha(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ sempre que $\alpha_0 \preceq \alpha$, isto é, $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$.

Reciprocamente, suponhamos que $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in X$. Fixemos $U(\varphi, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ uma vizinhança base de φ na topologia fraca estrela. Para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $\alpha_i \in D$ tal que $|\varphi_\alpha(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_i \preceq \alpha$. Como D é um conjunto dirigido, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $\alpha_i \preceq \alpha_0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Diante disso, se $\alpha \in D$ é tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$, então $|\varphi_\alpha(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, $\varphi_\alpha \in U(\varphi, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ sempre que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Portanto, $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge para φ na topologia fraca estrela. □

Teorema 3.3.1 (Banach-Alaoglu). *Sejam $X = (X, +, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e X^* seu dual topológico. Então, $B_{X^*} = \{\varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$ é $\sigma(X^*, X)$-compacto.*

Demonstração. Para cada $x \in B_X$, definimos $K_x = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|x\|\}$ compacto em $\mathbb{C}$. Vamos considerar $K = \prod_{x \in B_X} K_x$ munido com a topologia produto τ, isto é, $K = (K, \tau)$. Pelo Teorema 2.1.6, $K = (K, \tau)$ é compacto. Seja $G : (B_{X^*}, \sigma(X^*, X)) \to (K, \tau)$ tal que $G(\varphi) = (\varphi(x))_{x \in B_X}$. Observamos que G é injetiva. De fato, sejam $\varphi, \psi \in B_{X^*}$ tais que $G(\varphi) = G(\psi)$. Então, $(\varphi(x))_{x \in B_X} = (\psi(x))_{x \in B_X}$. Logo, $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in B_X$. Como φ e ψ são lineares, nós temos $\varphi = \psi$. Provaremos agora que G contínua. Fixemos $\varphi \in B_{X^*}$ e seja $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D} \subset B_{X^*}$ uma rede convergindo para φ na topologia fraca estrela. Tomamos U uma vizinhança base de $G(\varphi) = (\varphi(x))_{x \in B_X}$, isto é, $U = \prod_{x \in B_X} U_x$, onde $U_x = K_x$ exceto para os pontos do conjunto $E = \{x \in B_X \mid U_x \neq K_x\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pela Proposição 3.3.2, sabemos que $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in B_X$. Assim, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\alpha_i \in D$ tal que $\varphi_\alpha(x_i) \in U_{x_i}$ sempre que $\alpha \in D$ satisfaz $\alpha_i \preceq \alpha$. Além disso, notamos que $\varphi(x_i) \in U_{x_i}$. Agora, tomamos $\alpha_0 \in D$ tal que $\alpha_i \preceq \alpha_0$ para

todo $i = 1, \ldots, n$. Desta forma, nós temos $\varphi_\alpha(x_i) \in U_{x_i}$ para todo $\alpha \in D$ tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$, onde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Diante disto, $\varphi_\alpha(x) \in U_x$ para todo $x \in B_X$ sempre que $\alpha \in D$ é tal que $\alpha_0 \preceq \alpha$. Além disso, observamos que $\varphi(x) \in U_x$ para todo $x \in B_X$. Logo, $G(\varphi_\alpha) = (\varphi_\alpha(x))_{x \in B_X} \in U$ sempre que $\alpha \in D$ satisfaz $\alpha_0 \preceq \alpha$.
Agora, afirmamos que $G(B_{X^*})$ é τ-fechado em K. Com efeito, seja $f \in \overline{G(B_{X^*})}^{\tau}$. Então, existe uma rede $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D} \subset B_{X^*}$ tal que $f = \tau\text{-}\lim_\alpha G(\varphi_\alpha)$, onde $f = (f_x)_{x \in B_X}$ e $G(\varphi_\alpha) = (\varphi_\alpha(x))_{x \in B_X}$. Em particular, temos $f_x = \lim_\alpha \varphi_\alpha(x)$ para todo $x \in B_X$. Queremos provar que existe $\varphi \in B_{X^*}$ tal que $f = G(\varphi)$. Observamos que, para cada $z \in X$, existe $\xi > 0$ tal que $\|\xi\, z\| \leq 1$. Definimos a aplicação $\varphi : X \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(z) = \xi^{-1}\, f_{\xi\, z}$. Afirmamos que φ está bem definida. De fato, suponhamos $\|\xi\, z\| \leq 1$ e $\|\beta\, z\| \leq 1$. Então,

$$\varphi(z) = \xi^{-1}\, f_{\xi\, z} = \xi^{-1}\, \lim_\alpha \varphi_\alpha(\xi\, z) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(z),$$

$$\varphi(z) = \beta^{-1}\, f_{\beta\, z} = \beta^{-1}\, \lim_\alpha \varphi_\alpha(\beta\, z) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(z).$$

Além disso, φ é linear. Com efeito, sejam $z, w \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, dado $\xi > 0$ tal que $\|\xi\,(z + \lambda\, w)\| \leq 1$, nós temos

$$\varphi(z + \lambda\, w) = \xi^{-1}\, \lim_\alpha \varphi_\alpha(\xi\,(z + \lambda\, w)) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(z) + \lambda\, \lim_\alpha \varphi_\alpha(w) = \varphi(z) + \lambda\, \varphi(w).$$

Agora, se $x \in B_X$, então $|\varphi(x)| = |f_x| \leq \|x\| \leq 1$. Logo, $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in B_X} |\varphi(x)| \leq 1$. Além do mais, $G(\varphi) = (\varphi(x))_{x \in B_X} = (f_x)_{x \in B_X}$, isto é, $G(\varphi) = f \in G(B_{X^*})$. Portanto, $G(B_{X^*})$ é compacto na topologia τ.
Finalmente, nós provaremos que G^{-1} é contínua. De fato, sejam $\varphi \in B_{X^*}$ e $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D}$ uma rede em B_{X^*} tal que $G(\varphi) = \tau\text{ - }\lim_\alpha G(\varphi_\alpha)$. Observamos que $G(\varphi_\alpha) = (\varphi_\alpha(x))_{x \in B_X}$ e $G(\varphi) = (\varphi(x))_{x \in B_X}$. Diante disso, nós temos $\lim_\alpha \varphi_\alpha(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in B_X$. Pela Proposição 3.3.2, $\sigma(X^*, X)\text{ - }\lim_\alpha \varphi_\alpha = \varphi$. Desta forma, G^{-1} é contínua. Logo, pelo Teorema 2.1.5, o conjunto $G^{-1}(G(B_{X^*})) = B_{X^*}$ é compacto na topologia fraca estrela. $\square$

4 ÁLGEBRAS DE BANACH

Este capítulo é destinado a algumas noções básicas a respeito das álgebras de Banach. Nós começaremos com algumas definições e exemplos. Em seguida introduziremos um tipo especial de álgebra de Banach: as C*-álgebras. Ao final nós também trataremos da transformada de Gelfand e do famoso Teorema de Gelfand-Mazur.

4.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Um ***anel*** é um conjunto $\mathcal{A}$ munido de duas operações, uma soma $(+) : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e um produto $(\cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, onde $(\mathcal{A}, +)$ é um grupo aditivo e, além disso, para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$, temos $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ e $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Denotaremos $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$.

Definição 4.1.1. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ um anel. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra*** sobre $\mathbb{K}$ quando $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Além disso, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra associativa*** quando $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra comutativa*** quando $x \cdot y = y \cdot x$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Por fim, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra com unidade*** quando existe $e \in \mathcal{A}$, $e \neq 0$, tal que $x \cdot e = x = e \cdot x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Observação 4.1.1. Se uma álgebra $\mathcal{A}$ possui uma unidade e, então ela é única. De fato, se $e, e' \in \mathcal{A}$ são unidades de $\mathcal{A}$, então $e' = e \cdot e' = e$.

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra com unidade $e \in \mathcal{A}$, dizemos que $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$, é um ***elemento invertível*** quando existe $u \in \mathcal{A}$ tal que $x \cdot u = e = u \cdot x$. Além disso, se $u, u' \in \mathcal{A}$ são inversos de x, então $u = u \cdot e = u \cdot x \cdot u' = e \cdot u' = u'$. Logo, o inverso de um elemento é único.

Notação: Uma álgebra $\mathcal{A}$ com unidade será denotada por $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e)$ e o conjunto dos elementos invertíveis de $\mathcal{A}$ será denotado por $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.

Exemplo 4.1.1. Todo corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra sobre si mesmo.

Exemplo 4.1.2. Sejam X um espaço vetorial e $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares em X. Então, $\mathcal{L}(X)$ torna-se uma álgebra quando munido com a operação de composição de operadores, isto é, $P \cdot T = P \circ T$ para todos $P, T \in \mathcal{L}(X)$.

Exemplo 4.1.3. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ formado por todas as matrizes quadradas $n \times n$ com entradas em $\mathcal{A}$. Para uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ arbitrária, escrevemos $A = ([A]_{ij})$. Sabemos que $\mathcal{M}_n(\mathcal{A}) = (\mathcal{M}_n(\mathcal{A}), +)$ com a soma usual e a multiplicação por escalar λA, com $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definida por $\lambda A = (\lambda [A]_{ij})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Além disso, $\mathcal{M}_n(\mathcal{A}) =$

$(\mathcal{M}_n(\mathcal{A}), +, \cdot)$, com o produto usual de matrizes, é um anel. Agora, sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Fixados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, temos:

$$\begin{aligned}
[\lambda\,(A \cdot B)]_{ij} = \lambda\,[A \cdot B]_{ij} = \lambda\, \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,[B]_{kj} &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda\,[A]_{ik})\,[B]_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\lambda\,A]_{ik}\,[B]_{kj} = [(\lambda\,A) \cdot B]_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,(\lambda\,[B]_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,[\lambda\,B]_{kj} = [A \cdot (\lambda\,B)]_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda\,(A \cdot B) = (\lambda\,A) \cdot B = A \cdot (\lambda\,B)$, isto é, $\mathcal{M}_n(\mathcal{A}) = (\mathcal{M}_n(\mathcal{A}), +, \cdot)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Além do mais, se $\mathcal{A}$ possui unidade $e \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ possui unidade dada por $I_n = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = e$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, onde $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 4.1.2. Uma ***álgebra de Lie*** é uma álgebra $\mathcal{A}$ na qual o produto, denotado por $[\cdot, \cdot]$, satisfaz $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ e $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ para todos $x, y, z \in A$ (*Identidade de Jacobi*).

Observação 4.1.2. A notação $[\cdot, \cdot]$ é denominada o *colchete de Lie* e $[x, y]$ é dito o *comutador* de x e y, onde $x, y \in \mathcal{A}$. Notamos que o axioma $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ implica $[x, y] = -[y, x]$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$.

Exemplo 4.1.4. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra associativa. Neste caso $\mathcal{A}$ torna-se uma álgebra de Lie com o produto $[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definido por $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. De fato, temos $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Agora, fixemos $x, y, z \in \mathcal{A}$. Então,

$$\begin{aligned}
&[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] \\
&\quad = [x, y] \cdot z - z \cdot [x, y] + [y, z] \cdot x - x \cdot [y, z] + [z, x] \cdot y - y \cdot [z, x] \\
&\quad = x \cdot y \cdot z - y \cdot x \cdot z - z \cdot x \cdot y + z \cdot y \cdot x \\
&\qquad + y \cdot z \cdot x - z \cdot y \cdot x - x \cdot y \cdot z + x \cdot z \cdot y \\
&\qquad + z \cdot x \cdot y - x \cdot z \cdot y - y \cdot z \cdot x + y \cdot x \cdot z = 0.
\end{aligned}$$

Logo, vale a identidade de Jacobi. Portanto, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie.

Exemplo 4.1.5. Consideremos a álgebra $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ com as operações usuais. De acordo com o Exemplo 4.1.4 $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie com o produto dado por $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ para todos $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. No entanto, com esse novo produto a álgebra $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ não é associativa. De fato, tomemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então, $[[A, A], B] \neq [A, [A, B]]$, pois $[[A, A], B] = 0$ e $[A, [A, B]] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Observação 4.1.3. De uma maneira geral, se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie associativa, então, pela Identidade de Jacobi temos o seguinte: $[[z, x], y] = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. Lembramos que o ***centro da álgebra de***

Lie $\mathcal{A}$ é definido por $Z(\mathcal{A}) = \{z \in \mathcal{A} \mid [z,x] = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{A}\}$. Consequentemente todo comutador $[z,x]$ pertence ao centro da álgebra de Lie.

Definição 4.1.3. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma ***subálgebra*** de $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{B}$ é um subespaço de $\mathcal{A}$ e $x \cdot y \in \mathcal{B}$ sempre que $x, y \in \mathcal{B}$.

Exemplo 4.1.6. Pelo Exemplo 4.1.3, tomando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ e $n = 3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = (\mathcal{M}_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais de matrizes. Consideremos o conjunto $\mathfrak{T}_1 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z, w \in \mathbb{C}\right\}$. Então, $\mathfrak{T}_1 \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Além disso, $\mathfrak{T}_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. De fato, fixemos $A, B \in \mathfrak{T}_1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então,

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ 0 & x' & w' \\ 0 & 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda x' & y + \lambda y' & z + \lambda z' \\ 0 & x + \lambda x' & w + \lambda w' \\ 0 & 0 & x + \lambda x' \end{pmatrix}.$$

Logo, $A + \lambda B \in \mathfrak{T}_1$, isto é, $\mathfrak{T}_1$ é um subespaço de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Agora, nós observamos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ 0 & x' & w' \\ 0 & 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,x' & x\,y' + y\,x' & x\,z' + y\,w' + z\,x' \\ 0 & x\,x' & x\,w' + w\,x' \\ 0 & 0 & x\,x'. \end{pmatrix}.$$

Portanto, nós temos $A \cdot B \in \mathfrak{T}_1$.

Exemplo 4.1.7. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e consideremos o conjunto de matrizes $\mathfrak{T}_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid x, y \in \mathcal{B}\right\}$. Então, $\mathfrak{T}_2 \subset \mathcal{M}_3(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de $\mathcal{M}_3(\mathcal{B})$. Com efeito, fixemos $A, B \in \mathfrak{T}_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & x' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x + \lambda x' & y + \lambda y' \\ 0 & 0 & x + \lambda x' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $A + \lambda B \in \mathfrak{T}_2$. Agora, relativamente ao produto, temos

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & x' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x\,x' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, nós temos $A \cdot B \in \mathfrak{T}_2$.

Definição 4.1.4. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra (sobre $\mathbb{K}$) munida de uma norma. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra normada*** quando $\|x \cdot y\| \le \|x\|\,\|y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Além disso, quando $(\mathcal{A}, +, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma ***álgebra de Banach***. Quando $\mathcal{A}$ possui unidade[1] $e \in \mathcal{A}$, temos $\|e\| \ge 1$.

[1] Neste contexto, vale ressaltar que existe uma norma equivalente $|\cdot|$ em $\mathcal{A}$ tal que $|e| = 1$. Veja referência [21, Proposição 1.1.1].

Exemplo 4.1.8. Consideremos o espaço $\ell_\infty = (\ell_\infty, +, \|\cdot\|_\infty)$ como no Exemplo 2.3.3. Vimos no Exemplo 2.3.8 que $\ell_\infty = (\ell_\infty, +, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Agora, dados $x, y \in \ell_\infty$, onde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos o produto $x \cdot y$ tal que $x \cdot y = z$, onde $z_n = x_n\, y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É imediato ver que ℓ_∞ é uma álgebra. Agora, observamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $|x_n| \leq \|x\|_\infty$ e $|y_n| \leq \|y\|_\infty$. Assim, $|x_n\, y_n| \leq \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\|x \cdot y\|_\infty \leq \|x\|_\infty\, \|y\|_\infty$. Logo, $\ell_\infty = (\ell_\infty, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ é uma álgebra normada e, consequentemente, é uma álgebra de Banach. Além disso, como $\mathbb{K}$ é um corpo, ℓ_∞ é uma álgebra de Banach comutativa e com unidade $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ dada por $e_n = 1$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.1.9. Consideremos o espaço de Banach $\mathcal{C}[0,1] = (\mathcal{C}[0,1], +, \|\cdot\|_\infty)$. Dados $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ definimos o produto $f \cdot g : [0,1] \to \mathbb{C}$ por $(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Como o produto de duas funções contínuas é uma função contínua, o produto em $\mathcal{C}[0,1]$ está bem definido. Além disso, com esse produto, $\mathcal{C}[0,1]$ é uma álgebra comutativa e com unidade $e \in \mathcal{C}[0,1]$ dada por $e(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Por fim, fixados $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$, temos $|f(x)\, g(x)| \leq \|f\|_\infty\, \|g\|_\infty$ para todo $x \in [0,1]$. Assim $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty\, \|g\|_\infty$. Logo, $\mathcal{C}[0,1] = (\mathcal{C}[0,1], +, \cdot, e, \|\cdot\|_\infty)$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.

Exemplo 4.1.10. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Pelo Exemplo 2.3.11, $B(\mathcal{A}) = (B(\mathcal{A}), +, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Para todo $T, S \in B(\mathcal{A})$ definimos $T \cdot S = T \circ S$. Sabemos que a composição de operadores é associativa e, além disso, também é distributiva relativamente à operação de soma. Agora, fixemos $T, P \in B(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, para cada $x \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned}[\lambda\,(T \circ P)](x) = \lambda\,(T \circ P)(x) = \lambda\, T(P(x)) &= (\lambda\, T)(P(x)) = [(\lambda\, T) \circ P](x) \\ &= T(\lambda\, P(x)) = [T \circ (\lambda\, P)](x).\end{aligned}$$

Diante disso, $\lambda\,(T \circ P) = (\lambda\, T) \circ P = T \circ (\lambda\, P)$. Agora, fixado $x \in B_{\mathcal{A}}$, nós temos $\|(P \circ T)(x)\| = \|P(T(x))\| \leq \|P\|_\infty\, \|T\|_\infty$. Desta forma, $\|P \circ T\|_\infty \leq \|P\|_\infty\, \|T\|_\infty$. Logo, $B(\mathcal{A}) = (B(\mathcal{A}), +, \circ, I, \|\cdot\|_\infty)$ é uma álgebra de Banach com unidade $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dada por $I(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Exemplo 4.1.11. Consideremos o espaço de Banach c_0 do Exemplo 2.3.9. Sabemos que $c_0 \subset \ell_\infty$ é um subespaço fechado de ℓ_∞. Além disso, c_0 é fechado para a operação de produto de ℓ_∞. Logo, c_0 é uma subálgebra fechada de ℓ_∞ e, consequentemente, é uma álgebra de Banach.

Proposição 4.1.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada. Então, o produto em $\mathcal{A}$, isto é, a aplicação $(\cdot) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $(x, y) \mapsto x \cdot y$, é contínuo.*

Demonstração. Vide [5, Proposição 2.4]. $\square$

Definição 4.1.5. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. O ***centro de*** $\mathcal{A}$ é o conjunto $Z(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} \mid x \cdot y = y \cdot x \text{ para todo } y \in \mathcal{A}\}$.

Proposição 4.1.2. *Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach, então $Z(\mathcal{A})$ é uma subálgebra fechada de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. O fato de $Z(\mathcal{A})$ ser um subespaço de $\mathcal{A}$ é imediato, pois $\mathcal{A}$ é uma álgebra. Além disso, pela associatividade de $\mathcal{A}$, segue que $Z(\mathcal{A})$ é fechado para a operação produto de $\mathcal{A}$. Logo, $Z(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Agora, seja $x \in \overline{Z(\mathcal{A})}$. Então, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, onde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z(\mathcal{A})$. Para cada $y \in \mathcal{A}$, temos $x_n \cdot y = y \cdot x_n$ para todo $n \in \mathcal{A}$. Pela Proposição 4.1.1, temos $x \cdot y = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y) = \lim\limits_{n\to\infty} (y \cdot x_n) = y \cdot x$. Portanto $x \in Z(\mathcal{A})$. □

Nós terminaremos esta seção com alguns resultados referentes à identificação de algumas álgebras como subálgebras de certas álgebras de operadores.

Definição 4.1.6. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \otimes)$ álgebras sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um ***homomorfismo*** de álgebras quando φ é linear e multiplicativa. Além disso, se φ é bijetora, dizemos que φ é um ***isomorfismo*** e, neste caso, dizemos que as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas.

Definição 4.1.7. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \otimes)$ álgebras sobre $\mathbb{K}$, e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. O ***núcleo*** de φ é definido por $\ker(\varphi) = \{x \in \mathcal{A} \mid \varphi(x) = 0\}$ e a ***imagem*** de φ é definida como o conjunto $\varphi(\mathcal{A}) = \{\varphi(x) \in \mathcal{B} \mid x \in \mathcal{A}\}$.

Neste contexto, o seguinte resultado é bastante conhecido.

Proposição 4.1.3. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \otimes)$ álgebras sobre $\mathbb{K}$, e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Então, valem as seguintes afirmações:*

(1) O núcleo $\ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathcal{A}$.

(2) A imagem $\varphi(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$.

Proposição 4.1.4. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada associativa com unidade. Então, para todo $a \in \mathcal{A}$, a aplicação $\varphi_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por $\varphi_a(x) = a \cdot x$ é linear e limitada. Em particular, $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a uma subálgebra de $B(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, $\varphi_a(x+\lambda\, y) = a\cdot(x+\lambda\, y) = a\cdot x + a\cdot(\lambda\, y) = a \cdot x + \lambda\,(a \cdot y) = \varphi_a(x) + \lambda\,\varphi_a(y)$. Logo, φ_a é linear. Agora, fixemos $x \in B_{\mathcal{A}}$. Então, $\|\varphi_a(x)\| = \|a \cdot x\| \leq \|a\|\,\|x\| \leq \|a\|$. Assim, φ_a é limitada, ou seja, $\varphi_a \in B(\mathcal{A})$. Tomando $e \in B_{\mathcal{A}}$, nós temos $\|\varphi_a(e)\| = \|a \cdot e\| = \|a\| \leq \|\varphi_a\|_\infty$. Desta forma, $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Pela discussão anterior, nós podemos concluir que a aplicação $\psi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{A})$ tal que $\psi(a) = \varphi_a$

para todo $a \in \mathcal{A}$ está bem definida. Afirmamos que ψ é linear. De fato, sejam $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, para cada $x \in \mathcal{A}$, vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\psi(a + \lambda\, b)(x) &= \varphi_{a+\lambda\, b}(x) = (a + \lambda\, b) \cdot x = a \cdot x + \lambda\, (b \cdot x)\\ &= \varphi_a(x) + \lambda\, \varphi_b(x) = (\psi(a) + \lambda\, \psi(b))(x).\end{aligned}$$

Logo, $\psi(a + \lambda\, b) = \psi(a) + \lambda\, \psi(b)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\psi(a \cdot b)(x) &= \varphi_{a \cdot b}(x) = (a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = \varphi_a(b \cdot x)\\ &= \varphi_a(\varphi_b(x)) = (\varphi_a \circ \varphi_b)(x) = (\psi(a) \circ \psi(b))(x).\end{aligned}$$

Diante disto, $\psi(a \cdot b) = \psi(a) \circ \psi(b)$. Além disso, $\|\psi(a)\|_\infty = \|\varphi_a\|_\infty = \|a\|$, ou seja, ψ é uma isometria. Em particular, ψ é injetiva. Portanto, $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa à subálgebra $\psi(\mathcal{A})$ de $B(\mathcal{A})$. $\square$

Corolário 4.1.1. *Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach com unidade, então $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a uma subálgebra fechada de $B(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.1.4, como $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada com unidade, segue que $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa à subálgebra $\psi(\mathcal{A}) \subset B(\mathcal{A})$, onde $\psi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{A})$ é dada por $\psi(a) = \varphi_a$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Agora, fixemos $\phi \in \overline{\psi(\mathcal{A})}$. Então, $\phi = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n$, onde $\phi_n \in \psi(\mathcal{A})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathcal{A}$ tal que $\phi_n = \psi(x_n) = \varphi_{x_n}$. Diante disto, tomando $e \in \mathcal{A}$, vemos que vale o seguinte:

$$\phi(e) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(e) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{x_n}(e) = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot e) = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathcal{A}.$$

Afirmamos que $\phi = \varphi_{\phi(e)} = \psi(\phi(e))$. De fato, fixemos $x \in \mathcal{A}$. Como $\|\phi_n(x) - \phi(x)\| \leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \cdot \|x\|$ podemos concluir

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{x_n}(x) = \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot x) = \phi(e) \cdot x = \varphi_{\phi(e)}(x).$$

Logo, $\phi = \psi(\phi(e))$, ou seja, $\phi \in \psi(\mathcal{A})$. Portanto, $\psi(\mathcal{A})$ é uma subálgebra fechada de $B(\mathcal{A})$. $\square$

Abaixo, nós veremos que podemos obter um resultado similar para a álgebra de Banach $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$.

Proposição 4.1.5. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ é isometricamente isomorfo a uma subálgebra fechada de $B(\mathcal{A}^n)$.*

Demonstração. Sabemos que $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$, com as operações usuais de matrizes, é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Pelo Exemplo 2.3.12, o espaço $\mathcal{A}^n = (\mathcal{A}^n, +, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Para cada $A = ([A]_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$, definimos $\hat{A} : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ tal que $\hat{A}(\vec{x}) = A\,\vec{x}$, onde $\vec{x} \in \mathcal{A}^n$ representa a matriz coluna $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$, com $x_k \in \mathcal{A}$ para todo $k =$

$1, \ldots, n$. Além disso, para cada $k = 1, \ldots, n$, representaremos $[\vec{x}]_k = x_k \in \mathcal{A}$. Assim, $\hat{A}(\vec{x}) = A\,\vec{x} \in \mathcal{A}^n$, onde $A\,\vec{x} = [[A\,\vec{x}]_1, \ldots, [A\,\vec{x}]_n]^T$. Diante disso, para cada $j = 1, \ldots, n$, $[A\,\vec{x}]_j = \sum\limits_{k=1}^{n} [A]_{jk}\,[\vec{x}]_k \in \mathcal{A}^n$. Agora, afirmamos que $\hat{A}$ é linear. Com efeito, fixemos $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{A}^n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixado, nós temos

$$\begin{aligned}
[A(\vec{x} + \lambda\,\vec{y})]_i &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,[\vec{x} + \lambda\,\vec{y}]_k = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,([\vec{x}]_k + \lambda\,[\vec{y}]_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,[\vec{x}]_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,[\vec{y}]_k = [A\,\vec{x}]_i + \lambda\,[A\,\vec{y}]_i \\
&= [A\,\vec{x} + \lambda\,A\,\vec{y}]_i.
\end{aligned}$$

Logo, $A(\vec{x}+\lambda\,\vec{y}) = A\,\vec{x}+\lambda\,A\,\vec{y}$, ou seja, $\hat{A}(\vec{x}+\lambda\,\vec{y}) = \hat{A}(\vec{x})+\lambda\,\hat{A}(\vec{y})$. Agora, verificaremos que $\hat{A}$ é limitada. É suficiente provar que $\hat{A} \in B(\mathcal{A}^n)$ na norma $\|\cdot\|_1$, pois pelo Exemplo 2.3.5 as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes em $\mathcal{A}^n$, onde $\|\vec{x}\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|$ e $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$. Fixado $\vec{x} \in B_{\mathcal{A}^n}$, temos $\|\vec{x}\|_1 \leq 1$. Escrevendo $\|\hat{A}(\vec{x})\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \|[A\,\vec{x}]_j\|$, segue que

$$\|\hat{A}(\vec{x})\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \|[A\,\vec{x}]_j\| = \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} [A]_{jk}\,[\vec{x}]_k \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\,[\vec{x}]_k\|.$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada, $\|[A]_{jk}\,[\vec{x}]_k\| \leq \|[A]_{jk}\|\,\|[\vec{x}]_k\|$ para todos $j, k = 1, \ldots, n$. Logo, $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\,[\vec{x}]_k\| \leq \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\|\,\|[\vec{x}]_k\|$. Além disso, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\|[\vec{x}]_k\| \leq \|\vec{x}\|_1 \leq 1$. Desta forma, $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\|\,\|[\vec{x}]_k\| \leq \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\|$. Logo, tomando $M = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\|$, temos $\|\hat{A}(\vec{x})\|_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\,[\vec{x}]_k\| \leq \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \|[A]_{jk}\|\,\|[\vec{x}]_k\| \leq M$. Portanto, $\hat{A}$ é limitada e, por também ser linear, é contínua.

Com base no que foi exposto anteriormente, a aplicação $\psi : \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) \to B(\mathcal{A}^n)$ dada por $\psi(A) = \hat{A}$ está bem definida. Afirmamos que a aplicação ψ é linear e multiplicativa. Com efeito, sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, para cada $\vec{x} \in \mathcal{A}^n$, nós temos

$$\begin{aligned}
\psi(A + \lambda\,B)(\vec{x}) &= \widehat{A + \lambda\,B}(\vec{x}) = (A + \lambda\,B)\,\vec{x} = A\,\vec{x} + \lambda\,B\,\vec{x} \\
&= \hat{A}(\vec{x}) + \lambda\,\hat{B}(\vec{x}) = [\psi(A) + \lambda\,\psi(B)](\vec{x}).
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi(A + \lambda\,B) = \psi(A) + \lambda\,\psi(B)$. Agora, observamos que

$$\begin{aligned}
\psi(A\,B)(\vec{x}) &= \widehat{A\,B}(\vec{x}) = (A\,B)\,\vec{x} = A\,(\hat{B}(\vec{x})) = \hat{A}(\hat{B}(\vec{x})) = \\
&= (\hat{A} \circ \hat{B})(\vec{x}) = (\psi(A) \circ \psi(B))(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Logo, $\psi(A \cdot B) = \psi(A) \circ \psi(B)$. Além disso, a aplicação ψ é injetiva. Com efeito, fixemos $A \in \ker(\psi)$. Então, $\psi(A) = \hat{A} = 0$ é o operador nulo. Consequentemente, $A\,\vec{x} = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathcal{A}^n$. Diante disso, $A = 0$ é a matriz nula. Portanto, $\ker(\psi) = \{0\}$.

Pelas considerações anteriores, segue que $\psi(\mathcal{M}_n(\mathcal{A}))$ é uma subálgebra de $B(\mathcal{A}^n)$. Agora, definimos uma norma $|\cdot|:\mathcal{M}_n(\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ em $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ da seguinte maneira:

$$|A| = \|\psi(A)\| = \|\hat{A}\| = \sup_{\|\vec{x}\|_\infty\leq 1}\|\hat{A}(\vec{x})\|_\infty = \sup_{\|\vec{x}\|_\infty\leq 1}\|A\,\vec{x}\|_\infty.$$

Desta maneira, $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ torna-se uma álgebra normada. De agora em diante, identificamos $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ como uma subálgebra de $B(\mathcal{A}^n)$. Agora, afirmamos que $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado de $B(\mathcal{A}^n)$. De fato, seja $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. Fixemos $\varepsilon>0$. Então, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$|A^k - A^{k'}| = \sup_{\|\vec{x}\|_\infty\leq 1}\|(A^k - A^{k'})\,\vec{x}\|_\infty < \varepsilon \text{ para todos } k,k'\geq k_0. \tag{4.1}$$

Para cada $j\in\{1,\dots,n\}$, consideremos $\vec{e_j}\in\mathcal{A}^n$ tal que $[\vec{e_j}]_l = e$ se $l=j$ e $[\vec{e_j}]_l=0$ se $l\neq j$. Então $\|\vec{e}_j\|_\infty = 1$ e $(A^k - A^{k'})\,\vec{e}_j = [[A^k-A^{k'}]_{1j},\dots,[A^k-A^{k'}]_{nj}]^T\in\mathcal{A}^n$. Logo, para $i\in\{1,\dots,n\}$ fixado, nós temos

$$\|[A^k - A^{k'}]_{ij}\| \leq \|(A^k - A^{k'})\,\vec{e}_j\|_\infty \leq \sup_{\|\vec{x}\|_\infty\leq 1}\|(A^k - A^{k'})\,\vec{x}\|_\infty$$

para todo $j=1,\dots,n$. Por (4.1), se $k,k'\geq k_0$, então

$$\|[A^k]_{ij} - [A^{k'}]_{ij}\| = \|[A^k - A^{k'}]_{ij}\| < \varepsilon \text{ para todos } i,j\in\{1,\dots,n\}. \tag{4.2}$$

Diante disso, para cada $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $([A^k]_{ij})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach, existe o $\lim\limits_{k\to\infty}[A^k]_{ij} = a_{ij}\in\mathcal{A}$. Com isto, definimos a matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Finalmente, afirmamos que $A^k\to A$. De fato, fixemos $i,j\in\{1,\dots,n\}$ e $k\geq k_0$ em (4.2). Pela continuidade do módulo, se $k'\to\infty$, nós temos $\|[A^k]_{ij}-a_{ij}\|\leq\varepsilon$. Agora, notamos que se $\vec{x}\in B_{\mathcal{A}^n}$, então $\|x_j\|\leq\|\vec{x}\|_\infty\leq 1$. Desta forma, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, como $\mathcal{A}$ é uma álgebra normada, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n}([A^k]_{ij}-a_{ij})\,x_j\right\| &\leq \sum_{j=1}^{n}\|([A^k]_{ij}-a_{ij})\,x_j\| \leq \sum_{j=1}^{n}\|([A^k]_{ij}-a_{ij})\|\,\|x_j\|\\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\|[A^k]_{ij}-a_{ij}\| \leq n\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\|(A^k-A)\,\vec{x}\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i\leq n}\|\sum\limits_{j=1}^{n}([A^k]_{ij}-a_{ij})\,x_j\|$, segue que $\|(A^k-A)\,\vec{x}\|_\infty\leq n\,\varepsilon$. Logo, $|A^k-A| = \sup\limits_{\|\vec{x}\|_\infty\leq 1}\|(A^k-A)\,\vec{x}\|_\infty\leq n\,\varepsilon$, para todo $k\geq k_0$. Portanto, $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ é isometricamente isomorfa a uma subálgebra fechada de $B(\mathcal{A}^n)$. $\square$

4.2 IDEAIS E MÓDULOS

Definição 4.2.1. Sejam $\mathcal{A}=(\mathcal{A},+,\cdot)$ uma álgebra e $\mathcal{I}$ um subespaço de $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um ***ideal à esquerda*** de $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\mathcal{I}=\{x\cdot a\mid x\in\mathcal{A}, a\in\mathcal{I}\}\subset\mathcal{I}$. Analogamente, dizemos que $\mathcal{I}$ é um ***ideal à direita*** de $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{I}\,\mathcal{A} = \{a \cdot x \mid x \in \mathcal{A}, a \in \mathcal{I}\} \subset \mathcal{I}$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um ***ideal*** de $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{I}$ é um ideal à esquerda e também um ideal à direita de $\mathcal{A}$. Quando $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$ dizemos que $\mathcal{I}$ é um ***ideal próprio*** de $\mathcal{A}$.

Exemplo 4.2.1. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{A}$. O subespaço gerado pelo conjunto $\{x \cdot y \mid x, y \in \mathcal{I}\}$ será denotado por $\mathcal{I}^2$. O fato de $\mathcal{I}$ ser um ideal de $\mathcal{A}$ implica que $\mathcal{I}^2$ é um ideal de $\mathcal{A}$.

Exemplo 4.2.2. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e $x \in \mathcal{A}$. Então, $\mathcal{A}\,x = \{a \cdot x \mid a \in \mathcal{A}\}$ é um ideal à esquerda de $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}\,x$ é o ideal à esquerda de $\mathcal{A}$ gerado por x. Analogamente, $x\,\mathcal{A} = \{x \cdot a \mid a \in \mathcal{A}\}$ é o ideal à direita de $\mathcal{A}$ gerado por x. Além disso, quando $\mathcal{A}$ é comutativa, nós temos a igualdade $x\,\mathcal{A} = \mathcal{A}\,x$.

Proposição 4.2.1. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach e $\mathcal{I}$ um ideal próprio de $\mathcal{A}$. Então, $\overline{\mathcal{I}}$ (o fecho de I em $\mathcal{A}$) é um ideal de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Vide [5, Teorema 9.3]. □

Definição 4.2.2. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach e $x \in \mathcal{A}$. Dizemos que $\overline{\mathcal{A}\,x}$ é o ideal fechado à esquerda de $\mathcal{A}$ gerado por x e $\overline{x\,\mathcal{A}}$ é o ideal fechado à direita de $\mathcal{A}$ gerado por x.

Definição 4.2.3. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ um ideal. Dizemos que $\mathcal{I}$ é ***maximal*** quando, para todo ideal próprio $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, temos $\mathcal{J} = \mathcal{I}$.

Proposição 4.2.2. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e)$ uma álgebra com unidade e $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ um ideal. Então, existe um ideal maximal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$.*

Demonstração. Vide [21, Lema 1.4.2]. □

Proposição 4.2.3. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ um ideal. Então, $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é uma álgebra com o produto definido por $\hat{x} \otimes \hat{y} = \widehat{x \cdot y}$, onde $x, y \in \mathcal{A}$. Além disso, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado e $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é uma álgebra de Banach, então $\mathcal{A}/\mathcal{I} = (\mathcal{A}/\mathcal{I}, +, \otimes, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach quando munido com a norma canônica.*

Demonstração. Sejam $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ e $a \in \hat{x}$, $b \in \hat{y}$. Então, $x \cdot y - a \cdot b = (x - a) \cdot y + a \cdot (y - b)$. Como $\mathcal{I}$ é um ideal, segue que $x \cdot y - a \cdot b \in \mathcal{I}$, isto é, $\widehat{x \cdot y} = \widehat{a \cdot b}$. Logo, o produto $\otimes$ está bem definido. Além disso, esse produto herda a distributividade e associatividade do produto de $\mathcal{A}$. Agora, fixados $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, nós temos $\lambda\,(\hat{x} \otimes \hat{y}) = (\lambda\,\hat{x}) \otimes \hat{y} = \hat{x} \otimes (\lambda\,\hat{y})$, pois $\mathcal{A}$ é uma álgebra. Agora, suponhamos que $\mathcal{I}$ é um ideal fechado e $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ é uma álgebra de Banach. Pelo Exemplo 2.3.10, $\mathcal{A}/\mathcal{I} = (\mathcal{A}/\mathcal{I}, +, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach com a norma definida por $\|\hat{x}\| = \inf\{\|a\|_{\mathcal{A}} \mid a \in \hat{x}\}$. Sejam $\hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$. Fixados $a \in \hat{x}$ e $b \in \hat{y}$, temos $\|a \cdot b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\,\|b\|_{\mathcal{A}}$. Assim, $\|\widehat{x \cdot y}\| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\,\|b\|_{\mathcal{A}}$. Diante disso, segue que $\frac{\|\widehat{x \cdot y}\|}{\|a\|_{\mathcal{A}}} \leq \|b\|_{\mathcal{A}}$ para todo $b \in \hat{y}$, isto é, $\frac{\|\widehat{x \cdot y}\|}{\|a\|_{\mathcal{A}}} \leq \|\hat{y}\|$. Desta forma, $\frac{\|\widehat{x \cdot y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$

para todo $a \in \hat{x}$. Logo, $\|\hat{x} \otimes \hat{y}\| = \|\widehat{x \cdot y}\| \leq \|\hat{x}\| \, \|\hat{y}\|$. Portanto, $\mathcal{A}/\mathcal{I} = (\mathcal{A}/\mathcal{I}, +, \otimes, \| \cdot \|)$ é uma álgebra de Banach. $\square$

Definição 4.2.4. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que X é um ***$\mathcal{A}$-módulo à esquerda*** quando existe uma aplicação $(a, x) \mapsto a\, x$ de $\mathcal{A} \times X$ em X satisfazendo os seguintes axiomas:

(1) Para cada $a \in \mathcal{A}$, a aplicação $x \mapsto a\, x$ é linear em X.

(2) Para cada $x \in X$, a aplicação $a \mapsto a\, x$ é linear em $\mathcal{A}$.

(3) $a_1\,(a_2\, x) = (a_1 \cdot a_2)\, x$ para todos $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $x \in X$.

Define-se de maneira análoga um ***$\mathcal{A}$-módulo à direita***. Além disso, dizemos que X é um ***$\mathcal{A}$-bimódulo*** quando $\mathcal{A}$ é simultaneamente um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda e à direita, onde neste caso, as operações de módulo se relacionam de acordo com o axioma:

$$a_1\,(x\, a_2) = (a_1\, x)\, a_2 \text{ para todos } a_1, a_2 \in \mathcal{A} \text{ e } x \in X.$$

Exemplo 4.2.3. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra associativa. Então, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda e um $\mathcal{A}$-módulo à direita com as operações de módulo definidas pelo produto usual de $\mathcal{A}$. Além disso, como $\mathcal{A}$ é associativa, temos $x\,(y\, z) = (x\, y)\, z$ para todos $x, y, z \in \mathcal{A}$, isto é, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{A}$-bimódulo.

Exemplo 4.2.4. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \| \cdot \|)$ uma álgebra normada associativa. Então, o seu dual topológico $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda com a operação definida por $(x \bullet f)(y) = f(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Analogamente, $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à direita com a operação definida por $(f \bullet x)(y) = f(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Além disso, $x_1 \bullet (f \bullet x_2) = (x_1 \bullet f) \bullet x_2$ para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Desta forma, $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-bimódulo.

Observação 4.2.1. Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ é uma álgebra comutativa, então todo $\mathcal{A}$-módulo à esquerda X torna-se um $\mathcal{A}$-módulo à direita definindo-se $x\, a := a\, x$ para todos $a \in \mathcal{A}$ e $x \in X$. Para o caso não comutativo, ressaltamos que a teoria para $\mathcal{A}$-módulos à esquerda não difere (do ponto de vista categórico) da teoria para $\mathcal{A}$-módulos à direita. De fato todo $\mathcal{A}$-módulo à esqueda X torna-se um $\mathcal{A}^{op}$-módulo à direita, onde $a * b = b \cdot a$ para todo $a, b \in \mathcal{A}^{op}$. Por este motivo, convencionaremos denominar $\mathcal{A}$-módulo à esquerda simplesmente por $\mathcal{A}$-módulo.

Definição 4.2.5. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e X um $\mathcal{A}$-módulo. Dizemos que um subconjunto $Y \subset X$ é um ***$\mathcal{A}$-submódulo*** de X quando Y é um subespaço de X e $ay \in Y$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e $y \in Y$.

Observação 4.2.2. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra associativa e $a \in \mathcal{A}$. Pelo Exemplo 4.2.3, $\mathcal{A}$ é um $\mathcal{A}$-bimódulo. A aplicação $\delta_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por $\delta_a(x) = a \cdot x - x \cdot a$ para todo $x \in \mathcal{A}$ é linear. Além disso, δ_a satisfaz, para todo $x, y \in \mathcal{A}$, a seguinte propriedade

$$\begin{aligned}\delta_a(x \cdot y) &= a \cdot (x \cdot y) - (x \cdot y) \cdot a = (a \cdot x) \cdot y - (x \cdot a) \cdot y + x \cdot (a \cdot y) - x \cdot (y \cdot a) \\ &= (a \cdot x - x \cdot a) \cdot y + x \cdot (a \cdot y - y \cdot a) = \delta_a(x) \cdot y + x \cdot \delta_a(y).\end{aligned}$$

Motivados pela observação acima, nós introduzimos a seguinte definição:

Definição 4.2.6. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e X um $\mathcal{A}$-bimódulo. Dizemos que uma aplicação linear $\delta : \mathcal{A} \to X$ é uma ***derivação*** quando $\delta(x \cdot y) = \delta(x)\, y + x\, \delta(y)$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Além disso, dizemos que δ é uma ***derivação interna*** quando existe $u \in X$ tal que $\delta(x) = u\, x - x\, u$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Definição 4.2.7. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra associativa. Dizemos que $\mathcal{A}$ é ***semi-prima*** quando o ideal nulo é um ideal semiprimo de $\mathcal{A}$. Em outras palavras, a condição $\mathcal{I}^2 = \{0\}$ implica em $\mathcal{I} = 0$ para todo ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$.

Proposição 4.2.4. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra associativa. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{A}$ é semiprima.

(2) Se $x \in \mathcal{A}$ e $x\,\mathcal{A}\,x = \{0\}$, então $x = 0$, onde $x\,\mathcal{A}\,x = \{x \cdot a \cdot x \mid a \in \mathcal{A}\}$.

Demonstração. Suponhamos que (1) é verdadeiro. Seja $x \in \mathcal{A}$ tal que $x\,\mathcal{A}\,x = \{0\}$. Denotaremos por $\mathcal{A}\,x\,\mathcal{A}$ o subespaço de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{a \cdot x \cdot b \mid a, b \in \mathcal{A}\}$. Assim, $\mathcal{A}\,x\,\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Como $x\,\mathcal{A}\,x = \{0\}$, segue que $(\mathcal{A}\,x\,\mathcal{A})^2 = \{0\}$. Uma vez que $\mathcal{A}$ é semiprima, temos $\mathcal{A}\,x\,\mathcal{A} = \{0\}$. Agora, afirmamos que $x\,\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{A}$. De fato, fixemos $y \in \mathcal{A}$ e $a \in x\,\mathcal{A}$. Assim, $a = x \cdot u$, onde $u \in \mathcal{A}$. Desta forma, $y \cdot a = y \cdot x \cdot u = 0 \in x\,\mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}\,x\,\mathcal{A} = \{0\}$. Por outro lado, $a \cdot y = x \cdot (u \cdot y) \in x\,\mathcal{A}$. Agora, nós observamos que para todo $a, b \in \mathcal{A}$, nós temos $(x \cdot a) \cdot (x \cdot b) = 0$. Diante disso, $(x\,\mathcal{A})^2 = \{0\}$. Como $\mathcal{A}$ é semiprima, segue que $x\,\mathcal{A} = \{0\}$. Analogamente, $\mathcal{A}\,x$ é um ideal de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}\,x = \{0\}$. Considere o subespaço $\mathbb{K}\,x = \{\lambda\, x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ de $\mathcal{A}$. Afirmamos que $\mathbb{K}\,x$ é um ideal. Com efeito, sejam $y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, $y \cdot (\lambda\, x) = \lambda\, (y \cdot x) = 0 \in \mathbb{K}\,x$, pois $\mathcal{A}\,x = \{0\}$. Por outro lado, $(\lambda\, x) \cdot y = \lambda\, (x \cdot y) = 0 \in \mathbb{K}\,x$, pois $x\,\mathcal{A} = \{0\}$. Em particular, fixados $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$, nós temos $(\lambda\, x) \cdot (\alpha\, x) = (\lambda\, \alpha)\, (x \cdot x) = 0$. Diante disso, $(\mathbb{K}\,x)^2 = \{0\}$. Como $\mathcal{A}$ é semiprima, segue que $\mathbb{K}\,x = \{0\}$. Portanto, $x = 0$. Reciprocamente, suponhamos que para todo $x \in \mathcal{A}$ tal que $x\,\mathcal{A}\,x = \{0\}$, temos $x = 0$. Seja $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{I}^2 = \{0\}$. Fixemos $x \in \mathcal{I}$. Então, para todo $a \in \mathcal{A}$, temos $x \cdot a \cdot x \in \mathcal{I}^2 = \{0\}$. Em particular, $x\,\mathcal{A}\,x = \{0\}$. Daí, $x = 0$. Logo, $\mathcal{I} = \{0\}$. $\square$

Proposição 4.2.5. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra (sobre um corpo de característica diferente de 2) semiprima. Se $a \in \mathcal{A}$ é tal que $[a, [a, x]] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$, então $a \in Z(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{A}$ tal que $[a, [a, x]] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Definimos $\delta_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $\delta_a(x) = a \cdot x - x \cdot a$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Pela Observação 4.2.2, nós sabemos que δ_a é uma derivação linear. Além disso, $\delta_a^2(x) = \delta_a(a \cdot x - x \cdot a) = a \cdot [a, x] - [a, x] \cdot a = [a, [a, x]] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Por outro lado, nós temos

$$\delta_a(\delta_a(xy)) = \delta_a^2(x \cdot y) = \delta_a^2(x) \cdot y + 2\, \delta_a(x) \cdot \delta_a(y) + x \cdot \delta_a^2(y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}.$$

Portanto, $2\, \delta_a(x) \cdot \delta_a(y) = 0$, isto é, $\delta_a(x) \cdot \delta_a(y) = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Agora, fixemos $u, x \in \mathcal{A}$. Utilizando a relação anterior, vemos

$$0 = \delta_a(x) \cdot \delta_a(u \cdot x) = \delta_a(x) \cdot (\delta_a(u) \cdot x + u \cdot \delta_a(x)) = \delta_a(x) \cdot u \cdot \delta_a(x).$$

Logo, para cada $x \in \mathcal{A}$, temos $\delta_a(x)\, \mathcal{A}\, \delta_a(x) = 0$. Como $\mathcal{A}$ é semiprima, segue que $\delta_a(x) = 0$, ou seja, $[a, x] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Portanto, $a \in Z(\mathcal{A})$. $\square$

4.2.1 Módulos sobre álgebras de Lie

Veremos a seguir como definir módulos sobre álgebras de Lie.

Definição 4.2.8. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ e X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que X é um Lie $\mathcal{A}$-módulo quando existe uma aplicação $(x, a) \mapsto a\, x$ de $\mathcal{A} \times X$ em X satisfazendo aos seguintes axiomas:

(1) Para cada $a \in \mathcal{A}$, a aplicação $x \mapsto a\, x$ é linear em X.

(2) Para cada $x \in X$, a aplicação $a \mapsto a\, x$ é linear em $\mathcal{A}$.

(3) $[a_1, a_2]\, x = a_1\, (a_2\, x) - a_2\, (a_1\, x)$ para todos $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $x \in X$.

Exemplo 4.2.5. Toda álgebra de Lie $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ é um Lie $\mathcal{A}$-módulo com a operação de módulo dada pelo próprio produto de $\mathcal{A}$.

Observação 4.2.3. De agora em diante se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Lie, e X é um Lie $\mathcal{A}$-módulo, nós diremos simplesmente que X é um $\mathcal{A}$-módulo.

Definição 4.2.9. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot, \cdot])$ uma álgebra de Lie e X um $\mathcal{A}$-módulo. Dizemos que uma aplicação bilinear $\delta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ é uma ***biderivação antissimétrica*** quando $\delta([a, b], c) = a\, \delta(b, c) - b\, \delta(a, c)$ e $\delta(a, b) = -\delta(b, a)$ para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$. Neste caso, $\delta(a, a) = -\delta(a, a) = 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Notação: Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot,\cdot])$ uma álgebra de Lie e X um $\mathcal{A}$-módulo. O subespaço de $\mathcal{A}$ gerado pelo conjunto $\{[a,b] \mid a,b \in \mathcal{A}\}$ será denotado por $[\mathcal{A},\mathcal{A}]$. Além disso, denotaremos $Z_X([\mathcal{A},\mathcal{A}]) = \{z \in X \mid [\mathcal{A},\mathcal{A}]\, z = \{0\}\}$, onde $[\mathcal{A},\mathcal{A}]\, x = \{\zeta x \in X \mid \zeta \in [\mathcal{A},\mathcal{A}]\}$ para todo $x \in X$.

Lema 4.2.1. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, [\cdot,\cdot])$ uma álgebra de Lie e X um $\mathcal{A}$-módulo (sobre um corpo de característica diferente de 2). Se uma aplicação bilinear $\delta : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to X$ é uma biderivação antissimétrica, então, para todo $x, y, u \in \mathcal{A}$, temos $\delta(u, [x,y]) - u\,\delta(x,y) \in Z_X([\mathcal{A},\mathcal{A}])$.*

Demonstração. Fixemos $x, y, z, w \in \mathcal{A}$. Como δ é uma biderivação antissimétrica, temos

$$\begin{aligned}\delta([x,y],[z,w]) &= x\,\delta(y,[z,w]) - y\,\delta(x,[z,w]) = -x\,\delta([z,w],y) + y\,\delta([z,w],x)\\ &= -x\,(z\,\delta(w,y)) + x\,(w\,\delta(z,y)) + y\,(z\,\delta(w,x)) - y\,(w\,\delta(z,x)).\end{aligned}$$

Além disso, nós sabemos que $\delta([x,y],[z,w]) = -\delta([z,w],[x,y])$. Logo, nós podemos obter a seguinte expressão

$$\begin{aligned}\delta([x,y],[z,w]) &= -z\,\delta(w,[x,y]) + w\,\delta(z,[x,y]) = z\,\delta([x,y],w) - w\,\delta([x,y],z)\\ &= z\,(x\,\delta(y,w)) - z\,(y\,\delta(x,w)) - w\,(x\,\delta(y,z)) + w\,(y\,\delta(x,z)).\end{aligned}$$

Diante do exposto acima, e utilizando o fato que δ é antissimétrica, nós chegamos na seguinte relação:

$$[x,z]\,\delta(y,w) + [y,w]\,\delta(x,z) = [x,w]\,\delta(y,z) + [y,z]\,\delta(x,w). \tag{4.3}$$

Agora, nós observamos que $\delta(x,x) = 0$. Substituindo w por y e z por x em (4.3), nós vemos que a igualdade $[x,y]\,\delta(y,x) + [y,x]\,\delta(x,y) = 0$ é satisfeita se, e somente se, $2\,[x,y]\,\delta(x,y) = 0$. Dessa forma,

$$[x,y]\,\delta(x,y) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}. \tag{4.4}$$

Linearizando em x, isto é, tomando $x = (x+z)$ em (4.4), nós temos

$$[x,y]\,\delta(z,y) + [z,y]\,\delta(x,y) = 0. \tag{4.5}$$

Repetindo o argumento com $y = (y+w)$ em (4.5), nós vemos

$$[x,y]\,\delta(z,w) + [x,w]\,\delta(z,y) + [z,y]\,\delta(x,w) + [z,w]\,\delta(x,y) = 0. \tag{4.6}$$

Podemos escrever (4.3) trocando os papéis de y e z. Mais precisamente

$$[x,y]\,\delta(z,w) + [z,w]\,\delta(x,y) - [x,w]\,\delta(z,y) - [z,y]\,\delta(x,w) = 0. \tag{4.7}$$

Somando (4.6) e (4.7), temos $2\,([x,y]\,\delta(z,w) + [z,w]\,\delta(x,y)) = 0$. Como X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, nós temos $[x,y]\,\delta(z,w) + [z,w]\,\delta(x,y) = 0$. Logo,

$$[x,y]\,\delta(z,w) = [w,z]\,\delta(x,y). \tag{4.8}$$

Em particular, vale a seguinte identidade:

$$[[x,u],y]\,\delta(z,w) = [w,z]\,\delta([x,u],y). \tag{4.9}$$

Por outro lado, pela identidade de Jacobi, temos $[[x,u],y]\,\delta(z,w) = [[x,y],u]\,\delta(z,w) + [[y,u],x]\,\delta(z,w)$. Utilizando (4.8) chegamos em $[[x,y],u]\,\delta(z,w) = [w,z]\,\delta([x,y],u)$ e $[[y,u],x]\,\delta(z,w) = [w,z]\,\delta([y,u],x)$, onde na primeira igualdade $[x,y]$ faz o papel de x e u faz o papel de y, enquanto na segunda igualdade $[y,u]$ faz o papel de x e x faz o papel de y. Logo,

$$[[x,u],y]\,\delta(z,w) = [w,z]\,\delta([x,y],u) + [w,z]\,\delta([y,u],x). \tag{4.10}$$

Assim, após comparar as identidades (4.9) e (4.10), obtemos:

$$[w,z]\,(\delta([x,y],u) + \delta([y,u],x) + \delta([u,x],y)) = 0. \tag{4.11}$$

A partir do fato que δ é uma biderivação antissimétrica, temos:

$$\begin{aligned}
\delta([x,y],u) &= x\,\delta(y,u) - y\,\delta(x,u) = x\,\delta(y,u) + y\,\delta(u,x),\\
\delta([y,u],x) &= y\,\delta(u,x) - u\,\delta(y,x) = y\,\delta(u,x) + u\,\delta(x,y),\\
\delta([u,x],y) &= u\,\delta(x,y) - x\,\delta(u,y) = u\,\delta(x,y) + x\,\delta(y,u).
\end{aligned}$$

Consequentemente, (4.11) reduzir-se-á

$$2\,[w,z]\,(x\,\delta(y,u) + y\,\delta(u,x) + u\,\delta(x,y)) = 0. \tag{4.12}$$

Daí, como $x\,\delta(y,u) + y\,\delta(u,x) = x\,\delta(y,u) - y\,\delta(x,u) = \delta([x,y],u) = -\delta(u,[x,y])$, segue de (4.12) que $2[w,z]\,(u\,\delta(x,y) - \delta(u,[x,y])) = 0$. Portanto, $\delta(u,[x,y]) - u\,\delta(x,y) \in Z_X([\mathcal{A},\mathcal{A}])$. $\square$

4.3 O TEOREMA DE GELFAND-MAZUR

O objetivo central desta seção é o de demonstrar o Teorema de Gelfand-Mazur. Mais precisamente, nós provaremos que toda álgebra de Banach complexa é isometricamente isomorfa ao corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Nesta seção todas as álgebras de Banach serão complexas (associativas).

Lema 4.3.1. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade e $x \in \mathcal{A}$. Se $\|x\| < 1$, então $(e - x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, onde $x^0 = e$. Se $m > n$, temos $\|s_n - s_m\| = \|\sum\limits_{k=n+1}^{m} x^k\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|x^k\| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|x\|^k$. Assim, $\|s_n - s_m\| \to 0$ quando $n \to \infty$ e $m \to \infty$. Desta forma, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach, existe $s \in \mathcal{A}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Portanto, $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$. Além disso, $(e-x)\cdot s_{n-1} = s_{n-1}\cdot(e-x) = e - x^n$. Logo, $(e-x)\cdot s = s\cdot(e-x) = e$ - pela continuidade do produto em $\mathcal{A}$ (Proposição 4.1.1). $\square$

Teorema 4.3.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \| \cdot \|)$ um álgebra de Banach com unidade. Então, o conjunto $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ é aberto em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Tomemos $h \in \mathcal{A}$ tal que $\|h\| < \|y^{-1}\|^{-1}$. Afirmamos que $y + h \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. De fato, basta observarmos que $y + h = y \cdot (e + y^{-1} \cdot h)$, onde $\|y^{-1} \cdot h\| \leq \|y^{-1}\|.\|h\| < 1$. Consequentemente, pelo Lema 4.3.1, $e + y^{-1} \cdot h \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Portanto, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ é aberto em $\mathcal{A}$. □

Definição 4.3.1. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \| \cdot \|)$ uma álgebra de Banach com unidade e $x \in \mathcal{A}$. O ***espectro*** de x (respectivamente o ***resolvente***) é definido como $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda\, e - x) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}\}$ (respectivamente $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda\, e - x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}\}$).

Observação 4.3.1. De acordo com a definição anterior, para cada $x \in \mathcal{A}$ vale a seguinte igualdade: $\rho(x) = \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$.

No exemplo abaixo nós calcularemos explicitamente o espectro de um elemento arbitrário da álgebra $\mathcal{C}[0, 1]$.

Exemplo 4.3.1. Consideremos a álgebra de Banach $\mathcal{C}[0, 1] = (\mathcal{C}[0, 1], +, \cdot, e, \| \cdot \|_{\infty})$ como no Exemplo 4.1.9. Seja $f \in \mathcal{C}[0, 1]$. Então, $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda\, e - f) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{C}[0,1]}\}$. Agora, fixemos $x \in [0, 1]$. Tomando $\lambda_x = f(x)$, temos $(\lambda_x\, e - f)(x) = 0$. Desta maneira, $(\lambda_x\, e - f) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{C}[0,1]}$, ou seja, $\lambda_x = f(x) \in \sigma(f)$. Logo, $Im(f) \subset \sigma(f)$. Por outro lado, fixemos $\lambda \in \sigma(f)$. Então, $(\lambda\, e - f) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{C}[0,1]}$. Desta forma, existe $x \in [0, 1]$ tal que $(\lambda\, e - f)(x) = 0$. Assim, $\lambda = f(x)$. Portanto, $\sigma(f) = Im(f)$.

Proposição 4.3.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \| \cdot \|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, $\sigma(x)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ para cada $x \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, tal que $|\lambda| > \|x\|$, temos $\|x/\lambda\| < 1$. Pelo Lema 4.3.1, $(e - x/\lambda) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Consequentemente, $(\lambda\, e - x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Portanto, $\lambda \in \rho(x)$. Assim, se $\lambda \in \sigma(x)$, então $|\lambda| \leq \|x\|$. Logo, o espectro de x é um subconjunto limitado de $\mathbb{C}$. Agora, observemos que a função $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ definida por $f(\lambda) = \lambda\, e - x$ é contínua. Por outro lado, o conjunto $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ é um subconjunto aberto de $\mathcal{A}$ (Teorema 4.3.1). Então, $f^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Como $\rho(x) = f^{-1}(\mathcal{U}_{\mathcal{A}})$, segue que $\rho(x)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Portanto, $\sigma(x) = \mathbb{C} \backslash \rho(x)$ é fechado em $\mathbb{C}$. □

Proposição 4.3.2. *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \| \cdot \|)$ uma álgebra de Banach com unidade e $\phi \in \mathcal{A}^*$. Então, para cada $x \in \mathcal{A}$, a aplicação $f : \rho(x) \to \mathbb{C}$ dada por $f(\lambda) = \phi((\lambda\, e - x)^{-1})$ é analítica.*

Demonstração. Fixemos $\lambda \in \rho(x)$ - por definição $(\lambda\, e - x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Pela Proposição 4.3.1, $\rho(x) = \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Daí, podemos escolher $\lambda \neq \zeta \in \rho(x)$ tal que $|\lambda - \zeta| < \|(\zeta\, e -$

$x)^{-1}\|^{-1}$. Assim, $\|(\lambda-\zeta)(\zeta\, e - x)^{-1}\| < 1$. Pelo Lema 4.3.1, $(e - (\lambda-\zeta)(\zeta\, e - x)^{-1}) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Além disso,

$$(e - (\lambda-\zeta)(\zeta\, e - x)^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}((\lambda-\zeta)(\zeta\, e - x)^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\zeta)^k\,(\zeta\, e - x)^{-k}. \quad (4.13)$$

Observe que podemos escrever a seguinte igualdade: $(\lambda\, e - x) = (\zeta\, e - x)(e - (\lambda-\zeta)(\zeta\, e - x)^{-1})$. Como $(\zeta\, e - x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, pois $\zeta \in \rho(x)$, temos (por (4.13))

$$(\lambda\, e - x)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\zeta)^k\,(\zeta\, e - x)^{-k}\right)(\zeta\, e - x)^{-1}. \quad (4.14)$$

A partir de (4.14) podemos concluir $(\lambda\, e - x)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda-\zeta)^k\,(\zeta\, e - x)^{-(k+1)}$. Agora, como ϕ é linear e contínua, temos $\phi((\lambda\, e - x)^{-1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(\lambda-\zeta)^k$, onde $a_k = \phi((\zeta\, e - x)^{-(k+1)})$, $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $f(\lambda) = \phi((\lambda\, e - x)^{-1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(\lambda-\zeta)^k$. Logo, pela Proposição 2.6.1, $f : \rho(x) \to \mathbb{C}$ é analítica. $\square$

Proposição 4.3.3. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, $\sigma(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Se $x \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, então $0 \in \sigma(x)$. Podemos supor sem perda de generalidade que $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Suponhamos que $\sigma(x) = \emptyset$. Neste caso, $\rho(x) = \mathbb{C}$. Para um dado elemento $\phi \in \mathcal{A}^*$, definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, onde $f(\lambda) = \phi((\lambda\, e - x)^{-1})$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Pela Proposição 4.3.2, f é analítica em $\mathbb{C}$. Agora, notemos que se $|\lambda| > \|x\|$, então $(\lambda\, e - x)^{-1} = \left(\lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$. Assim, $\|(\lambda\, e - x)^{-1}\| = \|\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|-\|x\|}$. A partir desta estimativa, vemos que $|f(\lambda)| = |\phi((\lambda\, e - x)^{-1})| \leq \|\phi\|_\infty\,\|(\lambda\, e - x)^{-1}\| \leq \|\phi\|_\infty\,\frac{1}{|\lambda|-\|x\|}$. Desta forma, $f(\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Como f é contínua, segue que f é limitada. Pelo Teorema 2.6.1, segue que f é constante. Logo, $f \equiv 0$, ou seja, $f(\lambda) = \phi((\lambda\, e - x)^{-1}) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Absurdo, pois isso contraria o Corolário 3.1.1. Logo, $\sigma(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathcal{A}$. $\square$

Teorema 4.3.2 (Gelfand-Mazur)**.** *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade tal que $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\backslash\{0\}$. Então $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfo (como álgebra) ao corpo dos números complexos.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.3, para cada $x \in \mathcal{A}$ existe $\lambda_x \in \sigma(x)$. Por definição temos que $(\lambda_x\, e - x) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Da condição $\mathcal{U}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}\backslash\{0\}$, nós podemos concluir que $\lambda_x\, e = x$ e que λ_x é único. Diante disso, vemos que a função $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, onde $\psi(x) = \lambda_x$ para cada $x \in \mathcal{A}$ está bem definida. Afirmamos que ψ é linear. De fato, sejam $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Observemos que $\lambda_{x+\alpha\, y}\, e = x + \alpha\, y = \lambda_x\, e + \alpha\,(\lambda_y\, e) = (\lambda_x + \alpha\,\lambda_y)\, e$. Dessa forma, $\lambda_{x+\alpha\, y} = \lambda_x + \alpha\,\lambda_y$. Logo, $\psi(x + \alpha\, y) = \lambda_{x+\alpha\, y} = \lambda_x + \alpha\,\lambda_y = \psi(x) + \alpha\,\psi(y)$. Agora, notemos que $\lambda_{x\cdot y}\, e = x \cdot y = (\lambda_x\, e)\cdot(\lambda_y\, e) = (\lambda_x\,\lambda_y)\, e$. Diante disso, $\lambda_{x\cdot y} = \lambda_x\,\lambda_y$.

Logo, $\psi(x \cdot y) = \lambda_{x \cdot y} = \lambda_x \lambda_y = \psi(x)\,\psi(y)$. Em particular, ψ é um homomorfismo. Agora, seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Tomemos $x = \lambda\, e \in \mathcal{A}$. Então, como ψ é um homomorfismo, temos $\psi(x) = \lambda\,\psi(e) = \lambda$. Logo, ψ é sobrejetora. Por fim, dado $x \in \mathcal{A}$, temos $x = \lambda_x\, e$. Dessa forma, $|\psi(x)| = |\lambda_x| = |\lambda_x|\,\|e\| = \|\lambda_x\, e\| = \|x\|$. Assim, ψ é uma isometria e, consequentemente, é injetora. Portanto, $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$. □

4.4 O RAIO ESPECTRAL E A TRANSFORMADA DE GELFAND

Nesta seção todas as álgebras de Banach serão complexas (associativas).

Definição 4.4.1. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade e $x \in \mathcal{A}$. O ***raio espectral*** de x é definido por $r(x) = \sup\limits_{z \in \sigma(x)} |z|$.

Proposição 4.4.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Se $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $[x, y] = 0$, então $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$ e $r(x \cdot y) \leq r(x)\, r(y)$.*

Demonstração. Vide [4, Lema 1.1.3]. □

Teorema 4.4.1 (Kleinecke-Shirokov)**.** *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Se $x, y \in \mathcal{A}$ satisfazem $[x, [x, y]] = 0$, então $r([x, y]) = 0$.*

Demonstração. Vide [4, Corolário 1.3.1]. □

Proposição 4.4.2. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Se $x \in \mathcal{A}$ é tal que $r(x) = 0$ e $r([x, y]) = 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$, então $x \in Rad(\mathcal{A})$, onde $Rad(\mathcal{A})$ é o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$ (Definição 4.5.4).*

Demonstração. Vide [4, Lema 1.3.2]. □

Definição 4.4.2. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Definimos o ***espectro da álgebra*** $\mathcal{A}$ por $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \{\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \mid \varphi \not\equiv 0 \text{ é linear e multiplicativo}\}$.

O próximo resultado versará sobre a continuidade dos elementos de $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Com este resultado em mãos, nós podemos concluir que em alguns casos é possível obter certas propriedades topológicas a partir de certas propriedades algébricas. A prova em si deste fato utilizará o famoso Teorema de Gleason-Kahane-Żelazko (Teorema 4.4.5) que por questões expositórias foi alocado ao final desta seção.

Lema 4.4.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Então, todo elemento $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é limitado em $\mathcal{A}$ e $|\varphi(x)| \leq r(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Além disso, temos $\|\varphi\|_\infty = 1$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{A}$ possui unidade e φ é um funcional linear, pelo Teorema 4.4.5, temos $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Diante disso, fixado $x \in \mathcal{A}$, tem-se $|\varphi(x)| \leq \sup\limits_{z\in\sigma(x)} |z| = r(x) \leq \|x\|$. Logo, φ é contínua e $|\varphi(x)| \leq r(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Além disso, $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\in B_{\mathcal{A}}} |\varphi(x)| \leq 1$. Como $\varphi(e) = 1$ e $\|e\| = 1$ segue que $\|\varphi\|_\infty = 1$. $\square$

Teorema 4.4.2. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Denotando por $\Omega(\mathcal{A})$ o conjunto de todos os ideais maximais em $\mathcal{A}$, a aplicação $\psi : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \Omega(\mathcal{A})$ dada por $\psi(\varphi) = \ker(\varphi)$ é uma bijeção. Em particular, $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Então, $\ker(\varphi)$ é um ideal de $\mathcal{A}$. Agora, fixado $x \in \mathcal{A}$ é fácil ver que $(x - \varphi(x)e) \in \ker(\varphi)$. Desta forma, podemos escrever $x = y + \varphi(x)\, e$, onde $y \in \ker(\varphi)$. Logo, $\mathcal{A} = \ker(\varphi) \oplus \langle e\rangle$, isto é, $\ker(\varphi)$ tem codimensão 1. Diante disso, $\ker(\varphi)$ é maximal. Consequentemente, a aplicação $\psi : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \Omega(\mathcal{A})$ dada por $\psi(\varphi) = \ker(\varphi)$ está bem definida. Agora, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ tais que $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. Então, para todo $x \in \mathcal{A}$, temos $(x - \varphi_1(x)e) \in \ker(\varphi_2)$. Daí, $\varphi_2(x - \varphi_1(x)\, e) = 0$. Assim, $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$. Logo, $\varphi_1 = \varphi_2$ e ψ é injetora. Agora, seja $M \in \Omega(\mathcal{A})$. Consideramos a projeção canônica $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/M \cong \mathbb{C}$ dada por $\pi(x) = \hat{x}$. Logo, π é linear, multiplicativa e $\ker(\pi) = M$. Portanto, $M = \psi(\pi)$. Assim, ψ é sobrejetora. E isto completa a demonstração. $\square$

Observação 4.4.1. Neste ponto é importante enfatizar que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach não comutativa a validade do teorema acima não é garantida - na verdade nem podemos garantir que $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é não vazio. Por exemplo, no caso que $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, contanto que $n \geq 2$, temos que $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \emptyset$. Por outro lado é folclórico o fato que $\Omega(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Definição 4.4.3. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. De acordo com o Lema 4.4.1, nós sabemos que $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset B_{\mathcal{A}^*}$. A topologia fraca estrela $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$ em $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é denominada a ***topologia de Gelfand***. Denotaremos $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ equipado desta topologia por $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = (\mathfrak{M}(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}))$.

Teorema 4.4.3. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. O espectro de $\mathcal{A}$ é $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-compacto.*

Demonstração. Inicialmente, lembre-se que $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subset B_{\mathcal{A}^*}$ pelo Lema 4.4.1, e que $B_{\mathcal{A}^*}$ é $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-compacto pelo Teorema 3.3.1. Fixemos $f \in \overline{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}^{\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A})}$. Pela Proposição 2.1.1, existe uma rede $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in D}$ em $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ tal que $f = \sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})\text{-}\lim\limits_{\alpha} \varphi_\alpha$. Diante disso, pela Proposição 3.3.2, temos $\varphi_\alpha(x) \to f(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Afirmamos que f é multiplicativa. De fato, sejam $x, y \in \mathcal{A}$. Então,

$$f(x \cdot y) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(x \cdot y) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(x)\, \varphi_\alpha(y) = (\lim_\alpha \varphi_\alpha(x))\, (\lim_\alpha \varphi_\alpha(y)) = f(x)\, f(y).$$

Assim, $\overline{\mathfrak{M}(\mathcal{A})}^{\sigma(\mathcal{A}^*,\mathcal{A})} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Logo, pelo Teorema 2.1.4, $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})$-compacto. $\square$

Definição 4.4.4. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade e $x \in \mathcal{A}$. A aplicação $\hat{x} : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ é conhecida como a ***transformada de Gelfand***.

Proposição 4.4.3. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. A aplicação $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathfrak{M}(\mathcal{A}))$ tal que $\Gamma(x) = \hat{x}$ é linear, multiplicativa e contínua. Além disso, $\|\hat{x}\|_\infty = \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})} |\hat{x}(\varphi)| \leq \|x\| = \sup\limits_{\varphi \in B_{\mathcal{A}^*}} |\varphi(x)|$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Fixemos $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Vimos no Teorema 4.4.3 que $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ é compacto quando equipado com a topologia fraca estrela de $\mathcal{A}^*$. Seja $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in D} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ tal que $\sigma(\mathcal{A}^*, \mathcal{A})\text{-}\lim\limits_{\alpha} \varphi_\alpha = \varphi$. Pela Proposição 3.3.2, temos $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$, ou seja, $\hat{x}(\varphi_\alpha) \to \hat{x}(\varphi)$. Assim, $\Gamma(x)(\varphi_\alpha) \to \Gamma(x)(\varphi)$. Logo $\Gamma(x) = \hat{x}$ é contínua em φ para todo $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Em particular, Γ está bem definida. Afirmamos que Γ é linear. De fato, fixemos $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, dado $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, temos

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x + \lambda\, y)(\varphi) &= \varphi(x + \lambda\, y) = \varphi(x) + \lambda\, \varphi(y) = \Gamma(x)(\varphi) + \lambda\, \Gamma(y)(\varphi) \\
&= (\Gamma(x) + \lambda\, \Gamma(y))(\varphi).
\end{aligned}
$$

Logo, $\Gamma(x + \lambda\, y) = \Gamma(x) + \lambda\, \Gamma(y)$, isto é, Γ é linear. Por outro lado, $\Gamma(x \cdot y)(\varphi) = \varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\, \varphi(y) = \Gamma(x)(\varphi)\, \Gamma(y)(\varphi) = (\Gamma(x)\, \Gamma(y))(\varphi)$. Portanto Γ é multiplicativa. Agora, fixemos $x \in B_{\mathcal{A}}$. Pelo Lema 4.4.1, dado $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, temos $|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq 1$. Consequentemente, $\|\hat{x}\|_\infty \leq 1$, pois $\|\hat{x}\|_\infty = \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})} |\hat{x}(\varphi)|$. Diante disso, $\|\Gamma(x)\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty \leq 1$. Portanto, Γ é contínua. Por último, fixemos $x \in \mathcal{A}$, onde $x \neq 0$. Pelo Corolário 3.1.1, temos $\|x\| = \sup\limits_{\varphi \in B_{\mathcal{A}^*}} |\varphi(x)|$. Em particular, $|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|x\|$ para todo $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Logo, $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$. □

Teorema 4.4.4. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então, $\Gamma(x)(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Dado $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, temos $(\varphi(x)\, e - x) \in \ker(\varphi)$. Daí, $(\varphi(x)\, e - x) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Portanto, $\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x) \in \sigma(x)$ para todo $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Assim, $\Gamma(x)(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) \subset \sigma(x)$. Agora provaremos que vale a outra inclusão. Com efeito, seja $z \in \sigma(x)$. Então, $(z\, e - x) \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Por esta razão, podemos concluir que o ideal $(z\, e - x) \cdot \mathcal{A} = \{(z\, e - x) \cdot a \mid a \in \mathcal{A}\}$ é um ideal próprio de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra com unidade, pela Proposição 4.2.2, existe um ideal maximal M em $\mathcal{A}$ tal que $(z\, e - x) \cdot \mathcal{A} \subset M$. Consequentemente, $(z\, e - x) \in M$. Além disso, pelo Teorema 4.4.2, a aplicação $\psi : \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \to \Omega(\mathcal{A})$ tal que $\psi(\varphi) = \ker(\varphi)$ é uma bijeção. Logo, existe $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ tal que $\ker(\varphi) = M$. Consequentemente, $\varphi(z\, e - x) = 0$, isto é, $z = \varphi(x)$. Portanto, $z = \Gamma(x)(\varphi)$. E assim concluímos que $\Gamma(x)(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$. □

Corolário 4.4.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então, $\sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$ e $r(x) = \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})} |\varphi(x)|$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{A}$. Pelo Teorema 4.4.4, temos $\Gamma(x)(\mathfrak{M}(\mathcal{A})) = \sigma(x)$. Dessa forma, dado $z \in \sigma(x)$, existe $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ tal que $z = \Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x)$. Além disso, para qualquer $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, pelo Teorema 4.4.5, temos $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Portanto, segue que $\sigma(x) = \{\varphi(x) \,|\, \varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$ e, consequentemente, $r(x) = \sup\limits_{\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})} |\varphi(x)|$. □

Encerraremos esta seção provando o Teorema de Gleason-Kahane-Żelazko (Teorema 4.4.5). Começamos a demonstração com um lema técnico.

Lema 4.4.2. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e)$ uma álgebra com unidade. Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear satisfazendo $\varphi(e) = 1$ e $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$, então φ é multiplicativo.*

Demonstração. Fixemos $x, y \in \mathcal{A}$. Observemos que $\varphi(x+y)^2 = \varphi((x+y)^2)$. Além disso, como φ é linear, vale a relação $\varphi(x+y)^2 = (\varphi(x) + \varphi(y))^2$. Dessa forma, temos

$$\varphi(x)^2 + 2\,\varphi(x)\,\varphi(y) + \varphi(y)^2 = \varphi(x)^2 + \varphi(x \cdot y) + \varphi(y \cdot x) + \varphi(y)^2.$$

Logo,

$$\varphi(x \cdot y + y \cdot x) = \varphi(x \cdot y) + \varphi(y \cdot x) = 2\,\varphi(x)\,\varphi(y). \tag{4.15}$$

Notemos agora o seguinte:

$$(x \cdot y - y \cdot x)^2 + (x \cdot y + y \cdot x)^2 = 2\,(x \cdot (y \cdot x \cdot y) + (y \cdot x \cdot y) \cdot x). \tag{4.16}$$

Usando as equações (4.15) e (4.16), chegamos na seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot y - y \cdot x)^2 + (2\,\varphi(x)\,\varphi(y))^2 &= \varphi((x \cdot y - y \cdot x)^2) + \varphi(x \cdot y + y \cdot x)^2 \\ &= \varphi((x \cdot y - y \cdot x)^2 + (x \cdot y + y \cdot x)^2) \\ &= 2\,\varphi((x \cdot (y \cdot x \cdot y) + (y \cdot x \cdot y) \cdot x) \\ &= 4\,\varphi(x)\,\varphi(y \cdot x \cdot y). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Tomando $a = (x - \varphi(x)e)$, temos $\varphi(a) = 0$, pois $\varphi(e) = 1$. Utilizando (4.17) - substituindo x por a - temos $\varphi(a \cdot y - y \cdot a)^2 + (2\,\varphi(a)\,\varphi(y))^2 = 4\,\varphi(a)\,\varphi(y \cdot a \cdot y) = 0 = 4\varphi(a)\varphi(a \cdot y \cdot a)$. Logo, $\varphi(a \cdot y - y \cdot a) = 0$. Daí, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(y \cdot x)$. Portanto, por (4.15), segue que $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. □

Teorema 4.4.5 (Gleason-Kahane-Żelazko)**.** *Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;

(2) $\varphi(e) = 1$ *e* $\varphi(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$;

(3) $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Suponhamos que (1) é verdadeiro. Como $\varphi(e)^2 = \varphi(e)\,\varphi(e)$, segue que $\varphi(e) = 1$. Agora, dado $x \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, temos $\varphi(e) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x)\,\varphi(x^{-1})$. Assim, $\varphi(x) \neq 0$. Portanto, (1) implica (2). Agora, suponhamos que (2) é verdadeiro. Fixemos que $x \in \mathcal{A}$. Como $\varphi(\varphi(x)\,e - x) = 0$, temos $\varphi(x)\,e - x \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. Consequentemente, $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Logo, (2) implica (3). Por fim, suponhamos que (3) é verdadeiro. Então, $\varphi(x) \in \sigma(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Em particular, temos $\varphi(e) \in \sigma(e)$. Assim, $(\varphi(e) - 1)\,e \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ e, consequentemente, $\varphi(e) = 1$. Agora, fixemos $x \in \mathcal{A}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $p(z) = \varphi((z\,e - x)^n) \in \mathbb{C}[z]$ é um polinômio. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tais que $p(\lambda_i) = \varphi((\lambda_i\,e - x)^n) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por hipótese, $\varphi((\lambda_i\,e - x)^n) \in \sigma((\lambda_i\,e - x)^n)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Diante disso, temos $\lambda_i \in \sigma(x)$. Assim, $|\lambda_i| \leq r(x)$. Por outro lado, observamos que $(z\,e - x)^n = z^n\,e + \binom{n}{1}\,z^{n-1}\,x + \binom{n}{2}\,z^{n-2}\,x^2 + \ldots + (-1)^n\,x^n$. Portanto, $p(z) = \varphi((z\,e - x)^n) = z^n + \binom{n}{1}\,\varphi(x)\,z^{n-1} + \binom{n}{2}\,\varphi(x^2)\,z^{n-2} + \ldots + (-1)^n\,\varphi(x^n)$. Desta forma, $a_{n-1} = \binom{n}{1}\,\varphi(x)$ e $a_{n-2} = \binom{n}{2}\,\varphi(x^2)$. Além disso, $p(z) = (z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_n)$. Das relações de Girard, segue que $a_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ e $a_{n-2} = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i\,\lambda_j$. Agora, notamos que $(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2\,(\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i\,\lambda_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + n\,(n-1)\,\varphi(x^2)$. Consequentemente, $n^2\,\varphi(x)^2 - n^2\,\varphi(x^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - n\,\varphi(x^2)$. Assim, $n^2\,|\varphi(x)^2 - \varphi(x^2)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + n\,|\varphi(x^2)| \leq n\,r(x)^2 + n\,|\varphi(x^2)|$. Logo, $|\varphi(x)^2 - \varphi(x^2)| \leq \frac{1}{n}\,(r(x)^2 + |\varphi(x^2)|)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diante disso, $\varphi(x)^2 = \varphi(x^2)$. Portanto, pelo Lema 4.4.2, segue que φ é multiplicativa. Logo, (3) implica (1). $\square$

4.5 SEMISSIMPLICIDADE

Nesta seção apresentaremos o conceito de álgebra semissimples e introduziremos as C*-álgebras.

Definição 4.5.1. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e X um espaço vetorial (ambos sobre $\mathbb{K}$). Uma ***representação*** de $\mathcal{A}$ sobre X é um homomorfismo $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$, onde $\mathcal{L}(X) = \{T : X \to X \mid T \text{ é linear}\}$. A cada representação π de $\mathcal{A}$ sobre X corresponde um $\mathcal{A}$-módulo X com a operação definida por $a\,x = \pi(a)(x)$ para todos $a \in \mathcal{A}$ e $x \in X$.

Exemplo 4.5.1. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e X um $\mathcal{A}$-módulo (sobre $\mathbb{K}$). Então, a aplicação $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ definida por $\pi(a)(x) = a\,x$, para todo $a \in \mathcal{A}$ e $x \in X$, é uma representação de $\mathcal{A}$ sobre X.

Observação 4.5.1. Pelo exemplo anterior, nós podemos concluir que dado um $\mathcal{A}$-módulo X, é sempre possível construir uma representação $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$.

Definição 4.5.2. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e X um $\mathcal{A}$-módulo (sobre $\mathbb{K}$). Dizemos que o $\mathcal{A}$-módulo X é ***não-trivial*** quando existem $a \in \mathcal{A}$ e $x \in X$ tais que $a\,x \neq 0$.

Dizemos que X é ***irredutível*** quando X é não trivial e seus únicos $\mathcal{A}$-submódulos são X e $\{0\}$.

Definição 4.5.3. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e X um espaço vetorial (ambos sobre $\mathbb{K}$), e $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ uma representação de $\mathcal{A}$ sobre X. Dizemos que a representação de $\mathcal{A}$ sobre X é ***irredutível*** quando X visto como um $\mathcal{A}$-módulo é irredutível.

Definição 4.5.4. O ***radical de Jacobson*** de uma álgebra associativa $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$, denotado por $Rad(\mathcal{A})$, é o ideal formado pela interseção dos núcleos de todas as representações irredutíveis de $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra ***(Jacobson) semissimples*** quando $Rad(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Proposição 4.5.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra associativa. Então, $\mathcal{A}/Rad(\mathcal{A})$ é uma álgebra semissimples.*

Demonstração. Sejam X um $\mathcal{A}$-módulo irredutível e π a correspondente representação irredutível de $\mathcal{A}$ sobre X. Denotamos $\mathcal{B} = \mathcal{A}/Rad(\mathcal{A})$. Então, X é um $\mathcal{B}$-módulo com a operação definida por $\hat{b}\,x = a\,x$, onde $a \in \hat{b}$ e $x \in X$. De fato, fixemos $\hat{b} \in \mathcal{B}$. Se $a_1, a_2 \in \hat{b}$, então $(a_1 - a_2) \in Rad(\mathcal{A}) \subset \ker(\pi)$. Logo, $(a_1 - a_2)\,X = \{0\}$, isto é, $a_1\,x = a_2\,x$ para todo $x \in X$. Desta forma, a operação de módulo está bem definida. Além disso, o $\mathcal{B}$-módulo X assim obtido é irredutível, pois X é um $\mathcal{A}$-módulo irredutível. Agora, seja $\hat{u} \in Rad(\mathcal{B})$. Então, $\hat{u}\,X = \{0\}$ e, consequentemente, $a\,X = \{0\}$ para todo $a \in \hat{u}$. Assim, $a \in Rad(\mathcal{A})$ sempre que $a \in \hat{u}$. Portanto, $\hat{u} = 0$, ou seja, $rad(\mathcal{B}) = \{0\}$. □

Proposição 4.5.2. *Toda álgebra semissimples é uma álgebra semiprima.*

Demonstração. Vide [5, Proposição 30.5]. □

Definição 4.5.5. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $* : A \to A$ é uma ***involução*** quando para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ valem as seguintes relações:

(1) $(x + \lambda\, y)^* = x^* + \overline{\lambda}\, y^*$.

(2) $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$ e $(x^*)^* = x$.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ equipada com uma involução $*$ é denominada uma ***$*$-álgebra***. Uma ***$*$-subálgebra*** de $\mathcal{A}$ é uma subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ tal que $x^* \in \mathcal{B}$ sempre que $x \in \mathcal{B}$.

Exemplo 4.5.2. Consideremos a álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), +, \cdot)$. Definimos a aplicação $* : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = \overline{A^T}$ para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, isto é, $[A^*]_{ij} = [\overline{A^T}]_{ij} = [\overline{A}]_{ji}$. Afirmamos que $*$ é uma involução em $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De fato, fixemos $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e

$\lambda \in \mathbb{K}$. Observamos

$$\begin{aligned}[(A+\lambda\, B)^*]_{ij} &= [\overline{(A+\lambda\, B)^T}]_{ij} = [\overline{A^T+\lambda\, B^T}]_{ij} = [\overline{A^T}+\overline{\lambda}\,\overline{B^T}]_{ij} = [\overline{A^T}]_{ij}+\overline{\lambda}\,[\overline{B^T}]_{ij}\\ &= [A^*]_{ij}+\overline{\lambda}\,[B^*]_{ij} = [A^*+\overline{\lambda}\,B^*]_{ij}.\end{aligned}$$

Logo, $(A+\lambda\, B)^* = A^*+\overline{\lambda}\,B^*$. Além disso, $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ e $\overline{A\cdot B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$. Assim, $[(A\cdot B)^*]_{ij} = [\overline{(A\cdot B)^T}]_{ij} = [\overline{B^T\cdot A^T}]_{ij} = [\overline{B^T}\cdot\overline{A^T}]_{ij} = [B^*\cdot A^*]_{ij}$. Logo, $(A\cdot B)^* = B^*\cdot A^*$. Finalmente, como $\overline{\overline{A}} = A$ e $(A^T)^T = A$, segue que $(A^*)^* = A$.

O próximo resultado nos permitirá concluir que $B(\mathcal{H})$ (veja Exemplo 4.5.3) possui uma involução - $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 4.5.3. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Então, para cada $T \in B(\mathcal{H})$, existe um único operador $T^* \in B(\mathcal{H})$ tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Além disso, $\|T\|_\infty = \|T^*\|_\infty$. O operador T^* é denominado o operador adjunto de T.*

Demonstração. Fixamos $y \in \mathcal{H}$, e definimos $\psi_y : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, onde $\psi_y(x) = \langle T(x), y\rangle$. Claramente ψ_y é linear. Além disso, $|\psi_y(x)| = |\langle T(x), y\rangle| \leq \|T\|_\infty\,\|y\|\,\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Logo, $\psi_y \in \mathcal{H}^*$. Pelo Teorema 2.4.3, existe um único $u = T^*(y) \in \mathcal{H}$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$, temos $\langle T(x), y\rangle = \psi_y(x) = \langle x, u\rangle$. Assim, nós podemos definir a aplicação $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, onde $T^*(y) = u$ e $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Agora, sejam $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Por um lado, para cada $x \in \mathcal{H}$, $\langle x, T^*(y_1+\lambda\, y_2)\rangle = \langle T(x), y_1+\lambda\, y_2\rangle$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(y_1)+\lambda\, T^*(y_2)\rangle &= \langle x, T^*(y_1)\rangle + \overline{\lambda}\,\langle x, T^*(y_2)\rangle = \langle T(x), y_1\rangle + \overline{\lambda}\,\langle T(x), y_2\rangle\\ &= \langle T(x), y_1+\lambda\, y_2\rangle.\end{aligned}$$

Pela unicidade de $T^*(y_1+\lambda\, y_2)$, vemos que $T^*(y_1+\lambda\, y_2) = T^*(y_1)+\lambda\, T^*(y_2)$. Logo, T^* é linear. Além disso, para cada $y \in \mathcal{H}$,

$$\|T^*(y)\|^2 = |\langle T^*(y), T^*(y)\rangle| = |\langle T(T^*(y)), y\rangle| \leq \|T\|_\infty\,\|T^*(y)\|\,\|y\|.$$

Assim, se $y \notin \ker(T^*)$, temos $\|T^*(y)\| \leq \|T\|_\infty\,\|y\|$. Caso $y \in \ker(T^*)$, vemos que $\|T^*(y)\| = 0 \leq \|T\|_\infty\,\|y\|$. Logo, $T^* \in B(\mathcal{H})$. Em particular, $\|T^*\|_\infty \leq \|T\|_\infty$.

Finalmente, seja $x \in \mathcal{H}$ tal que $\|x\| \leq 1$. Se $x \notin \ker(T)$, então

$$\|T(x)\|^2 = |\langle T(x), T(x)\rangle| = |\langle x, T^*(T(x))\rangle| \leq \|x\|\,\|T^*\|_\infty\,\|T(x)\| \leq \|T^*\|_\infty\,\|T(x)\|.$$

Assim, $\|T(x)\| \leq \|T^*\|_\infty$. Se $x \in \ker(T)$, então $\|T(x)\| = 0 \leq \|T^*\|_\infty$. Logo, $\|T\|_\infty \leq \|T^*\|_\infty$. E isto completa a demonstração. $\square$

Definição 4.5.6. Uma álgebra normada $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ com uma involução $*$ satisfazendo $\|x^*\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$ é denominada uma ***álgebra $*$-normada***.

Exemplo 4.5.3. Diante da Proposição 4.5.3, podemos definir $* : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ como sendo a aplicação que a cada $T \in B(\mathcal{H})$ associa o seu operador adjunto $T^* \in B(\mathcal{H})$. Afirmamos que $*$ é uma involução em $B(\mathcal{H})$. De fato, sejam $T, S \in B(\mathcal{H})$. Então, fixados $x, y \in \mathcal{H}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle (T + \lambda\, S)(x), y\rangle &= \langle T(x) + \lambda\, S(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle + \lambda\, \langle S(x), y\rangle \\ &= \langle x, T^*(y)\rangle + \lambda\, \langle x, S^*(y)\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda}\, S^*(y)\rangle \\ &= \langle x, T^*(y) + \overline{\lambda}\, S^*(y)\rangle = \langle x, (T^* + \overline{\lambda}\, S^*)(y)\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $(T + \lambda\, S)^* = T^* + \overline{\lambda}\, S^*$. Além disso,

$$\begin{aligned}\langle (T \circ S)(x), y\rangle &= \langle T(S(x)), y\rangle = \langle S(x), T^*(y)\rangle = \langle x, S^*(T^*(y))\rangle \\ &= \langle x, (S^* \circ T^*)(y)\rangle.\end{aligned}$$

Logo, $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Por último, $\langle T^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, T^*(x)\rangle} = \overline{\langle T(y), x\rangle} = \langle x, T(y)\rangle$. Portanto, $(T^*)^* = T$. Diante destas considerações, provamos que $B(\mathcal{H})$ é uma álgebra de Banach com uma involução $*$ tal que $\|T\|_\infty = \|T^*\|_\infty$ para qualquer $T \in B(\mathcal{H})$. Em particular, $B(\mathcal{H})$ é uma álgebra $*$-normada.

Observação 4.5.2. No contexto do exemplo anterior, fixado $T \in B(\mathcal{H})$, temos:

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle (T^* \circ T)(x), x\rangle \leq \|T^* \circ T\|_\infty \|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Diante disso, $\|T\|_\infty^2 \leq \|T^* \circ T\|_\infty$. Por outro lado, $\|T^* \circ T\|_\infty \leq \|T\|_\infty^2$, pois $B(\mathcal{H})$ é uma álgebra normada. Assim, $\|T^* \circ T\|_\infty = \|T\|_\infty^2$ para todo $T \in B(\mathcal{H})$.

Definição 4.5.7. Uma ***C^*-álgebra***[2] é uma $*$-subálgebra fechada de $B(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Em particular, toda C*-álgebra é associativa.

Exemplo 4.5.4. Por definição, diante do Exemplo 4.5.3, $B(\mathcal{H})$ é uma C*-álgebra para todo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Exemplo 4.5.5. Pelo Exemplo 4.5.2, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é uma $*$-álgebra. Pela Proposição 4.1.5, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é isometricamente isomorfa à uma subálgebra fechada de $B(\mathbb{C}^n)$. De fato, como estamos em dimensão finita, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é isomorfo a $B(\mathbb{C}^n)$. Além disso, considerando a base canônica em $\mathbb{C}^n$ e A a matriz de um operador T nessa base, segue que a matriz do operador adjunto T^* nessa mesma base é a matriz adjunta de A. Logo, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é uma C*-álgebra.

[2] Alguns autores definem uma B*-álgebra $\mathcal{A}$ como uma álgebra de Banach associativa munida de uma involução $*$ satisfazendo $\|x^* \cdot x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Do modo como foi definida uma C*-álgebra neste trabalho, segue que toda C*-álgebra é uma B*-álgebra. Além disso, devido ao Teorema de Gelfand-Naimark, se $\mathcal{A}$ é uma B*-álgebra, então existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um homomorfismo isométrico injetor $\varphi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ tal que $\varphi(x^*) = (\varphi(x))^\times$, onde $\times$ é a involução em $B(\mathcal{H})$, veja [5, Teorema 38.10]. Por este motivo, na literatura, é possível encontrar C*-álgebras definidas da mesma maneira como as B*-álgebras.

Antes de introduzir a próxima definição nós revisitaremos o Exemplo 4.2.4. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada associativa. Nós vimos no exemplo supracitado que $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda com a operação definida por $(x \bullet f)(y) = f(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Analogamente, $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à direita com a operação definida por $(f \bullet x)(y) = f(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Além disso, $x_1 \bullet (f \bullet x_2) = (x_1 \bullet f) \bullet x_2$ para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Desta forma, $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-bimódulo. Agora estamos em posição de apresentar a seguinte terminologia:

Definição 4.5.8. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach associativa. Dizemos que $\mathcal{A}$ é ***weakly amenable*** quando toda derivação contínua $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ é interna (veja Exemplo 4.2.4 e a Definição 4.2.6).

Teorema 4.5.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma C^*-álgebra. Para cada derivação $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$, existe um funcional $\omega \in \mathcal{A}^*$ satisfazendo $\|\omega\| \leq \|\delta\|$ tal que $\delta(x) = \omega \bullet x - x \bullet \omega$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Além disso, δ é uma derivação interna e $\mathcal{A}$ é weakly amenable. Em particular, $\delta(x)(y) = (\omega \bullet x - x \bullet \omega)(y) = \omega(x \cdot y) - \omega(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Vide [17, Teorema 1.10]. □

Definição 4.5.9. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Uma ***identidade aproximada à esquerda*** (respectivamente à direita) para $\mathcal{A}$ é uma rede $(e_\lambda)_{\lambda \in D}$ em $\mathcal{A}$ tal que a rede $e_\lambda \cdot x$ converge para x (respectivamente $x \cdot e_\lambda$ converge para x) para todo $x \in \mathcal{A}$. Uma ***identidade aproximada*** para $\mathcal{A}$ é uma rede $(e_\lambda)_{\lambda \in D}$ que é simultaneamente uma identidade aproximada à esquerda e à direita. Dizemos que uma identidade aproximada (à direita ou à esquerda) $(e_\lambda)_{\lambda \in D}$ para $\mathcal{A}$ é limitada quando para algum $M > 0$, temos $\|e_\lambda\| \leq M$ para todo $\lambda \in D$.

Proposição 4.5.4. *Toda C^*-álgebra possui uma identidade aproximada limitada.*

Demonstração. Vide [5, Lema 39.14]. □

Teorema 4.5.2. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Suponhamos que $\mathcal{A}$ possui uma identidade aproximada à esquerda. Então, para cada $x \in \mathcal{A}$ e para cada $\delta > 0$, existem $y, z \in \mathcal{A}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(1) $x = y \cdot z$.

(2) z pertence ao ideal fechado à esquerda gerado por x. Em outras palavras, z pertence ao fecho de $\mathcal{A}x$.

(3) $\|x - z\| < \delta$.

Demonstração. Vide [12, Teorema 1]. □

5 ÁLGEBRAS ZERO LIE PRODUCT DETERMINED (zLpd)

Neste capítulo, nós introduziremos o conceito de álgebras *zero Lie product determined* (zLpd). Entretanto, nós começaremos com um conceito um pouco mais geral, a saber, o conceito das álgebras *zero product determined* (zpd). Em um primeiro momento nós trataremos tal conceito de um ponto de vista puramente algébrico. Todas as álgebras e espaços vetoriais neste capítulo serão consideradas sobre o corpo $\mathbb{K}$, lembrando que $\mathbb{K}$ representa o corpo dos números reais ou complexos. Entretanto, nós ressaltamos que esta parte algébrica vale para corpos arbitrários.

5.1 A ABORDAGEM ALGÉBRICA

5.1.1 Álgebras zpd

Começamos com um exemplo que nos servirá como ponto de partida para a apresentação das álgebras zpd. De fato, sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ um funcional bilinear. Suponhamos que exista um funcional linear $T : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ tal que

$$\varphi(x, y) = T(x \cdot y) \text{ para todos } x, y \in \mathcal{A}. \tag{5.1}$$

Podemos observar que o funcional φ satisfaz a seguinte igualdade:

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ sempre que } x, y \in \mathcal{A} \text{ são tais que } x \cdot y = 0. \tag{5.2}$$

Por outro lado, se $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ é um funcional bilinear satisfazendo (5.2), nós gostaríamos de saber sob quais condições seria possível garantir existência de um funcional linear $\tilde{T} : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ satisfazendo (5.1). Diante destas considerações e com base no trabalho [9], apresentamos a seguinte definição.

Definição 5.1.1. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra. Dizemos que $\mathcal{A}$ é ***zero product determined*** (zpd) quando os únicos funcionais bilineares $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ satisfazendo (5.2) são os funcionais bilineares da forma (5.1).

Exemplo 5.1.1. Todo corpo $\mathbb{K}$, visto como uma álgebra sobre si mesmo, é uma álgebra *zpd*. De fato, seja $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ um funcional bilinear tal que $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathbb{K}$ e $x \cdot y = 0$. Observamos que $\varphi(x, y) = \varphi(x \cdot y, 1)$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$. Diante disso, definimos $T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que $T(z) = \varphi(z, 1)$ para todo $z \in \mathbb{K}$. Logo, T é linear e $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todos $x, y \in \mathbb{K}$.

Notação: Seja X um espaço vetorial arbitrário. O conjunto de todos os funcionais lineares em X será denotado por X^+ e será denominado o dual algébrico de X.

Observação 5.1.1. Lembre-se que $\mathcal{A}^2 = \{$somas finitas de elementos da forma $x \cdot y \mid x, y \in \mathcal{A}\}$.

Proposição 5.1.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{A}$ é uma álgebra zpd.

(2) Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $x \cdot y = 0$. Então, $\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t) = 0$ sempre que $x_t, y_t \in \mathcal{A}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, são tais que $\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t = 0$.

(3) Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $x \cdot y = 0$. Então, existe uma aplicação linear $T : \mathcal{A}^2 \to X$ tal que $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre $x \cdot y = 0$ $(x, y \in \mathcal{A})$. Suponhamos que (1) é verdadeiro. Fixemos $\xi \in X^+$. Então, a aplicação $\xi \circ \varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ é bilinear. Além disso, se $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $x \cdot y = 0$, então $(\xi \circ \varphi)(x, y) = \xi(\varphi(x, y)) = 0$. Como $\mathcal{A}$ é *zpd*, existe um funcional linear $\tau_\xi : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ tal que $(\xi \circ \varphi)(x, y) = \tau_\xi(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Agora, sejam $x_t, y_t \in \mathcal{A}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, tais que $\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t = 0$. Então, para todo $\xi \in X^+$, nós temos $\xi\left(\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)\right) = \sum_{t=1}^{m} (\xi \circ \varphi)(x_t, y_t) = \sum_{t=1}^{m} \tau_\xi(x_t \cdot y_t) = \tau_\xi\left(\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t\right) = 0$. Diante disso nós podemos concluir que $\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t) = 0$. Logo, (1) implica (2). Agora, suponhamos que (2) é verdadeiro. Seja $T : \mathcal{A}^2 \to X$ definida por $T\left(\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t\right) = \sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)$. Afirmamos que T está bem definida. De fato, por hipótese, se $x_t, y_t \in \mathcal{A}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, são tais que $\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t = 0$, então $\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t) = 0$. Daí, se $\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t = \sum_{t=1}^{m'} x'_t \cdot y'_t$ vemos que $T(\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t) = T(\sum_{t=1}^{m'} x'_t \cdot y'_t)$. Além disso, T é linear por construção e, em particular, $T(x \cdot y) = \varphi(x, y)$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Logo, (2) implica (3). Finalmente, suponhamos que (3) é verdadeiro. Por hipótese, tomando $X = \mathbb{K}$, existe uma aplicação linear $T : \mathcal{A}^2 \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Logo, passando a uma extensão linear $T : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, segue que (3) implica (1). $\square$

Notação: Sejam $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, e)$ uma álgebra, e $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathcal{B}$. Fixemos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Denotaremos por $E_{ij} = (e_{kl})$ - dita uma matrix unitária - a matriz definida da seguinte forma: $e_{kl} = e$ se $k = i$ e $l = j$ e $e_{kl} = 0$ caso contrário. Desta forma, dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ arbitrária, nós escreveremos $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, E_{ij}$. Com a notação apresentada, sabemos que vale a seguinte identidade:

$$(a\, E_{ij}) \cdot (b\, E_{kl}) = \delta_{jk} \, ab \, E_{il}, \text{ onde } \delta_{jk} = 1 \text{ se } j = k, \text{ e } 0 \text{ caso contrário.}$$

Proposição 5.1.2. *Seja $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, e)$ uma álgebra com unidade. Então $\mathfrak{A} = \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é uma álgebra zpd para todo $n \geq 2$.*

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(A, B) = 0$ sempre que $A \cdot B = 0$. Fixemos $x, y \in \mathcal{B}$ e $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Claramente $(x\, E_{ij}) \cdot (y\, E_{kl}) = 0$ sempre que $j \neq k$. Assim, temos

$$\varphi(x\, E_{ij}, y\, E_{kl}) = 0 \text{ sempre que } j \neq k. \tag{5.3}$$

Agora provaremos que devido a (5.3) vale a seguinte identidade:

$$\varphi(x\, E_{ij}, y\, E_{jl}) = \varphi(xy\, E_{ik}, E_{kl}) \text{ sempre que } j \neq k. \tag{5.4}$$

Com efeito, observamos que $(x\, E_{ij} + xy\, E_{ik}) \cdot (y\, E_{jl} - E_{kl}) = 0$. A partir da bilinearidade de φ obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x\, E_{ij} + xy\, E_{ik}, y\, E_{jl} - E_{kl}) = \varphi(x\, E_{ij}, y\, E_{jl}) - \varphi(x\, E_{ij}, E_{kl}) + \varphi(x\, y\, E_{ik}, y\, E_{jl}) \\ - \varphi(x\, y\, E_{ik}, E_{kl}) = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(x\, E_{ij}, y\, E_{jl}) - \varphi(x\, y\, E_{ik}, E_{kl}) = 0$ como desejado. Para a escolha $x' = xy$ e $y' = e$ em (5.4) vemos

$$\varphi(xy\, E_{ij}, E_{jl}) = \varphi(xy\, E_{ik}, E_{kl}) \text{ sempre que } j \neq k. \tag{5.5}$$

Combinando as equações (5.4) e (5.5), nós temos

$$\varphi(x\, E_{ij}, y\, E_{jl}) = \varphi(xy\, E_{ij}, E_{jl}). \tag{5.6}$$

Agora, fixemos $A_t, B_t \in \mathfrak{A}$, $t \in \{1 \ldots, m\}$, tais que $\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t = 0$. Afirmamos que $\sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t) = 0$. De fato, para cada $t \in \{1, \ldots, m\}$, escrevemos $A_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t\, E_{ij}$ e $B_t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{kl}^t\, E_{kl}$, onde $a_{ij}^t, b_{kl}^t \in \mathcal{B}$ para todo $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Além disso, sabemos que para cada $i, l \in \{1, \ldots, n\}$ fixados, a entrada-(i, l) da matriz $A_t \cdot B_t$ é dada por $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t\, b_{jl}^t$. Consequentemente, temos:

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t\, b_{jl}^t = 0. \tag{5.7}$$

Utilizando a equação (5.3) para o cálculo de $\sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t)$ vemos

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t) &= \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(a_{ij}^t\, E_{ij}, b_{kl}^t\, E_{kl}) \\ &= \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(a_{ij}^t\, E_{ij}, b_{kl}^t\, E_{kl}) + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(a_{ij}^t\, E_{ij}, b_{jl}^t\, E_{jl}) \\ &= \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi(a_{ij}^t\, E_{ij}, b_{jl}^t\, E_{jl}).\end{aligned}$$

Por (5.6) e (5.5), podemos escrever $\varphi(a^t_{ij}\, E_{ij}, b^t_{jl}\, E_{jl}) = \varphi(a^t_{ij} b^t_{jl}\, E_{ij}, E_{jl}) = \varphi(a^t_{ij} b^t_{jl}\, E_{i1}, E_{1l})$. Como φ é bilinear, segue que

$$\sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi(a^t_{ij} b^t_{jl}\, E_{i1}, E_{1l}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varphi((\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a^t_{ij} b^t_{jl})\, E_{i1}, E_{1l}).$$

Logo, por (5.7), nós temos $\sum\limits_{t=1}^{m}\varphi(A_t, B_t) = 0$. Portanto, $\mathfrak{A}$ é uma álgebra *zpd*. □

Abaixo apresentamos um exemplo de uma álgebra que não é *zpd*.

Exemplo 5.1.2. A álgebra $\mathfrak{T}_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right) \mid x, y, z, w \in \mathbb{C} \right\}$ do Exemplo 4.1.6 não é *zpd*. De fato, tomemos $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e seja $\varphi : \mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_1 \to \mathfrak{T}_1$ tal que $\varphi(A, B) = A \cdot Y \cdot B$. Claramente φ é uma aplicação bilinear. Por definição, para cada $A, B \in \mathfrak{T}_1$, nós temos $\varphi(A, B) = \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x\,a & x\,d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Além disso, se $A, B \in \mathfrak{T}_1$ são tais que $A \cdot B = 0$ temos $x\,a = 0$ e $x\,d + w\,a = 0$. Diante disso, $x = 0$ ou $a = 0$. Em ambos os casos, nós temos $x\,d = 0$. Agora, suponhamos que $\mathfrak{T}_1$ é uma álgebra *zpd*. Então, existe uma aplicação linear $T : \mathfrak{T}_1 \to \mathfrak{T}_1$ tal que $\varphi(A, B) = T(A \cdot B)$ para todo $A, B \in \mathfrak{T}_1$. Consequentemente, $T(A) = \varphi(A, I_3) = \varphi(I_3, A)$ para todo $A \in \mathfrak{T}_1$, onde I_3 é a matriz identidade. Entretanto, por outro lado, tomando $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, vemos - por definição - que $\varphi(A, I_3) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $\varphi(I_3, A) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ou seja, $\varphi(A, I_3) \neq \varphi(I_3, A)$, uma contradição. Portanto, $\mathfrak{T}_1$ não é uma álgebra *zpd*.

5.1.2 Álgebras zLpd

No que segue $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ é uma álgebra associativa. De acordo com o Exemplo 4.1.4 sabemos que $\mathcal{A}$ pode ser vista como uma álgebra de Lie, que denotamos por $\mathcal{A}^-$, quando munida com o produto $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$, onde $x, y \in \mathcal{A}$. Dito isto, agora podemos apresentar a principal definição desta seção assim como seus subsequentes resultados.

Definição 5.1.2. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra. Dizemos que $\mathcal{A}$ é ***zero Lie product determined*** (zLpd) quando a álgebra de Lie $\mathcal{A}^-$ é zpd.

Notação: O espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{[x, y] = x \cdot y - y \cdot x \mid x, y \in \mathcal{A}\}$ será denotado por $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$.

Proposição 5.1.3. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ uma álgebra. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{A}$ é uma álgebra zLpd.

(2) Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $[x, y] = 0$. Então, $\sum\limits_{t=1}^{m}\varphi(x_t, y_t) = 0$ sempre que $x_t, y_t \in \mathcal{A}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, são tais que $\sum\limits_{t=1}^{m}[x_t, y_t] = 0$.

(3) Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $[x, y] = 0$. Então, existe uma aplicação linear $T : [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \to X$ tal que $\varphi(x, y) = T([x, y])$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Veja a Proposição 5.1.1. Basta considerar a álgebra $\mathcal{A}^-$. □

Exemplo 5.1.3. Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot)$ é uma álgebra comutativa, então $\mathcal{A}$ é *zLpd*.

Teorema 5.1.1. *Para todo $n \geq 1$, a álgebra $\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ não é zLpd para alguma álgebra (associativa) com unidade $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, e)$.*

Demonstração. Vide [9, Teorema 4.6]. □

O resultado anterior nos permite concluir que existe uma álgebra $\mathcal{B}$ com unidade que não é *zLpd*. Levando-se em consideração esse resultado, nós apresentaremos o seguinte exemplo - compare o resultado acima com a Proposição 5.1.2.

Exemplo 5.1.4. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra (associativa) com unidade e suponhamos que $\mathcal{B}$ não é *zLpd*. Então, a álgebra $\mathfrak{T}_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \mid x, y \in \mathcal{B} \right\}$ do Exemplo 4.1.7 não é *zLpd*. De fato, como $\mathcal{B}$ não é *zLpd*, existe um funcional bilinear $\varphi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathbb{K}$ satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathcal{B}$ e $[x, y] = 0$ de forma que para todo funcional linear $\tau : \mathcal{B} \to \mathbb{K}$ existem $x_0, y_0 \in \mathcal{B}$ tais que $\varphi(x_0, y_0) \neq \tau([x_0, x_0])$. Seja $\psi : \mathfrak{T}_2 \times \mathfrak{T}_2 \to \mathbb{K}$ definida por

$$\psi(A, B) = \psi\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \right) = \varphi(x, u).$$

Notemos que ψ é um funcional bilinear, pois φ é bilinear. Fixados $A, B \in \mathfrak{T}_2$, nós temos

$$A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & xu \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \; B \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & ux \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

Diante disso, $[A, B] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & [x,u] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = 0$ se, e somente se, $[x, u] = 0$. Consequentemente, $\psi(A, B) = 0$ sempre que $A, B \in \mathfrak{T}_2$ são tais que $[A, B] = 0$. Agora, suponhamos que $\mathfrak{T}_2$ é *zLpd*. Então, existe um funcional linear $T : \mathfrak{T}_2 \to \mathbb{K}$ tal que $\psi(A, B) = T([A, B])$ para todo $A, B \in \mathfrak{T}_2$, ou seja, $\psi\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \right) = T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & [x,u] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Agora, seja $S : [\mathcal{B}, \mathcal{B}] \to \mathbb{K}$ definida por

$$S\left(\sum_{t=1}^{m} [x_t, y_t] \right) = \sum_{t=1}^{m} \psi\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & x_t & 0 \\ 0 & 0 & x_t \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & y_t & 0 \\ 0 & 0 & y_t \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \right) = \sum_{t=1}^{m} T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & [x_t,y_t] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right),$$

onde $x_t, y_t \in \mathcal{B}$ para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$. Como T é linear, segue que S também é linear. Além disso, observamos que $S\left(\sum_{t=1}^{m} [x_t, y_t] \right) = \sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)$. Agora, sejam $x_t, y_t \in \mathcal{B}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, tais que $\sum_{t=1}^{m} [x_t, y_t] = 0$. Então

$$S\left(\sum_{t=1}^{m} [x_t, y_t] \right) = \sum_{t=1}^{m} T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & [x_t,y_t] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \sum_{t=1}^{m} [x_t,y_t] \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) = 0.$$

Logo, S é linear e está bem definida. Passando a uma extensão linear $S : \mathcal{B} \to \mathbb{K}$, segue que S é um funcional linear satisfazendo $\varphi(x, y) = S([x, y])$ para todo $x, y \in \mathcal{B}$. Absurdo. Portanto, $\mathfrak{T}_2$ não é uma álgebra *zLpd*.

O nosso objetivo no que segue é provar que $\mathfrak{A} = \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é zLpd sempre que $\mathcal{B}$ é zLpd (Teorema 5.1.2), onde $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, e)$ é uma álgebra associativa com unidade. Para tal feito precisaremos de alguns resultados técnicos.

Observação 5.1.2. De agora em diante, dados $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$, nós adotamos a convenção $A \circ B = A \cdot B + B \cdot A$.

Lema 5.1.1. *Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(A, B) = 0$ sempre que $[A, B] = 0$. Então,*

$$\varphi(A \circ B, C) + \varphi(B \circ C, A) + \varphi(C \circ A, B) = 0,$$

para todo $A, B, C \in \mathfrak{A}$.

Demonstração. Para cada elemento $A \in \mathfrak{A}$, temos $\varphi(A, A) = 0$, pois $[A, A] = 0$. Desta forma, segue que $\varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$ para todo $A, B \in \mathfrak{A}$. Por outro lado, notamos que $[A^2, A] = 0$ para todo $A \in \mathfrak{A}$. Diante disso,

$$\varphi(A^2, A) = 0 \text{ para todo } A \in \mathfrak{A}. \tag{5.8}$$

Linearizando a expressão (5.8) em A - substituindo A por $(A + B)$ - nós obtemos

$$\varphi(A^2, B) + \varphi(A \circ B, A) + \varphi(A \circ B, B) + \varphi(B^2, A) = 0 \text{ para todo } A, B \in \mathfrak{A}. \tag{5.9}$$

Uma nova linearização em (5.8) - desta vez substituindo A por $(A + B + C)$ - e usando (5.9), nós obtemos $\varphi(A \circ B, C) + \varphi(B \circ C, A) + \varphi(C \circ A, B) = 0$ para todo $A, B, C \in \mathfrak{A}$. □

Lema 5.1.2. *Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(A, B) = 0$ sempre que $[A, B] = 0$. Então, valem as seguintes relações para todo $x, y \in \mathcal{B}$ e $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$:*

(1) $\varphi(xE_{ij}, yE_{jk}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{kk}) = -\varphi(xyE_{ik}, E_{ii})$ *quando* $i \neq k$.

(2) $\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{ki}) - \varphi(yxE_{jk}, E_{kj}) + \varphi(xE_{kk}, yE_{kk})$.

Demonstração. Fixemos $x, y \in \mathcal{B}$ e $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Notamos que $[x\, E_{ij}, E_{ij}] = 0$. Assim,

$$\varphi(x\, E_{ij}, E_{ij}) = 0. \tag{5.10}$$

Além disso, se $j \neq k$ e $i \neq l$, então $[xE_{ij}, yE_{kl}] = 0$. Consequentemente,

$$\varphi(xE_{ij}, yE_{kl}) = 0. \tag{5.11}$$

Agora, afirmamos que vale a seguinte igualdade:

$$\varphi(xE_{ij}, E_{ji}) = -\varphi(xE_{ji}, E_{ij}) \text{ sempre que } i \neq j. \tag{5.12}$$

Com efeito, suponhamos que $i \neq j$. Então, $[xE_{ij} + xE_{ji}, E_{ij} + E_{ji}] = 0$. Diante disso, $\varphi(xE_{ij}+xE_{ji}, E_{ij}+E_{ji}) = 0$. Logo, $\varphi(xE_{ij}+xE_{ji}, E_{ij}+E_{ji}) = \varphi(xE_{ij}, E_{ji})+\varphi(xE_{ji}, E_{ij}) = 0$.

O nosso próximo objetivo é provar as seguintes igualdades:

$$\varphi(xE_{ij}, yE_{jk}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{kk}) = -\varphi(xyE_{ik}, E_{ii}) \text{ sempre que } i \neq k. \tag{5.13}$$

Suponhamos que $i \neq k$. Observe que $xyE_{ik}\cdot(E_{ii}+E_{kk}) = xyE_{ik}$ e $(E_{ii}+E_{kk})\cdot xyE_{ik} = xyE_{ik}$. Em particular, $[xyE_{ik}, E_{ii} + E_{kk}] = 0$. Assim, $\varphi(xyE_{ik}, E_{ii} + E_{kk}) = 0$. Consequentemente, $\varphi(xyE_{ik}, E_{kk}) = -\varphi(xyE_{ik}, E_{ii})$, e isto nos fornece a segunda igualdade de (5.13). Agora provaremos a primeira igualdade. Inicialmente suponhamos que $j \neq k$. Da condição $i \neq k$, temos $(xE_{ij}+xyE_{ik})\cdot(yE_{jk}-E_{kk}) = xyE_{ik}-xyE_{ik} = 0$ e $(yE_{jk}-E_{kk})\cdot(xE_{ij}+xyE_{ik}) = 0$. Ou seja, $[xE_{ij} + xyE_{ik}, yE_{jk} - E_{kk}] = 0$. Logo, $\varphi(xE_{ij} + xyE_{ik}, yE_{jk} - E_{kk}) = 0$. Então

$$\varphi(xE_{ij}, yE_{jk}) + \varphi(xE_{ij}, -E_{kk}) + \varphi(xyE_{ik}, yE_{jk}) + \varphi(xyE_{ik}, -E_{kk}) = 0.$$

Portanto, por (5.11), temos $\varphi(xE_{ij}, yE_{jk}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{kk})$. Supondo $j = k$ temos, mais uma vez usando $i \neq k$, $(xE_{ik} - E_{ii})\cdot(xyE_{ik}+yE_{kk}) = 0$ e $(xyE_{ik}+yE_{kk})\cdot(xE_{ik}-E_{ii}) = 0$. Assim, $[xE_{ik} - E_{ii}, xyE_{ik} + yE_{kk}] = 0$. Logo, $\varphi(xE_{ik} - E_{ii}, xyE_{ik} + yE_{kk}) = 0$. Em particular,

$$\varphi(x\,E_{ik}, xy\,E_{ik}) + \varphi(x\,E_{ik}, y\,E_{kk}) - \varphi(E_{ii}, xy\,E_{ik}) - \varphi(E_{ii}, y\,E_{kk}) = 0.$$

Usando (5.11), e o fato que $[xE_{ik}, xyE_{ik}] = 0$ temos $\varphi(xE_{ik}, yE_{kk}) = -\varphi(xyE_{ik}, E_{ii})$. E isto conclui a demonstração de (5.13), e portanto de (1).

Agora, nós provaremos a seguinte igualdade:

$$\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) = \varphi(xyE_{ij}, E_{ji}) + \varphi(xE_{jj}, yE_{jj}). \tag{5.14}$$

O caso $i = j$ segue direto de (5.10). Dessa forma, podemos supor sem perda de generalidade que $i \neq j$. Nesse caso, pelo Lema 5.1.1, temos (também utillizamos a relação (5.11) na última linha):

$$\begin{aligned}\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) &= \varphi(E_{ij} \circ xE_{jj}, yE_{ji}) = -\varphi(xE_{jj} \circ yE_{ji}, E_{ij}) - \varphi(yE_{ji} \circ E_{ij}, xE_{jj}) \\ &= -\varphi(xyE_{ji}, E_{ij}) - \varphi(yE_{jj} + yE_{ii}, xE_{jj}) \\ &= -\varphi(xyE_{ji}, E_{ij}) - \varphi(yE_{jj}, xE_{jj}) = -\varphi(xyE_{ji}, E_{ij}) + \varphi(xE_{jj}, yE_{jj}).\end{aligned}$$

Por outro lado, como $i \neq j$, podemos escrever (por (5.12)) que $-\varphi(xyE_{ji}, E_{ij}) = \varphi(xyE_{ij}, E_{ji})$. Portanto, $\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) = \varphi(xyE_{ij}, E_{ji}) + \varphi(xE_{jj}, yE_{jj})$. Em outras palavras, provamos (5.14).

Neste ponto, nós provaremos a seguinte identidade:

$$\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{ki}) - \varphi(yxE_{jk}, E_{kj}) + \varphi(xE_{kk}, yE_{kk}). \tag{5.15}$$

A demonstração será dividida em dois casos - o primeiro caso conterá três subcasos como veremos a seguir. No primeiro caso, suponhamos que $i \neq j$. Se $k = j$, então $k \neq i$. Daí, após empregar (5.14) e (5.10), vemos que a igualdade acima é verdadeira, pois

$$\begin{aligned}\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) &= \varphi(xyE_{ij}, E_{ji}) + \varphi(xE_{jj}, yE_{jj}) \\ &= \varphi(xyE_{ij}, E_{ji}) + \varphi(xE_{jj}, yE_{jj}) - \varphi(yxE_{jj}, E_{jj}).\end{aligned}$$

Por outro lado, se $k = i$, então $k \neq j$. Combinando o fato que φ é antissimétrica, e que valem as relações (5.14) e (5.10), temos

$$\begin{aligned}\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) = -\varphi(yE_{ji}, xE_{ij}) &= -\varphi(yxE_{ji}, E_{ij}) - \varphi(yE_{ii}, xE_{ii}) \\ &= \varphi(xyE_{ii}, E_{ii}) - \varphi(yxE_{ji}, E_{ij}) + \varphi(xE_{ii}, yE_{ii}).\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $k \neq i$ e $k \neq j$. Pelo Lema 5.1.1, como $i \neq j$, temos

$$\begin{aligned}\varphi(xE_{ij}, yE_{ji}) &= \varphi(xE_{ik} \circ E_{kj}, yE_{ji}) = -\varphi(E_{kj} \circ yE_{ji}, xE_{ik}) - \varphi(yE_{ji} \circ xE_{ik}, E_{kj}) \\ &= -\varphi(yE_{ki}, xE_{ik}) - \varphi(yxE_{jk}, E_{kj}) = \varphi(xE_{ik}, yE_{ki}) - \varphi(yxE_{jk}, E_{kj}).\end{aligned}$$

Além disso, por (5.14), nós podemos escrever $\varphi(xE_{ik}, yE_{ki}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{ki}) + \varphi(xE_{kk}, yE_{kk})$. Portanto, concluímos o primeiro caso da demonstração de (5.15).

O segundo caso consiste em considerar $i = j$. Se $k = i$, então temos diretamente por (5.10) que $\varphi(xE_{ii}, yE_{ii}) = \varphi(xyE_{ii}, E_{ii}) - \varphi(yxE_{ii}, E_{ii}) + \varphi(xE_{ii}, yE_{ii})$. Por outro lado, quando $k \neq i$, obtemos pelo Lema 5.1.1 e a igualdade (5.11) o seguinte:

$$\begin{aligned}\varphi(xE_{ii}, yE_{ii}) &= \varphi(xE_{ik} \circ E_{ki}, yE_{ii}) = -\varphi(E_{ki} \circ yE_{ii}, xE_{ik}) - \varphi(yE_{ii} \circ xE_{ik}, E_{ki}) \\ &= -\varphi(yE_{ki}, xE_{ik}) - \varphi(yxE_{ik}, E_{ki}) = \varphi(xE_{ik}, yE_{ki}) - \varphi(yxE_{ik}, E_{ki}).\end{aligned}$$

Por (5.14), concluímos que $\varphi(xE_{ik}, yE_{ki}) = \varphi(xyE_{ik}, E_{ki}) + \varphi(xE_{kk}, yE_{kk})$. Portanto, temos (5.15). Finalmente, notemos que as identidades (5.13) e (5.15) fornecem o resultado. $\square$

Observação 5.1.3. Sejam $A_t, B_t \in \mathfrak{A}$, onde $t = 1, \ldots, m$. Para cada t fixado, temos $A_t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t\, E_{ij}$ e $B_t = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{kl}^t\, E_{kl}$, onde $a_{ij}^t, b_{kl}^t \in \mathcal{B}$. Esta notação será utilizada tacitamente no restante desta seção.

Lema 5.1.3. *Sejam X um espaço vetorial e $\varphi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to X$ uma aplicação bilinear satisfazendo $\varphi(A, B) = 0$ sempre que $[A, B] = 0$. Então*

$$\sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{ij}^t\, E_{11}, b_{ji}^t\, E_{11})$$

sempre que $A_t, B_t \in \mathfrak{A}$ são tais que $\sum_{t=1}^{m} [A_t, B_t] = 0$.

Demonstração. Sejam $A_t, B_t \in \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ tais que $\sum_{t=1}^{m}[A_t, B_t] = 0$. Para cada $i, l \in \{1, \ldots, n\}$, nós sabemos que a entrada-(i, l) da matriz $[A_t, B_t]$ é dada por $\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^t b_{jl}^t - b_{ij}^t a_{jl}^t)$. Consequentemente,

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^t b_{jl}^t - b_{ij}^t a_{jl}^t) = 0 \text{ para todo } i, l \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.16}$$

Podemos escrever $\sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t, B_t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t, B_t) &= \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{kl}^t E_{kl}) \\ &= \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{jl}^t E_{jl}) + \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{ki}^t E_{ki}) \\ &+ \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{ji}^t E_{ji}). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Note que nós escrevemos a expressão $\sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t, B_t)$ em (5.17) como três somatórios (dois na segunda linha e um na terceira). Agora, reescrevemos o segundo somatório em (5.17) da seguinte maneira (renomeando índices e utilizando o fato que φ é antisimétrica):

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{ki}^t E_{ki}) &= \sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\varphi(a_{jl}^t E_{jl}, b_{ij}^t E_{ij}) \\ &= -\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\varphi(b_{ij}^t E_{ij}, a_{jl}^t E_{jl}). \end{aligned}$$

Combinando o item (1) do Lema 5.1.2 com a relação acima, podemos ver que a soma dos dois primeiros somatórios em (5.17) transforma-se em

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}(\varphi(a_{ij}^t b_{jl}^t E_{il}, E_{ll}) - \varphi(b_{ij}^t a_{jl}^t E_{il}, E_{ll})) = \\ &= \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\varphi((a_{ij}^t b_{jl}^t - b_{ij}^t a_{jl}^t)E_{il}, E_{ll}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\varphi\left(\left(\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^t b_{jl}^t - b_{ij}^t a_{jl}^t)\right)E_{il}, E_{ll}\right) = 0, \end{aligned}$$

onde na última das igualdades nós utilizamos (5.16). Consequentemente, temos $\sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t, B_t) = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{ji}^t E_{ji})$. Pelo item (2) do Lema 5.1.2 nós podemos escrever

$$\varphi(a_{ij}^t E_{ij}, b_{ji}^t E_{ji}) = \varphi(a_{ij}^t b_{ji}^t E_{i1}, E_{1i}) - \varphi(b_{ji}^t a_{ij}^t E_{j1}, E_{1j}) + \varphi(a_{ij}^t E_{11}, b_{ji}^t E_{11}).$$

Assim, segue que

$$\sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t,B_t)=\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^tb_{ji}^tE_{i1},E_{1i})-\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(b_{ji}^ta_{ij}^tE_{j1},E_{1j})$$
$$+\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^tE_{11},b_{ji}^tE_{11}).$$

Agora notemos que $\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(b_{ji}^ta_{ij}^tE_{j1},E_{1j})=\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(b_{ij}^ta_{ji}^tE_{i1},E_{1i})$. Logo, obtemos

$$\sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t,B_t)=\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi((a_{ij}^tb_{ji}^t-b_{ij}^ta_{ji}^t)E_{i1},E_{1i})+\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^tE_{11},b_{ji}^tE_{11})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\left(\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^tb_{ji}^t-b_{ij}^ta_{ji}^t\right)E_{i1},E_{1i}\right)+\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^tE_{11},b_{ji}^tE_{11}).$$

Tomando $l=i$ em (5.16), temos $\sum\limits_{t=1}^{m}\varphi(A_t,B_t)=\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^tE_{11},b_{ji}^tE_{11})$ como queríamos demonstrar. $\square$

Teorema 5.1.2. *Se $\mathcal{B}=(\mathcal{B},+,\cdot,e)$ é uma álgebra zLpd com unidade, então $\mathfrak{A}=\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é uma álgebra zLpd para todo $n\geq 2$.*

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial e $\varphi:\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to X$ uma aplicação bilinear tal que $\varphi(A,B)=0$ sempre que $[A,B]=0$. Fixemos $A_t,B_t\in\mathfrak{A}$, $t\in\{1,\ldots,m\}$, tais que $\sum\limits_{t=1}^{m}[A_t,B_t]=0$. O Lema 5.1.3 nos permite concluir o seguinte:

$$\sum_{t=1}^{m}\varphi(A_t,B_t)=\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^t\,E_{11},b_{ji}^t\,E_{11}).$$

onde $A_t=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^t\,E_{ij}$ e $B_t=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{kl}^t\,E_{kl}$ para todo $t=1,\ldots,m$. Lembramos que para cada $i,l\in\{1,\ldots,n\}$ a entrada-(i,l) da matriz $[A_t,B_t]$ é dada por $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}^t\,b_{jl}^t-b_{ij}^t\,a_{jl}^t)$. Assim,

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^t\,b_{jl}^t-b_{ij}^t\,a_{jl}^t)=0 \text{ para todo } i,l=1,\ldots,n. \tag{5.18}$$

Agora, definimos a aplicação $\psi:\mathcal{B}\times\mathcal{B}\to X$ tal que $\psi(a,b)=\varphi(aE_{11},bE_{11})$ para cada par $a,b\in\mathcal{B}$. Claramente ψ é bilinear. Além disso, dados $a,b\in\mathcal{B}$ tais que $[a,b]=0$ segue que $[aE_{11},bE_{11}]=0$. Portanto, $\psi(a,b)=\varphi(aE_{11},bE_{11})=0$. Fixemos $i\in\{1,\ldots,n\}$. Tomando $l=i$ em (5.18), temos $\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}^tb_{ji}^t-b_{ij}^ta_{ji}^t)=0$. Em particular, $\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}^tb_{ji}^t-b_{ij}^ta_{ji}^t)=0$. Por conseguinte, $\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[a_{ij}^t,b_{ji}^t]=0$. Como $\mathcal{B}$ é uma álgebra *zLpd*, temos $\sum\limits_{t=1}^{m}\varphi(A_t,B_t)=\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij}^tE_{11},b_{ji}^tE_{11})=\sum\limits_{t=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\psi(a_{ij}^t,b_{ji}^t)=0$. Logo, $\mathfrak{A}=\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é *zLpd* (Proposição 5.1.3). $\square$

Corolário 5.1.1. *Se $\mathcal{B}=(\mathcal{B},+,\cdot,e)$ é uma álgebra comutativa com unidade, então $\mathfrak{A}=\mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é uma álgbera zLpd para todo $n\geq 2$.*

5.2 A ABORDAGEM ANALÍTICA

Nesta seção nós trabalharemos com álgebras de Banach Complexas. O nosso principal objetivo será a prova do fato que toda C*-álgebra é uma álgebra de Banach *zLpd*.

5.2.1 Álgebras de Banach zpd

Seguindo a mesma estrutura da seção anterior, nós começaremos definindo o conceito de álgebra de Banach *zpd*.

Definição 5.2.1. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach ***zero product determined*** (zpd) quando para todo funcional bilinear **contínuo** $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$, existe um funcional linear **contínuo** $T : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Proposição 5.2.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach zpd.

(2) Sejam X um espaço de Banach complexo e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear contínua satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$. Então, existe uma aplicação linear contínua $T : \mathcal{A}^2 \to X$ tal que $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

(3) Seja $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$. Então, existe $C > 0$, em que $|\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)| \leq C \, \|\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t\|$, $x_t, y_t \in \mathcal{A}$ para todo $t = 1, \ldots, m$. Aqui C não depende de m.

Demonstração. Suponhamos que (1) é verdadeiro. Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear contínua satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$. Fixemos $\xi \in X^*$. Então, $\xi \circ \varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um funcional bilinear em $\mathcal{A}$, pois φ é bilinear e ξ é linear. Além disso, como ξ e φ são contínuas, temos que $\xi \circ \varphi$ é contínua. Agora, fixados $x, y \in \mathcal{A}$ tais que $x \cdot y = 0$, temos $(\xi \circ \varphi)(x, y) = \xi(\varphi(x, y)) = 0$. Por hipótese, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach *zpd*. Assim, existe um funcional linear contínuo $\tau_\xi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que

$$(\xi \circ \varphi)(x, y) = \tau_\xi(x \cdot y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}. \tag{5.19}$$

Desta forma, o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos $\tau_\xi \in \mathcal{A}^*$ satisfazendo (5.19) é não vazio. Logo, pelo Axioma da Escolha[1], para cada $\xi \in X^*$ nós podemos escolher uma única $\tau_\xi \in \mathcal{A}^*$ satisfazendo (5.19). Diante disso, a aplicação $S : X^* \to (\mathcal{A}^2)^*$ tal que

[1] O Axioma da Escolha é um axioma da Teoria dos Conjuntos que pode ser interpretado da seguinte forma: dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios, existe um conjunto que contém exatamente um elemento de cada um dos conjuntos desta coleção.

$S(\xi) = \mathfrak{T}_\xi$, onde $\mathfrak{T}_\xi = \tau_\xi|_{\mathcal{A}^2}$ está bem definida. Afirmamos que S é uma aplicação linear. Com efeito, sejam $\xi_1, \xi_2 \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Fixados $x, y \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned} S(\xi_1 + \lambda\xi_2)(x \cdot y) &= \mathfrak{T}_{(\xi_1 + \lambda\,\xi_2)}(x \cdot y) = ((\xi_1 + \lambda\,\xi_2) \circ \varphi)(x, y) \\ &= (\xi_1 \circ \varphi)(x, y) + \lambda(\xi_2 \circ \varphi)(x, y) = \mathfrak{T}_{\xi_1}(x \cdot y) + \lambda\,\mathfrak{T}_{\xi_2}(x \cdot y) \\ &= S(\xi_1)(x \cdot y) + \lambda S(\xi_2)(x \cdot y) = (S(\xi_1) + \lambda S(\xi_2))(x \cdot y). \end{aligned}$$

Logo, $S(\xi_1 + \lambda\xi_2) = S(\xi_1) + \lambda S(\xi_2)$, pois $\mathcal{A}^2$ é formado pela soma finita de elementos da forma $(x \cdot y)$ com $x, y \in \mathcal{A}$. Agora provaremos que a aplicação S é contínua. De fato, consideremos $\mathcal{G}_S = \{(\xi, \psi) \in X^* \times (\mathcal{A}^2)^* \mid \psi = \mathfrak{T}_\xi = S(\xi)\}$ - o gráfico da aplicação S. Fixemos $(\xi, \psi) \in \overline{\mathcal{G}_S}$. Assim, $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ e $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{T}_{\xi_n}$, onde $\xi_n \in X^*$ e $\mathfrak{T}_{\xi_n} \in (\mathcal{A}^2)^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\xi \in X^*$, pois X é um espaço de Banach. Dados $x, y \in \mathcal{A}$, temos

$$\mathfrak{T}_\xi(x \cdot y) = \xi(\varphi(x, y)) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\varphi(x, y)) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_{\xi_n}(x \cdot y) = \psi(x \cdot y).$$

Consequentemente, $\psi = \mathfrak{T}_\xi = S(\xi)$. Logo, pelo Teorema 3.2.3 (Teorema do gráfico fechado), S é contínua. Agora, fixemos $x_t, y_t \in \mathcal{A}$, $t \in \{1, \ldots, m\}$, e $\xi \in X^*$. Então,

$$\xi\left(\sum_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)\right) = \sum_{t=1}^m \xi(\varphi(x_t, y_t)) = \sum_{t=1}^m \mathfrak{T}_\xi(x_t \cdot y_t) = \mathfrak{T}_\xi\left(\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right). \tag{5.20}$$

Logo, se $\sum\limits_{t=1}^m x_t \cdot y_t = 0$, então $\xi(\sum\limits_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)) = 0$ para todo $\xi \in X^*$. Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, temos a igualdade $\sum\limits_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t) = 0$. Assim, a aplicação linear $T : \mathcal{A}^2 \to X$ dada por $T(\sum\limits_{t=1}^m x_t \cdot y_t) = \sum\limits_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)$, onde $x_t, y_t \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$ está bem definida. Afirmamos que T é uma aplicação contínua. Com efeito, pelo Corolário 3.1.1, existe $\xi \in X^*$ tal que $\|\xi\| = 1$ e

$$\xi\left(\sum_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)\right) = \left\|\sum_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)\right\|. \tag{5.21}$$

Por (5.21) e (5.20), temos (usando $\|\mathfrak{T}_\xi\| = \|S(\xi)\| \le \|S\| \cdot \|\xi\| \le \|S\|$)

$$\begin{aligned} \left\|T\left(\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right)\right\| &= \left\|\sum_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)\right\| = \xi\left(\sum_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)\right) = \left|\mathfrak{T}_\xi\left(\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right)\right| \\ &\le \|\mathfrak{T}_\xi\| \left\|\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right\| \le \|S\| \left\|\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right\|. \end{aligned}$$

Além disso, $T(x \cdot y) = \varphi(x, y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Daí, nós obtemos (2).

Agora, suponhamos que (2) é verdadeiro. Seja $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$. Por hipótese, tomando-se $X = \mathbb{C}$, existe um funcional linear contínuo $T : \mathcal{A}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Diante disso, existe $C > 0$ tal que $|T(\sum\limits_{t=1}^m x_t \cdot y_t)| \le C\,\|\sum\limits_{t=1}^m x_t \cdot y_t\|$, onde $x_t, y_t \in \mathcal{A}$ para todo $t \in \{1, \ldots, m\}$. Logo,

$$\left|\sum_{t=1}^m \varphi(x_t, y_t)\right| = \left|\sum_{t=1}^m T(x_t \cdot y_t)\right| = \left|T\left(\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right)\right| \le C\left\|\sum_{t=1}^m x_t \cdot y_t\right\|.$$

Portanto, (2) implica (3).

Finalmente, suponhamos que (3) é verdadeiro. Seja $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$. Por hipótese, existe $C > 0$ tal que $|\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)| \leq C \|\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t\|$. Consequentemente, a aplicação $T : \mathcal{A}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $T(\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t) = \sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)$ está bem definida. Claramente T é linear. Além disso, T é contínua, pois $|T(\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t)| \leq C \|\sum_{t=1}^{m} x_t \cdot y_t\|$. Seja $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = C \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Então, p é uma seminorma e $|T(u)| \leq p(u)$ para todo $u \in \mathcal{A}^2$. Então, pelo Teorema 3.1.2, existe uma aplicação linear $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{T}|_{\mathcal{A}^2} = T$ e $|\mathcal{T}(x)| \leq p(x) = C \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear contínuo tal que $\varphi(x, y) = \mathcal{T}(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Logo, (3) implica (1). □

Proposição 5.2.2. *Seja $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, e, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach com unidade. Então $\mathfrak{A} = \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ é uma álgebra de Banach zpd para todo $n \geq 2$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(A, B) = 0$ sempre que $A \cdot B = 0$. Então, pelas Proposições 5.1.1 e 5.1.2, se $A_t, B_t \in \mathfrak{A}$ são tais que $\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t = 0$, então $\sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t) = 0$. Portanto, a aplicação linear $T : \mathfrak{A}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $T(\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t) = \sum_{t=1}^{m} \varphi(A_t, B_t)$ está bem definida. Em particular, T satisfaz $T(A \cdot B) = \varphi(A, B)$ para todo $A, B \in \mathfrak{A}$. Agora provaremos que T é contínua. Inicialmente, notemos que $\varphi_e : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_e(A) = \varphi(A, I_n)$ é um funcional linear contínuo. Além disso, $T(\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t) = T((\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t) \cdot I_n) = \varphi(\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t, I_n) = \varphi_e|_{(\mathfrak{A})^2}(\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t)$. Logo, T é contínua. Consequentemente, existe $C > 0$ tal que $|T(\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t)| \leq C \|\sum_{t=1}^{m} A_t \cdot B_t\|$. Outra vez, lembramos que a aplicação $p : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ dada por $p(A) = C \|A\|$ é uma seminorma. Pelo Teorema 3.1.2, existe uma aplicação linear $\mathcal{T} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{T}|_{\mathfrak{A}^2} = T$ e $|\mathcal{T}(A)| \leq p(A) = C \|A\|$ para todo $A \in \mathfrak{A}$. Portanto, $\mathcal{T}$ é um funcional linear contínuo tal que $\varphi(A, B) = \mathcal{T}(A \cdot B)$ para todo $A, B \in \mathfrak{A}$. □

O próximo resultado, que pode ser encontrado em [8], será importante na sequência deste trabalho.

Teorema 5.2.1. *Toda C^*-álgebra é uma álgebra de Banach zpd.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 5.19]. □

5.2.2 Álgebras de Banach zLpd

Definição 5.2.2. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach associativa. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach ***zero Lie product determined*** (zLpd) quando para todo funcional bilinear ***contínuo*** $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que

$[x, y] = 0$, existe um funcional linear ***contínuo*** $T : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x, y) = T([x, y])$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

No que segue $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach associativa.

Proposição 5.2.3. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach zLpd.

(2) Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to X$ uma aplicação bilinear contínua satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $[x, y] = 0$. Então, existe uma aplicação linear contínua $T : [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \to X$ tal que $\varphi(x, y) = T([x, y])$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

(3) Seja $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $[x, y] = 0$. Então, existe $C > 0$, onde $|\sum_{t=1}^{m} \varphi(x_t, y_t)| \leq C \|\sum_{t=1}^{m} [x_t, y_t]\|$, $x_t, y_t \in \mathcal{A}$ para todo $t = 1, \ldots, m$. Aqui C não depende de m.

Demonstração. Veja Proposição 5.2.1 para detalhes. Basta substituir o produto usual de $\mathcal{A}$ pelo colchete de Lie e o espaço $\mathcal{A}^2$ pelo espaço $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. $\square$

Exemplo 5.2.1. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach comutativa. Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach *zLpd*.

Observação 5.2.1. Vale ressaltar que existem álgebras de Banach que não são *zLpd* - tais exemplos são escassos na literatura. No trabalho [1] é apresentado um exemplo de uma álgebra de Banach de dimensão finita que não é *zLpd*. Esse exemplo pode ser encontrado em [1, Proposição 2.2] e envolve o estudo das álgebras de Grassmann.

Agora nós apresentaremos mais uma definição antes de caminharmos na direção do nosso resultado principal (Corolário 5.2.2).

Definição 5.2.3. Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Dizemos que $\mathcal{A}$ possui a ***propriedade*** $\mathbb{B}$ quando para todo funcional bilinear contínuo $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $x \cdot y = 0$, temos $\varphi(a \cdot b, c) = \varphi(a, b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Proposição 5.2.4. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach zpd. Então $\mathcal{A}$ possui a propriedade $\mathbb{B}$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach *zpd* e $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = 0$. Por hipótese, existe um funcional linear contínuo $T : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi(x, y) = T(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é associativa, $\varphi(x \cdot y, z) = T((x \cdot y) \cdot z) = T(x \cdot (y \cdot z)) = \varphi(x, y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. $\square$

Lema 5.2.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \| \cdot \|)$ uma álgebra de Banach. Suponhamos que $\mathcal{A}$ possui a propriedade $\mathbb{B}$ e uma identidade aproximada limitada $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Seja $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo a condição $\varphi(x, y) = 0$ sempre que $x \cdot y = y \cdot x = 0$. Então, para todo $x, y, z, w \in \mathcal{A}$, nós temos:*

$$\varphi(x \cdot y, z \cdot w) + \varphi(w \cdot x, y \cdot z) = \varphi(x, y \cdot z \cdot w) + \varphi(w \cdot x \cdot y, z). \tag{5.22}$$

Além disso, existe $\sigma \in \mathcal{A}^*$ tal que

$$\varphi(x \cdot y, z) - \varphi(y, z \cdot x) + \varphi(y \cdot z, x) = \sigma(x \cdot y \cdot z) \text{ para todo } x, y, z \in \mathcal{A}. \tag{5.23}$$

Em particular quando φ é simétrica temos

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\sigma(x \circ y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}. \tag{5.24}$$

Demonstração. Para cada x, y, z em $\mathcal{A}$ fixados, definimos o seguinte funcional bilinear contínuo: $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, onde $\psi(a, b) = \varphi(b \cdot x \cdot y, z \cdot a) - \varphi(b \cdot x, y \cdot z \cdot a)$. Afirmamos que $\psi(a, b) = 0$ sempre que $a, b \in \mathcal{A}$ são tais que $a \cdot b = 0$. De fato, fixemos $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $a \cdot b = 0$. Agora, definimos o funcional bilinear contínuo $\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $\omega(x, y) = \varphi(b \cdot x, y \cdot a)$. Se $x, y \in \mathcal{A}$ são tais que $x \cdot y = 0$, então $b \cdot x \cdot y \cdot a = y \cdot a \cdot b \cdot x = 0$, pois $a \cdot b = 0$. Logo, $\omega(x, y) = \varphi(b \cdot x, y \cdot a) = 0$. Como $\mathcal{A}$ possui a propriedade $\mathbb{B}$, temos $\omega(x \cdot y, z) = \omega(x, y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. Consequentemente, $\psi(a, b) = \varphi(b \cdot x \cdot y, z \cdot a) - \varphi(b \cdot x, y \cdot z \cdot a) = \omega(x \cdot y, z) - \omega(x, y \cdot z) = 0$.

Utilizando mais uma vez a propriedade $\mathbb{B}$ de $\mathcal{A}$, nós podemos concluir que $\psi(a \cdot b, c) = \psi(a, b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$. Logo, pela definição de ψ, temos

$$\begin{aligned}\psi(a \cdot b, c) &= \varphi(c \cdot x \cdot y, z \cdot a \cdot b) - \varphi(c \cdot x, y \cdot z \cdot a \cdot b)\\ &= \varphi(b \cdot c \cdot x \cdot y, z \cdot a) - \varphi(b \cdot c \cdot x, y \cdot z \cdot a) = \psi(a, b \cdot c).\end{aligned}$$

Agora, escrevemos $x' = c \cdot x$, $z' = z \cdot a$ e $w = b$. Assim, temos $\varphi(x' \cdot y, z' \cdot w) - \varphi(x', y \cdot z' \cdot w) = \varphi(w \cdot x' \cdot y, z') - \varphi(w \cdot x', y \cdot z')$. Consequentemente, $\varphi(x' \cdot y, z' \cdot w) + \varphi(w \cdot x', y \cdot z') = \varphi(x', y \cdot z' \cdot w) + \varphi(w \cdot x' \cdot y, z')$ para todo $x', y, z', w \in \mathcal{A}$ - estamos usando o Teorema 4.5.2. E isto conclui a demonstração de (5.22).

Para o restante desta demonstração lembre-se que $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma identidade aproximada limitada da álgebra $\mathcal{A}$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, substituímos z por e_λ em (5.22). Assim, obtemos a rede $(\varphi(w \cdot x \cdot y, e_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ dada da seguinte forma

$$\varphi(w \cdot x \cdot y, e_\lambda) = \varphi(x \cdot y, e_\lambda \cdot w) + \varphi(w \cdot x, y \cdot e_\lambda) - \varphi(x, y \cdot e_\lambda \cdot w) \text{ para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Como φ é contínuo, a rede $(\varphi(w \cdot x \cdot y, e_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ é convergente e

$$\lim_\lambda \varphi(w \cdot x \cdot y, e_\lambda) = \varphi(x \cdot y, w) + \varphi(w \cdot x, y) - \varphi(x, y \cdot w). \tag{5.25}$$

Neste ponto nós vamos construir o funcional linear σ. Defina $\sigma : \mathcal{A}^3 \to \mathbb{C}$ tal que $\sigma(u) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \varphi(u, e_\lambda)$. Note que a aplicação σ é contínua, pois a rede $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é limitada. Além disso, pelo Teorema 4.5.2, $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}$. Dessa forma, temos $\sigma \in \mathcal{A}^*$. Logo, por (5.25), temos $\sigma(w \cdot x \cdot y) = \varphi(x \cdot y, w) - \varphi(x, y \cdot w) + \varphi(w \cdot x, y)$ para todo $x, y, w \in \mathcal{A}$. E isto conclui a demonstração de (5.23).

Por último, suponhamos que φ é simétrica. Para cada $\lambda \in \Lambda$, substituímos y por e_λ em (5.23). Desta forma, obtemos a rede $(\sigma(x \cdot e_\lambda \cdot z))_{\lambda \in \Lambda}$, onde

$$\sigma(x \cdot e_\lambda \cdot z) = \varphi(x \cdot e_\lambda, z) - \varphi(e_\lambda, z \cdot x) + \varphi(e_\lambda \cdot z, x) \text{ para todo } \lambda \in \Lambda.$$

Como σ e φ são contínuas, temos

$$\begin{aligned}\sigma(x \cdot z) = \lim_\lambda \sigma(x \cdot e_\lambda \cdot z) &= \lim_\lambda \left(\varphi(x \cdot e_\lambda, z) - \varphi(e_\lambda, z \cdot x) + \varphi(e_\lambda \cdot z, x)\right) \\ &= \varphi(x, z) - \sigma(z \cdot x) + \varphi(x, z).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(x, z) = \frac{1}{2}\sigma(x \circ z)$ para todo $x, z \in \mathcal{A}$. □

Antes do próximo resultado, acreditamos ser pertinente (mais uma vez) revisitar o Exemplo 4.2.4. Lembre-se que $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à esquerda com a operação definida por $(x \bullet f)(y) = f(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Analogamente, $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-módulo à direita com a operação definida por $(f \bullet x)(y) = f(x \cdot y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Além disso $x_1 \bullet (f \bullet x_2) = (x_1 \bullet f) \bullet x_2$ para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}^*$. Desta forma, $\mathcal{A}^*$ é um $\mathcal{A}$-bimódulo.

Lema 5.2.2. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Seja $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo antissimétrico satisfazendo a identidade (5.23) para algum $\sigma \in \mathcal{A}^*$. Então a aplicação $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$, onde $\delta(x)(z) = \varphi(x, z) + \frac{1}{2}\sigma(x \circ z)$ para todo $z \in \mathcal{A}$, é uma derivação linear contínua.*

Demonstração. Por construção δ é uma aplicação linear e contínua. Provaremos que δ satisfaz

$$\delta(x \cdot y) = \delta(x) \bullet y + x \bullet \delta(y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}. \tag{5.26}$$

De fato, como φ é uma aplicação antissimétrica, nós podemos escrever (5.23) da seguinte maneira $(x, y, z \in \mathcal{A})$

$$\sigma(x \cdot y \cdot z) = \varphi(x \cdot y, z) + \varphi(z \cdot x, y) + \varphi(y \cdot z, x). \tag{5.27}$$

Similarmente, $\sigma(y \cdot z \cdot x) = \varphi(y \cdot z, x) + \varphi(x \cdot y, z) + \varphi(z \cdot x, y)$. Consequentemente,

$$\sigma(x \cdot y \cdot z) = \sigma(y \cdot z \cdot x) \text{ para todo } x, y, z \in \mathcal{A}. \tag{5.28}$$

Agora, fixemos $x, y, z \in \mathcal{A}$. Por definição, segue que $\delta(x \cdot y)(z) = \varphi(x \cdot y, z) + \frac{1}{2}\,\sigma((x \cdot y) \circ z)$. Por (5.27), temos $\delta(x \cdot y)(z) = -\varphi(z \cdot x, y) - \varphi(y \cdot z, x) + \sigma(x \cdot y \cdot z) + \frac{1}{2}\,\sigma(x \cdot y \cdot z + z \cdot x \cdot y)$. Após combinar (5.28) com o fato que φ é antissimétrica, chegamos na seguinte expressão

$$\delta(x \cdot y)(z) = \varphi(y, z \cdot x) + \varphi(x, y \cdot z) + \sigma(y \cdot z \cdot x) + \frac{1}{2}\,\sigma(x \cdot y \cdot z + z \cdot x \cdot y). \tag{5.29}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\delta(x) \bullet y + x \bullet \delta(y))(z) &= (\delta(x) \bullet y)(z) + (x \bullet \delta(y))(z) = \delta(x)(y \cdot z) + \delta(y)(z \cdot x) \\ &= \varphi(x, y \cdot z) + \frac{1}{2}\,\sigma(x \circ (y \cdot z)) + \varphi(y, z \cdot x) + \frac{1}{2}\,\sigma(y \circ (z \cdot x)) \\ &= \varphi(y, z \cdot x) + \varphi(x, y \cdot z) + \sigma(y \cdot z \cdot x) + \frac{1}{2}\,\sigma(x \cdot y \cdot z + z \cdot x \cdot y).\end{aligned} \tag{5.30}$$

Assim, por (5.29) e (5.30) obtemos (5.26). Logo, δ é uma derivação, linear e contínua. $\square$

Teorema 5.2.2. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach. Suponhamos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra weakly amenable e que possui a propriedade $\mathbb{B}$. Assumimos ainda que $\mathcal{A}$ possui uma identidade aproximada limitada. Se $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um funcional bilinear contínuo satisfazendo a condição*

$$\varphi(x, y) = 0 \textit{ sempre que } x \cdot y = y \cdot x = 0, \tag{5.31}$$

então existem $T_1, T_2 \in \mathcal{A}^*$ tais que $\varphi(x, y) = T_1(x \cdot y) + T_2(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Começamos definindo $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, onde $\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}\,(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$ e $\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}\,(\varphi(x, y) - \varphi(y, x))$. Por construção, temos $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, com φ_1 e φ_2 satisfazendo (5.31). Além disso, φ_1 é simétrica. Logo, pelo Lema 5.2.1, existe $\tau \in \mathcal{A}^*$ tal que

$$2\,\varphi_1(x, y) = \tau(x \circ y), \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}. \tag{5.32}$$

Outra aplicação do Lema 5.2.1, garante a existência de um elemento $\sigma \in \mathcal{A}^*$ tal que φ_2 satisfaz $\varphi_2(x \cdot y, z) - \varphi_2(y, z \cdot x) + \varphi_2(y \cdot z, x) = \sigma(x \cdot y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$. Além disso, como φ_2 é antissimétrica, podemos concluir que a aplicação linear $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ definida da seguinte maneira

$$\delta(x)(y) = \varphi_2(x, y) + \frac{1}{2}\,\sigma(x \circ y), \text{ para todo } x, y \in A, \tag{5.33}$$

é uma derivação linear contínua (Lema 5.2.2). Assim, δ é uma derivação interna, pois $\mathcal{A}$ é weakly amenable. Em outras palavras, existe $\omega \in \mathcal{A}^*$ tal que $\delta(x) = x \bullet \omega - \omega \bullet x$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Assim, por (5.33), temos $\omega(y \cdot x - x \cdot y) - \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}\,\sigma(x \circ y)$. Agora, observamos que o funcional bilinear $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ definido por $f(x, y) = \omega(y \cdot x - x \cdot y) - \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}\,\sigma(x \circ y)$, é simultaneamente simétrico e antissimétrico, ou seja, $f(x, y) = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. A partir daí vemos

$$\varphi_2(x, y) = \omega(y \cdot x - x \cdot y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}. \tag{5.34}$$

Empregando (5.32) e (5.34), chegamos no seguinte

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) &= \frac{1}{2}\,\tau(x \circ y) + \omega(y \cdot x - x \cdot y)\\ &= \frac{1}{2}\,\tau(x \cdot y + y \cdot x) + \omega(y \cdot x) - \omega(x \cdot y)\\ &= \left(\frac{1}{2}\,\tau - \omega\right)(x \cdot y) + \left(\frac{1}{2}\,\tau + \omega\right)(y \cdot x)\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Portanto, $\varphi(x,y) = T_1(x \cdot y) + T_2(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$, onde $T_1, T_2 \in \mathcal{A}^*$ são dados por $T_1 = \frac{1}{2}\,(\tau - \omega)$ e $T_2 = \frac{1}{2}\,(\tau + \omega)$. □

Corolário 5.2.1. *Seja $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Banach satisfazendo as mesmas condições do Teorema 5.2.2. Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach zLpd.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional bilinear contínuo satisfazendo $\varphi(x,y) = 0$ sempre que $[x,y] = 0$. Então, $\varphi(x,y) = 0$ sempre que $x \cdot y = y \cdot x = 0$. Pelo Teorema 5.2.2, existem $T_1, T_2 \in \mathcal{A}^*$ tais que $\varphi(x,y) = T_1(x \cdot y) + T_2(y \cdot x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Um cálculo direto nos fornece

$$\varphi(x,y) - \varphi(y,x) = T_1([x,y]) - T_2([x,y]) = (T_1 - T_2)([x,y]) \tag{5.35}$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Por outro lado, para cada $x \in \mathcal{A}$, temos $\varphi(x,x) = 0$, pois $[x,x] = 0$. Dessa forma, $\varphi(x,y) + \varphi(y,x) = \varphi(x+y, x+y) = 0$, isto é, $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Assim, por (5.35), temos $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\,(T_1 - T_2)([x,y]) = T([x,y])$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. E isto completa a demonstração. □

Corolário 5.2.2. *Toda C^*-álgebra é uma álgebra de Banach zLpd.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Pela Proposição 4.5.4, sabemos que $\mathcal{A}$ possui uma identidade aproximada limitada. Por outro lado, pelo Teorema 4.5.1, $\mathcal{A}$ é weakly amenable. Por fim, pelo Teorema 5.2.1, temos a garantia de que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach *zpd*. A partir deste último fato, podemos concluir a partir da Proposição 5.2.4 que $\mathcal{A}$ possui a propriedade $\mathbb{B}$. Logo, pelo Corolário 5.2.1, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach *zLpd*. □

Observação 5.2.2. Os artigos [1, 9] concentram-se em exibir outros exemplos de álgebras de Banach *zLpd*.

5.3 APLICAÇÕES LINEARES COMUTANTES

O objetivo desta seção será apresentar uma aplicação no contexto das álgebras de Banach zLpd (sempre associativas), com base no exposto na referência [7], envolvendo aplicações lineares que são *comutantes*.

No que segue X denotará um $\mathcal{A}$-módulo no sentido da Definição 4.2.8, onde $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, +, \cdot, \|\cdot\|)$ é uma álgebra de Banach associativa. Mais precisamente, X será um Lie $\mathcal{A}$-módulo quando $\mathcal{A}$ está equipado com o produto $[a, b] = ab - ba$.

Definição 5.3.1. Dizemos que uma aplicação $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é ***comutante*** quando $[x, f(x)] = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Exemplo 5.3.1. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa, então toda aplicação $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é comutante.

Exemplo 5.3.2. $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por $f(x) = x^2$ é uma aplicação comutante. De fato, isso decorre do fato de $\mathcal{A}$ ser associativa.

Antes da leitura do próximo resultado, nós recomendamos o leitor a dar uma olhada na Definição 4.2.9.

Proposição 5.3.1. *Se $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ são aplicações comutantes, então $(f + g) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma aplicação comutante.*

Lema 5.3.1. *Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma aplicação linear comutante, então $[[w, z], [u, f([x, y]) - [x, f(y)]]] = 0$ para todo $x, y, z, u, w \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, lembre-se (Exemplo 4.2.5) que $\mathcal{A}$ é um Lie $\mathcal{A}$-módulo com a operação definida pelo colchete de Lie. Defina $\delta : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, onde $\delta(x, y) = [x, f(y)]$. Como f é uma aplicação linear comutante temos $[x, f(x)] = 0$ para cada $x \in \mathcal{A}$. Dito isto, podemos inferir que $0 = [x + y, f(x + y)] = [y, f(x)] + [x, f(y)]$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$. Logo, $\delta(x, y) = [x, f(y)] = -[y, f(x)] = -\delta(y, x)$, isto é, δ é antissimétrica. Agora, fixados $x, y, z \in \mathcal{A}$, temos

$$\delta([x, y], z) = [[x, y], f(z)] = [x, [y, f(z)]] - [y, [x, f(z)]] = [x, \delta(y, z)] - [y, \delta(x, z)].$$

Assim, δ é uma biderivação antissimétrica (veja Definição 4.2.9). Consequentemente, pelo Lema 4.2.1, temos $[[w, z], \delta(u, [x, y]) - [u, \delta(x, y)]] = 0$, para todo $x, y, u, w, z \in \mathcal{A}$. Portanto, como $\delta(x, y) = [x, f(y)]$ e $\delta(u, [x, y]) = [u, f([x, y])]$, temos $[[w, z], [u, f([x, y]) - [x, f(y)]]] = 0$ para todo $x, y, u, w, z \in \mathcal{A}$. $\square$

Teorema 5.3.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach semissimples, zLpd e com unidade. Então, uma aplicação linear contínua $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é comutante se, e somente se, existem aplicações lineares $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\mu : \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ tais que $f = \gamma + \mu$, onde γ satisfaz $\gamma([x, y]) = [x, \gamma(y)] = [\gamma(x), y]$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que a aplicação linear contínua $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é comutante. Então, pelo Lema 5.3.1, temos

$$[[w, z], [u, f([x, y]) - [x, f(y)]]] = 0, \text{ para todos } x, y, z, u, w \in \mathcal{A}. \tag{5.36}$$

Além disso, pela Proposição 4.5.2, $\mathcal{A}$ é semiprima, pois é semissimples por hipótese. Agora, fixados $x, y, u \in \mathcal{A}$ e tomando $w = [u, f([x, y]) - [x, f(y)]]$ em (5.36), temos $[[w, z], w] = 0$ para todo $z \in \mathcal{A}$. Logo, pela Proposição 4.2.5, temos $w = [u, f([x, y]) - [x, f(y)]] \in Z(\mathcal{A})$. Diante disso, fixados $x, y \in \mathcal{A}$, temos

$$[[f([x, y]) - [x, f(y)], u], f([x, y]) - [x, f(y)]] = 0 \text{ para todo } u \in \mathcal{A}.$$

Novamente pela Proposição 4.2.5, temos $f([x, y]) - [x, f(y)] \in Z(\mathcal{A})$. Agora, definimos a aplicação bilinear contínua $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ tal que $\varphi(x, y) = f([x, y]) - [x, f(y)]$. Fixemos $x, y \in \mathcal{A}$ tais que $[x, y] = 0$. Então, $\varphi(x, y) = [x, f(y)]$. Afirmamos que $\varphi(x, y) = 0$. Com efeito, como $[x, f(y)] \in Z(\mathcal{A})$, temos $[x, [x, f(y)]] = 0$. Pelo Teorema 4.4.1, temos $r([x, f(y)]) = 0$. Por outro lado, para todo $z \in \mathcal{A}$, temos $[[x, f(y)], z] = 0$. Diante disso, pela Proposição 4.4.1, $r([x, f(y)] \cdot z) \leq r([x, f(y)])\, r(z) = 0$. Dessa forma, $r([x, f(y)] \cdot z) = r((-z) \cdot [x, f(y)]) = 0$. Novamente pela Proposição 4.4.1, temos $r([[x, f(y)], z]) \leq r([x, f(y)] \cdot z) + r((-z) \cdot [x, f(y)]) = 0$. Logo, $r([[x, f(y)], z]) = 0$ para todo $z \in \mathcal{A}$. Pela Proposição 4.4.2, $[x, f(y)] \in Rad(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{A}$ é semissimples, temos $Rad(\mathcal{A}) = \{0\}$. Logo, $[x, f(y)] = 0$. Agora, observemos que $Z(\mathcal{A})$ é um espaço de Banach, pela Proposição 4.1.2. Como $\mathcal{A}$ é *zLpd*, existe uma aplicação linear contínua $\mu : [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \to Z(\mathcal{A})$ tal que $\varphi(x, y) = \mu([x, y])$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Estendendo a aplicação $\mu : \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$, definimos a aplicação linear $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que $\gamma = f - \mu$. Dessa forma, fixados $x, y \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned} \gamma([x, y]) &= f([x, y]) - \mu([x, y]) = f([x, y]) - \varphi(x, y) = [x, f(y)] \\ &= [x, \gamma(y)] + [x, \mu(y)] = [x, \gamma(y)]. \end{aligned}$$

Além disso, $\gamma([x, y]) = -\gamma([y, x]) = -[y, \gamma(x)] = [\gamma(x), y]$. Portanto, $f = \gamma + \mu$, onde $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\mu : \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ são aplicações lineares com $\gamma([x, y]) = [x, \gamma(y)] = [\gamma(x), y]$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$.

Reciprocamente, suponhamos que $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma aplicação linear contínua e existem aplicações lineares $\gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\mu : \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ tais que $f = \gamma + \mu$, onde γ satisfaz $\gamma([x, y]) = [x, \gamma(y)] = [\gamma(x), y]$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Fixemos $x \in \mathcal{A}$. Então, $[x, \gamma(x)] = \gamma([x, x]) = 0$. Logo, γ é uma aplicação linear comutante. Além disso, $[x, \mu(x)] = 0$, pois $\mu(x) \in Z(\mathcal{A})$. Logo, μ é uma aplicação linear comutante. Portanto, como $f = \gamma + \mu$, pela Proposição 5.3.1, segue que f é uma aplicação linear comutante. □

REFERÊNCIAS

1 ALAMINOS, J., BREŠAR, M., EXTREMERA, J., and VILLENA, A. R. Zero Lie product determined Banach algebras. *Studia Mathematica 239*, 2 (2017), 189–199.

2 ALAMINOS, J., BREŠAR, M., EXTREMERA, J., and VILLENA, A. R. Zero Lie product determined Banach algebras, ii. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 474*, 2 (2019), 1498–1511.

3 ALAMINOS, J., EXTREMERA, J., VILLENA, A. R., and BREŠAR, M. Characterizing homomorphisms and derivations on C*-algebras. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics 137*, 1 (2007), 1–7.

4 AUPETIT, B. *Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach*, vol. 735. Springer, 2006.

5 BONSALL, F. F., and DUNCAN, J. *Complete Normed Algebras*, vol. 80. Springer Science & Business Media, 2012.

6 BREŠAR, M. *Introduction to Noncommutative Algebra.* Springer, 2014.

7 BREŠAR, M. Functional identities and zero Lie product determined Banach algebras. *The Quarterly Journal of Mathematics 71*, 2 (2020), 649–665.

8 BREŠAR, M. *Zero Product Determined Algebras.* Springer Nature, 2021.

9 BREŠAR, M., GRAŠIČ, M., and ORTEGA, J. S. Zero product determined matrix algebras. *Linear algebra and its applications 430*, 5-6 (2009), 1486–1498.

10 BREŠAR, M., and ŠEMRL, P. On bilinear maps on matrices with applications to commutativity preservers. *Journal of Algebra 301*, 2 (2006), 803–837.

11 BREŠAR, M., and ZHAO, K. Biderivations and commuting linear maps on Lie algebras. *arXiv preprint arXiv:1801.01109* (2018).

12 COHEN, P. J. Factorization in group algebras. *Duke Mathematical Journal 26*, 2 (1959), 199 – 205.

13 CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*, vol. 11. Springer Science & Business Media, 1978.

14 CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis*, vol. 96. Springer, 2019.

15 DE OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2001.

16 FABIAN, M., HABALA, P., HÁJEK, P., SANTALUCÍA, V. M., PELANT, J., and ZIZLER, V. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, vol. 8. Springer, 2001.

17 HAAGERUP, U., and LAUSTSEN, J. N. *Weak Amenability of C*-algebras and a Theorem of Goldstein.* Odense Universitet. Institut for Matematik og Datalogi, 1997.

18 HAASE, M. *Functional Analysis: An Elementary Introduction*, vol. 156. American Mathematical Society, 2014.

19 HAWKING, S. *A Brief History of Time*. Bantam Books, New York, 1998.

20 HERSTEIN, I. N. *Rings With Involution*. The University of Chicago Press, Chicago, 1976.

21 KANIUTH, E. *A Course in Commutative Banach Algebras*, vol. 16. Springer, 2009.

22 LAM, T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings*, vol. 131. Springer, 1991.

23 LIMA, E. L. *Espaços Métricos*, vol. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.

24 MUNKRES, J. R. *Topology (2nd ed)*. Prentice-Hall Upper Saddle River, 2000.

25 RUDIN, W. *Functional Analysis (2nd ed)*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

26 SANTOS, Y. Axioma da escolha, lema de Zorn e o teorema de Zermelo: Aplicações e equivalências. Trabalho de Conclusão de Curso, 2021. Universidade Federal de Juiz de Fora.