

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas

**Simetrias escondidas na eletrodinâmica  
de Podolsky e no magnetismo de Heisenberg**

**Luciana Miranda Vieira Xavier**

**Orientador: Dr. Wilson Oliveira**

**Co-orientador: Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Física.

Juiz de Fora  
Setembro 2012

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Xavier, Luciana Miranda Vieira.

Simetrias escondidas na eletrodinâmica de Podolsky e no magnetismo de Heisenberg / Luciana Miranda Vieira Xavier. -- 2012. 97 p.

Orientador: Wilson Oliveira

Coorientador: Albert Carlo Rodrigues Mendes

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Física, 2012.

1. Quantização. 2. Sistemas Vinculados. 3. Formalismos Simpléticos. 4. Dualização. 5. Eletromagnetismo. I. Oliveira, Wilson, orient. II. Mendes, Albert Carlo Rodrigues, coorient. III. Título.

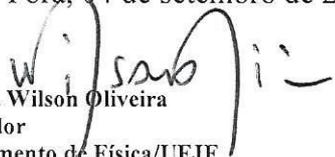


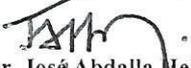
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Física

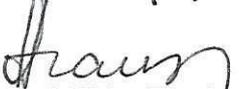
UFJF  
Programa de  
Pós-Graduação  
em Física

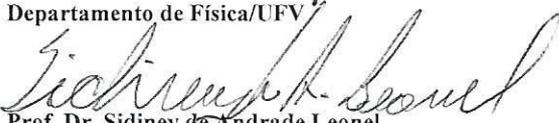
A presente tese, intitulada “**Simetrias Escondidas na Eletrodinâmica de Podolsky e no Magnetismo de Heisenberg**” de autoria de **Luciana Miranda Vieira Xavier**, submetida à Comissão Examinadora abaixo assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **DOUTOR EM FÍSICA - área de concentração: Teoria Quântica de Campos** em 04 de setembro de 2012.

Juiz de Fora, 04 de setembro de 2012.

  
Prof. Dr. Wilson Oliveira  
Orientador  
Departamento de Física/UFJF

  
Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto  
CBPF

  
Prof. Dr. Daniel Heber Theodoro Franco  
Departamento de Física/UFV

  
Prof. Dr. Sidney de Andrade Leonel  
Departamento de Física/UFJF

  
Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes  
Departamento de Física/UFJF

# Resumo

## Simetrias escondidas na eletrodinâmica de Podolsky e no magnetismo de Heisenberg

Luciana Miranda Vieira Xavier

Resumo da tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, como requisito necessário a obtenção do título de Doutor em Física.

*Nesta tese, revisa-se os principais métodos de quantização canônica de sistemas vinculados e apresenta-se uma técnica contemporânea, o Formalismo Simplético de Imersão (FSI), que mergulha uma teoria de segunda classe em uma dual com invariância de calibre. O FSI será aplicado a dois sistemas distintos, a saber, a eletrodinâmica de Podolsky e o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional. Analisa-se a versão dual e invariante de calibre da teoria de Maxwell-Proca através da teoria de Maxwell-Podolsky, que se mostra mais atraente, pois atribui uma massa ao fóton sem violar as simetrias em questão. Apesar de apresentarem características físicas similares, elas possuem espectros diferentes. A descrição dual apresentada aqui coincide com o resultado encontrado na literatura por meio de propagadores. Também, se discute o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional do ponto de vista de um sistema com vínculos. Tais vínculos podem ser usados para eliminar algumas variáveis canônicas da teoria, além de utilizá-los como geradores de simetria escondida. Diante de uma escolha particular do fator de ordenação, serão obtidas as equações funcionais de Schrödinger para o Hamiltoniano original de segunda classe e para o de primeira classe, as quais são idênticas, justificando essa escolha do fator de ordenação.*

Palavras-chaves: Quantização, Sistemas Vinculados, Formalismos Simpléticos, Dualização, Eletromagnetismo.

# Abstract

## Hidden symmetries in electrodynamics of Podolsky and magnetism of Heisenberg

Abstract of Doctoral dissertation submitted to the Program Graduate in Physics from the Institute of Exact Sciences, Federal University of Juiz de Fora-UFJF, as a requirement necessary to obtain the title of Doctor of Physics.

*In this thesis, it will be revised the main methods of canonical quantization of constrained systems and it will be presented a contemporary technique, the Embedding Symplectic Formalism (ESF), that it embed a second class theory in a dual with gauge invariance. The ESF will be applied to two different systems, namely, Podolsky electrodynamics and two-dimensional isotropic Heisenberg model. It will be analyzed the dual version of the gauge-invariant theory of Maxwell-Proca through the Maxwell-Podolsky theory that appears more attractive because it assigns a mass to the photon without violating the symmetries in question. Although they have physical characteristics similar, the spectra are different. The dual description presented here matches the result found in the literature through of the propagator level. It will be discussed two-dimensional isotropic Heisenberg model in terms of constraints system. Such constraints can be used to eliminate some canonical variables from theory. The second class constraints may be used as generators of hidden symmetries. Given a particular choice of factor ordering, will be writing the functional Schrödinger equation for the original second class Hamiltonian and the first class, which are identical, justifying this choice of factor ordering.*

Keywords: Quantization, Constrained systems, Symplectic Formalism, Dualization, Electromagnetism.

# Agradecimentos

A Deus e ao meu anjo-pai, Antônio Carlos, por me darem força nos momentos mais difíceis de toda minha vida e me permitirem habilidades para finalização deste trabalho.

Em especial, ao professor Wilson Oliveira pela compreensão nas minhas decisões, sua amizade e por todos seus ensinamentos desde o início de minha graduação. Sua orientação foi crucial para a realização dessa tese e para minha formação como um todo.

Ao professor Albert Carlo Rodrigues Mendes, meu co-orientador, pela colaboração e pela paciência em aturar minhas perguntas.

Aos professores dos Departamentos de Física pelo aprendizado e convívio durante estes anos.

À todos os meus amigos, principalmente do instituto, Vanessa, Fabiana, Cristiano, Dante, Wesley, Denilson, Alisson, José Henrique, Alexandre, pela companherismo e incentivo.

À CAPES/REUNI pela ajuda financeira recebida nos dois primeiros anos de doutorado.

Ao meu marido, Vítor José, por me proporcionar um novo sentido a vida com a chegada do nosso filho-amado: Joaquim. À minha mãe, Ione, pelo exemplo de amor incondicional e aos meus irmãos, Fernando e Pedro Luís, por me tornarem uma pessoa melhor diante de suas adversidades, aos quais dedico esse trabalho.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Considerações Gerais</b>	<b>7</b>
2.1	Vínculos . . . . .	7
2.2	Método de Dirac . . . . .	15
2.3	Notação Simplética . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Quantização Simplética</b>	<b>20</b>
3.1	Formalismo de Faddeev-Jackiw (sem vínculo) . . . . .	21
3.2	Formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek (com vínculo) . . . . .	23
3.3	Formalismo Simplético de Imersão (FSI) . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP)</b>	<b>32</b>
4.1	Introdução . . . . .	32
4.2	Uma versão invariante de calibre para a Teoria de Maxwell-Podolsky a partir de MP via FSI . . . . .	33
4.3	Análise Espectral da Teoria de Maxwell-Podolsky . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Modelo de Heisenberg (MH)</b>	<b>50</b>
5.1	Introdução . . . . .	50
5.2	Uma versão invariante de calibre para o Modelo de Heisenberg através do FSI . . . . .	52

5.3	Equivalência das formulações de segunda classe e invariante de calibre do MH via representação funcional de Schrödinger . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>Contribuições Científicas</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo da Matriz Inversa do Modelo de MP</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Cálculo da Matriz Inversa do Modelo de MH</b>	<b>82</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de sistemas com vínculos é de fundamental importância em física, pois todas as teorias de interação das partículas elementares são sistemas vinculados. Importantes resultados na área de física de partículas têm sido obtidos nas últimas décadas pelas, então, chamadas teorias de calibre, teorias com vínculos de primeira classe. Em virtude da possibilidade de se determinar as grandezas físicas observáveis como espectro de energia.

A quantização de teorias de calibre requer um cuidado todo especial, pois os graus de liberdade supérfluos, decorrentes de simetria de calibre, devem ser tratados de maneira conveniente e consistente. Importantes desenvolvimentos teóricos têm ocorrido nestes últimos anos na quantização de tais teorias, iniciando com os trabalhos de Dirac [1], na década de 50, cujo o ponto fundamental é a construção dos chamados parênteses de Dirac [2], os quais constituem a ponte para os comutadores (após problemas com ordenamento de operadores terem sido resolvidos).

Em 1988, Faddeev e Jackiw [4, 5] mostraram que os parênteses de Dirac podem ser obtidos seguindo um tratamento geométrico, baseado em estruturas simpléticas. Este formalismo é conhecido na literatura como Formalismo Simplético ou Quantização Símpletica, ou ainda, de Formalismo de Faddeev-Jackiw. Um ponto interessante desse formalismo é que alguns sistemas que são vinculados no método de Dirac não o são

no caso simplético. No caso de haver vínculos no formalismo simplético, a proposta seria eliminá-los ou, caso isso não fosse possível, que se voltasse ao método de Dirac. Em 1992, foi proposta uma extensão, para o método de Faddeev-Jackiw, devido a Barcelos Neto e Wotzasek [6, 7], em que os vínculos pudessem ser incorporados (Formalismo Simplético com Vínculos). Essa técnica consiste, basicamente, em usar os vínculos para deformar a geometria simplética da teoria, de tal maneira que os tensores simpléticos possam ser consistentemente definidos.

Em 2001, J. Ananias Neto, C. Neves e W. Oliveira propuseram um formalismo [12] que mergulha uma teoria de segunda classe em uma dual com invariância de calibre. Este Formalismo de Imersão baseia-se no Formalismo Simplético e na extensão do espaço de configuração por meio das chamadas variáveis de Wess-Zumino (WZ) [10]. Segundo o Formalismo Simplético, o modo-zero é o gerador das transformações de calibre. A arbitrariedade do modo-zero revelará uma família de descrições Lagrangianas invariantes de calibre [13]. Porém, uma escolha adequada das componentes do modo-zero fornecerão a simetria (de calibre) escondida no modelo não-invariante, aqui proposto pelo modelo de Maxwell-Proca [13]; a fim de reproduzir uma versão invariante de calibre conhecida e obtida pelo cálculo de propagadores. Desse trabalho, resultou uma publicação em uma revista científica internacional [32].

Essa técnica eficaz, o Formalismo Simplético de Imersão, motivou a construção de uma teoria que preserve as qualidades da eletrodinâmica de Maxwell, entretanto evitando as divergências clássicas. Nesse contexto, estende-se o eletromagnetismo com a adição de um novo termo: de massa explícita (termo de Proca), para conferir uma massa ao fóton e um alcance finito para o campo de uma carga puntiforme. As consequências tanto teóricas, quanto experimentais podem ser encontradas em [15]. Assim, tal modelo pode ser descrito pela densidade Lagrangiana sob a forma:

$$L[A_\mu] = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (1.1)$$

Essa eletrodinâmica de Maxwell-Proca possibilita também uma abordagem a respeito das simetrias, que são consideradas chaves fundamentais para diversas teorias

físicas modernas, como a física de altas energias. A razão é a quebra da simetria de calibre, devido ao termo de massa e a violação da simetria de Lorentz. Além de estender essa discussão através da matriz residual de cada pólo do propagador.

Apresenta-se o Modelo de Heisenberg Isotrópico bidimensional, como um sistema vinculado, cuja a densidade Lagrangiana é dada por:

$$L = \frac{J}{2}[(\partial_0 S^a)^2 - (\partial_i S^a)^2] \quad (1.2)$$

onde os spins são considerados como vetores clássicos. A fim de aplicar o formalismo canônico geral de imersão com base no formalismo simplético [12, 13] e verificar a sua consistência com a obtenção das equações funcionais de *Schrödinger*, usando o formalismo de Dirac de quantização de primeira classe [1].

Esse trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, há a revisão de classificação dos vínculos, em primários e secundários, os quais estão ligados à maneira de como são obtidos, embora a obtenção não seja importante para a quantização canônica, mas apenas a existência dos vínculos. Por isso, foi proposta uma classificação mais útil, em vínculos de primeira classe e segunda classe, a fim de apresentarmos e discutirmos o método de Dirac na seção seguinte.

No Capítulo 3, apresenta-se o formalismo de Faddeev-Jackiw, que parte da Lagrangiana escrita como uma função linear das velocidades, através da introdução de variáveis auxiliares. Utiliza-se das equações de Euler-Lagrange para obter o tensor simplético. Se a representação matricial for não-singular, significa que não há vínculos verdadeiros - aqueles que só aparecem nesse formalismo. Os elementos da matriz inversa correspondem aos parênteses de Poisson da teoria.

Caso a matriz (pré-)simplética seja singular, trata-se de sistemas com vínculos e recorre-se ao formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek. Os vínculos são obtidos da contração do modo-zero com o gradiente do potencial, desde que não forneça equações nulas. Se essa contração não levar a um vínculo verdadeiro, a teoria em questão possuirá simetria de calibre.

Os principais passos do Formalismo Simplético de Imersão são descritos. Acrescentam-se a variável WZ e duas funções arbitrárias, as quais são inseridas na parte cinética da Lagrangiana e outra na potencial. Para determiná-las, primeiramente, impõe-se que a matriz simplética seja degenerada e, segundo, que seus modos-zero não produzam novos vínculos. Para ilustrar o Formalismo Simplético de Imersão, nos capítulos 4 e 5, respectivamente, considera-se a eletrodinâmica de Maxwell-Proca em quatro dimensão e o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional.

Finalmente, no Capítulo 6, a conclusão do trabalho é apresentada, mostrando os principais resultados obtidos e apontando um possível caminho a seguir em um trabalho futuro.

# Capítulo 2

## Considerações Gerais

### 2.1 Vínculos

Vínculos são limitações a possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo a priori o seu movimento. É importante sublinhar que vínculos são limitações de ordem cinemática impostas ao sistema mecânico. Tais restrições, portanto, antecedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema. Restrições de natureza dinâmica - decorrentes, portanto, das equações de movimento - não são vínculos. Por exemplo, a segunda lei de Newton obriga uma partícula sujeita a uma força central a se mover num plano fixo, mas isto não caracteriza um vínculo. Assim, sistemas mecânicos constituído por  $N$  partículas submetidas aos vínculos, que obedecem a seguinte forma:

$$\phi_i(q_i, \dots, q_{3N}) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.1)$$

O número de graus de liberdade é então:  $n = 3N - m$ . Uma classificação de vínculos cinemáticos, ou vínculos:

- Vínculos Primários e Secundários

Suponha que [3], numa determinada teoria, existe um vínculo dado por:

$$\Gamma(q, p) = 0 \quad (2.2)$$

onde  $(q_i, \dots, q_n)$  são coordenadas arbitrárias e  $p$  o momento linear.

O parêntese de Poisson desta quantidade com outra qualquer da teoria pode ser não nulo. Por isso, em lugar de (2.2), é comum escrever

$$\Gamma(q, p) \approx 0 \quad (2.3)$$

onde se diz fracamente igual a zero, significando que a relação acima não vale, necessariamente, dentro dos parenteses de Poisson.

Consideremos uma certa quantidade  $A(q, p)$ , cujo parêntese de Poisson com  $\Gamma(q, p)$  seja diferente de zero.

$$\{A, \Gamma\} \neq 0. \quad (2.4)$$

Na passagem para a Mecânica Quântica,  $\Gamma$  e  $A$  transformam-se em operadores, que chamaremos de  $\hat{\Gamma}$  e  $\hat{A}$ . Em virtude de (2.3),  $\hat{\Gamma}$  é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo  $\hat{\Gamma}$  deve ser nulo. Particularmente,

$$[\hat{A}, \hat{\Gamma}] = 0. \quad (2.5)$$

Mas, pela relação

$$\{A, \Gamma\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{\Gamma}] \quad (2.6)$$

deveríamos obter um resultado diferente de zero para o comutador entre  $\hat{A}$  e  $\hat{\Gamma}$ . A regra geral da quantização canônica, dada por (2.6), leva a inconsistências quando na presença de vínculos. Foi Dirac quem descobriu a maneira correta

de proceder quanto a quantização canônica de vínculos.

A passagem para o formalismo Hamiltoniano é feita, primeiramente, pela introdução dos momentos canônicos

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

onde as relação dada por (2.7) podem levar a existência de vínculos. Denotamos estes vínculos, genericamente, por

$$\Omega_m = \Omega_m(q^i, p_i) \quad (m = 1, 2, \dots, M \leq N). \quad (2.8)$$

Os vínculos decorrentes diretamente de relação de definição dos momenta são chamados de vínculos primários. Conforme veremos, outros vínculos podem existir ( agora não mais em decorrência de (2.7). Estes tomam o nome de vínculos secundários.

Um dos passos para o formalismo Hamiltoniano é escrever a função Hamiltoniana. Parte da função Lagrangiana e, fazendo transformações tipo:

$$(q, \dot{q}) \longrightarrow (q, p). \quad (2.9)$$

O Jacobiano para esta transformação é determinado pela matriz

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (2.10)$$

chamada matriz Hessiana. Quando o determinante desta matriz é diferente de zero, as transformações (2.9) são sempre possíveis e a hamiltoniana canônica  $H_c(q, p)$  é unicamente determinada. Isto ocorre para o caso onde não existem vínculos. Na presença de vínculos, a matriz Hessiana é singular e, conseqüentemente, nem todos os  $\dot{q}_i$  podem ser unicamente escritos em termos de  $q_j, p_j$ .

Considerando que haja  $M$  vínculos, haverá  $M$  velocidades nestas condições. Portanto, neste caso, a hamiltoniana não pode ser unicamente determinada em termos de  $q_j$  e  $p_j$ .

Neste ponto, há dois caminhos que podem ser seguidos. Um deles, muito simples a primeira vista, consiste na utilização direta dos vínculos para eliminação das variáveis dependentes. Embora seja uma solução lógica para o problema, ela não é, as vezes, tão simples e conveniente de ser utilizada. A outra maneira, conseqüentemente, consiste em desenvolver o formalismo trabalhando com as variáveis dependentes e com as relações de vínculo. O método de Dirac baseia-se neste segundo.

Visto que, na presença de vínculos, a hamiltoniana não é unicamente determinada em termos de momento e coordenada. A fim de escolher apropriadamente uma hamiltoniana, no formalismo, devemos calcular as equações de movimento no espaço de fases. Seja, então, o princípio de Hamilton;

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H_c) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \delta H_c) dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Isto sugere que  $\delta H_c$  pode ser escrito, de uma maneira geral, como:

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \delta p_i \quad (2.12)$$

Assim, levando este resultado em (2.11), temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt = 0. \quad (2.13)$$

Como  $\delta q_i$  e  $\delta p_i$  são funções arbitrárias de tempo, concluímos que a integração em (2.13) só é nula se o integrando o for. Portanto,

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right) \delta q_i + \left(-\dot{q}_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right) \delta p_i = 0 \quad (2.14)$$

Em virtude de M relações de vínculos envolvendo  $q_i$  e  $p_i$  (vamos admitir, por enquanto, que só existem vínculos) nada podemos concluir de (2.14). Por outro lado, da (2.8), vem que

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i} \delta p_i \approx 0 \quad (2.15)$$

São, ao todo, M equações. Multiplicando cada uma por  $\lambda_m = \lambda(q_i, p_i)$  e somando o resultado com a (2.14), obtemos:

$$\left(-\dot{q}_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i}\right) \delta p_i + \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i}\right) \delta q_i \approx 0 \quad (2.16)$$

Temos, agora, M funções arbitrárias  $\lambda(q_i, p_i)$  (multiplicadores de Lagrange). Assim, é possível obter as seguintes equações de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i} + \Omega^m \frac{\partial \lambda^m}{\partial p_i} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i}, \quad (2.17)$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q^i} + \Omega_m \frac{\partial \lambda^m}{\partial q^i} \approx \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q^i}. \quad (2.18)$$

Efetivamente, é como se tivemos definindo uma nova hamiltoniana dada por:

$$H \equiv H_c + \lambda^m \Omega_m. \quad (2.19)$$

No espaço de fase, as coordenadas e os momentos de um sistema físico devem satisfazer  $\Omega_m = 0$ . Estas equações determinam um subespaço de dimensão

$2N - M$ , chamado de superfície de vínculos. Nesta superfície, a hamiltoniana coincide com a hamiltoniana canônica. Nos demais pontos do espaço (onde as equações de vínculos não são satisfeitas), a hamiltoniana difere da canônica e perde qualquer sentido físico.

Se duas funções, definidas no espaço de fase, são iguais na superfície de vínculos, denotada por  $\Gamma$ , diremos que elas são fracamente iguais e usaremos o símbolo “ $\approx$ ” para denotar esta igualdade:

$$F|_{\Gamma} = G|_{\Gamma} \iff F \approx G. \quad (2.20)$$

Em particular, temos

$$H \approx H_c. \quad (2.21)$$

Utilizando a distinção entre igualdade fraca “ $\approx$ ” e igualdade forte “ $=$ ” (igualdade válida em todo o espaço de fase), a evolução temporal das coordenadas e dos momentos deve ser escrita, em termos dos parênteses de Poisson, como:

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \approx \{q^i, H_c\} + \lambda^m \{q^i, \Omega_m\}, \quad (2.22)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \approx \{p_i, H_c\} + \lambda^m \{p_i, \Omega_m\}. \quad (2.23)$$

Conforme dissemos, podem, haver mais vínculos (vínculos secundários, terciários, etc). Neste caso, é fácil perceber, eles são incorporados à teoria de maneira semelhante ao que fizemos anteriormente. Por exemplo, suponhamos que existam apenas  $K$  vínculos secundários ( $K + M \leq N$ ). Temos, então,

$$H = H_c + \lambda_a \Omega_a, \quad a = (1, 2, \dots, K + M). \quad (2.24)$$

$H$  é chamada hamiltoniana total.

Vejam, agora, como os vínculos secundários são determinados. Seja  $\Omega_m$

um dos vínculos primários. É uma questão de consistência os vínculos não evoluírem com o tempo. Podemos, assim, escrever

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_m &= \{\Omega_m, H\}, \\
&= \{\Omega_m, H_c\} + \lambda^n \{\Omega_m, \Omega_n\} + \Omega_n \{\Omega_m, \lambda^n\}, \\
&\approx \{\Omega_m, H_c\} + \lambda^n \{\Omega_m, \Omega_n\} \approx 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Podemos destacar da relação (2.25) duas possibilidades, que estão relacionadas ao parêntese de Poisson entre  $\Omega_m$  e  $\Omega_n$  se ou não zero (fracamente):

- i)  $\{\Omega_m, \Omega_n\} \approx 0$ . Neste caso, obtemos  $\{\Omega_m, H_c\} \approx 0$ , que é uma relação de vínculo. Pode acontecer de este vínculo ser, simplesmente, um dos vínculos primários já conhecidos. Por isto (2.25) é uma mera relação de inconsistência. Mas, pode acontecer, também de ser um novo vínculo. Como dissemos, um vínculo secundário, em virtude de não estar vindo, diretamente, de expressão do momento.
- ii)  $\{\Omega_m, \Omega_n\} \neq 0$ . Agora, não obtemos novo vínculo, mais uma relação envolvendo multiplicadores de Langrange  $\lambda_n$ .

Este processo deve ser repetido para todos os vínculos, inclusive para vínculos secundários que vão sendo obtidos. Os novos vínculos obtidos neste estágio do processo são chamados terceários e assim por diante. Este procedimento é conhecido como algoritmo de Dirac- Bergmann. Procedemos assim até esgotarem todas as possibilidades, isto é, até nenhum vínculo novo ser mais obtido (apenas repetição dos já existentes) e até serem determinados todos multiplicadores de Lagrange. No que segue, os vínculos terceários e os obtidos nas etapas do processo serão chamados, simplesmente, de secundários.

Voltemos, agora, à questão levantada sobre o fato de termos usado  $H$  para obter  $\dot{\Omega}_m$  na expressão (2.25). O correto seria usar, como Dirac denominou, a hamiltoniana total. Mas isto, obviamente não seria possível pois não conhecíamos

os vínculos secundários. Agora já conhecemos. Não é difícil perceber que se montarmos equações semelhantes à (2.25), usando  $H$  ( hamiltoniana total, com todos vínculos da teoria) em lugar de  $H$ , obteremos os mesmos vínculos e os mesmos multiplicadores de Lagrange.

É oportuno comentar aqui, que os vínculos primários, obtidos da definição de momento, dada em (2.7), e os vínculos secundários, obtidos de relações da consistência, tiradas do fato de os vínculos não evoluírem com o tempo, podem não serem os únicos vínculos da teoria. Nas chamadas teorias de calibre,<sup>1</sup> como o eletromagnetismo, há o aparecimento de novos vínculos quando fixamos o calibre. Veremos mais detalhes a seguir.

- Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Vimos a classificação dos vínculos primários e secundários que está ligada a maneira de como os vínculos são obtidos. Ela é, apenas, uma questão, digamos, de organização. Em termos de quantização canônica, não importa como foram obtidos. O que importa é que eles existam. Neste sentido, uma classificação mais útil é a seguinte: Dentre os vínculos, podem existir alguns que possuem parêntese de Poisson zero (fracamente) com todos os vínculos da teoria. Estes vínculos são denominados de primeira classe. Já aqueles que possuem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero são chamados de segunda classe.

O que importa a destacar é que a existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui invariância por transformação de calibre. Há dois caminhos que podemos seguir. Um deles é fixar o calibre. Os novos vínculos

---

<sup>1</sup>Uma teoria de calibre é aquela na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um sistema de referência, cuja a escolha é arbitrária no tempo. As variáveis fisicamente importantes são independentes da escolha do sistema de referência. Uma transformação de variáveis induzidas por uma mudança no sistema de referência arbitrário é chamada de transformação de calibre. Variáveis físicas, observáveis, são então ditas invariantes de calibre.

decorrentes da fixação de calibre implicarão que aqueles vínculos de primeira classe passem a ser de segunda classe. Um outro caminho a ser seguido é não proceder a fixação de calibre e trabalhar covariantemente.

## 2.2 Método de Dirac

Seja  $H$  a verdadeira hamiltoniana (hamiltoniana total), a derivada temporal de uma função qualquer definida no espaço de fase é:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Usando as equações de Hamilton dadas por (2.22) e (2.23), obtemos:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \lambda_m \{A, \Omega_m\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (2.27)$$

onde  $m = 1, 2, \dots, M + K$ . Todos os vínculos estão incluídos. Inclusive os decorrentes da fixação de calibre, caso existam.

No caso particular de  $A$  ser qualquer um dos vínculos da teoria, vem que:

$$0 = \frac{d\Omega_n}{dt} \approx \{\Omega_n, H_c\} + \lambda_m \{\Omega_n, \Omega_m\}. \quad (2.28)$$

sendo  $n = 1, 2, \dots, M + K$ .

Seja  $(C_{mn})$  a matriz cujo os elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, isto é,

$$C_{mn} \equiv \{\Omega_m, \Omega_n\}. \quad (2.29)$$

Logo, da equação (2.28) vem que

$$\lambda_m C_{nm} + \{\Omega_n, H_c\} \approx 0, \quad (2.30)$$

ou ainda,

$$\lambda_m C_{mn} \approx \{\Omega_n, H_c\}, \quad (2.31)$$

em que usamos o fato da matriz  $C$  ser antisimétrica (caso de vínculos bossônicos). Além disso, essa matriz possui inversa, pois todos os vínculos são de segunda classe. Assim,

$$C_{mn}C^{ml} = \delta_m^l. \quad (2.32)$$

Aplicando esta relação na equação (2.31) e substituindo, em seguida,  $k$  por  $m$ :

$$\lambda^m \approx -C_{mn}^{-1}\{\Omega_n, H_c\}. \quad (2.33)$$

Levemos este resultado para a equação (2.27):

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \Omega_m\}C_{mn}^{-1}\{\Omega_n, H_c\} + \frac{\partial A}{\partial t} \approx \{A, H_c\}_D + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.34)$$

em que

$$\{A, H_c\}_D \equiv \{A, H_c\} - \{A, \Omega_m\}C_{mn}^{-1}\{\Omega_n, H_c\}. \quad (2.35)$$

é o parêntese de Dirac entre as funções  $A$  e  $H_c$ . Conseqüentemente, uma expressão clássica análoga à equação (2.6) é dada pela (2.35). Assim, este fato parece sugerir que, no caso de sistemas vinculados, temos a seguinte regra de quantização canônica:

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]. \quad (2.36)$$

em que o parêntese de Dirac entre  $A$  e  $B$  [1, 26] é definido de forma análoga àquela em (2.36), ou seja,

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \Omega_m\}C_{mn}^{-1}\{\Omega_n, B\}. \quad (2.37)$$

Aqui, também, há fortes evidências que sustentam a hipótese dada por (2.35). A mais importante é que as relações de vínculo, que só valiam fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valem fortemente nos parênteses de Dirac. Isto significa que se tomarmos o parênteses de Dirac entre um vínculo e qualquer outra função do espaço de fase, obteremos zero. Vejamos isto:

$$\{A, \Omega_k\}_D = \{A, \Omega_k\} - \{A, \Omega_m\}C_{mn}^{-1}\{\Omega_n, \Omega_k\},$$

$$\begin{aligned}
&= \{A, \Omega_k\} - \{A, \Omega_m\} C_{mn}^{-1} C_{nk}, \\
&= \{A, \Omega_k\} - \{A, \Omega_m\} \delta^{mk}, \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Assim, a inconsistência mencionada no capítulo 1 não existem mais.

Uma outra evidência que sustenta a hipótese (2.35) é que as relações envolvendo os parênteses de Poisson são também válidas para os parênteses de Dirac.

É importante mencionar que os parênteses fundamentais de Poisson não necessariamente obtidos em termos do parênteses de Dirac. Isto não é nada inconsistente, pelo contrário. Os exemplos que veremos, capítulo 3, confirmarão o que estamos afirmando. Um outro ponto, quanto a regra de quantização (2.35), que só é aplicada diretamente caso não haja problemas de ordenamento de operadores.

## 2.3 Notação Simplética

É possível introduzir uma notação compacta que resume equações de Hamilton numa única equação matricial,  $\xi_\alpha$ , tal que suas entradas são dadas por:

$$\xi^i = q_i, \quad \xi^{i+N} = p_i, \quad (i \leq N), \tag{2.39}$$

então,

$$(\xi_\alpha) = \begin{array}{|c|} \hline q_1 \\ \hline \vdots \\ \hline q_N \\ \hline p_1 \\ \hline \vdots \\ \hline p_N \\ \hline \end{array} \tag{2.40}$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, N$  e  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 2N$ .

De modo análogo, a  $(\frac{\partial H}{\partial \xi})_\alpha$ :

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_{i+N}} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i \leq N) \tag{2.41}$$

logo,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_\alpha = \begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \hline \vdots \\ \hline \frac{\partial H}{\partial q_N} \\ \hline \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \hline \vdots \\ \hline \frac{\partial H}{\partial p_N} \\ \hline \end{array}. \quad (2.42)$$

Seja a matriz  $\sigma^{\alpha\beta}$  definida por:

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (2.43)$$

em que 0 indica a matriz nula de ordem  $n$  e 1, a matriz identidade de ordem  $n$ . Esta matriz  $(\sigma^{\alpha\beta})$  é chamada forma normal simplética. Ela tem as seguintes propriedades:

$$(\sigma^{\alpha\beta})^2 = -\mathbf{1}_{2n}, \quad (2.44)$$

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = -(\sigma^{\alpha\beta})^T, \quad (2.45)$$

$$(\sigma^{\alpha\beta})^T = -(\sigma^{\alpha\beta}) = (\sigma^{\alpha\beta})^{-1}, \quad (2.46)$$

$$(\sigma^{\alpha\beta})^T(\sigma^{\alpha\beta}) = (\sigma^{\alpha\beta})(\sigma^{\alpha\beta})^T = \mathbf{1}_{2n}, \quad (2.47)$$

$$\det(\sigma^{\alpha\beta}) = 1 \quad (2.48)$$

A propriedade (2.47) indica que  $(\sigma^{\alpha\beta})$  é diagonalizável.

Então, as equações canônicas de Hamilton podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \{\xi^\alpha, \xi^\beta\} &= \sigma^{\alpha\beta}, \\ \dot{\xi}^\alpha &= \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

ou

$$\dot{\xi}_k = \sum_l \epsilon_{kl} \frac{\partial H}{\partial \xi^l} \quad (2.50)$$

conhecida como forma simplética<sup>2</sup> das equações de Hamilton.

Com esta notação, os parênteses de Poisson<sup>3</sup> entre as funções  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$  assumem a forma:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta} \quad (2.51)$$

Esses resultados, vistos em curso de graduação em física [22, 23], possuem grande semelhança com a forma dos resultados de uma teoria mais geral, envolvendo vínculos. Veremos que as expressões (2.49) e (2.50) são válidas também para sistemas vinculados, a menos do aspecto da matriz  $(\sigma^{\alpha\beta})$ .

---

<sup>2</sup>Esta palavra foi introduzida pelo matemático Hermann Weyl em 1939 e deriva de uma raiz grega que significa entremeadado ou entrelaçado.

<sup>3</sup>Os parênteses de Poisson entre as funções do espaço de fase  $A(q, p)$  e  $B(q, p)$  são definidas por:  $\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i} \frac{\partial A}{\partial p_i}$ , onde os  $q^i$ s são as coordenadas generalizadas e os  $p_i$ s são seus momentos conjugados.

## Capítulo 3

# Quantização Simplética

Em um trabalho relativamente recente, Faddev-Jackiw [4, 5] mostraram que os parênteses de Dirac podem ser obtidos seguindo um tratamento geométrico, baseado em estruturas simpléticas. Este formalismo é conhecido como Formalismo Simplético, ou Quantização Simplética, ou ainda, Quantização de Faddev-Jackiw. A proposta de Faddev e Jackiw para tratar sistemas vinculados é que se fizesse, primeiramente, a eliminação dos graus de liberdade supérfluos. Entretanto, conforme eles mesmos reconheceram, isto nem sempre pode ser feito, não haveria sequer necessidade de Dirac ter desenvolvido um formalismo para tratar de sistemas vinculados, pois bastaria que se eliminassem os graus de liberdade não físicos e se usasse o formalismo hamiltoniano usual.

E mais recentemente, num par de trabalhos [2, 6, 7], J. Barcelos Neto e C. Wotzasek mostraram que o método simplético pode ser convenientemente estendido de tal maneira que os vínculos possam ser incorporados. Note que segue, apresentaremos o formalismo sem e com vínculos.

### 3.1 Formalismo de Faddeev-Jackiw (sem vínculo)

Este método lida com Lagrangianas de primeira ordem. É oportuno comentar que isto não é uma restrição séria porque todos os sistemas que conhecemos, descritos por Lagrangiana quadráticas, podem ser escritos na formulação de primeira ordem. Isto é conseguido estendendo-se o espaço de configurações com a introdução de variáveis auxiliares. Estas geralmente os momentos, mas isto não é necessariamente obrigatório.

Consideremos um caso mais geral de Lagrangiana de primeira ordem do tipo:

$$L = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha - V, \quad (3.1)$$

onde  $V \equiv V(\xi^\alpha)$  é a energia potencial.

As equações de Euler-Lagrange para a Lagrangiana (4.1) são<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial \xi^\beta} \dot{\xi}^\beta, \quad (3.2)$$

logo

$$\begin{aligned} \partial_\alpha V &= (\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha) \dot{\xi}^\beta, \\ &= f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde foi usado  $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$  e

$$f_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha. \quad (3.4)$$

A equação de movimento (3.4) e a equação (2.49) sugerem uma relação entre o potencial  $V$  e a hamiltoniana. A hamiltoniana de  $L$  é<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>As coordenadas simpléticas são, a princípio, tratadas como independentes, o que justifica o emprego das equações de Euler-Lagrange.

<sup>2</sup>Utilizando a nomenclatura de Dirac, a referida hamiltoniana é a canônica. Veremos que não será necessário definir novas hamiltonianas análogas à total ou à estendida: todo o procedimento simplético não se importa com o comportamento das funções fora da superfície de vínculo - Variedade imersa no espaço configuracional ou de fase definida pelas equações  $\Omega_m = 0$ , onde os  $\Omega_m$ 's são as equações de vínculo da teoria considerada. Em uma teoria sem vínculos, a superfície de vínculo é todo o espaço configuracional ou de fase.

$$H(\Pi, \xi) = \Pi_\alpha \dot{\xi}^\alpha - L(\xi, \dot{\xi}), \quad (3.5)$$

em que  $\Pi_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha}$ . Como  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = a_\alpha(\xi)$ , essa teoria possui, segundo o método de Dirac,  $N$  vínculos primários:  $\Omega_\alpha(\Pi, \xi) = \Pi_\alpha - a_\alpha(\xi)$ . Nosso objetivo não é proceder com o formalismo de Dirac, não vamos considerar tais relações de vínculos. Fazamos simplesmente a substituição dos momentos  $\Pi_\alpha$  pelas funções  $a_\alpha(\xi)$  (o que parece ser, ao menos intuitivamente, mais sensato). Ao fazê-lo,  $H(\Pi, \xi)$  passa a ser  $H(\xi)$  e temos

$$H(\xi) = a_\alpha(\xi) \dot{\xi}^\alpha - L(\xi, \dot{\xi}) = V(\xi). \quad (3.6)$$

Se a matriz  $(f_{\alpha\beta})$  possuir inversa, os elementos desta serão denotados por  $f^{\alpha\beta}$ , onde

$$f_{\gamma\alpha} f^{\alpha\beta} = \delta_\gamma^\beta \quad (\gamma = 1, 2 \dots 2N), \quad (3.7)$$

logo

$$\dot{\xi}^\beta = f^{\alpha\beta} \partial_\alpha V. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) mostra que as velocidades simpléticas podem ser univocamente determinadas se, e somente se, a matriz simplética possuir inversa.

Como  $V(\xi^\alpha) = H(\xi^\alpha)$ , os parênteses que satisfazem a relação de quantização (parênteses de Dirac)

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (3.9)$$

devem também satisfazer:

$$\dot{\xi}^\beta = \{\xi^\beta, V\}_* = \partial_\alpha V \{\xi^\beta, \xi^\alpha\}_*. \quad (3.10)$$

Ao igualar as equações (3.8) e (3.10), conclui-se que os parênteses generalizados devem ser definidos como:

$$\{\xi^\beta, \xi^\alpha\}_* \equiv f^{\alpha\beta}. \quad (3.11)$$

Em momento algum foi necessário falar sobre vínculos, apesar de o método de Dirac precisar da introdução destes. No entanto, a matriz  $(f_{\alpha\beta})$  é inversível se, e somente se, os vínculos da teoria forem de segunda classe.

Portanto, os parênteses de Poisson entre os vínculos, no espaço das coordenadas e dos momentos simpléticos, são:

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta} \equiv \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} &= -\{a_\alpha, \Pi_\beta\} - \{\Pi_\alpha, a_\beta\} \\
&= -\frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \Pi_\gamma} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \Pi_\gamma} \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\gamma}, \\
&= -\partial_\beta a_\alpha + \partial_\alpha a_\beta, \\
&= f_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como a matriz  $(C_{\alpha\beta})$  possui inversa, não é degenerada, se, e somente se, os vínculos forem de segunda classe, o mesmo pode ser concluído quanto à matriz  $(f_{\alpha\beta})$ .

Se a matriz  $(f_{\alpha\beta})$  possuir inversa, ela é denominada matriz simplética, caso contrário, existirão vínculos verdadeiros <sup>3</sup>na teoria. De forma geral,  $(f_{\alpha\beta})$  será denominada matriz pré-simplética.

## 3.2 Formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek (com vínculo)

O objetivo deste método é partir de uma Lagrangiana  $L^{(0)}$  com vínculos verdadeiros, caso de  $(f_{\alpha\beta})$  ser uma matriz degenerada, e, após  $n$  iterações, obter uma Lagrangiana  $L^{(n)}$  sem vínculos verdadeiros e com a mesma dinâmica<sup>4</sup>. Talvez a solução

---

<sup>3</sup>Chama-se de vínculo verdadeiro o termo  $\nu_m^\alpha \partial_\alpha V$ , ainda a ser definido, que não é nulo a priori.

<sup>4</sup>As equações de movimento de  $L^{(0)}$  só poderiam ser deduzidas se todos os vínculos verdadeiros já fossem conhecidos, assim seria possível proceder com a variação da ação levando tais dependências em consideração, mas os vínculos não são conhecidos previamente. Na afirmativa acima (assim como no restante da tese), suponho a existência de um único grupo de relações entre as coordenadas que, associado a  $L^{(0)}$ , leve as equações de movimento consistentes.

mais natural seja adicionar os vínculos encontrados à Lagrangiana  $L^{(0)}$  por meio de multiplicadores de Lagrange, pois assim os vínculos se tornam explícitos mediante o emprego das equações de Euler-Lagrange (desde que esses multiplicadores sejam tratados como novas variáveis simpléticas independentes [1]).

Utilizando esta técnica de adição de vínculos, em especial, Faddeev e Jackiw [6, 7] propuseram um método para lidar com os vínculos verdadeiros. Este, que parece não seguir tão diretamente os princípios do método simplético, não será aqui apresentado. Esta forma de adicionar vínculos incorpora-os à parte potencial de  $L^{(0)}$  e não promove a inversibilidade de  $(h_{\alpha\beta})$ .

Por outro lado, esse método consiste, basicamente, em adicionar os vínculos verdadeiros à parte cinética da Lagrangiana, por meio de multiplicadores de Lagrange, e expandir o espaço de fase, considerando estes últimos como novas coordenadas. Se a nova matriz pré-simplética for inversível, esta será a matriz simplética, caso contrário, ainda há vínculos verdadeiros na teoria e o processo deve ser repetido. Analogamente ao método de Dirac, é possível que a nova matriz pré-simplética seja degenerada e novos vínculos não sejam encontrados (teoria com simetria de calibre), neste caso, o calibre deve ser fixado para dar continuidade ao método.

Se o tensor obtido na seção anterior  $f_{\alpha\beta}$  descrever uma matriz degenerada, ele aqui será identificado por<sup>5</sup>  $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Sendo  $R$  o posto da matriz  $(f_{\alpha\beta}^{(0)})$ , deverão existir  $M = 2N - R$  autovetores associados a autovalores nulos (modos zeros), denotados por  $(\nu^{(0)\alpha})_m$ , com  $m = 1, 2 \dots M$ , portanto<sup>6</sup>:

$$\nu_m^{(0)\alpha} f_{\alpha\beta}^{(0)} = 0, \quad \text{para todo } \beta \text{ e } m. \quad (3.13)$$

Multiplicando  $\nu_m^{(0)\alpha}$  nos dois lados da equação (3.3):

$$\nu_m^{(0)\alpha} \partial_\alpha V^{(0)} = 0. \quad (3.14)$$

---

<sup>5</sup>Supéíndices do tipo  $(n)$  indicam a  $n$ -ésima iteração.

<sup>6</sup>Os modos-zeros serão sempre vistos como vetores de linha. Tratando-se de campos, essa consideração é importante, pois os modos-zeros podem ser operadores.

Se a contração dos modos zeros com o gradiente do potencial (3.14) fornecer equações não identicamente nulas, vínculos verdadeiros são obtidos:

$$\Omega_m^{(0)} \equiv v_m^{(0)\alpha} \partial_\alpha V^{(0)}. \quad (3.15)$$

Caso o desenvolvimento de (3.15), para dado  $m$ , não leve a um vínculo verdadeiro, a teoria em questão possuirá simetria de calibre e o modo-zero será o gerador dessa simetria. A fim de continuar com o processo iterativo de obtenção do tensor simplético, o calibre deve ser fixado, fazendo:

$$V \longrightarrow V + V_{fc}, \quad (3.16)$$

onde  $V_{fc}$  é o termo responsável pela fixação de calibre, que torna (3.15) não identicamente nula e leva a um novo vínculo.

Conforme já dito, os vínculos verdadeiros são adicionados à parte cinética da Lagrangiana, isto é, sendo  $\lambda^{(0)m}$  um multiplicador de Lagrange, adicionaremos o termo  $\lambda^{(0)m} \dot{\Omega}_m^{(0)}$  ou<sup>7</sup>  $\dot{\lambda}^{(0)m} \Omega_m^{(0)}$ , a fim de obter uma deformação do tensor  $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Pela equação (2.25) vemos que o vínculo não deve evoluir no tempo (a equação é válida para todo  $t$ ), logo, se não houver nenhuma inconsistência na teoria, isto é, não hajam vínculos desconhecidos, as equações de movimento obtidas pela nova Lagrangiana devem ser equivalentes às da anterior.

Tomando-se a derivada total do vínculo e introduzindo o resultado na Lagrangiana por meio dos multiplicadores de Lagrange,<sup>8</sup> que alargam o espaço de configuração da teoria passam a ser  $(\xi^\alpha, \lambda_m^{(0)})$  e a nova Lagrangiana é obtida:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &\equiv L^{(0)} + \lambda^{(0)m} \dot{\Omega}_m^{(0)} \\ &= a^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^\alpha + \lambda^{(0)m} \dot{\Omega}_m^{(0)} - V^{(0)}(\xi) \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>As duas formas de adição de vínculos são equivalentes, pois diferem por uma derivada total temporal.

<sup>8</sup>Pode-se, também, tomar a derivada temporal do multiplicador de Lagrange.

$$\begin{aligned}
&= a^{(0)}(\xi)\dot{\xi}^\alpha + \lambda^{(0)m}\partial_\alpha\Omega_m^{(0)}\dot{\xi}^\alpha - V^{(0)}(\xi) \\
&= (a^{(0)}(\xi) + \lambda_m^{(0)}\partial_\alpha\Omega^{(0)m})\dot{\xi}^\alpha - V^{(0)}(\xi)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

A forma  $L^{(1)}$  pode ser a mesma de  $L^{(0)}$  se usarmos  $\alpha = 1, 2 \dots 2N + M$ ,  $\rho = 1, 2 \dots 2N$  e definirmos:

$$\xi^{(1)\alpha} \equiv (\xi^{(0)\rho}, \lambda^{(0)m}), \tag{3.18}$$

$$a_\alpha^{(1)} \equiv (a_\rho^{(0)}, \Omega_m^{(0)}). \tag{3.19}$$

Então, da equação (3.17) podemos identificar novos vetores  $a_\alpha^{(1)}$  e  $a_m^{(1)}$ :

$$a_\alpha^{(1)} = a_\alpha^{(0)} + \lambda_m^{(0)}\partial_\alpha\Omega_m^{(0)}, \tag{3.20}$$

$$a_m^{(1)} = 0. \tag{3.21}$$

Como os vínculos já foram inseridos na parte cinética, esses podem ser eliminados da parte potencial:

$$V^{(1)} \equiv V^{(0)}|_{\Omega^{(0)}=0}. \tag{3.22}$$

A Lagrangiana  $L^{(1)}$  pode ser escrita como

$$L^{(1)} = a_\alpha^{(1)}\dot{\xi}^{(1)\alpha} - V^{(1)}, \tag{3.23}$$

logo as equações de Euler-Lagrange são facilmente obtidas ao comparar a equação anterior com (3.4) e (3.5):

$$f_{\alpha\beta}^{(1)}\dot{\xi}^{(1)\beta} = \partial_\alpha V^{(1)}, \tag{3.24}$$

com

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv \partial_\alpha a_\beta^{(1)} - \partial_\beta a_\alpha^{(1)}. \tag{3.25}$$

Em consequência, a modificação do tensor pré-simplético é dada por:

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \partial_\alpha a_\beta^{(1)} - \partial_\beta a_\alpha^{(1)}, \tag{3.26}$$

$$f_{\alpha m}^{(1)} = \partial_\alpha a_m^{(1)} - \partial_m a_\alpha^{(1)} = -\partial_m a_\alpha^{(1)}, \tag{3.27}$$

$$f_{mn}^{(1)} = \partial_m a_n^{(1)} - \partial_n a_m^{(1)} = 0, \tag{3.28}$$

sendo  $\partial_m = \frac{\partial}{\partial \lambda^m}$ . Matricialmente,

$$(f_{\alpha\beta}^{(1)}) = \begin{pmatrix} (f_{\rho\kappa}^{(0)}) & (\partial_\rho \Omega_m^{(0)}) \\ -(\partial_\rho \Omega_m^{(0)})^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

onde  $\alpha, \beta = 1, 2 \dots 2N + M$ ,  $\rho, \kappa = 1, 2 \dots 2N$ ,  $m = 1, 2 \dots M$ ,  $\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^{(0)\rho}}$  e o superíndice  $T$  indica transposta da matriz.

Se a matriz  $(f_{\alpha\beta}^{(1)})$  for não-degenerada, conseguimos eliminar os vínculos e tem o tensor simplético da teoria. Caso contrário, devemos repetir o procedimento anterior tantas vezes quantas forem necessárias.

Pode ocorrer, também, de se chegar a um ponto onde se obtém uma matriz singular e os modos-zeros correspondentes não conduzem a novos vínculos. Este é o caso, por exemplo, de teorias de calibre. Neste ponto, se queremos definir o tensor simplético, devemos introduzir as condições de calibre<sup>9</sup> (ou a fixação de calibre).

Como exemplo das idéias aqui tratadas, consideremos o Modelo de Skyrme e o campo eletromagnético. O Modelo de Skyrme é uma teoria efetiva que descreve os bárions e suas interações, através de soluções estáticas com energia finita (sólitons) em um modelo de sigma não-linear.

### 3.3 Formalismo Simplético de Imersão (FSI)

Este método recente, chamado Formalismo Simplético de Imersão, usa a “filosofia” do método simplético anteriormente apresentado, para inserir variáveis auxiliares (variáveis de Wess-Zumino) de forma consistente com a dinâmica da teoria original e com os desejados geradores da nova simetria de calibre. Além de acrescentar duas novas funções,  $\Psi(\xi)$  e  $G(\xi, \eta)$ , a primeira na parte cinética da Lagrangiana e a segunda na parte potencial; de forma a possibilitar o retorno à Lagrangiana original se a variável auxiliar  $\eta$  for substituída pela função nula.

---

<sup>9</sup>Vínculos provenientes da quebra da simetria de calibre.

Após a introdução de  $\eta$ ,  $\Psi$  e  $G$ , o primeiro passo é impor que a nova matriz pré-simplética ( $\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ ) seja degenerada, assim  $\Psi$  será determinado. O segundo passo consiste em impor que seus modos-zeros não produzam novos vínculos, o que vem a determinar  $G$ . Com isto, obter-se-á uma Lagrangiana com simetria de calibre, cuja fixação com a condição  $\eta = 0$  promoverá as mesmas equações de movimento da Lagrangiana original.

Geralmente, o tensor simplético envolve as coordenadas e os momentos originais da teoria. Apesar do método simplético de calibre conservar a correspondência existente entre cada coordenada e seu momento conjugado, a inserção da variável de Wess-Zumino pode alterar o valor do último. Por isto, um terceiro e último passo é necessário escrever a Lagrangiana na forma padrão, isto é, sem os momentos.

Primeiramente, apresentaremos de forma geral, o Formalismo Simplético de Imersão [13, 14, 26], a fim de analisar a teoria de MP e de Heisenberg desse ponto de vista e obter a ação equivalente dual da teoria.

Consideremos duas funções arbitrárias que são dependentes do espaço de fase original e das variáveis WZ,  $\Psi(a_i, p_i)$  e  $G(a_i, p_i, \eta)$  na densidade Lagrangiana de primeira ordem:

$$\tilde{L}^{(0)} dt = a_\theta^{(0)} d\xi^{(0)\theta} + \Psi d\eta - \tilde{V}^{(0)} dt, \quad (3.30)$$

com

$$\tilde{V}^{(0)} = V^{(0)} + G(a_i, p_i, \eta) \quad (3.31)$$

onde a função arbitrária  $G(a_i, p_i, \eta)$  é expressa como uma expansão em termos das variáveis de WZ, dado por:

$$G(a_i, p_i, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G(a_i, p_i, \eta), \quad G^{(n)}(a_i, p_i, \eta) \propto \eta^{(n)} \quad (3.32)$$

e satisfaz a seguinte condição de contorno:

$$G(a_i, p_i, \eta = 0) = 0 \quad (3.33)$$

As variáveis simpléticas foram estendidas e também as variáveis WZ,  $\tilde{\xi}^{(0),\tilde{\theta}} = (\xi^{(0),\theta}, \eta)$  ( com  $\tilde{\theta} = 1, 2, \dots, 2N + 1$ ) e o potencial simplético de primeira-iteração torna-se:

$$\tilde{V}^{(0)}(a_i, p_i, \eta) = V^{(0)}(a_i, p_i) + \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}(a_i, p_i, \eta) \quad (3.34)$$

Neste contexto, os novos momentos canônicos são:

$$\tilde{a}_{\tilde{\theta}}^{(0)} = \begin{cases} a_{\theta}^{(0)}, & \tilde{\theta} = 1, 2, \dots, 2N; \\ \Psi, & \tilde{\theta} = 1, 2, \dots, 2N + 1 \end{cases} \quad (3.35)$$

e o novo tensor simplético, dado por:

$$\tilde{f}_{\tilde{\theta}\tilde{\beta}}^{(0)} = \frac{\partial \tilde{a}_{\tilde{\beta}}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\theta}}} - \frac{\partial \tilde{a}_{\tilde{\theta}}^{(0)}}{\partial \tilde{\xi}^{(0)\tilde{\beta}}}, \quad (3.36)$$

que matricialmente é,

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_{\tilde{\theta}\tilde{\beta}}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_{\theta\beta}^{(0)}) & (f_{\theta\eta}^{(0)}) \\ f_{\eta\beta}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Após a introdução de  $\eta$ ,  $\Psi(a_i, p_i)$  e  $G(a_i, p_i, \eta)$ , o primeiro passo é impor que a nova matriz,  $\tilde{f}_{\tilde{\theta}\tilde{\beta}}^{(0)}$ , seja degenerada, assim  $\Psi$  será determinado. Enquanto, o segundo consiste em atribuir que seus modos-zeros não produzam mais vínculos, o que vem a determinar  $G$ .

Com isto, este novo tensor simplético,  $\tilde{f}^{(0)}$ , tem um modo-zero  $\tilde{\nu}$ ,conseqüentemente, chegamos a seguinte condição:

$$\tilde{\nu}_{\tilde{\theta}}^{(0)} \tilde{f}_{\tilde{\theta}\tilde{\beta}}^{(0)} = 0. \quad (3.38)$$

Imporemos, agora, que a matriz acima possua o um modo-zero do tipo:

$$\tilde{\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu^\theta & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

e usando a relação dada em (3.38) junto com a (3.37), encontramos um grupo de equações,

$$\mu^\theta f_{\theta\beta}^{(0)} + f_{\eta\beta}^{(0)} = 0 \quad (3.40)$$

onde

$$f_{\eta\beta}^{(0)} = \frac{\partial a_\beta^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^{(0)\beta}} \quad (3.41)$$

Os elementos da matriz  $\mu^\theta$  são escolhidos em ordem de revelar o desejo pela simetria de calibre. Note que nesse formalismo de modo-zero  $\tilde{\nu}_\theta^{(0)}$  é o gerador da simetria de calibre. Esta característica nos permite encontrar a simetria escondida do modelo não-invariante. O fato da última componente de  $(\tilde{\nu}^{(0)})$  ser unidade assegura a existência de uma transformação de calibre envolvendo  $\eta$ . Estando os modos-zero escolhidos e a função  $\Psi$  determinada, a equação (3.40) dá-se início ao passo seguinte do método, o cálculo de  $G$ .

Para termos uma teoria de calibre, impomos que não mais vínculos surgem da contração do modo-zero ( $\tilde{\nu}_\theta^{(0)}$ ) com o gradiente do potencial  $\tilde{V}^{(0)}(a_i, p_i, \eta)$ , ou seja, o modo-zero é ortogonal ao gradiente do potencial. Esta condição gera uma equação diferencial geral,

$$\tilde{\nu}^{(0)\theta} \frac{\partial \tilde{V}^{(0)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} = 0 \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mu^\theta \frac{\partial V^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \mu^\theta \frac{\partial G^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \mu^\theta \frac{\partial G^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \dots + \\ + \frac{\partial G^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial G^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

que nos permite calcular todos os termos de correção  $G(a_i, p_i, \eta)$  em ordem de  $\eta$ . Note que esta expansão de polinômios em termos de  $\eta$  é igual a zero, conseqüentemente, todos os coeficientes para cada ordem de  $\eta$  devem ser identicamente nulos. Em vista disso, cada termo corrigido em ordem de  $\eta$  é determinado. Para um termo linear corrigido, temos:

$$\mu^\theta \frac{\partial V^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \frac{\partial G^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.44)$$

e um termo quadrático,

$$\mu^\theta \frac{\partial G^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \frac{\partial G^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} = 0. \quad (3.45)$$

Destas equações, uma relação de recorrência para  $n \geq 2$  é proposto como:

$$\mu^\theta \frac{\partial G^{(n-1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \frac{\partial G^{(n)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad (3.46)$$

que nos possibilita calcular os restantes dos termos de correção em ordem de  $\eta$ . Este processo iterativo é sucessivamente repetido até (3.42) tornar identicamente nulo, conseqüentemente, o termo extra  $G(a_i, p_i, \eta)$  é obtido explicitamente. Então, a hamiltoniana de calibre invariante, identificada como potencial simplético, é obtido como:

$$\tilde{H}(a_i, p_i, \eta) = V^{(0)}((a_i, p_i) + G(a_i, p_i, \eta), \quad (3.47)$$

e o modo-zero  $\tilde{\nu}^{(o)\tilde{\theta}}$  é identificado como gerador de transformação infinitesimal de calibre, dado por:

$$\delta \tilde{\xi}^{\tilde{\theta}} = \epsilon \tilde{\nu}^{(o)\tilde{\theta}} \quad (3.48)$$

onde  $\epsilon \equiv \epsilon(t)$  (ou  $\epsilon \equiv \epsilon(\vec{x}, t)$  para campos) possui a finalidade de tornar as componentes do modo-zero suficientemente pequenas. Vemos, da equação (3.48), que os modos-zero são geradores das simetrias de calibre do método simplético.

# Capítulo 4

## Eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP)

### 4.1 Introdução

Há diferentes maneiras de estender a eletrodinâmica, tentando suavizar singularidades infravermelha ou ultravioleta que aparecem em grandes distâncias ou curtas. Uma é o Born-Infeld, tipo de generalização [33], que envolve a extensão não-linear. A outra inclui as generalizações introduzidas pelo Proca [34], que envolve a adição de um termo de massa para o campo de vetores, que foi introduzida para facilitar a singularidade infravermelha. No entanto, a simetria de calibre é claramente perdido, devido ao termo  $A_\mu A^\mu$ . Outra forma através do trabalho de Podolsky [35], que envolve derivadas de ordem superior e foi introduzido para facilitar singularidade ultravioleta. A teoria Podolsky propaga um fóton massivo e as simetrias de Lorentz e de calibre não são espontaneamente quebradas. Além disso, tem um papel fundamental na discussão sobre a compatibilidade do monopólo magnético e “fótons” massivos.

O interesse no mapeamento dual entre duas teorias diferentes, que mostram as mesmas propriedades físicas, tem aumentado nos últimos anos, motivados pelo seu sucesso, tanto na teoria de campo, bem como a teoria das cordas. Ao mesmo tempo,

o interesse no estudo de teorias que envolvem derivadas de ordem superior tem sido bem apreciado e permanece intenso. Dentro do contexto da teoria de Maxwell, generalizações de derivada de ordem superior podem ser encontrados em [33, 34, 35].

Diante do exposto, os aspectos duais de eletrodinâmica que aparecem nos modelos de Proca e Podolsky, usando o Formalismo Simplético de Imersão [12, 13], tem sido muito eficiente para revelar uma simetria escondida e uma parceria dual a outras teorias [12, 13]. Além de analisar a matriz residual a cada pólo dos propagadores. Enquanto, os pólos fornecem uma relação entre a energia e o impulso que pode ser associado a uma partícula massiva. A matriz residual dá informações sobre o grau de liberdade da polarização, onde os estados físicos estão associados com autovalores positivos da matriz residual em cada pólo [36] sobre o termo positivo Maxwell (fantasma). A existência de autovalores negativos mostra que nestas situações os estados não físicos, que correspondem aos estados negativos da norma de partículas (fantasmas), são introduzidos.

Portanto, na próxima seção apresentaremos a versão dual do modelo de Proca, de Podolsky, a fim de construir uma teoria de calibre massiva invariante. Ainda, faremos uma investigação da estrutura do propagador calibre, visto no apêndice .

## 4.2 Uma versão invariante de calibre para a Teoria de Maxwell-Podolsky a partir de MP via FSI

Nessa seção, baseou-se no nosso artigo [14], a teoria de Maxwell-Proca (MP) em quatro dimensões será analisada no ponto de vista simplético [22]. Consideraremos a Lagrangiana massiva MP [15, 16]:

$$L^{(0)} = -\frac{\beta}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

onde  $m$  é a massa do campo  $A_\mu \equiv A_\mu(\vec{x})$ ,  $\vec{x}$  o vetor do espaço-tempo, tensor métrico  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Este modelo designa a massa ao fóton e, conseqüentemente, não existe transformação de calibre da teoria de Maxwell. Este fato é mais facilmente constatado observando-se que  $A^\mu A_\mu$  não é invariante perante  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ , que corresponde justamente à transformação de calibre da teoria da Maxwell ( $L = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ).

Agora, segue o método simplético, em que a Lagrangiana de iteração-zero e primeira-ordem, equação (4.1), deve ser escrita como:

$$L^{(0)} = -\frac{\beta}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu. \quad (4.2)$$

Os momentos conjugados ao campo  $A^\mu$  é:

$$\Pi_l(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^l} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^l)}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Usando a equação (4.70) para calcular a variação do primeiro termo da densidade Lagrangiana (4.2) e (4.3) e levando em consideração os demais termos com dependência de  $(\partial_0 A^l)$ , temos:

$$\Pi_l(x) = -\beta F_{0l}. \quad (4.4)$$

Logo,

$$L^{(0)} = -\beta F_{0i} F^{0i} + \frac{\beta}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_i A^i + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 \quad (4.5)$$

Usando a (4.4),

$$L^{(0)} = -\frac{1}{\beta} \Pi_l \Pi^l + \frac{1}{2\beta} \Pi_l \Pi^l - \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 + \frac{m^2}{2} A_i A^i. \quad (4.6)$$

Obtemos uma Lagrangiana quadrática na velocidade:

$$L^{(0)} = -\frac{1}{\beta}\Pi^l(-\beta\partial_0 A_l + \beta\partial_l A_0) + \frac{1}{2\beta}\Pi_l\Pi^l - \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A_0A^0 + \frac{m^2}{2}A_iA^i. \quad (4.7)$$

ou ainda,

$$L^{(0)} = \Pi^l\dot{A}_l + \Pi^l\partial_l A_0 + \frac{1}{2\beta}\Pi_l\Pi^l - \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A_0A^0 + \frac{m^2}{2}A_iA^i. \quad (4.8)$$

Finalmente, temos a Lagrangiana linearizada;

$$L^{(0)} = \Pi_i\dot{A}^i - V^{(0)}, \quad (4.9)$$

com

$$V^{(0)} = (\Pi_i\partial_i A_0) - \frac{1}{2\beta}\Pi_l\Pi^l + \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A_0A^0 - \frac{m^2}{2}A_iA^i. \quad (4.10)$$

Os campos simpléticos são  $\xi^{(0)\alpha} = (A^i, \Pi^i, A^0)$  e os momentos são:

$$\begin{aligned} a_{A^i}^{(0)} &= \Pi_i; \\ a_{\Pi^i}^{(0)} &= a_{A^0}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

e a matriz simplética de iteração-zero é:

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.12)$$

que é uma matriz singular e tem um modo-zero dado por:

$$\nu^{(0)} = (0_{1 \times 3} \quad 0_{1 \times 3} \quad 1), \quad (4.13)$$

Se contrairmos esse modo-zero com o gradiente do potencial simplético, gera o vínculo:

$$\int d^3y \nu^{(0)}(\vec{x}) \frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta \xi^{(0)}(\vec{x})} \equiv \Omega^{(0)}(\vec{x}) \quad (4.14)$$

que é

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)}(\vec{x}) &\equiv - \int d^3y (\partial_x^i \Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x})) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &\equiv \partial_x^i \Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

identificado como a lei de Gauss. Retornando este vínculo na parte canônica da densidade Lagrangiana de primeira ordem  $L^{(0)}$ , usando um multiplicador de Lagrange ( $\gamma$ ), a densidade Lagrangiana de primeira-iteração é obtida como:

$$L^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Omega_i \dot{\gamma} - V^{(1)}, \quad (4.16)$$

com  $V^{(1)} = V^{(0)} |_{\Omega_1=0}$

$$V^{(1)} = -\frac{1}{2\beta} \Pi_i \Pi^i + \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 - \frac{m^2}{2} A_i A^i. \quad (4.17)$$

As novos campos simpléticos são  $\xi^{(1)} = (A^i, \Pi^i, A^0, \gamma)$  e os momentos são:

$$\begin{aligned} a_{A^i}^{(1)} &= \Pi_i; \\ a_{\Pi^i}^{(1)} &= a_{A^0}^{(1)} = 0; \\ a_{\gamma}^{(1)} &= \Omega^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Já, a correspondente matriz simplética é:

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & f_{A^i(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})} & 0 & f_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ f_{\Pi^i(\vec{x})A^j(\vec{y})} & 0 & 0 & f_{\Pi^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ 0 & 0 & 0 & f_{A^0(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ f_{\gamma(\vec{x})A^j(\vec{y})} & f_{\gamma(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})} & f_{\gamma(\vec{x})A^0(\vec{y})} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

onde

$$f_{A^i(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})}^{(1)} = -g_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.20)$$

$$f_{\Pi^i(\vec{x})A^j(\vec{y})}^{(1)} = -[f_{A^i(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})}]^T = g_{ji}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} f_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})}^{(1)} &= \frac{\delta}{\delta A^i(\vec{x})}(\partial_y^l \Pi_l(\vec{y}) + m^2 A_0(\vec{y})) \\ &= 0; \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$f_{\gamma(\vec{x})\Pi^i(\vec{y})}^{(1)} = -[f_{\Pi^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})}]^T = 0; \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} f_{A^0(\vec{x})\gamma(\vec{y})}^{(1)} &= m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{\gamma(\vec{y})A^0(\vec{x})}^{(1)} &= -[f_{A^0(\vec{x})\gamma(\vec{y})}]^T = -m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Portanto,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ g_{ji}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & \partial_i^y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & 0 & m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{\gamma(\vec{x})A^j(\vec{y})} & -\partial_j^x \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & -m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Esta matriz é não-singular, como resolvido pelo formalismo simplético, os parênteses generalizados entre os campos de espaço de fase são adquiridos pela matriz inversa,<sup>1</sup> os quais são identificados como:

$$\{A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y})\}_* = 0; \quad (4.26)$$

---

<sup>1</sup>Veja o apêndice.

$$\{A^i(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\}_* = g^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad (4.27)$$

$$\{A^0(\vec{x}), A^j(\vec{y})\}_* = \frac{1}{m^2} \partial_y^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}); \quad (4.28)$$

$$\{A^0(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\}_* = 0. \quad (4.29)$$

Como dito acima, a análise simplética foi o primeiro passo do Formalismo de Imersão (FI). O próximo é a introdução do campo WZ em ordem de prosseguir com a dualização.

Agora o espaço de fase será estendido com a inserção dos campos WZ. Primeiramente, mudaremos a Lagrangiana, equação (4.16), introduzindo duas funções arbitrárias,  $\Psi \equiv \Psi(A^i, \Pi^i, A^0)$  e  $G \equiv G(A^i, \Pi^i, A^0, \eta)$ , com campo WZ,

$$\tilde{L} = \Pi_i \dot{A}^i + \Psi \dot{\eta} - \tilde{V}^{(0)}, \quad (4.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(0)} &= V^{(0)} + G \\ &= \Pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{2\beta} \Pi_l \Pi^l + \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 - \frac{m^2}{2} A_i A^i + G. \end{aligned} \quad (4.31)$$

e  $G$  é uma função expressa como:

$$G(A^i, \Pi^i, A^0, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}, \quad G^{(n)} \propto \eta^n. \quad (4.32)$$

A função arbitrária satisfaz a seguinte condição de contorno:

$$G(A^i, \Pi^i, A^0, \eta = 0) = 0 \quad (4.33)$$

Os campos simpléticos foram estendidos,  $\tilde{\xi}^{(0)} = (A^i, \Pi^i, A^0, \eta)$ , e a matriz simplética torna-se:

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} \\ g_{ji}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta \Pi^i(\vec{x})} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \\ -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta \Pi^j(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^0(\vec{y})} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Esta matriz singular tem modo-zero, que pode ser resolvido convenientemente como:

$$\nu^{(0)} = (\partial^i \quad 0 \quad \partial^0 \quad 1). \quad (4.35)$$

Contraindo este modo-zero com a matriz simplética acima, um conjunto de equações diferenciais são obtidas:

$$\int d^3x \left[ \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} \right] = 0, \quad (4.36)$$

$$\int d^3x \left[ g_{ij}\partial^i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta \Pi^j(\vec{y})} \right] = 0, \quad (4.37)$$

$$\int d^3x \left[ \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^0(\vec{y})} \right] = 0, \quad (4.38)$$

$$\int d^3x \left[ \partial^i \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} + \partial^0 \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] = 0. \quad (4.39)$$

Portanto, encontramos que,

$$\Psi(\vec{x}) = -\partial^i \Pi_i(\vec{x}) \quad (4.40)$$

com matriz simplética correspondente a:

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 & -\partial_i^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_j^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.41)$$

Então, a densidade Lagrangiana torna:

$$\tilde{L}^{(0)} = \Pi_i \dot{A}^i - \partial^i \Pi_i \dot{\eta} - \tilde{V}^{(0)}, \quad (4.42)$$

sendo o  $\tilde{V}^{(0)}$  dado por (4.31).

Começaremos, o passo final de Formalismo Simplético de Imersão, impondo que a contração do modo-zero, equação (4.35), como o gradiente do potencial simplético gera um resultado identicamente nulo, ou seja,

$$\int d^3 y \tilde{\nu}^{(0)}(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^{(0)}(\vec{x})} = 0. \quad (4.43)$$

Desta condição, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$\int d^3 y \left\{ \partial_x^l \left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} \right] + \partial_x^0 \left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] + 1 \cdot \left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] \right\} = 0. \quad (4.44)$$

onde

$$\left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} \right] = \frac{\beta}{2} F_{ij}(\vec{y}) \frac{\delta F^{ij}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} - m^2 A_l(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.45)$$

$$\left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] = -\partial_y^i \Pi_i(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - m^2 A_0(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.46)$$

$$\left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta G^n(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \quad (4.47)$$

Reescrevendo, o termo, separadamente, da equação (4.45) como:

$$F_{ij}(\vec{y}) \frac{\delta F^{ij}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} = F_{il}(\vec{y}) \partial_y^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - F_{lj}(\vec{y}) \partial_y^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = 2F_{il}(\vec{y}) \partial_y^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.48)$$

Assim, a equação (4.45) assume a seguinte forma:

$$\left[ \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} \right] = -m^2 A_l(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.49)$$

Retornando a relação (4.44), calcularemos todos os termos corrigidos em ordem de  $\eta$ . Primeiramente, o termo de correção linear em  $\eta$ ,

$$\frac{\delta G^1(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} + \partial_x^l [-\beta \partial_y^i F_{ij}(\vec{y}) - m^2 A_l(\vec{y})] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_x^0 [\partial_y^i \Pi_i(\vec{y}) + m^2 A_0(\vec{y})] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = (4.50)$$

Analogamente, a equação (4.40), o termo de correção linear em  $\eta$ , é dado por:

$$G^{(1)} = -\partial^l [-\beta \partial^i F_{il}(\vec{x}) - m^2 A_l(\vec{x})] \eta(\vec{x}) + \partial^0 [\partial^i \Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x})] \eta(\vec{x}) \quad (4.51)$$

e por uma integração por partes, nos permite reescrever a equação acima sob a forma:

$$G^{(1)} = [-\beta \partial^i F_{il}(\vec{x}) - m^2 A_l(\vec{x})] \partial^l \eta(\vec{x}) - [\partial^i \Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x})] \partial^0 \eta(\vec{x}) \quad (4.52)$$

Substituindo o primeiro termo da equação acima pela (4.4), temos:

$$G^{(1)} = [-\beta \partial^i F_{il}(\vec{x}) - m^2 A_l(\vec{x})] \partial^l \eta - [\partial^i \Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x})] \partial^0 \eta. \quad (4.53)$$

Levando este resultado no potencial simplético, equação (4.31), obtemos:

$$\tilde{V}^{(1)} = V^{(0)} + G^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} G^{(n)}. \quad (4.54)$$

Contraindo o novo potencial simplético  $\tilde{V}^{(1)}$  com o modo-zero, equação (4.35), a fim de encontrarmos o termo de correção quadrático, temos:

$$\int d^3 y \left\{ \partial_x^m \left[ \frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^m(\vec{x})} \right] + \partial_x^m \left[ \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^m(\vec{x})} \right] + \partial_x^0 \left[ \frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} + \right. \right. \\ \left. \left. + \partial_x^0 \left[ \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] + 1 \cdot \left[ \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] + 1 \cdot \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta G^{(n)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] \right\} = 0 \quad (4.55)$$

Notamos que o primeiro, terceiro e quinto termo se cancelam. Após, a substituição de cada termo correspondente na equação acima e o uso da (4.53), chegamos a:

$$\left[ \partial_x^m \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^m(\vec{x})} \right] = -\beta \partial_i^y (\delta_m^l \partial_y^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \delta_m^i \partial_y^l \delta^3(\vec{x} - \vec{y})) \partial_l^y \eta(\vec{y}) - m^2 \partial_m^y \eta(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.56)$$

$$\left[ \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] = -m^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \partial_y^0 \eta(\vec{y}); \quad (4.57)$$

$$\left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta G^{(n)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] = \left[ \frac{\delta G^{(2)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right]. \quad (4.58)$$

Retornando as equações (4.55), temos

$$\int d^3y \left\{ -m^2 \partial_m^y \eta(\vec{y}) \partial_x^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - m^2 \partial_y^0 \eta(\vec{y}) \partial_0^x \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{\delta G^{(2)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right\}, \quad (4.59)$$

e finalmente, o termo de correção de segunda-ordem é:

$$G^{(2)} = -\frac{m^2}{2} \partial_m \eta \partial^m \eta - \frac{m^2}{2} \partial_0 \eta \partial^0 \eta. \quad (4.60)$$

Percebemos que esse termo de correção de segunda-ordem tem dependência somente nos campos WZ, portanto os demais termos de correção  $G^{(n)}$  para  $n \geq 3$  são nulos. Conseqüentemente, o potencial simplético, equação (4.52), torna-se:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(1)} &= V^{(0)} + [-\beta \partial^i F_{il}(\vec{x}) - m^2 A_l(\vec{x})] \partial^l \eta + [-\beta \partial^i F_{0i} + m^2 A_0] \partial^0 \eta - \\ &- \frac{m^2}{2} (\partial_m \eta \partial^m \eta + \partial_0 \eta \partial^0 \eta). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Portanto, a densidade Lagrangiana de calibre de primeira-ordem, equação (4.30), pode ser escrita sob a forma:

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= L + [\beta\partial^n F_{0n}] \partial^0\eta - [-\beta\partial^i F_{il} - m^2 A_l] \partial^l\eta + [-\beta\partial^i F_{0i} + m^2 A_0] \partial^0\eta + \\ &+ \frac{m^2}{2}(\partial_m\eta\partial^m\eta + \partial_0\eta\partial^0\eta).\end{aligned}\quad (4.62)$$

Logo, a equação (4.62) torna:

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= L + [m^2 A_l + \beta\partial^0 F_{0l} + \beta\partial^i F_{il}] \partial^l\eta + [m^2 A_0 + \beta\partial^i F_{i0}] \partial^0\eta + \\ &+ \frac{m^2}{2}(\partial_m\eta\partial^m\eta + \partial_0\eta\partial^0\eta)\end{aligned}\quad (4.63)$$

onde  $L$  é dado em (4.1).

Se substituimos a corrente de Noether na equação (4.63), cujos os valores de suas componentes são:

$$\begin{aligned}J_l &= m^2 A_l + \beta\partial^0 F_{0l} + \beta\partial^i F_{il} \\ J_0 &= m^2 A_0 + \beta\partial^i F_{i0},\end{aligned}\quad (4.64)$$

podemos escrever  $\tilde{L}$  como:

$$\tilde{L} = L + J_\mu\partial^\mu\eta + \frac{m^2}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta.\quad (4.65)$$

Escrevendo a equação de Euler-Lagrange para este campo  $A^\sigma$ ,

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial A^\sigma} = \partial^\rho \left[ \frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} \right].\quad (4.66)$$

Tomando a primeira variação dessa densidade Lagrangiana, visto cada termo separadamente:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= g_{\mu\alpha}\partial^\alpha g_{\nu\beta}A^\beta - g_{\nu\beta}\partial^\beta g_{\mu\alpha}A^\alpha \\ &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)\end{aligned}\quad (4.67)$$

e

$$\frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta)}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} = \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta. \quad (4.68)$$

Logo, o primeiro termo da densidade Lagrangiana, equação (4.1), assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} &= -\frac{\beta}{4} [g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} (\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \\ &\quad - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) (\delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu)] \end{aligned} \quad (4.69)$$

após alguns cálculos:

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} = -\beta(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho). \quad (4.70)$$

Contudo,

$$\partial^\rho \left[ \frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} \right] = -\beta \{ \partial^\rho [\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho] \} = \beta(\partial^\rho F_{\rho\sigma}). \quad (4.71)$$

Já, o segundo termo torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial A^\sigma} &= \frac{1}{2} m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial A^\sigma} (g_{\nu\mu} A^\mu A^\nu) \right] \\ &= m^2 A_\sigma. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Portanto, a equação (3.34) torna-se:

$$\delta L^{(0)}[A_\mu] = [m^2 A_\mu + \beta(\partial^\nu F_{\nu\mu})] \partial^\mu \eta, \quad (4.73)$$

A corrente de Noether pode ser calculada como:

$$J_\mu = m^2 A_\mu + \beta(\partial^\nu F_{\mu\nu}) \quad (4.74)$$

e a densidade langrangeana de primeira iteração foi introduzida em um campo auxiliar  $B$ ,  $L^{(1)} = L^{(0)} - JB$ . Seguindo o procedimento vimos que o campo  $B$  transforma-se como,

$$\delta B_\mu = \delta A_\mu = \partial_\mu \eta, \quad (4.75)$$

então,

$$\delta L^{(1)} = -(\delta J_\mu)B^\mu. \quad (4.76)$$

Temos também que,

$$\delta J_\mu = m^2 \delta A_\mu = m^2 (\partial_\mu \eta). \quad (4.77)$$

Substituindo na anterior, temos que a Lagrangiana de segunda iteração é,

$$L^{(2)} = L^{(1)} + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu. \quad (4.78)$$

Usando (4.76) e (4.77), a variação deve ser nula,  $\delta L^2 = 0$ , e a forma final dessa ação é,

$$L^{(2)} = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - [m^2 A_\mu + \beta(\partial^\mu F_{\mu\nu})] B^\mu + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu, \quad (4.79)$$

onde, resolvendo para  $B_\mu$  a equação de movimento é,

$$-J_\mu + m^2 B_\mu = 0. \quad (4.80)$$

Substituindo este resultado na (4.78), obtemos uma teoria invariante de calibre,

$$L^{(2)} = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{J_\mu J^\mu}{2m^2} \quad (4.81)$$

De acordo com a equação (4.74), calculamos  $J_\mu J^\mu$ :

$$J_\mu J^\mu = m^4 A_\mu A^\mu + \beta^2 (\partial_\nu F^{\nu\mu})^2 + m^2 \beta [A_\mu (\partial_\lambda F^{\lambda\mu}) + A^\mu (\partial^\nu F_{\nu\mu})] \quad (4.82)$$

onde

$$\begin{aligned} [A_\mu (\partial_\lambda F^{\lambda\mu}) + A^\mu (\partial^\nu F_{\nu\mu})] &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial^\nu A^\mu) F_{\nu\mu} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial_\nu A_\mu) F^{\nu\mu} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial_\mu A_\nu) F^{\mu\nu} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial_\mu A_\lambda) F^{\mu\lambda} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu - \partial^\mu A^\lambda) F^{\lambda\mu} \\ &= -F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Substituindo as equações (4.83) e (4.82) na (4.81), finalmente encontramos a ação dual da (4.1):

$$L = \frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\beta^2}{2m^2} (\partial_\mu F^{\mu\nu})^2. \quad (4.84)$$

que é o equivalente dual para a ação (4.1), o modelo de Maxwell-Podolsky. A partir da Teoria de Maxwell-Proca, onde a simetria de calibre não está presente, obtemos a Teoria de Maxwell-Podolsky, usando o Formalismo Simplético de Imersão, que se propaga um “fóton” massivo e preserva a simetria de calibre.

Como bem conhecido pela literatura sobre o Formalismo Simplético, o modo-zero é o mesmo gerador da transformação infinitesimal de calibre de (4.1). E assim, usando o modo-zero, equação (4.35), como gerador da transformação infinitesimal de calibre dado por  $\delta\mathcal{O} = \epsilon\tilde{\nu}^{(0)}$ , temos:

$$\delta A^i(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\partial^i = -\partial^i\epsilon(\vec{x}), \quad (4.85)$$

$$\delta\Pi^i(\vec{x}) = 0, \quad (4.86)$$

$$\delta A^0(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x})\partial^0 = -\partial^0\epsilon(\vec{x}), \quad (4.87)$$

$$\delta\eta(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}), \quad (4.88)$$

onde  $\epsilon(\vec{x})$  é um parâmetro infinitesimal dependente do tempo. Consequentemente, a hamiltoniana ( que é  $\int \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})d^3y$ ) deve ser invariante sob estas transformações,  $\delta\tilde{H}^{(0)} = 0$ , devido a equação (4.43).

É importante mencionar que mais que uma simetria WZ estará revelada (veja [13] para uma revisão), mostrando que o modelo estudado não tem uma única descrição WZ invariante de calibre, mas uma família de representação dinâmica equivalente WZ invariante de calibre.

### 4.3 Análise Espectral da Teoria de Maxwell-Podolsky

Nesta seção, encontraremos os propagadores da teoria de Maxwell-Podolsky, a fim de realizar um estudo sobre o seu espectro.

Após um cálculo simples, podemos escrever a Lagrangiana como

$$L = \frac{1}{2}A^\mu \left( g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{m^2}g_{\mu\nu}\square^2 + \frac{1}{m^2}\square\partial_\mu\partial_\nu \right) A^\nu. \quad (4.89)$$

Rescrevendo (4.89) convenientemente como,

$$L = \frac{1}{2}A^\mu\Theta_{\mu\nu}A^\nu, \quad (4.90)$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\square - \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{m^2}g_{\mu\nu}\square^2 + \frac{1}{m^2}\square\partial_\mu\partial_\nu \quad (4.91)$$

é um operador diferencial para a teoria com  $g_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ . O  $\theta_{\mu\nu}$  é um projetor transversal e  $\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}$  é um projetor longitudinal.

Vamos supor que existe o operador inverso,  $\Theta_{\mu\nu}^{-1}$ , tal que  $\Theta_{\mu\alpha}^{-1} \cdot \Theta_{\mu\nu} = \delta_{\alpha}^{\mu}$ . Com isso,

$$\Theta_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\square(1 - \frac{1}{m^2}\square)}\theta_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{\square(1 - \frac{\alpha}{m^2}\square)}\omega_{\mu\nu}, \quad (4.92)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro real a ser ajustado de modo a evitar o aparecimento de táquions ou ghosts. Então, o vetor propagador é definido como:

$$\langle A_{\mu}A_{\nu} \rangle = i\Theta_{\mu\nu}^{-1}. \quad (4.93)$$

No espaço de momenta (4.93) é expresso pela relação

$$\langle A_{\mu}A_{\nu} \rangle = \frac{-i}{k^2(1 - \frac{1}{m^2}k^2)}\tilde{\theta}_{\mu\nu} - \frac{i\alpha}{k^2(\alpha - \frac{1}{m^2}k^2)}\tilde{\omega}_{\mu\nu}, \quad (4.94)$$

a saber,

$$\langle A_{\mu}A_{\nu} \rangle = \frac{-i}{k^2}\tilde{\theta}_{\mu\nu} + \frac{i}{k^2 - m^2}\tilde{\theta}_{\mu\nu} + \frac{-i\alpha}{k^2}\tilde{\omega}_{\mu\nu} + \frac{i\alpha}{k^2 - \alpha m^2}\tilde{\omega}_{\mu\nu}, \quad (4.95)$$

A relação (4.95) é o vetor propagador para a extensão da teoria de Maxwell devido ao termo Podolsky na (4.84). Note-se que o termo associado a  $\theta_{\mu\nu}$  nos dá informação sobre a parte transversal do campo (spin 1) e  $\omega_{\mu\nu}$  informa sobre a parte longitudinal (spin 0). Analisando as relações de dispersão correspondentes ao propagador do Maxwell-Podolsky, (4.84), consideremos  $m^2 \neq 0$  e  $\alpha \rightarrow \infty$ , temos no setor de spin 1 um pólo em  $k^2 = 0$  e outro pólo massivo em  $k^2 = m^2$ . Já que não existe pólo no spin 0.

Agora, vamos analisar o autovalor da matriz residual para o pólo  $k^2 = m^2$  com  $m^2 \neq 0$ , escolhendo  $k^{\mu}$  puramente tipo-tempo  $k^{\mu} \equiv (m, \vec{0})$ , temos

$$R_{\mu\nu} = -i\tilde{\theta}_{\mu\nu} = -i\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right) = -i\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m^2}\right) \quad (4.96)$$

ou

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}. \quad (4.97)$$

Assim, para um  $k^\mu$  tipo-tempo, os pólos  $\langle A_\mu A_\nu \rangle$  respeitam a causalidade (não são taquiônicos) e correspondem ao estado de uma partícula com três graus de liberdade fisicamente aceitável, uma vez que na matriz residual os fatores multiplicativos de  $i$  são positivos. Consequentemente, o modelo pode ser adotado como uma teoria consistente.

# Capítulo 5

## Modelo de Heisenberg (MH)

### 5.1 Introdução

Desde a descoberta da supercondutividade de alto  $T_c$  o interesse em magnetos bidimensional de Heisenberg tem sido revivido. Em vista disto, o estudo do magnetismo em duas-dimensões tornou-se interessante aos teóricos e experimentalistas. E um grande progresso na compreensão do magnetismo em duas-dimensões foi alcançado e discutido na literatura. Além disso, é sabido que o limite clássico contínuo do ferromagneto bidimensional de Heisenberg pode ser descrito pelo modelo sigma não-linear  $O(3)$ .

Um estudo consistente e sistemático dos sistemas vinculados foi inicialmente estabelecido por Dirac [37]. O objetivo principal do assim chamado Formalismo de Dirac foi obter as parentêses de Dirac, que eram a ponte para os comutadores da teoria quântica. Com a classificação de vínculos como primeira ou segunda classe, primária ou secundária, etc., este formalismo tornou-se um dos padrões para a análise de teorias vinculadas. Faddeev e Jackiw (FJ)[6] propuseram um método geométrico ao langrangeno de primeira-ordem para a quantização simplética de sistemas vinculados, o que é diferente da tradicional abordagem do hamiltoniano de Dirac. No método FJ, não precisa de introduzir vínculos primários como no formalismo de Dirac, que decorre

da definição dos momentos canônicos. Além disso, a classificação de vínculos como primeira ou segunda classe, primário ou secundário não é necessário neste método. Todos os vínculos são mantidas ao mesmo nível. Barcelos-Neto e Wotzasek (BW) propuseram o formalismo simplética [6], que é realmente uma versão melhorada do FJ para o caso em que os vínculos não são completamente eliminados.

O ponto principal do Formalismo Simplético é fazer com que o sistema seja descrito por uma Lagrangiana de primeira-ordem através de alguns campos auxiliares, mas sem depender da forma de como esses são introduzidos para torná-la de primeira-ordem. A Lagrangiana de primeira-ordem consiste de algumas variáveis simpléticas e seus momentos canônicos generalizados, que dá a matriz simplética duas-forma  $f_{i,j}$ . A classificação de sistemas vinculados ou sem vínculos no formalismo de primeira-ordem FJ depende do comportamento singular da matriz simplética duas-forma. Este algoritmo é executado em três situações diferentes, devido a esse comportamento. Primeiramente, se a matriz simplética duas-forma é não singular, poderia ser invertida para fornecer os parentêses generalizados, que correspondem os parentêses de Dirac. Segundo, se a matriz simplética duas-forma é singular pode haver algum modo-zero não-trivial, que geram os vínculos do sistema, no contexto do método de quantização simplética. Particularmente, neste caso, os vínculos são adicionados a parte canônica através da introdução de alguns multiplicadores de Lagrange. Então, esses vínculos são considerados como componentes canônicos conjugados uma-forma, enquanto multiplicadores de Lagrange são considerados como variáveis de simpléticas. Com essa nova Lagrangiana de primeira-ordem, normalmente pode encontrar a matriz simplética duas-forma não-singular depois de um número finito de iterações e obter os parênteses generalizados das variáveis simpléticas, que coincidem com as do forma-lismo de Dirac. Finalmente, mesmo que a matriz duas-forma seja singular, existe uma situação para os quais os os modos-zeros originais não dão quaisquer vínculos sobre o variáveis dinâmicas na primeira etapa de iteração. Portanto, o setor canônico ori-ginal na Lagrangiana de primeira-ordem é inalterado, devido à ausência

dos vínculos adicionais. Então, podemos dizer que o sistema tem uma simetria de calibre com as regras de transformação de campo levados por estes modos-zeros.

A representação funcional Schrödinger tem recentemente sido utilizada sistematicamente a fim de quantizar diferentes teorias de campos. Muitos teóricos, bem como algumas previsões físicas foram derivadas, por diferentes teorias, dos funcionais de onda obtidos até agora. Um exemplo de uma importante característica teórica das teorias de calibre estabelecida no contexto da representação funcional Schrödinger, sem qualquer aproximação “instanton”, é o assim chamado ângulo de vácuo [38].

Neste capítulo apresentamos um estudo para o modelo de Heisenberg bidimensional (2D) isotrópico de um ponto de vista teórico. Mais precisamente, discutiremos este como um sistema vinculado. Além disso, faremos uso de um formalismo canônico geral de imersão com base no formalismo simplético [12, 13], que mergulha um sistema de segunda classe com invariância de calibre. O hamiltoniano de primeira-classe leva à mesma teoria clássica que a original. Então, vamos obter a equação funcional de *Schrödinger* usando o formalismo de Dirac de quantização de primeira-classe[1].

## 5.2 Uma versão invariante de calibre para o Modelo de Heisenberg através do FSI

As propriedades magnéticas de materiais com momentos magnéticos localizados devem-se principalmente a interação de troca, cuja a densidade Lagrangiana é descrita por  $S_a$  operador de spin no sítio  $a$ . Neste trabalho, consideremos os spins das partículas magnéticas como vetores clássicos com suas três componentes conhecidas e a interação entre quaisquer sítios vizinhos da rede cristalina como a mesma, ou seja,  $J$  é uma constante. Primeiramente, tomemos a densidade Lagrangiana 2D isotrópica,

$$L = \frac{J}{2} \partial_\mu S^a \partial^\mu S^a$$

$$= \frac{J}{2} [(\partial_0 S^a)^2 - (\partial_i S^a)^2] \quad (5.1)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $a$  é um índice relacionado com o grupo de simetria  $O(3)$  e a métrica tem assinatura  $(+, -)$ . Ele representa no limite contínuo o modelo sigma não-linear  $O(3)$ .

A fim de aplicar o método símpletico, calcula-se os momenta conjugados ao campo  $S^a$ :

$$\pi_i(\vec{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{S}^a} = J \dot{S}^a. \quad (5.2)$$

Além disso, imponhamos o vínculo não linear  $S_a^2 = 1$ , de forma que reescrevamos a Lagrangiana original de segunda-ordem, dada por (5.1),

$$L = \frac{1}{2J} \pi^a \pi_a - \frac{J}{2} \partial_\mu S^a \partial^\mu S_a - \frac{1}{2} \lambda (S^a S_a - 1), \quad (5.3)$$

ou, ainda

$$L = \frac{1}{J} \pi^a \pi_a - \frac{1}{2J} \pi^a \pi_a - \frac{J}{2} \partial_i S^a \partial^i S_a - \frac{1}{2} \lambda (S^a S_a - 1). \quad (5.4)$$

Finalmente, reduz a uma formulação de primeira-ordem,

$$L^{(0)} = \pi^a \dot{S}_a - \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{J}{2} (\partial_a S_a)^2 - \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1), \quad (5.5)$$

ou seja,

$$L^{(0)} = \pi^a \dot{S}_a - V^{(0)}, \quad (5.6)$$

com

$$V^{(0)} = \frac{1}{2J} \pi_a^2 - \frac{J}{2} (\partial_i S_a)^2 + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1), \quad (5.7)$$

onde o penúltimo termo diz respeito as derivadas parciais espaciais.

As coordenadas simpléticas são  $\xi_\alpha^{(0)} = (S_a, \pi_a, \lambda)$  com os respectivos momentos canônicos de primeira-forma,

$$\begin{aligned}
A_{S_a}^{(0)} &= \pi^a, \\
A_{\pi_a}^{(0)} &= 0, \\
A_{\rho}^{(0)} &= \frac{1}{2}(S_a^2 - 1).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

e a matriz simplética de iteração-zero é:

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} & 0 \\ \delta^{ba} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.9}$$

que é uma matriz singular e tem um modo-zero dado por:

$$\nu^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Se contrairmos esse modo-zero com o gradiente do potencial simplético, gera o vínculo:

$$\int d^3y \nu^{(0)}(\vec{x}) \frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta \xi^{(0)}(\vec{x})} \equiv \Omega^{(1)}(\vec{x}). \tag{5.11}$$

Embora  $\xi^{(0)}(\vec{x})$  represente qualquer um dos campos  $(S_a, \pi_a, \lambda)$ , façamos  $\xi^{(0)}(\vec{x}) = \lambda$ :

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(S_a^2 - 1). \tag{5.12}$$

De acordo com o Formalismo Simplético, esse vínculo deve se introduzido na parte canônica da Lagrangiana de primeira-ordem (5.6) através do multiplicador de Lagrange  $\rho$  e então, obtém a Lagrangiana de primeira-iteração como:

$$L^{(1)} = \pi^i \dot{S}_a + \Omega_1 \dot{\rho} - V^{(1)}, \tag{5.13}$$

com

$$V^{(1)} = V^0 |_{\Omega_1=0} = \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{J}{2} (\partial_a S_a)^2. \quad (5.14)$$

As coordenadas simpléticas são  $\xi_\alpha^{(1)} = (S_a, \pi_a, \rho)$  com os respectivos momentos canônicos de primeira-forma,

$$\begin{aligned} A_{S_a}^{(1)} &= \pi_a, \\ A_{\pi_a}^{(1)} &= 0, \\ A_\rho^{(1)} &= \frac{1}{2} (S_a^2 - 1). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Já o tensor simplético correspondente  $f^{(1)}$  é dado por:

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} & f_{S_i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ \delta^{ba} & 0 & 0 \\ f_{\gamma(\vec{x})S_i(\vec{y})} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.16)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{S_a(\vec{x})\gamma(\vec{y})}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\delta [S^k(\vec{y})S_k(\vec{y}) - 1]}{\delta S_a(\vec{x})} - \frac{\delta \pi^a(\vec{x})}{\delta \gamma(\vec{y})} \\ &= \frac{1}{2} \eta^{kl} \delta_{la} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) S_a(\vec{x}) + \frac{1}{2} S^k(\vec{y}) \delta_{ka} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \eta^{ki} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) S_i(\vec{x}) \\ &= S^a(\vec{x}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$f_{\gamma(\vec{x})S_a(\vec{y})}^{(1)} = - \left[ f_{S_a(\vec{x})\gamma(\vec{y})}^{(1)} \right]^T = -S^b(\vec{x}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}); \quad (5.18)$$

com  $a, b, k=1,2,3$ . Portanto,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} & S^a \\ \delta^{ba} & 0 & 0 \\ -S^b & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.19)$$

que é singular, cujo modo-zero pode ser obtido:

$$\nu^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ S_a \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Então, para  $\xi^{(1)}(\vec{x}) = \pi_a$  na (5.11), resulta um novo vínculo:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \int d^2y S_k \left[ \frac{\delta}{\delta \pi_a} \left( \frac{1}{2J} \pi^k \pi_k + \frac{1}{2} J (\partial_\mu S_k)^2 \right) \right] \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \frac{1}{J} S_k \eta^{ki} \pi^i \\ &= \frac{1}{J} S_k \pi^k. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Retornando o vínculo  $\Omega_2$  na Lagrangiana de primeira-iteração (5.13) por meio de um multiplicador de Lagrange  $\zeta$ , a Lagrangiana de segunda-iteração é determinada como:

$$L^{(2)} = \pi^i \dot{S}_a + \frac{1}{2} (S_a^2 - 1) \dot{\rho} + \frac{1}{J} (S_a \pi^a) \dot{\zeta} - V^{(2)}, \quad (5.22)$$

com

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= V^{(1)} |_{\Omega_2=0} \\ &= \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{1}{2} J (\partial_\mu S_a)^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

As novas coordenadas simpléticas são  $\xi_\alpha^{(2)} = (S_a, \pi_a, \rho, \zeta)$  e os momentos canônicos de primeira-forma são

$$\begin{aligned}
A_{S_a}^{(2)} &= \pi_a, \\
A_{\pi_a}^{(2)} &= 0, \\
A_{\rho}^{(2)} &= \frac{1}{2} S_a^2 - 1, \\
A_{\zeta}^{(2)} &= \frac{1}{J} S_a \pi^a.
\end{aligned}$$

A matriz correspondente  $f^{(2)}$  é

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} & S^a & \frac{1}{J} \pi^i \\ \delta^{ba} & 0 & 0 & \frac{1}{J} S^a \\ -S^b & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} \pi^j & -\frac{1}{J} S^b & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.24)$$

Esta matriz é não-singular, as entradas da sua inversa<sup>1</sup>, fornece os parênteses de Dirac, dado por:

$$\begin{aligned}
\{S_a(\vec{x}), S_b(\vec{y})\}^* &= \{\rho(\vec{x}), \rho(\vec{y})\}^* = \{\zeta(\vec{x}), \zeta(\vec{y})\}^* = 0, \\
\{S_a(\vec{x}), \pi_b(\vec{y})\}^* &= (\delta_{ij} - \frac{S_a S_b}{S^2}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{S_a(\vec{x}), \rho(\vec{y})\}^* &= -\frac{S_a}{S^2} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{\pi_a(\vec{x}), \rho(\vec{y})\}^* &= \frac{\pi_a}{S^2} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{\pi_a(\vec{x}), \zeta(\vec{y})\}^* &= -\frac{J}{S^2} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}).
\end{aligned} \quad (5.25)$$

Contudo, este modelo não é uma teoria invariante de calibre. Prosseguiremos com este propósito, de revelar a simetria escondida presente intimamente ao Modelo de Heisemberg Isotrópico Bidimensional. Desta forma, o espaço de fase original será estendido com a introdução dos campos de WZ, seguindo o Formalismo Simplítico

---

<sup>1</sup>Veja o apêndice.

de Imersão. Esse processo é baseado na inclusão de de duas funções arbitrárias,  $\Psi(S_a, \pi_a, \eta)$  e  $G(S_a, \pi_a, \eta)$ , na Lagrangiana de primeira-ordem da seguinte maneira:

$$\tilde{L}^{(0)} = \pi^a \dot{S}_a + \Psi \dot{\eta} - \tilde{V}^{(0)}, \quad (5.26)$$

onde o potencial simplético é

$$\tilde{V}^{(0)} = \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1) + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 + G(S_a, \pi_a, \eta), \quad (5.27)$$

e  $G(S_a, \pi_a, \eta)$  é uma função expressa como:

$$G(S_a, \pi_a, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}, \quad G^{(n)} \propto \eta^n. \quad (5.28)$$

A função arbitrária satisfaz a seguinte condição de contorno:

$$G(S_a, \pi_a, \eta = 0) = 0 \quad (5.29)$$

Os campos simpléticos foram estendidas,  $\tilde{\xi}_\alpha^{(0)} = (S_a, \pi_a, \lambda, \eta)$  e os momentos canônicos de primeira-forma são:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{S_a}^{(0)} &= \pi_a, \\ \tilde{A}_{\pi_a}^{(0)} &= 0, \\ \tilde{A}_\lambda^{(0)} &= 0, \\ \tilde{A}_\eta^{(0)} &= \Psi. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Como estabelecido por esse formalismo, a matriz simplética  $\tilde{f}^{(0)}$  torna-se:

$$\tilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} & 0 & \frac{\partial \Psi_y}{\partial S_a^x} \\ \eta_{ji} & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_y}{\partial \pi_a^x} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Psi_y}{\partial \lambda^x} \\ -\frac{\partial \Psi_x}{\partial S_b^y} & -\frac{\partial \Psi_x}{\partial \pi_b^y} & -\frac{\partial \Psi_x}{\partial \lambda^y} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.31)$$

deve ser degenerada, o que nos permite determinar a relação de dependência da função arbitrária  $\Psi$ , saber  $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^x} = 0$ , pois  $\Psi \equiv \Psi(S_a, \pi_a, \eta)$ . Essa matriz tem um modo-zero, identificado com o gerador da simetria de calibre, que deve satisfazer a seguinte relação:

$$\int d^3 y \nu_\alpha^{(0)}(\vec{x}) f_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{y}) = 0, \quad (5.32)$$

possibilitando o cálculo de  $\Psi$ .

Vamos considerar o gerador de simetria dado pelo seguinte modo-zero,

$$\nu^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Desde que esse modo-zero e a matriz simplética (5.31) satisfaça a relação (5.32), um conjunto de equações diferenciais são obtidas:

$$\int d^2 x \left[ S_a \delta^{ab} - \frac{\delta \Psi(\vec{x})}{\delta S_b(\vec{y})} \right] = 0, \quad (5.34)$$

$$\int d^2 x \left[ \frac{\delta \Psi(\vec{x})}{\delta S_b(\vec{y})} \right] = 0, \quad (5.35)$$

$$\int d^2 x \left[ \frac{\delta \Psi(\vec{x})}{\delta \pi_b(\vec{y})} \right] = 0, \quad (5.36)$$

$$- \int d^2 x \left[ \frac{\delta \Psi(\vec{x})}{\delta \lambda(\vec{y})} \right] = 0, \quad (5.37)$$

$$\int d^2 x \left[ S_a \frac{\delta \Psi(\vec{y})}{\delta \pi_a(\vec{x})} \right] = 0. \quad (5.38)$$

De acordo com a equação (5.34), determinamos  $\Psi$  como:

$$\Psi = \frac{1}{2}S_a^2. \quad (5.39)$$

Começaremos, passo final de Formalismo Simplético de Imersão, impondo que a contração do modo-zero, equação (5.33), como o gradiente do potencial simplético gera um resultado identicamente nulo, ou seja,

$$\int d^3y \tilde{\nu}^{(0)}(\vec{x}) \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \tilde{\xi}^{(0)}(\vec{x})} = 0. \quad (5.40)$$

Desta condição, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$\int d^2y \left[ S_a \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \pi_a(\vec{x})} + 1 \cdot \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] = 0. \quad (5.41)$$

onde

$$\int d^2y \left[ S_a \left( \frac{\pi^a}{J} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta G^{(n)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] = 0. \quad (5.42)$$

$$\frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} = -\frac{1}{J} S_a \pi^a \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.43)$$

Portanto,

$$G^{(1)}(S_a, \pi_a, \lambda, \eta) = -\frac{1}{J} S_a \pi^a \eta. \quad (5.44)$$

Levando este resultado no potencial simplético, equação (5.27), obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(1)} &= V^{(0)} + G^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} G^{(n)}, \\ \tilde{V}^{(1)} &= \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1) - \frac{1}{J} S_a \pi^a \eta + \sum_{n=2}^{\infty} G^{(n)}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Contraindo o novo potencial simplético  $\tilde{V}^{(1)}$  com o modo-zero, equação (5.40), a fim de encontrarmos o termo de correção quadrático, temos:

$$\int d^2y \left[ S_a \frac{\delta \tilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \pi_a(\vec{x})} + S_a \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta \pi_a(\vec{x})} + 1 \cdot \frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} + 1 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\delta G^{(n)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] = 0. \quad (5.46)$$

$$S_a \left( -\frac{1}{J} S^a \eta \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \right) + \frac{\delta G^{(2)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} = 0, \quad (5.47)$$

e, finalmente, o termo de correção de segunda-ordem é:

$$G^{(2)} = \frac{1}{2J} S_a^2 \eta^2. \quad (5.48)$$

Percebemos que esse termo de correção de segunda-ordem tem dependência somente nos campos WZ, portanto os demais termos de correção  $G^{(n)}$  para  $n \geq 3$  são nulos. Consequentemente, o potencial simplético, equação (5.45), torna-se:

$$\tilde{V}^{(1)} = \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1) - \frac{1}{J} S_a \pi^a \eta + \frac{1}{2J} S_a^2 \eta^2. \quad (5.49)$$

Portanto, a densidade Lagrangiana de calibre de primeira-ordem, equação (5.26), pode ser escrita sob a forma:

$$\tilde{L}^{(0)} = \pi^a \dot{S}_a + \frac{1}{2} S_a^2 \dot{\eta} - \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 - \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1) + \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{1}{J} S_a \pi^a \eta - \frac{1}{2J} S_a^2 \eta^2. \quad (5.50)$$

Neste momento, estamos interessados em reaver a Lagrangiana invariante de segunda-ordem nessa de primeira-ordem representada pela Eq. (5.50). Para isso, o momento canônico deve ser eliminado da Lagrangiana (5.50). Com a equação de movimento para  $\pi_a$ , o momento canônico pode ser

$$\pi_a = J \dot{S}_a + S_a \eta. \quad (5.51)$$

Assim, encontramos a Lagrangiana de segunda-ordem:

$$\tilde{L}^{(0)} = \frac{J}{2} \dot{S}_a^2 - \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 - (\dot{S}_a S_a) \eta - \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1). \quad (5.52)$$

A partir da seguinte relação,

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(0)} = \pi_a \dot{S}_a - \tilde{L}^{(0)} \quad (5.53)$$

obtemos a Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^{(0)} &= \pi_a \dot{S}_a - \frac{J}{2} \dot{S}_a^2 + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 + (\dot{S}_a S_a) \eta + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1), \\ &= \frac{1}{J} \pi_a^2 - \frac{1}{2J} \pi_a S^a \eta - \frac{J}{2} \left( \frac{1}{J^2} \pi_a^2 - \frac{1}{J^2} \pi_a S_a \eta - \frac{1}{J^2} S_a \eta \pi_a + \frac{1}{J^2} S^a \eta S_a \eta \right) + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 + \\ &+ \frac{1}{J} \pi^a S_a \eta + \frac{1}{J} S^a \eta S_a \eta + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1), \\ &= \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{1}{J} \pi^a S_a \eta + \frac{1}{2J} S_a^2 \eta^2 + \frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1) + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Por fim, vamos usar o método de Dirac para obter os vínculos do modelo de Heisenberg isotrópico invariante de calibre descrito por  $\tilde{L}$  e  $\tilde{\mathcal{H}}$ , dado por:

$$\phi_1 = \pi_\lambda \quad (5.55)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \{\phi_1, \tilde{\mathcal{H}}\} \approx 0, \\ &= \{\pi_\lambda, \tilde{\mathcal{H}}\}, \\ &= \left( \frac{\partial \pi_\lambda}{\partial \lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \pi_\lambda} - \frac{\partial \pi_\lambda}{\partial \pi_\lambda} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \lambda (S_a^2 - 1) = \phi_2. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Enquanto,

$$\varphi_1 = \pi_\eta \quad (5.57)$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \{\varphi_1, \tilde{\mathcal{H}}\} \approx 0, \\
&= \frac{1}{J}(S_a \pi^a) - \frac{1}{J}(S_a^2 \eta) = \varphi_2
\end{aligned} \tag{5.58}$$

que são vínculos secundários, uma vez que eles foram obtidos a partir da condição de consistência dos vínculos primários  $\phi_1$  e  $\varphi_1$ , respectivamente.

Porém, a obtenção das relações de comutação entre os operadores canônicos via parênteses de Dirac somente será possível se os vínculos forem de segunda classe. Assim, teremos os seguintes vínculos:

i) Primários:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \pi_\lambda, \\
\chi_2 &= -\frac{1}{2}(S_a^2 - 1) = \phi_2.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Logo,

$$\{\chi_1, \chi_2\} = 0. \tag{5.60}$$

ii) Secundários:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \pi_\eta, \\
\zeta_2 &= \frac{1}{J}(S_a \pi^a) - \frac{1}{J}(S_a^2 \eta).
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\{\zeta_1, \zeta_2\} &= \{\pi_\eta, \frac{1}{J}(S_a \pi^a) - \frac{1}{J}(S_a^2 \eta)\}, \\
&= \frac{1}{J} S_a^2, \\
&= \frac{1}{J}, \\
&\neq 0.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

onde usamos o vínculo  $\phi_2 = (S_a^2 - 1) \approx 0$ . Como a equação (5.55) é não nula, os vínculos obtidos são de segunda classe, o que nos possibilita utilizarmos os parênteses de Dirac, tendo em vista tal definição.

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_r\} C_{rs}^{-1} \{\phi_s, B\}, \quad (5.63)$$

procuramos obter a matriz  $C_{rs}$ , que é dada por:

$$C_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\}, \quad (5.64)$$

com  $r, s = 1, 2$ . Por (5.55) temos:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ -\frac{1}{J} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.65)$$

cuja matriz inversa será

$$\mathbb{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.66)$$

Então,

$$\begin{aligned} \{S_a, S_b\}_D &= 0, \\ \{S_a, \pi_b\}_D &= \delta_{ba} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\pi_a, \pi_b\}_D &= 0. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Assim, a Hamiltoniana invariante de calibre, (5.54), é reescrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2J} \pi_a^2 + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 - \frac{1}{2J} \frac{(S_a \pi^a)^2}{S^a S_a} + \frac{\lambda}{2} (S_a^2 - 1) \\ &= \frac{1}{2J} \pi^a M_{ab} \pi_b + \frac{J}{2} (\partial_\mu S_a)^2 + \frac{\lambda}{2} (S_a^2 - 1), \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde a métrica do espaço de fase  $M_{ab}$ , dado por

$$M_{ab} = \delta_{ab} - \frac{S^a S_b}{S_k^2}, \quad (5.69)$$

que é uma matriz singular. O vínculo de primeira-classe torna

$$\chi_1 = \pi_\lambda, \chi_2 = -\frac{1}{2}(S_a^2 - 1). \quad (5.70)$$

Note que o vínculo  $\chi_2$ , é originalmente de segunda-classe, torna o gerador de simetria de calibre, satisfazendo a propriedade de primeira-classe

$$\{\chi_2, \tilde{H}\} = 0. \quad (5.71)$$

Devido a esse resultado, as transformações infinitesimais de calibre são:

$$\begin{aligned} \delta S_a &= \varepsilon \{S_a, \chi_2\} = 0, \\ \delta \pi_a &= \varepsilon \{\pi_a, \chi_2\} = \varepsilon S_a, \\ \delta \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde  $\varepsilon$  é o parâmetro infinitesimal. É fácil verificar que a Hamiltoniana (5.68) é invariante dentro desta transformação, porque  $S_a$  são autovetores da métrica do espaço de fase ( $M_{ab}$ ) com autovalores nulos.

### 5.3 Equivalência das formulações de segunda classe e invariante de calibre do MH via representação funcional de Schrödinger

Começamos impondo fortemente o vínculo  $\Omega_1$ ,  $\Omega_1 = S^a S_a - 1$ . Em vista disso, escrevemos um dos campos,  $S^3$ , em termos dos campos  $S^1$  e  $S^2$ ,

$$S^3 = \sqrt{1 - S^i S^i}, \quad (5.73)$$

onde  $i = 1, 2$ . Da equação (5.73), obtemos

$$\partial_i S^3 = -\frac{S^i \partial_i S^i}{\sqrt{1 - S^i S^i}}. \quad (5.74)$$

Introduzindo as equações (5.73) e (5.74) na equação (5.1), temos o modelo descrito em termos dos campos  $S^1$  e  $S^2$

$$L = \frac{J}{2} g_{ij} \partial_i S^i \partial^\mu S^j, \quad (5.75)$$

onde

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{S_i S_j}{1 - S^i S^i}. \quad (5.76)$$

Agora, vamos construir a Hamiltoniana do modelo para posteriormente quantizá-lo. Para isso, calculemos os momenta

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial(\dot{S}^i)}. \quad (5.77)$$

Em seguida, temos

$$\pi_i = J g_{ij} \dot{S}^j. \quad (5.78)$$

Para escrever o modelo na sua forma Hamiltoniana, devemos saber como inverter a equação (5.78), de modo que podemos escrever as suas velocidades em termos de momentos. O cálculo da inversa de  $g_{ij}$  nos dá

$$\tilde{g}^{ij} = \delta^{ij} - S^i S^j. \quad (5.79)$$

Portanto,

$$\dot{S}^i = \frac{1}{J} \tilde{g}^{ij} \pi_j. \quad (5.80)$$

A Hamiltoniana do modelo, cuja expressão geral é

$$H = \int d^2x (\pi_i \dot{S}^i - L), \quad (5.81)$$

toma a forma particular,

$$H = \int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \pi_i \pi_j + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \right), \quad (5.82)$$

onde  $\partial_k$  significa derivada parcial em relação as coordenadas espaciais. Note que pela definição os  $(S^i, \pi_j)$  formam pares canonicamente conjugados que tem os parentêses de Poisson usuais,

$$\{S^i(x), \pi_j(y)\} = \delta_{ij} \delta^2(x - y). \quad (5.83)$$

Agora, escreveremos a equação funcional de Schrödinger para o modelo de Heisenberg isotrópico bidimensional. Portanto, vamos introduzir a onda-funcional  $\Psi[S^i, t]$  e consideremos  $S^i$  e  $\pi_i$  como operadores quânticos. Isto significa que na representação de campos os momenta são substituídos pelas seguintes derivadas funcionais

$$\pi(x) \longrightarrow -i \frac{\delta}{\delta S^i(x)}, \quad (5.84)$$

fazendo  $\hbar = 1$ .

A onda-funcional  $\Psi$  satisfaz a equação funcional de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi[S^i, t] = \hat{H}[S^i, t] \Psi[S^i, t], \quad (5.85)$$

onde  $\hat{H}$  é a versão do operador hamiltoniano  $H$ , equação (5.82).

É importante observar que desde  $\tilde{g}^{ij}$  dependa dos campos, o termo cinético na Hamiltoniana  $H$ , equação (5.82), desenvolverá ambiguidades no fator de ordenação sobre quantização. Para resolver este problema, vamos escolher um determinado fator de ordenação. Iremos escrever todas as funções de campos à esquerda dos operadores momentos. Justificamos esta escolha ao notar vínculos de primeira classe na versão do modelo, a ordenação é consistente com a versão operacional da álgebra clássica

dos vínculos e também a Hamiltoniana de primeira classe, que é obtido a seguir, leva à mesma equação funcional Schrödinger.

A partir da equação (5.82) e a escolha particular do fator mencionada acima, a equação funcional de Schrödinger para o modelo de Heisenberg isotrópico dada por

$$\int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta S^i \delta S^j} + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \Psi \right) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi. \quad (5.86)$$

Uma vez que a Hamiltoniana dada pela equação (5.82) não depende explicitamente do tempo, pode-se separar a dependência do tempo da onda-funcional e escrever

$$\Psi[S^i, t] = e^{-Et} \Psi[S^i]. \quad (5.87)$$

Da equação (5.86),  $\Psi[S^i]$  satisfaz a equação funcional de Schrödinger independente do tempo,

$$\int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta S^i \delta S^j} + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \Psi \right) = E \Psi. \quad (5.88)$$

É evidente que a partir de equação (5.88), as energias  $E$  serão determinadas para o modelo atual, quando resolver esta equação.

Agora, vamos considerar o modelo de Heisenberg isotrópico em  $2D$ , como uma teoria de campo de vínculos de primeira classe. E, também, escrevamos a equação funcional de Schrödinger a respeito deste modelo. Para isso, usaremos a prescrição de Dirac para quantizar canonicamente sistemas vinculados de primeira classe de [1]. Como veremos abaixo, a equação funcional de Schrödinger será mesma dada por (5.86). Vamos escrever a Hamiltoniana de primeira classe do modelo em uma forma conveniente como

$$H = \int d^2x \left[ \frac{1}{2J} \bar{g}^{ab} \pi_a \pi_b + \frac{J}{2} \partial_a S^a \partial_a S^a - \lambda(S_a^2 - 1) + v_\lambda \pi_\lambda \right], \quad (5.89)$$

onde

$$\bar{g}^{ab} = \delta^{ab} + \frac{S_a S_b}{1 - S^a S^a}. \quad (5.90)$$

E note que  $\pi_\lambda = 0$  é um vínculo de primeira classe e  $v_\lambda$  é um multiplicador de Lagrange. É importante observar aqui que a formulação através da equação (5.89) é classicamente equivalente ao inicial dada pela equação (5.82). Isto significa que, no calibre apropriado, as equações de movimento para os campos físicos em (5.89) são as mesmas que a (5.82) [42].

O método descrito acima pelo funcional de Schrödinger terá uma única modificação, a fim de obedecer a prescrição de Dirac para tratar sistemas vinculados de primeira classe. A onda-funcional deverá ser aniquilada pela versão operacional dos vínculos além de satisfazer a equação funcional de Schrödinger [43, 44].

Diante do vínculo  $\chi_2$ , equação (5.70), notemos que sua versão operacional aniquila a onda-funcional não resulta em qualquer condição sobre  $\Psi$ . Em vista disso, vamos fazer a transformação canônica [42],

$$S^3 \longrightarrow -\pi_3, \quad \pi_3 \longrightarrow S^3. \quad (5.91)$$

Esta transformação muda  $\chi_2$  e  $H$  para

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_2 &= \pi_3 \pi_3 + S^i S^i - 1 = 0, \\ \tilde{H} &= \int \left\{ d^2x \left\{ \frac{1}{2J} \left[ \pi_i \pi_i - \left( \frac{S^i S^j}{\pi_3 \pi_3 + S^k S^k} \right) \pi_i \pi_j \right] + \frac{J}{2} [\partial_x S^i \partial_x S^i + \partial_x \pi_3 \partial_x \pi_3] \right. \right. \\ &+ \frac{1}{2J} \left[ S^3 S^3 + 2 \left( \frac{S^i S^3}{\pi_3 \pi_3 + S^k S^k} \right) \pi_i \pi_3 - \left( \frac{S^3 S^3}{\pi_3 \pi_3 + S^k S^k} \right) \pi_3 \pi_3 \right] - \\ &\left. \left. - \lambda (\pi_3 \pi_3 + S^i S^i) + v_\lambda \pi_\lambda \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Agora, podemos escrever as equações para a onda funcional  $\Psi[S^3, S^i, \lambda]$ . Os dois primeiros serão obtidos a partir da versão operacional dos vínculos  $\pi_\lambda = 0$ , (5.70), e  $\tilde{\chi}_2$ , (5.92), que aniquila  $\Psi$ . Finalmente, a equação funcional de Schrödinger será

obtida da verso operacional da Hamiltoniana ( $\hat{H}$ ), (5.92). Assim, nas representações de campos, temos

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\lambda} = 0, \quad (5.93)$$

$$-\frac{\delta^2\Psi}{\delta(S^3)^2} + (S^i S^i - 1)\Psi = 0, \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = & \int \left\{ d^2x \left[ \frac{1}{2J} \left( -\frac{\delta^2\Psi}{\delta(S^i)^2} + (S^i S^j) \frac{\delta^2\Psi}{\delta S^i \delta S^j} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{J}{2} (\partial_x S^i \partial_x S^i \Psi - \partial_x \frac{\delta}{\delta S^3} \partial_x \frac{\delta}{\delta S^3} \Psi) + \\ & + \frac{1}{2J} \left( S^3 S^3 \Psi - 2(S^i S^3) \frac{\delta^2\Psi}{\delta S^i \delta S^3} + \right. \\ & \left. \left. + (S^3 S^3) \frac{\delta^2\Psi}{\delta(S^3)^2} \right) \right] \left. \right\}, \quad (5.95) \end{aligned}$$

onde temos usado explicitamente equação (5.94), a fim de substituir o resultado da operação do presente denominador da  $\hat{H}$  em  $\Psi$ . Note que o fator de ordenação particular escolhido no conjunto de equações em (5.93) - (5.95) preserva a álgebra clássica dos vínculos e involuo dos vínculos na Hamiltoniana.

Com as equações (5.93) and (5.94), temos

$$\Psi[S^i, S^3, \lambda, t] = \Psi[S^i, S^3, t], \quad (5.96)$$

$$\Psi[S^i, S^3, t] = \exp\left[\int dy S^3 \sqrt{S^i S^i - 1}\right] \Psi_{phys}[S^i, t]. \quad (5.97)$$

Introduzindo  $\Psi$ , equação(5.97), a equação funcional de Schrödinger dada por (5.95), obtemos

$$\int d^2x \left( \frac{1}{2J} \tilde{g}^{ij} \frac{\delta^2\Psi_{phys}}{\delta S^i \delta S^j} + \frac{J}{2} g_{ij} \partial_k S^i \partial_k S^j \Psi_{phys} \right) = E \Psi_{phys}, \quad (5.98)$$

onde  $g_{ij}$  e  $\tilde{g}^{ij}$  são, respectivamente, pelas equações (5.76) e (5.79) e a dependência temporal de  $\Psi_{phys}$  é dada pela (5.87). É importante mencionar que poucos termos proporcionais à função delta de Dirac do ponto zero ( $\delta(0)$ ) aparece na derivação

da equação (5.98). Pelas técnicas habituais de regularização, podemos remover eles contribuem com uma quantidade infinita de energia para o sistema.

Comparando a equação (5.98) com a (5.88) observamos que são as mesmas.

# Capítulo 6

## Conclusão e Perspectivas

Recentemente, o formalismo simplético tem sido usado de um modo sistemático com diferentes propostas: revelar simetrias [39]; construir teorias de calibre (dualidade) [14, 32]; obter teorias de calibre não-comutativas [40]; resolver o problema de obstrução de uma formulação Lagrangiana para sistemas rotacionais [41]; e muitas outras que podem ser encontradas na literatura.

Neste trabalho foi abordado a obtenção de Teorias Duais [27]. Em resumo, a Dualidade pode ser entendida com duas formulações matemáticas equivalentes para descrever um sistema. A existência de duas formas distintas de descrever um mesmo sistema físico pode sugerir um erro. De alguma forma, algum aspecto ou princípio foge, resultando em uma aparente ambiguidade na descrição do sistema. De fato, já experimentou-se sensação semelhante com a Mecânica Quântica, em que descrições aparentemente distintas, onda/partícula, se completam para uma melhor visão sobre o fenômeno. A compreensão das relações entre as diferentes formas de descrever um sistema tem-se mostrado muito útil em diversas escalas de energia, desde aplicações em matéria condensada, até explicações da teoria de supercordas.

A Dualidade aqui mencionada foi obtida via Formalismo Simplético de Imersão (FSI), desenvolvido por C. Neves e W. Oliveira em 2001 [12]. Esta técnica consiste na imersão de uma teoria de segunda classe em uma dual com invariância de calibre.

Baseia-se no FS e na extensão do espaço de configuração através das variáveis WZ [10]. Neste contexto, obteve-se uma descrição da Lagrangiana invariante de calibre dual para a eletrodinâmica de Maxwell-Proca em  $(3+1)D$ , a de Maxwell-Podolsky, e para o Modelo de Heisenberg Isotrópico bidimensional . A partir de uma escolha simples e direta dos geradores das transformações de calibre, o modo-zero, pôde-se confrontar os resultados obtidos com aqueles já conhecidos na literatura, usando outras técnicas.

A teoria de Maxwell-Podolsky tem um papel fundamental na discussão a respeito da compatibilidade do monopólo magnético e “fóton”massivo. O que sugeriu a extensão dessa abordagem, sob análise espectral por meio da matriz residual de cada pólo do propagador. A matriz residual dá informações sobre o grau de liberdade da polarização, onde os estados físicos estão associados com autovalores positivos da matriz residual em cada pólo [36] sobre o termo positivo Maxwell (fantasma). A existência de autovalores negativos mostra que nestas situações os estados não físicos, que correspondem aos estados negativos da norma de partículas (fantasmas), são introduzidos.

O Modelo de Heisenberg Isotrópico bidimensional foi tratado como sistema de segunda classe, que possibilitou o mergulho deste em uma dual com invariância de calibre. Os parênteses de Dirac da teoria foram obtidos de duas maneiras diferentes: via o formalismo de Dirac usual e pelo formalismo simplético. A partir de uma escolha particular do fator de ordenação, escreveu-se as equações funcionais de Schrödinger para o Hamiltoniano de primeira-classe e para o original, e mostrou que elas são idênticas. Comprovando a consistência do FSI, o que leva a mesma teoria, ou seja, as mesmas equações de movimento para os campos físicos.

Para finalizar, é necessário mencionar algumas questões que nos servirão como objetos de estudo futuro: a obtenção da versão invariante de calibre para o modelo de Heisenberg anisotrópico bidimensional, bem como a sua equação funcional de Schrödinger e a aplicação do FSI em teorias supersimétricas. O que levará provavelmente a uma extensão desse método, pois as variáveis grassmannianas (graus de

liberdade fermiônicos) estarão presentes nas teorias. Espera-se, em consequência, vir comparar o FSI com o chamado Formalismo BFFT [30] (Batalin-Fradkin-Fradkina-Tyutin), cujo o procedimento geral consiste na transformação dos vínculos de segunda classe para os de primeira classe.

# Capítulo 7

## Contribuições Científicas

- Autoria do trabalho *Hidden symmetries in the two-dimensional isotropic Heisenberg Model* submetido e apresentado no XXXV Encontro Nacional de Física da Matéria Condensada em Águas de Lindóia, São Paulo em 2012 e, na VIII Escola Brasileira de Magnetismo em Ouro Preto, Minas Gerais em 2011, projeto de Doutorado submetido à UFJF com a colaboração dos professores-doutores: A.C.R.Mendes, S. A. Leonel, W. Oliveira.

- Autoria do trabalho *Formulação Lagrangiana canônica de sistemas magnéticos bidimensionais* apresentado no XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos em Passa Quatro, MG em 2010.

- Publicação em Revista Científica Internacional e exposição XXX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos em Passa Quatro, MG em 2009, *Duality considerations about the Maxwell-Podolsky theory through the symplectic embedding formalism and spectrum analysis* (2008), projeto de Doutorado submetido à mesma instituição com a colaboração dos professores-doutores: E.M.C.Abreu, A.C.R.Mendes, C.Neves, W.Oliveira, C. Wotzasek.

- Publicação em Revista Científica Internacional, *The Dual Embedding Method in  $D=3$* , Mod. Phys. Lett. A 23, 829 (2008), resultado da Dissertação de Mestrado com a colaboração dos professores-doutores: E.M.C.Abreu, A.C.R.Mendes, C. Neves, W.

Oliveira, F.I.Takakura.

- Autoria do trabalho *Dualidade de Maxwell-Proca-Chern-Simons via Formalismo Simplético de Imersão* apresentado, em sessão oral, no Workshop UFV/UFJF: Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia, realizado no dia 20 de novembro de 2009, em Juiz de Fora.

- Exposição e autora do trabalho publicado *Formalismo Simplético de Imersão e Simetrias com aplicações em teorias não-comutativas, magnetismo e fluido* com auxílio do professor-orientador Wilson Oliveira, no XIV Seminário de Iniciação Científica da Universidade Federal de Juiz de Fora, 2008.

- Autoria do trabalho  *$N=2$  Supersymmetric radiation damping in an external electromagnetic field, noncommutativity and duality* apresentado no XXIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, período 22 a 26 de setembro de 2008, So Loureno, MG.

- Autoria do trabalho *Metrologia do Ensino Médio, Construção de uma base experimental para o Ensino de Física* juntamente com os profs. Cláudio Pires de Andrade e José Maurício, apresentado no XVII Simpósio Nacional de Ensino de Física, período de 29 de Janeiro de 2007 a 2 de fevereiro de 2007, São Luiz, MA.

- Exposição e autora do trabalho publicado *Mecânica Clássica em espaços não-comutativos* sob orientação do professor-doutor Wilson Oliveira, no XII Seminário de Iniciação Científica da Universidade Federal de Juiz de Fora, realizado nos dias 03 a 09 de julho de 2006.

# Apêndice A

## Cálculo da Matriz Inversa do Modelo de MP

Seja a matriz dada em (7.31):

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 \\ g_{ji}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & \partial_i^y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ 0 & 0 & 0 & m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{\gamma(\vec{x})A^j(\vec{y})} & -\partial_j^x \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & -m^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A inversa é obtida através da relação:

$$\int d^3x f_{nk}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{x}') f_{km}^{(1)}(\vec{x}', \vec{y}) = \delta_{nm} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.2})$$

onde  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $m = 1, 2, 3, 4$ .

Para  $n = 1$  e  $m = 1$  (mas variando o índice  $k$ ):

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[ f_{11}^{(1)-1} f_{11}^{(1)} + f_{12}^{(1)-1} f_{21}^{(1)} + f_{13}^{(1)-1} f_{31}^{(1)} + f_{14}^{(1)-1} f_{41}^{(1)} \right] &= \delta_{11} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3x' \left[ f_{12}^{(1)-1} f_{21}^{(1)} + f_{14}^{(1)-1} f_{41}^{(1)} \right] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3x' \left[ f_{12}^{(1)-1} g_{ij} \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) + f_{14}^{(1)-1} \frac{1}{2} p^n \partial_x^m \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) \varepsilon_{nim} \right] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Logo,

$$f_{12}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y})g_{ij} + f_{14}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y})\frac{1}{2}p^n \partial_x^m \varepsilon_{nim} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.4})$$

Agora, para  $n = 1$  e  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[ f_{11}^{(1)-1} f_{12}^{(1)} + f_{12}^{(1)-1} f_{22}^{(1)} + f_{13}^{(1)-1} f_{32}^{(1)} + f_{14}^{(1)-1} f_{42}^{(1)} \right] &= \delta_{12} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3x' \left[ f_{11}^{(1)-1} g_{ij} \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) + f_{14}^{(1)-1} \partial_j^x \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Então,

$$f_{11}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y})g_{ij} + f_{14}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y})\partial_j^x = 0. \quad (\text{A.6})$$

Já, para  $n = 1$  e  $m = 3$ :

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[ f_{11}^{(1)-1} f_{13}^{(1)} + f_{12}^{(1)-1} f_{23}^{(1)} + f_{13}^{(1)-1} f_{33}^{(1)} + f_{14}^{(1)-1} f_{43}^{(1)} \right] &= \delta_{13} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3x' \left[ f_{14}^{(1)-1} m^2 \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Portanto,

$$m^2 f_{14}^{(1)-1}(\vec{x} - \vec{y}) = 0, \quad (\text{A.8})$$

ou

$$f_{14}^{(1)-1}(\vec{x} - \vec{y}) = f_{41}^{(1)-1}(\vec{x} - \vec{y}) = 0, \quad (\text{A.9})$$

Substituindo as equações (A.9) em (A.4) e depois, em (A.6):

$$\begin{aligned} f_{12}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= g^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{21}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= \left[ -f_{12}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) \right]^T = -g^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

e

$$f_{11}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, para  $n = 1$  e  $m = 4$ :

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[ f_{11}^{(1)-1} f_{14}^{(1)} + f_{12}^{(1)-1} f_{24}^{(1)} + f_{13}^{(1)-1} f_{34}^{(1)} + f_{14}^{(1)-1} f_{44}^{(1)} \right] &= \delta_{14} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3x' \left[ g^{ji} \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \partial_i^y \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) + f_{13}^{(1)-1} m^2 \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= \delta_{14} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

tem-se,

$$\begin{aligned} f_{13}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{m^2} \partial_y^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{31}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= \left[ f_{13}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) \right]^T = \frac{1}{m^2} \partial_x^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Analogamente, para  $n = 2$  e  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \int d^3 x' \left[ f_{21}^{(1)-1} f_{11}^{(1)} + f_{22}^{(1)-1} f_{21}^{(1)} + f_{23}^{(1)-1} f_{31}^{(1)} + f_{24}^{(1)-1} f_{41}^{(1)} \right] &= \delta_{21} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3 x' \left[ f_{22}^{(1)-1} (-1) g_{ij} \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{y}) + f_{24}^{(1)-1} \frac{1}{2} p^n \partial_y^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \varepsilon_{nim} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Logo,

$$-f_{22}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) g_{ij} + f_{24}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) \frac{1}{2} p^n \partial_y^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \varepsilon_{nim} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Agora, para  $n = 2$  e  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \int d^3 x' \left[ f_{21}^{(1)-1} f_{12}^{(1)} + f_{22}^{(1)-1} f_{22}^{(1)} + f_{23}^{(1)-1} f_{32}^{(1)} + f_{24}^{(1)-1} f_{42}^{(1)} \right] &= \delta_{22} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^3 x' \left[ (-1) g^{ji} \delta^{(3)}(x - x') (-1) g_{ij} \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) + \right. \\ \left. + f_{24}^{(1)-1} (-1) \partial_j^y \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Então,

$$\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - f_{24}^{(1)-1} \partial_j^y = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.17})$$

ou

$$f_{24}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = f_{42}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Retornando a equação (A.15):

$$f_{22}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Já, para  $n = 2$  e  $m = 3$ :

$$\int d^3 x' \left[ f_{21}^{(1)-1} f_{13}^{(1)} + f_{22}^{(1)-1} f_{23}^{(1)} + f_{23}^{(1)-1} f_{33}^{(1)} + f_{24}^{(1)-1} f_{43}^{(1)} \right] = \delta_{23} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.20})$$

também obtém,

$$f_{24}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = f_{42}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Enquanto, para  $n = 2$  e  $m = 4$ :

$$\begin{aligned}
\int d^3x' \left[ f_{21}^{(1)-1} f_{14}^{(1)} + f_{22}^{(1)-1} f_{24}^{(1)} + f_{23}^{(1)-1} f_{34}^{(1)} + f_{24}^{(1)-1} f_{44}^{(1)} \right] &= \delta_{24} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
\int d^3x' \left[ \delta_j^i \delta^3(x - x') \frac{1}{2} p^n \partial_y^m \delta^3(x' - y) \varepsilon_{nim} + f_{23}^{(1)-1} m^2 \delta^3(x' - y) \right] &= 0, \\
-\delta_j^i \partial_y^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \frac{1}{2} p^n \varepsilon_{nim} + f_{23}^{(1)-1} m^2 &= 0, \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
f_{23}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{2m^2} p^n \varepsilon_{njm} \partial_y^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
f_{32}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\left[ f_{23}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) \right]^T = \frac{1}{2m^2} p^n \varepsilon_{nim} \partial_x^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

Agora, para  $n = 3$  e  $m = 1$ :

$$\begin{aligned}
\int d^3x' \left[ f_{31}^{(1)-1} f_{11}^{(1)} + f_{32}^{(1)-1} f_{21}^{(1)} + f_{33}^{(1)-1} f_{31}^{(1)} + f_{34}^{(1)-1} f_{41}^{(1)} \right] &= \delta_{31} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
\int d^3x' \left[ \frac{1}{2m^2} p^n \partial_y^m \varepsilon_{njm} \delta^{(3)}(x - x') \delta_j^i \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) + \right. \\
\left. + f_{34}^{(1)-1} \frac{1}{2} p^n \partial_y^m \delta^3(\vec{x}' - \vec{y}) \varepsilon_{nmi} \right] &= \delta_{31} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
f_{34}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{m^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
f_{43}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\left[ f_{34}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) \right]^T = \frac{1}{m^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{A.25})
\end{aligned}$$

Em seguida, para os demais de  $n = 3$ , e,  $n = 4$  variando  $m$  de 1 até 4, calculam-se os restantes das entradas da matriz inversa,  $(f^{(1)})^{-1}$ , que são respectivamente:

$$f_{33}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = f_{44}^{(1)-1}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad (\text{A.26})$$

a fim de,

$$(f^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} & -\frac{1}{m^2} \partial_y^j & 0 \\ -g^{ij} & 0 & -\frac{1}{2m^2} \varepsilon^{ijnm} p_n \partial_m^y & 0 \\ \frac{1}{m^2} \partial_x^i & \frac{1}{2m^2} \varepsilon^{ijnm} p_n \partial_m^x & 0 & -\frac{1}{m^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{A.27})$$

# Apêndice B

## Cálculo da Matriz Inversa do Modelo de MH

Seja a matriz dada em (26):

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} & S^a & \frac{1}{J}\pi^a \\ \delta^{ba} & 0 & 0 & \frac{1}{J}S^a \\ -S^b & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J}\pi^b & -\frac{1}{J}S^b & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.1})$$

A inversa é obtida através da relação:

$$\int d^3x f_{nk}^{(2)-1}(\vec{x}, \vec{x}') f_{km}^{(2)}(\vec{x}', \vec{y}) = \delta_{nm} \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.2})$$

onde  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $m = 1, 2, 3, 4$ .

Para  $n = 1$  e  $m = 1$  (mas variando o índice  $k$ ):

$$\begin{aligned} \int d^2x' \left[ f_{11}^{(2)-1} f_{11}^{(2)} + f_{12}^{(2)-1} f_{21}^{(2)} + f_{13}^{(2)-1} f_{31}^{(2)} + f_{14}^{(2)-1} f_{41}^{(2)} \right] &= \delta_{11} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^2x' \left[ f_{12}^{(2)-1} f_{21}^{(2)} + f_{13}^{(2)-1} f_{31}^{(2)} + f_{14}^{(2)-1} f_{41}^{(2)} \right] &= \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^2x' \left[ f_{12}^{(2)-1} \delta^{ba} \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) - f_{13}^{(2)-1} S^b \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) - \frac{1}{J} f_{14}^{(2)-1} \pi^j \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= \delta^2(\vec{x} (\mathbf{B}\vec{y})) \end{aligned}$$

Logo,

$$f_{12}^{(2)-1} \delta^{ba} - f_{13}^{(2)-1} S^b - \frac{1}{J} f_{14}^{(2)-1} \pi^j = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{B.4})$$

Agora, para  $n = 1$  e  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \int d^2 x' \left[ f_{11}^{(2)-1} f_{12}^{(2)} + f_{12}^{(2)-1} f_{22}^{(2)} + f_{13}^{(2)-1} f_{32}^{(2)} + f_{14}^{(2)-1} f_{42}^{(2)} \right] &= \delta_{12} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^2 x' \left[ f_{11}^{(2)-1} \delta^{ab} \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) - \frac{1}{J} f_{14}^{(2)-1} S^b \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Então,

$$-f_{11}^{(2)-1} \delta^{ab} - \frac{1}{J} f_{14}^{(2)-1} S^b = 0. \quad (\text{B.6})$$

Portanto,

$$f_{11}^{(2)-1} = -\frac{1}{J} f_{14}^{(2)-1} S_a \quad (\text{B.7})$$

Já, para  $n = 1$  e  $m = 3$ :

$$\begin{aligned} \int d^2 x' \left[ f_{11}^{(2)-1} f_{13}^{(2)} + f_{12}^{(2)-1} f_{23}^{(2)} + f_{13}^{(2)-1} f_{33}^{(2)} + f_{14}^{(2)-1} f_{43}^{(2)} \right] &= \delta_{13} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^2 x' \left[ f_{11}^{(2)-1} S^a \delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Assim,

$$f_{11}^{(2)-1} (\vec{x} - \vec{y}) = 0, \quad (\text{B.9})$$

ou

$$f_{11}^{(2)-1} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo as equações (B.10) em (B.7):

$$f_{14}^{(2)-1} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Reportando a equação (B.4):

$$f_{12}^{(2)-1} = \delta_{ab}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) + f_{13}^{(2)-1}S_a. \quad (\text{B.12})$$

Finalmente, para  $n = 1$  e  $m = 4$ :

$$\begin{aligned} \int d^2x' \left[ f_{11}^{(2)-1}f_{14}^{(2)} + f_{12}^{(2)-1}f_{24}^{(2)} + f_{13}^{(2)-1}f_{34}^{(2)} + f_{14}^{(2)-1}f_{44}^{(2)} \right] &= \delta_{14}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \\ \frac{1}{J} \int d^2x' \left[ f_{11}^{(2)-1}\pi^a\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) + \frac{1}{J}f_{12}^{(2)-1}S^a\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= \delta_{14}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

tem-se,

$$f_{11}^{(2)-1}\pi^a + f_{12}^{(2)-1}S^a = 0. \quad (\text{B.14})$$

Analogamente, para  $n = 2$  e  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} \int d^2x' \left[ f_{21}^{(2)-1}f_{11}^{(2)} + f_{22}^{(2)-1}f_{21}^{(2)} + f_{23}^{(2)-1}f_{31}^{(2)} + f_{24}^{(2)-1}f_{41}^{(2)} \right] &= \delta_{21}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^2x' \left[ f_{22}^{(2)-1}\delta^{ba}\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) - f_{23}^{(2)-1}S^b\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) - \frac{1}{J}f_{24}^{(2)-1}\pi^j\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Logo,

$$f_{22}^{(2)-1}\delta^{ba} - f_{23}^{(2)-1}S^b - \frac{1}{J}f_{24}^{(2)-1}\pi^b = 0. \quad (\text{B.16})$$

Agora, para  $n = 2$  e  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \int d^2x' \left[ f_{21}^{(2)-1}f_{12}^{(2)} + f_{22}^{(2)-1}f_{22}^{(2)} + f_{23}^{(2)-1}f_{32}^{(2)} + f_{24}^{(2)-1}f_{42}^{(2)} \right] &= \delta_{22}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \int d^2x' \left[ f_{21}^{(2)-1}\delta^{ab}\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) - \frac{1}{J}f_{24}^{(2)-1}S^b\delta^2(\vec{x}' - \vec{y}) \right] &= \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$f_{21}^{(2)-1}\delta^{ab} - \frac{1}{J}f_{24}^{(2)-1}S^b = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.18})$$

ou ainda,

$$f_{21}^{(2)-1} = -\delta_{ba}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{1}{J}f_{24}^{(2)-1}S_a. \quad (\text{B.19})$$

Para  $n = 2$  e  $m = 3$ :

$$\int d^2x' \left[ f_{21}^{(2)-1}f_{13}^{(2)} + f_{22}^{(2)-1}f_{23}^{(2)} + f_{23}^{(2)-1}f_{33}^{(2)} + f_{24}^{(2)-1}f_{43}^{(2)} \right] = \delta_{23}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.20})$$

obtem,

$$f_{21}^{(2)-1}S^a = 0. \quad (\text{B.21})$$

Enquanto, para  $n = 2$  e  $m = 4$ :

$$\int d^2x' \left[ f_{21}^{(2)-1}f_{14}^{(2)} + f_{22}^{(2)-1}f_{24}^{(2)} + f_{23}^{(2)-1}f_{34}^{(2)} + f_{24}^{(2)-1}f_{44}^{(2)} \right] = \delta_{24}\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.22})$$

$$f_{21}^{(2)-1}\pi^a + f_{22}^{(2)-1}S^a = 0. \quad (\text{B.23})$$

Agora, para  $n = 3$  e  $m = 1$ :

$$f_{32}^{(2)-1}\delta^{ba} - f_{33}^{(2)-1}S^b - \frac{1}{J}f_{34}^{(2)-1}\pi^b = 0. \quad (\text{B.24})$$

Para  $n = 3$  e  $m = 2$ :

$$-f_{31}^{(2)-1}\delta^{ab} - \frac{1}{J}f_{34}^{(2)-1}S^b = 0. \quad (\text{B.25})$$

Logo,

$$f_{34}^{(2)-1} = -J\frac{\delta^{ab}S_b}{S^2}f_{31}^{(2)-1}. \quad (\text{B.26})$$

Enquanto, para  $n = 3$  e  $m = 3$ , temos:

$$f_{31}^{(2)-1}S^a = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.27})$$

$$f_{31}^{(2)-1} = \frac{S_a\delta^2(\vec{x} - \vec{y})}{S^2}. \quad (\text{B.28})$$

Substituindo as equações (B.28) em (B.26):

$$f_{34}^{(2)-1} = -J \frac{\delta^2(\vec{x} - \vec{y})}{S^2}. \quad (\text{B.29})$$

Para  $n = 3$  e  $m = 4$ ,

$$f_{31}^{(2)-1} \pi^a + f_{32}^{(2)-1} S^a = 0, \quad (\text{B.30})$$

$$f_{32}^{(2)-1} S^a = -f_{31}^{(2)-1} \frac{\pi^a S_a}{S^2}. \quad (\text{B.31})$$

Retornando a equação (B.28), obtemos:

$$\begin{aligned} f_{32}^{(2)-1} S^a &= -\frac{S_a \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \pi^a S_a}{S^2 S^2}, \\ f_{32}^{(2)-1} S^a &= -\frac{\pi_a}{S^2} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Substituindo as equações (B.32) e (B.26) em (B.24):

$$\begin{aligned} -\frac{\pi_a}{S^2} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \delta^{ba} - f_{33}^{(2)-1} S^b + \frac{\delta^2(\vec{x} - \vec{y})}{S^2} \pi^b &= 0, \\ f_{33}^{(2)-1} &= \frac{1}{S^4} (-\pi_a \delta^{ab} + \pi^b \delta^{ab}) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$f_{33}^{(2)-1} = 0. \quad (\text{B.34})$$

Por fim, para  $n = 4$  e  $m = 1$ ,

$$f_{42}^{(2)-1} \delta^{ba} - f_{43}^{(2)-1} S^b - \frac{1}{J} f_{44}^{(2)-1} \pi^b = 0. \quad (\text{B.35})$$

Para  $n = 4$  e  $m = 2$ ,

$$-f_{41}^{(2)-1} \delta^{ab} - \frac{1}{J} f_{44}^{(2)-1} S^b = 0. \quad (\text{B.36})$$

Com a equação (B.11), temos:

$$f_{44}^{(2)-1} = 0. \quad (\text{B.37})$$

Para  $n = 4$  e  $m = 3$ ,

$$f_{41}^{(2)-1} S^b = 0, \quad (\text{B.38})$$

Portanto,

$$f_{41}^{(2)-1} = 0. \quad (\text{B.39})$$

Para  $n = 4$  e  $m = 4$ ,

$$\frac{1}{J} f_{41}^{(2)-1} \pi^a + \frac{1}{J} f_{42}^{(2)-1} S^a = \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.40})$$

consequentemente,

$$f_{42}^{(2)-1} = J \frac{S_a}{S^2} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{B.41})$$

Substituindo a equação (B.41) na (B.19):

$$f_{21}^{(2)-1} = - \left( \delta^{ba} - \frac{S_b S_a}{S^2} \right) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{B.42})$$

Se tomar a equação (B.42) na (B.23):

$$f_{22}^{(2)-1} = \left( \frac{S_j \pi_a - S_a \pi_b}{S^2} \right) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}). \quad (\text{B.43})$$

Assim, a forma inversível de  $f^{(2)}$  pode ser obtida:

$$f^{(2)-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{ab} - \frac{S_a S_b}{S^2} & -\frac{S_a}{S^2} & 0 \\ - \left( \delta^{ba} - \frac{S_b S_a}{S^2} \right) & \frac{S_b \pi_a - S_a \pi_b}{S^2} & \frac{\pi_a}{S^2} & -J \frac{S_a}{S^2} \\ \frac{S_b}{S^2} & -\frac{\pi_b}{S^2} & 0 & -\frac{J}{S^2} \\ 0 & J \frac{S_b}{S^2} & \frac{J}{S^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{B.44})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Paul A. M. Dirac, LECTURES ON QUANTUM MECHANIC, Yeschiva University (1964).
- [2] J. Barcelos Neto, *Quantização Simplética com Vínculos*, IF/UFRJ/Monografia/M92/01.
- [3] Wilson Oliveira, *Teoria Quântica de Campos*, Notas de aula.
- [4] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically Massive Calibre Theories*, Ann. Phys. **140** (1982) 372. R. Jackiw, *(Constrained) Quantization without Tears*, hep-th/9306075 (1993).
- [5] S. Deser and R. Jackiw, *Self Duality of Topologically Massive Calibre Theories*, Phys. Lett. B **139**:371 (1984) 2366.
- [6] L. D. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1692. N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Claredon Press, Oxford 1980, J. Barcelos Neto and C. Wotzasek, *Symplectic Quantization of Constrained Systems* Int, J. Mod. Phys. A **7** (1992) 737.
- [7] C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Approach to Hidden Symmetries* Ann. Phys **243** (1995) 76-89.

- [8] H. Montani and C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization of Non-Abelian Systems*, Mod. Phys.Lett. A **35** (1993) 3387-96.
- [9] H. Montani, *Symplectic analysis of constrained systems*, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993)4319.
- [10] L. Faddev and S. L. Shatashivilli, Phys Lett. B **167** (1998) 225.
- [11] E. Fradkin, V. Manias and F. A. Schaposnik, *The Fermion-Boson Mapping in Three-dimensional Quantum Field Theory*, Nuc. Phys. B **446** (1995) 144.
- [12] J. Ananias Neto, C. Neves and W. Oliveira, *Gauging the  $SU(2)$  Skyrme Model*, Phys. Rev. D **63** (2001) 085018.
- [13] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and F.I.Takakura, *Duality through the Symplectic Embedding Formalism*, Int. J. Mod. Phys. A **22** (2007) 3605. A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and D. C. Rodrigues, *Symplectic Embedding of Second Class Systems*, Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.) **127** (2004) 170-173.
- [14] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, F.I. Takakura and L.M.V. Xavier, *The Dual Embedding Method in  $D=3$* , Mod. Phys. Lett. A **23**, 829 (2008).
- [15] Sean M. Carrol, George B. Field and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz and Parity-Violating Modification of Eletrodynamics* Phys. Rev. D **41** 1231 (1990).
- [16] M. Botta Cantcheff, C. F. L. Goldinho, A. P. Baêta Scarpelli and J. A. Helayël-Neto, *Dual Embedding of the Lorentz- Violating Eletrodynamics/ and Batalin-Vilkovisky Quantization*, Phys. Rev. D **68** (2003) 065025.
- [17] R. Banerjee, H. J. Rothe, and K. D. Rothe, *Equivalence of the MCS Theory and a Self-dual Model*, Phys. Rev. D **52** (1995).
- [18] S.E. Hjelmeland and U. Lindstrom, hep-th/9705122.

- [19] P. K. Townsend, K. Pilch and P. Van Nieuwenhuizen, *Selfduality in Odd Dimensions*, Phys. Lett. B **136** (1984) 38.
- [20] A. Karlhed, U. Lindstrom, M. Rocěk and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **186** (1987) 96.
- [21] R. Banerjee and C. Wotzasek, Nucl. Phys. B **527** (1998) 402.
- [22] N.A. Lemos. *Mecânica Análítica*, 1<sup>o</sup> edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.
- [23] Herbert Goldstein, *Classics Mechanics*, Addison Wesley.
- [24] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4<sup>o</sup> edition, Butterworth Heinemann, Oxford, 1987.
- [25] J. Barcelos Neto, *Fundamentos de Relatividade Especial*, UFRJ.
- [26] Davi C. Rodrigues, *Estudos em Sistemas Vinculados*, Monografia/UFJF, 2000. Davi C. Rodrigues, *Dualidade Eletromagnética em Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismo Simplético*, Tese de Doutorado/UFRJ, 2006.
- [27] Marcelo S. Guimarães, *A dualidade Maxwell-Chern-Simons/Auto-dual e sua extensão para Espaço-Tempo Não-Comutativo/* UFRJ, 2005.
- [28] Emanuel J.R. Oliveira, *Quantização Operatorial dos Skyrmions*, UFMG/ Dissertação.
- [29] J. Ananias Neto, C. Neves, E.R. Oliveira and W. Oliveira, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 5117-5130 (2001).
- [30] I.A. Batalin, E.S. Fradkin, *Operator Quantization of Dynamical Systems with Irreducible First and Second Class Constraints*, Phys. Lett. B **180**, 157 (1986); I. A. Batalin, E. S. Fradkin e T.E. Fradkina, *Another Version for Operatorial Quantization of Dynamical Systems with Irreducible Constraints* Nucl. Phys. B **134**,

- 158 (1989); I.A. Batalin, I.V. Tyutin, *Existence Theorem for effective Gauge Algebra in the Generalized Canonical Formalism with abelian Conversion of Second Class Constraints*, Int.J.Mod.Phys. A **6**, 3255 (1991).
- [31] Svend E. Hyelmelamd and Ulf Lindström, *Duality for the Non-Speciality*, hep-th/9705122(1997).
- [32] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, C. Wotzasek, L.M.V. Xavier, *New Considerations about the Maxwell-Podolsky-like Theory through the Symplectic Embedding Formalism*, Mod. Phys. Lett. A **25**, 1115 (2010).
- [33] M.Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. A. 144, 425 (1934).
- [34] A.Proca, Compt. Rend. 100, 1377 (1930).
- [35] B.Podolsky, Phys. Rev. 62, 68 (1942).
- [36] A.P. Baêta Scarpelli, H.Belish, J.L. Boldo and J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D 67, 085021 (2003).
- [37] M.E.Gouva, G.M. Wysin, S.A. Leonel, A.S.T. Pires, T. Kamppertter, F.G. Mertens, Phys. Rev. B, 59(9) (1999) 6229.
- [38] R.Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical and Mathematiacal*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [39] A.C.R. Mendes, C. Neves and W. Oliveira, *Trends in Physics-Festschrift in homage to Prof. José Maria Filardo Bassalo*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008 pg.331.
- [40] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes and W. Oliveira, Sigma 6 (2010) 059; E.M.C. Abreu, C. Neves and W. Oliveira, Int. J. Mod. Phys. A 21 (2006) 5359.
- [41] C. Neves and W. Oliveira, Phys. Lett. A 321 (2004) 267.

- [42] A. A. Deriglazov, W. Oliveira and G. Oliveira-Neto, *Int. J. Mod. Phys. A* **18** (2003) 755.
- [43] J. Goldstone and R. Jackiw, *Phys. Lett. B* **74** (1978) 81; M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 959; R. Floreanini, C. T. Hill and R. Jackiw, *Ann. Phys.* **175** (1987) 345; S. Cassemiro F. F. and V. O. Rivelles, *Phys. Lett. B* **452** (1999) 234.
- [44] G. Oliveira-Neto, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 24010.