

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós graduação em Física

Vinícius Guilherme Oliveira

**Modelo anisotrópico Kantowski-Sachs acoplado com radiação e uma constante
cosmológica que varia com o tempo**

Juiz de Fora
16 de abril de 2024

Vinícius Guilherme Oliveira

Modelo anisotrópico Kantowski-Sachs acoplado com radiação e uma constante cosmológica que varia com o tempo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

16 de abril de 2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Vinícius Guilherme.

Modelo anisotrópico Kantowski-Sachs acoplado com radiação e uma constante cosmológica que varia com o tempo / Vinícius Guilherme Oliveira.
– 16 de abril de 2024.

46 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação de mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós graduação em Física, 16 de abril de 2024.

1. Cosmologia. 2. Relatividade Geral. 3. Modelos cosmológicos com expansão acelerada do Universo. 4. Métrica Kantowski-Sachs. 5. Running Cosmological Constant. I. Oliveira Neto, Gil.

Vinícius Guilherme Oliveira

Modelo anisotrópico Kantowski-Sachs acoplado com radiação e uma constante cosmológica que varia com o tempo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 28 de fevereiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Maria de Fátima Alves da Silva

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 16/02/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 28/02/2024, às 16:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilya Chapiro, Membro**, em 28/02/2024, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria de Fátima Alves da Silva, Usuário Externo**, em 29/02/2024, às 22:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1706966** e o código CRC **562E8E5C**.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço ao professor Dr. Gil de Oliveira Neto pelo apoio, tempo, paciência e compreensão ao longo dos anos, e por todo conhecimento construído com sua orientação.
- Agradeço também a Universidade Federal de Juiz de Fora, ao Departamento de Física, ao Programa de Pós-Graduação em Física e ao órgão financiador CAPES pelo investimento confiado a mim.

RESUMO

Com objetivo de estudar os momentos iniciais do desenvolvimento do universo onde a isotropia poderia não ser válida como conhecemos hoje, propomos um modelo cosmológico anisotrópico usando a métrica de Kantowski-Sachs. Para descrever a energia escura presente no universo usaremos a correção quântica da Running Cosmological Constant, e como conteúdo material do universo usaremos o fluido perfeito de radiação. Solucionando esse modelo obtemos padrões da dinâmica para cada parâmetro utilizado.

Palavras-chave: Modelo anisotrópico. Métrica de Kantowski-Sachs. Running Cosmological Constant.

ABSTRACT

In order to study the initial moments of the development of the universe where isotropy could not be valid as it is today, we propose an anisotropic cosmological model using the Kantowski-Sachs metric. To describe the dark energy present in the universe we will use the quantum correction of the Running Cosmological Constant, and as the material content of the universe we will use the perfect radiation fluid. By solving this model, we obtain dynamics patterns for each parameter used.

Key-words: Anisotropic model. Kantowski-Sachs metric. Running Cosmological Constant.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – $a(t) \times t$	22
Figura 2 – $b(t) \times t$	22
Figura 3 – $\rho_f(t) \times t$	22
Figura 4 – $b(t)/a(t) \times t$	22
Figura 5 – $a(t) \times t$	24
Figura 6 – $b(t) \times t$	24
Figura 7 – $\rho_f(t) \times t$	24
Figura 8 – $b(t)/a(t) \times t$	24
Figura 9 – $a(t) \times t$	25
Figura 10 – $b(t) \times t$	25
Figura 11 – $\rho_f(t) \times t$	26
Figura 12 – $b(t)/a(t) \times t$	26
Figura 13 – $a(t) \times t$	27
Figura 14 – $b(t) \times t$	27
Figura 15 – $\rho_f(t) \times t$	28
Figura 16 – $b(t)/a(t) \times t$	28
Figura 17 – $a(t) \times t$	29
Figura 18 – $b(t) \times t$	29
Figura 19 – $\rho_f(t) \times t$	29
Figura 20 – $b(t)/a(t) \times t$	29
Figura 21 – $a(t) \times t$	31
Figura 22 – $b(t) \times t$	31
Figura 23 – $\rho_f(t) \times t$	31
Figura 24 – $b(t)/a(t) \times t$	31
Figura 25 – $a(t) \times t$	33
Figura 26 – $b(t) \times t$	33
Figura 27 – $\rho_f(t) \times t$	33
Figura 28 – $b(t)/a(t) \times t$	33
Figura 29 – $a(t) \times t$	34
Figura 30 – $b(t) \times t$	34
Figura 31 – $\rho_f(t) \times t$	35
Figura 32 – $b(t)/a(t) \times t$	35
Figura 33 – $a(t) \times t$	36
Figura 34 – $b(t) \times t$	36
Figura 35 – $\rho_f(t) \times t$	37
Figura 36 – $b(t)/a(t) \times t$	37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de fluidos perfeitos e seus respectivos ω	17
Tabela 2 – Tabela da razão entre os fatores de escala com o parâmetro $\nu = 0.2$	22
Tabela 3 – Tabela do calculo de Δ com o parâmetro $\nu = 0.2$	23
Tabela 4 – Tabela da razão entre os fatores de escala com o parâmetro $\rho_{\Lambda}^0 = 3$	26
Tabela 5 – Tabela do calculo de Δ com o parâmetro $\rho_{\Lambda}^0 = 3$	26
Tabela 6 – Tabela da razão entre os fatores de escala com o parâmetro $H_0 = 1.5$	27
Tabela 7 – Tabela do calculo de Δ com o parâmetro $H_0 = 1.5$	28
Tabela 8 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $\rho_f(0) =$ 5.	30
Tabela 9 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $\rho_f(0) = 5$	30
Tabela 10 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $a(0) = 2$	31
Tabela 11 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $a(0) = 2$	32
Tabela 12 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $b(0) = 5$	32
Tabela 13 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $b(0) = 5$	34
Tabela 14 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $\dot{a}(0) = 2$	35
Tabela 15 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $\dot{a}(0) = 2$	35
Tabela 16 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $\dot{b}(0) =$ 1.75.	37
Tabela 17 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $\dot{b}(0) = 1.75$	38

Lista de publicações:

- Essa dissertação deu origem a um artigo cuja referência é: V. G. Oliveira, G. de Oliveira Neto and I. L. Shapiro, Kantowski–Sachs Model with a Running Cosmological Constant and Radiation. *Universe* **10**, 83 (2024).

SUMÁRIO

1	Introdução	11
2	Obtenção das equações da cosmologia relativística	13
2.1	O Princípio Cosmológico	13
2.2	O Postulado de Weyl	13
2.3	Elementos da Relatividade Geral	14
2.3.1	Obtenção das Equações de Einstein com a métrica de Kantowski-Sachs .	16
2.4	Constituinte do universo	17
2.5	Anisotropia	18
2.5.1	O parâmetro de anisotropia	18
2.5.2	Interpretando a anisotropia graficamente	19
3	Estudo do modelo anisotrópico	21
3.1	Variação do parâmetro fenomenológico ν	21
3.1.1	Uma análise numérica	23
3.2	Variação do parâmetro ρ_Λ^0	25
3.3	Variação do parâmetro H_0	26
3.4	Variação da condição inicial $\rho_f(0)$	28
3.5	Variação da condição inicial $a(0)$	30
3.6	Variação da condição inicial $b(0)$	32
3.7	Variação da condição inicial $\dot{a}(0)$	34
3.8	Variação da condição inicial $\dot{b}(0)$	36
4	Conclusões	39
	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICE A – Obtenção das equações dinâmicas dos fatores de escala	43
	APÊNDICE B – Obtenção da equação de conservação de energia	45

Notações e Convenções

No presente texto será convencionado:

A derivada em relação ao tempo de uma função $f(t)$ será denotada por $\dot{f}(t)$.

A assinatura da métrica de Minkowski é $(-, +, +, +)$.

Na métrica os índices gregos variam de 0 a 3, e o índice 0 representa a coordenada temporal.

Usaremos a Notação de Einstein, que consiste em omitir o símbolo de somatório, (Σ) , e tratar os índices repetidos como indicador do somatório.

Usaremos a virgula em um tensor, $g_{\alpha\beta,\mu}$ como representação da derivada usual de um tensor.

Usaremos o ponto e virgula será usado para representar a derivada covariante de um tensor, $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$.

O determinante da métrica é denotado por g .

1 Introdução

Para uma melhor compreensão desta dissertação, vamos neste capítulo apresentar a motivação para o estudo deste trabalho e mostraremos como as ideias serão estruturadas por capítulos nesta dissertação.

No presente trabalho começamos estudamos conceitos fundamentais de cosmologia, relatividade geral [1, 2, 3], além de buscarmos estudar modelos cosmológicos anisotrópicos com a métrica de Kantowski-Sachs (KS) [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. A motivação para utilizarmos essa métrica é estudar o universo primordial, com características e propriedades diferentes das que conhecemos hoje.

Como vários trabalhos nas ultimas décadas mostraram, atualmente vivemos em um universo que é homogêneo e isotrópico em grande escala. Entretanto nos primeiros momentos de desenvolvimento do universo, quando possuía um domínio quântico, as leis da física poderiam ser muito diferentes do que conhecemos hoje. Esse período de tempo mencionado é o tempo de Planck (menor que 10^{-44} segundos), é interessante destacar que nesse período de tempo o universo era extramente quente, com temperaturas superiores a 10^{32} Kelvin e hoje nosso universo possui temperatura próxima a 3 Kelvin. Assim é razoável considerar que a homogeneidade e a isotropia poderiam não ser válidas nesse regime de tempo mais inicial e com propriedades muito diferentes em relação ao que vemos hoje. Nesse trabalho estamos interessados em estudar um universo primordial que possua propriedades de anisotropia, mas consideraremos que nesse regime de tempo nosso universo já possua a propriedade de homogeneidade.

A métrica homogênea e anisotrópica de Kantowski-Sachs é uma possível candidata para representar o Universo em um estágio mais primordial do seu desenvolvimento, essa métrica possui um número reduzido de anisotropias, sendo uma das métricas com propriedade de anisotropia mais simples de se trabalhar. Esperamos, posteriormente com a evolução temporal, devido a expansão do Universo, que esse modelo torne-se isotrópico, de forma que a métrica de KS tenda a métrica homogênea e isotrópica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), estando de acordo com os dados observacionais mais atuais.

A cosmologia estuda a composição, o início, a evolução e o eventual fim do universo, ela ganhou muito destaque com a formulação da lei da gravitação de Newton quando tornou-se possível calcular com significativa precisão os movimentos de alguns corpos celestes, pois antes a cosmologia era puramente filosófica. Posteriormente, com o desenvolvimento da Relatividade Geral (RG) de Albert Einstein criou-se uma revolução científica, iniciou-se a cosmologia moderna.

No início da cosmologia moderna, a partir dos dados obtidos por Edwin Hubble, concluiu-se que o universo estava em expansão. Nessa época acreditava-se em três modelos

mais aceitos para o final do universo (do ponto de vista teórico da RG): O modelo no qual a velocidade tende a zero em um tempo infinito; o modelo em que o universo expande até um determinado tempo, depois contrai-se e colapsa; e o modelo em que o universo expande infinitamente com velocidade constante. Todos esses modelos dependem da topologia do universo (aberta, fechada, ou hiperbólica).

No ano de 1998, novos dados observacionais levaram a acreditar que o universo encontra-se em uma expansão acelerada, e que haveriam outros constituintes no universo necessários para explicar essas observações, já que a matéria bariônica pura não seria suficiente para explicar essa expansão acelerada. Esse constituinte do universo foi chamado de Energia Escura [4] e [5], a expansão acelerada do universo requer uma matéria exótica com propriedade repulsiva ao invés de atrativa. Em nosso trabalho essa Energia Escura será representada por uma constante cosmológica que varia com o tempo 'Running Cosmological Constant' (RCC) [14, 15, 17, 18, 19, 20]. Haveria também outro constituinte no universo, a matéria escura, que explicaria alguns fenômenos observados em galáxias. Dessa forma nosso universo seria constituído de grande parte de Energia escura, de uma parte menor de matéria escura e uma pequena fração por matéria bariônica.

No decorrer do presente texto estudaremos conceitos introdutórios da cosmologia relativística, partindo da relatividade geral até a obtenção da solução das equações tensoriais de Einstein. Essas equações descrevem a evolução temporal do universo, através dos fatores de escala, para algum determinado fluido. Escolhemos o fluido de radiação, pois esse fluido descreve a matéria presente no universo em seu estágio inicial.

No segundo capítulo iniciaremos estudando os principais teoremas e postulados da cosmologia relativística, apresentando as ferramentas essenciais para trabalharmos com a relatividade geral, e a partir das equações apresentadas chegar às equações diferenciais dos fatores de escala. No terceiro capítulo apresentaremos soluções numéricas dessas equações para nosso modelo cosmológico. A partir das soluções analisaremos a dependência dos fatores de escala e da densidade do fluido com o tempo com cada um dos parâmetros presentes nessas soluções. Estudaremos também se esse modelo está tendendo a uma configuração isotrópica com a evolução temporal. Estaremos sempre interessados em soluções expansivas. No quarto capítulo serão discutidos os principais resultados e conclusões obtidas através desse estudo.

2 Obtenção das equações da cosmologia relativística

Primeiramente definiremos o princípio cosmológico e o postulado de Weyl, pois eles são fundamentais para o desenvolvimento de um modelo padrão ou para descrições de modelos mais atuais do universo.

2.1 O Princípio Cosmológico

No início da cosmologia acreditava-se que o universo tinha algum tipo de centro. Um exemplo é o modelo geocêntrico ou sistema ptolomaico desenvolvido no início da era cristã, onde acreditavam que a Terra estava no centro do universo com o Sol e os demais Planetas orbitando a mesma em orbitas circulares. Outro exemplo é o modelo heliocêntrico desenvolvido por Nicolau Copérnico, onde acreditavam que o Sol estava no centro do universo com a Terra e outros planetas o orbitando. Com a evolução da ciência e avanço dos dados observacionais, essas ideias foram substituídas. Hoje na cosmologia moderna foi adotada a ideia de que o universo não possui um centro ou pontos privilegiados. Esse pensamento foi resumido no chamado *Princípio Cosmológico*:

"Em cada época o universo não muda de ponto para ponto, isto é, apresenta o mesmo aspecto em cada posição, exceto por irregularidades locais".

Esse princípio implica na isotropia e homogeneidade do universo, pois se não há pontos privilegiados, o universo é homogêneo. Se não há pontos privilegiados, também não há direções privilegiadas, logo é isotrópico.

2.2 O Postulado de Weyl

Weyl supôs que para aplicarmos conceitos locais a objetos distantes deveríamos tratá-los como partículas num fluido ou "substrato". E formulou o seguinte postulado:

"As partículas do substrato se movem no espaço-tempo numa congruência de geodésicas temporais que divergem de um ponto no passado finito ou infinito".

Geodésica é o nome dado a uma trajetória que dá a menor distância entre dois pontos em um espaço curvo. Segundo o postulado de Weyl, a matéria presente no Universo se move ao longo de geodésicas que, exceto em singularidades, não se interceptam, isso implica que existe apenas uma geodésica passando em um ponto do espaço-tempo. Logo, uma partícula em um determinado ponto possuiria uma direção bem definida da velocidade. Assim, a matéria praticamente não interage entre si, portanto é razoável tratarmos o universo sendo preenchido por um fluido perfeito.

2.3 Elementos da Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral (RG) foi desenvolvida por Albert Einstein entre os anos de 1907 e 1915, essa teoria é uma generalização da relatividade restrita. A relatividade geral estende o conceito do princípio de equivalência entre referenciais inerciais da relatividade restrita, para referenciais não inerciais. Na relatividade geral é impossível diferenciar, localmente, um movimento acelerado de uma aceleração gerada por um campo gravitacional. Essa teoria descreve a gravitação geometricamente, como deformações no espaço-tempo.

Para a obtenção das equações de Einstein, precisaremos de alguns conceitos matemáticos fundamentais. Primeiramente, precisamos introduzir a métrica do espaço-tempo a ser utilizada ($g_{\alpha\beta}$). A métrica é um tensor covariante, de rank 2, simétrico. Podemos descrever a métrica em termos do elemento de linha de um dado espaço-tempo, (ds), da seguinte forma,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.1)$$

Outro conceito matemático fundamental é o símbolo de Christoffel, que possibilita calcular derivadas de quantidades geométricas em espaço-tempos curvos. É importante destacar que o símbolo de Christoffel não é um tensor. Ele pode ser calculado utilizando apenas o tensor métrico do espaço-tempo,

$$\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (2.2)$$

A partir do símbolo de Christoffel podemos calcular o tensor de curvatura de Riemann, que é um tensor misto, de rank 4, com um índice contravariante (superior) e três covariantes (inferior).

$$R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\lambda} \Gamma^\gamma_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} \Gamma^\gamma_{\mu\lambda}. \quad (2.3)$$

O tensor de curvatura de Riemann dá uma medida tensorial da curvatura do espaço-tempo (quando $R^\alpha_{\mu\lambda\sigma} = 0$ significa que os espaço-tempo é plano). O tensor de Riemann possui algumas simetrias, o que reduz o número de componentes independentes desse tensor. Temos que em sua forma completamente covariante, $R_{\alpha\beta\mu\gamma}$ é anti-simétrico no primeiro e segundo par de índices, e simétrico pela troca do primeiro par de índices com o segundo par de índices. Com o tensor de Riemann podemos obter o tensor de Ricci,

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\delta} R_{\delta\alpha\mu\beta}. \quad (2.4)$$

O tensor de Ricci é um tensor covariante, de rank 2, simétrico, obtido da contração do tensor de Riemann, contraindo o primeiro índice com o terceiro índice. Podemos contrair o tensor de Ricci para obter o escalar de Ricci, ou podemos contrair o tensor de Riemann duas vezes, assim o escalar de Ricci pode ser escrito como,

$$R = g^{\mu\gamma} R_{\mu\gamma} = g^{\mu\gamma} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\gamma}. \quad (2.5)$$

Com o tensor de Ricci, o escalar de Ricci, e a métrica podemos definir o tensor de Einstein,

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R. \quad (2.6)$$

O tensor $G_{\alpha\beta}$ é um tensor covariante, de rank 2, simétrico. Todas essas quantidades geométricas introduzidas até agora nos permitem descrever a parte geométrica da teoria da relatividade geral. Para descrevermos a fonte do campo gravitacional nessa teoria precisamos introduzir o tensor energia-momento ($T_{\alpha\beta}$). As componentes desse tensor descrevem a densidade de matéria, momento linear e as tensões ou pressões.

A equação de campo de Einstein é dada por,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}, \quad (2.7)$$

onde G é a constante de gravitação de Newton, e c é a velocidade da luz no vácuo. O termo esquerdo dessa equação, $G_{\alpha\beta}$, é um tensor covariante, de rank 2, simétrico, que descreve a geometria ou a curvatura no espaço-tempo. O termo direito, $T_{\alpha\beta}$ é um tensor covariante, de rank 2, simétrico, que descreve a fonte, ou seja essa equação relaciona quantitativamente como a fonte deforma o espaço-tempo. Utilizando o postulado de Weyl, podemos representar a fonte do campo gravitacional como um fluido perfeito cujo tensor energia-momento é dado por,

$$T_{\alpha\beta} = (c^2\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}, \quad (2.8)$$

onde p é a pressão, ρ é a densidade, e u_α é a quadri-velocidade em relação a um observador inercial qualquer.

Quando aplicamos a divergência em ambos os lados na equação (2.7) obtemos a equação de conservação de energia. O processo de obtenção dessa equação será mais detalhado no Apêndice B.

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + T^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha + T^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta}^\beta = 0. \quad (2.9)$$

Destacando que a divergência do tensor de Einstein é zero devido a propriedades matemáticas desse tensor.

O modelo padrão de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker possui configuração homogênea e isotrópica, e hoje é o mais aceito na comunidade científica para descrever o universo atual, temos sua métrica fornecida pelo elemento de linha.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right), \quad (2.10)$$

onde k é a constante de curvatura podendo assumir os valores +1, 0 e -1, que corresponde ao universo do tipo esférico, plano e hiperbólico respectivamente. r , θ e ϕ são coordenadas

esféricas, com domínios compreendidos nos respectivos intervalos $(0, \infty]$, $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$. E $a(t)$ é o fator escala que descreve a dinâmica do universo através do tempo.

Substituindo a equação (2.8) em (2.9) obtemos a seguinte relação,

$$\dot{\rho} + 3H \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) = 0, \quad (2.11)$$

onde ρ é a densidade do fluido que permeia o espaço-tempo, p sua pressão, H é o parâmetro de Hubble característico do modelo. Para o modelo FLRW $H = \frac{\dot{a}}{a}$.

2.3.1 Obtenção das Equações de Einstein com a métrica de Kantowski-Sachs

Para obtermos as equações dinâmicas da cosmologia relativística utilizamos o princípio cosmológico, o postulado de Weyl juntamente com as equações de campo de Einstein para descrever um Universo. Devido ao princípio cosmológico a métrica que descreve o Universo, atualmente, deverá ter as propriedades de homogeneidade e isotropia como em (2.10). Entretanto, como mencionado no Capítulo 1, usaremos uma métrica anisotrópica, para descrever um possível estado inicial do Universo, e posteriormente vamos verificar se essa métrica torna-se isotrópica com a evolução temporal do nosso modelo. Por simplicidade, usaremos a métrica de Kantowski-Sachs (KS) devido ao número de anisotropias reduzidas [6] e [11]. Segue a métrica descrita pelo elemento de linha,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 + b^2(t) d\theta^2 + b^2(t) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.12)$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são os fatores de escala que dão uma ideia do tamanho e da dinâmica do universo através da evolução temporal, r , θ e ϕ são as coordenadas esféricas com domínios estabelecidos anteriormente quando mencionamos o modelo de FLRW. As seções espaciais desse espaço-tempo tem curvatura constante positiva. Essa métrica é anisotrópica devido a presença de dois fatores de escala. O fator de escala da parte radial é diferente do fator de escala da parte angular, e conseqüentemente, se eles expandirem de forma diferente teremos um universo anisotrópico.

Calculando as equação de campo de Einstein (2.7), para métrica (2.12) e o tensor energia-momento (2.8), podemos obter duas equações dinâmicas, independentes, para os fatores de escala, onde usaremos $a(t) = a$ e $b(t) = b$. Dadas por,

$$2b\dot{a}\dot{b} + \dot{a}b^2 + a = \frac{8\pi G\rho}{c^2} ab^2, \quad (2.13)$$

$$b^2\ddot{a} - ab\ddot{b} + b\dot{a}\dot{b} - \dot{a}b^2 - a = 0. \quad (2.14)$$

O processo de obtenção dessas equações é um pouco mais detalhado no Apêndice A.

2.4 Constituinte do universo

Vamos agora introduzir o material que está presente no nosso modelo, consideraremos um universo preenchido pelo fluido perfeito como descrito pelo postulado de Weyl. Assim o fluido que consideraremos possui a seguinte equação de estado.

$$p_f = \omega \rho_f, \quad (2.15)$$

onde ω é uma constante. Os valores mais conhecidos para ω e os correspondentes tipos de fluidos estão listados na Tabela 1 .

ω	Fluido	Características
1	Matéria rígida	Matéria presente no início do universo
1/3	Radiação	Matéria presente no início do universo
0	Poeira	Matéria presente no universo atual
-1/3	Cordas cósmicas	Formação de estruturas
-2/3	Paredes de domínio	Formação de estruturas
-1	Constante cosmológica	Expansão acelerada
<-1	Fluido fantasma	Expansão acelerada

Tabela 1 – Tabela de fluidos perfeitos e seus respectivos ω .

Consideraremos também a inclusão da correção quântica da RCC, dessa forma a densidade na equação (2.13) será uma combinação entre a densidade do fluido e a RCC, como descrito na equação a seguir,

$$\rho = \rho_f + \rho_\Lambda(H). \quad (2.16)$$

Onde tomaremos ρ_f como a densidade do fluido de radiação para uma descrição do universo primordial, e a RCC [16, 17, 18, 19, 15],

$$\rho_\Lambda(H) = \rho_\Lambda^0 + \frac{3M_p^2}{8\pi} \nu (H^2 - H_0^2). \quad (2.17)$$

Onde ρ_Λ^0 é a constante cosmológica, ν é o parâmetro fenomenológico, de acordo com [16] deve assumir valores no limite de $|\nu| < 10^{-6}$, M_p é a massa de Planck, H é o parâmetro de Hubble no modelo proposto, e H_0 é o parâmetro de Hubble atual. Por simplificação, usaremos $\frac{3M_p^2}{8\pi} = 1$. Temos que para a métrica KS o parâmetro de Hubble é dado por,

$$H = \frac{1}{3}(H_a + 2H_b). \quad (2.18)$$

Onde $H_a = \dot{a}/a$ e $H_b = \dot{b}/b$. Conseqüentemente também teremos que,

$$p = p_f + p_\Lambda. \quad (2.19)$$

Onde p_f é a pressão do fluido de radiação, p_Λ é a pressão da constante cosmológica.

Considerando agora (2.16) e (2.19) na equação (2.11) fazendo $c = 1$, teremos,

$$\dot{\rho}_f + \dot{\rho}_\Lambda + 3H(\rho_f + p_f + \rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0. \quad (2.20)$$

Como mostrado na equação (2.15) usando as relações apresentadas na Tabela 1, teremos as seguintes equações de estado $p_f = (1/3)\rho_f$ e $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Com esses dados e a equação (2.18), podemos resolver a expressão (2.20) e chegar na seguinte expressão (mais detalhes no Apêndice B),

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_f a^3 b^3 + \frac{4}{3}\rho_f(\dot{a}a^2 b^3 + 2\dot{b}a^3 b^2) + \frac{2\nu}{9}[\ddot{a}a b^3 - \dot{a}^3 b^3 - 4a^3 \dot{b}^3 \\ + 4a^3 b \ddot{b} + 2a^2 b^2(\dot{a}\ddot{b} + \ddot{a}\dot{b}) - 2a^2 b \dot{a}\dot{b}^2 - 2ab^2 \dot{a}^2 \dot{b}] = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Portanto obtemos a equação de conservação do nosso modelo, onde há uma troca energética entre a radiação e a RCC. Agora substituindo (2.16) e (2.17) na equação (2.13) e repetindo a equação (2.14) obteremos,

$$(18 - 4\nu)ab\dot{a}\dot{b} + (9 - 4\nu)a^2\dot{b}^2 - \nu b^2\dot{a}^2 + 9a^2 = 9a^2 b^2(\rho_f + \rho_\Lambda^0 - \nu H_0^2), \quad (2.22)$$

$$b^2\ddot{a} + ab\ddot{b} + b\dot{a}\dot{b} - ab^2 - a = 0. \quad (2.23)$$

Onde consideramos por simplificação $8\pi G = c = 1$. Resolvemos as equações (2.21), (2.22) e (2.23) numericamente no Maple para vários valores dos parâmetros presentes nas equações. Com intuito de estudar qualitativamente como cada parâmetro afeta a dinâmica evolutiva dos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$ juntamente com a densidade do nosso fluido de radiação $\rho_f(t)$.

2.5 Anisotropia

Como sabemos, através de dados observacionais hoje o universo em grande escala encontra-se em uma configuração homogênea e isotrópica, então esperamos que nosso modelo proposto (KS) que é homogêneo e anisotrópico tenda a uma configuração homogênea e isotrópica com o passar do tempo (do tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Podemos abordar a anisotropia de duas formas, a primeira, mais quantitativa, é estudada através do cálculo do parâmetro de anisotropia, a segunda forma, mais qualitativa, seria estudar a razão entre os fatores de escala através do tempo.

2.5.1 O parâmetro de anisotropia

A primeira forma que vou apresentar sobre como estudar a anisotropia de um modelo é através do cálculo do parâmetro de anisotropia (Δ). Temos mais informações

sobre esse parâmetro e sua definição em [11]. Δ depende do parâmetro de Hubble. O parâmetro de anisotropia, Δ , será calculado por,

$$\Delta \equiv \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{H_i - H}{H} \right)^2. \quad (2.24)$$

Para nosso modelo com a métrica KS, temos H que está definido na equação (2.18), e assim teremos $H_1 = \dot{a}/a$, e $H_2 = H_3 = \dot{b}/b$. Desenvolvendo o calculo chegamos a seguinte relação,

$$\Delta = 2 \left(\frac{H_1 - H_2}{H_1 + 2H_2} \right)^2. \quad (2.25)$$

Ao analisarmos essa equação, vemos que o maior valor da anisotropia ocorre quando $H_1 \rightarrow \infty$ ou então com $H_2 \rightarrow 0$. Ou seja o máximo local será,

$$\lim_{H_1 \rightarrow \infty} = 2 = \lim_{H_2 \rightarrow 0}. \quad (2.26)$$

Abordando a outra possibilidade para máximo, agora faremos $H_1 \rightarrow 0$ ou então com $H_2 \rightarrow \infty$ e teremos o seguinte máximo local,

$$\lim_{H_1 \rightarrow 0} = 0.5 = \lim_{H_2 \rightarrow \infty}. \quad (2.27)$$

O valor mínimo do parâmetro de anisotropia será quando $H_1 = H_2$, nesse caso $\Delta = 0$. Substituindo H_1 e H_2 na equação (2.25) ela pode ser reescrita da seguinte forma em termos dos fatores de escalas e suas derivadas,

$$\Delta = 2 \left(\frac{\dot{a}b - \dot{b}a}{\dot{a}b + 2\dot{b}a} \right). \quad (2.28)$$

O procedimento realizado para estudar a isotropização do nosso modelo é calcular o Δ em dois instantes de tempo distintos, o primeiro em um momento mais inicial, aonde a isotropia deve ser mais elevada, e posteriormente em um tempo mais avançado onde o Δ deve ser menor em comparação ao primeiro, como já estabelecido. Dessa forma somos capazes de mostrar que o modelo possui anisotropia inicialmente, e com a evolução do tempo tende a uma configuração mais isotrópica, como esperado para os dias atuais.

2.5.2 Interpretando a anisotropia graficamente

Uma outra maneira de estudar a anisotropia do modelo é através dos gráficos dos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$. De forma mais simplista, a anisotropia na métrica KS aparece quando o fator de escala da parte radial, $a(t)$, expande diferente do fator de escala da parte angular, $b(t)$. Portanto quando fazemos a razão $(b(t)/a(t))$ e plotamos em função do tempo, deveremos ter um ângulo de inclinação dessa curva diferente de zero durante

o intervalo de tempo que o modelo é anisotrópico, indicando que os fatores de escala expandem em uma taxa diferente. Entretanto quando olhamos para um tempo mais elevado e entramos em um regime isotrópico, $a(t)$ e $b(t)$ mesmo que com valores diferentes nesse tempo devem crescer com mesma taxa, portanto sua razão deverá tender a uma constante com a evolução temporal e possuindo um ângulo de inclinação da reta igual a zero nesse regime.

Essa forma de interpretação da anisotropia através de gráficos é mais simples que a anterior, mais visível e não necessita de tabelas para melhor entendimento nem para detalhamento dos dados. Entretanto com esse método perdemos a parte quantitativa dos dados. Como nosso objetivo foi estudar qualitativamente a dinâmica do modelo, focaremos nessa abordagem para exemplificar cada parâmetro, e também devido a facilidade e da dinamicidade de visualização da isotropização no tempo do modelo que estamos utilizando.

3 Estudo do modelo anisotrópico

Resolvemos numericamente o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem formado pelas equações (2.21), (2.22) e (2.23) no Programa Maplesoft, usando o método computacional Runge-Kutta com objetivo de investigar qualitativamente a dependência temporal dos fatores de escala, da densidade do fluido e da anisotropia.

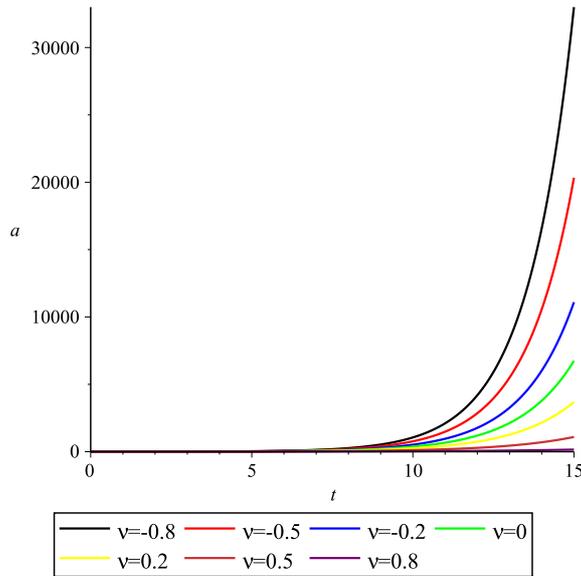
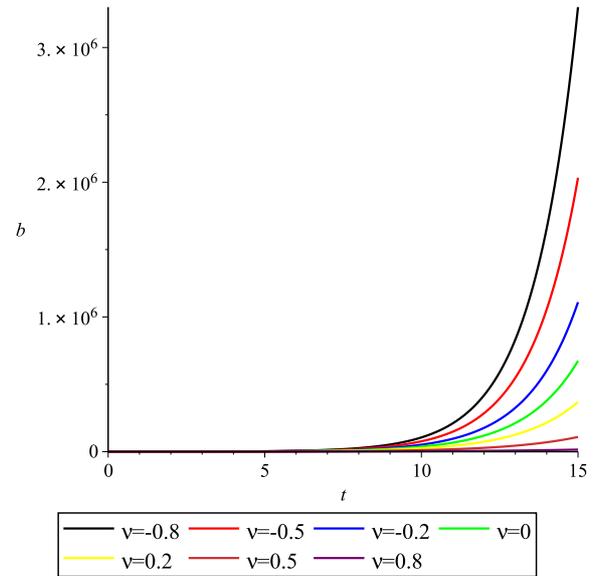
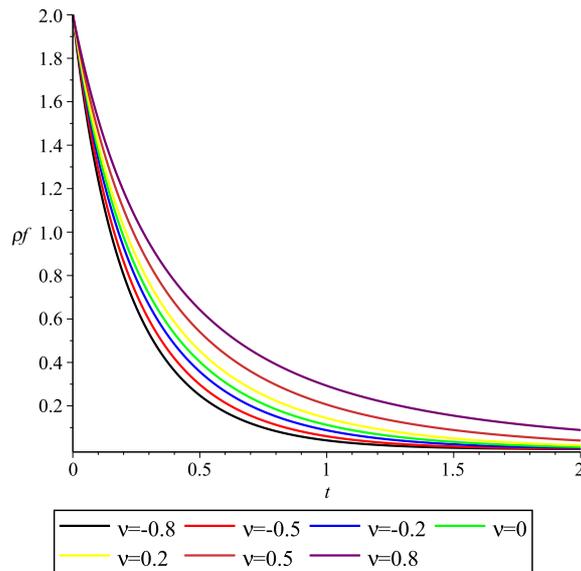
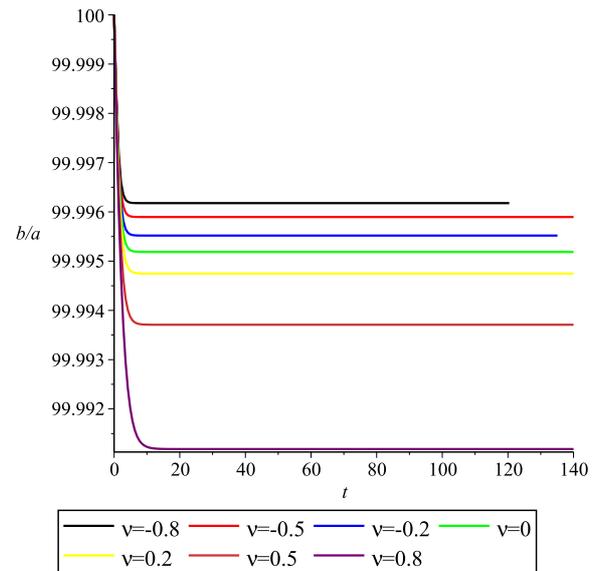
Atribuimos diversos valores para todos os parâmetros e condições iniciais do modelo estudado, mantendo os demais parâmetros e condições iniciais constantes. São esses ν , ρ_Λ^0 , H_0 e as condições iniciais $\rho_f(0)$, $a(0)$, $b(0)$, $\dot{a}(0)$ e $\dot{b}(0)$. Nos exemplos que serão mostrados, definimos todos os parâmetros, deixando livre $\dot{b}(0)$ para se adequar as equações. Quando estudamos a variação de $\dot{b}(0)$, deixamos livre o $b(0)$ para se adequar as equações. Os exemplos que serão apresentados foram escolhidos somente para uma melhor visualização dos resultados.

3.1 Variação do parâmetro fenomenológico ν

É importante destacar que vamos utilizar valores do parâmetro ν que não respeitam os limites impostos pelos resultados fenomenológicos [16]. Isso porque, dessa forma, os gráficos apresentam de forma mais clara as conclusões que obtivemos.

Ao variarmos o parâmetro ν mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto menor o valor de ν mais rápido é a expansão dos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 1 e 2 respectivamente. Quando variamos ν estudando a densidade do fluido de radiação, vemos que quanto maior o seu valor maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 3. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto menor o valor de ν mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 4. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\rho_\Lambda^0 = 1$, $H_0 = 1$, $\rho_f(0) = 2$, $a(0) = 1$, $b(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$.

Aprofundando um pouco mais a Figura 4, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $\nu = 0.2$ onde atribuimos alguns valores de tempo. Através da Tabela 2 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

Figura 1 – $a(t) \times t$ Figura 2 – $b(t) \times t$ Figura 3 – $\rho_f(t) \times t$ Figura 4 – $b(t)/a(t) \times t$

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	17.5712825609599	1757.03692374045	99.99480220
10	254.394375578862	25438.1015396387	99.99474823
30	$1.11766066041069 \times 10^7$	$1.11760196054006 \times 10^9$	99.99474805
50	$4.91034971321700 \times 10^{11}$	$4.91009182018818 \times 10^{13}$	99.99474797
100	$1.98663733718337 \times 10^{23}$	$1.98653299839897 \times 10^{25}$	99.99474796
150	$8.03756905052135 \times 10^{34}$	$8.03714691500191 \times 10^{36}$	99.99474796

Tabela 2 – Tabela da razão entre os fatores de escala com o parâmetro $\nu = 0.2$.

Podemos ainda estudar a isotropia de forma mais quantitativa como mencionado anteriormente através do parâmetro de anisotropia Δ . Temos na Tabela 3 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	1	100	1	99.99732141	$1.5944668 * 10^{-10}$
5	17.5712825609	1757.036923740	9.392516611862	939.2018454608	$2.4959851 * 10^{-13}$
10	254.394375578	25438.10153963	135.9795141706	13597.23721205	$7.4290129 * 10^{-18}$
50	$4.9103497 * 10^{11}$	$4.9100918 * 10^{13}$	$2.6246923 * 10^{11}$	$2.6245544 * 10^{13}$	$1.3379856 * 10^{-19}$
100	$1.9866373 * 10^{23}$	$1.9865329 * 10^{25}$	$1.0619023 * 10^{23}$	$1.0618465 * 10^{25}$	$4.9937497 * 10^{-20}$

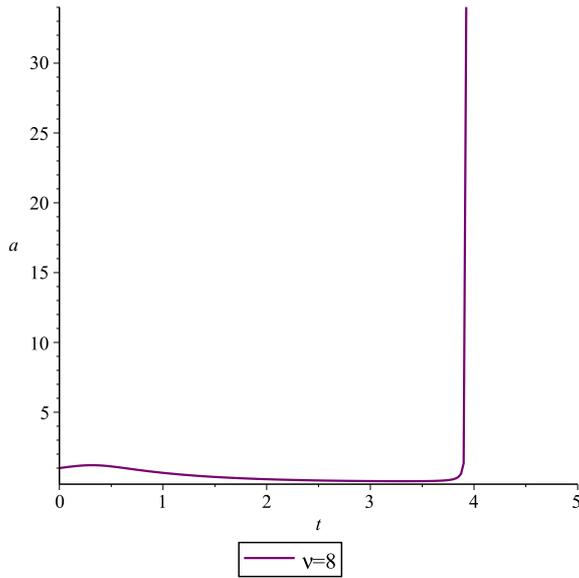
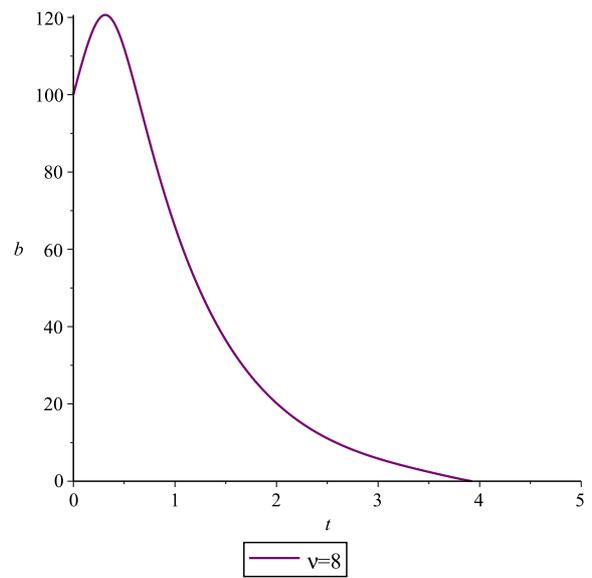
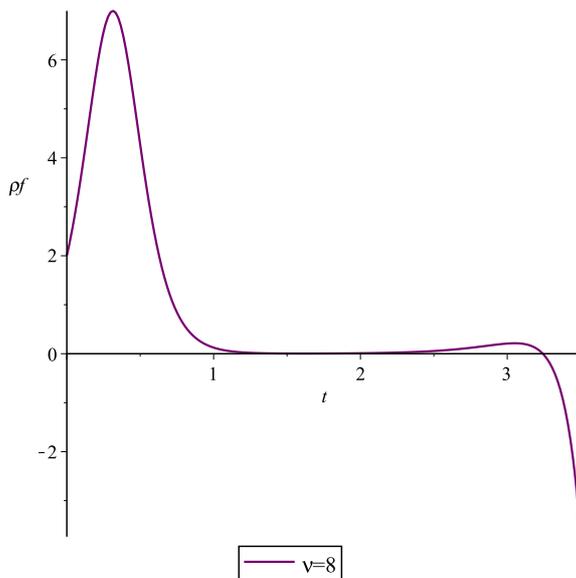
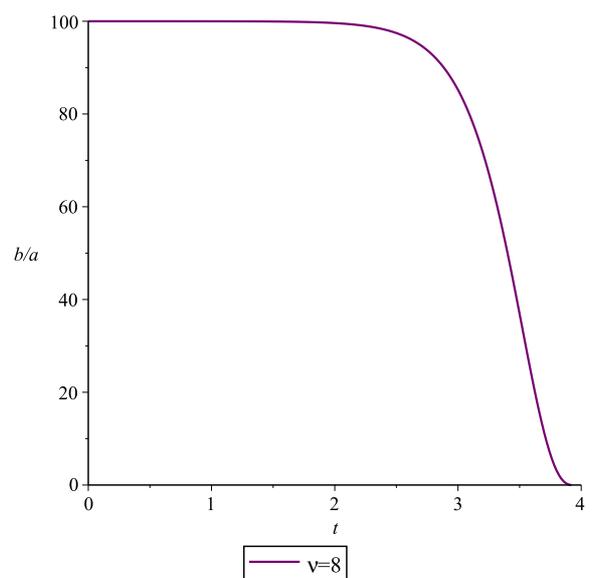
Tabela 3 – Tabela do calculo de Δ com o parâmetro $\nu = 0.2$.

3.1.1 Uma análise numérica

Fazendo uma análise numérica da equação (2.22), vemos que a única maneira do modelo não isotropizar é se o termo ν dominar o termo da densidade de energia da constante cosmológica, mas isso é fisicamente impossível. Nessa equação percebemos que a contribuição do termo com o parâmetro ν tem um sinal negativo, contrário ao da densidade de energia da constante cosmológica ρ_Λ^0 . Como vimos para $\nu = 0$ o universo está em expansão e rapidamente isotropiza. Fazendo o ν diferente de zero, positivo mas pequeno, de tal forma que o termo com ρ_Λ^0 domine sobre o termo com o ν , temos que o universo vai continuar expandindo mas em uma taxa menor e isotropizando mais lentamente. Se formos aumentando o valor de ν de tal forma que o termo com o ν , na equação (2.22), domine sobre o termo com ρ_Λ^0 aí teremos uma situação em que o universo não expandirá mais nem isotropizará. Mas isso não é fisicamente aceitável pois o termo em ν é uma correção ao termo com ρ_Λ^0 e não pode ser dominante! Já no caso do ν negativo não teremos problema pois o termo em ν terá o mesmo sinal do termo com ρ_Λ^0 e reforçará o comportamento do caso com $\nu = 0$, como já vimos pelos nossos resultados.

Para ilustrar esse caso consideremos um exemplo onde $\rho_\Lambda^0 = 1$ e um enorme valor não físico de $\nu = 8$. Vamos introduzir alguns gráficos para ilustrar o que aconteceria nessa região de "dominância quântica".

Na Figura 5 o fator de escala $a(t)$ expande lentamente depois inicia uma contração e depois ao se aproximar de $t = 4$ inicia uma expansão exponencial até que abruptamente para a expansão devido a uma singularidade em $t = 3.9269026$. A Figura 6 mostra o comportamento do fator de escala $b(t)$, que expande lentamente até atingir um valor máximo em aproximadamente $t = 0.5$. Depois inicia uma contração até atingir o valor zero e dar origem a uma singularidade (algo parecido com um *big crunch*) em $t = 3.9269026$. A Figura 7 mostra a densidade do fluido de radiação $\rho_f(t)$ expande lentamente até atingir um valor máximo em um instante de tempo um pouco menor que $t = 0.5$. Depois inicia uma

Figura 5 – $a(t) \times t$ Figura 6 – $b(t) \times t$ Figura 7 – $\rho_f(t) \times t$ Figura 8 – $b(t)/a(t) \times t$

contração até atingir o valor zero e continua a contração se tornando negativo e divergindo até dar origem a uma singularidade (algo parecido com um *big crunch*) em $t = 3.9269026$. Para completar esta parte, na Figura 8 pode-se observar que a razão $b(t)/a(t)$ começa se mantendo aproximadamente constante e depois começa a diminuir em um instante entre $t = 2$ e $t = 2.5$. E continua a diminuir até chegar a zero no instante $t = 3.9269026$, quando $b(t)$ vai a zero. Isso nos mostra que o modelo não está se tornando isotrópico.

3.2 Variação do parâmetro ρ_Λ^0

Ao variarmos o parâmetro ρ_Λ^0 mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto maior o valor de ρ_Λ^0 mais rápido é a expansão dos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 9 e 10 respectivamente. Quando variamos ρ_Λ^0 estudando a densidade do fluido, vemos que quanto menor o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 11. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto maior o valor de ρ_Λ^0 mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 12. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $H_0 = 1$, $\rho_f(0) = 5$, $a(0) = 1$, $b(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$.

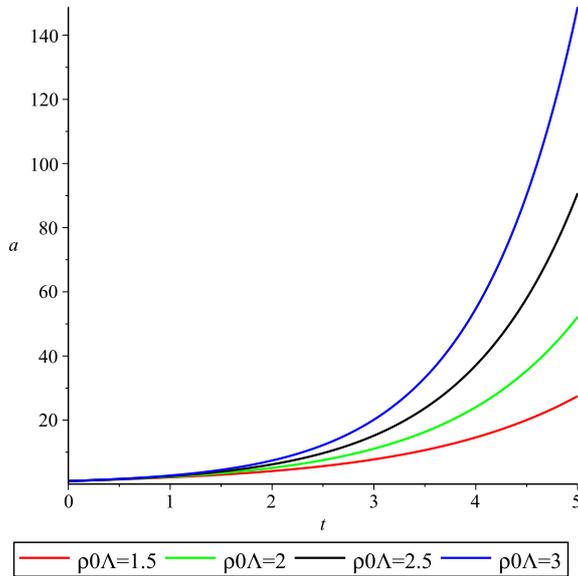


Figura 9 – $a(t) \times t$

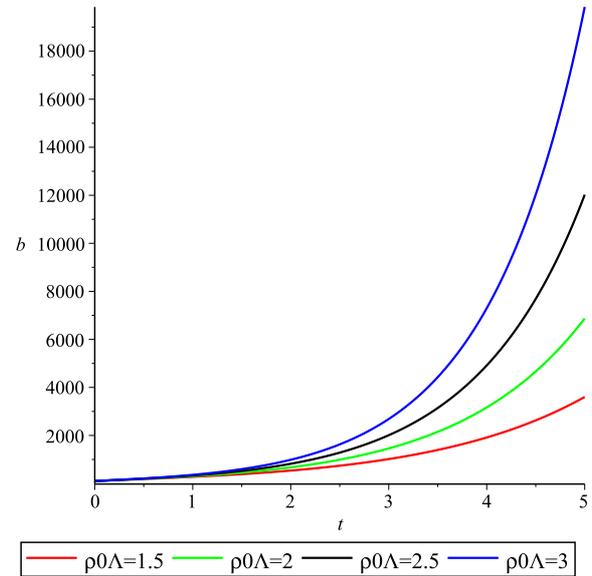
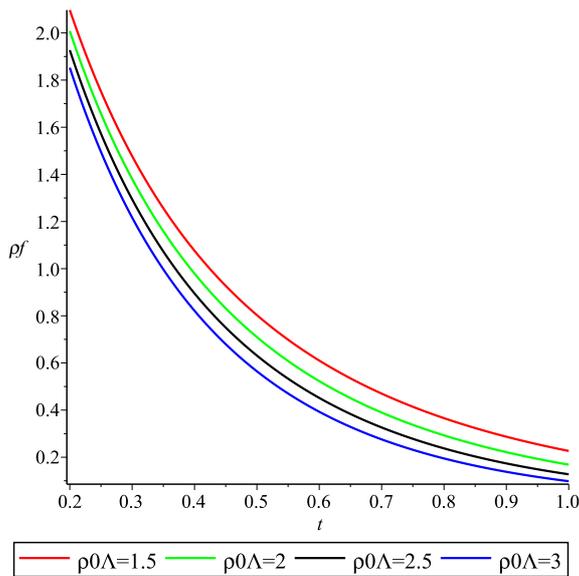
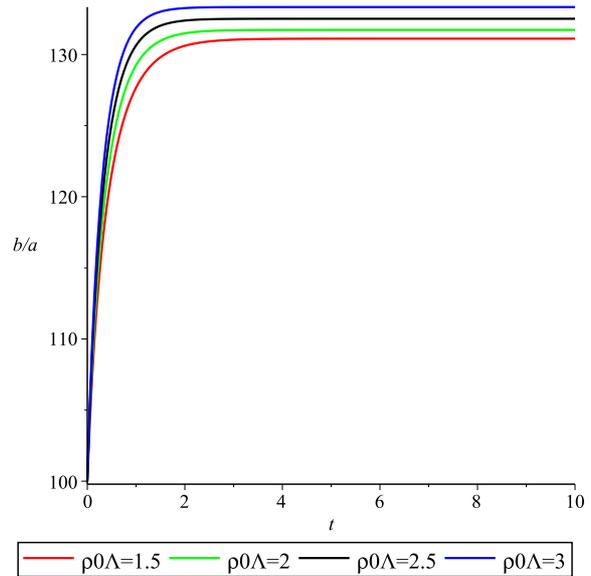


Figura 10 – $b(t) \times t$

Aprofundando um pouco mais a Figura 12, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $\rho_\Lambda^0 = 3$ onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 4 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

Figura 11 – $\rho_f(t) \times t$ Figura 12 – $b(t)/a(t) \times t$

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	148.812631799423	19841.7310589383	133.3336480
10	22085.7313018137	$2.94477131556790 \times 10^6$	133.3336567
30	$1.07151897969842 \times 10^{13}$	$1.42869543796508 \times 10^{15}$	133.3336567
50	$5.19861797756547 \times 10^{21}$	$6.93150744783021 \times 10^{23}$	133.3336567
100	$2.69530582057415 \times 10^{43}$	$3.59374981006758 \times 10^{45}$	133.3336567
110	$5.93679522538187 \times 10^{47}$	$7.91574616533920 \times 10^{49}$	133.3336567

Tabela 4 – Tabela da razão entre os fatores de escala com o parâmetro $\rho_\Lambda^0 = 3$.

Temos na Tabela 5 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

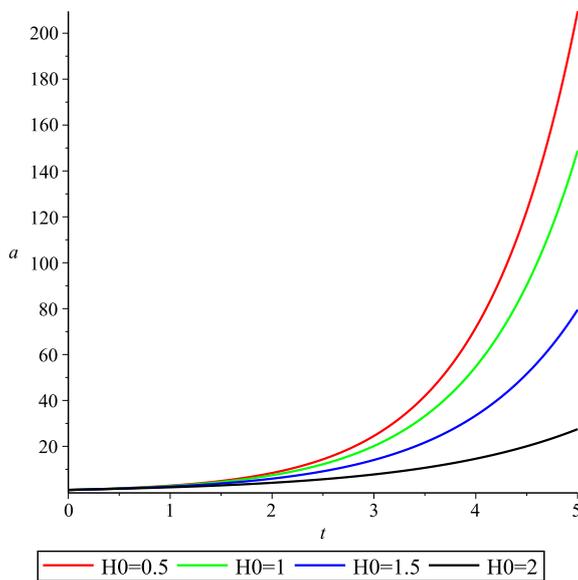
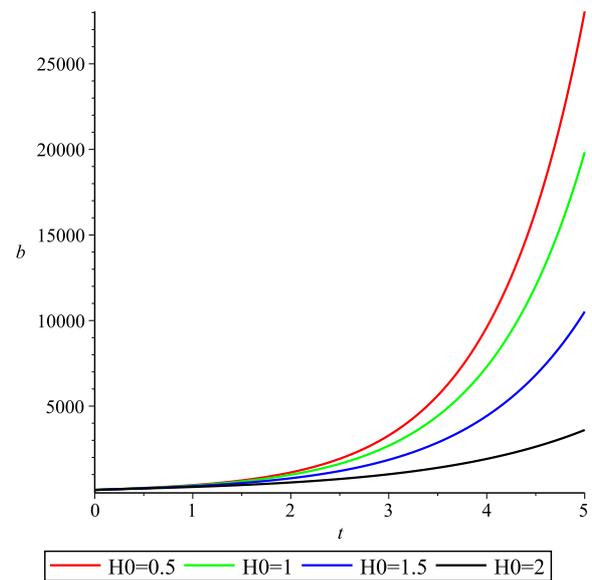
t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	1	100	1	217.6823503	0.0778053339
5	148.812631799	19841.73105893	148.81261677290	19841.732990795	8.722891×10^{-15}
10	22085.7313018	2.944771315×10^6	22085.731301814	2.94477131×10^6	0

Tabela 5 – Tabela do cálculo de Δ com o parâmetro $\rho_\Lambda^0 = 3$.

3.3 Variação do parâmetro H_0

Ao variarmos o parâmetro H_0 mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo.

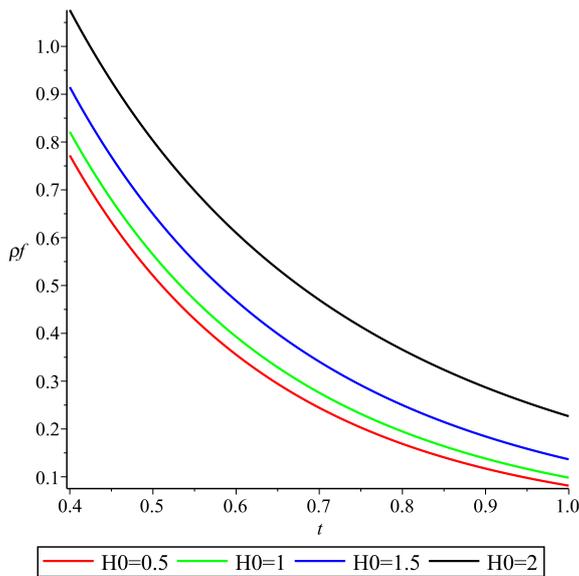
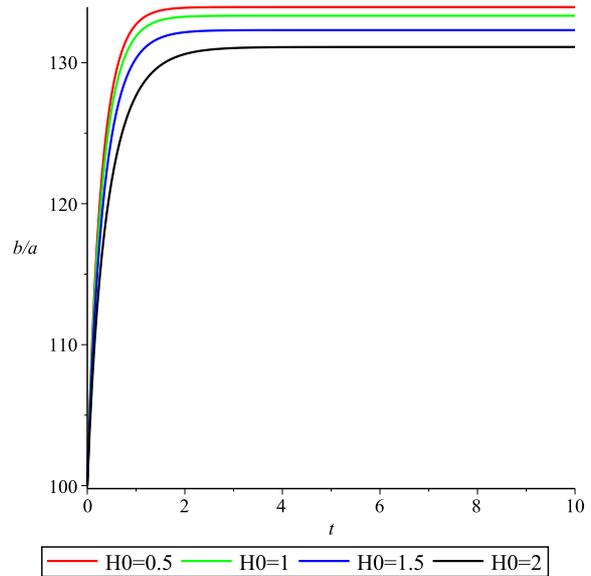
Assim chegamos a conclusão de que quanto menor de H_0 mais rápido é a expansão dos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 13 e 14 respectivamente. Quando variamos H_0 estudando a densidade do fluido, vemos que quanto maior o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 15. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto menor o valor de H_0 mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 16. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $\rho_\Lambda^0 = 3$, $\rho_f(0) = 5$, $a(0) = 1$, $b(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$.

Figura 13 – $a(t) \times t$ Figura 14 – $b(t) \times t$

Aprofundando um pouco mais a Figura 16, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $H_0 = 1.5$, onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 6 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	79.5186255986080	10521.0883107459	132.3097354
10	6039.74653923350	$7.99117629723299 * 10^5$	132.3097955
30	$2.01010346771680 * 10^{11}$	$2.65956378829152 * 10^{13}$	132.3097955
50	$6.68987665266469 * 10^{18}$	$8.85136212106203 * 10^{20}$	132.3097955
100	$4.27481564542590 * 10^{37}$	$5.65599984020252 * 10^{39}$	132.3097955
150	$1.42271242810355 * 10^{45}$	$1.88238790475515 * 10^{47}$	132.3097956

Tabela 6 – Tabela da razão entre os fatores de escala com o parâmetro $H_0 = 1.5$.

Figura 15 – $\rho_f(t) \times t$ Figura 16 – $b(t)/a(t) \times t$

Temos na Tabela 7 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	1	100	1	9205.3501436	0.06498589746
5	79.518625598	10521.08831074	68.86511036181	9111.537012654	$4.172442 * 10^{-13}$
30	$2.010103 * 10^{11}$	$2.6595637 * 10^{13}$	$1.7408006 * 10^{11}$	$2.30324980 * 10^{13}$	$9.3306324 * 10^{-20}$
50	$6.689876 * 10^{18}$	$8.8513621 * 10^{20}$	$5.7936031 * 10^{18}$	$7.66550445 * 10^{20}$	$8.4502544 * 10^{-21}$

Tabela 7 – Tabela do calculo de Δ com o parâmetro $H_0 = 1.5$.

3.4 Variação da condição inicial $\rho_f(0)$

Ao variarmos a condição inicial $\rho_f(0)$ mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto menor o valor de $\rho_f(0)$ mais rápido é a expansão do fator de escala $a(t)$, e quanto maior seu valor mais rápido será a expansão para $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 17 e 18 respectivamente. Quando variamos $\rho_f(0)$ estudando a densidade do fluido, vemos que quanto maior o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 19. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que o modelo começa a isotropizar no tempo próximo a 3,47 independente de $\rho_f(0)$. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura

20. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $\rho_{\Lambda}^0 = 1$, $H_0 = 1$, $a(0) = 1$, $b(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$.

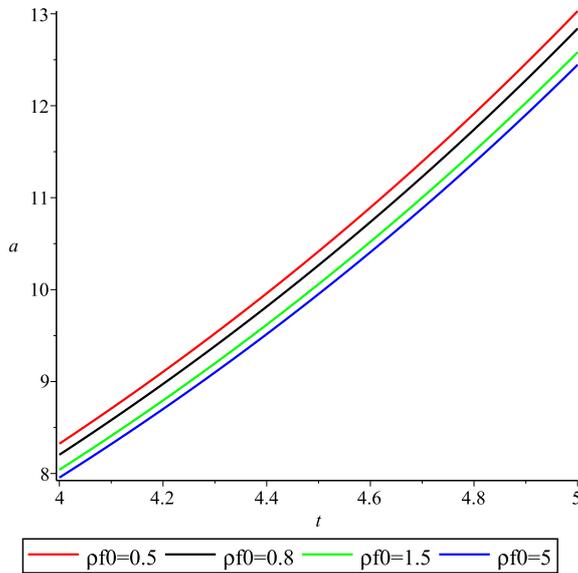


Figura 17 – $a(t) \times t$

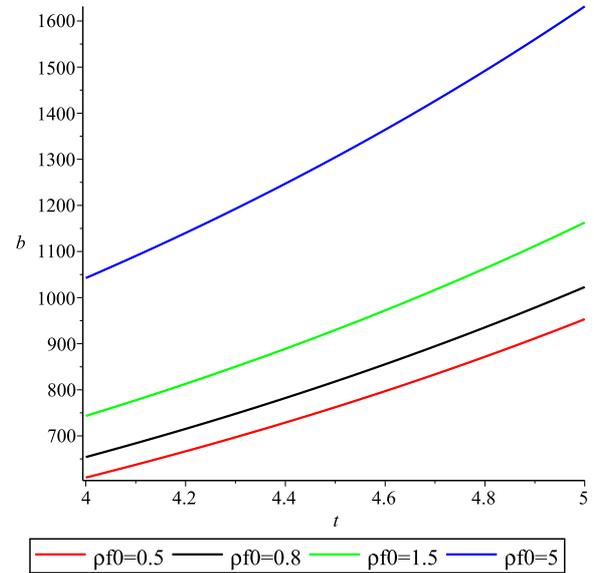


Figura 18 – $b(t) \times t$

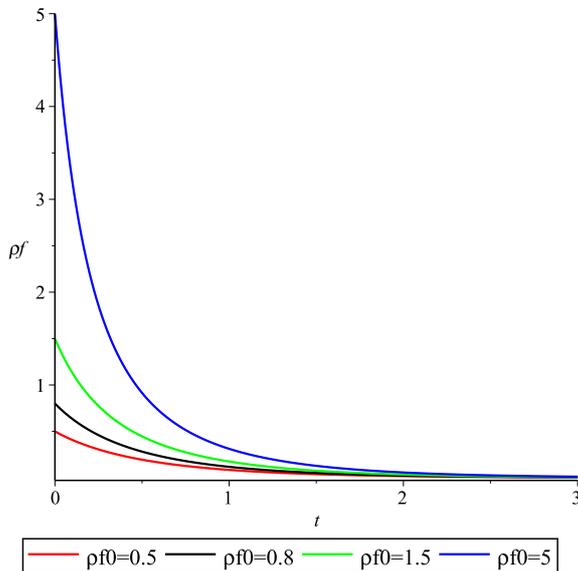


Figura 19 – $\rho_f(t) \times t$

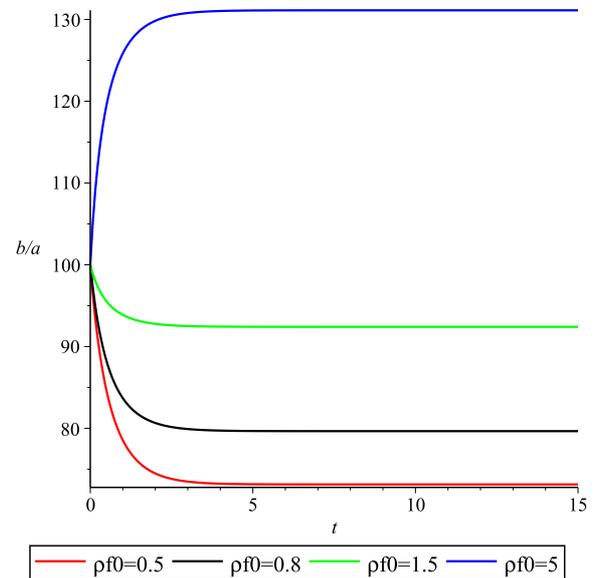


Figura 20 – $b(t)/a(t) \times t$

Aprofundando um pouco mais a Figura 20, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $\rho_f(0) = 5$ onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 8 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	12.4461757328528	1631.65947255373	131.0972550
10	116.460680604091	15270.2819832200	131.1196354
30	$8.92537590529713 * 10^5$	$1.17029226771336 * 10^8$	131.1196616
50	$6.84027811511620 * 10^9$	$8.96894951211909 * 10^{11}$	131.1196615
100	$3.51715749053348 * 10^{19}$	$4.61168499699670 * 10^{21}$	131.1196615
150	$1.80846410211647 * 10^{29}$	$2.37125200955179 * 10^{31}$	131.1196616

Tabela 8 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $\rho_f(0) = 5$.

Temos na Tabela 9 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	1	100	1	176.3833591	0.05692178514
5	12.446175732	1631.65947255	5.567653451034	730.278999509	$5.8590239 * 10^{-8}$
10	116.46068060	15270.2819832	52.08279735803	6829.08155232	$8.2095189 * 10^{-14}$
30	$8.9253759 * 10^5$	$1.1702922 * 10^8$	$3.99154944 * 10^5$	$5.2337061 * 10^7$	$4.0735755 * 10^{-20}$
50	$6.8402781 * 10^9$	$8.9689495 * 10^{11}$	$3.05906537 * 10^9$	$4.0110361 * 10^{11}$	0

Tabela 9 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $\rho_f(0) = 5$.

3.5 Variação da condição inicial $a(0)$

Ao variarmos a condição inicial $a(0)$ mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto maior o valor de $a(0)$ mais rápido é a expansão dos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 21 e 22 respectivamente. Quando variamos $a(0)$ estudando a densidade do fluido, vemos que quanto menor o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 23. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto maior o valor de $a(0)$ mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 24. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $\rho_\Lambda^0 = 1$, $H_0 = 1$, $\rho_f(0) = 5$, $b(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$.

Aprofundando um pouco mais a Figura 24, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $a(0) = 2$ onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 10 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

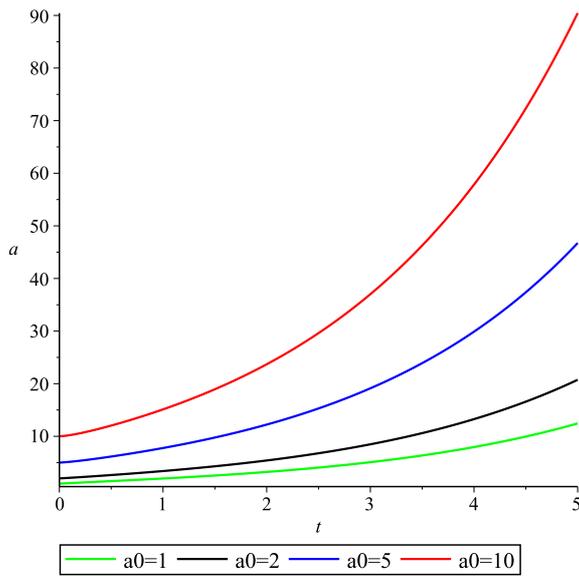


Figura 21 – $a(t) \times t$

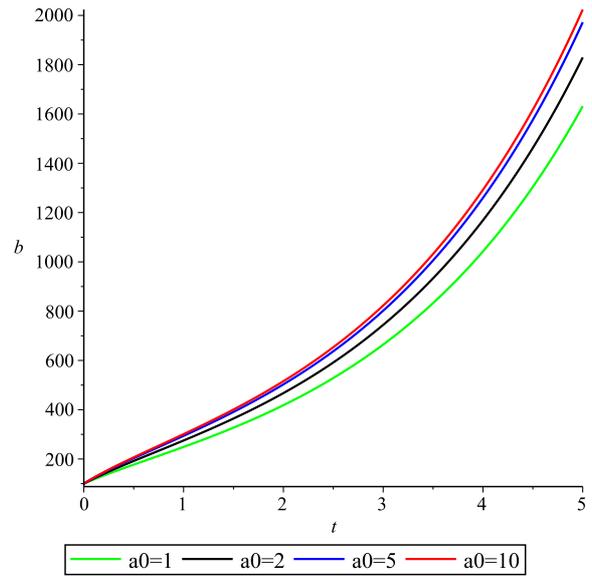


Figura 22 – $b(t) \times t$

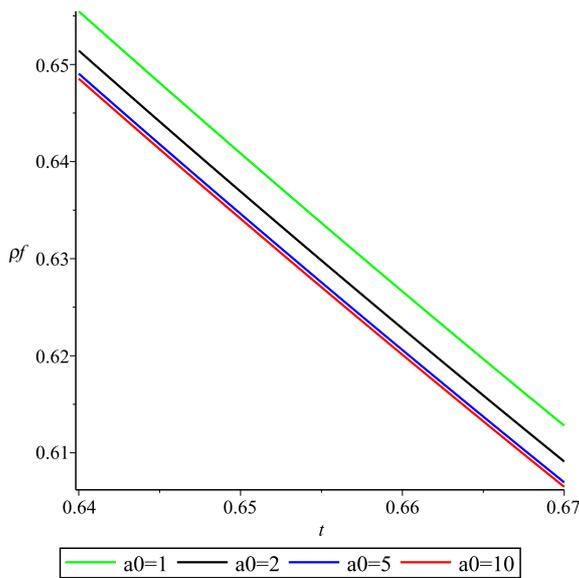


Figura 23 – $\rho_f(t) \times t$

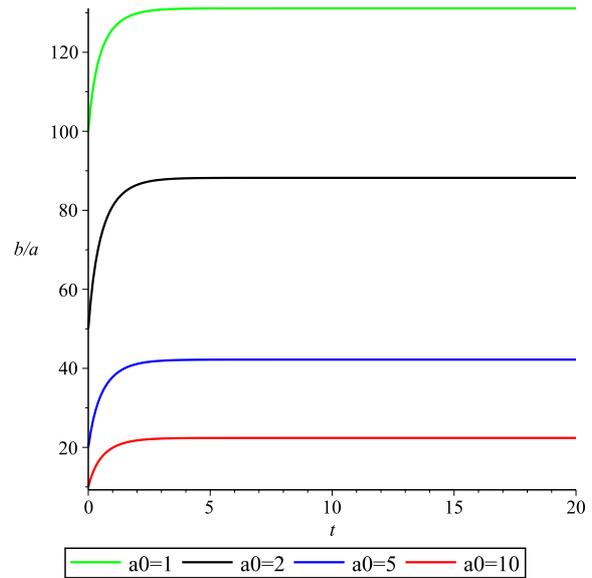


Figura 24 – $b(t)/a(t) \times t$

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	20.7455679670933	1829.53542805753	88.18921857
10	194.095656003129	17123.1940820405	88.22038799
30	$1.48752043918752 \times 10^6$	$1.31229685972389 \times 10^8$	88.22042545
50	$1.14001396371302 \times 10^{10}$	$1.00572516868347 \times 10^{12}$	88.22042543
100	$5.86176274331758 \times 10^{19}$	$5.17127202951493 \times 10^{21}$	88.22042544
150	$3.01402137487187 \times 10^{29}$	$2.65898247928978 \times 10^{31}$	88.22042541

Tabela 10 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $a(0) = 2$.

Temos na Tabela 11 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	2	100	1	215.1759274	0.09432465974
5	20.7455679670	1829.5354280	9.27689583802	818.991491005	$2.5053676 * 10^{-7}$
10	194.095656003	17123.194082	86.8021733019	7657.73121846	$3.6466146 * 10^{-13}$
30	$1.4875204 * 10^6$	$1.312296 * 10^8$	$6.6523936 * 10^5$	$5.8687699 * 10^7$	$2.6242785 * 10^{-20}$
50	$1.1400139 * 10^{10}$	$1.005725 * 10^{12}$	$5.0982974 * 10^9$	$4.4977396 * 10^{11}$	$8.4523702 * 10^{-21}$

Tabela 11 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $a(0) = 2$.

3.6 Variação da condição inicial $b(0)$

Ao variarmos a condição inicial $b(0)$ mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto menor o valor de $b(0)$ mais rápido é a expansão do fator de escala $a(t)$ e mais lenta para $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 25 e 26 respectivamente. Quando variamos $b(0)$ estudando a densidade do fluido, vemos que quanto menor o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 27. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto menor o valor de $b(0)$ mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica, exceto para valores menores que 1. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 28. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $\rho_\Lambda^0 = 1$, $H_0 = 1$, $\rho_f(0) = 5$, $a(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$.

Aprofundando um pouco mais a Figura 28, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $b(0) = 5$ onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 12 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	883.173250617987	103.273054665791	0.1169340836
10	8263.23837426830	966.549846365428	0.1169698613
30	$6.33283474117074 * 10^7$	$7.40749305514439 * 10^6$	0.1169696251
50	$4.85339182814354 * 10^{11}$	$5.67699422616228 * 10^{10}$	0.1169696251
100	$2.49553375430983 * 10^{21}$	$2.91901647673664 * 10^{20}$	0.1169696251
150	$1.28316209725391 * 10^{31}$	$1.50090989462252 * 10^{30}$	0.1169696252

Tabela 12 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $b(0) = 5$.

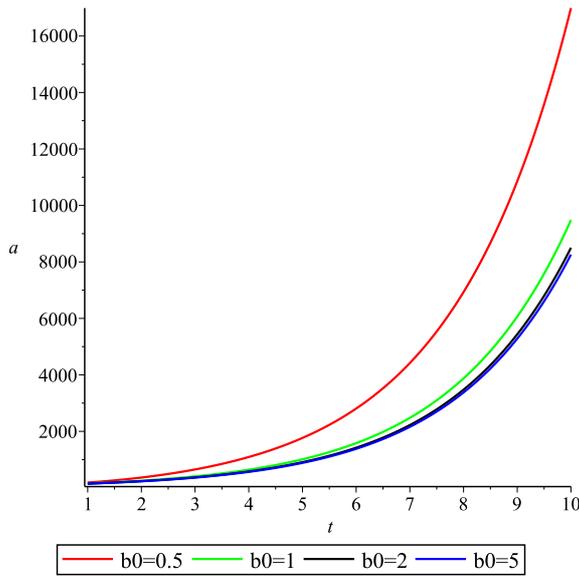


Figura 25 – $a(t) \times t$

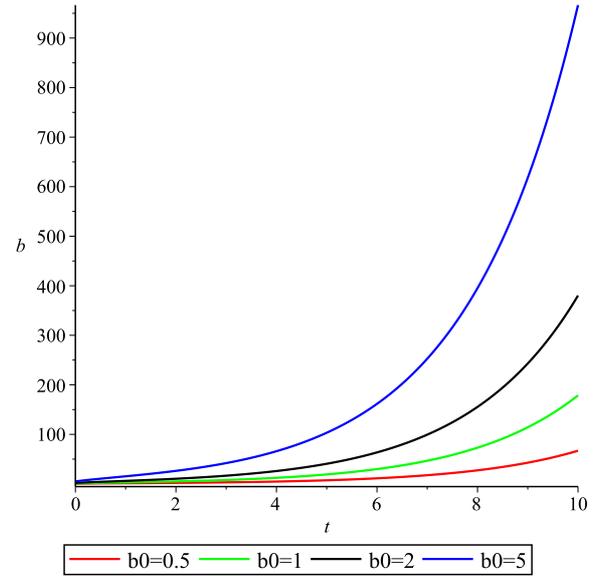


Figura 26 – $b(t) \times t$

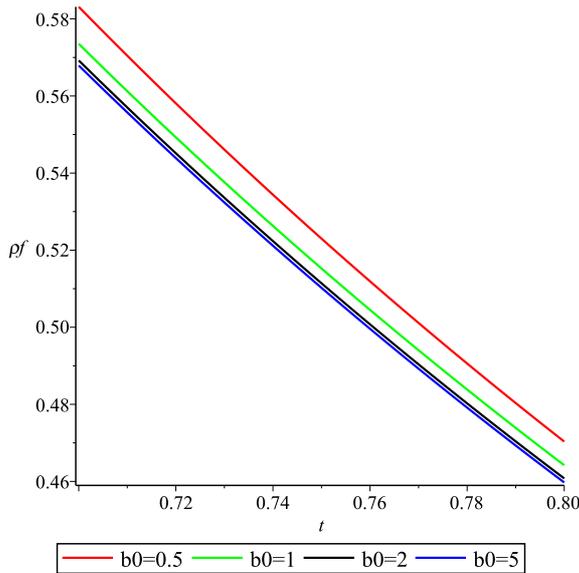


Figura 27 – $\rho_f(t) \times t$

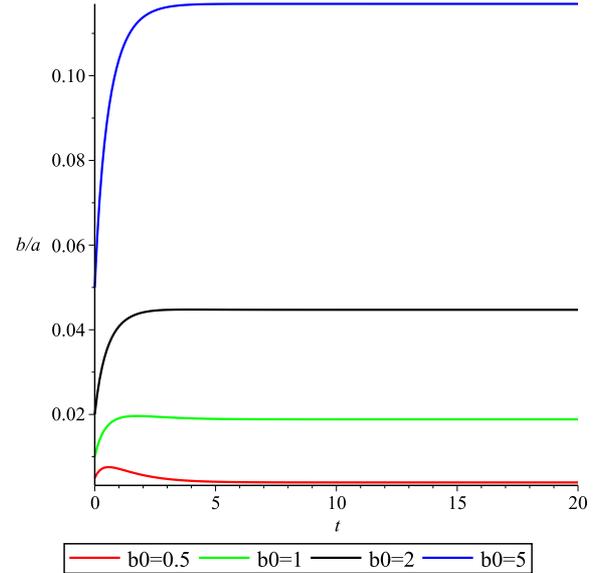


Figura 28 – $b(t)/a(t) \times t$

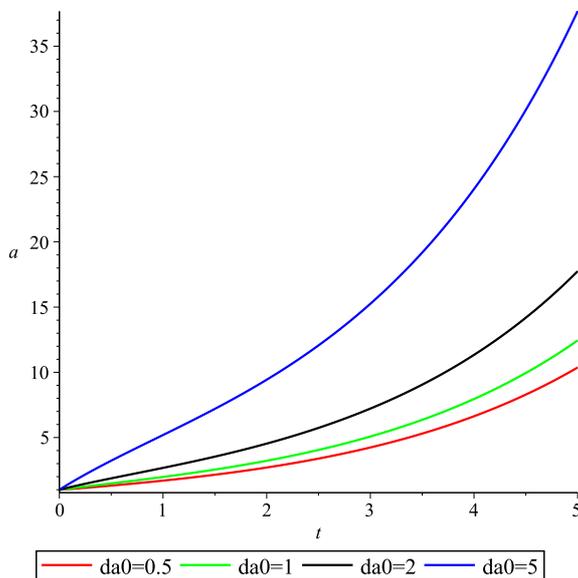
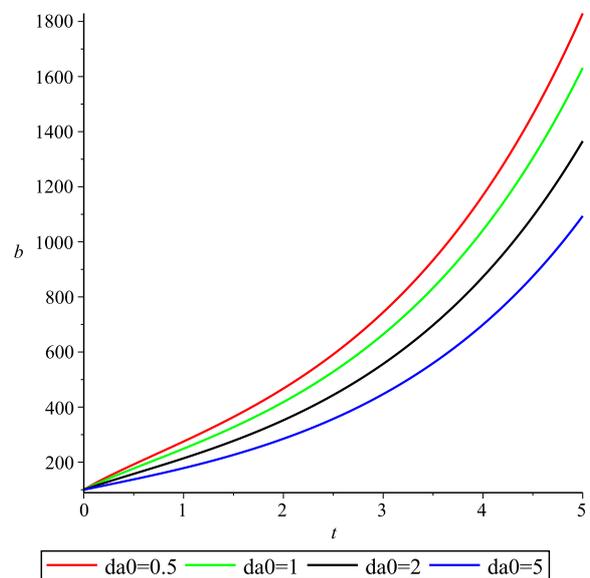
Temos na Tabela 13 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	100	5	1	13.2385820	0.9411504178
5	883.173250617	103.273054665	394.911268824	103.273054665	$2.9165117 * 10^{-7}$
10	8263.23837426	966.549846365	3695.44220657	432.253900667	$2.5409618 * 10^{-12}$
30	$6.3328347 * 10^7$	$7.4074930 * 10^6$	$2.8321297 * 10^7$	$3.3127316 * 10^6$	0

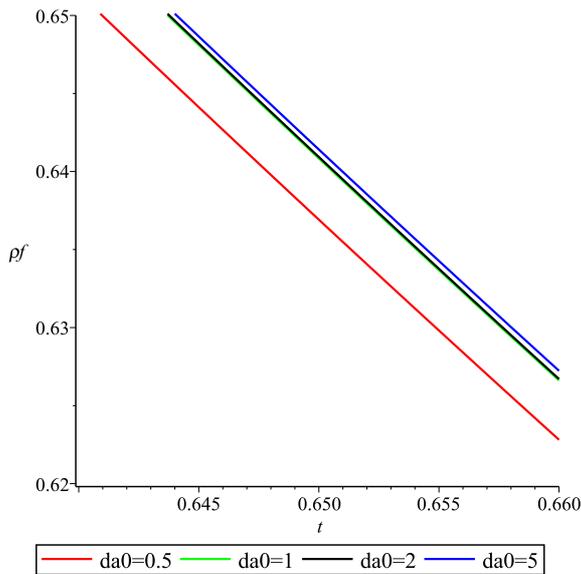
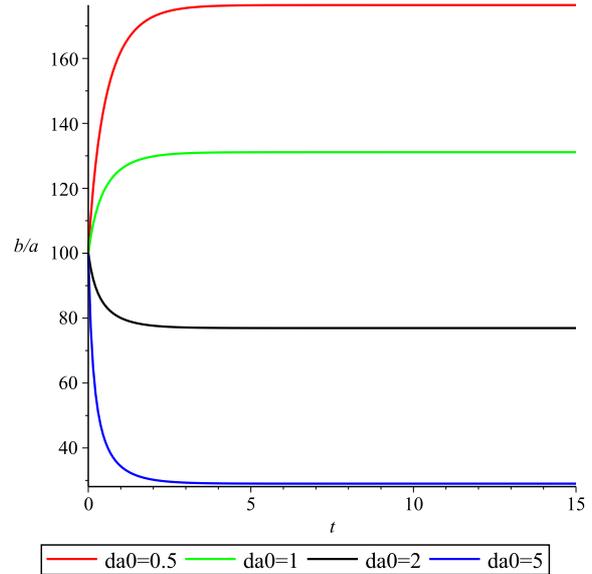
Tabela 13 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $b(0) = 5$.

3.7 Variação da condição inicial $\dot{a}(0)$

Ao variarmos a condição inicial $\dot{a}(0)$ mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto maior o valor de $\dot{a}(0)$ mais rápido é a expansão do fator de escala $a(t)$ e mais lenta para $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 29 e 30 respectivamente. Quando variamos $\dot{a}(0)$ estudando a densidade do fluido, vemos que quanto maior o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 31. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto maior o valor de $\dot{a}(0)$ mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 32. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $\rho_{\Lambda}^0 = 1$, $H_0 = 1$, $\rho_f(0) = 5$, $a(0) = 1$ e $b(0) = 100$.

Figura 29 – $a(t) \times t$ Figura 30 – $b(t) \times t$

Aprofundando um pouco mais a Figura 32, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $\dot{a}(0) = 2$ onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 14 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor

Figura 31 – $\rho_f(t) \times t$ Figura 32 – $b(t)/a(t) \times t$

estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	17.7494380318679	1365.74472736613	76.94580103
10	166.121499169345	12780.2140383108	76.93293223
30	$1.27313122690880 \times 10^6$	$9.79456970460934 \times 10^7$	76.93291546
50	$9.75709250236515 \times 10^9$	$7.50641572595582 \times 10^{11}$	76.93291546
100	$5.01693499378120 \times 10^{19}$	$3.85967435732402 \times 10^{21}$	76.93291545
150	$2.57962476523093 \times 10^{29}$	$1.98458053975615 \times 10^{31}$	76.93291547

Tabela 14 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $\dot{a}(0) = 2$.

Temos na Tabela 15 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	1	100	2	126.132731	0.01100675912
5	17.7494380318	1365.74472736	7.94537831358	611.057352302	5.5761873×10^{-8}
10	166.121499169	12780.2140383	74.2918513276	5715.48631204	$9.0705589 \times 10^{-14}$
30	1.2731312×10^6	9.7945697×10^7	5.6936159×10^5	4.3802647×10^7	0

Tabela 15 – Tabela do cálculo de Δ com a condição inicial $\dot{a}(0) = 2$.

3.8 Variação da condição inicial $\dot{b}(0)$

Ao variarmos a condição inicial $\dot{b}(0)$ mantendo os demais parâmetros fixos, chegamos a um padrão de comportamento de como esse parâmetro afeta a dinâmica desse universo. Assim chegamos a conclusão de que quanto menor o valor de $\dot{b}(0)$ mais rápido é a expansão do fator de escala $a(t)$ e mais lenta para $b(t)$. Temos um exemplo desse comportamento nas Figuras 33 e 34 respectivamente. Quando variamos $\dot{b}(0)$ estudando a densidade do fluido, vemos que quanto menor o seu valor, maior é o valor da densidade e mais lentamente tende a zero com a evolução temporal. Temos um exemplo desse comportamento na Figura 35. E quando estudamos a isotropia graficamente, vemos que quanto maior o valor de $\dot{b}(0)$ mais rápido nosso modelo tende a uma configuração isotrópica. Podemos ver um exemplo desse comportamento na Figura 36. Nos exemplos mostrados foram utilizados os valores $\nu = 0.5$, $\rho_\Lambda^0 = 1$, $H_0 = 1$, $\rho_f(0) = 5$, $a(0) = 100$ e $\dot{a}(0) = 1$, deixando $b(0)$ se adequando a variação de $\dot{b}(0)$.

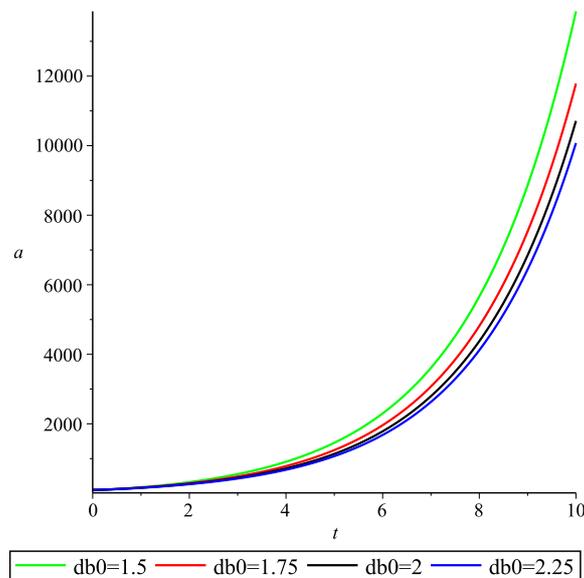


Figura 33 – $a(t) \times t$

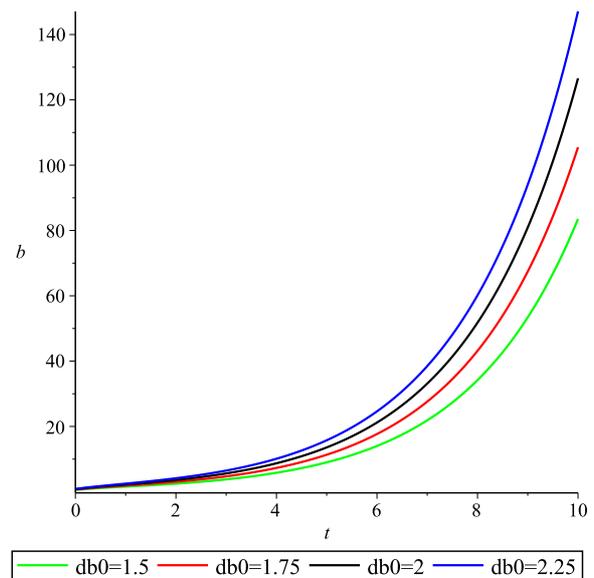
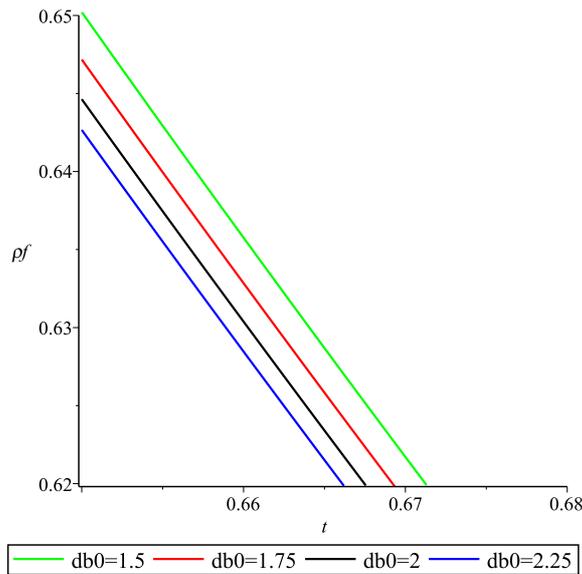
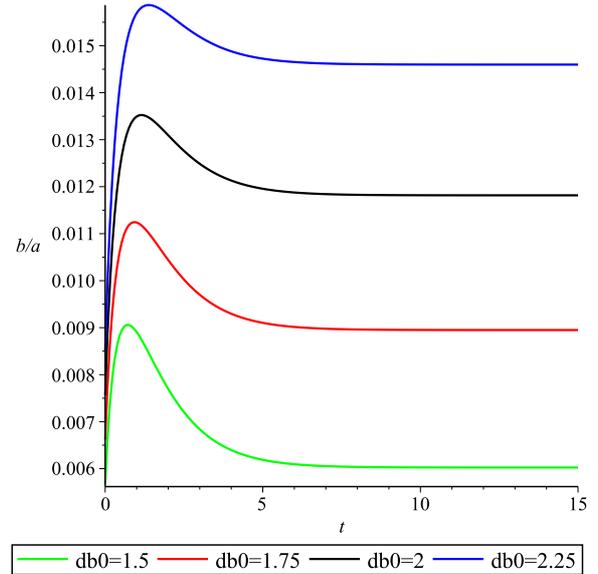


Figura 34 – $b(t) \times t$

Figura 35 – $\rho_f(t) \times t$ Figura 36 – $b(t)/a(t) \times t$

Aprofundando um pouco mais a Figura 36, podemos estudar os valores dessa razão, para isso construímos uma tabela para o caso $\dot{b}(0) = 1.75$ onde atribuímos alguns valores de tempo. Através da Tabela 16 podemos ver que a razão $b(t)/a(t)$ tende a um valor estável, indicando que o modelo começa com uma configuração anisotrópica e tende a uma configuração isotrópica com a evolução temporal, quando a razão tende a uma constante.

t	$a(t)$	$b(t)$	$b(t)/a(t)$
5	1245.30026616448	11.3358856248413	0.009102933589
10	11784.8558708880	105.496517697337	0.008951871696
30	$9.03307514164786 * 10^7$	$8.08450437966042 * 10^5$	0.008949891651
50	$6.92281715555249 * 10^{11}$	$6.19584634643352 * 10^9$	0.008949891650
100	$3.55959778843970 * 10^{21}$	$3.18580145289375 * 10^{19}$	0.008949891653
150	$1.83028609243833 * 10^{31}$	$1.63808622183047 * 10^{29}$	0.008949891654

Tabela 16 – Tabela da razão entre os fatores de escala com a condição inicial $\dot{b}(0) = 1.75$.

Temos na Tabela 17 alguns valores de tempo para obtermos os parâmetros necessários para efetuar o cálculo de Δ em (2.28). Com essa tabela podemos ver que o Δ tende para zero de acordo com que o tempo aumenta, indicando novamente que a métrica de KS está tendendo a uma configuração isotrópica.

t	$a(t)$	$b(t)$	$\dot{a}(t)$	$\dot{b}(t)$	Δ
0	100	0.6623027296	1	1.75	0.4943498944
5	1245.30026616	11.3358856248	568.94159594	5.02024663009	0.00021771024
10	11784.8558708	105.496517697	5271.89236870	47.1725926857	$4.2825181 * 10^{-8}$
25	$9.6543671 * 10^6$	86405.5396174	$4.3175642 * 10^6$	38641.7320347	$2.554739 * 10^{-19}$
50	$6.922817 * 10^{11}$	$6.1958463 * 10^9$	$3.095977 * 10^{11}$	$2.7708667 * 10^9$	$6.039354 * 10^{-20}$

Tabela 17 – Tabela do calculo de Δ com a condição inicial $\dot{b}(0) = 1.75$.

4 Conclusões

Após estudarmos o modelo cosmológico homogêneo e anisotrópico de Kantowski-Sachs, na presença da RCC e do fluido perfeito de radiação como conteúdo material, podemos concluir que o modelo apresenta expansão acelerada dos fatores de escala para todos os parâmetros e condições iniciais estudadas, a densidade do fluido de radiação sempre tende a zero com a evolução temporal, e o modelo sempre vai tender a uma configuração isotrópica.

No decorrer desse projeto, aprofundamos os conhecimentos em cosmologia e em relatividade geral. Estudando diversos conceitos, desde aqueles introdutórios, até alguns mais elaborados. Resolvemos as equações que dão as dinâmicas dos fatores de escala, para essa o fluido que permeia o universo. Obtivemos soluções numéricas para as equações que descreviam modelos homogêneos e anisotrópicos. Em cada caso, estudamos a dependência dos fatores de escala e da densidade do fluido de radiação com o tempo, variando todos os parâmetros presentes nas soluções e as condições iniciais. Analisando os resultados obtidos chegamos a algumas características do universo preenchido por esses fluidos.

A RCC é uma boa candidata para representar a energia escura do Universo. Ela altera a taxa de expansão do Universo em relação ao caso em que a CC é constante. Para valores negativos de ν a taxa de expansão é maior do que no caso em que a CC é constante e o modelo tende a isotropia mais rapidamente. Já para valores positivos de ν a taxa de expansão é menor do que no caso em que a CC é constante e o modelo tende a isotropia mais lentamente. Ao estudarmos a densidade do fluido de radiação vemos que valores positivos de ν possuem maior densidade em relação ao caso com CC constante, e vemos também que valores negativos de ν possuem menor densidade em relação ao caso com CC constante.

Quando estudamos a variação os parâmetros e das condições iniciais vemos que, o fator de escala $a(t)$ possui expansão mais acelerada para valores mais elevados de ρ_Λ^0 , $a(0)$ e $\dot{a}(0)$, e para pequenos valores de ν , H_0 , $\rho_f(0)$, $b(0)$ e $\dot{b}(0)$. O fator de escala $b(t)$ possui expansão acelerada para valores mais elevados de ρ_Λ^0 , $\rho_f(0)$, $a(0)$, $b(0)$ e $\dot{b}(0)$, e para pequenos valores de ν , H_0 e $\dot{a}(0)$. A densidade $\rho_f(t)$ possui o seguinte comportamento quando variamos os parâmetros e condições iniciais, possui maior valor de densidade quanto maior os valores de H_0 , $\rho_f(0)$ e $\dot{a}(0)$, ou então quanto menor o valor de ν , ρ_Λ^0 , $a(0)$, $b(0)$ e $\dot{b}(0)$. Quanto ao estudo da isotropia analisada pelo gráfico de $b(t)/a(t)$ vemos que nosso modelo isotropiza mais rápido, quanto maiores os valores de ρ_Λ^0 , $a(0)$, $\dot{a}(0)$ e $\dot{b}(0)$, e para pequenos valores de ν , H_0 e $b(0)$. Ocorre um caso particular na variação de $\rho_f(0)$, observamos que o modelo tende a uma configuração de isotropia em um tempo fixo para qualquer valor de $\rho_f(0)$.

Uma possível continuação para esse trabalho seria estudar a introdução de uma

métrica mais anisotrópica, como a métrica de Bianchi. Também podemos alterar ou incluir outros tipos de fluidos nesse modelo, como o fluido de poeira ou o fluido relativístico reduzido. Também podemos considerar estudar a versão quântica desse modelo.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1 st. [S.l.]: John Wiley & Sons, United States of America, 1972.
- [2] Ray d' Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [3] O. Gron; S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology* Springer, New York, 2007.
- [4] A.G. Riess et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).
- [5] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [6] R. Kantowski and R. K. Sachs, *Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models*, Journal of Mathematical Physics **7**, 443 (1966).
- [7] K. C. Jacobs, *Spatially homogeneous and euclidean cosmological models with shear*, Astrophys. J. **153**, 661, (1968); *Cosmologies of Bianchi Type I with a Uniform Magnetic Field*, Astrophys. J. **155**, 379, (1969).
- [8] E. Weber, *Kantowski-Sachs cosmological models approaching isotropy*, J. Math. Phys. **25**, 3279, (1984).
- [9] Ø. Grøn, *Transition of a Kantowski-Sachs cosmological model into an inflationary era*, J. Math. Phys. **27**, 1490, (1986).
- [10] S. Byland and D. Scialom, *Evolution of the Bianchi I, the Bianchi III and the Kantowski-Sachs universe: isotropization and inflation*, Phys. Rev. **D57**, 6065, (1998), gr-qc/9802043.
- [11] Kishor S. Adhav et al., *Kantowski-Sachs cosmological models with anisotropic dark energy*, Central European Journal of Physics **9**, 919-925 (2011).
- [12] L. Parisi, N. Radicella and G. Vilasi, *Kantowski-Sachs Universes sourced by a Skyrme fluid*, Phys. Rev. **D91**, 063533, (2015), arXiv:1412.2249.
- [13] G. Oliveira-Neto, D. L. Canedo and G. A. Monerat, *An Anisotropic Kantowski - Sachs Universe with Radiation, Dust and a Phantom Fluid*, Brazilian Journal of Physics **52**, 130, (2022).
- [14] I.L. Shapiro, J. Solà, *The scaling evolution of the cosmological constant*, JHEP **02**, 006, (2002).
- [15] I.L. Shapiro, J. Sola, C. Espana-Bonet and P. Ruiz-Lapuente, *Variable cosmological constant as a Planck scale effect*, Phys. Lett. **B574**, 149, (2003), astro-ph/0303306.
- [16] J. C. Fabris, I. L. Shapiro and J. Solà, *Density perturbations for a running cosmological constant*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, **02**, (2007).

- [17] I.L. Shapiro, *Effective action of vacuum: semiclassical approach*, *Class. Quant. Grav.* **25**, 103001, (2008), arXiv:0801.0216.
- [18] I.L. Shapiro, J. Solà, *On the possible running of the cosmological 'constant'*, *Phys. Lett.* **B682**, 105, (2009), hep-th/0910.4925.
- [19] J.A. Agudelo Ruiz, T. de Paula Netto, J.C. Fabris and I.L. Shapiro, *Primordial universe with the running cosmological constant*, *Eur. Phys. J.* **C80**, 851, (2020), arXiv:1911.06315;
- [20] J.A. Agudelo Ruiz, J.C. Fabris, A.M. Velasquez-Toribio and I.L. Shapiro, *Constraints from observational data for a running cosmological constant and warm dark matter with curvature*, *Grav. Cosmol.* **26**, 316, (2020), arXiv:2007.12636.

APÊNDICE A – Obtenção das equações dinâmicas dos fatores de escala

Para obtermos a equação de campo de Einstein (2.7), primeiramente definimos as componentes da métrica. Através da equação do elemento de linha (2.12), temos as seguintes componentes covariantes, não nulas,

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = a^2, \quad g_{22} = b^2, \quad g_{33} = b^2 \text{sen}^2(\theta). \quad (\text{A.1})$$

E as seguintes componentes contravariantes, não nulas,

$$g^{00} = -1, \quad g^{11} = a^{-2}, \quad g^{22} = b^{-2}, \quad g^{33} = b^{-2} \text{sen}^{-2}(\theta). \quad (\text{A.2})$$

Com as componentes covariantes e contravariantes da métrica podemos calcular as componentes do símbolo de Christoffel dado na equação (2.2). As componentes não nulas do símbolo de Christoffel possuem os seguintes valores,

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= a\dot{a}, \quad \Gamma^0_{22} = b\dot{b}, \quad \Gamma^0_{33} = b\dot{b}\text{sen}^2(\theta), \quad \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{b}}{b}, \quad \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{b}}{b}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\text{sen}\theta\text{cos}\theta, \quad \Gamma^3_{32} = \frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo esses valores, do símbolo de Christoffel, no tensor de Ricci, dado na equação (2.4), obtemos suas componentes, não nulas, dadas por,

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{a\ddot{a}}{a^2} - \frac{2b\ddot{b}}{b^2}, \quad R_{11} = \frac{1}{b}(ab\ddot{a} + 2a\dot{a}\dot{b}), \\ R_{22} &= \frac{1}{a}(ab\ddot{b} + b\dot{a}\dot{b} + ab^2 + a), \quad R_{33} = \frac{\text{sen}^2}{a}(ab\ddot{b} + b\dot{a}\dot{b} + a + \dot{a}\dot{b}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Agora podemos calcular o escalar de Ricci,

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = \frac{2}{ab^2}(\ddot{a}b^2 + 2ab\ddot{b} + 2b\dot{a}\dot{b} + ab^2 + a). \quad (\text{A.5})$$

Com esses resultados, podemos determinar as componentes do tensor de Einstein (2.6),

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} - \Lambda, \quad G_{11} = a^2\left(\Lambda + \frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}}{b^2} - \frac{1}{b^2}\right), \\ G_{22} &= -b\ddot{b} - \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} - \frac{\ddot{a}b^2}{a} + \Lambda b^2, \quad G_{33} = \text{sen}^2\theta\left(-b\ddot{b} - \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} - \frac{\ddot{a}b^2}{a} + \Lambda b^2\right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Da equação do tensor energia-momento (2.8), para um fluido perfeito, podemos calcular suas componentes. As quais são dadas, em um referencial comoviente com o fluido, por,

$$T_{00} = c^2 \rho, \quad T_{11} = pa^2, \quad T_{22} = pb^2, \quad T_{33} = pb^2 \text{sen}^2\theta. \quad (\text{A.7})$$

Assim, podemos relacionar cada componente do tensor de Einstein com a respectiva componente do tensor energia-momento, obedecendo a equação de campo de Einstein

(2.7). Dessa forma, obteremos 3 equações distintas envolvendo os fatores de escala. A primeira foi obtida da componente temporal (00), a segunda equação foi obtida da parte radial (11), e a terceira equação foi obtida das partes angulares (22) e (33).

$$\begin{aligned}\frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} - \Lambda &= \frac{8\pi G\rho}{c^2}, \\ \frac{2\dot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} &= -\frac{8\pi Gp}{c^4} + \Lambda, \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\ddot{b}}{b} &= -\frac{8\pi Gp}{c^4} + \Lambda.\end{aligned}$$

(A.8)

Vamos utilizar a primeira equação de (A.8) e a seguinte combinação linear entre a segunda e a terceira equação de (A.8). Vamos subtrair a segunda equação da terceira equação em (A.8). E depois de eliminarmos os denominadores, nas equações resultantes, obtemos as seguintes equações,

$$2b\dot{a}\dot{b} + a\dot{b} + a - ab^2\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}\rho ab^2 \quad (\text{A.9})$$

$$b^2\ddot{a} - abb\ddot{b} + b\dot{a}\dot{b} - a\dot{b}^2 - a = 0. \quad (\text{A.10})$$

Essas são as equações (2.13) e (2.14) apresentadas anteriormente. Elas são equações diferenciais, nos fatores de escala $a(t)$ e $b(t)$, que descrevem a dinâmica evolutiva do universo em função do tempo para um determinado fluido com densidade ρ e pressão p .

APÊNDICE B – Obtenção da equação de conservação de energia

Aqui será demonstrado como obter a equação (2.21) a partir da equação (2.9), passando pela equação (2.11). Primeiramente reescrevemos a equação (2.9), logo,

$$T^{\alpha\beta};_{\beta} = T^{\alpha\beta},_{\beta} + T^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + T^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta}^{\beta} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Agora fazemos $\alpha = t$ pois é a única componente que não irá gerar a identidade $0 = 0$, teremos a seguinte relação.

$$T^{0\beta};_{\beta} = T^{0\beta},_{\beta} + T^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\beta}^0 + T^{0\mu}\Gamma_{\mu\beta}^{\beta} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Abrindo os somatórios,

$$\begin{aligned} T^{00},_0 + (T^{00}\Gamma_{00}^0 + T^{11}\Gamma_{11}^0 + T^{22}\Gamma_{22}^0 + T^{33}\Gamma_{33}^0) + \\ (T^{00}\Gamma_{00}^0 + T^{00}\Gamma_{01}^1 + T^{00}\Gamma_{02}^2 + T^{00}\Gamma_{03}^3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Usando agora o tensor energia-momento (2.8), e os símbolos de Christoffel explícitos no Apêndice A obtemos,

$$c^2\dot{\rho} + (p\dot{a}a + p\dot{b}b^{-1} + p\dot{b}b^{-1}\text{sen}^2\theta) + c^2\rho(\dot{a}a^{-1} + 2\dot{b}b^{-1}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Organizando essa equação chegamos em (2.11),

$$\dot{\rho} + 3H\left(\frac{p}{c^2} + \rho\right) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Agora para o modelo considerado, onde teremos o fluido de radiação e a RCC, teremos a densidade $\rho = \rho_f + \rho_{\Lambda}$ e a pressão $p = p_f + p_{\Lambda}$, portanto ficamos com,

$$\dot{\rho}_f + \dot{\rho}_{\Lambda} + 3H(\rho_f + p_f + \rho_{\Lambda} + p_{\Lambda}) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Temos $p_f = \frac{1}{3}\rho_f$ e $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$, logo,

$$\dot{\rho}_f + \dot{\rho}_{\Lambda} + 3H\left(\frac{4}{3}\rho_f\right) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Agora calcularemos $\dot{\rho}_{\Lambda}$ usando sua definição em (2.17), fazendo $\frac{3M_p^2}{8\pi} = 1$.

$$\dot{\rho}_{\Lambda} = \nu\dot{H}^2 = \nu 2H\dot{H}. \quad (\text{B.8})$$

Substituindo o parâmetro de Hubble temos,

$$\dot{\rho}_{\Lambda} = \frac{2\nu}{9}\left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b}\right)\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{b}b - \dot{b}^2}{b^2}\right) \quad (\text{B.9})$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto e organizando os termos,

$$\rho_{\Lambda} = \frac{2\nu}{9} \left(\frac{\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^3}{a^3} - \frac{4\dot{b}^3}{b^3} + \frac{4\dot{b}\ddot{b}}{b^2} + \frac{2}{ab}(\dot{a}\ddot{b} + \ddot{a}\dot{b}) - \frac{2\dot{a}\dot{b}^2}{ab^2} - \frac{2\dot{a}^2\dot{b}}{a^2b} \right) \quad (\text{B.10})$$

Agora substituindo ρ_{Λ} que acabamos de obter na equação (B.7) e organizando os termos chegamos na equação (2.21)

$$\begin{aligned} \rho_f a^3 b^3 + \frac{4}{3} \rho_f (\dot{a} a^2 b^3 + 2 \dot{b} a^3 b^2) + \frac{2\nu}{9} [\dot{a} \ddot{a} b^3 - \dot{a}^3 b^3 - 4 a^3 \dot{b}^3 \\ + 4 a^3 \dot{b} \ddot{b} + 2 a^2 b^2 (\dot{a} \ddot{b} + \ddot{a} \dot{b}) - 2 a^2 b \dot{a} \dot{b}^2 - 2 a b^2 \dot{a}^2 \dot{b}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$