

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
BACHARELADO EM FÍSICA

Modelos Cosmológicos Não Comutativos com Paredes de Domínio

Iolete Silva Miranda

JUIZ DE FORA
DEZEMBRO, 2023

Modelos Cosmológicos Não Comutativos com Paredes de Domínio

IOLETE SILVA MIRANDA

Univesidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Bacharelado em Física

Orientador: Gil de Oliveira Neto

JUIZ DE FORA
DEZEMBRO, 2023

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Miranda, Iolete Silva.

Modelos cosmológicos não comutativos com paredes de domínio / Iolete Silva Miranda. -- 2023.

81 p. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia, 2023.

1. Modelos cosmológicos. 2. Não comutatividade. 3. Paredes de domínio. I. Neto, Gil de Oliveira, orient. II. Título.

MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO COMUTATIVOS COM PAREDES DE DOMÍNIO

Iolete Silva Miranda

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVESIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM FÍSICA.

Aprovada por:

Gil de Oliveira Neto
Prof. Dr.

Wilson de Souza Melo
Prof. Dr.

Albert Carlo Rodrigues Mendes
Prof. Dr.

JUIZ DE FORA
14 DE DEZEMBRO, 2023

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Dr. Gil de Oliveira Neto, por tão generosamente compartilhar comigo seu tempo e conhecimento, pelas oportunidades a mim apresentadas e pelas orientações, sempre pacientes e compreensivas, sem as quais este trabalho não existiria.

Aos meus pais, Rosângela e Marco Aurélio, e aos meus irmãos, Igor e Caléo, por sempre estarem ao meu lado me apoiando e incentivando. Por não deixarem nenhum sucesso, mesmo que pequeno, passar despercebido e por não me deixarem desistir. A vocês serei eternamente grata.

Aos meus professores pelos ensinamentos, lições, desafios e pela convivência estimulante.

A todos os meus amigos, em especial às minhas amigas Amanda e Raquel, por trilharem comigo esse caminho desde o início, por contribuírem com meu crescimento acadêmico e pessoal, pelo apoio imensurável e pela amizade.

Aos amigos que encontrei na universidade por todas as horas de estudo, trabalho e também descontração e por toda a contribuição à minha formação profissional e pessoal.

À minha psicóloga, Cléria, por ter me ajudado a perceber que eu era capaz.

À UFJF por minha formação, pela oportunidade de acesso a uma instituição de ensino superior pública e de qualidade e por todos os projetos dos quais tive a honra de fazer parte.

À banca examinadora pela disponibilidade e importância.

"O espaço é grande. Grande, mesmo. Não dá pra acreditar o quanto ele é desmesuradamente inconcebivelmente estonteantemente grande. Você pode achar que da sua casa até a farmácia é longe, mas isso não é nada em comparação com o espaço. Vejamos..."

Douglas Adams

Resumo

No presente trabalho são estudados modelos cosmológicos não comutativos, onde a não comutatividade é inserida como uma explicação alternativa para a expansão acelerada do Universo. Tal não comutatividade seria, no universo atual, resquício de um universo primordial onde interações quânticas impunham uma geometria não comutativa ao espaço-tempo. Os modelos foram construídos com base no formalismo ADM e no formalismo de Schutz para elaboração de uma formulação Hamiltoniana da teoria da relatividade geral acoplada a um fluido perfeito. Para tanto, o espaço-tempo 4-dimensional é foliado por hipersuperfícies espaciais 3-dimensionais separadas do tempo, representado por um campo escalar e um campo vetorial e a dinâmica do fluido é descrita por campos escalares denominados potenciais-velocidade. O fluido acoplado à teoria será formado por paredes de domínio, defeitos topológicos gerados por quebras espontâneas de simetria durante as transições de fase do universo primordial. Respeitando o princípio cosmológico, o universo é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker e, na formulação hamiltoniana, a não comutatividade é introduzida na álgebra dos parênteses de Poisson através do chamado parâmetro não comutativo. Por fim, obtém-se as equações de movimento e os respectivos modelos resultantes, que serão analisados para diferentes valores dos parâmetros envolvidos a fim de determinar como esses parâmetros influenciam o comportamento da função do fator de escala e se a não comutatividade favorece ou não a expansão acelerada do universo.

Palavras-chave: Modelos Cosmológicos. Não Comutatividade. Paredes de Domínio.

Abstract

The aim of this work is to study noncommutative cosmological models, in which noncommutativity is inserted as an alternative explanation for the accelerated expansion of the Universe. In the current universe, such noncommutativity would be a remnant of a primordial universe where quantum interactions imposed a noncommutative geometry on space-time. The models were built based on the ADM formalism and the Schutz formalism to develop a Hamiltonian formulation of the theory of general relativity coupled to a perfect fluid. To this end, 4-dimensional space-time is foliated by 3-dimensional spatial hypersurfaces separated from time, represented by a scalar field and a vector field, and fluid dynamics are described by scalar fields called velocity potentials. The fluid coupled to the theory will be formed by domain walls, topological defects generated by spontaneous symmetry breaking during phase transitions in the early universe. Respecting the cosmological principle, the universe is described by the Friedmann-Robertson-Walker metric and, in the Hamiltonian formulation, noncommutativity is introduced into the algebra of Poisson brackets through the so-called noncommutative parameter. Finally, there are obtained equations of motion and the respective resulting models. Those will be analyzed for different values of the parameters involved in order to determine how these parameters influence the behavior of the scale factor function and whether noncommutativity favors the accelerated expansion of the universe or not.

Keywords: Cosmological models. Noncommutativity. Domain Walls.

Conteúdo

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	8
Lista de Notações e Convenções	10
1 Introdução	11
2 Elementos de Relatividade Geral e Cosmologia	14
2.1 Introdução	14
2.2 Tópicos em Geometria Diferencial	14
2.2.1 Símbolos de Christoffel	14
2.2.2 Derivada Covariante	15
2.2.3 Métrica	16
2.2.4 Transporte paralelo	17
2.2.5 Geodésicas	18
2.2.6 Tensor de Curvatura	19
2.2.7 Tensor de Einstein	20
2.3 Princípio da Equivalência e Geodésicas	21
2.4 Equações de Einstein	21
2.5 Cosmologia Relativística	23
2.5.1 Geometria de espaços com curvaturas constantes	24
3 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral com Fluido Perfeito	28
3.1 Formalismo ADM da Relatividade Geral	29
3.2 Formalismo de Schutz	37
3.3 Formalismo Hamiltoniano do Universo de FRW com Fluido Perfeito	41
4 Cosmologia Não Comutativa e Paredes de Domínio	44
4.1 Paredes de Domínio	44
4.2 Equações de Movimento para o Modelo Não Comutativo	45
4.3 Análise de Dados	50
4.3.1 Caso Comutativo	50
4.3.2 Caso Não Comutativo	53
5 Conclusão	78
Referências	80

Lista de Figuras

3.1	Representação gráfica das grandezas do formalismo ADM. Fonte: Steven Carlip (2005, p. 13).	29
4.1	Gráfico do fator de escala $a(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos comutativos ($\gamma = 0$), variando o valor da constante de curvatura k e mantendo fixos os valores de $C = 10$ e $a_0 = 1$	52
4.2	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	55
4.3	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	56
4.4	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostos, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	56
4.5	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro C , relacionado à energia do fluido, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0, 1$	57
4.6	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	58
4.7	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = -0, 1$	59
4.8	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro a_0 e mantendo fixos os valores de $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	60
4.9	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro v_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, e $\gamma = 0, 5$	61
4.10	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	62
4.11	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	63
4.12	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostos, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	63

4.13	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro C , relacionado à energia do fluido, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0, 1$	64
4.14	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	65
4.15	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = -0, 1$	66
4.16	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro a_0 e mantendo fixos os valores de $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	67
4.17	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro v_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, e $\gamma = 0, 5$	68
4.18	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$.	70
4.19	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$.	70
4.20	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostos, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	71
4.21	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro C , relacionado à energia do fluido, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0, 1$	72
4.22	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	73
4.23	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = -0, 1$	74
4.24	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro a_0 e mantendo fixos os valores de $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	75
4.25	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro v_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, e $\gamma = 0, 5$	76
4.26	Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos, variando o valor da constante de curvatura k e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$	77

Lista de Tabelas

4.1	Variação de k em modelos cosmológicos comutativos com $\gamma = 0$, $C = 10$ e $a_0 = 1$	52
4.2	Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \leq 0$	54
4.3	Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \geq 0$	54
4.4	Variação de C em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$	55
4.5	Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$	57
4.6	Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = -0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$	58
4.7	Variação de a_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	59
4.8	Variação de v_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 5$, $T_0 = 1$ e $a_0 = 1$	60
4.9	Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \leq 0$	62
4.10	Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \geq 0$	62
4.11	Variação de C em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$	64
4.12	Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$	65
4.13	Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = -0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$	66
4.14	Variação de a_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0, 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	67
4.15	Variação de v_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0, 5$, $T_0 = 1$ e $a_0 = 1$	68
4.16	Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \leq 0$	69
4.17	Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \geq 0$	69
4.18	Variação de C em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$	71
4.19	Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$	72
4.20	Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = -0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$	73
4.21	Variação de a_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$	74
4.22	Variação de v_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 5$, $T_0 = 1$ e $a_0 = 1$	75

4.23 Variação de k em modelos cosmológicos não comutativos com $\gamma = 0, 1$,
 $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$ 76

Lista de Notações e Convenções

A derivada temporal de uma função $f(t)$ é denotada por $\dot{f}(t)$.

Os somatórios serão omitidos segundo a notação de Einstein:

$$x_i y^i \equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Índices gregos podem assumir os valores 0, 1, 2 e 3, sendo o índice 0, em geral, relativo à coordenada temporal e os demais relativos às coordenadas espaciais.

Índices latinos podem assumir os valores 1, 2 e 3, sendo estes relativos às coordenadas espaciais.

O determinante da métrica $g_{\alpha\beta}$ é denotado por g .

A assinatura da métrica utilizada é $(-, +, +, +)$.

A derivada parcial de um tensor T em relação à coordenada x_β é denotada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x_\beta} = \partial_\beta T \equiv T_{,\beta}$$

A derivada covariante de um tensor T em relação à coordenada x_β é denotada por:

$$\nabla_\beta T \equiv T_{;\beta}$$

As equações deste trabalho estão escritas em unidades naturais, ou seja a velocidade da luz no vácuo c e a constante gravitacional G são ambas iguais à unidade:

$$G = c = 1$$

1 Introdução

O interesse pela origem do universo como conhecemos é comum a todas as culturas, religiões, à filosofia e à ciência. A Cosmologia relativística é a maneira pela qual a física aborda e transcende tal questão, se dedicando ao estudo da dinâmica e evolução do universo desde seu início até seu eventual fim.

A partir de 1915, quando Einstein publicou sua teoria da gravitação, a Relatividade Geral, a cosmologia passou a evoluir e se transformar rapidamente. Em 1917, William de Sitter publicou um vanguardista modelo cosmológico dinâmico. No mesmo ano, Einstein adicionou a constante cosmológica à sua teoria para que um modelo estático do universo fosse alcançável através da relatividade geral. Em 1922, Friedmann publicou seu conjunto de modelos dinâmicos para um universo homogêneo e isotrópico descritos pela, hoje conhecida, métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Robertson publicou, em 1928, sua previsão da lei de Hubble e a comparou com dados observacionais, mas foi apenas em 1929, com a publicação de Edwin Hubble, que a cosmologia ganhou evidências substanciais de que o universo estava, de fato, de expandindo.

As descobertas e os modelos cosmológicos publicados no início do século XX constituíram um modelo padrão de universo em expansão baseado nas suposições de que o universo deveria ser homogêneo, isotrópico e composto apenas por matéria. Mas, em 1998, evidências observacionais de supernovas do tipo Ia obtidas por Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess apontaram para a expansão acelerada do universo e, em 2011, eles receberam o prêmio Nobel da física pela descoberta^[1].

Entretanto, a expansão acelerada do universo não pode ser explicada por um universo composto apenas por matéria, pois este estaria desacelerando em decorrência da atração gravitacional. Logo, deve existir uma energia distribuída em todo o espaço que cause tal aceleração. Esta é a chamada energia escura, uma entidade física de natureza ainda desconhecida que possui pressão negativa e tem efeitos contrários ao da gravitação. Muitos esforços foram e ainda estão sendo feitos na intenção de se compreender melhor a natureza da energia escura, como a descrição da energia escura por campos escalares ou

fluidos de energia com pressão negativa.

Este trabalho se propõe a oferecer uma interpretação alternativa da expansão acelerada do universo: Logo após o *Big Bang*, na época denominada "Universo Primordial", efeitos quânticos faziam com que as coordenadas que descreviam o universo não comutassem entre si e parte desta não comutatividade estaria presente, ainda hoje, no universo, sendo responsável pela aceleração de sua expansão. Assim, a energia escura será representada pela não comutatividade e pelo fluido de paredes de domínio.

O fluido de paredes de domínio se caracteriza por ter uma natureza repulsiva e, portanto, pressão negativa. Os modelos cosmológicos obtidos com o uso de tal fluido atingem a singularidade do tipo *Big Rip*, que é o que ocorre quando a função que representa o fator de escala do universo diverge para o infinito em um tempo t finito. Acoplada ao fluido, a não comutatividade é inserida na intenção de gerar modelos com expansão ainda mais acelerada.

A ideia de não comutatividade em coordenadas do espaço-tempo foi inicialmente proposta por Snyder^[2], mas por muitos anos essa ideia foi deixada de lado. Hoje, há um novo interesse nesta área devido a presença de geometria não comutativa em certos aspectos da teoria de cordas^[3] e a tentativas de construção de modelos cosmológicos quânticos^[4].

Neste trabalho, são construídos modelos cosmológicos em que as variáveis do espaço de fase, em uma formulação hamiltoniana da relatividade geral, não são comutativas perante a álgebra dos parênteses de Poisson. Essas variáveis não estão relacionadas às coordenadas do espaço-tempo, mas sim às componentes da métrica que o descreve e a potenciais que descrevem o fluido que permeia o universo.

Para obter a formulação hamiltoniana e introduzir a não comutatividade, foram utilizados o Formalismo ADM e o Formalismo de Schutz, que se encarregam de descrever, respectivamente, a geometria do espaço-tempo e o fluido que compõe o universo, em larga escala considerado um fluido perfeito.

O presente trabalho se inicia então com uma revisão da Relatividade Geral e de alguns tópicos em geometria diferencial, presente no capítulo 2. Já o capítulo 3 trata da formulação hamiltoniana da relatividade geral, começando pelo formalismo ADM, seguido

pelo formalismo de Schutz e finalizando com a formulação hamiltoniana completa de um universo homogêneo, isotrópico e preenchido por um fluido perfeito. O capítulo 4 introduz o fluido de paredes de domínio e o parâmetro não comutativo, culminando em uma série de equações que descrevem o espaço-tempo, dentre as quais a equação de Friedmann, que dá a evolução temporal do fator de escala, a grandeza que caracteriza a expansão do universo. O capítulo 4 se encerra com a apresentação dos modelos cosmológicos não comutativos obtidos.

2 Elementos de Relatividade Geral e Cosmologia

2.1 Introdução

Determinado a estender o princípio da relatividade do movimento a todos os observadores físicos e não apenas aos inerciais como na Relatividade Restrita, Einstein iniciou sua busca por uma nova teoria da gravitação.

Na intenção de englobar também referenciais não-inerciais na teoria, Einstein valeu-se do Princípio da Equivalência, que se propõe a tratar referenciais não-inerciais e referenciais sob a ação de um campo gravitacional da mesma forma. Essa ideia o permitiu conceber um campo inércio-gravitacional que determinasse a trajetória da matéria e dos raios de luz sob a ação de campos gravitacionais ou não. Esse campo viria a ser interpretado como o espaço-tempo curvo.

Além disso, sua teoria também foi influenciada pelo Princípio de Mach, que propunha que os caminhos seguidos por partículas massivas e pela luz eram determinados pela distribuição de matéria no universo. Isso o levou à conclusão de que o objeto matemático que descrevesse o espaço-tempo seria completamente determinado pela matéria e não poderia existir em sua ausência.

Em 1915, a combinação desses princípios com a geometria diferencial de Gauss e Riemann resultou na elegante teoria geométrica da gravitação que conhecemos hoje, a Relatividade Geral.

2.2 Tópicos em Geometria Diferencial

2.2.1 Símbolos de Christoffel

Para descrever estruturas e entidades matemáticas importantes em geometria diferencial, faz-se necessário uma maneira clara e direta para calcular derivadas de vetores e tensores

em qualquer sistema de coordenadas.

Em espaços planos, como o de Minkowski, os vetores de base são constantes e, portanto, a derivada parcial de qualquer vetor descrito nesse espaço depende apenas de suas componentes. No entanto, para descrever espaços-tempos curvos, precisamos lançar mão de espaços vetoriais em que os vetores de base não são constantes, como é o caso do espaço das coordenadas esféricas, por exemplo.

Sejam x^β as coordenadas de um espaço vetorial e V^α as componentes de um vetor \vec{V} escrito nesse mesmo espaço vetorial com base \vec{e}_α , assim $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$. Neste caso, a derivada parcial do vetor não se resume apenas à derivada de suas componentes, é preciso calcular também derivada dos vetores de base do espaço:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.1)$$

É possível escrever o termo $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ como uma combinação linear dos vetores de base, onde suas componentes serão representadas pelos símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$:

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu. \quad (2.2)$$

Apesar da semelhança de representação, os símbolos de Christoffel não apresentam caráter tensorial, transformando-se sob uma mudança de coordenadas da seguinte maneira:

$$\Gamma^{\rho'}_{\mu'\beta'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\theta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^\alpha_{\eta\theta} + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\mu'}}. \quad (2.3)$$

2.2.2 Derivada Covariante

Combinando as equações (2.1) e (2.2) e rearranjando alguns índices, obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \vec{e}_\alpha \quad (2.6)$$

onde, o termo entre parênteses é definido como a derivada covariante do vetor contravariante V^α , um tensor misto cujas componentes são dadas por:

$$V^\alpha_{;\beta} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha = V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha . \quad (2.7)$$

Como decorrência de sua definição, a derivada covariante de um escalar é equivalente à sua derivada parcial. A partir desse resultado, e considerando um escalar qualquer ϕ como a contração de um vetor covariante p_α e um contravariante V^α , chega-se a uma expressão para a derivada covariante de um vetor covariante.

$$V_{\alpha;\beta} \equiv V_{\alpha,\beta} - V_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \quad (2.8)$$

Usando um procedimento semelhante, é possível obter as expressões que fornecem a derivada covariante de tensores de rank 2, como mostram as equações a seguir.

$$T^{\mu\nu}_{;\beta} = T^{\mu\nu}_{,\beta} + T^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + T^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \quad (2.9)$$

$$T_{\mu\nu;\beta} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + T_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad (2.10)$$

$$T^\mu_{\nu;\beta} = T^\mu_{\nu,\beta} + T^\alpha_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - T^\mu_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad (2.11)$$

2.2.3 Métrica

A métrica $g_{\alpha\beta}$ de um espaço vetorial pode ser definida como o produto escalar entre dois vetores de base.

$$g_{\alpha\beta} = (\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \quad (2.12)$$

No espaço cartesiano, como os vetores de base são constantes, a métrica é dada por $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ e $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$. Esses dois resultados, combinados com a equação (2.10), fornecem a derivada covariante do tensor métrico em coordenadas cartesianas.

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0 \quad (2.13)$$

Por ser uma equação escrita na forma tensorial, (2.13) vale em qualquer sistema de coordenadas, ou seja, a derivada da métrica é sempre nula.

A relatividade geral respeita o princípio da correspondência, de acordo com o qual a teoria deve ser compatível com a gravitação Newtoniana no limite de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades e também deve coincidir com a relatividade especial quando não há gravitação, recuperando, neste caso, a métrica de Minkowski. Posto isto, as métricas de interesse da relatividade geral serão sempre simétricas e, por consequência, diagonalizáveis e sua assinatura não será positiva definida, gerando assim os espaços-tempos chamados pseudo-riemannianos.

Combinando as equações (2.10) e (2.13), obtemos a seguinte relação entre os Símbolos de Christoffel e a métrica:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\nu\mu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \cdot \quad (2.14)$$

Fica evidente, então, que a simetria do tensor métrico é também percebida nos índices covariantes dos símbolos de Christoffel. Ou seja,

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha} \cdot \quad (2.15)$$

2.2.4 Transporte paralelo

A ausência de um referencial inercial global em espaços curvos dificulta a comparação de grandezas vetoriais e tensoriais definidas em diferentes pontos desse espaço. É preciso,

então, desenvolver um processo que leve esses objetos de seu ponto de origem até o ponto onde se quer compará-lo de forma que este se mantenha constante ao longo do caminho. Esse processo é chamado de transporte paralelo.

Mais especificamente, seja C uma curva parametrizada por λ de coordenadas $x^\alpha(\lambda)$ e vetor tangente $\vec{U} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$. Se um campo vetorial \vec{V} pode ser definido em todos os pontos sobre a curva C , tal que $\vec{V}(x^\alpha(\lambda))$ e $\vec{V}(x^\alpha(\lambda + \epsilon))$, onde ϵ é infinitesimalmente pequeno, sejam paralelos e de mesmo módulo para todo λ para qual C seja definida, então é possível afirmar que \vec{V} foi transportado paralelamente ao longo de C .

Assim, a equação que garante que o campo vetorial \vec{V} seja constante ao longo da curva C é:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0 . \quad (2.16)$$

A equação (2.16) escrita em termos do vetor tangente revela a definição de transporte paralelo de \vec{V} ao longo de \vec{U} ,

$$\frac{dV^\alpha}{dx^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = V^\alpha{}_{;\beta} U^\beta = 0 . \quad (2.17)$$

2.2.5 Geodésicas

Existem curvas definidas no espaço curvo que transportam paralelamente seus próprios vetores tangentes, assim como fazem as retas no espaço plano. Essas curvas são chamadas geodésicas e a equação para obtenção dessas curvas deriva da equação de transporte paralelo. Assim, de (2.17) obtém-se

$$U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} = U^\beta U^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0 , \quad (2.18)$$

que em termos das coordenadas da curva e do parâmetro λ é escrita como:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 . \quad (2.19)$$

Como os símbolos de Christoffel são funções conhecidas das coordenadas x^α , (2.19) é uma equação diferencial de segunda ordem não-linear das coordenadas $x^\alpha(\lambda)$ e,

como tal, apresenta solução única dadas as condições iniciais em determinado ponto da curva em que $\lambda = \lambda_0$. Ou seja, para cada par posição inicial $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$ e direção inicial $U_0^\alpha = \left. \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$, existe uma única geodésica que satisfaz a equação (2.19).

2.2.6 Tensor de Curvatura

O objeto matemático que descreve formalmente a curvatura do espaço-tempo é o tensor de curvatura ou tensor de Riemann, que fornece uma medida da curvatura intrínseca do espaço-tempo.

É possível obter esse tensor transportando paralelamente um vetor \vec{V} ao longo de uma curva fechada de dimensões infinitesimais δx_0^σ por δx_0^λ . O vetor sofrerá uma variação δV^α dada por

$$\delta V^\alpha = \delta x_0^\sigma \delta x_0^\lambda \left[\Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \right] V^\mu . \quad (2.20)$$

Pode-se demonstrar que a expressão entre colchetes é um tensor, o tensor de curvatura, que é representado por $R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha$:

$$R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu . \quad (2.21)$$

A curvatura do espaço causa, então, a dependência do caminho escolhido no processo de transporte paralelo. Por isso a derivada covariante é, na maioria dos casos, não comutativa, sendo o tensor de Riemann a expressão do seu comutador:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu . \quad (2.22)$$

Sendo assim, em um espaço plano, onde é possível transportar paralelamente um vetor por qualquer caminho sem modificá-lo, o tensor de curvatura se anula e garante a comutação das derivadas covariantes.

Considerando a forma covariante do tensor de Riemann obtida através do abaixamento de seu índice contravariante, é possível obter algumas relações de simetria que reduzem substancialmente o número de componentes independentes do tensor. São elas:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (2.23)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} , \quad (2.24)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} , \quad (2.25)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 . \quad (2.26)$$

Além disso, existem duas contrações principais do tensor de Riemann. O tensor de Ricci

$$R_{\beta\alpha} \equiv g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\alpha\beta} , \quad (2.27)$$

e o escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.28)$$

2.2.7 Tensor de Einstein

Além das simetrias já abordadas, existem simetrias que envolvem as derivadas covariantes do tensor de Riemann, essas são as chamadas Identidades de Bianchi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 . \quad (2.29)$$

Contraindo a equação acima duas vezes com a métrica, obtém-se as identidades de Bianchi duas vezes contraídas,

$$(2R^{\mu}{}_{\lambda} - \delta^{\mu}{}_{\lambda} R)_{;\mu} = 0 . \quad (2.30)$$

O tensor de Einstein é um tensor simétrico, construído a partir do tensor de Riemann e da métrica e definido como:

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha} . \quad (2.31)$$

É possível demonstrar que o tensor de Einstein tem a divergência nula, devido a identidade de Bianchi (2.30), ou seja,

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 . \quad (2.32)$$

2.3 Princípio da Equivalência e Geodésicas

O Princípio da Equivalência, em sua forma dita 'forte', diz que: "Em todo ponto no espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial de forma que, em uma região suficientemente pequena ao redor desse ponto, qualquer lei física assume a mesma forma na qual é escrita em relatividade especial".

Em particular, o princípio garante que as equações de movimento de uma partícula em queda livre possam ser escritas em um sistema de coordenadas X^α também em queda livre, descrevendo uma linha reta no espaço-tempo, isto é:

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.33)$$

onde τ é o tempo próprio.

A partir das relações de mudança de coordenadas é possível demonstrar que as equações (2.33) podem ser reescritas em termos das coordenadas x^μ de um referencial arbitrário, assumindo a seguinte forma ^[5]:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 . \quad (2.34)$$

Não por coincidência, (2.34) é equivalente à equação das geodésicas dada por (2.19). Assim dizendo, o princípio de equivalência certifica-se de que partículas em queda livre sigam geodésicas tipo-tempo do espaço-tempo.

2.4 Equações de Einstein

As equações de Einstein são um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem da métrica. Utilizando unidades de medida cosmológicas, em que $G = c = 1$, elas são

escritas na forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (2.35)$$

onde o tensor de Einstein, por ser composto por contrações do tensor de Riemann, descreve a curvatura do espaço-tempo e $T_{\mu\nu}$, o tensor momento-energia, caracteriza a distribuição de matéria através do espaço-tempo.

Essas equações sintetizam a teoria da relatividade geral no sentido em que descrevem, agora com o rigor matemático necessário, como matéria e geometria do espaço-tempo regem e são regidos um pelo outro.

A forma mais direta de obtê-las é por meio do princípio de mínima ação aplicado a uma lagrangiana composta por \mathcal{L}_G , um termo puramente geométrico derivado da ação de Einstein-Hilbert, somada a \mathcal{L}_M , a densidade lagrangiana referente a campos de matéria.

$$S = \int (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) d^4x \quad (2.36)$$

$$S = \frac{1}{16\pi} \int R\sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_M d^4x \quad (2.37)$$

Onde a variação do primeiro termo dá origem às equações de Einstein no vácuo e as identidades de Bianchi contraídas e, variando o segundo, obtém-se o tensor momento-energia que, portanto, pode ser definido como

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} . \quad (2.38)$$

As equações de Einstein na forma de (2.35) quando aplicadas à cosmologia resultam em modelos de um universo dinâmico, porém o físico acreditava em um universo estático e, para que sua teoria possibilitasse tais soluções, introduziu a constante cosmológica Λ em suas equações, que tomaram a seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (2.39)$$

Hoje, é sabido que o universo não só é dinâmico, como está se expandindo aceleradamente. Por possibilitarem também soluções com tais características, as equações (2.39) não perderam espaço na teoria.

2.5 Cosmologia Relativística

Inúmeras descrições da dinâmica e evolução do universo já foram consideradas por físicos e filósofos ao longo da história. Mas foi apenas no século XX que a combinação do Princípio Cosmológico, do Postulado de Weyl e da Relatividade Geral culminaram no que é chamado hoje de Modelo Cosmológico Padrão.

O Postulado de Weyl trata do substrato que permeia o universo e afirma que suas partículas seguem geodésicas tipo-tempo que divergem a partir de um mesmo ponto no passado, ou seja, são ortogonais a uma família de hipersuperfícies tipo-espaço [6]. Tal afirmação carrega duas consequências principais, sendo a primeira o fato de que o substrato pode ser considerado um fluido perfeito, cujo tensor momento-energia é bem conhecido.

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (2.40)$$

onde, U^μ é a quadrivelocidade do fluido medida de um referencial comóvel e ρ e p são, respectivamente, a densidade e a pressão do fluido.

A segunda consequência deve-se à condição de ortogonalidade das geodésicas do substrato, o que permite escolher a coordenada temporal de forma que o elemento de linha do espaço-tempo possa ser escrito na forma

$$ds^2 = -dt^2 + [a(t)]^2 g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad (2.41)$$

onde $g_{ij}(x)$ é a métrica das seções espaciais formadas quando se toma o tempo t constante. Já $a(t)$ é chamado de fator de escala e sua dependência exclusiva com o tempo se deve ao fato de que, para que o princípio cosmológico seja respeitado, todas as regiões da hipersuperfície espacial devem se contrair ou expandir igualmente.

O Princípio Cosmológico é um princípio de simplicidade que trata da homogeneidade e isotropia do espaço-tempo, conforme o qual o universo observado de qualquer ponto no mesmo instante apresenta aspecto similar, com exceção de irregularidades locais até a escala de 10^8 anos-luz, o que chega a compreender vários clusters de galáxias. A maior evidência de que o universo é mesmo homogêneo e isotrópico foi descoberta em 1965, a radiação cósmica de fundo, uma radiação térmica com temperatura de $2,7K$

remanescente do universo primordial que, com boa aproximação, é isotrópica.

Para garantir a validade do princípio cosmológico, as seções espaciais formadas tomando qualquer tempo t constante não devem possuir pontos ou direções privilegiadas, ou seja, seu elemento de linha $d\sigma^2$ em coordenadas esféricas deverá ser da forma:

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (2.42)$$

Além disso, a curvatura das hipersuperfícies deve ser constante, o que resulta em um tensor de Riemann que satisfaz a seguinte relação:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = k(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \quad (2.43)$$

onde k pode assumir os valores $+1$, -1 ou 0 .

Combinando o elemento de linha da equação (2.42) e o tensor de curvatura de (2.43), obtém-se

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - kr^2} . \quad (2.44)$$

Isto posto, o elemento de linha obtido para um espaço-tempo homogêneo, isotrópico e formado por um fluido perfeito é o seguinte:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (2.45)$$

Esse é o chamado elemento de linha de Friedman-Robertson-Walker (FRW).

2.5.1 Geometria de espaços com curvaturas constantes

A fim de analisar a geometria dos espaços formados com curvatura k positiva, negativa e nula, considera-se o elemento de linha da hipersuperfície tipo-espaço obtido a partir da parte espacial de (2.45) quando $t = t_0$ e $a(t_0) = a_0$,

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (2.46)$$

Constante de curvatura $k = +1$

Neste caso, (2.46) toma a forma

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{1}{1-r^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (2.47)$$

Para contornar a singularidade presente no coeficiente de dr^2 quando $r \rightarrow 1$, introduz-se uma nova variável χ definida por $r = \text{sen}\chi$. Assim, o elemento de linha torna-se

$$d\sigma^2 = a_0^2 [d\chi^2 + \text{sen}^2\chi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] . \quad (2.48)$$

Desta forma, é possível analisar a geometria da hipersuperfície tridimensional quando inserida em um espaço euclidiano quadridimensional descrito por

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (2.49)$$

onde as coordenadas (w, x, y, z) são definidas pelas seguintes transformações:

$$\begin{aligned} w &= a_0 \cos\chi , \\ x &= a_0 \text{sen}\chi \text{sen}\theta \cos\phi , \\ y &= a_0 \text{sen}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\phi , \\ z &= a_0 \text{sen}\chi \cos\theta . \end{aligned} \quad (2.50)$$

A partir das transformações acima, é possível encontrar a seguinte relação entre as novas coordenadas:

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2 . \quad (2.51)$$

O que indica que a hipersuperfície tipo espaço de curvatura positiva pode ser entendida como uma esfera tridimensional de raio a_0 em um espaço euclidiano quadridimensional com coordenadas pertencentes aos intervalos $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Ou seja, o universo com curvatura $k = +1$ é esférico e sua topologia fechada.

Constante de curvatura $k = 0$

A métrica do espaço de curvatura nula é obtida a partir de (2.46) fazendo $k = 0$,

$$d\sigma^2 = a_0^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] . \quad (2.52)$$

O elemento de linha resultante é o a descrição de um espaço plano tridimensional em coordenadas esféricas pertencentes aos intervalos usuais $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Portanto, a partir da transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= a_0 r \text{sen}\theta \cos\phi , \\ y &= a_0 r \text{sen}\theta \text{sen}\phi , \\ z &= a_0 r \cos\theta , \end{aligned} \quad (2.53)$$

obtém-se a métrica euclidiana em coordenadas cartesianas:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (2.54)$$

Sendo assim, o universo de curvatura nula é descrito por uma hipersuperfície plana e é denominado aberto.

Constante de curvatura $k = -1$

Na presente situação, o elemento de linha obtido a partir de (2.46) fazendo $k = -1$ é:

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{1}{1+r^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (2.55)$$

Introduzindo uma nova variável χ definida por $r = \text{senh}\chi$, o elemento de linha torna-se:

$$d\sigma^2 = a_0^2 [d\chi^2 + \text{senh}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] . \quad (2.56)$$

Para analisar a geometria dessa hipersuperfície, é possível observá-la quando inserida em um espaço de Minkowski quadridimensional descrito por:

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 , \quad (2.57)$$

onde as coordenadas (w, x, y, z) são definidas pelas seguintes transformações:

$$\begin{aligned}w &= a_0 \cosh \chi , \\x &= a_0 \sinh \chi \sen \theta \cos \phi , \\y &= a_0 \sinh \chi \sen \theta \sen \phi , \\z &= a_0 \sinh \chi \cos \theta .\end{aligned}\tag{2.58}$$

A partir das transformações acima, encontra-se a seguinte relação entre as coordenadas:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2 .\tag{2.59}$$

O que descreve um hiperboloide tridimensional em um espaço quadridimensional.

Sendo assim, o universo de curvatura negativa é descrito por uma superfície hiperbólica cujas coordenadas pertencem aos intervalos $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

3 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral com Fluido Perfeito

Por simetria, o tensor de Einstein e o tensor momento-energia possuem, cada um, dez componentes independentes. Isso implica que as equações de Einstein são, na verdade, um sistema de dez equações diferenciais de segunda ordem para as dez componentes independentes da métrica do espaço-tempo quadridimensional $g_{\mu\nu}$. Se essas fossem as únicas equações que a métrica devesse satisfazer, dado um problema de Cauchy, seria possível calcular a métrica em qualquer ponto do espaço-tempo. Porém, as equações de Einstein estão ligadas pelas identidades de Bianchi, quatro condições que fazem com que haja apenas seis equações independentes dentre as dez iniciais, o que garante a liberdade de transformação de coordenadas nas componentes da métrica que possam ser calculadas.

A existência das Identidades de Bianchi faz com que, do ponto de vista dos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano, a Relatividade Geral seja considerada um sistema singular, ou seja, um sistema que apresenta vínculos.

Com base nos estudos das formulações Lagrangianas e Hamiltonianas de sistemas vinculados e a fim de se obter uma formulação dinâmica da Relatividade Geral, a geometrodinâmica, Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles Misner desenvolveram o formalismo ADM da relatividade Geral, ou o também chamado split $3 + 1$.

Além disso, para incluir os campos de matéria presentes no universo na descrição do mesmo por um princípio variacional, faz-se necessária a utilização do formalismo de Schutz, o qual descreve a quadrivelocidade desse fluido a partir de uma representação pautada em potenciais-velocidade.

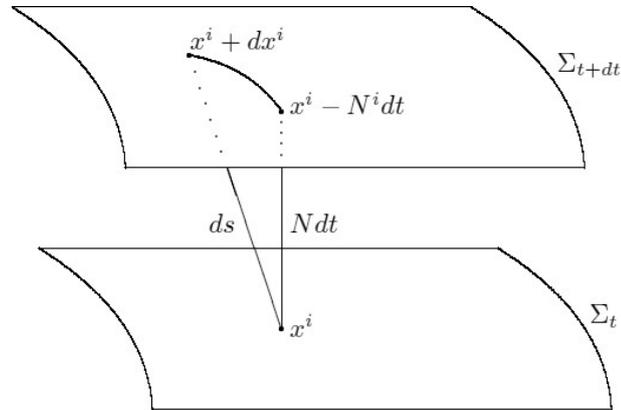
Tal representação foi inicialmente proposta por Clebsch^[7], em 1959, que descreveu a dinâmica de um fluido incompressível e não relativístico usando três potenciais-velocidade. Já em 1968, Seliger e Whitham, utilizando cinco potenciais, expandiram os trabalhos de Clebsch e foram capazes de identificar a entropia dentre os potenciais^[8]. Em 1970, Bernard Schutz desenvolveu seu formalismo e construiu, a partir de seis potenci-

ais, uma generalização relativística dos trabalhos de Seliger e Whitham, o formalismo de Schutz^{[9][10]}.

3.1 Formalismo ADM da Relatividade Geral

Arnouitt, Deser e Misner propuseram que o espaço-tempo fosse foliado por uma família de hipersuperfícies tipo-espaço ligadas umas às outras pela evolução temporal^[11], como mostra a figura 3.1^[12]. Assim, as dez componentes independentes da métrica do espaço-tempo quadridimensional $g_{\mu\nu}$ passam a ser descritas por três objetos separadamente: a métrica h_{ij} das hipersuperfícies espaciais tridimensionais com seis componentes independentes e que representa a variável dinâmica da teoria; a função lapso N e o vetor shift N_i , que descrevem a evolução temporal das hipersuperfícies que forma o espaço-tempo e, juntos, contemplam as quatro componentes independentes de $g_{\mu\nu}$ restantes.

Figura 3.1: Representação gráfica das grandezas do formalismo ADM. Fonte: Steven Carlip (2005, p. 13).



Para reescrever todas as quantidades importantes para a relatividade geral em função de h_{ij} , N e N_i , é preciso considerar duas hipersuperfícies tridimensionais tipo-espaço S_1 e S_2 definidas, respectivamente, nos instantes de tempo t e $t + dt$ e atribuir a cada uma delas um tensor métrico com assinatura euclidiana dados por:

$$\begin{aligned} h_{ij}(t, x, y, z) , \\ h_{ij}(t + dt, x, y, z) . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Isto posto, o elemento de linha de cada hipersuperfície espacial em função de suas

respectivas métricas será escrito como:

$$ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j . \quad (3.2)$$

A evolução temporal é inserida como um campo vetorial $d\vec{t} = dt \hat{t}$ definido sobre S_1 que leva cada ponto desta a um único ponto em S_2 . As projeções desse campo vetorial sobre as direções normal \hat{n} e tangente \hat{u} a S_1 são, respectivamente:

$$\begin{aligned} d\vec{t} \cdot \hat{n} &= N dt , \\ d\vec{t} \cdot \hat{u} &= N^i dt , \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde o índice i representa a projeção sobre cada uma das três direções espaciais de S_1 .

À vista disso, a separação entre um ponto x_1^i em S_1 e o ponto x_2^i em S_2 na direção normal à S_1 , \hat{n} , é o tempo próprio τ entre as referidas hipersuperfícies espaciais, ou seja,

$$d\tau^2 = N^2 dt^2 , \quad (3.4)$$

enquanto a separação entre x_1^i e a projeção de x_2^i sobre S_1 , $P(x_2^i)$, é a distância própria D entre os dois pontos em S_1 .

A projeção $P(x_2^i)$ em função das componentes do campo vetorial $d\vec{t}$ pode ser escrita como

$$P(x_2^i) = x_1^i + dx_1^i + N^i dt , \quad (3.5)$$

onde dx_1^i representa a liberdade de se adicionar um deslocamento infinitesimal sobre S_1 .

Sendo assim, também é possível escrever a distância própria D em função das componentes de $d\vec{t}$:

$$D = P(x_2^i) - x_1^i = dx_1^i + N^i dt . \quad (3.6)$$

Combinando (3.1) e (3.6), obtém-se:

$$dD^2 = h_{ij} (dx_1^i + N^i dt) \cdot (dx_1^j + N^j dt) \quad (3.7)$$

Então, usando o teorema de Pitágoras para um espaço-tempo quadridimensional

com assinatura Lorentziana, o tempo próprio em (3.4) e a distância própria em (3.7), chega-se ao seguinte intervalo invariante:

$$ds^2 = (N_j N^j - N^2) dt^2 + N_j dt dx^j + N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j . \quad (3.8)$$

Enquanto isso, o elemento de linha escrito em função da métrica do espaço-tempo quadridimensional $g_{\alpha\beta}$ é expresso por:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (3.9)$$

Desta forma, a fim de obter as componentes da métrica $g_{\alpha\beta}$ em função das grandezas inseridas no novo formalismo, compara-se os termos do intervalo invariante dados por (3.8) e (3.9). Obtendo, então, as relações:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= N_j N^j - N^2 , \\ g_{ti} &= N_i , \\ g_{kt} &= N_k , \\ g_{ik} &= h_{ik} , \end{aligned} \quad (3.10)$$

das quais obtém-se as representações matriciais da métrica nas formas covariante e contravariante.

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} N_j N^j - N^2 & N_k \\ N_i & h_{ik} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^m}{N^2} \\ \frac{N^k}{N^2} & h_{km} - \frac{N^k N^m}{N^2} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Agora, com o tensor métrico reescrito em termos das grandezas do formalismo ADM, deseja-se reescrever também os objetos da Relatividade Geral que caracterizam a curvatura do espaço-tempo, em particular, o tensor de Riemann e o escalar de Ricci.

As hipersuperfícies tridimensionais do split 3+1 possuem uma curvatura intrínseca à sua própria geometria e uma curvatura extrínseca que exprime como suas geometrias se curvam em relação ao espaço-tempo quadridimensional no qual estão imersas.

A curvatura intrínseca é o próprio tensor de Riemann definido sobre as hipersuperfícies e, de maneira análoga à feita para o espaço-tempo quadridimensional, obtém-se:

$$R^i{}_{jkm} = \Gamma^i{}_{jm,k} - \Gamma^i{}_{jk,m} + \Gamma^i{}_{lk}\Gamma^l{}_{jm} - \Gamma^i{}_{lm}\Gamma^l{}_{jk} , \quad (3.13)$$

onde os símbolos de Christoffel são escritos como

$$\Gamma^i{}_{lk} = \frac{1}{2}h^{im} (h_{ml,k} + h_{mk,l} - h_{lk,m}) . \quad (3.14)$$

Já a curvatura extrínseca, K_{ij} , é um tensor simétrico definido como a derivada covariante no espaço quadridimensional do vetor normal à hipersuperfície tridimensional.

$$K_{ij} = n_{i;j} , \quad (3.15)$$

tal que,

$$\hat{n} = N\vec{e}_t , \quad (3.16)$$

como definido na introdução do split 3+1.

Tomando a derivada covariante, obtém-se a seguinte expressão para a curvatura extrínseca ^[13]:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right) \quad (3.17)$$

onde $|$ representa a derivação covariante sobre o espaço tridimensional.

Todas as componentes do tensor de curvatura de Riemann do espaço-tempo quadridimensional podem ser obtidas a partir das curvaturas extrínseca e intrínseca das hipersuperfícies. Isso é feito com o auxílio das equações de Gauss-Codazzi ^[13]:

$${}^{(4)}R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}R^m{}_{ijk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij}K_k{}^m - K_{ik}K_j{}^m) , \quad (3.18)$$

$${}^{(4)}R^n{}_{ijk} = -\frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij|k} - K_{ik|j}) , \quad (3.19)$$

onde o índice n representa as componentes na direção de \hat{n} e os índices ⁽³⁾ e ⁽⁴⁾ foram inseridos para diferenciar grandezas definidas sobre as hipersuperfícies tridimensionais e

o espaço-tempo quadridimensional, respectivamente.

Para obter o escalar de Ricci em função das grandezas do presente formalismo, o reescrevemos da seguinte forma:

$$R = {}^{(4)}R^{ij}_{ij} + 2{}^{(4)}R^{in}_{in} . \quad (3.20)$$

E, então, a partir de (3.18) e (3.19) obtemos as seguintes expressões^[14]:

$${}^{(4)}R^{ij}_{ij} = {}^{(3)}R + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij} K^{ij} - K^2) \quad (3.21)$$

$${}^{(4)}R^{in}_{in} = \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K^2 - K_{ij} K^{ij}) - (n^\alpha n^\beta_{;\beta})_{;\alpha} + (n^\alpha n^\beta_{;\alpha})_{;\beta} . \quad (3.22)$$

Introduzindo as equações (3.21) e (3.22) na expressão para o escalar de Ricci (3.20), obtém-se:

$$R = {}^{(3)}R + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K^2 - K_{ij} K^{ij}) - 2(n^\alpha n^\beta_{;\beta})_{;\alpha} + 2(n^\alpha n^\beta_{;\alpha})_{;\beta} . \quad (3.23)$$

A partir da métrica e do escalar de Ricci, dados em termos das grandezas do formalismo ADM por (3.11) e (3.23), é possível reescrever a densidade lagrangiana da ação de Einstein-Hilbert dada por (2.37). Assim,

$$\mathcal{L}_G = \left[{}^{(3)}R + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K^2 - K_{ij} K^{ij}) - 2(n^\alpha n^\beta_{;\beta})_{;\alpha} + 2(n^\alpha n^\beta_{;\alpha})_{;\beta} \right] N \sqrt{h} . \quad (3.24)$$

Eliminando os termos referentes às fronteiras tipo-espaço e tipo-tempo, e lembrando que $n_\alpha n^\alpha = -1$, em decorrência da definição do vetor \hat{n} dada por (3.16), obtém-se a densidade lagrangiana geométrica \mathcal{L}_G e, a partir dela, a ação de Einstein-Hilbert S_G :

$$\mathcal{L}_G = ({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2) N h^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int ({}^{(3)}R + K_{ij} K^{ij} - K^2) N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x \quad (3.26)$$

Com base na Lagrangiana geométrica, é possível começar a construir a formulação Hamiltoniana. Primeiramente, estabelece-se quais são as coordenadas do espaço de fase Hamiltoniano: as variáveis dinâmicas, representadas pelas componentes de h_{ab} , e seus

momenta canonicamente conjugados, Π^{ab} , definidos por:

$$\Pi^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} , \quad (3.27)$$

de onde encontra-se:

$$\Pi^{ab} = \sqrt{h} [h^{ab} K - K^{ab}] . \quad (3.28)$$

Aqui é importante observar que, embora a lagrangiana seja função das grandezas N e N_i , ela não é função de \dot{N} e \dot{N}_i , o que faria com que os momenta canonicamente conjugados a elas fosse nulo. Portanto, estas não são variáveis dinâmicas da teoria mas, na verdade, têm o papel de multiplicadores de Lagrange ^[15], objetos inseridos na formulação hamiltoniana de sistemas com vínculos, que é o caso da relatividade geral.

A transição da descrição lagrangiana para a hamiltoniana é dada pela transformação de Legendre:

$$\mathcal{H}_G = \Pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G . \quad (3.29)$$

Substituindo a densidade lagrangiana, dada por (3.25), e os momenta canonicamente conjugados, dados por (3.28), ^[14]obtem-se:

$$\mathcal{H}_G = N \left[h^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right] + N_b [-2\Pi^{ab}{}_{|a}] + [2N_b \Pi^{ab}]_{|a} , \quad (3.30)$$

onde $\Pi = \Pi^a{}_a$.

Introduzindo a métrica do superespaço, obtida por DeWitt,

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{\frac{1}{2}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}) , \quad (3.31)$$

e descartando o último termo em (3.30), por contribuir apenas na fronteira da integral da ação, reescrevemos a densidade hamiltoniana como:

$$\mathcal{H}_G = N \left(G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right) + N_j \left(-2\Pi^{ij}{}_{|i} \right) . \quad (3.32)$$

A ação de Hilbert-Einstein pode ser reescrita no espaço de fase como

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left(\Pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{H}_G \right) dt d^3x . \quad (3.33)$$

Substituindo a densidade Hamiltoniana de (3.32), obtém-se:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left[\Pi^{ab} \dot{h}_{ab} - N \left(G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R \right) + N_j \left(-2\Pi^{ij}{}_{|i} \right) \right] dt d^3x . \quad (3.34)$$

Introduzindo a superhamiltoniana, $H_G = G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}} {}^{(3)}R$, e o super momentum, $H_G^j = -2\Pi^{ij}{}_{|i}$, a ação é reescrita como

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left(\Pi^{ab} \dot{h}_{ab} - N H_G + N_j H_G^j \right) dt d^3x . \quad (3.35)$$

Variando N e N_j , são obtidas as equações dos vínculos da superhamiltoniana e do supermomentum:

$$H_G = 0 , \quad (3.36)$$

$$H_G^j = 0 , \quad (3.37)$$

que são as equações de valor inicial da relatividade geral no vácuo, equivalentes a

$${}^{(4)}G^0{}_{\mu} \equiv {}^{(4)}R^0{}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^0{}_{\mu} {}^{(4)}R = 0 . \quad (3.38)$$

Variando h_{ab} e Π^{ab} , obtém-se^[14], respectivamente:

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta S_G}{\delta \Pi^{ab}} = 2h^{-\frac{1}{2}}N \left(\Pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\Pi \right) + 2N_{(b|a)} , \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^{ab} = -\frac{\delta S_G}{\delta h_{ab}} &= -Nh^{\frac{1}{2}} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2}{}^{(3)}R h^{ab} \right) \\ &+ \frac{1}{2}Nh^{-\frac{1}{2}}h^{ab} \left(\Pi_{cd}\Pi^{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right) \\ &- 2Nh^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ac}\Pi^b{}_c - \frac{1}{2}\Pi\Pi^{ab} \right) \\ &+ h^{\frac{1}{2}} \left(N^{[b|a} - h^{ab}N_{|c}^{|c} \right) \\ &+ h^{\frac{1}{2}} \left(h^{-\frac{1}{2}}N^c\Pi^{ab} \right)_{|c} - 2\Pi^c{}^{(a}N^b)_{|c} . \end{aligned} \quad (3.40)$$

A equação (3.39) está de acordo com (3.28), resultado da definição dos momenta canonicamente conjugados Π^{ab} , enquanto (3.40) são equivalentes às seis equações de Einstein no vácuo restantes^[11] ${}^{(4)}G_{ij} = 0$.

A ação geométrica total do espaço de fase na presença de outros campos além do gravitacional é escrita na forma:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left(\Pi^{ab}\dot{h}_{ab} + \Pi^{\Phi^A}\dot{\Phi}_A - NH + N_j H^j dt d^3x \right) . \quad (3.41)$$

Quaisquer outros campos além do gravitacional são incluídos na ação na forma do termo $\Pi^{\Phi^A}\dot{\Phi}_A$, onde Φ^A é um campo e Π^{Φ^A} seu momento canonicamente conjugado.

Os campos de matéria serão obtidos a partir de \mathcal{L}_M e a superhamiltoniana ganhará um componente referente à matéria, assim como o supermomentum:

$$H = H_G + H_M , \quad (3.42)$$

$$H^i = H_G^i + H_M^i . \quad (3.43)$$

3.2 Formalismo de Schutz

No presente formalismo, Bernard Schutz escreveu a quadrivelocidade de um fluido relativístico via seis potenciais-velocidade^[10].

$$U_\nu = \mu^{-1} (\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad (3.44)$$

onde, μ é a entalpia do fluido, S sua entropia, θ e ϕ não possuem interpretações físicas claras e ζ e β estão associados à rotação do fluido. No presente caso, um universo homogêneo e isotrópico, ζ e β devem ser nulos. A condição de normalização da quadrivelocidade U_ν fornece:

$$U^\nu U_\nu = -1 . \quad (3.45)$$

A fim de escrever as grandezas que definem o estado do fluido em termos dos potenciais-velocidade, considera-se um fluido perfeito de uma componente composto por bárions. Define-se a massa de repouso conservada de uma amostra de matéria contendo N bárions como $m_H N$ ^[10], onde m_H é a massa de um átomo de hidrogênio em seu estado fundamental. Assim, a energia interna U da amostra pode ser escrita como:

$$U = E - m_H N . \quad (3.46)$$

Definindo energia interna específica como $\bar{U} = \frac{U}{m_H N}$, densidade de massa de repouso como $\rho_0 = \frac{m_H N}{V}$, onde V é o volume da amostra, e densidade de bárions do fluido como $\rho = \frac{E}{V}$, obtém-se de (3.46):

$$\rho = \rho_0 (\bar{U} + 1) . \quad (3.47)$$

Assumindo ser possível encontrar uma equação de estado na forma $p = p(\rho, \bar{U})$, escreve-se a primeira lei da termodinâmica para o fluido em questão:

$$dQ = dU + pdV . \quad (3.48)$$

Dividindo a equação acima por $m_H N$:

$$\frac{dQ}{m_H N} = d\left(\frac{U}{m_H N}\right) + pd\left(\frac{V}{m_H N}\right) . \quad (3.49)$$

Definindo como $dq = \frac{dQ}{m_H N}$ a quantidade de energia por unidade de massa de repouso adicionada ao fluido em um processo quase-estático, tem-se:

$$dq = d\bar{U} + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) . \quad (3.50)$$

De onde, da definição de entropia $dq = TdS$, obtém-se:

$$d\bar{U} + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = TdS . \quad (3.51)$$

Pelo Teorema de Pfaff^[16], essa equação garante a existência das funções $S(\rho_0, \bar{U})$ e $T(\rho_0, \bar{U})$.

Define-se, então, a massa inercial (entalpia) como

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} = 1 + \bar{U} + \frac{p}{\rho_0} , \quad (3.52)$$

que, escrita como uma equação de Pfaff de duas variáveis, se torna:

$$d\mu = d\bar{U} + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) + \frac{1}{\rho_0} dp . \quad (3.53)$$

E utilizando (3.53) para eliminar $d\bar{U}$ em (3.51), escreve-se a equação

$$dp = \rho_0 d\mu - \rho_0 T dS , \quad (3.54)$$

que garante a existência da função $p(\mu, S)$, a qual deve-se buscar.

Considerando a equação de estado de um fluido perfeito

$$p = \alpha \rho \quad (3.55)$$

e combinando-a com as equações (3.47) e (3.51), obtém-se:

$$(1 + \bar{U}) d [\ln (1 + \bar{U}) - \alpha \ln \rho_0] = T dS . \quad (3.56)$$

Da qual infere-se:

$$T = 1 + \bar{U} , \quad (3.57)$$

$$S = \ln (1 + \bar{U}) - \alpha \ln \rho_0 \quad (3.58)$$

e, reescrevendo esta última, chega-se a

$$\rho_0 = (1 + \bar{U})^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}} . \quad (3.59)$$

Por outro lado, combinando a equação de estado (3.55) com (3.52), encontra-se a relação

$$1 + \bar{U} = \frac{\mu}{1 + \alpha} , \quad (3.60)$$

que substituída em (3.59), resulta em:

$$\rho_0 = \left(\frac{\mu}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}} . \quad (3.61)$$

Por fim, combinando a equação de estado do fluido perfeito (3.55) com as equações (3.47) e (3.61), obtém-se a função buscada $p(\mu, S)$:

$$p = \alpha \left(\frac{\mu}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}} . \quad (3.62)$$

Além da equação de estado (3.55), o fluido perfeito é também definido por seu tensor momento-energia:

$$T^{\gamma\nu} = (\rho + p)U^\gamma U^\nu + pg^{\gamma\nu} = \rho_0 \mu U^\gamma U^\nu + pg^{\gamma\nu} , \quad (3.63)$$

onde a segunda igualdade é obtida com auxílio da equação (3.52).

A partir da definição dos potenciais-velocidade dada por (3.44) e da condição de

normalização (3.45), obtém-se uma expressão que relaciona a entalpia μ com a métrica do espaço-tempo e os demais potenciais-velocidade:

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu} (\phi_{,\sigma} + \zeta\beta_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma}) (\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) . \quad (3.64)$$

A partir da definição da quadrivelocidade em termos dos potenciais, dada por (3.44), é possível obter as equações de Einstein para um universo preenchido por um fluido perfeito através de um princípio variacional utilizando a ação

$$S = \int \sqrt{-g} (R + 16\pi p) d^4x . \quad (3.65)$$

Pelo Princípio de Hamilton, a variação da ação deve ser nula:

$$\delta S = \int [\delta(\sqrt{-g}R) + 16\pi \delta(\sqrt{-g}p)] d^4x = 0 . \quad (3.66)$$

Onde as variações dentro do integrando correspondem a^{[6][17]}:

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \left(R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R \right) (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g^{\sigma\nu} , \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}p) &= p\delta(-g)^{\frac{1}{2}} + (-g)^{\frac{1}{2}}\delta p \\ &= -p\frac{(-g)^{\frac{1}{2}}}{2}g_{\sigma\nu}\delta g^{\sigma\nu} + (-g)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial p}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial g^{\sigma\nu}}\delta g^{\sigma\nu} . \end{aligned} \quad (3.68)$$

As derivadas parciais em (3.68) são obtidas das equações (3.52), (3.51) e (3.64), resultando em

$$\delta(\sqrt{-g}p) = \left(\frac{-pg_{\sigma\nu}}{2} - \frac{\rho+p}{2}U_\sigma U_\nu \right) (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g^{\sigma\nu} . \quad (3.69)$$

Substituindo (3.67) e (3.69) na variação da ação (3.66), obtém-se:

$$\delta S = \int \left[\left(R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R - 8\pi pg_{\sigma\nu} - 8\pi(\rho+p)U_\sigma U_\nu \right) \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\nu} \right] d^4x = 0 . \quad (3.70)$$

Logo, por este princípio variacional, tem-se as equações

$$R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g_{\sigma\nu}R = 8\pi [pg_{\sigma\nu} + (\rho+p)U_\sigma U_\nu] = 8\pi T_{\sigma\nu} , \quad (3.71)$$

que são as equações de Einstein com o tensor momento-energia de um fluido perfeito.

3.3 Formalismo Hamiltoniano do Universo de FRW com Fluido Perfeito

A fim de encontrar a densidade Hamiltoniana total de um universo homogêneo e isotrópico, primeiramente deve-se escrever, em termos dos potenciais velocidade, a ação do fluido S_f :

$$S_f = \int (\sqrt{-gp}) d^4x . \quad (3.72)$$

Além disso, para introduzir as simetrias impostas pelo princípio cosmológico, faz-se necessário o uso da métrica do universo de Friedmann-Robertson-Walker, dada por (2.45), escrita no formato obtido do formalismo ADM, dado por (3.8).

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (3.73)$$

Assim, a ação do fluido é reescrita como

$$S_f = \kappa \int (Na^3 p) dt , \quad (3.74)$$

onde κ é uma constante resultante da integração sobre as três coordenadas esféricas usuais.

Com a intenção de escrever a pressão do fluido em termos dos potenciais-velocidade independentes, obtém-se, primeiro, a expressão da entalpia em função dos demais. Isso é possível considerando um referencial comóvel ao fluido, onde $U_\nu = (N, 0, 0, 0)$ e os potenciais ζ e β se anulam. Assim, a equação (3.64) resulta em:

$$\mu = [-g^{00}(\dot{\phi}_{,0} + \theta S_{,0})^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N} . \quad (3.75)$$

Substituindo (3.75) em (3.62), encontra-se a expressão buscada.

$$p = \alpha \left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N(1 + \alpha)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{s}{\alpha}} \quad (3.76)$$

Inserindo esta última equação em (3.74), tem-se como resultado a ação do fluido totalmente em termos dos potenciais-velocidade e, concomitante a isto, a densidade lagrangiana.

$$S_f = \kappa \int \left[N^{-\frac{1}{\alpha}} a^3 \alpha \left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{1 + \alpha} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}} \right] dt . \quad (3.77)$$

A transição da formulação lagrangiana para a hamiltoniana é feita a partir das equações de Hamilton, que definem os momenta canonicamente conjugados a cada potencial.

$$\begin{aligned} P_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{\phi}} = \left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{(\alpha + 1)N} \right)^{\frac{1}{\alpha}} a^3 e^{-\frac{S}{\alpha}} \\ P_S &= \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{S}} = \theta P_\phi \\ P_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Assim, a partir da densidade lagrangiana em (3.77) e dos momenta em (3.78), é possível escrever a densidade Hamiltonina do fluido como

$$\mathcal{H}_f = NH_f = \dot{\phi} P_\phi + \dot{S} P_S - \mathcal{L}_f , \quad (3.79)$$

de onde obtém-se:

$$H_f = \frac{P_\phi^{\alpha+1} e^S}{a^{3\alpha}} . \quad (3.80)$$

Introduzindo as transformações canônicas

$$\begin{aligned} T &= -P_S e^{-S} P_\phi^{-(\alpha+1)} , \\ P_T &= P_\phi^{(\alpha+1)} e^S , \\ \bar{\phi} &= \phi - (\alpha + 1) \frac{P_S}{P_\phi} , \\ P_{\bar{\phi}} &= P_\phi \end{aligned} , \quad (3.81)$$

finalmente, a densidade hamiltoniana do fluido toma a seguinte forma:

$$H_f = \frac{P_T}{a^{3\alpha}} . \quad (3.82)$$

Já a ação gravitacional (3.26), combinada à métrica de FRW no formalismo ADM, dada por (3.73), é escrita como

$$S_G = \int \left(6kNa - \frac{6a\dot{a}^2}{N} \right) dt d^3x , \quad (3.83)$$

de onde define-se o momento canonicamente conjugado ao fator de escala a :

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N} . \quad (3.84)$$

A partir da densidade lagrangiana presente na ação (3.83) e da equação para o momento canonicamente conjugado P_a (4.16), é possível escrever a densidade hamiltoniana geométrica como

$$\mathcal{H}_G = NH_G = \dot{a}P_a - \mathcal{L}_G , \quad (3.85)$$

de onde obtém-se:

$$H_G = -\frac{P_a^2}{24a} - 6ka . \quad (3.86)$$

Por fim, a hamiltoniana do sistema em questão é obtida somando as hamiltonianas geométrica (3.85) e do fluido (3.79) e, portanto, é escrita como

$$\mathcal{H} = N(H_G + H_f) = -\frac{NP_a^2}{24a} - N6ka + \frac{NP_T}{a^{3\alpha}} . \quad (3.87)$$

Pelo vínculo da super-hamiltoniana, escreve-se a equação de Friedmann no espaço de fase formado pelas coordenadas a e T e seus momenta canonicamente conjugados P_a e P_T :

$$-\frac{NP_a^2}{24a} - N6ka + \frac{NP_T}{a^{3\alpha}} = 0 . \quad (3.88)$$

A evolução temporal das coordenadas do espaço de fase podem, então, ser obtidas a partir das equações Hamilton com auxílio da equação de Friedmann. Nesse caso, não há vínculo do supermomentum devido à simetria da métrica de FRW.

4 Cosmologia Não Comutativa e Paredes de Domínio

4.1 Paredes de Domínio

Paredes de domínio são defeitos topológicos que aparecem quando há uma quebra espontânea de simetria. Isso acontece quando a Lagrangiana de um sistema apresenta uma simetria característica, ou seja, não se altera perante certas transformações, mas a função do potencial efetivo desse sistema apresenta um conjunto discreto de mínimos onde essa simetria não mais se aplica.

Tomando como exemplo um sistema descrito por um campo escalar $\varphi(x^\nu)$, onde x^ν são as coordenadas do espaço-tempo, e uma Lagrangiana \mathcal{L} , escrita em termos desse campo φ , na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varphi_{,\mu}^2 - V(\varphi) , \quad (4.1)$$

onde o potencial $V(\varphi)$ seja dado por

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} (\varphi^2 - \eta^2)^2 . \quad (4.2)$$

Neste caso, a Lagrangiana é invariante sob a transformação $\varphi \rightarrow -\varphi$ e o potencial terá dois mínimos em $\varphi_0 = \pm\eta$. A simetria inicial do sistema é quebrada quando φ "escolhe" um dos dois estados de mínima energia representados por φ_0 , esta situação é denominada quebra espontânea de simetria e, como resultado, gera uma parede^[18]. No presente contexto, as paredes de domínio surgem das quebras de simetria causadas por transições de fase no universo primordial^[19].

O significado físico de tais simetrias está diretamente relacionado às leis de conservação. Portanto, quando há quebras de simetria em um sistema, há mudanças em como as leis físicas operam no mesmo, daí sua importância.

Uma análise do tensor momento-energia de um fluido composto de paredes de

domínio indica que seu campo gravitacional é repulsivo e, considerando paredes se propagando com velocidades não relativísticas, chega-se a seguinte equação de estado^[20]:

$$p = -\frac{2}{3}\rho . \quad (4.3)$$

Quando consideramos um universo preenchido por um fluido perfeito, para que este corresponda ao universo contemporâneo observado, ele deve ser preenchido, em sua maioria, por um fluido de pressão negativa^[19]. Considerando um universo preenchido por paredes de domínio e homogêneo em escalas maiores do que a da separação entre as paredes, ele pode ser descrito pela métrica de FRW com boa aproximação^[20].

4.2 Equações de Movimento para o Modelo Não Comutativo

No capítulo anterior, foi obtida a seguinte densidade hamiltoniana que descreve um universo homogêneo, isotrópico e preenchido por um fluido perfeito:

$$\mathcal{H} = -\frac{NP_a^2}{24a} - N6ka + \frac{NP_T}{a^{3\alpha}} . \quad (4.4)$$

As variáveis dinâmicas da teoria, a , T , P_a e P_T , são comutativas. Propõe-se, então, uma formulação onde a hamiltonina mantenha a mesma forma de (4.4), mas com variáveis dinâmicas que não comutem entre si. Assim, obtém-se a densidade hamiltoniana não-comutativa

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{NP_{a_{nc}}^2}{24a_{nc}} - N6ka_{nc} + \frac{NP_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\alpha}} . \quad (4.5)$$

A não comutatividade entre as novas variáveis é inserida nos parênteses de Poisson, através do parâmetro não-comutativo γ :

$$\begin{aligned} \{a_{nc}, P_{T_{nc}}\} &= \{T_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \gamma \\ \{a_{nc}, P_{a_{nc}}\} &= \{T_{nc}, P_{T_{nc}}\} = 1 \\ \{a_{nc}, T_{nc}\} &= \{P_{T_{nc}}, P_{a_{nc}}\} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde os índices nc e c indicam as variáveis não comutativas e comutativas, respectivamente. Uma vez que estamos considerando que a não comutatividade tenha um efeito bem pequeno nos dias de hoje, o valor do parâmetro não comutativo deve ser pequeno.

Com o objetivo de simplificar o estudo desse modelo não comutativo, as variáveis não comutativas serão reescritas em termos de variáveis comutativas e do parâmetro não comutativo. As seguintes transformações serão usadas com essa finalidade:

$$\begin{aligned} a_{nc} &= a_c + \frac{\gamma T_c}{2}, \\ T_{nc} &= T_c + \frac{\gamma a_c}{2}, \\ P_{a_{nc}} &= P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}, \\ P_{T_{nc}} &= P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pode-se mostrar que essas transformações satisfazem os parênteses de Poisson (4.6) até a primeira ordem em γ .

Então, substituindo as relações (4.7) e usando o calibre conforme $N = a_{nc}$ no elemento de linha de FRW, dado por (3.73), e na densidade hamiltoniana (4.5), obtém-se, respectivamente, o elemento de linha e a hamiltoniana da formulação não comutativa, porém em função das variáveis comutativas:

$$ds^2 = - \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^2 dt^2 + \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right], \tag{4.8}$$

$$\mathcal{H}_{nc} = - \frac{\left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2} \right)^2}{24} - N 6k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right) + \frac{P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{3\alpha-1}}. \tag{4.9}$$

Observando o novo elemento de linha, é possível perceber que a_{nc} é o novo fator de escala e encontrar sua evolução temporal equivale a encontrar a evolução temporal do universo. Além disso, considerando $\gamma = 0$, recupera-se a descrição do universo na formulação comutativa, sendo possível obter e comparar ambos os modelos, comutativo e não comutativo.

Da Hamiltoniana (4.9), obtém-se as equações de movimento:

$$\dot{a}_c = \{a_c, \mathcal{H}_{nc}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial P_{a_c}} = -\frac{1}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{1-3\alpha}, \quad (4.10)$$

$$\dot{T}_c = \{T_c, \mathcal{H}_{nc}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial P_{T_c}} = -\frac{\gamma}{24} \left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2} \right) + \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{1-3\alpha}, \quad (4.11)$$

$$\dot{P}_{a_c} = \{P_{a_c}, \mathcal{H}_{nc}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial a_c} = 12k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right) + \frac{(3\alpha - 1) \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} \right)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{3\alpha}}, \quad (4.12)$$

$$\dot{P}_{T_c} = \{P_{T_c}, \mathcal{H}_{nc}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial T_c} = 6k\gamma \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right) + \frac{\gamma(3\alpha - 1) \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} \right)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{3\alpha}}. \quad (4.13)$$

Como os valores de $|\gamma|$ de interesse deste trabalho são muito menores que 1, a partir deste ponto, todas as equações obtidas são aproximações em primeira ordem do parâmetro não comutativo γ .

Então, das equações (4.12) e (4.13), obtém-se a seguinte relação entre as variáveis \dot{P}_{a_c} e \dot{P}_{T_c} :

$$P_{T_c} = \frac{\gamma}{2} P_{a_c} + C, \quad (4.14)$$

onde C é uma constante de integração associada à energia inicial do fluido. Isso pode ser visto a partir de uma análise do caso comutativo, em que $\gamma = 0$ e, com isso, $P_{T_c} = C$. Por esta razão, C assume apenas valores positivos.

Já das equações (4.10) e (4.11), obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{a}_c = -\frac{1}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} \dot{T}_c. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.14) em (4.15), é possível encontrar a seguinte expressão para P_{a_c} :

$$P_{a_c} = -12\dot{a}_c + 6\gamma\dot{T}_c - \frac{\gamma}{2}C. \quad (4.16)$$

Além disso, a linearização em γ da equação de vínculo, $\mathcal{H}_{nc} = 0$, pode ser obtida a partir da hamiltonina, dada por (4.9), e resulta em:

$$\frac{-P_{a_c}^2 - \gamma P_{a_c} P_{T_c}}{24} + \frac{P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}}{a_c^{3\alpha-1} + \left(\frac{3\alpha-1}{2} \right) \gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + \gamma a_c T_c) = 0. \quad (4.17)$$

Substituindo (4.14) e (4.16) em (4.17), obtém-se:

$$-6\dot{a}_c^2 + 6\gamma\dot{a}_c\dot{T}_c + \frac{C + 12\gamma\dot{a}_c}{a_c^{3\alpha-1} + \left(\frac{3\alpha-1}{2}\right)\gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + \gamma a_c T_c) = 0. \quad (4.18)$$

Para eliminar a dependência em \dot{T}_c da equação, substitui-se a expressão obtida para P_{a_c} , dada por (4.16), na equação de evolução de T , dada por (4.11), obtendo:

$$\dot{T}_c = \frac{\gamma\dot{a}_c}{2} + a_c^{1-3\alpha} + (1-3\alpha)a_c^{-3\alpha}\frac{\gamma T_c}{2}. \quad (4.19)$$

Então, substituindo (4.19) em (4.18), tem-se a forma final da equação de Friedmann no modelo não comutativo.

$$-6\dot{a}_c^2 + 6\gamma\dot{a}_c a_c^{1-3\alpha} + \frac{C + 12\gamma\dot{a}_c}{a_c^{3\alpha-1} + \left(\frac{3\alpha-1}{2}\right)\gamma T_c a_c^{3\alpha-2}} - 6k(a_c^2 + \gamma a_c T_c) = 0 \quad (4.20)$$

Como a equação depende das variáveis a_c , T_c e \dot{a}_c , para encontrar a evolução temporal do fator de escala será necessário resolver um sistema de equações diferenciais que pode ser obtido das equações de movimento.

Para tanto, deriva-se a equação (4.15) em relação ao tempo, obtendo:

$$\ddot{a}_c = -\frac{1}{12} \left(\dot{P}_{a_c} + \frac{\gamma\dot{P}_{T_c}}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} \ddot{T}_c. \quad (4.21)$$

Para eliminar \ddot{T}_c da equação acima, deriva-se a equação (4.11) em relação ao tempo, obtendo

$$\ddot{T}_c = -\frac{\gamma}{24} \dot{P}_{a_c} + (1-3\alpha) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{-3\alpha} \left(\dot{a}_c + \frac{\gamma \dot{T}_c}{2} \right) \quad (4.22)$$

e, então, substitui-se as equações (4.12), (4.13) e (4.22) em (4.21).

$$\ddot{a}_c = -\frac{1}{12} \left[12k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right) + \frac{(3\alpha-1) \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} \right)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{3\alpha}} \right] + \frac{\gamma}{2} \frac{(1-3\alpha)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{3\alpha}} \dot{a}_c. \quad (4.23)$$

Usando (4.14) e (4.16) para eliminar as variáveis P_{T_c} e P_{a_c} desta última equação, chega-se à expressão final para \ddot{a}_c :

$$\ddot{a}_c = -k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right) - \frac{(1 - 3\alpha) \left(\frac{\gamma \dot{a}_c}{2} - \frac{C}{12} \right)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{3\alpha}}. \quad (4.24)$$

Substituindo a expressão para P_{a_c} , dada por (4.16), em (4.11), obtém-se a segunda equação diferencial do sistema de equações buscado como uma expressão para \dot{T}_c :

$$\dot{T}_c = \frac{\gamma \dot{a}_c}{2} + \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right)^{1-3\alpha}. \quad (4.25)$$

A fim de encontrar a evolução temporal de um universo preenchido por paredes de domínio, usa-se a constante do fluido α , de acordo com a equação de estado dada por (4.3). Logo, substituindo $\alpha = -\frac{2}{3}$ nas equações (4.24) e (4.25), obtém-se o sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\ddot{a}_c = -k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \right) - 3 \left(\frac{\gamma \dot{a}_c^2}{2} - \frac{a_c^2 C}{12} - \frac{a_c \gamma T_c C}{12} \right) \quad (4.26)$$

$$\dot{T}_c = \frac{\gamma \dot{a}_c}{2} + \frac{a_c^2 \gamma T_c}{2} + a_c^3 \quad (4.27)$$

Da mesma forma, substituindo $\alpha = -\frac{2}{3}$ em (4.20), obtém-se a equação de Friedmann para o fluido de paredes de domínio.

$$-6(\dot{a}_c^2 + k a_c^2 + k \gamma a_c T_c) + a_c^3 \left(C + \frac{3 C T_c \gamma}{2 a_c} - 6 \gamma \dot{a}_c \right) = 0 \quad (4.28)$$

Definidas as condições iniciais $a_0 = a_c(0)$, $\dot{a}_0 = \dot{a}_c(0)$ e $T_0 = T_c(t)$ e o valor do parâmetro C , o sistema de equações diferenciais pode ser resolvido numericamente com auxílio da equação de Friedmann para obtenção de condições iniciais coerentes, já que ela pode fornecer um dos parâmetros em função dos demais.

Como resultado, serão obtidas as funções $a_c(t)$ e $T_c(t)$, as quais podem ser utilizadas para determinar o fator de escala, a_{nc} , do modelo cosmológico. Isso é feito através da relação estabelecida entre a_{nc} e as variáveis comutativas definida pelas equações (4.7).

4.3 Análise de Dados

Nesta seção, a fim de simplificar a notação utilizada, as variáveis comutativas passarão a ser escritas sem o índice c e as variáveis não comutativas manterão o índice nc .

A evolução temporal do fator de escala $a_{nc}(t)$, o qual descreve a dinâmica de expansão do universo, será obtido para cada valor da constante de curvatura k separadamente. Em cada um dos três casos, o sistema de equações diferenciais, dado em (4.26) e (4.27), foi resolvido numericamente através do software Maple. Variando valores do parâmetro não comutativo γ , do parâmetro associado à energia inicial do fluido C e das condições iniciais a_0 , \dot{a}_0 e T_0 , foi analisada a dependência entre o crescimento do fator de escala e cada uma das quantidades supracitadas.

Para fins de comparação, a análise se iniciou com o modelo comutativo.

4.3.1 Caso Comutativo

As equações que descrevem o modelo comutativo podem ser recuperadas fazendo $\gamma = 0$. Assim, o sistema de equações diferenciais, dado por (4.26) e (4.27), resulta em

$$\ddot{a} + ka = \frac{C}{4}a^2 \quad (4.29)$$

$$\dot{T} - a^3 = 0 \quad (4.30)$$

e a equação de Friedmann, dada por (4.28), torna-se:

$$\dot{a}^2 + ka^2 - \frac{C}{6}a^3 = 0. \quad (4.31)$$

Neste caso, a equação de Friedmann (4.31) possui solução analítica e é igual à equação (4.29) derivada em relação ao tempo. Portanto, para obter a evolução temporal do fator de escala, basta resolvê-la. Além disso, para que a equação possua soluções reais, a constante C deve obedecer o critério $C > \frac{6k}{a_0}$. Nos casos em que $k = 0$ ou $k = -1$, essa condição é naturalmente satisfeita, já que $C > 0$, então a única restrição ocorre quando $k = 1$. Neste caso, a constante associada à energia inicial do universo deverá ser estabelecida de acordo com a condição inicial imposta, obedecendo $C > \frac{6}{a_0}$.

Quando a constante de curvatura k é nula, as soluções da equação de Friedmann (4.31) são dadas por

$$a(t) = \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{C}{6}}t + \kappa\right)^2}, \quad (4.32)$$

onde $\kappa < 0$ é uma constante a ser definida pela condição inicial a_0 e deve ser negativa para que a função $a(t)$ seja crescente. Assim, a solução diverge no instante de tempo $t_1 = -\sqrt{\frac{6}{C}}\kappa$, atingindo a singularidade do tipo *Big Rip*.

Quando $k = 1$, as soluções obtidas são:

$$a(t) = \frac{6}{C} \quad (4.33)$$

$$a(t) = \frac{6}{C} \left[\tan\left(\frac{t}{2} - \frac{\kappa}{2}\right)^2 + 1 \right] \quad (4.34)$$

onde κ é uma constante a ser definida pelas condições iniciais.

A primeira das soluções é descartada, pois descreve um universo estático. A solução dada por (4.34) diverge no instante $t_1 = \pi + \kappa$. Dadas as condições iniciais, para gerar os gráficos que serão comparados com as soluções dos casos não comutativos, a constante κ é escolhida de forma que t_1 seja o menor possível.

Quando $k = -1$, as soluções obtidas foram:

$$a(t) = -\frac{6}{C} \quad (4.35)$$

$$a(t) = \frac{24\kappa e^t}{C(e^t - \kappa)^2} \quad (4.36)$$

onde κ será definida de acordo com as condições iniciais.

Nesse caso, a primeira solução também é descartada por se tratar de um universo estático e a segunda solução, dada por (4.36), diverge no instante $t_1 = \ln(\kappa)$, se $\kappa > 0$, caso contrário a solução é decrescente e não é interessante para descrever o fator de escala.

O comportamento do fator de escala para cada valor da constante de curvatura foi comparado usando a condição inicial $a_0 = 1$ e mantendo o parâmetro $C = 10$ fixo. Os resultados se encontram no gráfico da figura 4.1, que permite concluir que a expansão do

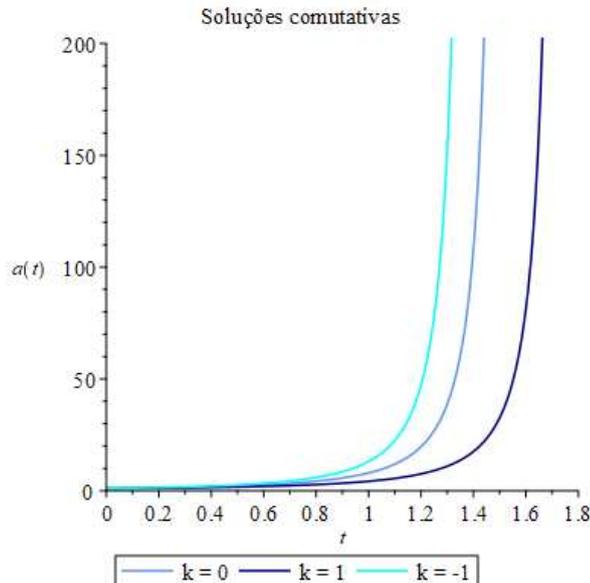
fator de escala ocorre mais rapidamente no modelo com a constante de curvatura $k = -1$, seguido pelo modelo com $k = 0$ e, por fim, o modelo com $k = 1$ e, em todos os casos, atingem a singularidade do tipo *Big Rip*. Ou seja, independentemente da geometria considerada, o universo descrito pelos modelos com paredes de domínio sofrem expansão acelerada de forma que o fator de escala cresce mais rápido que o horizonte cosmológico. Sendo assim, o universo observável se torna cada vez mais escuro, uma vez que objetos extragaláticos deixam de ser visíveis. Próximo ao instante em que ocorre o *Big Rip*, estruturas mantidas por atração gravitacional e interações eletromagnéticas, desde galáxias até átomos, serão destruídas e as partículas resultantes serão afastadas para além da distância mínima necessária para que se reorganizem e formem novas estruturas^[21].

A tabela 4.1 mostra, para cada valor da curvatura k , o instante de tempo t em que a singularidade *Big Rip* é atingida.

Tabela 4.1: Variação de k em modelos cosmológicos comutativos com $\gamma = 0$, $C = 10$ e $a_0 = 1$.

k	t	\dot{a}_0
-1	1,425416943	1,632993162
0	1,549193339	1,290994449
1	1,772154248	0,8164965812

Figura 4.1: Gráfico do fator de escala $a(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos comutativos ($\gamma = 0$), variando o valor da constante de curvatura k e mantendo fixos os valores de $C = 10$ e $a_0 = 1$



4.3.2 Caso Não Comutativo

Para os casos não comutativos, o sistema de equações diferenciais, dado em (4.26) e (4.27), foi resolvido numericamente. As funções $a(t)$ e $T(t)$ obtidas foram utilizadas, em combinação com as equações (4.7), para obtenção do fator de escala $a_{nc}(t)$. Todos os modelos resultantes atingiram a singularidade do tipo *Big Rip* em determinado instante de tempo t , a depender dos valores dos parâmetros associados.

Além disso, para as três possibilidades do valor da constante de curvatura, o valor de cada um dos parâmetros, γ , C , a_0 , \dot{a}_0 e T_0 , foi variado enquanto os demais foram mantidos fixos. Assim, a análise da dependência entre o crescimento do fator de escala $a_{nc}(t)$ e cada parâmetro foi realizada de forma independente.

Constante de Curvatura $k = -1$

Usando $k = -1$ no sistema composto pelas equações (4.26) e (4.27), obtém-se:

$$\begin{aligned}\ddot{a} &= a + \frac{\gamma T}{2} - 3 \left(\frac{\gamma a^2 \dot{a}}{2} - \frac{a^2 C}{12} - \frac{a \gamma T C}{12} \right) \\ \dot{T} &= \frac{\gamma \dot{a}}{2} + \frac{a^2 \gamma T}{2} + a^3\end{aligned}\tag{4.37}$$

Da mesma forma, a equação de Friedmann, dada por (4.28), torna-se:

$$-6(\dot{a}^2 - a^2 - \gamma a T) + a^3 \left(C + \frac{3CT\gamma}{2a} - 6\gamma \dot{a} \right) = 0.\tag{4.38}$$

Variação do Parâmetro não comutativo γ

Determinadas as condições iniciais $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$ e o parâmetro $C = 10$, o parâmetro γ foi variado e, para cada conjunto de valores (a_0, T_0, C, γ) , utilizou-se a equação de Friedmann (4.38) para obter a condição inicial \dot{a}_0 adequada e necessária para a resolução do sistema de equações diferenciais (4.37).

As tabelas 4.2 e 4.3 mostram, para alguns valores de $\gamma \geq 0$ e $\gamma \leq 0$, respectivamente, o instante de tempo t para o qual o modelo atingiu a singularidade *Big Rip* e a condição inicial \dot{a}_0 utilizada. O caso comutativo $\gamma = 0$ foi inserido para efeitos de comparação.

Tabela 4.2: Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \leq 0$.

γ	t	\dot{a}_0
0	1,4254170	1,632993162
-0,01	1,1816440	1,638000816
-0,05	1,0142571	1,658184517
-0,1	0,91339583	1,683758448
-0,5	0,60037657	1,902018967

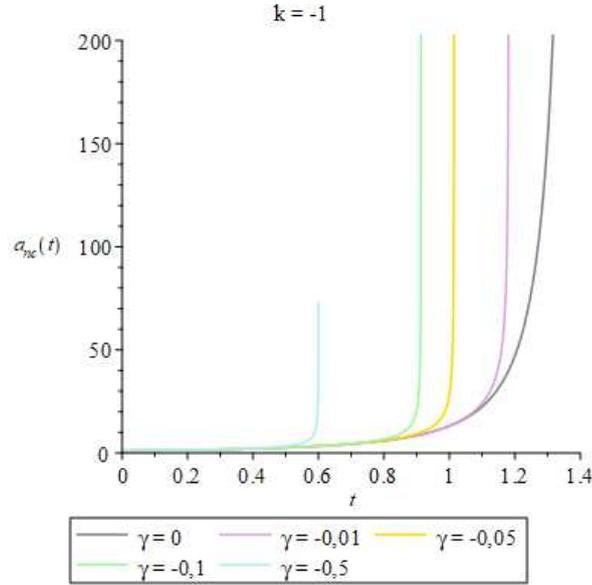
Tabela 4.3: Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \geq 0$.

γ	t	\dot{a}_0
0	1,4254170	1,632993162
0,01	1,2901288	1,628000816
0,05	1,1959858	1,608184517
0,1	1,1379476	1,583758448
0,5	0,93795734	1,402018967

Analisando os resultados, é possível concluir que, quanto maior o valor absoluto de γ , mais rapidamente o modelo atinge o *Big Rip*. Esses resultados podem ser melhor observados nas figuras 4.2 e 4.3, que contém os gráficos que representam a evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em cada modelo.

Além disso, é possível perceber que a condição inicial \dot{a}_0 cresce conforme γ diminui, o que faz com que, para valores do parâmetro não comutativo iguais em módulo, o crescimento do fator de escala se dá mais rápido quando $\gamma < 0$. O gráfico da figura 4.4 mostra esta comparação.

Figura 4.2: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$



Variação da constante C do fluido

Com as condições iniciais $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$ e o parâmetro $\gamma = 0, 1$ fixado, o parâmetro C foi variado e, como feito na subseção anterior, utilizou-se a equação de Friedmann (4.38) para obter a condição inicial \dot{a}_0 . Então, prosseguiu-se a solucionar numericamente o sistema de equações diferenciais (4.37).

A tabela 4.4 mostra os instantes de tempo em que cada modelo atingiu a singularidade do tipo *Big Rip* para os valores $C = 1$, $C = 10$ e $C = 100$. Desses resultados, é possível concluir que a singularidade é atingida tão antes quanto maiores os valores de C . Dado que esta constante está relacionada à energia do fluido, esses resultados eram esperados, já que o fluido de paredes de domínio possui pressão negativa e, portanto, é repulsivo. O gráfico da figura 4.5 mostra a comparação da evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ para cada um dos valores de C presentes na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Variação de C em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

C	t	\dot{a}_0
1	2.1528056	1.031280106
10	1.1379476	1.583758448
100	0.42159476	4.153470788

Figura 4.3: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$

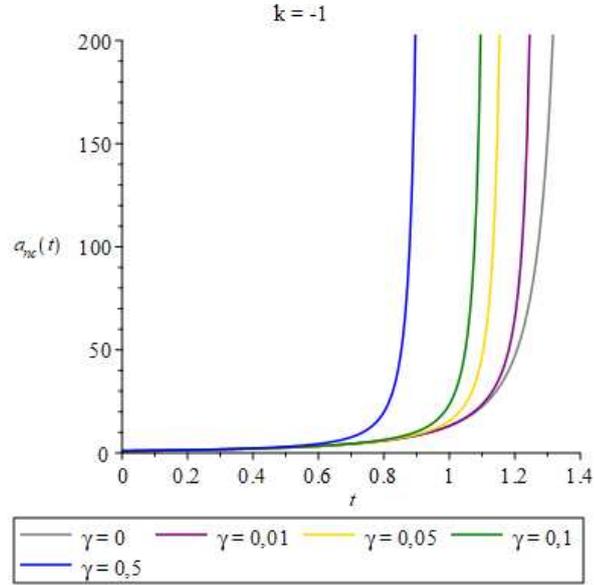
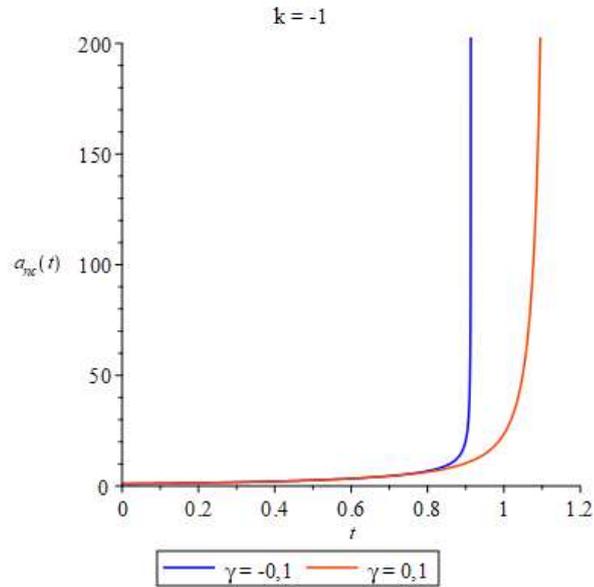


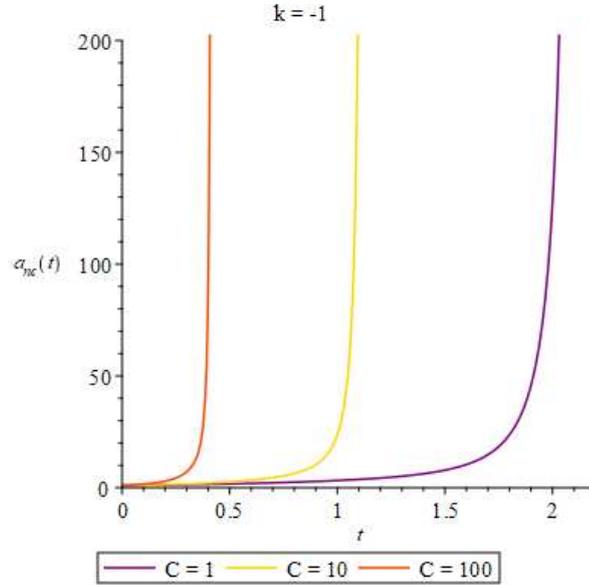
Figura 4.4: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostos, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$



Variação da coordenada T no instante inicial T_0

Procedendo de modo semelhante ao das seções anteriores, o sistema de equações diferenciais (4.37) foi resolvido para diferentes valores da condição inicial da coordenada T . Ao variar T_0 , são obtidos resultados diferentes no caso de γ ser positivo ou negativo. Se

Figura 4.5: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro C , relacionado à energia do fluido, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0, 1$.



$\gamma > 0$, quanto maior o valor de T_0 , mais rápido o modelo atinge a singularidade do *Big Rip*. Já se $\gamma < 0$, o modelo atinge a singularidade mais rapidamente quanto menor for o valor de T_0 .

Os resultados obtidos para os valores $T_0 = 0$, $T_0 = 1$, $T_0 = 2$ e $T_0 = 3$ estão dispostos na tabela 4.5 e figura 4.6, onde $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$, e na tabela 4.6 e figura 4.7, onde $\gamma = -0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

Tabela 4.5: Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

T_0	t	\dot{a}_0
0	1,1379476	1,583758448
1	1,1071675	1,687574938
2	1,0795906	1,785528988
3	1,0546368	1,878514108

Figura 4.6: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$.

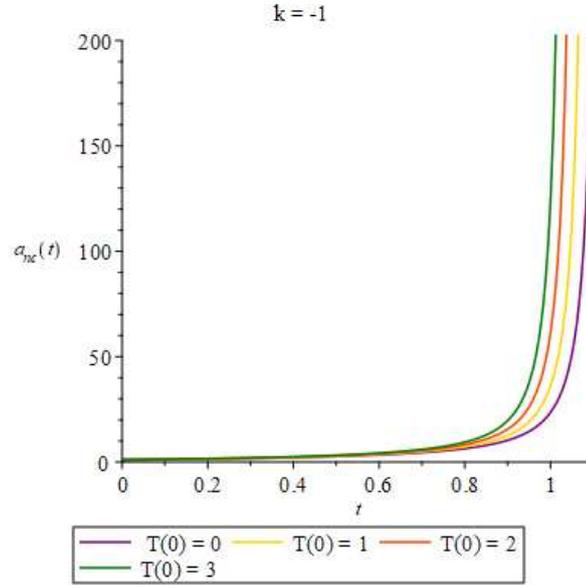


Tabela 4.6: Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = -0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

T_0	t	\dot{a}_0
0	0,91339583	1,683758448
1	0,94070824	1,572881042
2	0,97210560	1,453269991
3	1,0089812	1,322464800

Variação do fator de escala no instante inicial inicial a_0

Assim como nas seções anteriores, o sistema de equações (4.37) foi resolvido com auxílio da equação de Friedmann (4.38) e mantidos fixos os valores $\gamma = 0, 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$.

Os resultados dessa subseção ilustram o comportamento de $a_{nc}(t)$ quando a condição inicial a_0 é variada e os demais parâmetros são mantidos fixos, mostrando que quanto maior o fator de escala inicial do modelo, mais rapidamente este atinge a singularidade *Big Rip*. Este resultado está de acordo com o esperado já que, pela equação de Friedmann, a velocidade de expansão inicial \dot{a}_0 é maior quanto maior for a_0 , como é mostrado na tabela 4.7.

A evolução de $a_{nc}(t)$ para cada um desses casos se encontra no gráfico da figura 4.8.

Figura 4.7: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = -0,1$.

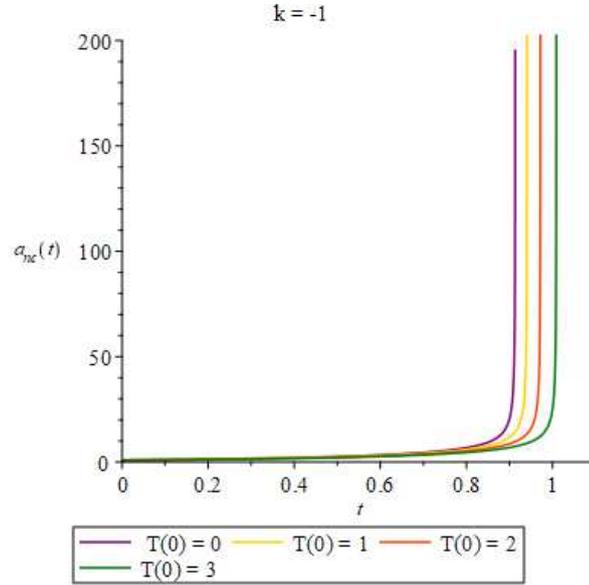


Tabela 4.7: Variação de a_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0,1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$.

a_0	t	\dot{a}_0
1	1,1379476	1,583758448
2	0,76150486	3,782503238
3	0,58357346	6,121445643
4	0,47477355	8,32851537

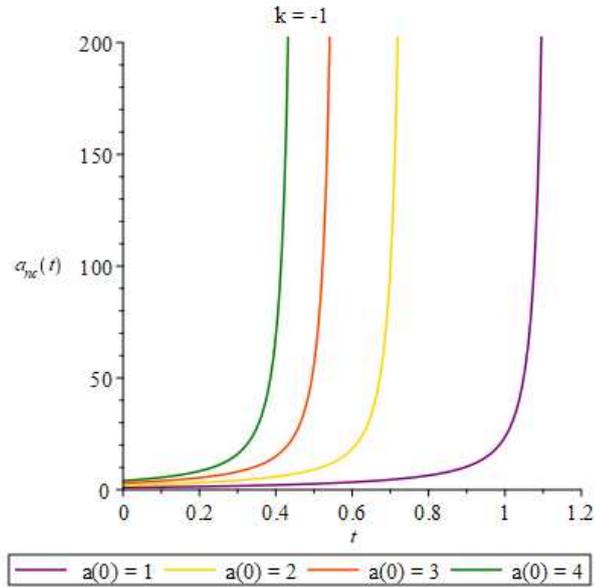
Variação da derivada temporal do fator de escala no instante inicial \dot{a}_0

A fim de variar a condição inicial \dot{a}_0 , nesta subseção denotada por v_0 , foram mantidas fixas as quantidades $a_0 = 1$, $T_0 = 1$ e $\gamma = 0,5$ e, para cada conjunto de valores (a_0, T_0, γ, v_0) , foi obtido o valor de C que satisfizesse a equação de Friedmann dada por (4.38). Assim, o sistema de equações diferenciais (4.37) foi resolvido numericamente para os casos $v_0 = 1$, $v_0 = 2$, $v_0 = 3$ e $v_0 = 4$.

Foi possível constatar que a singularidade de *Big Rip* é alcançada em um menor intervalo de tempo para maiores valores de v_0 . Este resultado reafirma o que era esperado, já que, quanto maior o valor atribuído a v_0 , maior a velocidade inicial de expansão do fator de escala a_{nc} e, portanto, menor o tempo necessário para atingir a singularidade.

Os intervalos de tempo encontrados constam na tabela 4.8 e a expansão do fator

Figura 4.8: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro a_0 e mantendo fixos os valores de $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$.

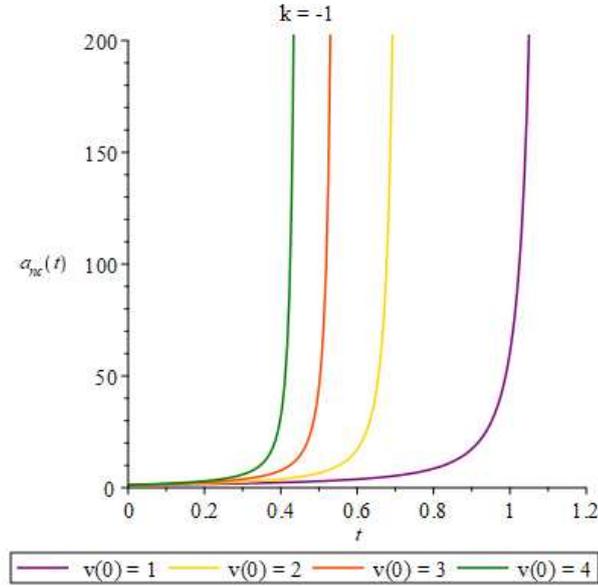


de escala em cada caso é ilustrada no gráfico da figura 4.9.

Tabela 4.8: Variação de v_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, $\gamma = 0, 5$, $T_0 = 1$ e $a_0 = 1$.

v_0	t	C
1	1,1106896	4,50
2	0,72734877	14,25
3	0,55564533	27,00
4	0,45401736	42,75

Figura 4.9: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = -1$, variando o valor do parâmetro v_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, e $\gamma = 0,5$.



Constante de Curvatura $k = 0$

Substituindo $k = 0$ no sistema de equações, dado por (4.26) e (4.27), obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -3 \left(\frac{\gamma a^2 \dot{a}}{2} - \frac{a^2 C}{12} - \frac{a \gamma T C}{12} \right) \\ \dot{T} &= \frac{\gamma \dot{a}}{2} + \frac{a^2 \gamma T}{2} + a^3 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Fazendo o mesmo com a equação de Friedmann, dada por (4.28), obtém-se:

$$-6\dot{a}^2 + a^3 \left(C + \frac{3CT\gamma}{2a} - 6\gamma\dot{a} \right) = 0. \quad (4.40)$$

Variação do Parâmetro não comutativo γ

Assim como na seção anterior, a fim de analisar a dependência do comportamento de a_{nc} com o parâmetro não comutativo γ em modelos cosmológicos com curvatura nula, foram determinadas e fixadas as condições iniciais $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$ e o parâmetro $C = 10$. Variou-se, então o parâmetro γ e, com apoio da equação de Friedmann (4.40), a condição inicial \dot{a}_0 foi obtida e o sistema, dado por (4.39), foi resolvido.

Em todos os casos, os modelos atingiram a singularidade de *Big Rip* em determi-

nado instante de tempo t . Esses resultados constam nas tabelas 4.9 e 4.10.

Tabela 4.9: Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \leq 0$.

γ	t	a_0
0	1,5491934	1,290994449
-0,01	1,3035587	1,296004131
-0,05	1,1294627	1,316236488
-0,1	1,0211810	1,341962332
-0,5	0,66784316	1,564977820

Tabela 4.10: Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \geq 0$.

γ	t	a_0
0	1,5491934	1,290994449
0,01	1,4131984	1,286004131
0,05	1,3165413	1,266236488
0,1	1,2557100	1,241962332
0,5	1,0388577	1,064977820

Assim como nos modelos com curvatura negativa, quanto maiores os valores de γ em módulo, em menos tempo o *Big Rip* é atingido. Os gráficos das figuras 4.10 e 4.11 retratam a evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em cada caso acima apresentado.

Figura 4.10: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$

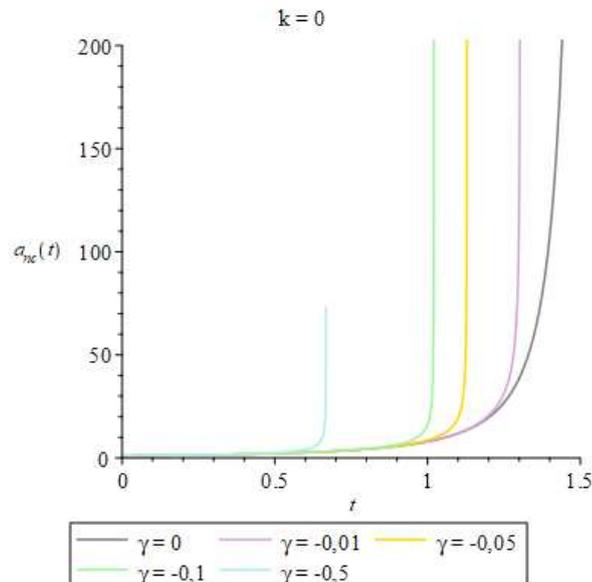
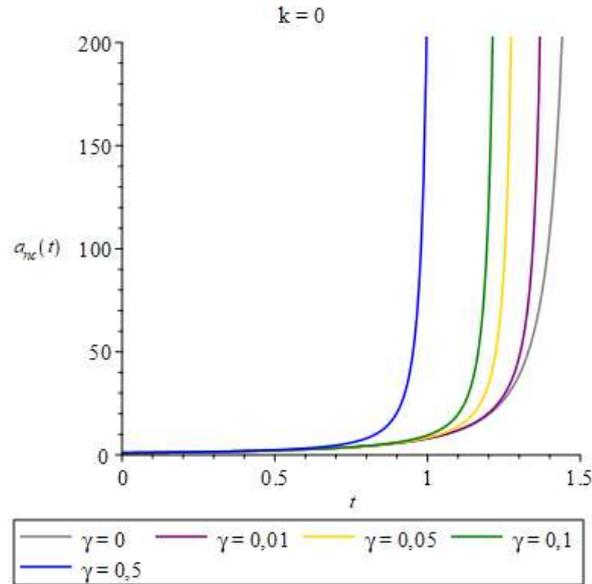
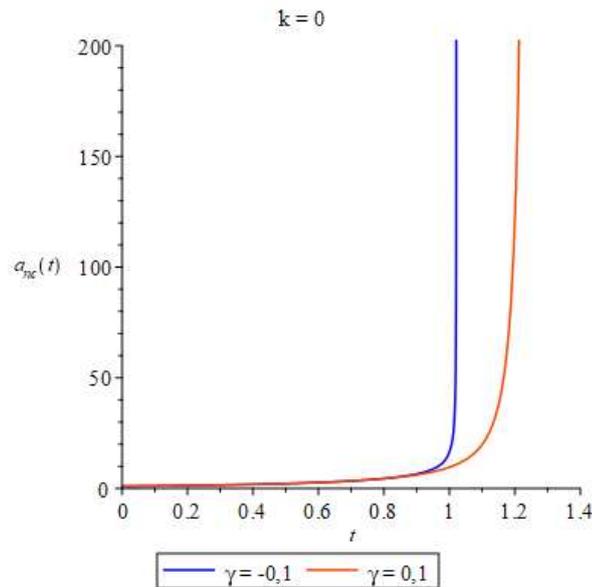


Figura 4.11: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$



Nos modelos de curvatura nula também foi possível notar que, para valores de γ iguais em módulo e opostos em sinal, a singularidade do tipo *Big Rip* acontece em menos tempo quando $\gamma < 0$, como mostra o gráfico da figura 4.12.

Figura 4.12: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostos, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$



Variação da constante C do fluido

Com as condições iniciais $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$ e o parâmetro $\gamma = 0,1$ fixado, o sistema de equações diferenciais (4.37) foi resolvido para os seguintes valores do parâmetro associado à energia do fluido: $C = 1$, $C = 10$ e $C = 100$. A tabela 4.11 mostra, para cada caso, os instantes de tempo em que o modelo atingiu a singularidade do tipo *Big Rip*.

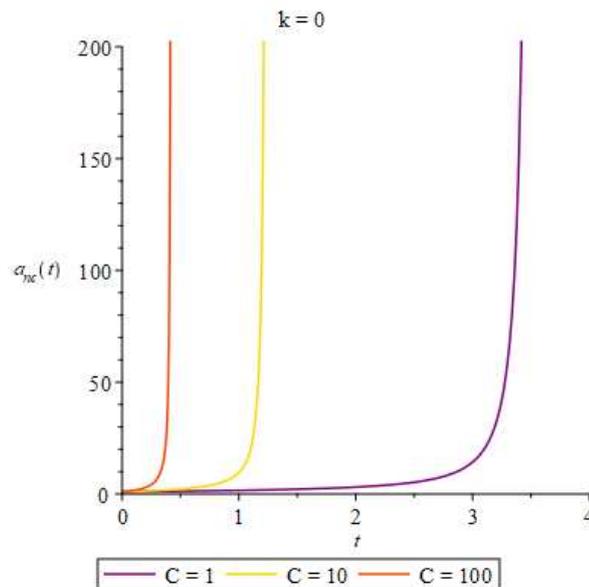
Desses resultados, nota-se que a singularidade é atingida em menores intervalos de tempo quanto maiores os valores de C . Como analisado para o caso de curvatura negativo, esses resultados são condizentes com o esperado.

O gráfico da figura 4.13 mostra a comparação da evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ para cada um dos valores de C presentes na tabela 4.11.

Tabela 4.11: Variação de C em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

C	t	\dot{a}_0
1	3,5509999	0,3612987560
10	1,2557100	1,241962332
100	0,42628886	4,032789080

Figura 4.13: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro C , relacionado à energia do fluido, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0,1$



Variação da coordenada T no instante inicial T_0

Assim como na seção anterior, ao variar T_0 foram obtidos resultados diferentes quando γ é positivo ou negativo. Mas, da mesma forma, se $\gamma > 0$, maiores valores de T_0 levam à singularidade do *Big Rip* em intervalos de tempo mais curtos. Já se $\gamma < 0$, menores valores de T_0 favorecem o alcance da singularidade em menos tempo.

Os resultados obtidos para os valores $T_0 = 0$, $T_0 = 1$, $T_0 = 2$ e $T_0 = 3$ estão dispostos na tabela 4.12 e figura 4.14, onde $\gamma = 0, 1$, e na tabela 4.13 e figura 4.15, onde $\gamma = -0, 1$. Em ambos os casos foram mantidos os parâmetros $a_0 = 1$ e $C = 10$.

Tabela 4.12: Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

T_0	t	\dot{a}_0
0	1,2557100	1,241962332
1	1,2172250	1,335339910
2	1,1832473	1,422809107
3	1,1528683	1,505367052

Figura 4.14: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$.

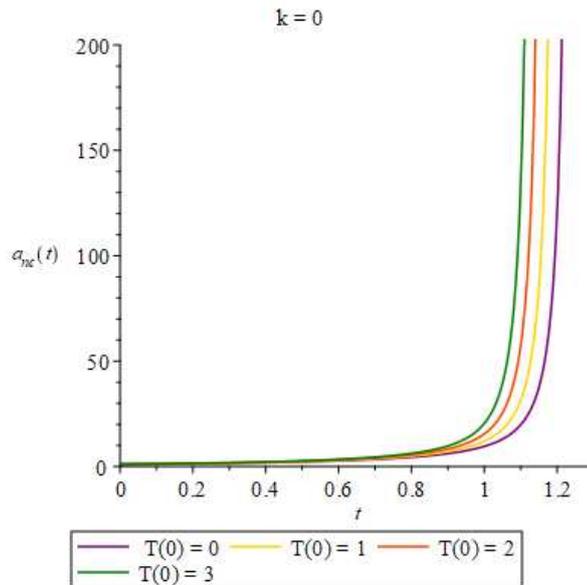
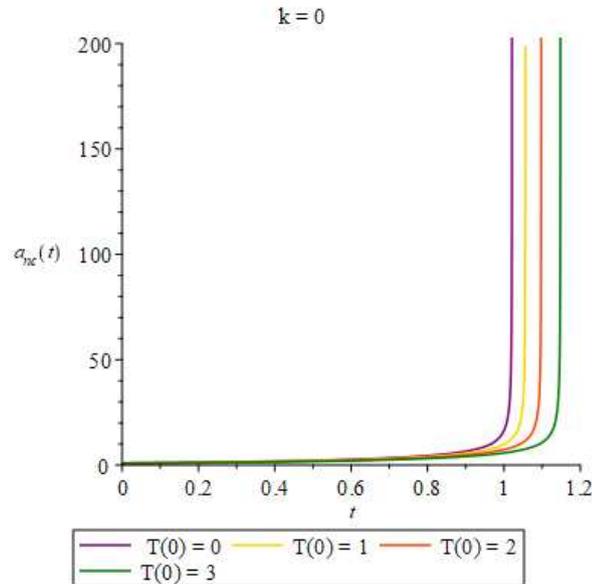


Tabela 4.13: Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = -0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

T_0	t	\dot{a}_0
0	1,0211810	1,341962332
1	1,0563932	1,241287818
2	1,0978319	1,131280106
3	1,1481002	1,008731801

Figura 4.15: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = -0, 1$.



Variação do fator de escala no instante inicial a_0

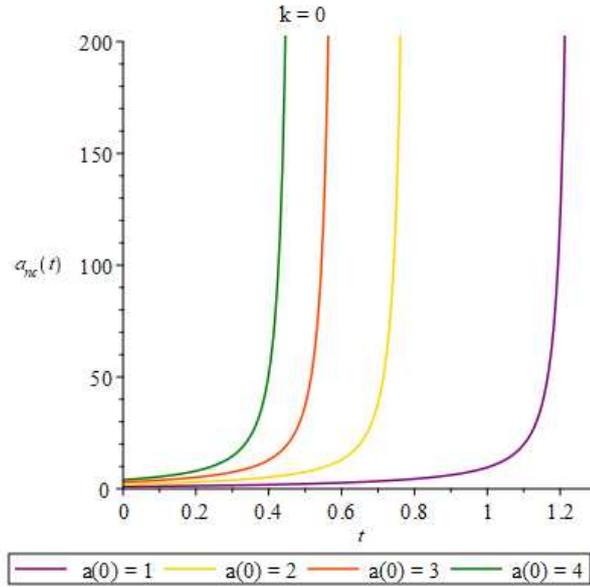
Ao variar a condição inicial a_0 , mantendo os demais parâmetros fixos, observa-se que quanto maior o fator de escala inicial do modelo, mais rapidamente este atinge a singularidade *Big Rip*. Este resultado, novamente, condiz com o esperado.

Os instantes de tempo em que ocorre a singularidade e os valores da condição inicial do fator de escala correspondentes, $a_0 = 1$, $a_0 = 2$, $a_0 = 3$ e $a_0 = 4$, podem ser encontrados na tabela 4.7, enquanto a evolução de $a_{nc}(t)$ para cada um desses casos se encontra no gráfico da figura 4.8.

Tabela 4.14: Variação de a_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0, 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$.

a_0	t	\dot{a}_0
1	1,2557100	1,241962332
2	0,80463025	3,273327283
3	0,60611174	5,492696837
4	0,48841640	7,61233863

Figura 4.16: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro a_0 e mantendo fixos os valores de $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$.



Variação da derivada temporal do fator de escala no instante inicial \dot{a}_0

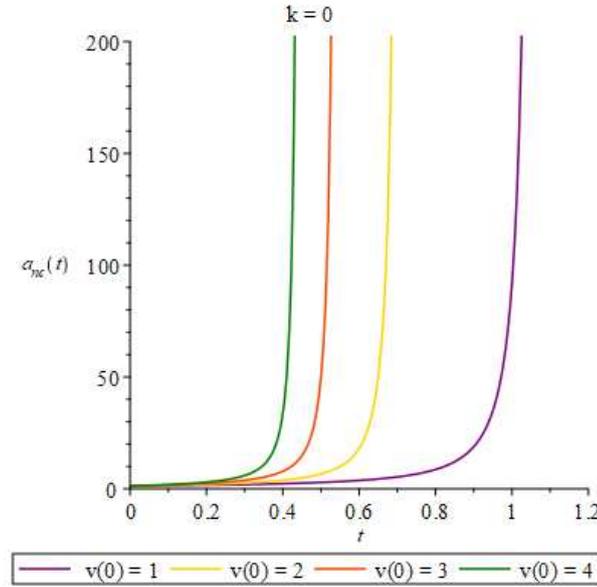
Para diferentes valores de \dot{a}_0 , nesta subseção denotada por v_0 , foram mantidas fixas as quantidades $a_0 = 1$, $T_0 = 1$ e $\gamma = 0,5$. Desta forma, para cada conjunto de valores (a_0, T_0, γ, v_0) , foi obtido o valor de C que respeitasse a equação de Friedmann dada por (4.38). Com todos os parâmetros definidos, resolveu-se o sistema de equações diferenciais (4.37) para os casos em que $v_0 = 1$, $v_0 = 2$, $v_0 = 3$ e $v_0 = 4$.

A singularidade de *Big Rip* foi atingida mais rapidamente para valores maiores de v_0 , o que era esperado, já que v_0 está associado à velocidade inicial de expansão do fator de escala a_{nc} .

Tabela 4.15: Variação de v_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, $\gamma = 0,5$, $T_0 = 1$ e $a_0 = 1$.

v_0	t	C
1	1,0765248	6,75
2	0,71732175	16,50
3	0,55097186	29,25
4	0,45138549	45,00

Figura 4.17: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 0$, variando o valor do parâmetro v_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, e $\gamma = 0,5$.



Constante de Curvatura $k = 1$

Para finalizar as análises, substitui-se $k = 1$ no sistema de equações, dado por (4.26) e (4.27), e obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -a - \frac{\gamma T}{2} - 3 \left(\frac{\gamma a^2 \dot{a}}{2} - \frac{a^2 C}{12} - \frac{a \gamma T C}{12} \right) \\ \dot{T} &= \frac{\gamma \dot{a}}{2} + \frac{a^2 \gamma T}{2} + a^3 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Fazendo o mesmo com a equação de Friedmann, dada por (4.28), obtém-se:

$$-6(\dot{a}^2 + a^2 + \gamma a T) + a^3 \left(C + \frac{3CT\gamma}{2a} - 6\gamma \dot{a} \right) = 0. \quad (4.42)$$

Variação do Parâmetro não comutativo γ

Nesta subseção foram analisados os resultados obtidos com a variação do parâmetro γ , mantidos constantes as condições iniciais $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$ e o parâmetro $C = 10$.

As tabelas 4.16 e 4.17 mostram, para os valores de γ analisados, o instante de tempo t em que o modelo atingiu a singularidade *Big Rip* e a condição inicial \dot{a}_0 utilizada. O caso comutativo $\gamma = 0$ está presente para efeitos de comparação.

Tabela 4.16: Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \leq 0$.

γ	t	\dot{a}_0
0	1,7721544	0,8164965812
-0,01	1,5244825	0,8215118902
-0,05	1,3417870	0,8418792240
-0,1	1,2225130	0,8680260795
-0,5	0,79362920	1,103912564

Tabela 4.17: Variação de γ em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma \geq 0$.

γ	t	\dot{a}_0
0	1,7721544	0,8164965812
0,01	1,6353703	0,8115118902
0,05	1,5354060	0,7918792240
0,1	1,4703789	0,7680260795
0,5	1,2222675	0,6039125638

Assim como nos casos com curvatura nula e curvatura negativa, quanto maior o valor absoluto de γ , mais rapidamente os modelos com curvatura positiva atingem o *Big Rip*. Os gráficos que representam a evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ em cada modelo se encontram nas figuras 4.18 e 4.19.

Figura 4.18: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$

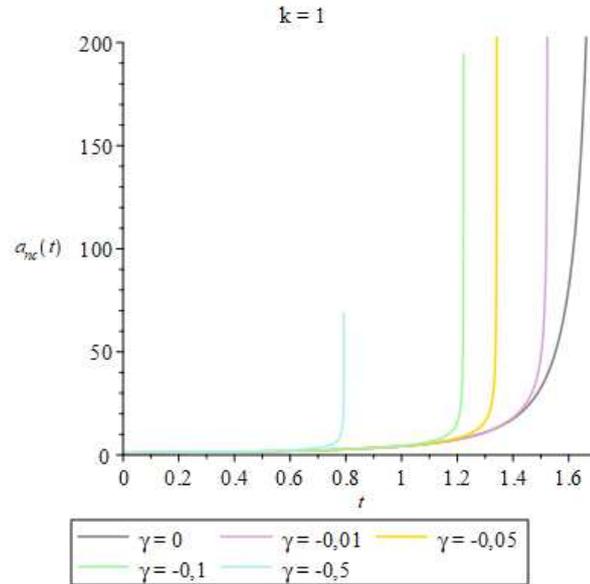
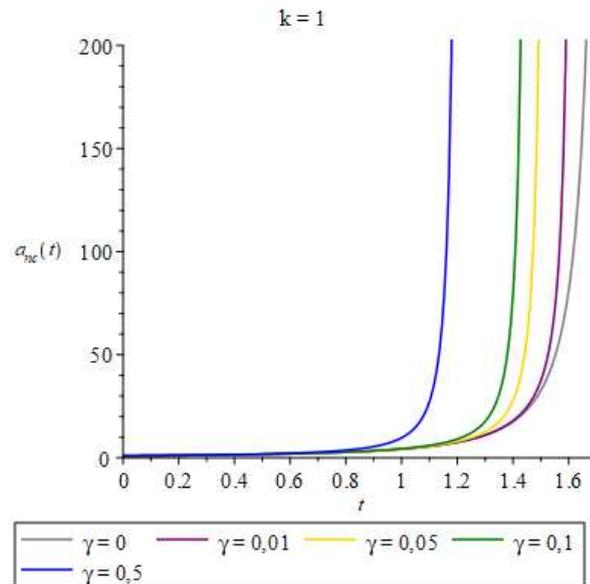
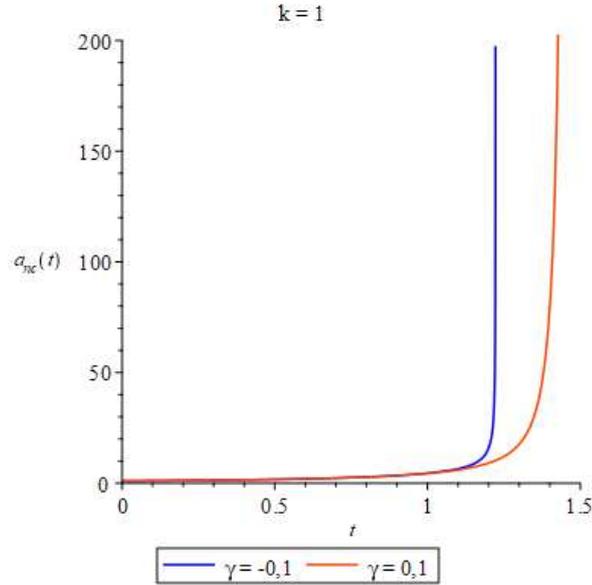


Figura 4.19: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$



Mais uma vez, para valores do parâmetro não comutativo iguais em módulo, o crescimento do fator de escala se dá mais rápido quando γ é negativo. O gráfico da figura 4.20 mostra esta comparação entre modelos com curvatura positiva.

Figura 4.20: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostos, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$



Variação da constante C do fluido

Para variar o valor da constante C , foram fixados $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0,1$ e substituídos na equação de Friedmann (4.42). Da relação obtida, percebeu-se que para que \dot{a}_0 seja positivo, C deve ser maior que 6. Logo, para que os modelos gerados fossem condizentes com a realidade, a constante assumiu os valores $C = 10$, $C = 45$ e $C = 100$

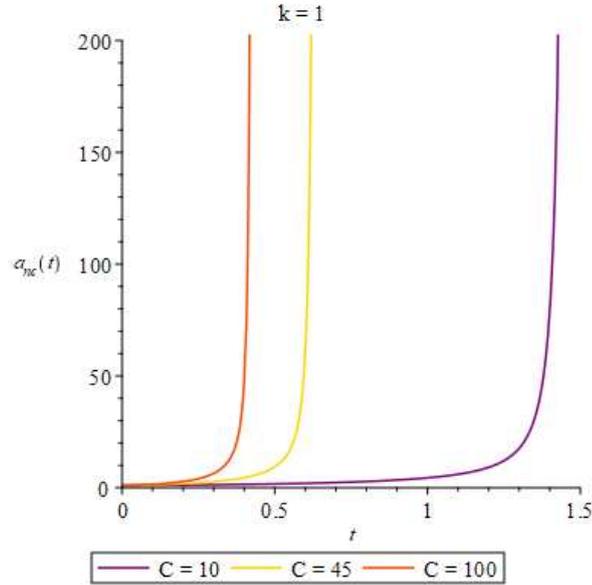
Da tabela que contém os instantes de tempo em que cada modelo atingiu a singularidade do tipo *Big Rip*, a tabela 4.18, é possível concluir que a singularidade é atingida antes pelos modelos com maiores valores de C , sendo consistente com o esperado.

Tabela 4.18: Variação de C em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0,1$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

C	t	\dot{a}_0
10	1,4703789	0,7680260795
45	0,63909258	2,500000000
100	0,43124630	3,908429823

O gráfico da figura 4.21 mostra a comparação da evolução do fator de escala $a_{nc}(t)$ para cada um dos valores de C presentes na tabela 4.18.

Figura 4.21: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro C , relacionado à energia do fluido, e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$ e $\gamma = 0, 1$



Variação da coordenada T no instante inicial T_0

Analisando os resultados obtidos com diferentes valores da condição inicial T_0 , obtêm-se, assim como para os casos $k = -1$ e $k = 0$, comportamentos distintos de acordo com o sinal de γ . Se $\gamma < 0$, quanto menor for o valor de T_0 , mais rápido se atinge a singularidade *Big Rip*. Já se para $\gamma > 0$, quanto menor o valor de T_0 , mais lentamente isso acontece.

Os resultados obtidos para os valores $T_0 = 0$, $T_0 = 1$, $T_0 = 2$ e $T_0 = 3$, com $a_0 = 1$ e $C = 10$ fixos, estão dispostos na tabela 4.19 e figura 4.22, onde $\gamma = 0, 1$, e na tabela 4.20 e figura 4.23, onde $\gamma = -0, 1$.

Tabela 4.19: Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

T_0	t	\dot{a}_0
0	1,4703789	0,7680260795
1	1,4116474	0,8550782655
2	1,3619634	0,9344626283
3	1,3189653	1,007906738

Figura 4.22: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = 0,1$.

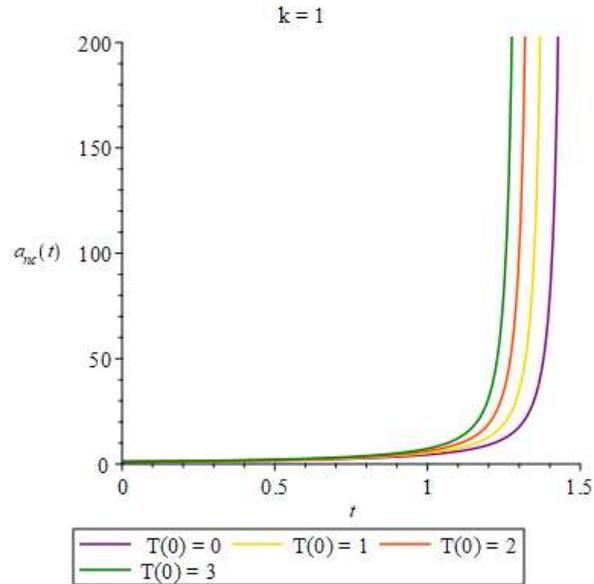
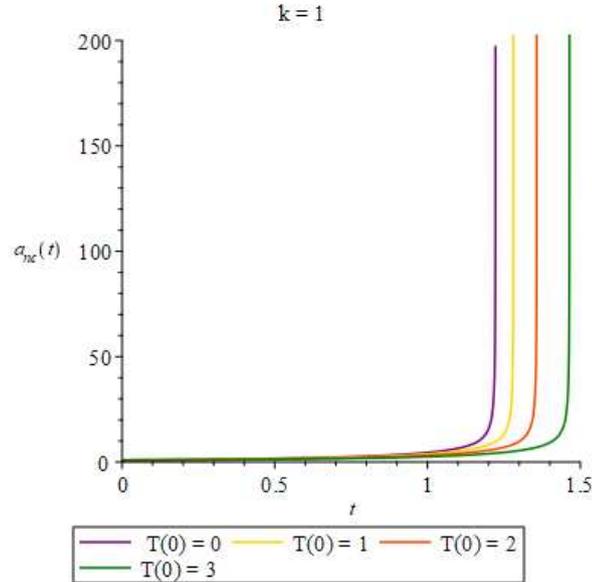


Tabela 4.20: Variação de T_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = -0,1$, $a_0 = 1$ e $C = 10$.

T_0	t	\dot{a}_0
0	1,2225130	0,8680260795
1	1,2815839	0,7705322107
2	1,3575919	0,6575908712
3	1,4648093	0,5181523968

Figura 4.23: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro T_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $C = 10$ e $\gamma = -0, 1$.



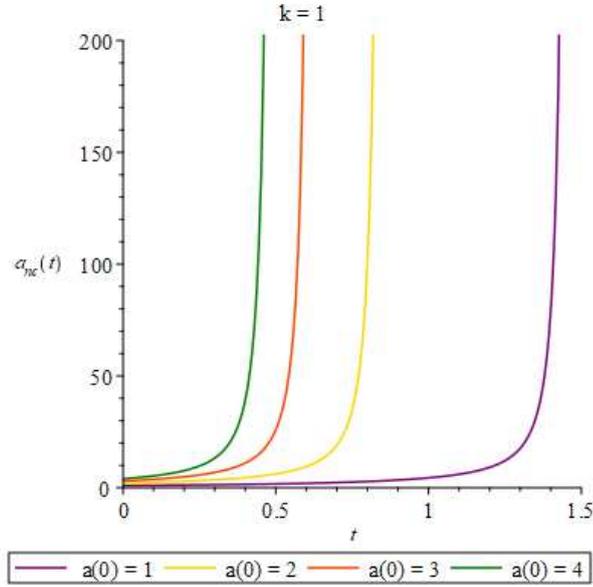
Variação do fator de escala no instante inicial inicial a_0

A variação do valor do fator de escala no instante inicial a_0 resulta em modelos nos quais quanto maior o valor da condição inicial a_0 , mais rápido se atinge a singularidade *Big Rip*. Como mencionado nas duas seções anteriores, tal resultado condiz com o que é esperado. Os instantes de tempo em que ocorre a singularidade se encontram na tabela 4.21 e os modelos são retratados no gráfico da figura 4.24.

Tabela 4.21: Variação de a_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 1$, $T_0 = 0$ e $C = 10$.

a_0	t	\dot{a}_0
1	1,4703789	0,7680260795
2	0,86184192	2,681125335
3	0,63320642	4,800000000
4	0,50400434	6,84523104

Figura 4.24: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro a_0 e mantendo fixos os valores de $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$.



Variação da derivada temporal do fator de escala no instante inicial \dot{a}_0

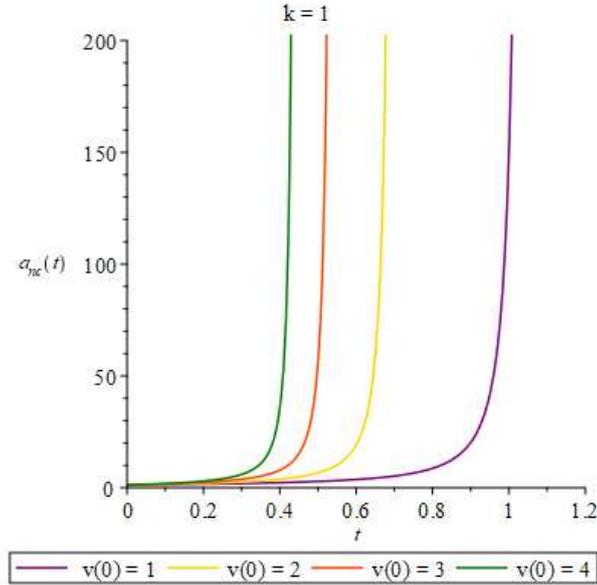
Analisando os modelos obtidos com diferentes valores da derivada temporal do fator de escala no instante inicial, $v_0 \equiv \dot{a}_0$, é possível concluir que, à medida que v_0 aumenta, o tempo necessário para que o modelo atinja a singularidade de *Big Rip* diminui. Como discutido previamente, esta relação está de acordo com o esperado.

Os resultados obtidos se encontram na tabela 4.22 e no gráfico da figura 4.25.

Tabela 4.22: Variação de v_0 em modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, $\gamma = 0, 5$, $T_0 = 1$ e $a_0 = 1$.

v_0	t	C
1	1,0525023	9,00
2	0,70856541	18,75
3	0,54663626	31,50
4	0,44887813	47,25

Figura 4.25: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos com $k = 1$, variando o valor do parâmetro v_0 e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 1$, e $\gamma = 0, 5$.



Comparação entre modelos cosmológicos não comutativos com constantes de curvatura $k = -1$, $k = 0$ e $k = 1$

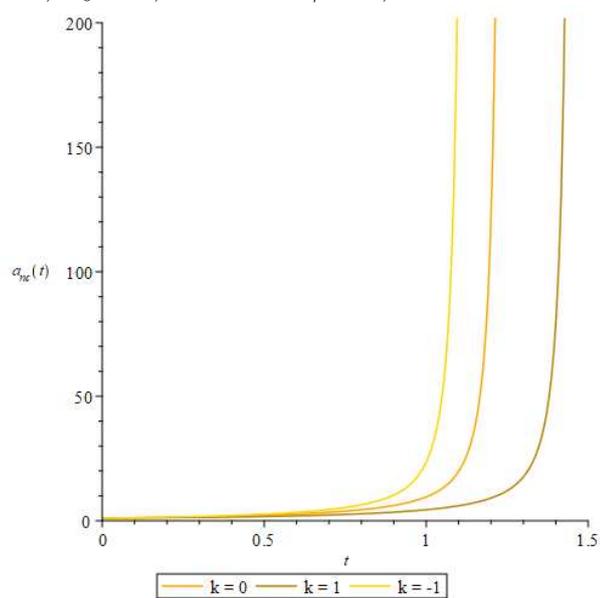
Mantendo os parâmetros $a_0 = 1$, $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$, observa-se que o modelo com $k = -1$ é o que mais rápido atinge a singularidade do *Big Rip*, seguido pelo modelo com constante de curvatura $k = 0$ e, por último, o modelo com $k = 1$. Este resultado condiz com o obtido para modelos comutativos.

Os instantes de tempo em que ocorre a singularidade em cada modelo podem ser encontrados na tabela 4.23, enquanto a evolução de $a_{nc}(t)$ para cada um desses casos se encontra no gráfico da figura 4.26.

Tabela 4.23: Variação de k em modelos cosmológicos não comutativos com $\gamma = 0, 1$, $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

k	t	a_0
-1	1,1379476	1,583758448
0	1,2557100	1,241962332
1	1,4703789	0,7680260795

Figura 4.26: Gráfico do fator de escala $a_{nc}(t)$ em função do tempo t dos modelos cosmológicos não comutativos, variando o valor da constante de curvatura k e mantendo fixos os valores de $a_0 = 1$, $T_0 = 0$, $C = 10$ e $\gamma = 0, 1$.



5 Conclusão

Este trabalho se propôs a descrever e explicar a expansão acelerada do universo através da não comutatividade entre variáveis dinâmicas da teoria, as quais são relacionadas à métrica do espaço-tempo, e variáveis relacionadas aos potenciais escalares que descrevem o fluido que permeia o universo.

Para que isso fosse possível, era necessário reformular a teoria da relatividade geral para que esta pudesse ser obtida de um princípio variacional, o qual daria origem à formulação hamiltoniana da mesma, o que foi feito com o formalismo ADM da Relatividade Geral. Já para descrever o fluido através de um princípio variacional, se utilizou o formalismo de Schutz.

A não comutatividade foi utilizada para representar a energia escura em conjunto com o fluido de paredes de domínio, que podem ser entendidas como defeitos topológicos que surgiram em transições de fase do universo primordial. As equações resultantes possibilitaram a construção de modelos cosmológicos não comutativos e, quando necessário, a recuperação das equações para o modelo comutativo de forma simples e direta.

A análise dos modelos cosmológicos obtidos revelou que a não comutatividade favorece a expansão acelerada do universo e, em todos os casos, levou à singularidade do tipo *Big Rip*. O instante de tempo para o qual ocorre a singularidade é dependente do parâmetro utilizado para representar a não comutatividade, sendo que os menores tempos se dão para os maiores valores do parâmetro em módulo.

A dependência com os demais parâmetros também foi analisada, revelando que quão maiores forem os parâmetros a_0 , \dot{a}_0 e C , menores serão os intervalos de tempo até o *Big Rip*. Enquanto isso, a forma como a condição inicial T_0 influencia o modelo depende de γ . Caso este seja maior que zero, o aumento de T_0 faz com que o modelo atinja a singularidade mais rapidamente. Caso contrário, aumentar T_0 produzirá modelos que atinjam a singularidade mais lentamente.

Os modelos cosmológicos construídos com paredes de domínio, tanto comutativos quanto não comutativos, se expandem mais rapidamente quando a constante de curvatura

é definida como $k = -1$, depois quando $k = 0$ e, por último, quando $k = 1$.

Por fim, dados os resultados e as análises feitas, o presente trabalho foi bem sucedido em mostrar a não comutatividade como uma possível explicação da energia escura.

Como propostas para continuação deste trabalho é possível buscar uma estimativa do valor do parâmetro não comutativo a partir de dados observacionais ou, ainda, realizar a quantização do modelo utilizando a chamada Cosmologia Quântica. Em suma, essa quantização seria uma quantização canônica, ou seja, os parênteses de Poisson seriam transformados em comutadores e seria obtida uma equação análoga à equação de Schrödinger, a chamada equação de Wheeler-DeWitt.

Referências

- [1] SCHMIDT, B. P. Nobel lecture: Accelerating expansion of the universe through observations of distant supernovae. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 84, n. 3, p. 1151, 2012.
- [2] SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Physical Review*, APS, v. 71, n. 1, p. 38, 1947.
- [3] SEIBERG, N.; WITTEN, E. String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 1999, n. 09, p. 032, 1999.
- [4] GARCIA-COMPEAN, H.; OBREGON, O.; RAMIREZ, C. Noncommutative quantum cosmology. *Physical review letters*, APS, v. 88, n. 16, p. 161301, 2002.
- [5] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.
- [6] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.: s.n.], 1992. ISBN 978-0-19-859686-8.
- [7] CLEBSCH, A. *Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen*. Zenodo, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/crll.1859.56.1>.
- [8] SELIGER, R. L.; WHITHAM, G. B. *Variational principles in continuum mechanics*. [S.l.]: The Royal Society London, 1968. v. 305. 1–25 p.
- [9] SCHUTZ, B. F. Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid. *Physical Review D*, APS, v. 4, n. 12, p. 3559, 1971.
- [10] SCHUTZ, B. F. Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle. *Physical Review D*, APS, v. 2, n. 12, p. 2762, 1970.
- [11] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. v. 40, p. 1997–2027, 2008. ISSN 0001-7701.
- [12] CARLIP, S. Quantum gravity in 2+ 1 dimensions: the case of a closed universe. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 8, n. 1, p. 1–63, 2005.
- [13] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: Freeman, 1973. ISBN 0716703440.
- [14] WALD, R. *General Relativity*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1984.
- [15] LEMOS, N. *Mecânica Analítica*. LIVRARIA DA FISICA, 2007. ISBN 9788588325241. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C>.
- [16] BRAGA, J. A formulação ab-initio da segunda lei da termodinâmica. *Química Nova*, SciELO Brasil, v. 21, p. 499–503, 1998.

- [17] FRACALOSSI, R. *Modelos Cosmológicos Quânticos com Fluido de Matéria Rígida e Outros Graus de Liberdade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.
- [18] CHOW, T. L. *Gravity, black holes, and the very early universe: an introduction to general relativity and cosmology*. [S.l.]: Springer, 2008.
- [19] FABRIS, J. C.; GONÇALVES, S. V. d. B. Evolution of perturbations in a domain wall cosmology. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 33, p. 834–839, 2003.
- [20] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- [21] CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M.; WEINBERG, N. N. Phantom energy: dark energy with $w < -1$ causes a cosmic doomsday. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 7, p. 071301, 2003.