UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Elizabeth Bispo dos Santos

APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA A PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES

Juiz de Fora
2024

Elizabeth Bispo dos Santos

APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA A PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada ao PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santos, Elizabeth Bispo dos.
APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA A PROBLEMAS ELÍPTICOS NÃO LINEARES / Elizabeth Bispo dos Santos. – 2024.
93 f. : il.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências exatas. PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, 2024.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Ambrosetti-Rabinowitz 3. Métodos Variacionais. I.Pereira, Fábio Rodrigues, orient. II. Prof. Dr

Elizabeth Bispo dos Santos

Aplicações do Teorema do Passo da Montanha à Problemas Elípticos não-lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Aprovada em 11 de janeiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Eduardo Huerto Caqui

Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM)

Juiz de Fora, 24/01/2024.

Documento assinado eletronicamente por **Fabio Rodrigues Pereira**, **Professor(a)**, em 25/01/2024, às 09:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando de Oliveira Faria**, **Professor(a)**, em 29/01/2024, às 11:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Augusto César dos Reis Costa**, **Usuário Externo**, em 16/02/2024, às 21:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Huerto Caqui**, **Usuário Externo**, em 28/02/2024, às 09:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1677755** e o código CRC **977AE289**.

Dedico este trabalho a Deus e à minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que esteve ao meu lado e me deu forças para não desistir e continuar lutando para atingir meus objetivos, lutas que não foram nada fáceis, pois tive que passar por muitos momentos em que a maior vontade era desistir de tudo. Minha maior gratidão é a ele, pois eu nada seria sem a presença de Deus em toda a minha vida. Devo a ele, todas as minhas conquistas e realizações.

A Universidade Federal de Juiz de Fora, agradeço pelo ambiente de crescimento e de aprendizagem que me foi disponibilizado, agradeço aos profissionais que tive o privilégio de trabalhar, professores excelentes, além disso, bons educadores que compartilharam de seus conhecimentos no decorrer da caminhada. Sem eles não seria possível estar aqui hoje, cheia de alegria e repleta de orgulho do que conquistei. Agradecer a CAPES pelo incentivo, me concedendo uma bolsa para que fosse possível eu residi em Juiz de Fora para cursar a pós, sem esse apoio não haveria a possibilidade de estar aqui.

Agradecer ao meu orientador, Fábio Rodrigues Pereira, por toda a orientação durante esses anos, por toda a paciência e atenção que disponibilizou para mim. Sem a compreensão do mesmo, não teria sido possível completar essa etapa da minha vida.

Agradeço a banca examinadora, por terem aceitado o convite a serem os avaliadores de meu trabalho. Obrigada por terem dedicado um tempo dos seus projetos e atividades, para fazer a leitura de minha dissertação.

Agradeço a minha família, que mesmo de longe, sempre fizeram de tudo para que eu não desistisse do curso, me deram apoio e me estimularam a continuar em frente. Minha família sempre foi e sempre será meu porto seguro, meus pais Ivaneide e Regivandro, meus irmãos Izabella, Marcos e João e minha avó Janete são minha força e meu alicerce.

Agradecer aos amigos que sempre estiveram ao meu lado, os de Recife, que mesmo estando distantes fisicamente, estiveram sempre presentes, enviando mensagens, ligando, procurando saber como eu estava e me dando apoio, os de Juiz de Fora, que são também família para mim. Durante esse tempo de curso, passei por muitas situações difíceis que me fizeram precisar de cuidados, e encontrei em

Jf amigos que não me abandonaram e que fizeram de tudo para me ajudar e me manter bem, meu sincero obrigado a cada um deles.

A mim, precisei ser forte em muitos momentos, minhas ansiedades quase me fizeram largar tudo, passei por situações que nunca havia passado antes, precisei ser operada, tive acidentes que me deixaram sem poder estudar ou mesmo trabalhar, mas não desisti e passei por cima de tudo isso. Comecei os estudos na pandemia, vários fatores foram dificultando minha moradia em Jf e meu tempo de organização para estudar, mas graças a Deus, consegui!

"Se você assumir a continuidade, você pode abrir o kit de ferramentas matemáticas bem abastecido de funções contínuas e equações diferenciais, as serras e martelos de engenharia e física nos últimos dois séculos (e no futuro previsível)."Benoit Mandelbrot.

RESUMO

Um dos métodos de resolução de equações diferenciais são os variacionais, que consistem basicamente em associar o problema a um funcional diferenciável apropriado, de maneira que os pontos críticos desse funcional sejam as soluções que desejamos. Para o estudo desse trabalho, utilizamos um dos teoremas da teoria dos pontos críticos, chamado de Teorema do Passo da Montanha desenvolvido por Ambrosetti e Rabinowitz, para encontrar soluções positivas para uma classe de problemas elípticos não lineares com e sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Mostramos também um resultado de não existência de soluções positivas. O estudo abrange casos em que $f(x, s)$ é assintoticamente linear em relação a s no infinito e também casos em que $f(x, s)$ é subcrítico e superlinear no infinito.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Ambrosetti-Rabinowitz. Métodos Variacionais

ABSTRACT

One of the methods for solving differential equations is the variational method, which basically involves associating the problem with an appropriate differentiable functional, so that the critical points of this functional are the solutions we desire. For the study of this work, we used one of the theorems from critical point theory, called the Mountain Pass Theorem developed by Ambrosetti and Rabinowitz, to find positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems with and without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. We also show a result of non-existence of positive solutions. The study covers cases where $f(x, s)$ is asymptotically linear with respect to s at infinity and also cases where $f(x, s)$ is subcritical and superlinear at infinity.

Keywords: Partial Differential Equations. Ambrosetti-Rabinowitz. Variational Methods

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo.
$\in$	Pertence.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Subconjunto aberto não-vazio e limitado.
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω.
$B_R(0)$	Bola de raio R centrado na origem.
∇u	$= \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ é o gradiente de u.
Δu	$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano de u.
$supp(f)$	Suporte da função f.
$D^\alpha u$	$= \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a derivada de ordem $\lvert\alpha\rvert$ de u.
$\lVert \cdot \rVert_0$	Norma definida em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais que possuem derivadas contínuas em Ω.
$\lVert \cdot \rVert_{C^1}$	Norma definida em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	Espaço das funções reais infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$I(u)$	- Funcional linear.
$L^1(\Omega)$	- É o conjunto das funções f definidas no aberto Ω tais que $$\lvert\lvert f \rvert\rvert_{L^1} = \int_\Omega \lvert f(x) \rvert dx < \infty,$$

isto é, $L^1 = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \int_\Omega |f(x)|dx < \infty\}$.

$L^p(\Omega)$ Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita

$$\|u\|_{L^p} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \ dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$ Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, onde

$$supess_{x\in\Omega}|u(x)| < \infty$$

com norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ Espaços de Sobolev.

$H^k(\Omega)$ Espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ Fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$ com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2) \ dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por $\|u\|_{H_0^1} = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

$H^{-1}(\Omega)$ Espaço dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

$U \hookrightarrow V$ Imersão contínua de U em V.

$U \overset{c}{\hookrightarrow} V$ Imersão compacta de U em V.

$p^* = \dfrac{np}{n-p}$ Expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Em particular, quando $p = 2$ temos que $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$ e

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \ 1 \leqslant s \leqslant 2^*.$$

X^* Espaço dual topológico de X.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Produto interno definido em X.
$\to$	Convergência forte.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
q.t.p.	Quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).
$f = O(g)$	Significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\lvert f(x)\rvert \leq C\lvert g(x)\rvert$, para todo x suficientemente próximo de x_0.
$f = o(g)$	Significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\lvert f(x)\rvert}{\lvert g(x)\rvert} = 0$.
(PS)	Condição de Palais-Smale.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está em constante evolução até os dias atuais, existem ramificações nas áreas de Matemática Pura e Matemática Aplicada. Na Matemática Pura destacam-se três grandes áreas: Álgebra Abstrata, Análise e Geometria Diferencial. Na área da Análise, temos um campo de estudo rico em aplicações, as Equações Diferenciais Parciais. Embora a Matemática Pura seja muitas vezes vista de forma que amedronta, com preconceito e incompreendida, ela deve sua importância na influência mútua que tem com a Matemática Aplicada.

Encontrar soluções para Equações Diferenciais Parciais é um dos grandes desafios para os matemáticos que decidem seguir estudando estas equações, que em grande parte são encontradas em modelos físicos, químicos, dentre outros e por isso são tão importantes. Atualmente, existem inúmeros métodos de resolução de equações diferencias, mas destacamos os Métodos Variacionais, que consistem em associar o problema a um funcional diferenciável apropriado de maneira que os pontos críticos desse funcional sejam as soluções desejadas.

O objetivo deste trabalho é utilizar um teorema clássico da Teoria dos Pontos Críticos que ao longo dos anos, tem sido uma importante ferramenta na abordagem de diversos tipos de problemas em Equações Diferenciais Parciais, chamado Teorema do Passo da Montanha, desenvolvido por Ambrosetti e Rabinowitz em 1973, para encontrar soluções para problemas elípticos não-lineares sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, a saber, existem $\theta > 2$ e $M > 0$ tais que:

$$\textbf{(AR)} \qquad 0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t, \text{ para todo } |t| \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

O Teorema garante sob certas condições, a existência de um ponto crítico não nulo para um funcional definido em um espaço de funções e servirá para mostrar os resultados que serão apresentados nos capítulos 4 e 5.

Este trabalho é apresentado da seguinte maneira:

O segundo capítulo é destinado à informações básicas sobre os espaços vetoriais normados de funções L^p integráveis segundo Lebesgue e posteriormente apresentamos alguns resultados sobre os espaços de Sobolev que contém as soluções das nossas equações diferenciais. Além disso, enunciamos resultados de imersões contínuas e compactas dos espaços de Sobolev nos espaços L^p.

No terceiro capítulo, apresentamos o Teorema de Deformação e o usamos para provar a principal ferramenta de obtenção de pontos críticos para funcionais definidos sobre os espaços de Sobolev, conhecido como o Teorema do Passo da Montanha.

No quarto e no quinto capítulo, apresentamos os resultados devido à Hanadi Zahed (ver [32]), mais precisamente, mostramos a existência de soluções para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = f(x,u), \text{ em } \Omega \\ \qquad u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

em que, Ω é um domínio limitado regular em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Essas soluções vem sendo estudada por diversos pesquisadores tais como Turing [30], Mironescu e Rãdulescu [22], Brézis [5], Zhou [33], Ambrosetti e Rabinowitz [1]. O método mais utilizado por esses autores foi o método variacional que consiste em obter pontos críticos de um funcional associado a equação diferencial, e foi esse método, aplicando o Teorema do Passo da Montanha, que utilizamos para desenvolver os principais resultados dos capítulos 4 e 5.

Equações do tipo que estudamos foram propostas por Turing [30], em que usava-se para modelar fenômenos de morfogênese em Biologia, na dinâmica populacional. A maior parte do seu trabalho requeria apenas um conhecimento modesto de matemática, sendo que o principal requisito é a compreensão da resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes (este também é um requisito importante para a compreensão das oscilações mecânicas e elétricas). O modelo de interação de espécies ou produtos químicos eram dados por: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - div(a(x)\nabla u) = f(x,u)$, em que, u é denso, $div(a(x)\nabla u)$ representa a substância de difusão através do sistema e f a interação de substâncias. O caso estacionário, é quando $f(x,s)$ depende apenas de s e f é assintoticamente linear em $+\infty$, foi estudado, por Saanouri [27], em que foi considerada a seguinte equação:

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = \lambda f(u), \text{ em } \Omega \\ \qquad u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Esta é um generalização do trabalho feito por Mironescu and Radulescu [21], [22], Radulescu [25], Sanchón [29], em que a é uma constante. Além disso, suporam que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave positiva, crescente e convexa, e a condição $f(0) > 0$ é o centro do seu estudo.

Um estudo parecido foi feito por Brézis [5] e Martel [19], mas quando f é superlinear ($l = +\infty$) e a é constante. Com a mesma não linearidade e a constante, o problema foi generalizado para o operador p-Laplaciano em Filippakis and Papageorgiou [11]. Além disso, os mesmos problemas foram estudados para o bi-Laplaciano, em Arioli [2], Saanouni and Trabelsi [28].

Foi feito em um trabalho recente, por Li e Huang [15], uma generalização das equações de *Schrödinger* quaselineares e assintoticamente não lineares, em que os autores suporam que a não linearidade $h(s)$ depende apenas de s e, assim, provaram a existência de soluções positivas via os métodos variacionais. Um dos autores que estudou os problemas envolvendo não-linearidades com o comportamento superlinear, em 2020, foi Li [16]. Em 2002, o problema do Capítulo 4 foi estudado por Zhou [33], em que a foi tratado como uma constante, e os resultados foram generalizados para as não-linearidades: $f(x, s)$ depende de x e de s e $f(x, 0) = 0$.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos os espaços L^p e os espaços de Sobolev. Além disso, enunciamos resultados clássicos de convergência encontrados na Teoria da Medida e Integração e resultados de imersões dos espaços de Sobolev nos espaços L^p. Todos estes conteúdos citados acima, são de grande importância para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Para maiores detalhes, ver [20].

2.1 Os espaços de Lebesgue

2.1.1 Espaços L^p

Definição 2.1.1. *Considere (X, χ, μ) um espaço de medida. Se f pertence a $L(X, \chi, \mu)$, definimos*

$$N_\mu(f) = \int |f| d\mu$$

Mostramos que N_μ é uma semi-norma no espaço $L(X, \chi, \mu)$.

Lema 2.1.1. *O espaço $L(X, \chi, \mu)$ é um Espaço Vetorial sob as operações definidas por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$, e N_μ é uma semi-norma em $L(X, \chi, \mu)$. Além disso, $N_\mu(f) = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para μ-q.t.p. em X (ver apêndice).*

Demonstração. Note que $L(X, \chi, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações indicadas. Além disso, $N_\mu(f) \geq 0$ para $f \in L$, e que

$$\begin{aligned} N_\mu(\alpha f) &= \int |\alpha f| d\mu \\ &= |\alpha| \int |f| d\mu \\ &= |\alpha| N_\mu(f). \end{aligned}$$

Perceba também que da desigualdade triangular e da linearidade da integral temos

$$\begin{aligned} N_\mu(f+g) &= \int |f+g|d\mu \\ &\leq \int (|f|+|g|)d\mu \\ &= \int |f|d\mu + \int |g|d\mu \\ &= N_\mu(f) + N_\mu(g). \end{aligned}$$

Daí N_μ é uma semi-norma em $L(X, \chi, \mu)$, e $N_\mu(f) = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ μ-q.t.p (ver [3]). ■

Queiramos tornar $L(X, \chi, \mu)$ um espaço vetorial normado, então identificamos duas funções que são iguais em quase todo ponto, isto é, usamos classes de equivalência de funções em vez de funções.

Definição 2.1.2. *Duas funções em $L = L(X, \chi, \mu)$ serão μ-equivalentes se elas são iguais μ-q.t.p. A classe de equivalência determinada por f em L é algumas vezes denotada por $[f]$ e consiste do conjunto de todas funções em L que são μ-equivalentes a f . O espaço de Lebesgue $L^1 = L^1(X, \chi, \mu)$ consiste de todas as classes de μ-equivalência em L. Se $[f]$ pertence a L^1, definimos a norma por*

$$||[f]||_1 = \int |f|d\mu. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1. *O espaço de Lebesgue $L^1(X, \chi, \mu)$ é um Espaço Vetorial Normado.*

Demonstração. Note que as operações vetoriais em L^1 são definidas por

$$\alpha[f] = [\alpha f], \ [f] + [g] = [f+g],$$

e que o vetor zero de L^1 é $[0]$. Devemos mostrar somente que a equação (2.1) é uma norma em L^1. Temos $||[f]||_1 \geq 0$ e $||[0]||_1 = 0$. Além disso, se $||[f]||_1 = 0$ então

$$\int |f|d\mu = 0,$$

logo, $f(x) = 0$ em μ-q.t.p. Daí $[f] = [0]$. Por fim, vemos que as propriedades (iii) e (iv) da definição de norma encontrada no Apêndice A.0.1 são satisfeitas. Portanto, $|| \cdot ||_1$ é uma norma em L^1. ■

Além disso, os elementos de L^1 são na realidade classes de equivalência de funções em L. Contudo, é conveniente considerar esses elementos como sendo funções e subsequentemente foi feito isso. Assim, vamos fazer referência à classes de equivalência $[f]$ referindo-se a "o elemento f de L^1", e vamos escrever $||f||_1$ em lugar de $||[f]||_1$.

Agora, vamos considerar uma família de espaços vetoriais normados relacionados à classes de equivalência de funções mensuráveis.

Definição 2.1.3. *Se $1 \leq p < \infty$, o espaço $L^p = L^p(X, \chi, \mu)$ consiste de todas as classes de μ-equivalência de funções χ-mensuráveis a valores reais f para qual $|f|^p$ tem integral finita com repeito a μ sobre X. Definimos*

$$||f||p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Se $p = 1$, reduzimos à norma introduzida previamente no espaço L^1 de classes de equivalência de funções integráveis. Mostramos subsequentemente que se $1 \leq p < \infty$, então L^p é um espaço vetorial normado com a norma dada em (2.2), e é completo sob esta norma, assim L^p é um Espaço de Banach. Entende-se que a operação vetorial entre classes de equivalência em L^p são definidas pontualmente: a soma das classes de equivalência contendo f e g é a classe de equivalência contendo $f + g$ e o mesmo para o produto cf . Para que possamos estabelecer que (2.2) é uma norma em L^p, vamos precisar da desigualdade a seguir.

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Ver referência [9]. ■

A desigualdade de Hölder garante que o produto de uma função em L^p e uma função em L^q é integrável quando $p > 1$ e q satisfaz a relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ou, equivale a quando $p + q = pq$. Dois números satisfazendo esta relação serão chamados de índices conjugados. Observe que $p = 2$ é o único índice próprio conjugado. Assim, o produto de duas funções em L^2 é integrável.

Corolário 2.1.1 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). *Se f e g pertencem a L^2, então fg é integrável e*

$$\left|\int fg d\mu\right| \leq \int |fg| d\mu \leq ||f||_2 ||g||_2.$$

Teorema 2.1.3 (**Desigualdade de Minkowski**). *Se f e h pertencem a L^p, $p \geq 1$, então $f+h$ pertence a L^p e*

$$||f+h||_p \leq ||f||_p + ||h||_p. \tag{2.3}$$

Mostramos que o espaço L^p é um espaço vetorial e que (2.2) define uma norma em L^p. A única coisa não trivial para ser feita aqui é a desigualdade (iv) da definição de norma encontrada no Apêndice A.0.1 e esta é a desigualdade de Minkowski. Observe que L^p é completo sob esta norma da seguinte forma:

Definição 2.1.4. *Uma sequência (f_n) em L^p é uma sequência de Cauchy se, para cada número positivo ε, existe um $M(\varepsilon)$ tal que, se $m, n \geq M(\varepsilon)$, então $||f_m - f_n||_p < \varepsilon$. Uma sequência (f_n) em L^p converge para f em L^p se, para cada número positivo ε existe um $N(\varepsilon)$ tal que se $n \geq N(\varepsilon)$, então $||f - f_n||_p < \varepsilon$. Um espaço vetorial normado é completo se toda sequência de Cauchy converge para algum elemento do espaço.*

Lema 2.1.2. *Se a sequência (f_n) converge para f em L^p, então é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, se $m, n \geq N(\frac{\varepsilon}{2})$, então

$$||f - f_m||_p < \frac{\varepsilon}{2}, \ ||f - f_n||_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo assim, temos

$$||f_m - f_n||_p \leq ||f_m - f||_p + ||f - f_n||_p < \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar. ∎

O próximo resultado garante que toda sequência de Cauchy em L^p converge em L^p. Este resultado é também chamado de Teorema de Riesz-Fischer.

Teorema 2.1.4 (Teorema da completude). *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço L^p é um espaço vetorial completo sob a norma*

$$||f||_p = \left\{ \int |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Ver referência [1] ■

Um Espaço Vetorial normado completo é chamado de Espaço de Banach. Assim, o precedente Teorema poderia ser formulado: o Espaço L^p é um Espaço de Banach sob a norma dada em (2.2).
Vamos destacar alguns resultados sobre os espaços L^∞:

Definição 2.1.5. *O espaço $L^\infty = L^\infty(X, \chi, \mu)$ consiste de todas as classes de equivalência de funções χ-mensuráveis a valores reais que são limitadas em quase todo ponto. Se $f \in L^\infty$ e $\Omega \in \chi$ com $\mu(\Omega) = 0$, definimos*

$$S(\Omega) = \sup\{|f(x)| : x \notin \Omega\}$$

e

$$||f||_\infty = \inf\{S(\Omega) : \Omega \in \chi, \mu(\Omega) = 0\}. \tag{2.4}$$

Um elemento de L^∞ é chamado de função essencialmente limitada.

Segue que se $f \in L^\infty$, então $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ para quase todo x. Além disso, se $A < ||f||_\infty$, então existe um conjunto E, com medida positiva tal que $|f(x)| \geq A$ para $x \in E$. Note também que a norma em (2.4) está bem definida em L^∞.

Teorema 2.1.5. *O espaço L^∞ é um Espaço Vetorial Normado completo sob a norma dada por* (2.4)*.*

Demonstração. Ver referência [1]. ■

Definição 2.1.6. *Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço localmente convexo das funções numéricas u, mensuráveis em Ω, equipado com a família de semi-normas*

$$p_{\mathscr{O}}; \{\mathscr{O} \text{ subconjunto aberto limitado de } \Omega\},$$

em que

$$p_{\mathscr{O}}(u) = \left(\int_{\mathscr{O}} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.2 Resultados de convergência

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre convergência de funções integráveis.

Definição 2.2.1. *A coleção de todas as funções de valor real estendido χ-mensuráveis de X é denotada por $M(X,\chi)$, e a coleção de todas as funções χ-mensuráveis não-negativas de X em $\overline{\mathbb{R}}$ por $M^+(X,\chi)$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos reais estendido:* $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Teorema 2.2.1 (Teorema da Convergência Monótona). *Se (f_n) é uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X,\chi)$ que converge para f , então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu. \tag{2.5}$$

Demonstração. A função f é mensurável. Como $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, segue que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, temos

$$\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Para mostrarmos a desigualdade oposta, seja α um número real satisfazendo $0 < \alpha < 1$ e seja φ uma função mensurável simples satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$. Seja

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$

Assim, $A_n \in \chi, A_n \subset A_{n+1}$, e $X = \bigcup A_n$. Daí, segue que

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu. \tag{2.6}$$

Sabendo que a sequência (A_n) é monótona crescente e tem união X, então

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

Portanto, tomando o limite em (2.6) com respeito a n, obtemos

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Como é válido para todo α com $0 < \alpha < 1$, percebemos que

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

e como φ é uma função arbitrária simples em M^+ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$, concluímos que

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Se combinarmos este resultado com a desigualdade oposta, obtemos (2.5) como queríamos demonstrar. ∎

Lema 2.2.1 (Lema de Fatou). *Se (f_n) pertence a $M^+(X, \chi)$, então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ assim $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Portanto,

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, \ m \leq n,$$

e

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Como a sequência (g_m) é crescente e convergente para $\liminf f_n$, o Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\int (\liminf f_n) d\mu = \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Teorema 2.2.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis em $L^1(X)$ que convergem em quase todo ponto para uma função mensurável a valores reais f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu. \tag{2.8}$$

Demonstração. Redefinindo as funções f_n, f em um conjunto de medida nula, podemos assumir que a convergência ocorre em todos os pontos de X. Segue que f é integrável. Como $g + f_n \geq 0$, podemos aplicar o Lema de Fatou para obter

$$\int g d\mu + \int f d\mu = \int (g + f) d\mu \leq \liminf \int (g + f_n) d\mu.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int g d\mu + \int f d\mu &= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\ &= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu.\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \tag{2.9}$$

Como $g - f_n \geq 0$, outra aplicação do Lema de Fatou resulta

$$\begin{aligned}\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g - f) d\mu \\ &\leq \liminf \int (g - f_n) d\mu \\ &= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu,\end{aligned}$$

da qual segue que

$$\limsup \int f_n \leq \int f d\mu \tag{2.10}$$

Combinando (2.9) e (2.10) podemos concluir que

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu,$$

como queríamos demonstrar. ■

2.3 Introdução aos Espaços de Sobolev

Nesta seção, apresentamos algumas notações e resultados sobre integração e teoria das distribuições. Em seguida, apresentamos os resultados básicos para aplicação às Equações Diferenciais Parciais, incluindo a noção de Espaço de Sobolev e algumas de suas propriedades, tais como, os teoremas de imersões contínuas e compactas.

Vamos começar estudando alguns resultados sobre distribuições. Representamos por $\mathbb{K}$, o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Por $\mathbb{N}$ representamos o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{Z}$ o anel dos inteiros. Dado $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}$ (n-vezes), define-se

i) $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$;

ii) $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$

iii) Se $\beta, \alpha \in \mathbb{N}^n, \beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, então $\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, ..., n$. Por D^α, representamos o operador de derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|a|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Assim, se $u = u(x_1, ..., x_n)$, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, então

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}; \; D^0 u = u$$

e

$$D^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

Definição 2.3.1 (Suporte de funções). *Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $(O_i)_{i \in I}$ a família de todos os abertos $O_i \subset \Omega$ tais que $u = 0$ q.t.p. em O_i. Definimos*

$$O = \bigcup_{i \in I} O_i$$

e observamos que $O \subset \Omega$ é o maior aberto tal que $u = 0$ q.t.p. O suporte de u, denotado por $supp(u)$, é definido como sendo

$$supp(u) = \Omega - O.$$

Note que $supp(u)$ é um fechado relativo em Ω. Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, definimos o suporte de u como sendo o seguinte conjunto:

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

2.3.1 Espaço das funções teste

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Por $C_0^\infty(\Omega)$ representa-se o espaço vetorial de todas as funções numéricas, com suporte compacto em Ω, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes. Ou seja,

$$C^\infty(\Omega\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : D^\alpha u \in C(\Omega),\ \forall\alpha\}$$

e

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty : supp(u) \subset\subset \Omega\},$$

em que $\subset\subset$ significa contido e compacto.

Observação 2.3.1. *$C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ no sentido de que se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, então*

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x),\ x \in \Omega, \\ 0,\ x \notin \Omega, \end{cases}$$

pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Em $C_0^\infty(\Omega)$ usamos a seguinte noção de convergência: Dizemos que $\{\Phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para 0 se:

i) Existe um compacto K, com $K \subset \Omega$ tal que $supp\Phi_n \subseteq K,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha\Phi_n \longrightarrow 0$ uniformemente em Ω quando $n \longrightarrow \infty$.

Dizemos que $\{\Phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se a sequência $\{\Phi_n - \Phi\}$ converge para 0.

Definição 2.3.2. *Seja $C_0^\infty(\Omega)$, com a noção de convergência anterior será chamado o espaço das funções testes, sendo denotado por $D(\Omega)$.*

2.3.2 **Distribuições sobre $D(\Omega)$**

Uma distribuição em $D(\Omega)$ é uma transformação linear $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que é contínua com a noção de convergência dada em $D(\Omega)$, ou seja, satisfaz:

i) $\langle T, \Phi + \lambda\Psi\rangle = \langle T, \Phi\rangle + \lambda\langle T, \Psi\rangle, \forall\Phi, \Psi \in D(\Omega), \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$ implicar em

$$\langle T, \Phi_n\rangle \longrightarrow \langle T, \Phi\rangle \text{ em } \mathbb{R}.$$

Vamos denotar o conjunto de todas as distribuições em $D(\Omega)$ por $D'(\Omega)$, ou seja

$$D'(\Omega) = \{T;\ T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é uma distribuição}\}.$$

Observação 2.3.2. *Para cada* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *tem-se* T_u *univocamente determinada por* u *sobre* Ω, *quase sempre, no seguinte sentido: se* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *então* $T_u = T_v$ *se, e somente se,* $u = v$ μ*-q.t.p. em* Ω. *De fato, sejam* u *e* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = T_v$ *em* $D'(\Omega)$, *implica que*

$$\langle T_u, \Phi \rangle \longrightarrow \langle T_v, \Phi \rangle\,,\ \forall\ \Phi \in D(\Omega).$$

Dai, segue que

$$\langle T_u - T_v, \Phi \rangle = 0,\ \forall\ \Phi \in D(\Omega),$$

ou seja,

$$\int (u - v)\Phi = 0,\ \forall\ \Phi \in D(\Omega),$$

logo,

$$u - v = 0\ \text{q.t.p.},$$

portanto,

$$u = v\ \text{q.t.p.}$$

Por esta razão, identificamos u *com a distribuição* T_u *e diz-se a distribuição* u *ao invés de dizer a distribuição* T_u.

2.3.3 Convergência em $D'(\Omega)$

Definição 2.3.3. *Dizemos que uma sequência de distribuições* $\{T_n\} \subset D'(\Omega)$ *converge para a distribuição* 0 *em* $D'(\Omega)$ *se*

$$\langle T_n, \Phi \rangle \longrightarrow 0,\ \forall\ \Phi \in D(\Omega).$$

No caso geral, uma sequência de distribuições $\{T_n\} \subset D'(\Omega)$ *converge para uma distribuição* $T \in D'(\Omega)$ *se a distribuição* $T_n - T$ *converge para a distribuição* 0 *em* $D'(\Omega)$.

Exemplo 2.3.1 (Distribuição delta de Dirac). *Para cada* $p \in \Omega$, *definimos*

$$\begin{aligned} \delta_p : \quad D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi \quad &\longmapsto \Phi(p). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\delta_p \in D'(\Omega)$. *De fato, sejam* $\Phi, \Psi \in D'(\Omega)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos*

$$\begin{aligned} \langle \delta_p, \lambda\Phi + \Psi \rangle &= (\lambda\Phi + \Psi)(p) \\ &= \lambda\Phi(p) + \Psi(p) \\ &= \lambda\delta_p(\Phi) + \delta_p(\Psi). \end{aligned}$$

Usando o fato de que a convergência uniforme implica na convergência pontual, mostramos que δ_p *é contínua. De fato, seja* $\{\Phi_n\} \subset D(\Omega)$ *com* $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ *em* $D(\Omega)$, *então*

$$\langle \delta_p, \Phi_n \rangle = \Phi_n(p) \longrightarrow \Phi(p) = \langle \delta_p, \Phi \rangle .$$

Observação 2.3.3. *Vimos que se* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* T_u *é uma distribuição, mas é oportuno observar que existem distribuições não definidas por funções de* $L^1_{loc}(\Omega)$, *como é o caso da distribuição* δ_p. *Mostramos que a distribuição* δ_p *não é definida por uma função* u *de* $L^1_{loc}(\Omega)$, *isto é, não existe* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\Phi(x)dx = \Phi(p), \ \forall \ \Phi \in D(\Omega).$$

Isto é, tal que

$$\langle u, \Phi \rangle = \delta_p(\Phi), \ \forall \ \Phi \in D(\Omega).$$

2.3.4 A derivada de uma distribuição

Definição 2.3.4. *Considere* $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma distribuição e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Definimos a derivada* $D^\alpha T$ *como sendo a seguinte distribuição*

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \ D(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Phi &\longmapsto \langle D^\alpha T, \Phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \Phi \rangle . \end{aligned}$$

De fato, $D^\alpha T$ é linear, pois se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\Phi, \Psi \in D(\Omega)$, então usando as conhecidas regras de derivação e o fato de T ser linear, temos:

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T, \lambda\Phi + \Psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha(\lambda\Phi + \Psi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \lambda D^\alpha\Phi + D^\alpha\Psi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\lambda \langle T, D^\alpha\Phi \rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha\Psi \rangle \\ &= \lambda \langle D^\alpha T, \Phi \rangle + \langle D^\alpha T, \Psi \rangle . \end{aligned}$$

Agora, seja $(\Phi_n) \subset D(\Omega)$ tal que $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$. Então, $D^\alpha T$ é contínua. De fato, usando a linearidade e continuidade de T respectivamente, e o fato de que toda transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo, temos

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha T, \Phi_n\rangle - \langle D^\alpha T, \Phi\rangle| &= \left|(-1)^{|\alpha|}\right| |\langle T, D^\alpha \Phi_n\rangle - \langle T, D^\alpha \Phi\rangle| \\ &= |\langle T, D^\alpha \Phi_n - D^\alpha \Phi\rangle| \longrightarrow \langle T, 0\rangle = 0. \end{aligned}$$

De fato, como $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ em $D(\Omega)$, então existe $K \subset \Omega$ compacto, tal que

$$D^\alpha \Phi_n \longrightarrow D^\alpha \Phi \text{ uniformemente em } K,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

ou seja,

$$D^\alpha \Phi_n - D^\alpha \Phi \longrightarrow 0.$$

Da continuidade de T, segue

$$\langle T, D^\alpha \Phi_n - D^\alpha \Phi\rangle \longrightarrow 0.$$

Logo, $D^\alpha T$ é uma distribuição.

Observação 2.3.4. *Nem sempre podemos afirmar que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $D^\alpha u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, considere a função de Heaviside*

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ dada por } H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Note que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Afirmação 1: A derivada de H, no sentido das distribuições é igual a função delta de Dirac δ_0. De fato, resolvendo a integral imprópria e usando o fato que Φ se anula fora de seu suporte compacto, segue

$$\begin{aligned}
\left\langle D^1 H, \Phi \right\rangle &= \langle H', \Phi \rangle \\
&= (-1) \langle H, \Phi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H \Phi' dx \\
&= -\int_0^{\infty} \Phi'(x) dx \\
&= -\lim_{b \longrightarrow \infty} \int_0^b \Phi'(x) dx \\
&= -\lim_{b \longrightarrow \infty} \Phi(x)|_0^b \\
&= -\lim_{b \longrightarrow \infty} (\Phi(b) - \Phi(0)) \\
&= \Phi(0) = \langle \delta_0, \Phi \rangle .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle D^1 H, \Phi \right\rangle = \langle \delta_0, \Phi \rangle , \ \forall \Phi \in D(\Omega), \text{ em que } \Omega \subset \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$D^1 H = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Observação 2.3.5. *Lembre que não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_p, \Phi \rangle = \int u \Phi dx, \ \forall \Phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ou seja, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_p = u$. Portanto, escrevemos que $\delta_p \notin L^1_{loc}(\Omega)$.*

Definição 2.3.5. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \Phi(x) dx = (-1) |\alpha| \int_{\alpha} v(x) \Phi(x) dx, \ \forall \Phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sabemos que existem as distribuições T_u e $D^{\alpha} T_u$ (que pode não pertencer a $L^1_{loc}(\Omega)$) e denotamos por $D^{\alpha} T_u = v\alpha$.

Observação 2.3.6. *Toda derivada fraca é uma derivada no sentido das distribuições. Porém a recíproca não é verdadeira, uma vez que a função de Heaviside tem derivada no sentido das distribuições $H^1 = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e não tem derivada fraca.*

2.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção, apresentamos os resultados mais usados sobre Espaços de Sobolev.

Sejam $p \in [1, +\infty]$, $m \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto.

Definimos o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{m,p}(\mathbb{R}) = \Big\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq m\Big\}$$

cuja norma é definida por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty,$$

e para $p = \infty$ é dada por

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty .$$

Chamamos os espaços normados $W^{m,p}(\Omega)$ de espaços de Sobolev.

Proposição 2.4.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

No caso $p = 2$, denotamos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_m = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H^m(\Omega)$ e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Definição 2.4.1. *O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_o^m(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_o^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}}}.$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

2.4.1 Imersões de Sobolev

Apresentamos os teoremas de imersões dos espaços de Sobolev.

Definição 2.4.2 (**Imersão Contínua**). *Dizemos que o espaço normado* $(X, \|.\|_X)$ *está imerso continuamente no espaço* $(Y, \|.\|_Y)$ *e escrevemos* $X \hookrightarrow Y$ *quando,*

(i) X *for subespaço vetorial de* Y*,*

(ii) A aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ *tal que* $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$*, para todo* $x \in X$.

Definição 2.4.3 (**Operador Linear Compacto**). *Um operador linear* $T : X \to Y$ *é dito compacto, se toda sequência limitada* $(x_n) \subset X$ *é levada em uma sequência* $T(x_n)$ *que admite uma subsequência convergente em* Y.

Definição 2.4.4 (**Imersão Compacta**). *Dizemos que o espaço normado* $(X, \|.\|_X)$ *está imerso compactamente no espaço* $(Y, \|.\|_Y)$ *e escrevemos* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ *quando,*

$$\begin{aligned} i : X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é um operador linear compacto.

Teorema 2.4.1 (**Teorema das Imersões Contínuas**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave,* $m \geq 0$ *e* $1 \leq p < \infty$*. Então, para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) Se $m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), p \leq q < \infty$;

(iii) Se $m > \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$;

(iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha \leq m - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Ver referência [18]. ∎

Observação 2.4.1. *$C^j_B(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in C^j(\Omega)$ tais que $D^\alpha u$, para $|\alpha| \leq j$ é limitada em Ω, cuja norma é*

$$\|u\|_{C^j_B(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq j} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Teorema 2.4.2 (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um domínio regular limitado, $j \geq 0$, $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, as imersões abaixo são compactas:*

(i) Se $m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$;

(ii) Se $m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \infty$;

(iii) Se $m > \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\Omega)$ *e* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), 1 \leq q < \infty$;

(iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$.

Demonstração. Ver referência [18]. ∎

Teorema 2.4.3 (Identidades de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então valem as seguintes identidades:*

(i) ***Primeira Identidade de Green***

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds;$$

(ii) ***Segunda Identidade de Green***

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds,$$

em que $\frac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária exterior η.

Demonstração. Ver [9]. ∎

Teorema 2.4.4 (Princípio do Máximo). *Seja $u \in H^1_0(\Omega)$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = h & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $h \in L^{2^*}(\Omega)$, λ *um parâmetro real não-negativo e* $h \geq 0$ *em* Ω. *Então* $u \geq 0$ *em* Ω. *Além disso, se* $h > 0$ *em um conjunto de medida positiva, então* $u > 0$ *em* Ω.

Se $u \in C^1(\bar{\Omega})$, *então a derivada normal exterior* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$, *para todo* $x \in \Omega$.

Demonstração. Ver [9]. ■

Teorema 2.4.5 (**Princípio do Máximo Forte**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0$ $(\Delta u \leq 0)$ *em* Ω *e suponha que existe um ponto* $y \in \Omega$ *tal que*

$$u(y) = \sup_{\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u \right).$$

Então u *é constante.*

Demonstração. Ver referência [17]. ■

Teorema 2.4.6 (**Princípio do Máximo Fraco**). *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto e* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *com* $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ *em* Ω. *Então*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Demonstração. Ver referência [17] ■

Teorema 2.4.7. ***(Teorema de Lions Stampachia)*** *Seja* V *um espaço de Hilbert com norma* $\|\cdot\|_V$ *e denotemos por* K *um subconjunto convexo de* V. *Seja* $a(\cdot,\cdot)$ *uma aplicação bilinear simétrica satisfazendo,*

$$a(v,v) \geq \alpha_0 \|v\|_V^2, \qquad a(v,w) \leq \alpha_1 \|v\|_V \|w\|_V$$

e seja $f \in V^*$. *Então existe uma única solução do problema*

$$a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle, \ \forall v \in K.$$

Demonstração. Ver referência [26]. ■

Teorema 2.4.8. ***(Desigualdade de Poincaré)***
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, conexo e limitado, então existe uma constante a (que depende de n e Ω) tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Seja $Q = (0, a)^n$ um cubo em $\mathbb{R}^n$ que contém $\overline{\Omega}$.

Dado $u \in W^{1,2}(\Omega)$, temos uma extensão $\bar{u}$ de u por zero no cubo Q. Logo, $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{L^2(Q)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(Q)}$.

Assim, para qualquer função $u \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_0^{x_n} u_{x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, t)\, dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 &= \left|\int_0^{x_n} u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)\, dt\right|^2 \\
&= \left(\int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|\,|1| dt\right)^2.
\end{aligned}$$

Consequentemente, pela desigualdade de Hölder, nós temos que

$$\begin{aligned}
|u(x)|^2 &\leq \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt \int_0^{x_n} 1^2 dt \\
&= |x_n| \int_0^{x_n} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt \\
&\leq a \int_0^{a} |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Consequentemente, pelo teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^2 dx &\leq \int_\Omega a \int_0^a |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dt dx \\
&\leq a^2 \int_\Omega |u_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, t)|^2 dx \\
&\leq a^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \text{ para todo } u \in C_o^\infty(\Omega).$$

Consequentemente, pela densidade de $C_o^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq a\|\nabla u\|_{L(\Omega)^2}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

∎

Corolário 2.4.1. *As normas* $\|\cdot\|_{H_0^1}$ *de* $H_0^1(\Omega)$ *e* $\|\cdot\|_{L^2}$ *de* $L^2(\Omega)$ *são equivalentes.*

Demonstração. Ver referência [20]. ∎

3 TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Neste capítulo, apresentamos um teorema clássico da Teoria dos Pontos Críticos que, nas últimas décadas, tem sido uma importante ferramenta na abordagem de diversos tipos de problemas em Equações Diferenciais Parciais, conhecido como Teorema do Passo da Montanha. Esse Teorema garante a existência de um ponto crítico do tipo minimax para o funcional diferenciável definido em um espaço de Banach, satisfazendo certas condições. As definições e o Lema de Deformação abaixo são usados para provar o Teorema do Passo da Montanha.

Definição 3.0.1. ***(Sequência de Palais-Smale (PS))*** *Seja (u_n) uma sequência (PS) no nível $d \in \mathbb{R}$, ou seja,*

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x, u_n)dx \longrightarrow d, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{3.1}$$

e

$$\langle I'(u_n), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x, u_n)\varphi dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty, \tag{3.2}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Definição 3.0.2. ***(condição de Palais-Smale (PS))*** *Sendo H um espaço de Hilbert, $C^1(H, \mathbb{R})$, definimos conjunto dos funcionais $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis no sentido de Frechét e cujas derivadas de Frechét são contínuas em H. Dizemos que um funcional $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer sequência $(u_n) \subset H$ tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, possui uma subsequência convergente em H.*

Lema 3.0.1. ***(Lema de Deformação)*** *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que φ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de φ, então para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para quaisquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*

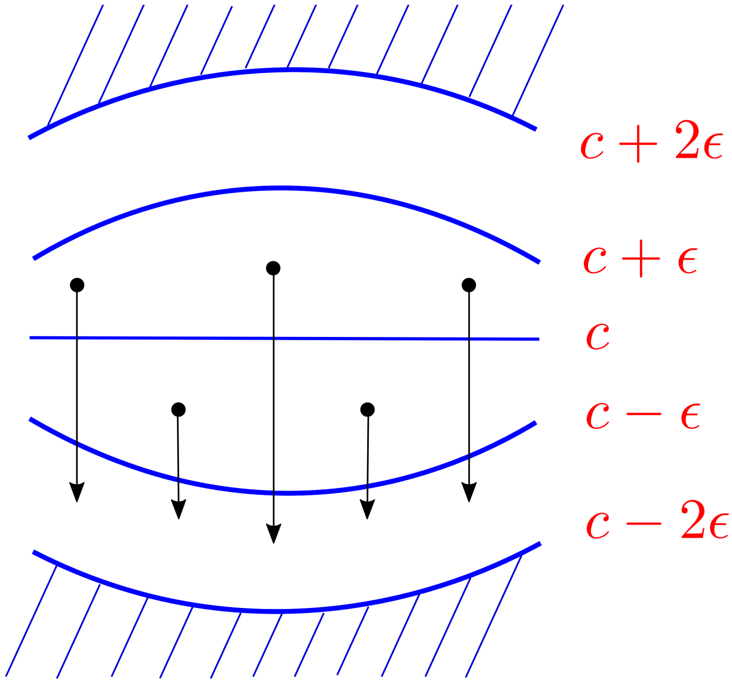
1. *$\eta(0, u) = u$;*

2. $\eta(t,u) = u$, *se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$;

3. $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$, *em que se* $k \in \mathbb{R}$, *definimos* $\varphi^k = \{u \in X; \varphi(u) \leq k\}$;

4. $\eta(1,\cdot) : X \to X$ *é um homeomorfismo.*

– Deformação



Fonte: Produzido pela autora

Demonstração. Ver [9]. ■

Agora usamos o Lema de Deformação para provarmos o famoso resultado de *Ambrosetti-Rabinowitz* (1973) que garante, sob certas condições, a existência de pontos críticos do tipo sela, mas antes damos algumas definições.

Definição 3.0.3. *Seja* X *um espaço de Banach e seja* $I : X \to \mathbb{R}$ *um funcional de classe* C^1. *Um ponto* $u \in X$ *tal que* $I'(u) = 0 \in X'$ *é dito ponto crítico do funcional* I, *e um número real* c *é dito ser um valor crítico de* I *se* $c = I(u)$ *para algum* $u \in X$ *tal que* $I'(u) = 0$.

O conjunto de todos os pontos críticos sobre o nível c é denotado por

$$K_c = \{u \in X : I'(u) = 0, I(u) = c\},$$

e o conjunto (subnível) dos pontos de X em que I não supera o nível c é denotado por

$$I^c = \{u \in X : I(u) \leq c\}.$$

Teorema 3.0.1. ***TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA***
Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Além disso, suponha que

(a) $I(0) = 0$;

(b) existem $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;

(c) existe $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e* $I(e) \leq 0$.

Então I possui um valor crítico

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \{ \max_{u \in \gamma([0,1])]} I(u)\},$$

em que $\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to X \text{ contínua } : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Demonstração.
Primeiro: $c \geq \alpha$. Mostramos que para todo $\gamma \in \Gamma$, nós temos $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$.

De fato, defina a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \|\gamma(t)\|$.

Observe que h é contínua,

$$h(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 = t_0(\gamma) \in (0,1)$ tal que

$$h(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho.$$

Logo, pela condição (b),

$$\max_{t\in[0,1]}[I(\gamma(t))] \geq I\left(\gamma\left(t_0\right)\right) \geq \alpha$$

e, consequentemente, $c \geq \alpha$.

Segundo: c é um valor crítico de I.

Suponha que c não seja um valor crítico, ou seja $K_c = \emptyset$.

Tome $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$.

Por (b) e (c), temos que $c \geq \alpha > 2\varepsilon$.

Pelo Lema de Deformação 3.0.1 existe uma deformação $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ satisfazendo:

(ii) $\eta(t,u) = \eta_t(u) = u,$ para todo $u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ e para todo $t \in [0,1]$;

(iv) $\eta_1\left(I^{c+\varepsilon}\right) \subset I^{c-\varepsilon}$;

ou seja, $u \in I^{c+\varepsilon}$, o que implica que $\eta_1(u) \in I^{c-\varepsilon}$.

Como

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\left\{\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))\right\},$$

existe $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\bar{\gamma}(t)) < c+\varepsilon,$$

consequentemente,

$$\bar{\gamma}(t) \in I^{c+\varepsilon}, \forall t \in [0,1]. \qquad (*)$$

Seja $\sigma = \eta_1 \circ \bar{\gamma}$.

É fácil ver que $\sigma \in \Gamma$, pois, note que $I(e) \leq 0 = I(0) < c-2\varepsilon$ implica que $e \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$ e $0 \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$

Além disso, por (ii), $\sigma(0) = \eta_1(\bar{\gamma}(0)) = \eta_1(0) = 0$ e $\sigma(1) = \eta_1(\bar{\gamma}(1)) = \eta_1(e) = e$.

Por outro lado, usando $(*)$ e (iv), $\sigma(t) = \eta_1(\bar{\gamma}(t)) \in I^{c-\varepsilon}$ consequentemente,

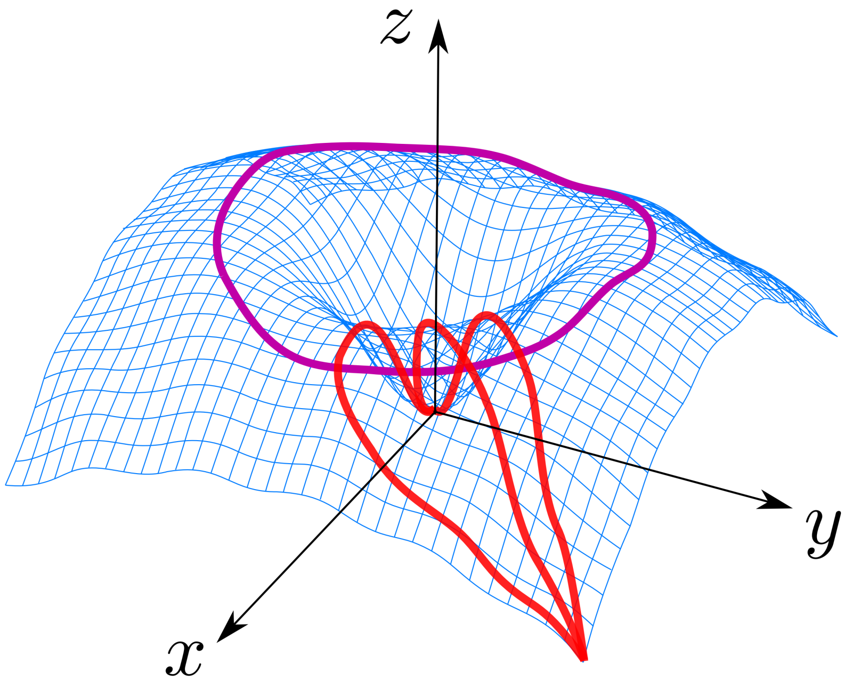
$$\max_{t\in[0,1]} I(\sigma(t)) \leq c-\varepsilon,$$

assim,

$$c \leq c - \varepsilon,$$

o que é uma contradição. ■

– Geometria do Passo da Montanha



Fonte: Produzido pela autora

4 SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UM PROBLEMA ASSINTOTICAMENTE LINEAR NO INFINITO

Neste capítulo, foi provado a existência de solução positiva para uma classe de problemas elípticos não lineares usando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Ambrosetti e Rabinowitz (AR) ou uma de suas variantes, a técnica usada é devido a Hanadi Zahed (ver [32]). Neste caso, a não linearidade $f(x,t)$ satisfaz a condição de ser assintoticamente linear em t no infinito, isto é:

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = l < \infty$$

e a função peso $a(x)$, que aparece definida no operador, é considerada contínua, limitada e positiva em $\overline{\Omega}$.

Mais especificamente, considere o problema elíptico não linear com peso a seguir:

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = f(x,u), \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

em que, Ω é um domínio limitado regular em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Para os resultados a seguir, suponha que as funções $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \overline{\Omega}$ x $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(A) $a(x) \in C(\overline{\Omega})$ e $0 < a_1 \leq a(x) \leq a_2$, para algumas constantes positivas a_1 e a_2 em quase todos os pontos de x em Ω.

(F_1) $f(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $f(x,t) \geq 0$ para todo $t > 0$ e $x \in \overline{\Omega}$ e $f(x,t) \equiv 0$ para $t \leq 0$ e $x \in \overline{\Omega}$.

(F_2)

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x,t)}{t} = p(x) \ e \ \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = l < \infty$$

uniformemente em quase todos os pontos de Ω, em que $0 \leq p(x)$, com $p \in L^{\infty}(\Omega)$ e $||p||_{\infty} < \lambda_1$, em que $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $(-div(a(x)\nabla), H_0^1)$.

(F_3) A função $\dfrac{f(x,t)}{t}$ é não-decrescente com respeito a $t > 0$; para quase todos os pontos de $x \in \Omega$.

Estudamos a existência e a não-existência de soluções positivas para o problema (4.1). Para isso, vamos provar que o problema tem solução positiva para $l > \lambda_1$ e não tem solução positiva para $l < \lambda_1$.

O objetivo principal desse capítulo é desenvolver a demonstração do seguinte teorema do artigo [32]:

Teorema 4.0.1. *Seja Ω um domínio aberto regular limitado de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$ e suponha que $f(x,t)$ satisfaça as condições (F_1) e (F_2), então:*

(i) se $0 < l < \lambda_1$ e (F_3) é satisfeita, então não há solução positiva para o problema (4.1);

(ii) se $l > \lambda_1$, então o problema (4.1) tem uma solução positiva;

(iii) se $l = \lambda_1$ e (F_3) é satisfeita, então o problema (4.1) tem uma solução positiva $u \in H_0^1$ se, e somente se, existe uma constante $c > 0$ tal que $u = c\varphi_1$ e $f(x,u) = \lambda_1 u$ em quase todos os pontos em Ω.

Para desenvolver a demonstração deste teorema, precisamos de algumas definições.

Definição 4.0.1. *Dizemos que u é uma solução fraca do problema (4.1) se $u \in H_0^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega a(x)\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \ \textit{para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2}$$

O funcional associado ao problema (4.1) é definido por:

$$I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u)dx \tag{4.3}$$

em que $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$.

Note que o funcional é de classe C^1 e a derivada de Frechet é a expressão

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Por (4.2) e (4.4), é fácil ver que os pontos críticos de I são soluções fracas do problema (4.1) e vice-versa. Assim, vamos procurar pontos críticos para o funcional I no espaço $H_0^1(\Omega)$.

4.0.1 Notações e suposições

Note que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Denotamos por $||\cdot||_p$ a $L^p(\Omega)$-norma e por $||\cdot||$ a norma de $H_0^1(\Omega)$ induzida pelo produto interno em $H_0^1(\Omega)$ por $\langle u, v\rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u \nabla v dx$ para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\text{Assim, } ||u|| = \left(\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotamos por φ_1 a primeira autofunção positiva associada a λ_1 e normalizada em $L^2(\Omega)$, ou seja,

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla\varphi_1) = \lambda_1\varphi_1 \text{ em } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ ||\varphi_1||_2 = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Definição 4.0.2. *Duas normas $||u||_1$ e $||u||_2$ sobre o mesmo espaço vetorial X são ditas equivalentes se existirem constantes reais positivas a_1 e a_2 ($a_1 \leq a_2$) tais que:*

$$a_1||u||_1 \leq ||u||_2 \leq a_2||u||_1, \text{ para todo } u \in X.$$

Quando duas normas são equivalentes, elas induzem a mesma topologia.

Lema 4.0.1. *$(H_0^1, ||\cdot||)$ é um espaço de Hilbert e a norma $||u||$ é equivalente à norma $||u||_{H_0^1}$.*

Demonstração. Note que $(H_0^1, ||u||_{H_0^1})$ é um espaço de Banach, em que:

$$||u||_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, como a função $a(x)$ satisfaz $0 < a_1 \leq a(x) \leq a_2$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que a norma $||u||$ é equivalente à norma $||u||_{H_0^1}$. De fato, note que

$$a_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx \leq a_2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Então,

$$a_1||u||^2_{H_0^1} \leq ||u||^2 \leq a_2||u||^2_{H_0^1}.$$

Assim, $(H_0^1, ||u||)$ é um espaço de Banach com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u \nabla v dx.$$

■

Agora, se $\lambda_1 < l$, sob certas condições sobre a não-linearidade f, vamos mostrar que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, ou seja, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.0.1. *Suponha que a não-linearidade de f satisfaça (F_1) e (F_2). Se $0 < \lambda_1 < l < \infty$ então valem os seguintes resultados:*

(a) Existem ρ e β > 0 tais que $I(u) \geq \beta$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $||u|| = \rho$.

(b) $I(t\varphi_1) \longrightarrow -\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$.

Demonstração. Vamos demonstrar primeiro o item (a):

(a) Note que, dado $\varepsilon > 0$, por (F_2), temos que $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(x,t)}{t} = p(x)$. Assim, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $0 < t < \delta$, então $\left|\dfrac{f(x,t)}{t} - p(x)\right| < \varepsilon$. Além disso, como $\lim_{t\to +\infty} \dfrac{f(x,t)}{t} = l$, então existe $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tal que se $t > t_0 \geq 1$, então $\left|\dfrac{f(x,t)}{t} - l\right| < \varepsilon$.

Portanto,

$$\left|\left|\frac{f(x,t)}{t}\right| - |p(x)|\right| \leq \left|\frac{f(x,t)}{t} - p(x)\right| < \varepsilon, \text{ se } 0 < t < \delta$$

e

$$\left|\left|\frac{f(x,t)}{t}\right| - |l|\right| \leq \left|\frac{f(x,t)}{t} - l\right| < \varepsilon, \text{ se } t > t_0 \geq 1.$$

Consequentemente obtemos as seguintes estimativas:

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|} < \varepsilon + |p(x)| \leq \varepsilon + ||p||_\infty, \ 0 < t < \delta$$

e

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|} < \varepsilon + |l|, \text{ se } t > t_0 \geq 1.$$

Ou seja,

$$|f(x,t)| < (\varepsilon + ||p||_\infty)|t|, \text{ se } 0 < t < \delta \text{ e}$$
$$|f(x,t)| < (\varepsilon + |l|)|t|, \text{ se } t > t_0 \geq 1.$$

Como $f(x,t) = 0$, para todo $t \leq 0$, então, para todo $q \geq 1$,

(i) $|f(x,t)| < (\varepsilon + ||p||_\infty)|t|, \ \forall\ 0 < t < \delta$ e

(ii) $|f(x,t)| < (\varepsilon + |l|)|t| \leq (\varepsilon + |l|)|t|^q, \ \forall\ t > t_0 \geq 1.$

Agora vamos estimar $|f(x,t)|$ no compacto $[\delta, t_0]$, com $\delta > 0$.

Por (F_1), $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, assim, $\dfrac{|f(x,t)|}{|t|^q}$ é contínua em $[\delta, t_0]$, logo é limitada, e consequentemente, existe $k = k(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|^q} \leq k, \forall\ t \in [\delta, t_0].$$

Portanto, obtemos que

(iii) $|f(x,t)| \leq k.|t|^q, \forall\ t \in [\delta, t_0].$

Sendo assim, por (i), (ii) e (iii),

$$|f(x,t)| \leq (\varepsilon + ||p||_\infty)|t| + (\varepsilon + |l|)|t|^q + k.|t|^q, \ \forall \ (x,t) \in \overline{\Omega} \text{ x } \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Daí, para qualquer $\varepsilon > 0$, se $t \geq t_0 \geq 1$ e $q \geq 1$, existe

$$A = A(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon + |l|) + k}{2}$$

tal que

$$|f(x,t)| \leq (\varepsilon + ||p||_\infty)|t| + 2A|t|^q, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \text{ x } \mathbb{R}.$$

Logo,

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + ||p||_\infty)|t|^2 + \frac{2A}{q+1}|t|^{q+1}, \ \forall \ (x,t) \in \Omega \text{ x } \mathbb{R}.$$

Como $q \geq 1$,

$$|F(x,t)| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon + ||p||_\infty)|t|^2 + A.|t|^{q+1}, \text{ para todo } (x,t) \in \Omega \text{ x } \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Seja:

$$2* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} \text{ se } N > 2, \\ +\infty \text{ se } N = 2, \end{cases}$$

o expoente crítico de Sobolev.

Se escolhermos $q > 1$ tal que $2 < q+1 < 2^*$, garantindo que a não-linearidade f seja subcrítica, pelo Teorema da imersão dos espaços de Sobolev nos espaços $L^p(\Omega)$, temos que as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$; $L^{q+1}(\Omega)$ são compactas, em particular são contínuas, ou seja, existe $C > 0$ tal que $||u||_2^2 \leq C.||u||^2$, e ainda, $||u||_{q+1}^{q+1} \leq C.||u||^{q+1}$ para $1 < q < 2^* - 1$.
Assim por (4.7), obtemos:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(||p||_\infty + \varepsilon)||u||_2^2 - A||u||_{q+1}^{q+1} \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(||p||_\infty + \varepsilon)||u||_2^2 - AC||u||^{q+1}. \end{aligned}$$

Por conta da caracterização de λ_1, dada por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1, u \neq 0,} \frac{||u||^2}{||u||_2^2} \text{ temos que, } ||u||_2^2 \leq \frac{||u||^2}{\lambda_1}.$$

Assim,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \left[\frac{||p||_\infty + \varepsilon}{\lambda_1}\right]\right)||u||^2 - AC||u||^{q+1},$$

onde $\varepsilon > 0$ é ainda arbitrária. Pela hipótese (F_2), $||p||_\infty < \lambda_1$, assim podemos fixar ε suficientemente pequeno tal que $0 < \varepsilon < \lambda_1 - ||p||_\infty$ e ainda, para todo $u \in \partial B_\rho(0)$, segue que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}B\rho^2 - AC\rho^{q+1} = \rho^2[\frac{1}{2}B - AC\rho^{q-1}],$$

em que $B = \left(1 - \left[\frac{||p||_\infty + \varepsilon}{\lambda_1}\right]\right).$

Tomando $\rho > 0$ tal que $\frac{1}{2}B - AC\rho^{q-1} > 0$ (isto é, $\rho < \left(\frac{\frac{1}{2}B}{AC}\right)^{\frac{1}{q-1}}$), segue que

$$I(u) \geq \beta > 0,$$

para $||u|| = \rho$, onde $\beta = \rho^2[\frac{1}{2}B - AC\rho^{q-1}]$.

(b) Para provarmos esse item, sabemos por hipótese que $\lambda_1 < l < +\infty$, assim, para $t > 0$, temos:

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla t\varphi_1|^2 dx - \int_\Omega F(x, t\varphi_1)\, dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla\varphi_1|^2 dx - \int_\Omega F(x, t\varphi_1)\, dx. \end{aligned}$$

Como φ_1 é uma autofunção associada a λ_1, multiplicando (4.5) por φ_1 e integrando por partes, segue que:

$$I(t\varphi_1) = \frac{t^2\lambda_1}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - \int_\Omega F(x, t\varphi_1)\, dx. \tag{4.8}$$

Por outro lado, pela condição (F_2) e além disso, pela linearidade assintótica de $f(x,t)$, nós afirmamos que:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{F(x,t)}{t^2}=\frac{l}{2}. \tag{4.9}$$

De fato, por (F_2), nós temos que $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{f(x,t)}{t}=l$. Assim, dado $\varepsilon>0$, existe $M>0$ tal que se $t>M$ então $\left|\dfrac{f(x,t)}{t}-l\right|<\varepsilon$.

Logo,

$$\left|\left|\frac{f(x,t)}{t}\right|-|l|\right|\leq\left|\frac{f(x,t)}{t}-l\right|<\varepsilon$$

e consequentemente

$$-\varepsilon<\left|\frac{f(x,t)}{t}\right|-|l|<\varepsilon \text{ para } t>M.$$

Como

$$f\geq 0 \text{ e } t>M>0, \text{ segue que } -\varepsilon+l<\frac{f(x,t)}{t}<\varepsilon+l \text{ para } t>M,$$

e assim,

$$(-\varepsilon+l)t<f(x,t)<(\varepsilon+l)t \text{ para } t>M.$$

Portanto,

$$(-\varepsilon+l)\frac{t^2}{2}<F(x,t)<(\varepsilon+l)\frac{t^2}{2} \text{ para } t>M,$$

e consequentemente,

$$\left|\frac{|F(x,t)|}{t^2}-\frac{|l|}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ para } t>M,$$

provando assim a nossa afirmação.

Logo, como $\varphi_1>0$ em Ω, pelo Lema de Fatou, segue a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &= \lim_{t\longrightarrow\infty}\left(\frac{t^2\lambda_1}{2}\int_\Omega\frac{\varphi_1^2}{t^2}\,dx-\int_\Omega\frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}.\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2}\,dx\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega\varphi_1^2\,dx-\int_\Omega\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{F(x,t\varphi_1)\varphi_1^2}{(t\varphi_1)^2}\,dx\\
&\leq \frac{1}{2}(\lambda_1-l)\int_\Omega\varphi_1^2\,dx.
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 - l < 0$ e φ_1 é positivo em Ω, então $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \dfrac{I(t\varphi_1)}{t^2} < 0$. Assim, como $I(t\varphi_1) = \left(\dfrac{I(t\varphi_1)}{t^2}\right) t^2$ e $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} t^2 = +\infty$, segue que $I(t\varphi_1) \longrightarrow -\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$.

$\blacksquare$

4.0.2 PROVA DO TEOREMA 4.0.1

Demonstração. (i) Suponha que $0 < l < \lambda_1$, e a função f satisfaça as condições (F_1), (F_2) e (F_3). Vamos provar que o problema (4.1) não tem solução positiva.

Suponha por contradição, que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução positiva do problema (4.1). Então u satisfaz a equação (4.2). Tomando $\varphi = u$, temos:

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega f(x,u)u\, dx = \int_\Omega \frac{f(x,u)}{u}.u^2\, dx.$$

Por (F_1), como $u > 0$ em Ω, temos $\dfrac{f(x,u)}{u} \geq 0$ em Ω. Por outro lado, por (F_3), a função $\dfrac{f(x,u)}{u}$ é não-decrescente para $u > 0$. Assim, por (F_2), segue que $\dfrac{f(x,u)}{u} \leq l < \infty$. Portanto,

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2\, dx = \int_\Omega \frac{f(x,u)}{u}.u^2\, dx \leq \int_\Omega l.u^2\, dx. \tag{4.10}$$

Note que, como $\lambda_1 > 0$ satisfaz a equação,

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla\varphi_1) = \lambda_1\varphi_1 \text{ em } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ ||\varphi_1||_2 = 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

pela caracterização de λ_1, temos que

$$\lambda_1 = \inf_{v\in H_0^1(\Omega), v\neq 0} \left\{ \frac{\int_\Omega a(x)|\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx} \right\} \leq \frac{\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega |u|^2 dx},$$

onde u é a solução positiva de (4.1). Portanto, por (4.10),

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 dx \leq \int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 dx \leq l \int_\Omega |u|^2 dx$$

e consequentemente, $\lambda_1 \leq l$, o que contradiz o fato de $l < \lambda_1$. Portanto, não existe solução positiva neste caso.

(ii) Suponha $0 < \lambda_1 < l < \infty$ e f satisfazendo (F_1) e (F_2). Relembramos que nosso funcional está definido no espaço de Hilbert H_0^1 e é dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Além disso, I é de classe C^1 e sua derivada de Fréchet é

$$\langle I'(u), \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Como f satisfaz (F_1) e (F_2), pela Proposição 4.0.1 existem $\rho \ e \ \beta > 0$ tais que $I(u) \geq \beta, \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega)$ com $||u|| = \rho$ e $I(t\varphi_1) \longrightarrow -\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$, se $\lambda_1 < l < \infty$. Assim, tomando $u_1 = t_0\varphi_1$ com $t_0 > \dfrac{\rho}{||\varphi_1||}$ suficientemente grande, segue que $I(u_1) = I(t_0\varphi_1) < 0$ e $||u_1|| = ||t_0\varphi_1|| = t_0||\varphi_1|| > \dfrac{\rho}{||\varphi_1||}.||\varphi_1|| = \rho$, ou seja, existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_1 \notin B_\rho(0)$ e $I(u_1) < 0$.

Nosso objetivo é mostrar a existência de solução via o Teorema do Passo da Montanha. Como $I(0) = 0$ e a Proposição 4.0.1 garante a geometria do Passo da Montanha, basta mostrar que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS). Assim, seja (u_n) uma sequência (PS) no nível $d \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx \longrightarrow d, \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{4.12}$$

e

$$\langle I'(u_n), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty, \tag{4.13}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Mostramos que (u_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Para isso, mostramos primeiro que (u_n) é limitada em $L^2(\Omega)$ usando (4.12) e o limite $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \dfrac{F(x,t)}{t^2} = \dfrac{l}{2}$.

Suponha por contradição, que $||u_n||_2 \longrightarrow +\infty$ e defina:

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{u_n}{||u_n||_2}, \\ k_n &= ||u_n||_2. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Note que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{I(u_n)}{k_n^2} = 0$, pois, por (4.12) temos que $I(u_n) \longrightarrow d$ e $\dfrac{1}{k_n^2} \longrightarrow 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{I(u_n)}{k_n^2} &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u_n)\ dx}{k_n^2} \right] \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \frac{||u_n||^2}{k_n^2} - \int_\Omega F(x,u_n).\frac{1}{k_n^2}\ dx \right] \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\frac{1}{2}||w_n||^2 - \frac{1}{k_n^2} \int_\Omega F(x,u_n)\ dx \right]. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Mostramos que a sequência (w_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, fazendo $q = 1$ na equação (4.7), obtemos

$$\frac{1}{k_n^2} \int_\Omega F(x,u_n(x))dx \leq \frac{K}{k_n^2} \int_\Omega |u_n(x)|^2 dx = K \frac{||u_n||_2^2}{||u_n||_2^2} = K.$$

Assim, por (4.15), a sequência (w_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ como queríamos mostrar. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned}
w_n &\longrightarrow w \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),\\
w_n &\longrightarrow w \text{ fortemente em } L^2(\Omega),\\
w_n &\longrightarrow w \ q.t.p \text{ em } \Omega.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$-div(a(x)\nabla w) = lw^+, \text{ em } \Omega. \tag{4.16}$$

Para provar a afirmação, dividimos (4.13) por k_n, então temos:

$$\int_\Omega a(x)\nabla w_n \nabla\varphi dx - \frac{1}{k_n}\int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx \longrightarrow 0, \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.17}$$

Como $w_n \longrightarrow w$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega a(x)\nabla w_n \nabla\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega a(x)\nabla w \nabla\varphi dx, \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.18}$$

Assim, basta provarmos que

$$\frac{1}{k_n}\int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega lw^+\varphi dx, \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.19}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{1}{k_n}.f(x,u_n).\frac{u_n}{u_n}.\varphi \ dx &= \int_\Omega \frac{u_n}{k_n}.\frac{f(x,u_n)}{u_n}.\varphi \ dx\\
&= \int_\Omega w_n.\frac{f(x,u_n)}{u_n k_n^2}.\varphi \ dx\\
&= \int_\Omega w_n.\frac{f(x,k_n.w_n)}{k_n.w_n}.\varphi \ dx.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Vamos utilizar as condições (F_1) e (F_2) para mostrar a convergência (4.19).

De fato, defina $X = \{x \in \Omega : w_n(x) \longrightarrow w(x) \text{ e } w(x) \neq 0\}$.

Primeiro caso: Se $x \in X$. Usando (F_2) e usando o fato que $l > 0$, obtemos

$$\frac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n} = \frac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n w_n(x)} w_n(x) \longrightarrow l w^+(x),$$

pois por (F_1), $f(x,t) \geq 0$.

Segundo caso: Para $x \in \Omega$ tal que $w_n(x) \longrightarrow w(x)$ com $w(x) = 0$.

(A) Se $k_n w_n(x) \longrightarrow +\infty$, por (F_2) temos que

$$0 \leq \frac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n} = \frac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n w_n(x)} w_n(x) \leq C w_n(x).$$

Como $w_n(x) \longrightarrow w(x) = 0$, segue que $\dfrac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n} \longrightarrow 0 = l w^+(x)$.

(B) Se $k_n w_n(x) \longrightarrow 0$ (ou, $w_n(x) \leq 0$). Por (F_1), segue que

$$\frac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n} \longrightarrow 0 = l w^+(x).$$

Logo, em todos os casos acima, obtemos

$$\frac{f(x, k_n w_n(x))}{k_n} \longrightarrow l w^+(x), \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{4.21}$$

Como $w_n \longrightarrow w$ em $L^2(\Omega)$, por um resultado de [5] (Teorema 4.9), w_n é dominada em $L^2(\Omega)$ (a menos de subsequências) e então existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que $w_n(x) \leq h(x)$. Assim,

$$\frac{1}{k_n}.f(x, k_n w_n) = \frac{f(x, k_n.w_n(x))}{k_n w_n(x)} w_n(x) \leq C w_n(x) \leq C h(x),$$

e consequentemente, a sequência $\dfrac{1}{k_n}.f(x, k_n w_n)$ é dominada em $L^2(\Omega)$. Portanto, usando (4.21), pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que $\dfrac{1}{k_n}.f(x, k_n w_n)$ converge fortemente para $l w^+$ em $L^2(\Omega)$. Assim, $\dfrac{1}{k_n}.f(x, k_n w_n)$ converge para $l w^+$ fracamente em $L^2(\Omega)$, ou seja,

$$\frac{1}{k_n} \int_\Omega f(x, u_n) \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega l w^+ \varphi dx, \ \forall \varphi \in L^2(\Omega),$$

em particular para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Logo, a igualdade (4.19) está provada.

Portanto, como afirmamos em (4.16), o limite fraco w satisfaz o seguinte problema com condição de Dirichlet na fronteira,

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla w) = lw^+ \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.22}$$

Pelo princípio do máximo, $w(x) > 0$ em Ω e como $||w_n||_2 = 1, \forall n$ e $w_n \longrightarrow w$ forte em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$0 \leq |||w_n||_2 - ||w||_2| \leq ||w_n - w||_2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Assim, $||w_n||_2 \longrightarrow ||w||_2$ e consequentemente, pela unicidade do limite, $||w||_2 = 1$. Então w é uma autofunção do problema de autovalores

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla w) = lw \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega w^2(x)dx = 1. \end{cases} \tag{4.23}$$

Logo, $w = \varphi_1$ e $l = \lambda_1$, visto que as demais autofunções mudam de sinal, o que contradiz o fato de $l > \lambda_1$. Portanto, (u_n) é limitada em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, como (u_n) é uma sequência (PS), por (4.12),

$$\frac{1}{2}||u_n||^2 = d + o(1) + \int_\Omega F(x, u_n)dx, \text{ onde } o(1) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Assim, a expressão acima, junto com (4.7) com $q = 1$ e a limitação de (u_n) em $L^2(\Omega)$, garante que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Então, temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ fraco em } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\longrightarrow u \text{ forte em } L^2(\Omega), \\ u_n(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Usando o Teorema do Traço (ver [9]),

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Note que, usando novamente que (u_n) é um sequência (PS), por (4.13) temos

$$\langle I'(u_n), \varphi\rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi \; dx \longrightarrow 0, \; \forall \; \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{4.24}$$

isto é,

$$-div(a(x)\nabla u_n(x)) - f(x,u(x)) \longrightarrow 0 \text{ em D'}(\Omega). \tag{4.25}$$

Tome $\varphi = u_n$, então

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = ||u_n||^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n \; dx \longrightarrow 0. \tag{4.26}$$

Afirmação 1: $f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u)$ em $L^2(\Omega)$, $n \longrightarrow +\infty$.

De fato, por (4.6) com $q = 1$, tomando $t = u_n(x)$, segue que

$$|f(x,u_n)| \leq (\varepsilon + ||p||_\infty)|u_n| + (\varepsilon + |l|)|u_n| + K.|u_n|. \tag{4.27}$$

Como (u_n) converge forte a u em $L^2(\Omega)$, existe h em $L^2(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$, para todo $x \in \Omega$. Além disso, $u_n(x)$ converge para $u(x)$ em quase todo ponto em Ω. Assim, por (4.27), $f(x,u_n)$ é limitada por uma função em $L^2(\Omega)$ e $f(x,u_n(x)) \longrightarrow f(x,u(x))$ em quase todo em Ω. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue a afirmação 1.

Além disso, pela afirmação acima e pela L^2-convergência de (u_n), segue que

$$\int_\Omega f(x,u_n(x))u_n(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u(x))u(x)dx. \tag{4.28}$$

De fato, considere $f(x,u_n(x)) = v_n$ e $f(x,u(x)) = v$, então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v_n.u_n - v.u|dx &= \int_\Omega |v_n.u_n - v_n.u + v_n.u - v.u|dx \\
&\leq \int_\Omega |v_n(u_n - u)|dx + \int_\Omega |u(v_n - v)|dx \\
&\leq ||v_n||_{L^2}.||u_n - u||_{L^2} + ||u||_{L^2}||v_n - v||_{L^2} \\
&\leq k.||u_n - u||_{L^2} + ||u||_{L^2}||v_n - v||_{L^2} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Logo, fica provado a convergência (4.28).

Note que, por (4.24):

$$\int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx \longrightarrow 0, \text{ para toda } \varphi \text{ em } H_0^1(\Omega). \quad (4.29)$$

Considerando $f(x,u_n) = v_n$ e $f(x,u) = v$, sabemos que $v_n \longrightarrow v$ fortemente em $L^2(\Omega)$ e consequentemente $v_n \longrightarrow v$ fracamente em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega v_n \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega v\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in L^2(\Omega),$$

e consequentemente,

$$\int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.30)$$

Além disso,

$$u_n \longrightarrow u \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega), \text{ então } \langle u_n, \varphi\rangle_{H_0^1} \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle_{H_0^1}, \forall\ \varphi\ \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_\Omega a(x)\nabla u \nabla \varphi dx, \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.31)$$

Portanto, por (4.29), segue que

$$\int_\Omega a(x)\nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (4.32)$$

Usando (4.32) e considerando u como uma função teste, temos:

$$||u||^2 - \int_\Omega f(x,u)udx = 0. \quad (4.33)$$

Agora, mostramos que $||u_n||^2 \longrightarrow ||u||^2$.

De fato, note que (4.26) e (4.28) implicam que $||u_n||^2 = \int_\Omega f(x,u)udx + o(1)$ e consequentemente, por (4.33), $||u_n||^2 = ||u||^2 + o(1)$, ou seja,

$$||u_n||^2 \longrightarrow ||u||^2.$$

Como $u_n \longrightarrow u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} ||u_n - u||^2 &= \langle u_n - u, u_n - u\rangle_{H_0^1} \\ &= \langle u_n, u_n\rangle_{H_0^1} - 2\langle u_n, u\rangle_{H_0^1} + \langle u, u\rangle_{H_0^1} \\ &= ||u_n||^2 - 2\langle u_n, u\rangle_{H_0^1} + ||u||^2 \\ &= ||u_n||^2 - 2\langle u, u\rangle_{H_0^1} + ||u||^2 + o(1) \\ &\longrightarrow 2||u||^2 - 2||u||^2 = 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $||u_n||^2 \longrightarrow ||u||^2$ que assegura que $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$.

Então, pelo Teorema do Passo da Montanha, o problema (4.1) tem uma solução positiva para $l > \lambda_1$.

(iii) Suponha $l = \lambda_1$. Seja u uma solução positiva para o problema (4.1) e tome $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ como sendo uma função teste em (4.2), obtemos:

$$\int_\Omega a(x)\nabla u\nabla\varphi_1 dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi_1 dx \tag{4.34}$$

Considerando que a equação (4.11) é satisfeita por φ_1 e tomando u como função teste, obtemos:

$$\int_\Omega a(x)\nabla u\nabla\varphi_1 dx = l\int_\Omega u\varphi_1 dx. \tag{4.35}$$

Assim por (4.34) e (4.35), segue que

$$\int_\Omega (f(x,u) - lu)\varphi_1 dx = 0. \tag{4.36}$$

Por (F_2) e (F_3), obtemos $\dfrac{f(x,u)}{u} \leq l$ e consequentemente, $f(x,u) - lu \leq 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$. Por outro lado, se existir um subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $|\Omega_0| > 0$ e $f(x,u) - lu < 0$ em Ω_0, por (4.36) e usando o fato que φ_1

é positiva em Ω, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega}(f(x,u)-lu)\varphi_1 dx \\ &= \int_{\Omega_0}(f(x,u)-lu)\varphi_1 dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_0}(f(x,u)-lu)\varphi_1 dx \\ &= \int_{\Omega_0}(f(x,u)-lu)\varphi_1 dx + 0 \\ &= \int_{\Omega_0}(f(x,u)-lu)\varphi_1 dx < 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Assim, concluímos que $f(x,u) = lu$ em quase todo ponto em Ω. Como $l = \lambda_1$, por (4.1), u é uma autofunção associada ao autovalor simples λ_1, logo $u(x) = c\varphi_1(x)$ em Ω para alguma constante $c > 0$.

Reciprocamente, se para alguma constante $c > 0$, $u(x) = c\varphi_1(x)$ em Ω e $f(x,u) = \lambda_1 u$, então:

$$\begin{aligned} -div(a(x)\nabla u) &= -c.div(a(x)\nabla\varphi_1) \\ &= c.\lambda_1\varphi_1 \\ &= \lambda_1 u \\ &= f(x,u). \end{aligned}$$

Além disso, as condições de contorno são satisfeitas e então u é uma solução positiva para o problema (4.1).

■

5 SOLUÇÕES POSITIVAS PARA UM PROBLEMA SUPERLINEAR NO INFINITO

Neste capítulo, foi provado a existência de solução positiva para uma classe de problemas elípticos usando Teorema do Passo da Montanha, a técnica usada é devido a Hanadi Zahed (ver [32]).

Considere o problema elíptico não linear com peso

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = f(x,u), \text{ em } \Omega, \\ u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

em que, Ω é um domínio limitado regular em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$ e f é uma não linearidade subcrítica.

Sob as condições (F_1), (F_2) com $l = +\infty$ e (F_3), mostramos a existência de uma solução positiva para o problema (5.1).

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema do artigo [32]:

Teorema 5.0.1. *Seja Ω um domínio aberto regular limitado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e suponha que (F_1), (F_2) com $l = +\infty$ e (F_3) sejam satisfeitas. Além disso, considere que $f(x,t)$ possua crescimento subcrítico, isto é, $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{r-1}} = 0$ uniformemente em $x \in \Omega$ para algum $r \in \left(2, \dfrac{2n}{n-2}\right)$ se $n > 2$ ou $r \in (2, +\infty)$ se $n = 2$, então o problema* (5.1) *tem solução positiva.*

Pela condição (F_1) e pelo princípio do máximo forte, um ponto crítico diferente de zero do funcional I é uma solução positiva para o problema (5.1). Utilizamos o Teorema do Passo da Montanha para provar a existência desse ponto crítico. Para isso, mostramos que as hipóteses (F_1) e (F_2) implicam em uma condição mais fraca do tipo de Ambrosetti e Rabinowitz (ver [1]), a saber, existem $\theta > 2$ e $M > 0$ tais que:

$$\textbf{(AR)} \qquad 0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t, \text{ para todo } |t| \geq M \text{ e } x \in \Omega.$$

A condição (AR), foi uma forma importante de provar que cada sequência de Palais Smale é limitada e então relativamente compacta.

Proposição 5.0.1. *Suponha que a função f satisfaça $(F_1),(F_2)$ com $l=+\infty$ e (F_3), então valem os seguintes resultados:*

i) Existem ρ e $\beta\ >0$ tal que $I(u)\geq\beta$ para todo $u\in H_0^1(\Omega)$ com $||u||=\rho$.

ii) $I(t\varphi_1)\longrightarrow-\infty$, quando $t\longrightarrow+\infty$.

Demonstração. i) Dado $\varepsilon>0$, por (F_2), existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que, se $0<t<\delta$ então,

$$|f(x,t)|<(\varepsilon+||p||_\infty)|t|. \tag{5.2}$$

Por outro lado, como f possui crescimento subcrítico, isto é,

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}\frac{f(x,t)}{t^{r-1}}=0$$

uniformemente em $x\in\Omega$, para algum $r\in(2,\dfrac{2n}{n-2})$ se $n>2$ ou $r\in(2,+\infty)$ se $n=2$, existe $t_0=t_0(\varepsilon)\geq1$ tal que se $t\geq t_0$ então

$$|f(x,t)|<\varepsilon|t|^{r-1}. \tag{5.3}$$

Além disso, como $\dfrac{|f(x,t)|}{r|t|^{r-1}}$ é contínua no compacto $[\delta,t_0]$, é limitada nesse intervalo, e assim, existe $K=K(\varepsilon)>0$ tal que

$$\frac{|f(x,t)|}{r|t|^{r-1}}\leq K(\varepsilon) \tag{5.4}$$

para todo $t\in[\delta,t_0]$.

Assim, por (5.2), (5.3), (5.4), para ε suficientemente pequeno ($\varepsilon<r$), segue que,

$$\begin{aligned}|f(x,t)| &< (\varepsilon+||p||_\infty)|t|+\varepsilon|t|^{r-1}+rK(\varepsilon)|t|^{r-1}\\ &\leq (\varepsilon+||p||_\infty)|t|+(\varepsilon+rK(\varepsilon))|t|^{r-1}\\ &\leq (\varepsilon+||p||_\infty)|t|+A(\varepsilon)|t|^{r-1}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

onde $A(\varepsilon)=r(1+K(\varepsilon))$.

Portanto, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno,

$$|F(x,t)|\leq\frac{1}{2}(||p||_\infty+\varepsilon)t^2+A(\varepsilon)|t|^r. \tag{5.6}$$

para todo $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Desde que $2 < r < q*$, pela imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$, temos:

$$||u||_r^r \leq C||u||^r. \tag{5.7}$$

Utilizando (5.6) e (5.7), obtemos:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(||p||_\infty + \varepsilon)\int_\Omega |u|^2\, dx \;\; - A\int_\Omega |u|^r\, dx \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(||p||_\infty + \varepsilon)|u|_2^2 - A|u|_r^r \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2}(||p||_\infty + \varepsilon)|u|_2^2 - AC||u||^r. \end{aligned}$$

Pela caracterização variacional do primeiro autovalor do Laplaciano, concluímos que:

$$\lambda_1|u|_2^2 \leq ||u||^2$$

e consequentemente,

$$\frac{-1}{2}|u|_2^2 \geq \frac{-1}{2\lambda_1}||u||^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{1}{2\lambda_1}(||p||_\infty + \varepsilon)||u||^2 - AC||u||^r \\ &= \frac{1}{2}||u||^2\left(1 - \frac{(||p||_\infty + \varepsilon)}{\lambda_1}\right) - AC||u||^r. \end{aligned}$$

Queiramos que $\left(1 - \dfrac{(||p||_\infty + \varepsilon)}{\lambda_1}\right) > 0$, para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Logo, usando (F_2) $(||p||_\infty < \lambda_1)$, existe $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $||p||_\infty + \varepsilon_0 < \lambda_1$.

Portanto, fixado $\varepsilon_0 \in (0, \lambda_1 - ||p||_\infty)$, temos que $B = \left(1 - \dfrac{(||p||_\infty + \varepsilon_0)}{\lambda_1}\right) > 0$.

Assim, $I(u) \geq \dfrac{B}{2}||u||^2 - AC||u||^r$. Por outro lado, para $u \in B_\rho(0)$, ou seja, para $||u|| = \rho$ com $0 < \rho < \sqrt[r-2]{\dfrac{B}{2AC}}$, temos:

$$\frac{B}{2}\rho^2 - AC\rho^r = \beta > 0.$$

Logo, concluímos que $I(u) \geq \beta,$ para todo u tal que $||u|| = \rho$.

ii) Seja φ_1 a autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ do problema

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = \lambda u \text{ em } \Omega, \\ \quad\quad 0 \quad\quad\quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por definição de solução fraca,

$$\int_\Omega a(x)\nabla\varphi_1\nabla v dx = \int_\Omega \lambda_1\varphi_1 v\ dx,\ \forall\ v \in H_0^1.$$

Tomando $v = \varphi_1$ como função teste, temos:

$$\int_\Omega a(x)|\nabla\varphi_1|^2 dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1^2\ dx. \tag{5.8}$$

Para dar continuidade, usamos um argumento devido à [33], para mostrarmos a segunda condição geométrica do Passo da Montanha. Como a função positiva φ_1 está em $C(\Omega)$, existem $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ e $\alpha > 0$ tais que $\varphi_1(x) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \Omega_0$.

Afirmação 1:

$$0 \leq 2F(x,t) \leq tf(x,t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega. \tag{5.9}$$

De fato, se $t > 0$, usando integração por partes,

$$\begin{aligned} f(x,t)t - 2F(x,t) &= f(x,t)t - 2\int_0^t f(x,s)\ ds \\ &= f(x,t)t - \left[f(x,s)s\Big|_0^t - \int_0^t f_s'(x,s)s\ ds \right] - \int_0^t f(x,s)\ ds \\ &= \int_0^t \{f_s'(x,s)s - f(x,s)\}\ ds. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Por (F_3), para $t > 0$, temos que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f(x,t)}{t}\right) \geq 0$, ou seja,

$$\frac{f_t'(x,t)t - f(x,t)}{t^2} \geq 0$$

e consequentemente, $f_t'(x,t)t - f(x,t) \geq 0$.

Então, a equação (5.10) garante que,

$$f(x,t)t - 2F(x,t) \geq 0, \forall t > 0, \forall x \in \Omega. \tag{5.11}$$

Por outro lado, se $t \leq 0$, vale a igualdade em (5.11), e assim, fica provado a afirmação 1.

Agora note que, por (5.9), $\dfrac{f(x,t)}{t} \geq \dfrac{2F(x,t)}{t^2}, \forall t > 0,\ \forall x \in \Omega$.

Afirmação 2: A função $\dfrac{F(x,t)}{t^2}$ é não decrescente com respeito a $t > 0$, em quase todos os pontos de $x \in \Omega$ e $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = +\infty$.

De fato, por (5.9),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{F(x,t)}{t^2}\right) &= \frac{F_t'(x,t)t^2 - F(x,t)2t}{t^4} \\ &= \frac{f(x,t)t^2 - 2F(x,t)t}{t^4} \\ &= \frac{f(x,t)t - 2F(x,t)}{t^3} \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$ e quase todos os pontos $x \in \Omega$, finalizando a prova da primeira parte da afirmação 2.

Agora mostramos que,

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = +\infty. \tag{5.12}$$

Segue de (F_2) que, $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{f(x,t)}{t} = l = +\infty$, então, dado $M > 0$, existe $R > 0$, tal que se $t > R$ então $\dfrac{f(x,t)}{t} > M$, daí,

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\ ds > \int_0^t M.s\ ds = \frac{M.t^2}{2},$$

e consequentemente,

$$\frac{F(x,t)}{t^2} > \frac{M}{2}, \text{ para todo } t > R > 0.$$

Logo, se $t > R$, temos $\dfrac{F(x,t)}{t^2} > \dfrac{M}{2}$, ou seja, $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = +\infty$, concluindo assim, a prova da afirmação 2.

Portanto, como $\dfrac{F(x,t)}{t^2}$ é não-decrescente, $t\varphi_1(x) \geq t\alpha > 0$, para todo $t > 0$, $x \in \Omega_0$ e usando (5.12), obtemos:

$$\frac{F(x,t\varphi_1(x))}{t^2\varphi_1^2(x)} \geq \frac{F(x,t\alpha)}{t^2\alpha^2} \longrightarrow +\infty, \text{ para } t \longrightarrow +\infty. \tag{5.13}$$

Logo, por (5.13), para todo $k > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $t \geq t_0$ e $x \in \Omega_0$, temos $\dfrac{F(x,t\varphi_1(x))}{t^2\varphi_1^2(x)} \geq K$. Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &= \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla(t\varphi_1)^2|dx - \int_\Omega F(x,t\varphi_1)dx\right] \\
&= \frac{1}{2\cancel{t^2}}.\cancel{t^2}\int_\Omega a(x)|\nabla\varphi_1|^2\, dx - \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{t^2}.\frac{\varphi_1^2}{\varphi_1^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla\varphi_1|^2 dx - \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}.\varphi_1^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Como $-div(a(x)\nabla\varphi_1) = \lambda_1\varphi_1$ em Ω, e $\varphi_1 = 0$ em $\partial\Omega$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} &\leq \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega |\varphi_1|^2 dx - \int_{\Omega_0} \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}.\varphi_1^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega |\varphi_1|^2 dx - K\alpha^2\int_{\Omega_0} 1dx \\
&\leq \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega |\varphi_1|^2 dx - K\alpha^2|\Omega_0|,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $|\Omega_0|$ denota a medida de Ω_0.

Para $K > 0$ suficientemente grande, obtemos:

$$\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} \leq \frac{1}{2}\lambda_1\int_\Omega \varphi_1^2\, dx - K|\Omega_0|\alpha^2 < 0,$$

e assim, $I(t\varphi_1) \longrightarrow -\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$.

$\blacksquare$

Agora precisamos mostrar a condição (PS), mas antes mostramos alguns resultados que serão utilizados.

Lema 5.0.1. *Suponha que* (v_n) *é uma sequência convergindo para* v *em* $L^p(\Omega)$*, para algum* $1 \leq p \leq +\infty$*, então* (v_n^+) *converge para* v^+ *em* $L^p(\Omega)$*, em que* $v_n^+ = max\{0, v_n\}$ *e* $v^+ = max\{0, v\}$*.*

Demonstração. Primeiro, temos que $v = v^+ - v^-$ e $|v| = v^+ + v^-$. Somando as equações, obtemos que:

$$v_n^+ = \frac{v_n + |v_n|}{2} \text{ e } v^+ = \frac{v + |v|}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |v_n^+ - v^+|_p^p &= \int_\Omega |v_n^+ - v^+|^p \, dx \\ &= \int_\Omega \left| \frac{(v_n + |v_n|)}{2} - \frac{(v + |v|)}{2} \right|^p \, dx \\ &= \int_\Omega \left| \frac{(v_n - v)}{2} + \frac{(|v_n| - |v|)}{2} \right|^p \, dx \\ &= \frac{1}{2^p} \int_\Omega |(v_n - v) + (|v_n| - |v|)|^p \, dx. \end{aligned}$$

Como, $|x + y| \leq |x| + |y|$, então

$$\frac{1}{2^p} \int_\Omega |(v_n - v) + (|v_n| - |v|)|^p dx \leq \frac{1}{2^p} \int_\Omega (|v_n - v| + ||v_n| - |v||)^p dx.$$

Agora, usando a desigualdade $||v_n| - |v|| \leq |v_n - v|$, segue que

$$\begin{aligned} |v_n^+ - v^+|_p^p \leq \frac{1}{2^p} \int_\Omega (|v_n - v| + ||v_n| - |v||)^p dx &\leq \frac{1}{2^p} \int_\Omega (|v_n - v| + |v_n - v|)^p dx \\ &\leq \frac{1}{2^p} \int_\Omega (2|v_n - v|)^p dx \\ &\leq \frac{2^p}{2^p} \int_\Omega |v_n - v|^p dx \\ &\leq ||v_n - v||_p^p. \end{aligned}$$

Assim, como $v_n \longrightarrow v$ fortemente em $L^p(\Omega)$ então $v_n^+ \longrightarrow v^+$ em $L^p(\Omega)$, quando $n \longrightarrow +\infty$.

∎

Lema 5.0.2. *Se $\langle I'(u_n), u_n\rangle \longrightarrow 0$ e (F_3) é satisfeita, então existe uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que $I(tu_n) \leq \dfrac{1+t^2}{2n} + I(u_n)$, para todo $t > 0$.*

Demonstração. Como $\langle I'(u_n), u_n\rangle \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, podemos obter uma subsequência, ainda denotada por (u_n), tal que

$$\frac{-1}{n} < \langle I'(u_n), u_n\rangle = ||u_n||^2 - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)\; dx < \frac{1}{n}, \tag{5.16}$$

para todo $n \geq 1$ suficientemente grande.

Observe que, para qualquer $t > 0$ e $n \geq 1$ grande,

$$I(tu_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}f(x, u_n(x))u_n(x) - F(x, u_n(x))\right\} dx. \tag{5.17}$$

De fato, para qualquer $t > 0$, fixado $x \in \Omega$ e $n \geq 1$, defina

$$h(t) = \frac{1}{2}t^2 f(x, u_n(x))u_n(x) - F(x, tu_n(x)).$$

Então,

$$\begin{aligned} h'(t) &= tf(x, u_n(x))u_n(x) - f(x, tu_n(x))u_n(x) \\ &= tu_n(x)\left(f(x, u_n(x)) - \frac{f(x, tu_n(x))}{t}\right). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Primeiro caso: Se $x \in \Omega$ é tal que $u_n(x) = 0$, então $h'(t) = 0$.

Segundo caso: Se $x \in \Omega$ é tal que $u_n(x) \neq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} h'(t) &= tu_n(x)\left(\frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)}u_n(x) - \frac{f(x, tu_n(x))}{tu_n(x)}u_n(x)\right) \\ &= tu_n^2(x)\left(\frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} - \frac{f(x, tu_n(x))}{tu_n(x)}\right). \end{aligned}$$

Assim, por (F_3), para $0 < t \leq 1$, temos

$$\frac{f(x, tu_n(x))}{tu_n(x)} \leq \frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)}$$

e consequentemente, $h'(t) \geq 0$ para $0 < t \leq 1$ e portanto, h é crescente em $(0, 1]$.

Analogamente, por (F_3), para $1 \leq t$, segue que

$$\frac{f(x, u_n(x))}{u_n(x)} \leq \frac{f(x, tu_n(x))}{tu_n(x)}$$

e assim, $h'(t) \leq 0$ para $t \geq 1$, logo h é decrescente em $[1, +\infty)$.

Portanto, $t_0 = 1$ é ponto de máximo de h em $(0, +\infty)$ e

$$h(t) \leq h(1), \text{ para todo } t > 0. \tag{5.19}$$

Assim, usando (5.16) e (5.19), segue que

$$\begin{aligned}
I(tu_n) &= \frac{1}{2}t^2||u_n||^2 - \int_\Omega F(x, tu_n(x))\, dx \\
&< \frac{1}{2}t^2 \left\{\frac{1}{n} + \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)\, dx\right\} - \int_\Omega F(x, tu_n(x))\, dx \\
&= \frac{t^2}{2n} + \int_\Omega \left\{\frac{1}{2}t^2 f(x, u_n(x))u_n(x) - F(x, tu_n(x))\right\}\, dx \\
&\leq \frac{t^2}{2n} + \int_\Omega \left\{\frac{1}{2} f(x, u_n(x))u_n(x) - F(x, u_n(x))\right\}\, dx.
\end{aligned}$$

Segue que (5.17) está provado.

Por outro lado, por (5.16), obtemos

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x, u_n(x))\, dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{n} + \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)\, dx\right\} - \int_\Omega F(x, u_n(x))\, dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega \left\{\frac{1}{2} f(x, u_n(x))u_n(x) - F(x, u_n(x))\right\}\, dx \ \leq \frac{1}{2n} + I(u_n). \tag{5.20}$$

Combinando (5.17) e (5.20) encontramos :

$$I(tu_n) \leq \frac{1+t^2}{2n} + I(u_n), \text{ para todo } t > 0,\ n \geq 1.$$

$\blacksquare$

5.0.1 PROVA DO TEOREMA 5.0.1

Demonstração. A proposição 5.0.1, garante a geometria do Passo da Montanha, assim, mostramos a condição (PS).

Considere (u_n) uma sequência de Palais Smale, satisfazendo

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_\Omega F(x,u_n)dx \longrightarrow d$$

e

$$\langle I'(u_n), \varphi\rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,u_n)\varphi dx \longrightarrow 0, \forall\varphi \in H_0^1(\Omega),$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

Provamos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Suponha por contradição que (u_n) não é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Seja c um número real positivo e considere as sequências:

$$k_n = \frac{1}{c||u_n||}, \quad w_n(x) = k_n.u_n(x) = \frac{u_n(x)}{c||u_n||}. \tag{5.21}$$

Primeiro, note que $||w_n|| = \left\|\frac{u_n}{c||u_n||}\right\| = \frac{||u_n||}{c||u_n||} = \frac{1}{c}$ e assim, w_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$, então existe $w \in H_0^1(\Omega)$, tal que, a menos de uma subsequência:

$$\begin{aligned} w_n &\longrightarrow w \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),\\ w_n &\longrightarrow w \text{ fortemente em } L^2(\Omega),\\ w_n(x) &\longrightarrow w(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.0.1, temos $w_n^+ \longrightarrow w^+$ forte em $L^2(\Omega)$ e $w_n^+(x) \longrightarrow w^+(x)$ q.t.p em Ω.

Afirmamos que:

$$w^+(x) = 0 \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{5.22}$$

De fato, sejam $\Omega_1 = \{x \in \Omega;\ w^+(x) = 0\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega;\ w^+(x) > 0\}$.

Por (5.21), para cada $x \in \Omega_2$, $w_n^+(x) = k_n u_n^+(x)$ com $k_n \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$. Assim, como $w_n^+(x) \longrightarrow w^+(x) > 0$, q.t.p em Ω_2, segue que, para $x \in \Omega_2$, $u_n^+(x) \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, pois, se $|u_n^+(x)| \leq c$, como $k_n \longrightarrow 0$ obteríamos que $w_n^+(x) \longrightarrow 0$ em Ω_2. Mas, como $w_n^+(x) \longrightarrow w^+(x)$ em Ω_2, segue que, $w^+(x) = 0$ em Ω_2, que é uma contradição.

Como $u_n^+ \longrightarrow +\infty$ em Ω_2, por (F_2) com $l = +\infty$, dado $k > 0$, existe $n_0 = n_0(k)$ tal que, se $n \geq n_0$, então:

$$\frac{f(x, u_n^+(x))}{u_n^+(x)}(w_n^+(x))^2 \geq k(w^+(x))^2 \text{ para } x \in \Omega_2. \tag{5.23}$$

Tomando $\varphi = u_n$ como função teste em $\langle I'(u_n), \varphi\rangle \longrightarrow 0$, por (5.21), (5.23), utilizando que $w_n(x) \longrightarrow w(x)$, q.t.p em Ω e o Teorema da Convergência Dominada, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} ||w_n||^2 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{u_n}(w_n)^2 dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\{x\in\Omega \,:\, w(x)\geq 0\}} \frac{f(x,u_n)}{u_n}(w_n)^2 dx + \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\{x\in\Omega \,:\, w(x)< 0\}} \frac{f(x,u_n)}{u_n}(w_n)^2 dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\{x\in\Omega \,:\, w(x)\geq 0\}} \frac{f(x,u_n)}{u_n}(w_n)^2 dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega_1} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx + \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega_2} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx \\
&\geq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\Omega_2} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx \\
&\geq \int_{\Omega_2} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{f(x,u_n^+)}{u_n^+}(w_n^+)^2 dx \\
&\geq k \int_{\Omega_2} (w^+)^2 dx.
\end{aligned}$$

Como $k > 0$ pode ser escolhido suficientemente grande, segue que $|\Omega_2| = 0$ e então $w^+ \equiv 0$ em Ω, finalizando a prova da afirmação (5.22).

Sendo $w^+(x) \equiv 0$, q.t.p em Ω temos que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega F(x, w_n(x))dx = \int_\Omega F(x, -w^-(x))dx = 0$$

e por isso:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I(w_n) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{1}{2}||w_n||^2 - \int_\Omega F(x, w_n)dx\right) = \frac{1}{2c^2}. \tag{5.24}$$

Aplicando o Lema 5.0.2, a menos de subsequências:

$$I(w_n) = I(k_n.u_n) \leq \frac{1}{2n}(1+k_n^2) + I(u_n). \tag{5.25}$$

Como $k_n = \dfrac{1}{c||u_n||} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$, então

$$\frac{1}{2c^2} \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} I(u_n) \tag{5.26}$$

para qualquer $c > 0$, o que contradiz a condição de que $I(u_n) \longrightarrow d$.

Portanto, (u_n) é limitada. Assim, temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ fraco em } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\longrightarrow u \text{ forte em } L^p(\Omega), \ \forall\ 1 < p < 2^*, \\ u_n(x) &\longrightarrow u(x) \text{ q.t.p. } x \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por (F_2), $\lim_{t\longrightarrow 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = p(x)$, assim, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $0 < t < \delta$, então $\left|\dfrac{f(x,t)}{t} - p(x)\right| < \varepsilon$. Além disso, como $\lim_{t\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x,t)}{t^{r-1}} = 0$, existe $t = t_0(\varepsilon)$ tal que, se $t > t_0 \geq 1$, então,

$$\left|\frac{f(x,t)}{t^{r-1}}\right| \leq \varepsilon.$$

Portanto,

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|} < \varepsilon + |p(x)| \leq \varepsilon + ||p||_\infty \text{ se } 0 < t < \delta \tag{5.27}$$

e

$$|f(x,t)| < \varepsilon |t|^{r-1} \text{ se} t > t_0 \geq 1. \tag{5.28}$$

Além disso,

$$f(x,t) = 0 \text{ para } t \leq 0. \tag{5.29}$$

Também, podemos estimar $|f(x,t)|$ no intervalo $[\delta, t_0]$, com $\delta > 0$. De fato, por (F_1), como $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, segue que

$$\frac{|f(x,t)|}{|t|} \leq K, \ \forall\ t \in [\delta, t_0]. \tag{5.30}$$

Assim, por (5.27), (5.28), (5.29) e (5.30), obtemos

$$|f(x,t)| \leq (\varepsilon + ||p||_\infty)|t| + \varepsilon|t|^{r-1} + K|t|, \ \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$$

e consequentemente,

$$|f(x,t)| \leq (\varepsilon + ||p||_\infty + K)|t| + \varepsilon|t|^{r-1}, \ \forall\ (x,t) \tag{5.31}$$

com $r \in (2, 2^*)$ se $N \geq 2$ ou $r \in (2, +\infty)$ se $N = 2$.

$$\text{Como } u_n \longrightarrow u \text{ forte em } L^p(\Omega), \ \forall\ p \in (1, 2^*), \tag{5.32}$$

fixando p com $2 < r \leq p < 2^*$ e considerando q o conjugado de p; isto é, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, segue que $q = \frac{p}{p-1}$.

Vamos mostrar que

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^q(\Omega).$$

De fato, segue de (5.32), $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p $x \in \Omega$ e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \text{ com } g \in L^p(\Omega). \tag{5.33}$$

Como f é contínua,

$$f(x, u_n(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \text{ e, daí,}$$

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p}{r-1}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega. \tag{5.34}$$

Usando o crescimento (5.31), a limitação uniforme de (5.33), existe $\phi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{p}{r-1}} \leq \phi.$$

Assim, por (5.34), segue do Teorema da Convergência Dominada, que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{p}{r-1}}dx\right) = 0,$$

isto é,

$$f(\cdot,u_n(\cdot)) \longrightarrow f(x,u(\cdot)) \text{ em } L^{\frac{p}{r-1}}(\Omega).$$

Como $1 < q = \dfrac{p}{p-1} \leq \dfrac{p}{r-1}$ e Ω é um domínio limitado, temos que

$$L^{\frac{p}{r-1}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Logo,

$$||f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))||_{\frac{p}{p-1}} \longrightarrow 0. \tag{5.35}$$

Agora, note que, usando a desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned} & \left|\int_\Omega f(x,u_n(x))\varphi dx - \int_\Omega f(x,u(x))\varphi dx\right| \\ = & \left|\int_\Omega [f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))]\,\varphi dx\right| \\ \leq & \ ||f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))||_{\frac{p}{p-1}}\ ||\varphi||_p. \end{aligned}$$

Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com $p \in [r, 2^*]$ e por (5.35), temos

$$\begin{aligned} & \left|\int_\Omega f(x,u_n(x))\varphi dx - \int_\Omega f(x,u(x))\varphi dx\right| \\ \leq & \ M||f(\cdot,u_n(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))||_{\frac{p}{p-1}}\ ||\varphi||, \end{aligned} \tag{5.36}$$

onde $M > 0$ é uma constante.

Por (5.35) e (5.36), segue que

$$\int_\Omega f(x,u_n(x))\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u(x))\varphi dx,\ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{5.37}$$

Além disso, $u_n \longrightarrow u$ fraco em $H_0^1(\Omega)$, então $\langle u_n,\varphi\rangle_{H_0^1} \longrightarrow \langle u,\varphi\rangle_{H_0^1}$, $\forall\, \varphi \in H_0^1$, ou seja,

$$\int_\Omega a(x)\nabla u_n\nabla\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega a(x)\nabla u\nabla\varphi dx. \tag{5.38}$$

Como (u_n) é uma sequência (PS),

$$\langle I'(u_n), \varphi \rangle = \int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x, u_n)\varphi dx \longrightarrow 0, \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, por (5.37) e (5.38), obtemos

$$\int_\Omega a(x)\nabla u_n \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, u_n)\varphi dx, \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{5.39}$$

Usando u como função teste em (5.39), segue

$$||u||^2 - \int_\Omega f(x, u)udx = 0.$$

Portanto, argumentando como na prova do Teorema principal do Capítulo 4, mostra-se (PS), finalizando assim, a demonstração do Teorema 5.0.1.

■

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E RESULTADOS

Apresentamos as definições de norma e espaços normados.

Definição A.0.1. *Se V é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$, então uma função à valor real $N : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma norma em V caso satisfaça:*

(i) $N(v) \geq 0$*, para todo* $v \in V$ *;*

(ii) $N(v) = 0$ *se, e somente se,* $v = 0$*;*

(iii) $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$*, para todo* $v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

(iv) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$*, para todo* $u, v \in V$ *.*

Se a condição (ii) não for valida, a função N é uma **semi-norma** ou uma pseudonorma em V. Um **Espaço Vetorial Normado** é um Espaço Vetorial V com uma norma em V.

Exemplo A.0.1. *A coleção $B(X)$ de todas as funções a valores reais limitadas no conjunto X é um espaço vetorial normado com a norma definida por*

$$N(f) = sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Em particular, o espaço vetorial das funções contínuas em $X = [a, b]$ é normado, com a norma acima.

Alguns exemplos de semi-normas são:

- No espaço $\mathbb{R}^n$, a função

$$N_0(u_1, ..., u_n) = sup\{|u_2|, ..., |u_n|\}, \forall \ (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$$

  é uma semi-norma. Aqui, $N_0(u_1, ..., u_n) = 0$ se, e somente se, $u_2 = ... = u_n = 0$, mas nada se conclui a respeito de u_1.

- No Espaço Vetorial $C[0,1]$ das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}^n$, defina a seminorma
$$N_0(f) = sup|f(x)| : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$
Neste caso $N_0(f) = 0$ se, e somente se, $f(x)$ se anula em $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Definição A.0.2. *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}$ uma função, definimos a parte positiva e negativa de φ por $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$ e $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$, respectivamente.*

Além disso, note que $\varphi^+(x) \geqslant 0$ e $\varphi^-(x) \geqslant 0$, para todo $x \in M$ e

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \text{ e } |\varphi(x)| = \varphi^+(x) + \varphi^-(x).$$

Apresentamos algumas definições da Teoria da Integração e da Medida que foram mencionadas neste trabalho.

Definição A.0.3. *Uma família χ de subconjuntos de um conjunto X é dita ser uma σ-álgebra (ou um σ-campo) quando satisfaz:*
1. $\varnothing$,X pertencem a χ.
2. Se A pertence a χ, então o complementar $C(A) = X - A$ pertence a χ.

Um par ordenado (X, χ) consistindo de um conjunto X e uma σ-álgebra χ de subconjuntos de X é chamado um espaço mensurável. Qualquer conjunto em χ é chamado um conjunto χ- mensurável.

Definição A.0.4. *Uma função f de X em $\mathbb{R}$ é dita ser χ-mensurável (ou simplesmente mensurável) se para cada número real α o conjunto*

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

pertence a χ.

Definição A.0.5. *A coleção de todas as funções de valor real estendido χ-mensuráveis de X é denotada por $M(X, \chi)$, e a coleção de todas as funções χ-mensuráveis não-negativas de X em $\overline{\mathbb{R}}$ por $M^+(X, \chi)$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos reais estendido: $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.*

Definição A.0.6. *Uma medida é um função de valor real estendido* μ *definido numa* σ*-álgebra* χ *de subconjuntos de* X *tal que:*
1. $\mu(\varnothing) = 0$*;*
2. $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \chi$*;*
3. μ *é aditivo contável no sentido que se* (E_n) *é qualquer sequência disjunta de conjuntos em* χ*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Definição A.0.7. *Um espaço de medida é uma tripla* (X, χ, μ) *consistindo de um conjunto* X*, uma* σ*-álgebra* χ *de subconjuntos de* X*, e uma medida* μ *definida em* χ*.*

Definição A.0.8. *Dizemos que certa propriedade vale em* μ*-quase todo ponto (*μ*-q.t.p.), se existe um subconjunto* $N \in \chi$ *com* $\mu(N) = 0$ *tal que a propriedade vale no complementar de* N*.*

REFERÊNCIAS

[1] AMBROSETTI, A. AND RABINOWITZ, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. Journal of functional Analysis, 14(4), 349-381.

[2] ARIOLI, G., GAZZOLA, F., GRUNAU, H. C. AND MITIDIERI, E. (2005). A semilinear fourth order elliptic problem with exponential nonlinearity. SIAM journal on mathematical analysis, 36(4), 1226-1258.

[3] BARTLE G. R. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley, 1995.

[4] BOTELHO G.; PELLEGRINO D.; TEIXEIRA E. Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] BREZIS, H. (2010). Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science and Business Media.

[6] BREZIS, H., CAZENAVE, T., MARTEL, Y. AND RAMIANDRISOA, A. (1996). Blow up for $u_t - Du = g(u)$ revisited. Advances in Differential Equations, 1(1), 73-90.

[7] COSTA, D. G. An Invitation to Variational Methods in Diferential Equations. Birkhauser Advanced Texts, 2007.

[8] COSTA, D. G. Tópicos em Análise não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais. VIII Escola Latino Americana de Matemática - Rio de Janeiro, 1986.

[9] EVANS, L.C. Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer. Current developments in mathematics,International Press of Boston, 1997,1,65–126.

[10] FERNADEZ J. P. Medida e Integração. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[11] FILIPPAKIS, M. E. AND PAPAGEORGIOU, N. S. (2006). Multiple solutions for nonlinear elliptic problems with a discontinuous nonlinearity. Analysis and Applications, 4(01), 1-18.

[12] GARLING D. J. H. A Course in Mathematical Analysis, Volume II: Metric and Topological Spaces, Functions of a Vector Variable. Cambridge, 2013.

[13] ISNARD C. Introdução à Medida e Integração. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[14] KREYSZIG E. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1989.

[15] LI, G. AND HUANG, Y. (2019). Positive solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with asymptotically linear nonlinearities. Applicable Analysis, 1-16.

[16] LI, G., HUANG, Y. AND LIU, Z. (2020). Positive solutions for quasilinear Schrödinger equations with superlinear term. Complex Variables and Elliptic Equations, 65(6), 936-955.

[17] LIONS, J.L., On some questions in boundary value problems of mathematical physics.In Proceedings of International Symposium on Continuum Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro 1977. Edited by de la Penha and Medeiros), North-Holland, 1978.

[18] MA, T.F. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 63, 5-7,e1967–e1977, 2005.

[19] MARTEL, Y. (1997). Uniqueness of weak extremal solutions for nonlinear elliptic problems. In Houston J. Math.

[20] MEDEIROS, L. A. J.; MIRANDA, M. M. Espaços de Sobolev. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.

[21] MIRONESCU, P. AND RADULESCU, V. D. (1993). A bifurcation problem associated to a convex, asymptotically linear function. Comptes Rendus-Academie des Sciences Paris, Serie 1, 316, 667-667.

[22] MIRONESCU, P. AND RADULESCU, V. D. (1996). The study of a bifurcation problem associated to an asymptotically linear function. Doctorat en Mathématiques Appliquées, 8.

[23] OLIVEIRA C. R. Introdução à Análise Funcional. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[24] RABINOWITZ P. H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations. American Mathemathical Society, 1988.

[25] RADULESCU, V. D. (2008). Qualitative analysis of nonlinear elliptic partial differential equations: monotonicity, analytic and variational methods. Hindawi Publishing Corporation.

[26] RIVERA, J.M.Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. 2004. Laboratorio Nacional de Computação Cientifica - LNCC.

[27] SAANOUNI, S. AND TRABELSI, N. (2016a). A bifurcation problem associated to an asymptotically linear function. Acta Mathematica Scientia, 36(6), 1731-1746.

[28] SAANOUNI, S. AND TRABELSI, N. (2016b). Bifurcation for elliptic forth-order problems with quasilinear source term. Electronic Journal of Differential Equations, 2016(92), 1-16.

[29] SANCHÓN, M. (2007). Boundedness of the extremal solution of some p-Laplacian problems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 67(1), 281-294.

[30] TURING, A. (1952). Philosophical the royal biological transfections society sciences. Phil. Trans. R. Soc. Lond. B, 237, 37-72.

[31] WILLEM M. Minimax Theorems. Birkhauser, 1986.

[32] ZAHED, Hanadi. Positive Solutions for Some Weighted Elliptic Problems. Journal of Mathematics and Statistics. 2020. 125-132.

[33] ZHOU, H. S. (2002). An application of a mountain pass theorem. Acta Mathematica Sinica, 18(1), 27-36