

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Glaucus Rivera Santos Lima

**Fluxo de Potência Holomórfico Intervalar: uma nova abordagem para o
tratamento de incertezas em sistemas elétricos de potência**

Juiz de Fora

2024

Glaucus Rivera Santos Lima

Fluxo de Potência Holomórfico Intervalar: uma nova abordagem para o tratamento de incertezas em sistemas elétricos de potência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Igor Delgado de Melo, D.Sc.

Coorientador: Prof. João Alberto Passos Filho, D.Sc.

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo autor

Lima, Glaucus Rivera Santos.

Fluxo de Potência Holomórfico Intervalar: uma nova abordagem para o tratamento de incertezas em sistemas elétricos de potência / Glaucus Rivera Santos Lima. – 2024.

135 p. : il.

Orientador: Igor Delgado de Melo

Coorientador: João Alberto Passos Filho

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2024.

1. Incertezas. 2. Fluxo de potência holomórfico. 3. Análise intervalar.
I. Melo, Igor Delgado de, orient. II. Passos Filho, João Alberto, coorient.
III. Título.

Glaucus Rivera Santos Lima

Fluxo de Potência Holomórfico Intervalar: uma nova abordagem para o tratamento de incertezas em sistemas elétricos de potência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica.

Aprovada em 16 de fevereiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Igor Delgado de Melo - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. João Alberto Passos Filho - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Wesley Peres
Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Leonardo Willer de Oliveira
Universidade Federal de Juiz de Fora



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Willer de Oliveira, Professor(a)**, em 16/02/2024, às 11:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Igor Delgado de Melo, Professor(a)**, em 16/02/2024, às 11:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wesley Peres, Usuário Externo**, em 16/02/2024, às 11:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Alberto Passos Filho, Professor(a)**, em 16/02/2024, às 11:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1664226** e o código CRC **B3457911**.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não atenderão a todas as pessoas que fizeram parte desta importante etapa da minha vida. Portanto, desde já, peço desculpas àquelas que não estão presentes entre estas palavras, mas elas podem estar certas de que fazem parte do meu pensamento e da minha gratidão.

A Deus pelo dom da vida, por me capacitar e pela oportunidade de realizar este sonho. Sem Ele esta jornada jamais seria cumprida!

À Senhora de Fátima por guiar os meus passos e iluminar a minha jornada acadêmica, concedendo-me força, sabedoria e inspiração para alcançar novos horizontes de conhecimento e compreensão.

Aos professores Dr. Igor Delgado de Melo e Dr. João Alberto Passos Filho pela oportunidade, confiança, paciência e apoio durante a elaboração deste trabalho e, por meio deles, reporto minha gratidão a toda comunidade do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPEE) da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

Aos membros da banca avaliadora, pela disponibilidade de participar e pelas contribuições dadas neste texto, assim como aos colegas do Grupo de Estudos e Pesquisa em Qualidade de Energia (GEPEQE).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo aporte financeiro concedido para a realização desta pesquisa, assim como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Energia Elétrica (INERGE).

A todos os amigos do Núcleo de Pesquisas em Sistemas de Potência (NUPESP), em especial ao Antônio, ao Bruno, à Bruna, ao Filipe, ao João, ao Júnior, ao Luiz, à Mariana, ao Pedro, ao Robert e à Walquíria pelas experiências, incentivos, risadas, companheirismo e cumplicidade.

Aos meus pais, Maria Aparecida e Orioni, pelo incentivo constante, e à minha irmã Vanusa, pelo apoio incondicional.

Aos meus cunhados, Luís e Paulo, que generosamente dedicaram seu tempo e expertise à revisão minuciosa deste texto.

E, por fim, e não menos importante, à Jussara, esposa com quem amo partilhar a vida. Obrigado por ser meu porto seguro e por me dedicar especial atenção e zelo.

*“Aquilo que Deus quer para nós é muito mais belo do que tudo
que poderíamos pedir com a nossa imaginação.”*

– Chiara Corbella Petrillo

RESUMO

Devido à introdução de fontes de energia com alta variabilidade, novos tipos de carga, imprecisão de medidores e dados incertos no setor elétrico, faz-se necessário o desenvolvimento de métodos computacionais capazes de modelar corretamente as incertezas inerentes ao fluxo de potência. Nesse contexto, esta dissertação apresenta uma abordagem intervalar para o *Holomorphic Embedding Load Flow Method* (HELM), considerando incertezas de carga e geração. No método proposto, as equações de fluxo de potência são escritas como funções complexas holomorfas, sendo sua solução determinada de forma recursiva com base na expansão em séries de MacLaurin e na máxima continuação analítica utilizando aproximações de Padé. Conceitos da aritmética intervalar são aplicados às equações do HELM, assumindo potências ativas e reativas como dados incertos para obter valores intervalares associados aos fasores de tensão para todos os barramentos do sistema. Sistemas-teste, como os de 6, 14, 30 e 57 barramentos, são utilizados para simulações computacionais, sendo os resultados comparados com a abordagem de Monte Carlo (MC), o método de Krawczyk, a série de Taylor e a aritmética afim. Como contribuição relevante, uma nova técnica de fluxo de potência intervalar é apresentada, permitindo calcular valores intervalares mais próximos daqueles determinados por simulações de MC do que outras metodologias publicadas na literatura. O tempo computacional é aproximadamente 300 vezes mais rápido do que a abordagem de MC considerando 20.000 simulações e as sensibilidades dos intervalos são, pelo menos, duas vezes menores do que as obtidas por outros métodos intervalares. Adicionalmente, uma importante contribuição é apresentada para se considerar o tratamento de limites de geração de potência reativa referente às unidades de geração, o qual impacta significativamente na análise intervalar aplicada ao equacionamento do fluxo de potência.

Palavras-chave: Incertezas. Fluxo de potência holomórfico. Análise intervalar. Aproximações de Padé.

ABSTRACT

Due to the introduction of energy sources with high variability, new types of load, meter inaccuracy and uncertain data in the electrical sector, it is necessary to develop computational methods capable of correctly modeling the uncertainties inherent to the power flow. In this context, this dissertation presents an interval approach for the *Holomorphic Embedding Load Flow Method* (HELM), considering load and generation uncertainties. In the proposed method, the power flow equations are written as holomorphic complex functions, being their solution determined recursively based on the MacLaurin series' expansion and maximum analytical continuation using Padé approximants. Concepts of interval arithmetic are applied to HELM equations, assuming active and reactive powers as uncertain data to obtain interval values associated with voltage phasors for all buses in the system. Test systems, such as those with 6, 14, 30 and 57-buses, are used for computational simulations, being the results compared to the Monte Carlo (MC) approach, the Krawczyk method, the Taylor series and the affine arithmetic. As a relevant contribution, a novel interval power flow technique is presented, allowing computation of interval values closer to those determined by MC simulations than other methodologies published in the literature. Computational time is approximately 300 times faster than the MC approach considering 20.000 simulations and the interval sensitivities are, at least, two times smaller than those obtained by other interval methods. Additionally, an important contribution is presented to consider the treatment of reactive power generation limits regarding generation units, which significantly impacts the interval analysis applied to power flow equations.

Keywords: Uncertainties. Holomorphic embedding load flow. Interval analysis. Padé approximants.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Potência líquida em uma barra.	36
Figura 2	– Conjunto de Mandelbrot.	39
Figura 3	– Diagrama unifilar do sistema 3 barras.	40
Figura 4	– Mapa fractal para o sistema 3 barras considerando carga nominal.	41
Figura 5	– Mapa fractal para o sistema 3 barras considerando carga próxima ao ponto de máximo carregamento.	41
Figura 6	– Fluxograma para implementação do fluxo de potência holomórfico.	57
Figura 7	– Estratégias de modelagem de incertezas em sistemas elétricos.	60
Figura 8	– Fluxograma para implementação do método de Monte Carlo.	62
Figura 9	– Carga modelada por um conjunto fuzzy trapezoidal.	64
Figura 10	– Fluxograma para implementação do fluxo de potência holomórfico intervalar.	72
Figura 11	– Diagrama unifilar do sistema tutorial.	73
Figura 12	– Diagrama unifilar do sistema 6 barras modificado.	85
Figura 13	– Diagrama unifilar do sistema IEEE-30 barras.	86
Figura 14	– Diagrama unifilar do sistema IEEE-57 barras.	87
Figura 15	– Magnitudes de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.	88
Figura 16	– Ângulos de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.	89
Figura 17	– Índices de sensibilidade do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.	90
Figura 18	– Índices de acomodação do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.	90
Figura 19	– Magnitudes de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.	91
Figura 20	– Ângulos de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.	92
Figura 21	– Índices de sensibilidade do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.	92
Figura 22	– Índices de acomodação do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.	93
Figura 23	– Magnitudes de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário I.	94
Figura 24	– Ângulos de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário I.	94
Figura 25	– Potência reativa gerada no sistema 6 barras modificado – Cenário I.	95
Figura 26	– Magnitudes de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário II.	96
Figura 27	– Ângulos de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário II.	96
Figura 28	– Potência reativa gerada no sistema 6 barras modificado – Cenário II.	97
Figura 29	– Magnitudes de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário III.	97
Figura 30	– Ângulos de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário III.	98
Figura 31	– Potência reativa gerada no sistema 6 barras modificado – Cenário III.	98
Figura 32	– Magnitudes de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário I.	99
Figura 33	– Ângulos de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário I.	100
Figura 34	– Potência reativa gerada no sistema IEEE-57 barras – Cenário I.	100

Figura 35 – Potência reativa gerada pelo gerador 2 do sistema IEEE-57 barras – Cenário I.	101
Figura 36 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário IV.	102
Figura 37 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário IV.	102
Figura 38 – Potência reativa gerada no sistema IEEE-57 barras – Cenário IV.	103
Figura 39 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-30 barras em contingência.	104
Figura 40 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-30 barras em contingência.	104
Figura 41 – Índices de sensibilidade do sistema IEEE-30 barras em contingência.	105
Figura 42 – Índices de acomodação do sistema IEEE-30 barras em contingência.	106
Figura 43 – Curva PV para a barra 30 do sistema IEEE-30 barras.	106
Figura 44 – Representação geométrica de um intervalo complexo retangular.	127
Figura 45 – Exemplo de multiplicação intervalar complexa.	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais referências sobre o fluxo de potência holomórfico. . .	29
Tabela 2 – Principais referências sobre o fluxo de potência intervalar. . . .	34
Tabela 3 – Dados de barra do sistema 3 barras.	40
Tabela 4 – Dados de linha do sistema 3 barras.	40
Tabela 5 – Dados de barra do sistema tutorial.	74
Tabela 6 – Limites de reativo do sistema tutorial.	74
Tabela 7 – Dados de linha do sistema tutorial.	74
Tabela 8 – Termos das séries de MacLaurin para as variáveis de estado do sistema tutorial.	77
Tabela 9 – Geração de potência reativa no sistema tutorial.	78
Tabela 10 – Tensões e potências determinísticas calculadas para o sistema tutorial.	79
Tabela 11 – Magnitudes de tensão do sistema tutorial.	82
Tabela 12 – Ângulos de tensão do sistema tutorial.	82
Tabela 13 – Geração de potência reativa no sistema tutorial.	82
Tabela 14 – Máximo valor do índice de sensibilidade segundo diferentes abordagens.	107
Tabela 15 – Máximo valor do índice de acomodação segundo diferentes abordagens.	108
Tabela 16 – Análise do tempo computacional em função do número de simulações.	108
Tabela 17 – Dados de barra do sistema 6 barras modificado.	134
Tabela 18 – Limites de reativo do sistema 6 barras modificado.	134
Tabela 19 – Dados de linha do sistema 6 barras modificado.	135

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA	Aritmética Afim
AI	Aritmética Intervalar
EBP	Equação de Balanço de Potência
FACTS	<i>Flexible Alternating Current Transmission Systems</i>
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FPC	Fluxo de Potência Continuado
FPD	Fluxo de Potência Determinístico
FPF	Fluxo de Potência Fuzzy
FPHo	Fluxo de Potência Holomórfico
FPHoI	Fluxo de Potência Holomórfico Intervalar
FPI	Fluxo de Potência Intervalar
FPP	Fluxo de Potência Probabilístico
HELM	<i>Holomorphic Embedding Load Flow Method</i>
MC	Monte Carlo
NR	Newton-Raphson
PMC	Ponto de Máximo Carregamento
SEP	Sistema Elétrico de Potência

REGRAS GERAIS DE NOTAÇÃO

As convenções de notação adotadas neste trabalho estão delineadas a seguir:

- **Números intervalares:** letra em itálico e com sobrescrito $\hat{}$ (ex.: \hat{V} , $\hat{\theta}$ e \hat{W});
- **Números não intervalares:** letra em itálico e sem sobrescrito (ex.: V , θ e W);
- **Magnitude dos fasores:** letra maiúscula em itálico e entre duas barras paralelas (ex.: $|V|$, $|V^{esp}|$ e $|\hat{V}|$);
- **Vetores e/ou matrizes:** letra em itálico e negrito (ex.: \mathbf{V} , $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\Delta P}$).

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Coefficientes desconhecidos no polinômio do numerador do aproximante de Padé
b	Coefficientes desconhecidos no polinômio do denominador do aproximante de Padé
B_{km}	Parte imaginária do elemento km da matriz de admitância nodal
B^{sh}	Susceptância <i>shunt</i>
G_{km}	Parte real do elemento km da matriz de admitância nodal
h	Número da iteração
h_{max}	Número máximo de iterações
\mathbb{IC}	Conjunto dos números complexos intervalares
\mathbb{IR}	Conjunto dos números reais intervalares
K	Conjunto de barras ligadas diretamente à barra k , incluindo a própria barra k
L	Grau do polinômio do numerador do aproximante de Padé
L/M	Grau do aproximante de Padé
$[L/M]$	Notação no aproximante de Padé, onde as séries de potência são truncadas em um polinômio de grau L/M
M	Grau do polinômio do denominador do aproximante de Padé
n	Ordem do termo na série de MacLaurin
N	Número total de barras
\mathcal{N}	Distribuição normal
P_k	Potência ativa injetada em uma dada barra k
P_k^{cal}	Potência ativa calculada em uma dada barra k
P_k^d	Potência ativa demandada em uma dada barra k
P_k^{esp}	Potência ativa especificada em uma dada barra k
P_k^g	Potência ativa gerada em uma dada barra k
\hat{P}_k^{cal}	Potência ativa intervalar calculada em uma dada barra k
\hat{P}_k^d	Potência ativa intervalar demandada em uma dada barra k
\hat{P}_k^g	Potência ativa intervalar gerada em uma dada barra k
PQ	Barra de carga

PV	Barra de geração
Q_k	Potência reativa injetada em uma dada barra k
Q_k^{cal}	Potência reativa calculada em uma dada barra k
Q_k^d	Potência reativa demandada em uma dada barra k
Q_k^{esp}	Potência reativa especificada em uma dada barra k
Q^g	Potência reativa gerada
Q_k^g	Potência reativa gerada em uma dada barra k
\hat{Q}_k^{cal}	Potência reativa intervalar calculada em uma dada barra k
\hat{Q}_k^d	Potência reativa intervalar demandada em uma dada barra k
\hat{Q}^g	Potência reativa intervalar gerada
\hat{Q}_k^g	Potência reativa intervalar gerada em uma dada barra k
Q_k^{max}	Potência reativa máxima em uma dada barra k
Q_{max}	Potência reativa máxima
Q_k^{min}	Potência reativa mínima em uma dada barra k
Q_{min}	Potência reativa mínima
R	Resistência
S_k	Potência complexa injetada em uma dada barra k
S_k^{cal}	Potência complexa calculada em uma dada barra k
\hat{S}_k^{cal}	Potência complexa intervalar calculada em uma dada barra k
V_k	Fasor tensão em uma dada barra k
V_k^{max}	Tensão máxima em uma dada barra k
V_k^{min}	Tensão mínima em uma dada barra k
$ V_k^{esp} $	Magnitude de tensão especificada em uma dada barra k
V_m^{im}	Parte imaginária do fasor tensão em uma dada barra m
V_m^{re}	Parte real do fasor tensão em uma dada barra m
$ V_k $	Magnitude do fasor tensão em uma dada barra k
\hat{V}_k	Fasor tensão intervalar em uma dada barra k
V θ	Barra de referência
X	Reatância
Y_{km}	Elemento km da matriz de admitância nodal

Y_k^{sh}	Admitância <i>shunt</i> em uma dada barra k
Y_{km}^{sr}	Admitância série do ramo km
ZIP	Modelo de carga do tipo impedância, corrente e potência constante
α	Valor percentual de incerteza
γ	Variável complexa utilizada na incorporação holomórfica
δ	Parâmetro de incertezas percentuais
ΔP	Resíduo de potência ativa
ΔQ	Resíduo de potência reativa
θ_k	Ângulo do fasor tensão em uma dada barra k
λ	Fator de carregamento
ξ	Valor de tolerância
σ	Desvio padrão
<i>abs</i>	Módulo
<i>det</i>	Determinístico
<i>diag</i>	Diagonal
<i>diam</i>	Diâmetro/tamanho
<i>dist</i>	Distância
<i>im</i>	Parte imaginária
<i>inf</i>	Limite inferior
<i>max</i>	Valor máximo
<i>mid</i>	Valor médio
<i>min</i>	Valor mínimo
<i>npv</i>	Número de barras PV
<i>rad</i>	Radianos
<i>Rad</i>	Raio
<i>re</i>	Parte real
<i>sup</i>	Limite superior
*	Conjugado
*	Convolução matemática

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	20
1.2	MOTIVAÇÃO	22
1.3	OBJETIVOS	22
1.4	PUBLICAÇÕES DECORRENTES	23
1.5	ESTRUTURA DO TRABALHO	24
2	REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO	25
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	25
2.2	FLUXO DE POTÊNCIA HOLOMÓRFICO	25
2.3	FLUXO DE POTÊNCIA INTERVALAR	30
2.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	33
3	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	35
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	35
3.2	FLUXO DE POTÊNCIA	35
3.2.1	Fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson	37
3.2.1.1	<i>Formulação Clássica</i>	<i>37</i>
3.2.1.2	<i>Análise Fractal das Múltiplas Soluções</i>	<i>38</i>
3.2.2	Fluxo de potência holomórfico	42
3.2.2.1	<i>Incorporação Holomórfica</i>	<i>42</i>
3.2.2.1.1	<i>Barra de referência</i>	<i>43</i>
3.2.2.1.2	<i>Barra de carga</i>	<i>43</i>
3.2.2.1.3	<i>Barra de geração</i>	<i>43</i>
3.2.2.2	<i>Solução Germinal</i>	<i>45</i>
3.2.2.3	<i>Expansão em Séries de MacLaurin</i>	<i>46</i>
3.2.2.3.1	<i>Barra de referência</i>	<i>47</i>
3.2.2.3.2	<i>Barra de carga</i>	<i>48</i>
3.2.2.3.3	<i>Barra de geração</i>	<i>49</i>
3.2.2.3.4	<i>Representação matricial</i>	<i>51</i>
3.2.2.4	<i>Continuação Analítica</i>	<i>53</i>
3.2.2.5	<i>Convergência e Limites de Potência Reativa</i>	<i>56</i>
3.2.2.6	<i>Fluxograma</i>	<i>56</i>
3.3	MODELAGEM DE INCERTEZAS	58
3.3.1	Fluxo de potência probabilístico	60
3.3.1.1	<i>Método de Monte Carlo</i>	<i>61</i>

3.3.2	Fluxo de potência fuzzy	63
3.3.3	Fluxo de potência intervalar	64
3.3.3.1	<i>Superestimação Intervalar</i>	65
3.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	66
4	METODOLOGIA PROPOSTA	67
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	67
4.2	FLUXO DE POTÊNCIA HOLOMÓRFICO INTERVALAR	67
4.2.1	Introdução de incertezas	67
4.2.2	Expansão em séries de MacLaurin intervalares	68
4.2.2.1	<i>Termo de Ordem $n = 0$</i>	68
4.2.2.2	<i>Termo de Ordem $n = 1$</i>	69
4.2.2.3	<i>Termos de Ordem $n > 1$</i>	69
4.2.3	Continuação analítica máxima intervalar	70
4.2.4	Convergência	71
4.3	FLUXOGRAMA	71
4.4	EXEMPLO NUMÉRICO	73
4.4.1	Fluxo de potência holomórfico determinístico	74
4.4.1.1	<i>Início</i>	74
4.4.1.2	<i>Incorporação Holomórfica</i>	75
4.4.1.3	<i>Solução Germinal</i>	75
4.4.1.4	<i>Matriz de Recursão</i>	76
4.4.1.5	<i>Expansão em Séries de MacLaurin</i>	76
4.4.1.6	<i>Continuação Analítica Máxima</i>	77
4.4.1.7	<i>Convergência</i>	78
4.4.1.8	<i>Controle de Reativos</i>	78
4.4.1.9	<i>Resultados Determinísticos</i>	79
4.4.2	Fluxo de potência holomórfico intervalar	79
4.4.2.1	<i>Introdução de Incertezas</i>	79
4.4.2.2	<i>Expansão em Séries de MacLaurin Intervalares</i>	80
4.4.2.2.1	<i>Termo de ordem $n = 0$</i>	80
4.4.2.2.2	<i>Termo de ordem $n = 1$</i>	80
4.4.2.2.3	<i>Termo de ordem $n > 1$</i>	80
4.4.2.3	<i>Continuação Analítica Máxima Intervalar e Convergência</i>	81
4.4.2.4	<i>Controle de Reativos</i>	81
4.4.2.5	<i>Resultados Intervalares</i>	82
4.5	CONCLUSÕES PARCIAIS	83
5	RESULTADOS	84
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	84
5.1.1	Cenários	85

5.1.2	Sistemas-Teste	85
5.1.2.1	<i>Sistema 6 Barras Modificado</i>	85
5.1.2.2	<i>Sistema IEEE-30 Barras</i>	86
5.1.2.3	<i>Sistema IEEE-57 Barras</i>	86
5.2	FLUXO DE POTÊNCIA SEM CONTROLE DE REATIVOS	88
5.2.1	Soluções intervalares para o sistema IEEE-30 barras	88
5.2.1.1	<i>Cenário I</i>	88
5.2.1.2	<i>Cenário III</i>	91
5.3	FLUXO DE POTÊNCIA COM CONTROLE DE REATIVOS	93
5.3.1	Soluções intervalares para o sistema 6 barras modificado	93
5.3.1.1	<i>Cenário I</i>	93
5.3.1.2	<i>Cenário II</i>	95
5.3.1.3	<i>Cenário III</i>	95
5.3.2	Soluções intervalares para o sistema IEEE-57 barras	99
5.3.2.1	<i>Cenário I</i>	99
5.3.2.2	<i>Cenário IV</i>	101
5.4	ANÁLISE DE CONTINGÊNCIA	103
5.5	CURVA PV ASSOCIADA AO INCREMENTO DE CARGA	105
5.6	ANÁLISE COMPARATIVA COM MÉTODOS ALTERNATIVOS	107
5.7	ANÁLISE DOS RESULTADOS	109
5.8	CONCLUSÕES PARCIAIS	111
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	112
6.1	CONCLUSÕES FINAIS	112
6.2	TRABALHOS FUTUROS	113
	REFERÊNCIAS	114
	APÊNDICE A – ARITMÉTICA INTERVALAR	122
A.1	ARITMÉTICA INTERVALAR REAL	122
A.1.1	Intervalo real	122
A.1.2	Relações entre intervalos reais	123
A.1.3	Operações elementares entre intervalos reais	124
A.1.4	Definições em \mathbb{IR}	126
A.2	ARITMÉTICA INTERVALAR COMPLEXA	126
A.2.1	Intervalo complexo	127
A.2.2	Relações entre intervalos complexos	127
A.2.3	Operações elementares entre intervalos complexos	128
A.3	SUPERESTIMAÇÃO INTERVALAR	130
A.3.1	Extensões intervalares	131
A.4	FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS INTERVALARES	131

A.4.1	IntLab	132
	APÊNDICE B – DADOS DO SISTEMA 6 BARRAS MODI- FICADO	134

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho insere-se no contexto das pesquisas relacionadas às incertezas que permeiam os Sistemas Elétricos de Potência (SEPs). A não consideração dessas incertezas nas análises de rede pode resultar em soluções do fluxo de potência que não condizem com a realidade desses sistemas, impactando nas tomadas de decisões que o operador deve tomar em tempo real. Nesse contexto, este capítulo inicia com uma breve contextualização, seguida das motivações e objetivos que orientaram a elaboração deste trabalho. Por fim, uma visão geral da estrutura deste documento será apresentada, destacando o conteúdo dos capítulos subsequentes.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O fluxo de potência destaca-se como uma ferramenta crucial no estudo e análise de sistemas de potência, visando assegurar que o sistema opere dentro de limites aceitáveis e atenda eficientemente às demandas de energia elétrica. Em termos gerais, o cálculo do fluxo de potência em uma rede elétrica consiste essencialmente na determinação de seu estado operativo, considerando sua topologia e uma determinada condição de carga e geração.

Segundo Monticelli (1983), Zanetta (2006) e Melo (2023), esse estado operativo abrange três aspectos fundamentais:

- A obtenção dos fasores de tensão para todos os barramentos do sistema;
- A determinação das potências ativa e reativa que fluem ao longo dos ramos da rede elétrica;
- A determinação das potências ativa e reativa geradas, consumidas e perdidas nos diversos elementos do sistema.

Dada a sua relevância, as concessionárias de energia e demais empresas do setor elétrico têm um interesse significativo em conduzir estudos de fluxo de potência. Esses estudos visam otimizar a operação do setor elétrico, tornando-a mais eficiente, segura e econômica. Essas estratégias podem ocorrer tanto no planejamento da expansão do sistema, envolvendo a adição de novas cargas e equipamentos, quanto na operação, por meio de ajustes e modificações na topologia da rede elétrica (Monticelli, 1983; Zanetta, 2006; Melo, 2023).

Nesse propósito, diferentes metodologias determinísticas podem ser utilizadas para determinar o ponto de operação dos sistemas elétricos, incluindo os métodos iterativos tradicionais e a metodologia recursiva conhecida na literatura como *Holomorphic Embedding Load Flow Method* (HELM) (Trias, 2012). Todavia, destaca-se que cada metodologia tem

suas próprias vantagens e limitações, sendo que a escolha do método apropriado depende tanto das características específicas do sistema elétrico em questão, quanto dos objetivos do estudo.

As metodologias iterativas, como o método de Gauss-Seidel (Ward; Hale, 1956), o método de Newton-Raphson (NR) (Tinney; Hart, 1967), o método de Levenberg-Marquardt (Chagas, 2018), o método de Gauss-Newton (Tostado-Véliz; Kamel; Jurado, 2019) e o método Heun-King-Werner (Tostado-Véliz; Kamel; Jurado, 2020), entre outras, são amplamente utilizadas para calcular o fluxo de potência em sistemas elétricos. Esses métodos são fundamentados em iterações sucessivas para encontrar os valores dos fasores de tensão em cada barramento do sistema, até que as Equações de Balanço de Potência (EBPs) sejam satisfeitas.

Por outro lado, a metodologia recursiva proposta em Trias (2012) representa uma alternativa aos métodos iterativos clássicos, uma vez que baseia-se em conceitos avançados como o holomorfismo, a teoria das curvas algébricas e a continuação analítica (AIA, 2023). Nesse método, as EBPs são transformadas em um problema paramétrico e as tensões nodais são calculadas recursivamente no domínio complexo de Argand-Gauss. Para isso, faz-se necessário que as tensões sejam expandidas em termos das séries de MacLaurin e que sua continuação analítica máxima seja implementada utilizando aproximações de Padé (Lima *et al.*, 2023).

Uma das principais vantagens do HELM, denominado neste trabalho como Fluxo de Potência Holomórfico (FPHo), é sua capacidade de obter solução para o fluxo de potência sem a necessidade de recorrer a algoritmos recursivos que exigem estimativas iniciais das variáveis de estado e considerações sobre o condicionamento numérico do sistema. A metodologia pode ser aplicada a sistemas com alta penetração de energias renováveis, redes elétricas com elevado carregamento, contingências e falhas de equipamentos, uma vez que garante encontrar a solução correta para o fluxo de potência caso ela exista (Subramanian, 2014; Trias, 2018). Entretanto, a implementação prática do FPHo carece de pesquisas e aprimoramento, uma vez que se trata de uma técnica relativamente nova e em desenvolvimento, ao passo que os métodos iterativos ainda são amplamente utilizados e aceitos no setor de energia elétrica face à sua confiabilidade e maturidade.

Embora as metodologias citadas sejam amplamente utilizadas em sua versão determinística, os sistemas de potência são complexos, dinâmicos e estão sujeitos a diversos fatores que podem introduzir incertezas à sua operação. Fatores como erros de medição, introdução de fontes com alta variabilidade, variações nas cargas e alterações topológicas da rede elétrica, dentre outros, geram desafios adicionais à operação dos SEPs (Barbosa, 2012; Melo, 2023). Conseqüentemente, as informações obtidas por meio do fluxo de potência determinístico podem não condizer com a realidade desses sistemas e, portanto, sua incerteza precisa ser adequadamente considerada.

1.2 MOTIVAÇÃO

O conhecimento adequado das fontes de incertezas e seus impactos é de suma importância para assegurar a confiabilidade, a segurança e a eficiência operacional dos sistemas elétricos modernos. Dessa forma, torna-se imperativo o desenvolvimento de métodos computacionais capazes de modelar corretamente as incertezas inerentes ao fluxo de potência.

Nesse objetivo, três metodologias principais podem ser utilizadas: o Fluxo de Potência Probabilístico (FPP), o Fluxo de Potência Fuzzy (FPF) e o Fluxo de Potência Intervalar (FPI). O FPP é baseado na repetição de eventos e faz uso de distribuições de probabilidade para modelar incertezas no sistema de energia (Borkowska, 1974; Prusty; Jena, 2017). Já no FPF, a lógica *fuzzy* é implementada para lidar com incertezas (Miranda; Matos, 1989; Lima; Murari; Pereira, 2003; Pereja, 2009) e, por fim, o FPI faz uso de intervalos de valores para representar incertezas em parâmetros do sistema (Wang; Alvarado, 1992; Souza; Costa, 2018; Souza, 2023). Embora a escolha do método seja pautada no tipo de incerteza e no objetivo da análise, o FPI é considerado por muitos engenheiros e pesquisadores um método relativamente simples e prático, quando comparado com demais metodologias utilizadas para o tratamento de incertezas (Pereira, 2011).

No contexto do FPI, as não-linearidades presentes nas equações que regem o comportamento do sistema elétrico podem ser resolvidas por diversos métodos, entre os quais se destacam: o método de NR, o método da bisseção, o método de Newton modificado e o método do ponto fixo intervalar (Chapra, 2017). Embora esses métodos apresentem vantagens e desvantagens próprias, não existe na literatura uma abordagem que utiliza o método de incorporação holomórfica para tratar incertezas no FPI. Isso evidencia a necessidade de novas pesquisas para preencher essa lacuna e aprimorar a aplicação dessa metodologia em situações desafiadoras.

Nessa conjuntura, a presente pesquisa é relevante, uma vez que busca avaliar a viabilidade e eficácia do Fluxo de Potência Holomórfico Intervalar (FPHoI), traçando comparações com técnicas clássicas consagradas. Com isso, será possível identificar os benefícios e limitações da nova abordagem, além de aprimorar a aplicação dos métodos numéricos em situações práticas, fornecendo uma contribuição valiosa para o avanço do conhecimento nessa área.

1.3 OBJETIVOS

O principal objetivo deste estudo é introduzir um novo método, denominado FPHoI, para lidar com incertezas em sistemas elétricos. Espera-se que o mesmo contribua significativamente para o desenvolvimento de novas abordagens de tratamento de incertezas em SEPs e, conseqüentemente, melhore a eficiência e segurança desses sistemas.

Nesse viés, visando alcançar o objetivo proposto, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

- Desenvolver uma implementação do FPHo no ambiente MATLAB considerando mecanismo de controle de geração de reativos em barras PV;
- Implementar o FPP em ambiente MATLAB utilizando o método de NR em coordenadas polares em conjunto com simulações de Monte Carlo (MC);
- Investigar as principais fontes de incertezas intrínsecas aos sistemas elétricos;
- Avaliar o impacto da carga/geração com alta variabilidade nas magnitudes/ângulos de tensão dentro do contexto do FPP;
- Estudar os principais conceitos relacionados à matemática intervalar;
- Realizar comparações entre os resultados obtidos pelo FPHoI proposto e os resultados gerados pelo método de MC, método de Krawczyk, séries de Taylor de segunda ordem e Aritmética Afim (AA);
- Identificar os benefícios e limitações da abordagem proposta.

1.4 PUBLICAÇÕES DECORRENTES

Este trabalho possibilitou o desenvolvimento da primeira metodologia holomórfica intervalar para o tratamento de incertezas em dados de carga e geração em sistemas elétricos de potência. Nesse contexto, as investigações relacionadas ao tema desta dissertação possibilitaram a publicação dos seguintes trabalhos:

- LIMA, G. R. S.; MELO, I. D. de; PASSOS FILHO, J. A. Interval holomorphic embedding load flow method: A novel approach for interval analysis considering load and generation uncertainties. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 226, p. 109921, 2024. ISSN 0378-7796.
- LIMA, G. R. S.; MELO, I. D. de; PASSOS FILHO, J. A.; RODRIGUES, F. M. e S. Fluxo de potência holomórfico probabilístico aplicado às redes de distribuição: Uma análise comparativa com métodos iterativos. In: SBQEE. **Anais da XV Conferência Brasileira sobre Qualidade da Energia Elétrica, 2023**. São Luís, 2023.
- RODRIGUES, F. M. e S.; MELO, I. D. de; LIMA, G. R. S. Análise fractal das múltiplas soluções do fluxo de potência em sistemas elétricos. In: SBQEE. **Anais da XV Conferência Brasileira sobre Qualidade da Energia Elétrica, 2023**. São Luís, 2023.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada em seis capítulos e dois apêndices, conforme descrito a seguir:

- **Capítulo 1: Introdução**

Nesse capítulo, uma sucinta introdução ao tema da dissertação é apresentada para contextualização, motivação e definição de objetivos pretendidos;

- **Capítulo 2: Referencial Bibliográfico**

O Capítulo 2 realiza uma revisão bibliográfica dos dois temas centrais da dissertação: o FPHo e o FPI;

- **Capítulo 3: Conceitos Fundamentais**

O capítulo aborda o conceito de fluxo de potência, destacando as principais metodologias aplicadas em sua modelagem, e discute os métodos predominantes utilizados para modelar as incertezas associadas aos sistemas elétricos;

- **Capítulo 4: Metodologia Proposta**

O Capítulo 4 introduz uma técnica inovadora para lidar com a incerteza nos dados de geração e carga de sistemas elétricos e a aplica a um sistema tutorial composto por três barras, onde são demonstrados seu funcionamento, aplicabilidade e eventuais limitações;

- **Capítulo 5: Resultados**

O capítulo apresenta os resultados das simulações conduzidas em sistemas-teste com 6, 14, 30 e 57 barramentos e faz comparações com os resultados obtidos por metodologias clássicas correlatas;

- **Capítulo 6: Considerações Finais**

No último capítulo, são apresentadas as conclusões finais da dissertação e, adicionalmente, são delineadas as diretrizes para pesquisas futuras;

- **Apêndice A: Aritmética Intervalar**

Nesse apêndice, são explorados os principais conceitos da matemática intervalar real e complexa, além de sua principal limitação;

- **Apêndice B: Dados do Sistema 6 Barras Modificado**

No apêndice final, são apresentadas informações detalhadas do sistema 6 barras modificado, incluindo dados de linha, barra, geradores e limites de reativo utilizados nas simulações computacionais.

2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

O presente capítulo apresenta uma visão abrangente do estado da arte dos dois assuntos centrais deste trabalho: o FPHo e o FPI. Sua finalidade é destacar a relevância e a importância dessas duas temáticas para a análise de redes elétricas, cujo entendimento é essencial para o contexto desta dissertação.

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Embora diversos autores tenham se dedicado a essas áreas, procurou-se compilar somente as fontes mais influentes e relevantes que contribuíram para o desenvolvimento desses campos de estudo. Isso possibilita ao leitor compreender a base teórica e prática que sustenta as análises subsequentes deste trabalho.

2.2 FLUXO DE POTÊNCIA HOLOMÓRFICO

O FPHo é uma técnica analítica relativamente nova. Os principais trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento do método e desta pesquisa são descritos a seguir:

- **2012:** O FPHo é apresentado à comunidade científica em Trias (2012). O método é anunciado como uma técnica recursiva, não iterativa, determinística, robusta e eficiente para resolver o problema de fluxo de potência. Em seu texto, o autor discorre sobre a construção de funções holomorfas, técnicas de expansão, o uso de elementos singulares e a estabilidade numérica. Simulações são conduzidas utilizando um sistema tutorial de duas barras e os resultados demonstram que a técnica é performática e competitiva em relação aos métodos iterativos estabelecidos.
- **2013:** É publicada em Subramanian, Feng e Tylavsky (2013) a primeira proposta de modelagem holomórfica para barramentos PV. Por meio de ferramentas matemáticas avançadas, o comportamento dos geradores é representado precisamente no FPHo. O artigo também discute as vantagens da abordagem em relação às formulações tradicionais de fluxo de potência. A técnica é aplicada a um sistema tutorial de duas barras e apresenta resultados promissores.
- **2014:** Em Subramanian (2014), a técnica de incorporação holomórfica é detalhada e sua eficácia em resolver problemas de fluxo de potência é demonstrada. A dissertação compara o FPHo com técnicas iterativas clássicas e infere que a metodologia é uma ferramenta valiosa para a análise de redes elétricas complexas.
- **2015:** O FPHo é aplicado a sistemas elétricos com baixa tensão e grande ângulo de desvio em Feng (2015). A tese apresenta uma análise detalhada da teoria subjacente à

técnica de incorporação holomórfica e conclui que a mesma é uma ferramenta robusta e eficaz para a solução de problemas de fluxo de potência com tais características.

O efeito de diferentes técnicas de incorporação holomórfica na taxa de convergência do FPHo é investigado em Li (2015). A dissertação apresenta uma análise comparativa do desempenho dessas técnicas em termos de taxa de convergência e avalia sua sensibilidade a diferentes parâmetros de entrada. Os resultados indicam que a escolha da técnica de incorporação holomórfica adequada pode levar a melhorias significativas na taxa de convergência do fluxo de potência.

Uma compreensão intuitiva do FPHo é apresentada em Rao *et al.* (2015). O artigo propõe um modelo de incorporação holomórfica para barramentos PV e examina algumas características de diferentes incorporações holomórficas, fornecendo detalhes de construção de modelo, cálculo de solução germinal e matriz de recursão. Os autores demonstram, a partir de simulações em redes elétricas reais, que o FPHo é um método eficiente em termos de convergência e precisão.

- **2016:** Em Trias e Marín (2016) é publicada uma técnica apropriada de incorporação holomórfica que estende o modelo canônico para sistemas de transmissão em corrente contínua. Mantendo as propriedades construtivas e determinísticas do modelo, os autores obtêm uma solução precisa para o fluxo de potência e mostram que a metodologia consegue acomodar as não-linearidades das curvas I-V dos conversores baseados em eletrônica de potência, o que é uma vantagem significativa em relação a outras abordagens existentes.
- **2017:** O efeito dos dispositivos da classe *Flexible Alternating Current Transmission Systems* (FACTS), baseados em tiristores, é avaliado em Basiri-Kejani e Gholipour (2017). Os autores propõem uma modelagem que contempla o FPHo de forma que as não-linearidades dos controladores sejam consideradas e que melhore a precisão da análise de fluxo de potência. Além da modelagem desses dispositivos, os autores investigam a solução germinal e o controle dos limites de operação desses controladores. Simulações conduzidas em sistemas-teste demonstram que a abordagem proposta é precisa e eficiente para a análise de sistemas elétricos com a inclusão de dispositivos FACTS.

Em Liu *et al.* (2017), o FPHo é utilizado para avaliar a estabilidade de tensão de sistemas elétricos em tempo real. Para melhorar a convergência do método e a precisão do Ponto de Máximo Carregamento (PMC), uma adaptação da aproximação de Padé foi utilizada. Resultados de simulações demonstram que a técnica é precisa e apresenta resultados semelhantes aos do Fluxo de Potência Continuado (FPC).

- **2018:** Uma nova abordagem para calcular a curva PV em sistemas elétricos é publicada em Wang, Liu e Sun (2018). No artigo, os autores utilizam o FPHo no

intuito de encontrar soluções analíticas para problemas de valor limite em sistemas elétricos, possibilitando o cálculo da curva PV desses sistemas. A eficácia da abordagem é demonstrada por meio de estudos de caso realizados em sistemas elétricos de diferentes tamanhos e complexidades. Os resultados evidenciam que a abordagem consegue calcular a curva PV com precisão, superando outras abordagens existentes em termos de precisão e eficiência computacional.

- **2019:** Um novo método para solucionar o problema de FPHo é apresentado em Freitas *et al.* (2019). Os autores publicam um modelo de fluxo de potência que utiliza uma aproximação de Padé de ordem inferior para representar a função holomorfa, visando aumentar a eficiência computacional do algoritmo canônico apresentado em Trias (2012). Adicionalmente, é proposta uma metodologia que inclui a injeção estimada de potência nas barras, possibilitando uma aproximação mais precisa do estado real do sistema elétrico. Simulações conduzidas em sistemas de diferentes tamanhos revelam que a técnica apresenta convergência rápida mesmo para sistemas de grande porte.

Uma abordagem do FPHo aplicada a sistemas de distribuição em sequência positiva é apresentada em Heidarifar, Andrianesis e Caramanis (2019). Por meio da técnica de incorporação holomórfica, os autores exploram a topologia radial e de malha fraca das redes de distribuição, reduzindo significativamente o tempo computacional da metodologia holomórfica. Simulações conduzidas em sistemas-teste de diferentes tamanhos e complexidades comprovam que a proposta consegue calcular com precisão o fluxo de potência em redes radiais.

O FPHo é utilizado para controlar remotamente a tensão em sistemas de potência em Liu *et al.* (2019). A abordagem proposta utiliza informações dos medidores de tensão locais para estimar as injeções de potência das barras remotas. Essas estimativas são utilizadas no modelo do fluxo de potência para determinar as mudanças de tensão necessárias nos barramentos remotos para atingir os objetivos do controle. Tal abordagem demonstra, por meio de resultados de simulação, a capacidade de aprimorar significativamente a qualidade da tensão em pontos distantes do sistema, superando outras abordagens existentes em termos de eficiência computacional e precisão.

- **2020:** Em Chen, Wang e Xu (2020), a metodologia de incorporação holomórfica é aplicada ao FPC. Na técnica proposta, o fluxo continuado é calculado utilizando abstrações de análise continuada, de forma que a variável de incorporação do FPHo passa a representar o fator de carregamento do sistema elétrico. Dessa forma, o FPHo passa a ser calculado para diferentes pontos de operação do sistema e possibilita a construção de curvas PV. A proposta é implementada em um sistema-teste e os resultados revelam a precisão da técnica.

Uma extensão do FPHo para avaliação da estabilidade de tensão em sistemas de potência é publicada em Singh e Tiwari (2020). No artigo, a condutância *shunt* do transformador regulador de tensão é incorporada à modelagem do fluxo de potência e um algoritmo é utilizado para avaliar a estabilidade de tensão do sistema elétrico. Testes computacionais conduzidos demonstram que a metodologia consegue avaliar com precisão a estabilidade de tensão desses sistemas em várias condições de operação e cenários de contingência.

Valendo-se de uma combinação de técnicas de modelagem holomórfica e matemática convencional, é proposto em Sur *et al.* (2020) um FPHo para aplicação em *microgrids* híbridas CA-CC. Simulações conduzidas evidenciam alta precisão e eficiência computacional da proposta na resolução do problema de fluxo de potência em microrredes.

- **2021:** É publicado em Molina, Ortega e Muñoz (2021) a biblioteca HELMpy, um pacote de software *open source* criado para apoiar pesquisas acadêmicas relacionadas ao FPHo. Implementado em linguagem Python, o HELMpy é distribuído sob a licença GNU Affero General Public License v3.0 ou posterior e está disponível para download no GitHub sob o link <<https://github.com/HELMpy/HELMpy>>.
- **2022:** No estudo conduzido em Heidarifar, Andrianesis e Caramanis (2022), uma abordagem trifásica do FPHo é publicada para o cálculo do fluxo de potência em redes de distribuição com cargas do tipo ZIP. A eficácia do método é comprovada por meio de experimentos em redes de distribuição reais, onde se observa que a proposta é competitiva em relação aos tradicionais métodos de cálculo de fluxo de potência. Em Sun *et al.* (2022), o FPHo foi aplicado para calcular intervalos utilizando uma abordagem conhecida como Incorporação Holomórfica Multidimensional. Apesar de ter produzido resultados satisfatórios, a determinação dos intervalos depende de problemas de otimização adicionais resolvidos por métodos iterativos, sem explorar a característica recursiva do FPHo. Além disso, o modelo de otimização proposto apresenta um grande impacto no tempo de computação, mesmo considerando o uso de técnicas de processamento paralelo.

O FPHo é utilizado na análise de contingências em Yao, Qiu e Sun (2022). Segundo os autores, a abordagem holomórfica do fluxo de potência garante a convergência teórica, o que é altamente desejável, uma vez que essa metodologia evita a influência de questões numéricas e oferece uma avaliação confiável da segurança dos sistemas elétricos. Testes computacionais permitem comprovar as vantagens do método proposto em termos de robustez e eficiência.

A Tabela 1 apresenta um breve resumo das principais características dos estudos descritos nesta seção.

Tabela 1 – Principais referências sobre o fluxo de potência holomórfico.

Referência	Contribuição										
	AAP	OFIH	ACC	AET	OTCA	MBPV	MOCD	CTC	PSOS	TAC	
Trias (2012)	✓										
Subramanian, Feng e Tylavsky (2013)						✓					
Subramanian (2014)					✓	✓		✓			
Feng (2015)		✓				✓					
Li (2015)		✓						✓			
Rao <i>et al.</i> (2015)		✓				✓					
Trias e Marín (2016)			✓				✓				
Basiri-Kejani e Gholipour (2017)							✓				
Liu <i>et al.</i> (2017)				✓	✓	✓					
Wang, Liu e Sun (2018)		✓		✓		✓					
Freitas <i>et al.</i> (2019)					✓			✓		✓	
Heidarifar, Andrianesis e Caramanis (2019)		✓								✓	
Liu <i>et al.</i> (2019)				✓			✓				
Chen, Wang e Xu (2020)		✓		✓							
Singh e Tiwari (2020)				✓			✓				
Sur <i>et al.</i> (2020)		✓									
Molina, Ortega e Muñoz (2021)									✓		
Heidarifar, Andrianesis e Caramanis (2022)		✓					✓				
Sun <i>et al.</i> (2022)		✓									
Yao, Qiu e Sun (2022)				✓							

Legenda:

AAP: Aplicação da Aproximação de Padé

OFIH: Outra Formulação de Incorporação Holomórfica

ACC: Abordagem de Corrente Contínua

AET: Análise de Estabilidade de Tensão

OTCA: Outra Técnica de Continuação Analítica

MBPV: Modelagem de Barras PV

MOCD: Modelagem de Outras Cargas ou Dispositivos

CTC: Comparação de Custo Computacional

PSOS: Pacote de Software Open Source

TAC: Técnica para Acelerar Convergência.

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

2.3 FLUXO DE POTÊNCIA INTERVALAR

Embora o FPI seja uma técnica relativamente recente, vários autores abordam o assunto em suas pesquisas. A seguir, são destacados os principais trabalhos que contribuíram para a criação e evolução da técnica:

- **1992:** Em Wang e Alvarado (1992) é publicado, pela primeira vez, um método para análise de fluxo de potência que considera as imprecisões relacionadas às cargas, gerações e parâmetros elétricos dos sistemas de potência. Por meio da aplicação da aritmética de Moore, os autores conseguiram aprimorar a precisão do cálculo do fluxo de potência, fornecendo-lhe limites rigorosos para sua solução. Simulações computacionais conduzidas evidenciam que a proposta é computacionalmente superior ao método de MC e, em alguns casos, comparável com o FPP.
- **2002:** A Aritmética Intervalar (AI) é aplicada à análise de fluxo de potência em sistemas de distribuição balanceados em Das (2002). Utilizando incertezas nos parâmetros de carga, a AI é utilizada pelos autores para fornecer limites estritos para a solução do FPI. Resultados de simulações conduzidas em sistemas-teste do IEEE são comparados com aqueles obtidos por métodos clássicos.
- **2006:** Em Chaturvedi, Prasad e Ranjan (2006) é apresentada uma abordagem intervalar para o problema de fluxo de potência para sistemas radiais desbalanceados. No artigo, os autores utilizam a AI fundamentada em distribuição probabilística para incorporar incertezas nos dados de demanda. Os resultados intervalares evidenciam que a abordagem proposta consegue lidar com incertezas na carga e de produzir limites superiores e inferiores para os valores de tensão e corrente em diferentes partes do sistema de distribuição.
- **2010:** Uma abordagem utilizando a AA em coordenadas polares, a qual independe do nível e do tipo de incerteza presente nos dados do sistema elétrico, é proposta em Vaccaro, Canizares e Villacci (2010). A aplicação da técnica ao problema de fluxo de potência é explicada em detalhes, sendo os resultados numéricos apresentados e discutidos, demonstrando a eficácia da metodologia proposta, especialmente em comparação com as diversas técnicas pautadas em AI propostas anteriormente.
- **2011:** Em Pereira (2011) são modeladas e implementadas as metodologias de FPI nas versões polar, retangular e injeção de correntes. A dissertação faz um estudo abrangente dessas técnicas e realiza um estudo comparativo utilizando sistemas-teste conhecidos da literatura. Os resultados encontrados são validados e comparados com aqueles obtidos pela abordagem de MC. Entretanto, o cálculo de algumas grandezas dependentes funcionais, como a potência reativa, ainda requer desenvolvimentos no sentido de evitar a superestimação intervalar.

- **2012:** Uma nova metodologia para lidar com incertezas em sistemas elétricos é publicada em Pereira, Costa e Rosa (2012). Na proposta, a AI é incorporada à formulação do fluxo de potência por injeção de correntes e as equações não lineares referentes às EBPs são resolvidas utilizando o operador Krawczyk. A técnica é implementada em MATLAB e os resultados são comparados com aqueles obtidos pelo método de MC.
- **2014:** É abordada em Pereira e Costa (2014) uma metodologia para análise intervalar aplicada ao PMC de sistemas elétricos sujeitos a incertezas nos dados de demanda. O sistema de equações não lineares intervalares resultante é resolvido utilizando o operador Krawczyk e a metodologia proposta é implementada no ambiente MATLAB. Os resultados são comparados e validados utilizando a abordagem de MC.
- **2015:** Em Pereira (2015) são incorporados ao problema do FPI o controle de geração de reativos em barras PV, o limite de tensão em barras PV e o limite de tensão em barras PQ nos vários pontos de operação do sistema, incluindo o PMC. O método de MC é utilizado para validar os resultados e demonstra que a metodologia proposta é uma ferramenta adicional aos estudos de fluxo de potência em sistemas com incertezas nos dados de carga e de linha.

Um modelo intervalar do fluxo de potência de varredura trifásico desequilibrado, utilizando aritmética complexa afim, é publicado em Wang, Han e Wu (2015). A metodologia é aplicada a sistemas-teste conhecidos da literatura e seus resultados superam a abordagem de MC em termos de eficiência computacional.

- **2016:** Um método para calcular soluções intervalares para o problema de fluxo de potência no PMC de sistemas elétricos é apresentado em Pereira e Costa (2016). A metodologia implementada estima as soluções intervalares do fluxo de potência com base nas informações prévias da solução do fluxo de potência convencional, o que reduz o tempo de computação do método. Uma abordagem de programação matemática para otimizar a seleção de variáveis também é apresentada. Simulações conduzidas demonstram a eficiência e precisão da técnica em comparação com o método de MC.
- **2017:** Um método inovador para análise intervalar de fluxo de potência em sistemas elétricos sujeitos a incertezas é proposto em Liao *et al.* (2017). A função de inclusão de Taylor é utilizada pelos autores para aproximar as EBPs expressas em coordenadas retangulares, para se construir um intervalo que contemple todas as possíveis soluções do fluxo de potência. Para validação da metodologia, sistemas-teste são analisados e os resultados são comparados com aqueles gerados pela AI e pelo método de MC.

Em Zhang *et al.* (2017) é publicado um método misto para análise de FPI em coordenadas polares e retangulares fundamentado em AA. Para validação, simulações

computacionais são conduzidas em sistemas-teste do IEEE e seus resultados são comparados com aqueles gerados pela AA polar apresentados em Vaccaro, Canizares e Villacci (2010) e com aqueles obtidos pela abordagem de MC.

- **2018:** Duas estratégias para calcular o problema de FPI sujeito às incertezas nos parâmetros das linhas de transmissão e das cargas são propostas em Medeiros (2018). O primeiro método fundamenta-se na técnica de montagem direta da matriz impedância de barras sem a necessidade de recorrer à inversão da matriz admitância. O segundo método, embasado no Teorema da Compensação, é utilizado na análise de sensibilidade. Os algoritmos desenvolvidos são testados considerando diferentes casos de incerteza e seus resultados apresentam desempenho satisfatório.

Em Souza (2018) é desenvolvido um modelo de FPI em coordenadas polares, com base na utilização da expansão da série de Taylor até a segunda ordem. O modelo proposto utiliza as matrizes Jacobiana e Hessiana para modelar as incertezas referentes às potências ativa e reativas demandadas em cada barra do sistema. Simulações conduzidas permitem comprovar a robustez e eficiência da técnica em comparação com o FPI em coordenadas retangulares e com as simulações de MC.

- **2021:** Um método analítico fundamentado em *clustering* para o cálculo híbrido do FPP e do FPI é publicado em Wang *et al.* (2021). As incertezas das demandas de carga e saídas de energia eólica são tratadas como variáveis aleatórias e intervalares, respectivamente. Para validar a precisão e eficiência do método, simulações são conduzidas e seus resultados são comparados com os obtidos pelo método de MC de dupla camada. Resultados das simulações indicam que as estimativas das variáveis de saída podem ser conservadoras sem considerar as correlações das variáveis intervalares.
- **2022:** Em Junior, Melo e Nepomuceno (2022) é apresentada uma nova metodologia para o cálculo do FPI em redes de distribuição trifásicas desbalanceadas, fundamentada no método da injeção de correntes trifásico. Nessa abordagem, as potências ativa e reativa em cada barra de carga são modeladas como valores intervalares para representar suas incertezas inerentes e o operador Krawczyk é aplicado nas EBPs para fornecer resultados trifásicos intervalares confiáveis. Para superar problemas de superestimação associados às soluções intervalares, são propostas o uso de extensões intervalares e uma técnica de rotação angular. Simulações computacionais validam a metodologia proposta e os resultados demonstram semelhanças com os resultados obtidos a partir da AA e da abordagem de MC.

Uma nova metodologia para análise harmônica intervalar é publicada em Melo e Mingorância (2022). A técnica proposta utiliza o método da injeção de correntes trifásico para determinar as tensões harmônicas em uma rede de distribuição a partir do método de NR. Com base na matriz Jacobiana determinística, o operador

Krawczyk é aplicado para calcular os resultados dos intervalos, possibilitando a obtenção de limites superiores e inferiores das magnitudes das tensões harmônicas e da distorção harmônica total em cada barra do sistema. Simulações são conduzidas em um sistema-teste radial e os resultados obtidos são comparados e validados a partir do método de MC.

- **2023:** Uma nova metodologia para análise intervalar em sistemas de distribuição multifásicos, baseada no método da injeção de correntes trifásico, é proposta em Junior (2023). Simulações conduzidas em sistemas-teste trifásicos desequilibrados, com presença do condutor neutro, demonstram que as soluções intervalares obtidas são eficientes em termos de esforço computacional e compatíveis com as simulações de MC.

Em Souza (2023) é proposto um método para o cálculo do fluxo de potência intervalar em microrredes, que considera distorções harmônicas e incertezas nos valores de carga e geração. A autora utiliza a expansão de Taylor até a segunda ordem, juntamente com as derivadas das EBPs em relação a um parâmetro de incerteza percentual, para avaliar o impacto dos dados incertos nas soluções factíveis do fluxo de potência. São utilizados dois sistemas-teste para as simulações e os resultados obtidos demonstram a eficácia da metodologia, a qual é validada utilizando a abordagem de MC.

Um breve resumo dos principais métodos aplicados na modelagem intervalar do fluxo de potência e das abordagens comumente utilizadas para mitigar a superestimação intervalar em estudos relacionados ao FPI é apresentado na Tabela 2.

2.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, foram exploradas uma variedade de fontes e recursos bibliográficos relacionados ao FPHo e ao FPI. Ao realizar esse mapeamento, pôde-se identificar as obras e pesquisadores fundamentais que contribuíram para a construção do arcabouço teórico desta pesquisa.

No capítulo seguinte, tópicos relacionados ao fluxo de potência são explorados, bem como as limitações inerentes aos métodos determinísticos comumente utilizados na sua modelagem.

Tabela 2 – Principais referências sobre o fluxo de potência intervalar.

Referência	Método					Abordagem				
	NR	MCU	FPC	VAR	TC	AA	AI	OK	ST	RA
Wang e Alvarado (1992)	✓						✓	✓		
Das (2002)				✓			✓			
Chaturvedi, Prasad e Ranjan (2006)				✓			✓			
Vaccaro, Canizares e Villacci (2010)	✓					✓				
Pereira (2011)	✓						✓	✓		
Pereira, Costa e Rosa (2012)	✓						✓	✓		
Pereira e Costa (2014)	✓						✓	✓		
Pereira (2015)	✓						✓	✓		
Wang, Han e Wu (2015)				✓		✓				
Pereira e Costa (2016)			✓					✓		
Liao <i>et al.</i> (2017)	✓								✓	
Zhang <i>et al.</i> (2017)	✓					✓				
Medeiros (2018)					✓					
Souza (2018)	✓								✓	
Wang <i>et al.</i> (2021)		✓								
Junior, Melo e Nepomuceno (2022)	✓							✓		✓
Melo e Mingorança (2022)	✓							✓		
Junior (2023)	✓						✓	✓		
Souza (2023)	✓								✓	

Legenda:

NR: Newton-Raphson

MCU: Método Cumulante

FPC: Fluxo de Potência Continuado

VAR: Varredura

TC: Teorema da Compensação

AA: Aritmética Afim

AI: Aritmética Intervalar

OK: Operador Krawczyk

ST: Série de Taylor

RA: Rotação Angular.

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Este capítulo investiga o conceito de fluxo de potência, analisando duas abordagens fundamentais para sua modelagem determinística: o método de NR e o FPHo. Adicionalmente, destaca-se a imperatividade de superar as limitações intrínsecas aos métodos determinísticos iterativos comumente utilizados na modelagem do fluxo de potência. No âmbito dessas considerações, uma análise aprofundada será conduzida sobre três das principais técnicas utilizadas para lidar com as incertezas associadas aos dados de carga e geração das redes elétricas. Essa exploração minuciosa estabelecerá uma base sólida para investigações subseqüentes, visando aprimorar a compreensão e eficácia na modelagem intervalar do fluxo de potência.

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Muitos problemas em engenharia e ciência envolvem situações que são determinísticas e aleatórias. Nos sistemas de potência, a incerteza assume uma dimensão crítica devido aos seus impactos na qualidade de energia, segurança, planejamento, operação e economia do fornecimento elétrico (Souza, 2023). Ao considerar perturbações de natureza aleatória, como falhas no sistema e variações na demanda e na geração de energia elétrica, o cálculo do fluxo de potência torna-se uma ferramenta indispensável para avaliar e otimizar a operação desses sistemas em condições diversas, além de aprimorar sua segurança, eficiência e confiabilidade diante das incertezas inerentes.

3.2 FLUXO DE POTÊNCIA

A análise do fluxo de potência é uma das principais ferramentas no estudo e análise de sistemas elétricos. Seus cálculos visam obter o estado operativo da rede elétrica dada uma condição de carga e geração, permitindo que sejam identificados os caminhos percorridos pelas potências ativa e reativa, bem como os fasores de tensão em todas as barras do sistema (Monticelli, 1983; Zanetta, 2006; Melo, 2023).

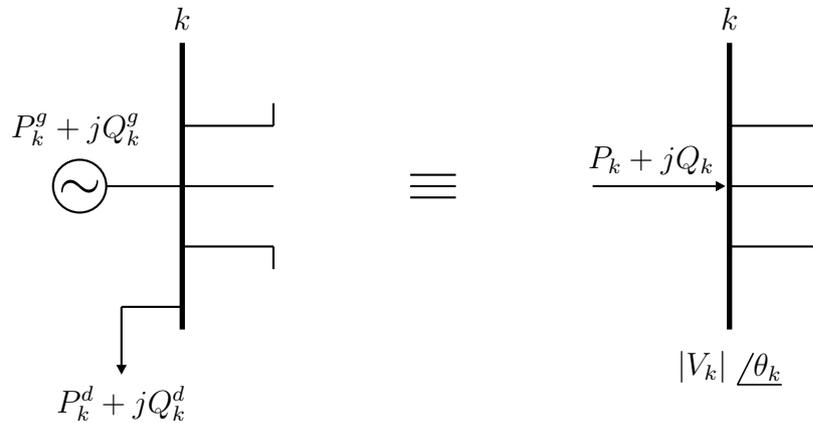
A modelagem clássica do fluxo de potência assume um comportamento estático para a rede elétrica em estudo, tal que variações de demanda, tensão e corrente são suficientemente lentas para que se possam ignorar seus efeitos transitórios. Nessa premissa, a partir de um sistema de equações e inequações algébricas não lineares que correspondem, respectivamente, às leis de Kirchhoff e a um conjunto de restrições operacionais do sistema elétrico, são praticadas as análises de fluxo de potência (Monticelli; Garcia, 2011).

Nas análises realizadas, é frequente a aplicação de métodos determinísticos que implicam o cálculo de variáveis com valores fixos para um perfil de carga e geração particular. Apesar da ampla utilização prática desses métodos, é crucial ressaltar que eles

têm suas limitações quando se trata de modelar as incertezas e variações nos perfis de carga e geração nos sistemas elétricos.

As equações algébricas que regem o fluxo de potência são obtidas por meio da aplicação do princípio de conservação de energia em cada barra do sistema. Isso implica em dizer que a potência líquida (geração menos demanda) injetada em cada barra do sistema deve ser igual à soma das potências ativa e reativa que fluem pelos componentes da rede elétrica que possuem essa barra como um de seus terminais. Isso é ilustrado na Figura 1, onde P_k representa a potência ativa líquida injetada na barra k , Q_k a potência reativa líquida injetada, P_k^g a potência ativa gerada, P_k^d a potência ativa demandada, Q_k^g a potência reativa gerada, Q_k^d a potência reativa demandada, $|V_k|$ a magnitude da tensão nodal e θ_k o ângulo da tensão nodal (Monticelli; Garcia, 2011; Melo, 2023).

Figura 1 – Potência líquida em uma barra.



Fonte: Adaptada de Pontes (2018).

De modo geral, as EBPs estabelecem uma relação transcendental não linear entre valores de potência e tensão no domínio complexo. Nesse contexto, o problema de fluxo de potência pode ser escrito em termos do balanço de corrente em cada barra do sistema, conforme descrito na Equação (3.1), em que Y_{km} representa os elementos complexos da matriz de admitância nodal e S_k as injeções de potência complexa constante entrando no barramento. Note que K abrange todas as barras do sistema diretamente conectadas ao barramento k , incluindo a própria barra k (Monticelli; Garcia, 2011; Melo, 2023).

$$\sum_{m \in K} Y_{km} V_m = \frac{S_k^*}{V_k^*} = \frac{(P_k + jQ_k)^*}{V_k^*} \quad (3.1)$$

Em sua forma mais básica, o problema de fluxo de potência consiste em resolver (3.1) para as tensões V_k (para todo k , exceto o da barra de referência), para um dado conjunto de injeções S_k . Entretanto, a modelagem do fluxo de potência também inclui um conjunto de inequações que se origina, entre outros fatores, dos limites nas injeções de

potência reativa das barras PV e das restrições nas magnitudes das tensões nodais das barras PQ, conforme descrito nas Equações (3.2) e (3.3) (Monticelli; Garcia, 2011).

$$Q_k^{min} \leq Q_k \leq Q_k^{max} \quad (3.2)$$

$$|V_k^{min}| \leq |V_k| \leq |V_k^{max}| \quad (3.3)$$

Dentre as diversas abordagens possíveis para solucionar as EBPs, o método de NR emergiu como a escolha mais amplamente aceita pela comunidade científica em virtude de sua robustez numérica e facilidade de convergência em poucas iterações (Wood; Wollenberg; Sheblé, 2013; Rodrigues; Melo; Lima, 2023).

3.2.1 Fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson

Concebido no final da década de 1960, o método de NR geralmente exhibe uma notável convergência quadrática em cenários bem condicionados. Contudo, em contextos mais desafiadores, a metodologia pode não convergir para uma solução factível ou até mesmo revelar múltiplas soluções (Thorp; Naqavi; Chiang, 1989; Melo, 2023).

3.2.1.1 Formulação Clássica

Sabendo que as equações algébricas que regem o fluxo de potência estabelecem uma relação entre potências e tensões, as potências ativa e reativa calculadas em uma barra k podem ser determinadas com base nas Equações (3.4) e (3.5), respectivamente, sendo K o conjunto de barras ligadas diretamente à barra k , incluindo a própria, e G_{km} e B_{km} a parte real e a parte imaginária do elemento km da matriz de admitância nodal, respectivamente (Melo, 2023). As variáveis em negrito designam vetores relativos a todas as barras do sistema de potência.

$$P_k^{cal}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}) = |V_k| \sum_{m \in K} |V_m| (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.4)$$

$$Q_k^{cal}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}) = |V_k| \sum_{m \in K} |V_m| (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.5)$$

Nesse contexto, a formulação clássica do algoritmo consiste em solucionar iterativamente o sistema matricial apresentado na Equação (3.6), sendo $\Delta \mathbf{P}$ e $\Delta \mathbf{Q}$ os resíduos de potência ativa e reativa calculados a partir das Equações (3.7) e (3.8) (Melo, 2023).

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix}}_{\text{Jacobiana}} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\Delta P_k = P_k^{cal}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}) - P_k^{esp} \quad (3.7)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{cal}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\theta}) - Q_k^{esp} \quad (3.8)$$

Para que o fluxo de potência obtenha a solução, a diferença entre os valores calculados e os valores especificados (geração menos demanda) deve ser minimizada de forma iterativa pelo método. Dessa forma, a atualização das variáveis de estado é obtida a cada iteração h com base na Equação (3.9). O processo é repetido até que a diferença nos resíduos de potência calculados entre duas iterações consecutivas seja menor que um limiar ξ , geralmente definido como 10^{-6} p.u. (Melo, 2023).

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^{h+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^h + \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix}^h \quad (3.9)$$

3.2.1.2 Análise Fractal das Múltiplas Soluções

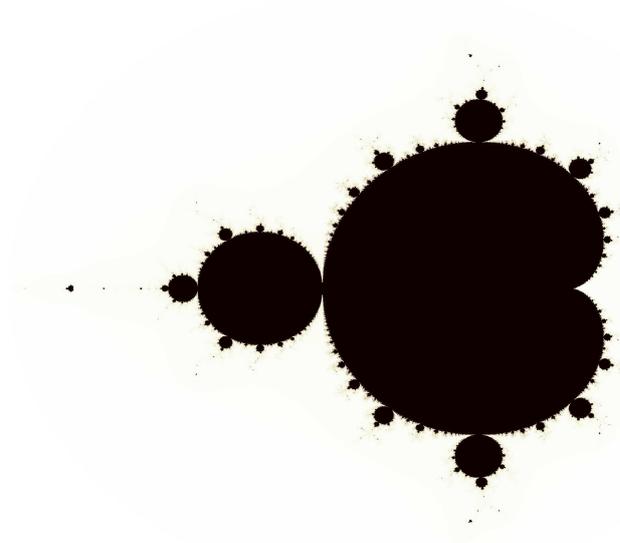
As múltiplas soluções do fluxo de potência estão associadas à inicialização das variáveis do problema. Para sistemas com bom condicionamento numérico, ao inicializar as variáveis calculadas com magnitudes de tensão de 1 p.u. e ângulos nulos, a tendência é encontrar uma solução estável. No entanto, ao utilizar valores iniciais diferentes para as variáveis de estado, outras soluções possíveis podem ser encontradas (Thorp; Naqavi; Chiang, 1989).

Quando metodologias iterativas são empregadas na resolução de funções complexas, como no caso das EBPs, as bacias de atração das múltiplas soluções exibem um comportamento fractal (Thorp; Naqavi; Chiang, 1989; Rodrigues; Melo; Lima, 2023). Nesse contexto, o termo fractal (do latim *fractus*) se refere a qualquer figura geométrica complexa que exibe autossimilaridade em diferentes escalas. É importante ressaltar que a geometria fractal desafia as concepções tradicionais de dimensões, uma vez que pode possuir uma dimensão fractal que não é um número inteiro. O exemplo mais notório da geometria fractal, o Conjunto de Mandelbrot, é ilustrado na Figura 2 e possui uma dimensão fractal de valor 1,7 (Rodrigues; Melo; Lima, 2023; Melo, 2023).

Quando as múltiplas soluções do fluxo de potência são representadas em um gráfico bidimensional, é possível identificar figuras com padrões repetitivos e autossimilares. A caracterização dessa multiplicidade de soluções pode ser realizada por meio da análise tanto do número de iterações necessárias para o método de NR encontrar a solução do fluxo de potência quanto dos autovalores da matriz Jacobiana (Deng; Chiang, 2013).

Nesse contexto, a seguinte classificação pode ser realizada para as soluções do fluxo de potência calculado por meio do método de NR (Rodrigues; Melo; Lima, 2023):

Figura 2 – Conjunto de Mandelbrot.

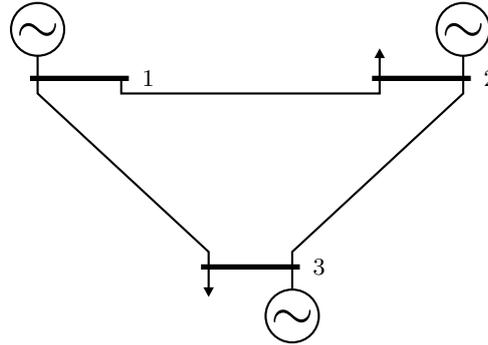


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

- **Solução instável do tipo I:** esta solução está localizada na região instável da curva PV e é caracterizada pela presença de um autovalor com parte real negativa na matriz Jacobiana;
- **Solução instável do tipo II:** também encontrada na região instável da curva PV, essa solução possui dois ou mais autovalores com parte real negativa na matriz Jacobiana;
- **Solução espúria:** trata-se de uma situação na qual o fluxo de potência diverge e não conduz a uma solução factível;
- **Solução estável:** refere-se a uma situação em que o fluxo de potência converge, sendo complementar aos casos anteriores.

Para ilustrar esse conceito, considere o sistema representado na Figura 3, cujos dados de barra e de linha são detalhados nas Tabelas 3 e 4. No sistema em questão, composto por uma barra $V\theta$ e duas barras PV, a necessidade de cálculo se resume a duas variáveis pelo fluxo de potência convencional: os ângulos de tensão nas duas barras PV (θ_2 e θ_3). Busca-se, portanto, verificar se o cálculo dessas variáveis é sensível à inicialização, o que pode resultar na identificação de múltiplas soluções para o fluxo de potência. Essas soluções serão posteriormente analisadas do ponto de vista do domínio fractal, tanto com o sistema operando com carga nominal, quanto com a carga localizada próxima ao PMC.

Figura 3 – Diagrama unifilar do sistema 3 barras.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 3 – Dados de barra do sistema 3 barras.

Barra	Tipo	P_d (p.u.)	Q_d (p.u.)	P_g (p.u.)	Q_g (p.u.)	$ V_k^{esp} $ (p.u.)	θ ($^\circ$)
1	V θ					1	0
2	PV	0,240	0,120	0,040	0,023	1	
3	PV	0,240	0,120	0,040	0,023	1	

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 4 – Dados de linha do sistema 3 barras.

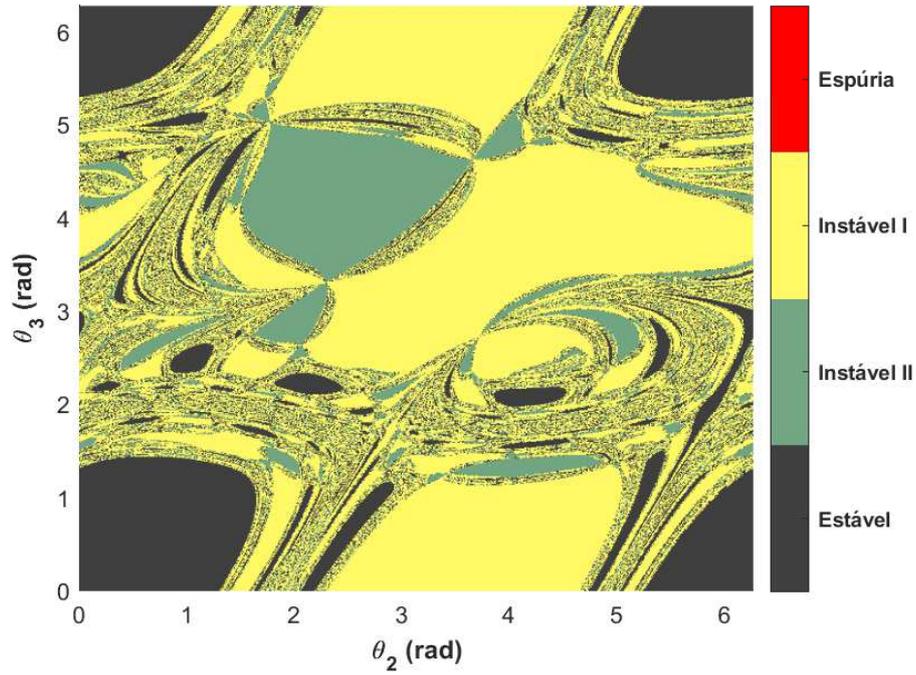
De	Para	R (p.u.)	X (p.u.)	B^{sh} (p.u.)
1	2	0,0194	0,0592	0,0052
1	3	0,0540	0,2230	0,0049
2	3	0,0470	0,1980	0,0044

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Na Figura 4, o mapa fractal é apresentado para a carga nominal, variando as condições iniciais de θ_2 e θ_3 de zero até 2π em incrementos de 0,01 radianos. É possível identificar pelo menos três tipos distintos de soluções a partir de diferentes inicializações. Nessa figura, 26,70% das estimativas iniciais resultam na convergência do fluxo de potência para um ponto de equilíbrio estável (em cinza-escuro), enquanto 73,16% convergem para uma região instável na curva PV, sendo 57,06% do Tipo I (em amarelo) e 16,10% do Tipo II (em cinza-claro). Apenas 0,14% das estimativas iniciais não levam à convergência do fluxo de potência, o que é indicado por pontos dispersos em vermelho.

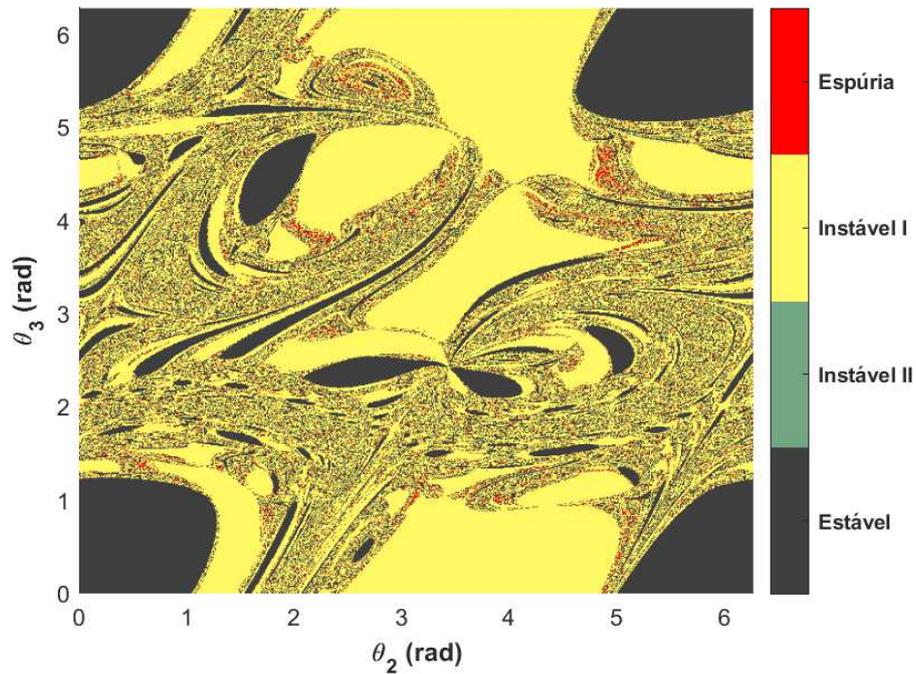
Já na Figura 5, o mapa fractal é apresentado para a carga nominal multiplicada por 25. É notável que apenas dois tipos de soluções são identificados: 36,50% das estimativas iniciais convergem para soluções estáveis (em cinza-escuro) e 60,55% para soluções instáveis do Tipo I (em amarelo).

Figura 4 – Mapa fractal para o sistema 3 barras considerando carga nominal.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 5 – Mapa fractal para o sistema 3 barras considerando carga próxima ao ponto de máximo carregamento.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

O resultado apresentado pelo fractal da Figura 5 é consistente com a teoria das múltiplas soluções descrita em Tamura, Mori e Iwamoto (1983), a qual estabelece que nas proximidades do PMC a quantidade de soluções do fluxo de potência é reduzida a duas. Nessa condição de carga, os pontos em vermelho, onde o fluxo de potência não convergiu, tornam-se mais visíveis e representam 2,95% das estimativas, e as soluções do Tipo II são zeradas.

A demonstração desses resultados enfatiza uma das inúmeras fragilidades inerentes aos métodos iterativos. É evidente que a dependência de estimativas iniciais imprecisas e as potenciais limitações na convergência podem comprometer a eficácia dessas abordagens. Nesse contexto, a proposta de um método direto, não iterativo e independente de estimativas iniciais, como o FPHo proposto em Trias (2012), surge como uma resposta promissora para superar esses desafios.

3.2.2 Fluxo de potência holomórfico

O FPHo, concebido por Antônio Trias, inova ao introduzir o parâmetro complexo γ nas EBPs, transformando todas as tensões e a potência reativa das barras PV em funções holomorfas. Essa metodologia se destaca por ser recursiva, direta, não iterativa e independente de estimativas iniciais, diferenciando-se, assim, dos tradicionais solucionadores de fluxo de potência usados nos centros de controle dos sistemas elétricos modernos (Trias, 2012; Melo, 2023).

De acordo com Trias (2018), a característica holomórfica do método assegura resultados inequívocos: o FPHo encontrará uma solução física para o fluxo de potência se ela existir, ou indicará sua inexistência. Nesse contexto, é importante destacar que uma função holomorfa é aquela diferenciável em todos os pontos do seu domínio, garantindo analiticidade devido à diferenciabilidade na análise complexa e a possibilidade de expansão em séries de MacLaurin (Silva, 2018).

No âmbito dessa metodologia, uma solução de referência, conhecida na literatura como solução germinal, é definida para $\gamma = 0$, possibilitando que os coeficientes das séries de MacLaurin sejam calculados recursivamente. A solução final é então obtida considerando $\gamma = 1$. Para ampliar as séries encontradas ao máximo em seu domínio, recorre-se à aproximação de Padé. Essa técnica, além de possibilitar a máxima continuação analítica de uma função, requer um número reduzido de termos da série de MacLaurin para convergência (Trias, 2018).

3.2.2.1 Incorporação Holomórfica

Dependendo das incógnitas e dos valores conhecidos em cada tipo de barra do sistema, são estabelecidas EBPs tradicionais distintas. Nesse contexto, é apresentada a EBP intrínseca a cada tipo de barra, seguida da sua incorporação holomórfica em relação

ao parâmetro complexo γ . É fundamental destacar que existem várias abordagens para a incorporação da variável γ nas EBPs, todas visando atender às condições mencionadas anteriormente. Cada uma dessas formulações possui propriedades algébricas específicas. A metodologia empregada neste estudo é a mesma desenvolvida em Subramanian (2014) e Trias (2018).

3.2.2.1.1 *Barra de referência*

A tensão da barra de referência ($V\theta$) é um valor conhecido em magnitude e ângulo específico, conforme descrito na Equação (3.10).¹

$$V_k = V_k^{esp}, \quad k \in V\theta \quad (3.10)$$

Realizando a incorporação holomórfica em (3.10), chega-se à Equação (3.11).

$$V_k(\gamma) = 1 + (V_k^{esp} - 1)\gamma, \quad k \in V\theta \quad (3.11)$$

3.2.2.1.2 *Barra de carga*

A EBP representativa das barras de carga (PQ) pode ser escrita conforme apresentado na Equação (3.12), em que S_k^{esp} é a injeção de potência complexa especificada do barramento k .

$$\sum_{m=1}^N Y_{km} V_m = \frac{(S_k^{esp})^*}{V_k^*}, \quad k \in PQ \quad (3.12)$$

Após a inclusão do parâmetro complexo γ , obtém-se a Equação (3.13), onde o termo Y_k^{sh} corresponde ao elemento que modela as admitâncias paralelas à barra k e Y_{km}^{sr} as admitâncias série do ramo km .

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(\gamma) = \frac{\gamma (S_k^{esp})^*}{V_k^*(\gamma^*)} - \gamma Y_k^{sh} V_k(\gamma), \quad k \in PQ \quad (3.13)$$

3.2.2.1.3 *Barra de geração*

Os valores de tensão e potência ativa são grandezas conhecidas nas barras PV. Desse modo, pode-se desmembrar a potência aparente em (3.12), de forma que a EBP das barras PV pode ser representada pela Equação (3.14).

¹ Note que todos os valores de grandezas elétricas a serem descritas nesta subseção são tratados como fasores. Por motivo de clareza e para manter a padronização da nomenclatura e da abreviatura utilizada neste trabalho, o sinal “.” não será utilizado para representar os fasores, como é comumente adotado na literatura específica.

$$\sum_{m=1}^N Y_{km} V_m = \frac{P_k^{esp} - jQ_k}{V_k^*}, \quad k \in \text{PV} \quad (3.14)$$

Incorporando holomorficamente a variável complexa γ na expressão anterior, obtém-se a Equação (3.15).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(\gamma) = \frac{\gamma P_k^{esp} - jQ_k(\gamma)}{V_k^*(\gamma^*)} - \gamma Y_k^{sh} V_k(\gamma), \quad k \in \text{PV} \quad (3.15)$$

É importante observar que o valor da potência reativa é limitada nas barras PV e, portanto, $Q_k(\gamma)$ não pode assumir qualquer valor arbitrário.

Como a magnitude da tensão também é um valor especificado nas barras PV, utiliza-se a expressão holomórfica descrita na Equação (3.16).

$$V_k(\gamma) * V_k^*(\gamma^*) = 1 + (|V_k^{esp}|^2 - 1) \gamma \quad (3.16)$$

Em todas as EBPs, a variável tensão torna-se uma função holomorfa do parâmetro γ , $V_k(\gamma)$, assim como a potência reativa injetada pelo barramento k , $Q_k(\gamma)$, nas barras PV. Além disso, é notável que o termo V_k^* é tratado com incorporação holomórfica como $V_k^*(\gamma^*)$, de forma que o holomorfismo é alcançado satisfazendo, ainda, as equações de Cauchy Riemann (Trias, 2012; Trias; Marín, 2016). Nesse contexto, o Quadro 1 contém, resumidamente, as EBPs tradicionais seguidas de sua forma holomórfica, segundo o tipo de barra.

Quadro 1 – Equações de balanço de potência clássicas e holomórficas segundo o tipo de barra.

Tipo	EBP clássica	EBP holomórfica
V θ	$V_k = V_k^{esp}$	$V_k(\gamma) = 1 + (V_k^{esp} - 1) \gamma$
PQ	$\sum_{m=1}^N Y_{km} V_m = \frac{(S_k^{esp})^*}{V_k^*}$	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(\gamma) = \frac{\gamma (S_k^{esp})^*}{V_k^*(\gamma^*)} - \gamma Y_k^{sh} V_k(\gamma)$
PV	$\sum_{m=1}^N Y_{km} V_m = \frac{P_k^{esp} - jQ_k}{V_k^*}$ $ V_k = V_k^{esp}$	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(\gamma) = \frac{\gamma P_k^{esp} - jQ_k(\gamma)}{V_k^*(\gamma^*)} - \gamma Y_k^{sh} V_k(\gamma)$ $V_k(\gamma) * V_k^*(\gamma^*) = 1 + (V_k^{esp} ^2 - 1) \gamma$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para as equações apresentadas anteriormente, obtém-se uma solução física para o fluxo de potência sem carga, tomando $\gamma = 0$, onde a tensão $1\angle 0^\circ$ é reproduzida em todos os barramentos do sistema de potência. Por sua vez, para $\gamma = 1$, a forma da EBP original correspondente é retomada. Cumprindo essas condições, é garantido que o método encontrará uma solução factível (se a mesma existir, claro!) para o problema de fluxo de potência (Trias, 2012; Subramanian, 2014).

Observa-se nas equações anteriores o inverso da tensão do lado direito dos equacionamentos, razão pela qual é necessário definir por meio da Equação (3.17) uma função que represente o inverso da tensão, facilitando a obtenção dos coeficientes das séries de MacLaurin, como será visto nas seções seguintes.

$$W_k(\gamma) = \frac{1}{V_k(\gamma)} \quad (3.17)$$

3.2.2.2 Solução Germinal

A solução germinal é aquela obtida ao estabelecer um ponto de operação no sistema no qual não há carga, geração ou admitâncias em paralelo. Isso é realizado ao avaliar $\gamma = 0$ nas equações previamente apresentadas, indicando a ausência de corrente circulando no sistema (Trias, 2012; Rodrigues, 2023). Por conseguinte, as EBPs holomórficas para $\gamma = 0$ são descritas conforme apresentado nas Equações (3.18) a (3.21).

$$V_k(0) = 1, \quad k \in V\theta \quad (3.18)$$

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(0) = 0, \quad k \in PQ \quad (3.19)$$

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(0) = \frac{-jQ_k(0)}{V_k^*(0)}, \quad k \in PV \quad (3.20)$$

$$V_k(0) * V_k^*(0) = 1, \quad k \in PV \quad (3.21)$$

Considerando as deduções realizadas anteriormente, obtém-se para as barras do tipo PV a Equação (3.22). Observe que o termo à esquerda de (3.20) é nulo.

$$0 = \frac{-jQ_k(0)}{1} \quad (3.22)$$

Dessa forma, pode-se determinar a solução germinal para cada tipo de barra, conforme descrito nas Equações (3.23) a (3.25).

$$V_k(0) = 1, \quad k \in (V\theta, PQ \text{ e } PV) \quad (3.23)$$

$$W_k(0) = 1, \quad k \in (\mathbf{V}\theta, \text{PQ e PV}) \quad (3.24)$$

$$Q_k(0) = 0, \quad k \in \text{PV} \quad (3.25)$$

3.2.2.3 Expansão em Séries de MacLaurin

Conforme mencionado anteriormente, as funções holomorfas podem ser representadas por meio de séries de MacLaurin, utilizando para sua expansão o parâmetro complexo γ . Como exemplo, tem-se a série apresentada na Equação (3.26), em que $V_k[n]$ denota o coeficiente de ordem n da referida série, de forma que a expansão de $V_k(\gamma)$ pode ser escrita conforme descrito na Equação (3.27).

$$V_k(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} V_k[n]\gamma^n \quad (3.26)$$

$$V_k(\gamma) = V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots + V_k[n]\gamma^n \quad (3.27)$$

É importante observar que, se $\gamma = 0$ é avaliado na expressão anterior, obtém-se $V_k(0) = V_k[0]$. Note que essa igualdade se aplica a qualquer uma das séries de MacLaurin das EBPs holomórficas. Como resultado desse processo, a partir do cálculo da solução germinal, torna-se viável determinar os coeficientes de ordem constante ou zero nas séries de MacLaurin presentes nas equações correspondentes, conduzindo, assim, à obtenção das Equações (3.28) a (3.30).

$$V_k(0) = V_k[0] = 1, \quad k \in (\mathbf{V}\theta, \text{PQ e PV}) \quad (3.28)$$

$$W_k(0) = W_k[0] = 1, \quad k \in (\mathbf{V}\theta, \text{PQ e PV}) \quad (3.29)$$

$$Q_k(0) = Q_k[0] = 0, \quad k \in \text{PV} \quad (3.30)$$

Nesse sentido, para encontrar os coeficientes de ordem maior que zero da série de MacLaurin da função $W_k(\gamma)$, deve-se multiplicar ambos os lados de (3.17) por $V_k(\gamma)$ e expandir a função considerando sua série de MacLaurin. Feito isso, chega-se à expressão descrita na Equação (3.31).

$$(W_k[0] + W_k[1]\gamma + W_k[2]\gamma^2 + \dots) (V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots) = 1 \quad (3.31)$$

Igualando os coeficientes de mesma ordem em ambos os lados de (3.31), obtém-se as relações apresentadas na Equação (3.32).

$$\begin{aligned}
W_k[0]V_k[0] &= 1 \quad \therefore W_k[0] = \frac{1}{V_k[0]} \\
&\vdots \\
W_k[0]V_k[1] + W_k[1]V_k[0] &= 0 \quad \therefore W_k[1] = -\frac{W_k[0]V_k[1]}{V_k[0]} \\
&\vdots \\
W_k[0]V_k[2] + W_k[1]V_k[1] + W_k[2]V_k[0] &= 0 \quad \therefore W_k[2] = -\frac{W_k[0]V_k[2] + W_k[1]V_k[1]}{V_k[0]} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Seguindo essa lógica, uma expressão geral é então obtida para $n > 0$ na Equação (3.33).

$$W_k[n] = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} W_k[m]V_k[n-m]}{V_k[0]} \tag{3.33}$$

De maneira geral, expandindo as EBP's holomórficas em suas séries de MacLaurin e igualando os coeficientes de mesma ordem de γ , são propostas relações de recorrência necessárias para a formulação de expressões que possibilitam o cálculo dos coeficientes de ordem $n > 0$ das referidas séries. Nessa conjuntura, é apresentado a seguir o desenvolvimento para encontrar as expressões gerais necessárias ao cálculo dos termos $n > 0$ de acordo com o tipo de barra.

3.2.2.3.1 *Barra de referência*

Para a barra $V\theta$, tem-se a Equação (3.34).

$$V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots = 1 + (V_k^{esp} - 1)\gamma \tag{3.34}$$

Igualando em ambos os lados de (3.34) os coeficientes de mesma ordem de γ , verifica-se que essa série de MacLaurin é composta apenas pelo coeficiente constante, obtido anteriormente da solução germinal, e pelo coeficiente de primeira ordem. Isso implica que os demais coeficientes de ordens superiores são iguais a zero. Assim sendo, é apresentado na Equação (3.35) a expressão a ser utilizada para obter os coeficientes da série de MacLaurin de ordem maior que zero da barra $V\theta$.

$$V_k[n] = \begin{cases} V_k^{esp} - 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (3.35)$$

3.2.2.3.2 Barra de carga

Expandindo (3.13) por meio de sua série de MacLaurin e substituindo o recíproco da tensão por (3.17), obtém-se a Equação (3.36).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} (V_m[0] + V_m[1]\gamma + V_m[2]\gamma^2 + \dots) = \gamma (S_k^{esp})^* (W_k^*[0] + W_k^*[1]\gamma + W_k^*[2]\gamma^2 + \dots) - \gamma Y_k^{sh} (V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots) \quad (3.36)$$

Igualando os coeficientes de mesma ordem de γ em ambos os lados de (3.36), chega-se à Equação (3.37).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] = (S_k^{esp})^* W_k^*[n-1] - Y_k^{sh} V_k[n-1], \quad k \in \text{PQ} \quad (3.37)$$

Os elementos da matriz Y_{km}^{sr} podem ser expressos como $Y_{km}^{sr} = G_{km} + jB_{km}$ e os coeficientes das séries de tensão podem ser escritos como $V_k[n] = V_k^{re}[n] + jV_k^{im}[n]$. Separando o somatório presente no lado esquerdo de (3.37) em partes real e imaginária, obtém-se a Equação (3.38).

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] &= \sum_{m=1}^N (G_{km} + jB_{km}) (V_m^{re}[n] + jV_m^{im}[n]) \\ &= \sum_{m=1}^N \left((G_{km} V_m^{re}[n] - B_{km} V_m^{im}[n]) + j (B_{km} V_m^{re}[n] + G_{km} V_m^{im}[n]) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.37), é possível escrever a Equação (3.39), um sistema matricial para calcular recursivamente os termos das séries de MacLaurin para as barras do tipo PQ.

$$\begin{bmatrix} G_{k1} & -B_{k1} & \cdots & G_{kk} & -B_{kk} & \cdots & G_{kN} & -B_{kN} \\ B_{k1} & G_{k1} & \cdots & B_{kk} & G_{kk} & \cdots & B_{kN} & G_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ \vdots \\ V_k^{re}[n] \\ V_k^{im}[n] \\ \vdots \\ V_N^{re}[n] \\ V_N^{im}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} re \left((S_k^{esp})^* W_k^*[n-1] - Y_k^{sh} V_k[n-1] \right) \\ im \left((S_k^{esp})^* W_k^*[n-1] - Y_k^{sh} V_k[n-1] \right) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3.2.2.3.3 Barra de geração

Expandindo (3.15) em sua série de MacLaurin e utilizando (3.17) para representar o recíproco da tensão, obtém-se a Equação (3.40).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \left(V_m[0] + V_m[1]\gamma + V_m[2]\gamma^2 + \dots \right) = \left(\gamma P_k^{esp} - j \left(Q_k[0] + Q_k[1]\gamma + Q_k[2]\gamma^2 + \dots \right) \right) \cdot \left(W_k^*[0] + W_k^*[1]\gamma + W_k^*[2]\gamma^2 + \dots \right) - \gamma Y_k^{sh} \left(V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots \right) \quad (3.40)$$

Igualando os coeficientes em ambos os lados de (3.40), encontra-se as relações apresentadas na Equação (3.41).

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[1] &= P_k^{esp} W_k^*[0] - j \left(Q_k[0] W_k^*[1] + Q_k[1] W_k^*[0] \right) - Y_k^{sh} V_k[0] \\ &\vdots \\ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[2] &= P_k^{esp} W_k^*[1] - j \left(Q_k[0] W_k^*[2] + Q_k[1] W_k^*[1] + Q_k[2] W_k^*[0] \right) - Y_k^{sh} V_k[1] \\ &\vdots \\ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] &= P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=0}^n Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \end{aligned} \quad (3.41)$$

No lado direito de (3.41), observa-se a convolução das séries de potência Q_k e W_k , que pode ser expandida conforme apresentado na Equação (3.42).

$$\sum_{m=0}^n Q_k[m] W_k^*[n-m] = Q_k[0] W_k^*[n] + Q_k[1] W_k^*[n-1] + Q_k[2] W_k^*[n-2] + \dots + Q_k[n] W_k^*[0] \quad (3.42)$$

Em (3.42), ao calcular os coeficientes de ordem n da série de MacLaurin, encontra-se o termo $Q_k[n]$ multiplicado por $W_k^*[0]$. Importante notar que $W_k[0] = 1$. De maneira análoga, o termo $W_k^*[n]$ multiplica $Q_k[0]$. Entretanto, é relevante observar que, segundo a solução germinal, $Q_k[0] = 0$, tornando o valor de $W_k^*[n]$ desnecessário.

Reescrevendo (3.41) aplicando as deduções recém-descritas, obtém-se a Equação (3.43).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] = P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] + Q_k[n] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \quad (3.43)$$

Por outro lado, movendo a incógnita $Q_k[n]$ para o lado esquerdo de (3.43), encontra-se uma expressão geral para calcular os coeficientes de ordem n das séries de MacLaurin das barras PV, conforme descrito na Equação (3.44).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] + jQ_k[n] = P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \quad (3.44)$$

Com relação a (3.16), sua série de MacLaurin é desenvolvida conforme apresentado na Equação (3.45).

$$\left(V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots \right) \left(V_k^*[0] + V_k^*[1]\gamma + V_k^*[2]\gamma^2 + \dots \right) = 1 + \left(|V_k^{esp}|^2 - 1 \right) \gamma \quad (3.45)$$

Da mesma forma que os procedimentos anteriores, os termos de mesma ordem de γ em ambos os lados de (3.45) devem ser igualados, conforme relações apresentadas na Equação (3.46).

$$\begin{aligned} V_k[0]V_k^*[0] &= 1 \quad \therefore V_k[0] = 1 \\ &\vdots \\ V_k[0]V_k^*[1] + V_k[1]V_k^*[0] &= |V_k^{esp}|^2 - 1 \quad \therefore V_k^*[1] + V_k[1] = 2V_k^{re}[1] = |V_k^{esp}|^2 - 1 \\ &\vdots \\ V_k[0]V_k^*[2] + V_k[1]V_k^*[1] + V_k[2]V_k^*[0] &= 0 \quad \therefore V_k^*[2] + V_k[2] = 2V_k^{re}[2] = -V_k[1]V_k^*[1] \\ &\vdots \\ V_k[0]V_k^*[3] + V_k[1]V_k^*[2] + V_k[2]V_k^*[1] + V_k[3]V_k^*[0] &= 0 \\ \therefore V_k^*[3] + V_k[3] &= 2V_k^{re}[3] = -(V_k[1]V_k^*[2] + V_k[2]V_k^*[1]) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.46)$$

Assim sendo, a relação de recorrência que permite o cômputo da parte real dos coeficientes n das séries de MacLaurin dos barramentos de geração é descrita na Equação (3.47), em que $V_k^{re}[n]$ representa a parte real dos coeficientes n das séries de MacLaurin relativas à tensão $V_k[n]$.

$$V_k^{re}[n] = \begin{cases} \frac{|V_k^{esp}|^2 - 1}{2}, & \text{se } n = 1 \\ -\frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} V_k[m] V_k^*[n-m] \right) & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (3.47)$$

É importante notar que, para as barras PV, (3.47) fixa a magnitude das tensões por meio da série de MacLaurin. Por outro lado, os coeficientes das séries de MacLaurin

relativos à potência reativa $Q_k(\gamma)$ em (3.15), além de serem incógnitas, só podem ser reais. O mesmo acontece com a parte imaginária dos coeficientes das séries de MacLaurin das barras PV, e com a parte real e imaginária dos coeficientes das séries de MacLaurin das barras PQ, ou seja, são incógnitas de valor real. Portanto, para calcular essas variáveis desconhecidas, é necessário separar os coeficientes dessas séries em parte real e imaginária, bem como os demais elementos que compõem as relações (3.35), (3.37) e (3.44).

Assim como realizado para o barramento PQ, ao substituir (3.38) em (3.43), encontra-se um sistema matricial capaz de calcular recursivamente os termos das séries de MacLaurin para as barras PV, conforme descrito na Equação (3.48).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} G_{k1} & -B_{k1} & \cdots & 0 & -B_{kk} & \cdots & G_{kN} & -B_{kN} \\ B_{k1} & G_{k1} & \cdots & 1 & G_{kk} & \cdots & B_{kN} & G_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ \vdots \\ Q_k[n] \\ V_k^{im}[n] \\ \vdots \\ V_N^{re}[n] \\ V_N^{im}[n] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{kk} \\ B_{kk} \end{bmatrix} [V_k^{re}[n]] \\
 & + \begin{bmatrix} re \left(P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \right) \\ im \left(P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \right) \end{bmatrix} \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

3.2.2.3.4 Representação matricial

A fim de encontrar os coeficientes $n > 0$ das séries de MacLaurin, a literatura propõe a utilização de uma equação matricial recursiva que engloba as expressões (3.35), (3.39), (3.47) e (3.48) (Subramanian, 2014). Descrita nas Equações (3.49) e (3.50), essa expressão é composta por cinco matrizes distintas, conforme discutido a seguir, sendo N o número de barras do sistema de potência e npv a quantidade de barras do tipo PV:

- **YRET**: matriz de dimensão $(2N \times 2N)$, comumente referida como matriz de recursão (Subramanian, 2014; Rao *et al.*, 2015). Deve ser calculada e fatorada apenas uma vez, desde que os tipos de barramentos permaneçam inalterados ao longo do processo recursivo;
- **COEF**: matriz de dimensão $(2N \times 1)$. Formada pelas partes real e imaginária das variáveis de estado do fluxo de potência;
- **COL**: matriz de dimensão $(2N \times npv)$. Cada uma de suas colunas representa as condutâncias e susceptâncias série existentes entre cada uma das N barras do sistema

e cada um dos npv barramentos PV existentes. As posições relacionadas à barra $V\theta$ são zeradas em todas as colunas;

- **VREAL**: matriz de dimensão $(npv \times 1)$. Cada elemento da matriz corresponde à parte real da tensão das npv barras PV;
- **EBPH**: matriz de dimensão $(2N \times 1)$. Composta por variáveis correspondentes às partes real e imaginária das EBPs holomórficas.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{k1} & -B_{k1} & \cdots & 0 & -B_{kk} & \cdots & G_{kN} & -B_{kN} \\ B_{k1} & G_{k1} & \cdots & 1 & G_{kk} & \cdots & B_{kN} & G_{kN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{N1} & -B_{N1} & \cdots & 0 & -B_{Nk} & \cdots & G_{NN} & -B_{NN} \\ B_{N1} & G_{N1} & \cdots & 0 & G_{Nk} & \cdots & B_{NN} & G_{NN} \end{bmatrix}}_{\text{YRET}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ \vdots \\ Q_k[n] \\ V_k^{im}[n] \\ \vdots \\ V_N^{re}[n] \\ V_N^{im}[n] \end{bmatrix}}_{\text{COEF}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_{kk} \\ B_{kk} \\ \vdots \\ G_{Nk} \\ B_{Nk} \end{bmatrix}}_{\text{COL}} \underbrace{\left[V_k^{re}[n] \right]}_{\text{VREAL}}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{cases} V_1^{esp} - 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases} \\ 0 \\ \vdots \\ re \left(P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \right) \\ im \left(P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1] \right) \\ \vdots \\ re \left((S_N^{esp})^* W_N^*[n-1] - Y_N^{sh} V_N[n-1] \right) \\ im \left((S_N^{esp})^* W_N^*[n-1] - Y_N^{sh} V_N[n-1] \right) \end{bmatrix}}_{\text{EBPH}} \quad (3.49)$$

$$V_k^{re}[n] = \begin{cases} \frac{|V_k^{esp}|^2 - 1}{2}, & \text{se } n = 1 \\ -\frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} V_k[m] V_k^*[n-m] \right), & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad (3.50)$$

Como ilustração, tem-se em (3.49) uma expressão matricial de recursão característica de um sistema de N barras, sendo $npv = 1$. A primeira barra do sistema é do tipo $V\theta$ e sua equação de tensão ocupa as linhas em azul; por sua vez, a barra k é do tipo PV

e sua equação ocupa as linhas e colunas em **laranja**. Por fim, a barra N é do tipo PQ e suas equações estão localizadas nas linhas em **magenta**.

É interessante notar que (3.49) representa uma expressão matricial linear do tipo $Cx = D$, em que C é a matriz de recursão invariante ao longo do processo, D é um vetor de valores conhecidos calculado a cada recursão e x é o vetor de coeficientes de ordem n das séries de MacLaurin a ser computado a cada recursão do método.

De forma resumida, são exibidas no Quadro 2 as expressões para obtenção dos coeficientes de ordem $n > 0$ das séries de MacLaurin correspondentes à cada tipo de barra analisada nesta seção.

Quadro 2 – Equacionamentos para determinação dos coeficientes $n > 0$ das séries de MacLaurin segundo o tipo de barra.

Tipo	Equacionamento
V θ	$V_k[n] = \begin{cases} V_k^{esp} - 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases}$
PQ	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] = (S_k^{esp})^* W_k^*[n-1] - Y_k^{sh} V_k[n-1]$
PV	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] + jQ_k[n] = P_k^{esp} W_k^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_k[m] W_k^*[n-m] \right) - Y_k^{sh} V_k[n-1]$ $V_k^{re}[n] = \begin{cases} \frac{ V_k^{esp} ^2 - 1}{2}, & \text{se } n = 1 \\ -\frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} V_k[m] V_k^*[n-m] \right), & \text{se } n > 1 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3.2.2.4 Continuação Analítica

Os valores finais de tensão no ponto de interesse são obtidos avaliando $\gamma = 1$. Entretanto, se o raio de convergência de qualquer uma das séries de MacLaurin for menor que a unidade, a mesma não convergirá para a solução desejada (Trias, 2018). Como solução do problema, técnicas de continuação analítica são utilizadas para estender a região de convergência dessas séries. Para se obter a continuação analítica máxima, é proposto pela literatura o uso da aproximação de Padé, uma função racional que representa uma função holomorfa mais fielmente do que sua própria série de MacLaurin (Subramanian, 2014).

Na metodologia do FPHo, aproximações de Padé são calculadas individualmente para cada tensão holomórfica e considera os coeficientes complexos das séries de MacLaurin. Nesse sentido, considere $V_k(\gamma)$ uma função holomorfa representada por meio de sua série de MacLaurin conforme descrito na Equação (3.51).

$$V_k(\gamma) = V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots + V_k[n]\gamma^n \quad (3.51)$$

A aproximação de Padé dessa função pode ser definida a partir da Equação (3.52), em que L/M , o grau do aproximante de Padé, depende do grau n do polinômio (3.51), conforme descrito na Equação (3.53).

$$V_k(\gamma) \approx [L/M]_{V_k(\gamma)} = \frac{a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \dots + a_L\gamma^L}{b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2 + \dots + b_M\gamma^M} \quad (3.52)$$

$$L/M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.53)$$

Para aplicar esse método, a série de MacLaurin que representa a função holomorfa deve ter um comprimento de $L + M + 1$ termos; além disso, obtém-se uma aproximação mais precisa se for calculada a aproximação diagonal de Padé, encontrada quando se adota $L = M$ (Trias, 2012).

Valendo-se do método direto presente em Baker (1996) para encontrar os coeficientes a e b de (3.52), chega-se à Equação (3.54), onde a série de MacLaurin é truncada para o termo de ordem $L + M$. Pode-se observar que os coeficientes de $V_k[0]$ até $V_k[L + M]$ são conhecidos.

$$V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots + V_k[L + M]\gamma^{L+M} = \frac{a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \dots + a_L\gamma^L}{b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2 + \dots + b_M\gamma^M} \quad (3.54)$$

Em (3.54), um dos coeficientes do polinômio deve ser escolhido como variável livre, uma vez que nessa expressão existem $L + M + 1$ coeficientes conhecidos da série de MacLaurin e $L + M + 2$ incógnitas na função racional. Escolhendo o termo $b_0 = 1$ e multiplicando o denominador da função racional (3.54) pela série de potência de $V_k(\gamma)$, obtém-se a Equação (3.55).

$$\begin{aligned} (b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2 + \dots + b_M\gamma^M) (V_k[0] + V_k[1]\gamma + V_k[2]\gamma^2 + \dots + V_k[L + M]\gamma^{L+M}) \\ = (a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \dots + a_L\gamma^L) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Igualando os coeficientes de γ^{L+1} , γ^{L+2} , ..., γ^{L+3} , chega-se às relações descritas na Equação (3.56).

$$b_M V_k[L - M + 1] + b_{M-1} V_k[L - M + 2] + \dots + V_k[L + 1] = 0$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& b_M V_k[L - M + 2] + b_{M-1} V_k[L - M + 3] + \dots + V_k[L + 2] = 0 \\
& \vdots \\
& b_M V_k[L] + b_{M-1} V_k[L + 1] + \dots + V_k[L + M] = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Portanto, (3.56) torna-se uma expressão matricial linear de M incógnitas para os M coeficientes desconhecidos do polinômio do denominador, conforme apresentado na Equação (3.57).

$$\begin{bmatrix}
V_k[L - M + 1] & V_k[L - M + 2] & \cdots & V_k[L] \\
V_k[L - M + 2] & V_k[L - M + 3] & \cdots & V_k[L + 1] \\
V_k[L - M + 3] & V_k[L - M + 4] & \cdots & V_k[L + 2] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
V_k[L] & V_k[L + 1] & \cdots & V_k[L + M - 1]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_M \\
b_{M-1} \\
b_{M-2} \\
\vdots \\
b_1
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
V_k[L + 1] \\
V_k[L + 2] \\
V_k[L + 3] \\
\vdots \\
V_k[L + M]
\end{bmatrix} \tag{3.57}$$

Os coeficientes do polinômio do numerador são encontrados igualando os coeficientes γ em (3.55), conforme relações apresentadas na Equação (3.58).

$$\begin{aligned}
a_0 &= V_k[0] \\
& \vdots \\
a_1 &= V_k[1] + b_1 V_k[0] \\
& \vdots \\
a_2 &= V_k[2] + b_1 V_k[1] + b_2 V_k[0] \\
& \vdots \\
a_L &= V_k[L] + \sum_{i=1}^{L/M} b_i V_k[L - i]
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Dessa forma, utilizando (3.57) e (3.58), os polinômios do numerador e do denominador em (3.54) podem ser calculados, a fim de avaliar as aproximações de Padé das séries de MacLaurin que representam as funções holomorfas no ponto de interesse, ou seja, em $\gamma = 1$. Dessa forma, o raio de convergência de tais séries é expandido para garantir sua máxima continuação analítica.

É importante destacar que, além do método direto, vários outros algoritmos permitem obter as aproximações de Padé para as séries de MacLaurin, entre os quais se destacam o algoritmo *Wynn Epsilon* (Graves-Morris; Roberts; Salam, 2000) e o método *Viskovatov* (Sun, 2023) – cada um com diferentes propriedades numéricas e diferentes desempenhos.

3.2.2.5 *Convergência e Limites de Potência Reativa*

Para calcular o perfil de tensão do sistema, é realizada a continuação analítica máxima de cada uma das séries de MacLaurin, o que pode ser feito cada vez que se calculam dois coeficientes das séries, visto que são calculadas somente as aproximações diagonais de Padé. Nesse contexto, a convergência do método se dá quando a máxima diferença entre duas tensões calculadas sucessivamente por meio da continuação analítica é menor que uma tolerância ξ especificada, conforme descrito na Equação (3.59) (Subramanian, 2014).

$$\max(|V_k[n]| - |V_k[n - 1]|) \leq \xi \quad (3.59)$$

No que se refere ao controle de injeção de potência reativa, é necessário limitar a operação dos geradores. Nesse sentido, a metodologia de controle de reativos mais comumente utilizada é a de re-especificação dos tipos das barras (Pontes, 2018). Isso envolve fatorar a matriz de recursão e estabelecer uma relação de recorrência para avaliar os coeficientes das séries de MacLaurin considerando a troca do tipo de barramento em cada uma das recursões.

Uma segunda forma de controle de reativos em barras PV pode ser realizada. Inicialmente, assumem-se valores de magnitude da tensão e potência ativa na barra PV. Posteriormente, calcula-se a potência reativa a partir da equação da potência ativa e da magnitude da tensão. O passo seguinte consiste em avaliar o valor da potência reativa calculada: caso não esteja na faixa permitida para a barra PV, ajusta-se a magnitude da tensão e/ou a potência ativa (com pequenos incrementos ou decrementos de tensão) e calcula-se a potência reativa correspondente. Essa dinâmica é repetida até que a potência reativa calculada esteja na faixa permitida (Stott, 1974).

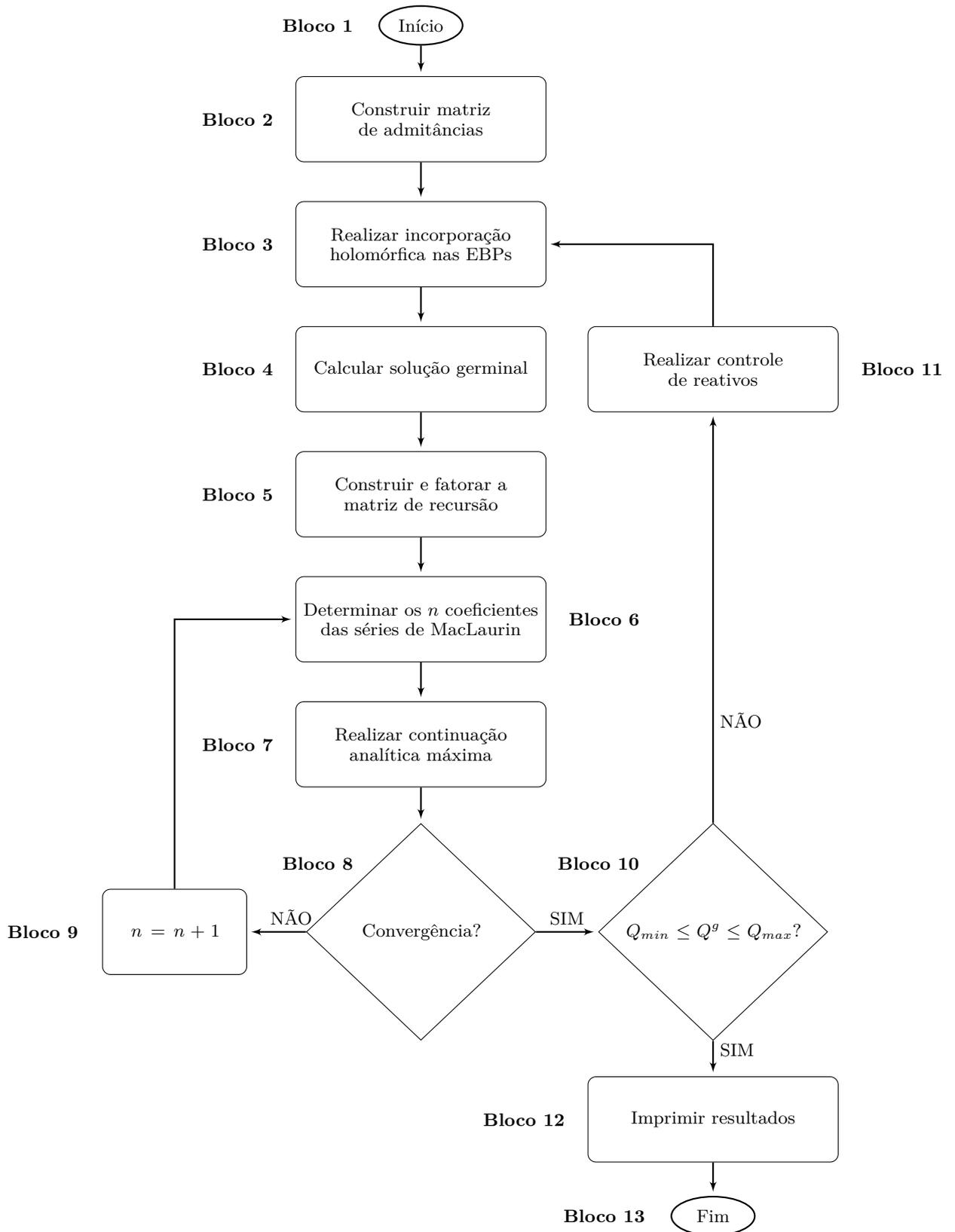
Ao comparar as duas abordagens para o controle de injeção de potência reativa, fica evidente que a segunda opção apresenta um menor custo computacional quando aplicada ao FPHo. Isso ocorre porque, ao contrário da técnica de controle clássica, a segunda abordagem evita que a matriz de recursão do método holomórfico seja alterada e refatorada, uma vez que o tipo dos barramentos não é “alterado diretamente” durante o processo de execução do algoritmo de controle.

3.2.2.6 *Fluxograma*

A Figura 6 apresenta, resumidamente, todas as etapas necessárias ao processo de implementação do FPHo descrito neste capítulo. Para facilitar sua compreensão, o fluxograma foi dividido em blocos, conforme descrito a seguir:

- **Bloco 1:** representa a inicialização do algoritmo para $n = 0$, onde os dados topológicos e elétricos do sistema são carregados;

Figura 6 – Fluxograma para implementação do fluxo de potência holomórfico.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

- **Bloco 2:** nesse bloco, a matriz de admitâncias Y_{km} é calculada e separada em elementos série, Y_{km}^{sr} , e paralelos Y_k^{sh} ;
- **Bloco 3:** o bloco representa a incorporação holomórfica das EBPs, de acordo com (3.12) a (3.16), assumindo a introdução da nova variável complexa γ ;
- **Bloco 4:** assumindo $\gamma = 0$, a solução germinal é determinada para $V_k(0)$, $V_k[0]$, $Q_k(0)$ e $Q_k[0]$;
- **Bloco 5:** representa a construção e fatoração da matriz de recursão segundo o tipo de cada barramento presente no sistema;
- **Bloco 6:** o bloco determina os n -ésimos termos das séries de MacLaurin para cada variável das EBPs, conforme descrito nas equações apresentadas na Figura 2;
- **Bloco 7:** utilizando aproximações de Padé, a continuação analítica máxima é implementada para cada variável calculada no Bloco 6;
- **Bloco 8:** nesse bloco, os resultados obtidos por duas aproximações de Padé consecutivas são comparados. Se a diferença entre eles for menor que um limite, o processo finaliza. Por outro lado, novos procedimentos devem ser adotados;
- **Bloco 9:** o número de termos das séries de MacLaurin é atualizado ($n = n + 1$) se o critério de convergência não for satisfeito, sendo necessário calcular novos termos para cada variável calculada;
- **Bloco 10:** o bloco avalia se os valores de potência reativa gerada das barras PV estão entre limites mínimo e máximo preconizados;
- **Bloco 11:** nesse bloco, a magnitude da tensão da barra PV violada é recalculada como uma barra PQ para manter os limites físicos da unidade geradora;
- **Bloco 12:** o bloco representa a saída das variáveis de estado do fluxo de potência: tensões nodais e potência reativa gerada nas barras PV;
- **Bloco 13:** representa o final do algoritmo quando a solução exata é fornecida.

3.3 MODELAGEM DE INCERTEZAS

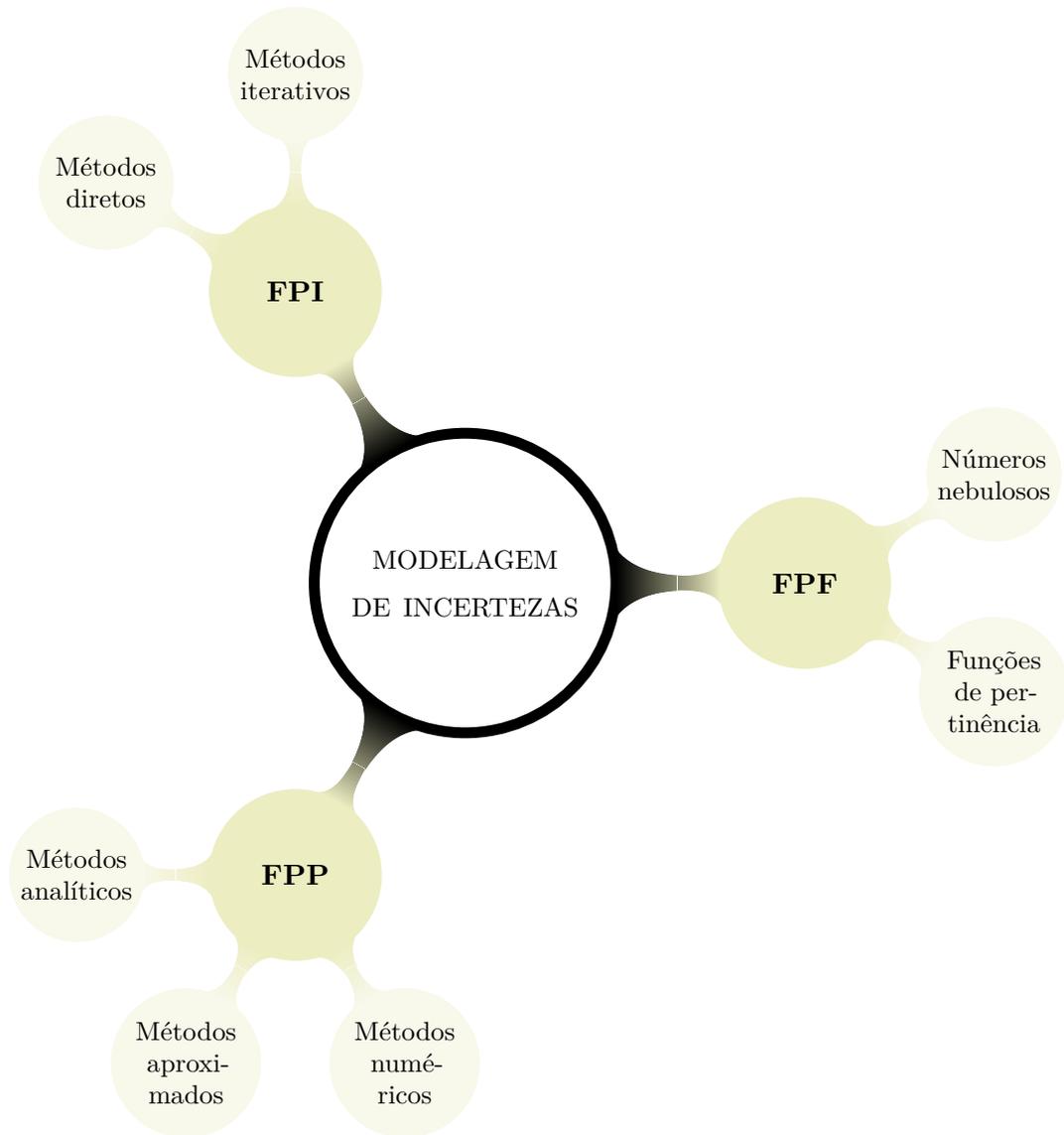
A modelagem tradicional do fluxo de potência pressupõe que a condição de carga seja estabelecida a partir de um ponto de operação determinado por valores fixos de potência ativa e reativa. No entanto, ao analisar a operação dos sistemas de potência, torna-se evidente que os seguintes desafios introduzem incertezas aos seus dados (Barbosa, 2012; Melo, 2023):

- **Imprecisão dos medidores:** como os medidores instalados em campo são passíveis de erros aleatórios, os quais podem afetar diretamente a estimativa dos valores de carga e geração em um dado barramento do sistema de potência, é razoável considerar incertezas de até 5% em um fluxo de potência;
- **Erros de estimação:** a imprecisão nos dados pertinentes à área externa à rede observável resulta em uma notável imprecisão associada aos valores de potências estimadas;
- **Variação de parâmetros elétricos:** as estruturas e equipamentos dos sistemas elétricos são suscetíveis a flutuações nos parâmetros. Um exemplo simples reside nas variações das impedâncias das linhas, que se modificam ao longo do dia em resposta às oscilações de temperatura. Conseqüentemente, torna-se inviável estabelecer uma matriz de admitância nodal que seja constante e uniforme ao longo do tempo;
- **Introdução de fontes com alta variabilidade:** a inclusão de geradores altamente variáveis, como os de fontes eólicas e solares, resulta em consideráveis incertezas nos valores instantâneos líquidos de potência em cada ponto de conexão dos sistemas elétricos;
- **Carência de medição em tempo real:** devido às características singulares do sistema de distribuição, como topologia radial e consideráveis desequilíbrios, os sistemas de média e baixa tensão requerem monitoramento contínuo em tempo real para sua operação eficiente. Todavia, nem todas as concessionárias de energia elétrica conseguem assegurar essa prática constante. Mesmo aquelas que implementam sistemas de medição inteligente, muitas vezes, identificam imprecisões nos dados coletados em intervalos regulares consideravelmente espaçados;
- **Introdução de recursos energéticos distribuídos:** os recursos energéticos distribuídos podem gerar incertezas nos dados de geração e carga devido a vários fatores, principalmente relacionadas à natureza intermitente e descentralizada desses recursos.

Nesse cenário complexo, constata-se que a abordagem determinística do fluxo de potência fornece resultados limitados dos sistemas elétricos. Logo, faz-se necessária a aplicação de metodologias mais eficientes, de forma que os resultados representem mais fidedignamente a realidade desses sistemas (Quintanilha; Costa, 2017; Souza, 2018; Melo, 2023).

Nesse contexto, diversas abordagens são exploradas na literatura para lidar com o desafio do fluxo de potência em situações de incerteza. Essas se dividem principalmente em três categorias, conforme descrito na Figura 7: modelagem probabilística, métodos fundamentados na teoria dos conjuntos *fuzzy* e análise intervalar.

Figura 7 – Estratégias de modelagem de incertezas em sistemas elétricos.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

3.3.1 Fluxo de potência probabilístico

Introduzido em Borkowska (1974), o FPP exige que as variáveis incertas do sistema elétrico sejam representadas a partir de Funções Densidade de Probabilidade (FDPs). Dessa forma, as incertezas associadas às variáveis de entrada (demanda e geração) são refletidas nas variáveis de saída, as quais são solucionadas por meio de métodos probabilísticos.

Do ponto de vista prático, tais métodos podem ser divididos nos seguintes grupos (Prusty; Jena, 2017; Damião, 2019; Martins, 2022):

- **Métodos analíticos:** recorrem a expressões matemáticas linearizadas como variáveis de entrada. Exemplos: Método de Convolução e Método Cumulante;
- **Métodos aproximados:** caracterizam-se pela estimativa de concentrações de maior

valor estatístico. Exemplo: Estimação de Pontos e Método de Taguchi;

- **Métodos numéricos:** caracterizam-se pela avaliação exaustiva do Fluxo de Potência Determinístico (FPD) por meio da utilização de valores pré-determinados das variáveis aleatórias de entrada. Exemplos: Amostragem por Hipercubo Latino e método de MC.

Dentre as metodologias citadas, a abordagem de MC se destaca como a mais amplamente adotada pela comunidade científica. Comumente, ela é empregada como um padrão de referência (*benchmark*) para validar a eficácia de outros métodos estocásticos (Gontijo, 2017).

3.3.1.1 Método de Monte Carlo

Trata-se de um dos métodos mais utilizados para a simulação de incertezas em sistemas elétricos (Damião, 2019). No contexto deste trabalho, o método de MC caracteriza-se pela avaliação exaustiva do FPD, onde os valores aleatórios das variáveis incertas são extraídos de uma FDP e utilizados na estimação de soluções do fluxo de potência.

Nessa premissa, uma variável δ é introduzida nas Equações (3.60) a (3.62) com o propósito de incorporar estocasticidade aos valores de carga e geração presentes em (3.1), onde os sobrescritos d e g denotam potência demandada e gerada, respectivamente. Dessa forma, as potências ativa injetada P_k e reativa injetada Q_k em cada barra k passam a ser multiplicadas por essa variável randômica, a qual pode ser aproximada por uma distribuição normal \mathcal{N} de média 1 e desvio padrão σ , conforme descrito na Equação (3.63).

$$S_k = P_k + jQ_k \quad (3.60)$$

$$P_k = \delta P_k^g - \delta P_k^d \quad (3.61)$$

$$Q_k = \delta Q_k^g - \delta Q_k^d \quad (3.62)$$

$$\delta \approx \mathcal{N}(1, \sigma) \quad (3.63)$$

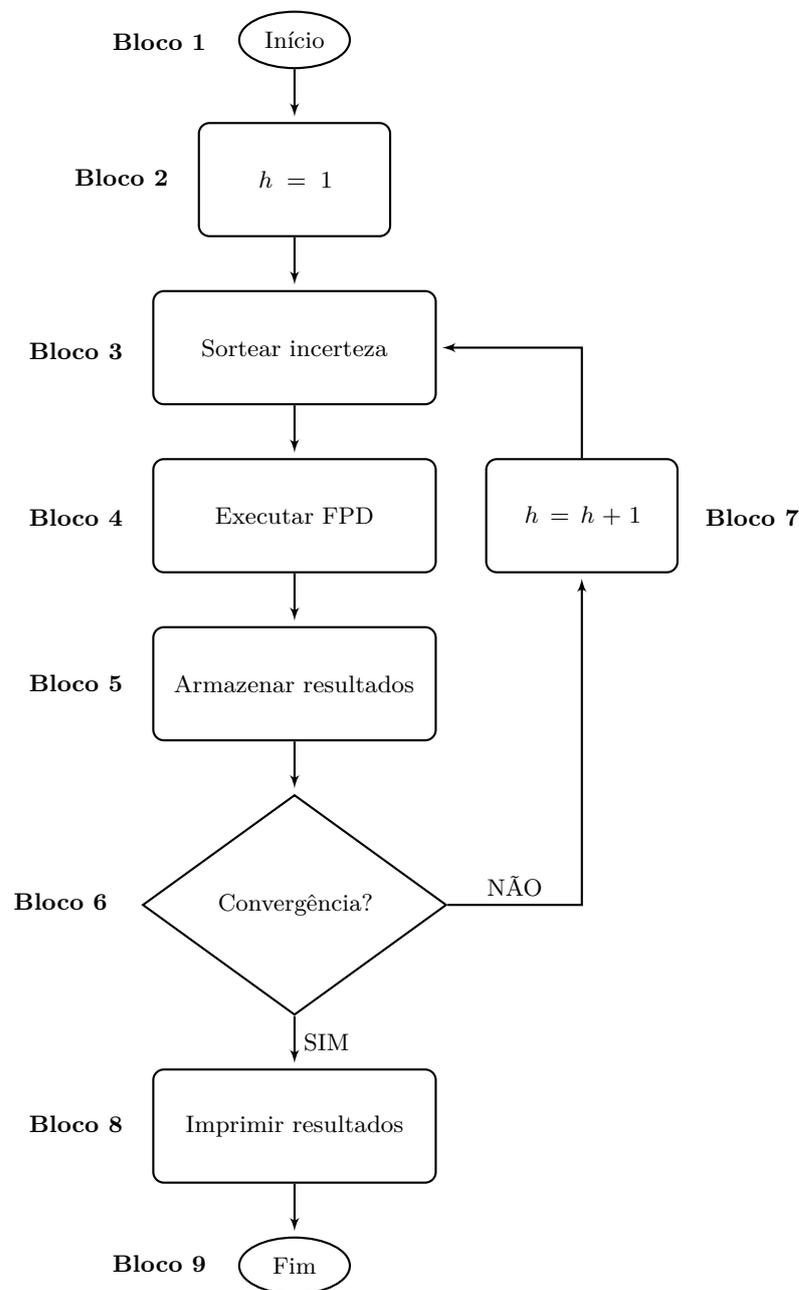
É importante destacar que o valor da incerteza varia aleatoriamente e difere para cada barra do sistema, bem como para cada valor de potência ativa e reativa, de forma separada. Nessa premissa, a distribuição normal para a variável δ randômica, com média 1 e desvio padrão σ , é definida na Equação (3.64).

$$FDP(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta-1}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < \delta < \infty \quad (3.64)$$

Para uma compreensão mais clara da metodologia em questão, elaborou-se o fluxograma apresentado na Figura 8, onde h representa o número da iteração atual. A convergência do método pode ser avaliada de duas maneiras: definindo um número máximo de iterações, h_{\max} , no algoritmo, ou comparando o desvio padrão dos resultados calculados em cada iteração da metodologia com um valor limítrofe predefinido no algoritmo (Rodrigues; Melo; Lima, 2023).

O fluxograma foi cuidadosamente segmentado em blocos, cada um deles detalhando uma etapa específica do processo, conforme descrito a seguir:

Figura 8 – Fluxograma para implementação do método de Monte Carlo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

- **Bloco 1:** representa o início do algoritmo;
- **Bloco 2:** nesse bloco, a variável h é inicializada com valor unitário;
- **Bloco 3:** sorteia-se o valor da incerteza compreendido no intervalo amostrado utilizando (3.63);
- **Bloco 4:** nesse bloco, o FPD é executado considerando (3.60) a (3.63);
- **Bloco 5:** os resultados do FPD são armazenados, incluindo os valores das variáveis de estado;
- **Bloco 6:** esse bloco verifica se a metodologia convergiu. Se “SIM”, executa-se o Bloco 8;
- **Bloco 7:** caso o bloco anterior não tenha sido satisfeito, h é incrementado em 1 unidade e retorna-se ao Bloco 3;
- **Bloco 8:** nesse bloco, valores médios máximos e mínimos são calculados e os resultados são apresentados;
- **Bloco 9:** indica o fim do algoritmo.

Nesse propósito, diferentes metodologias determinísticas podem ser utilizadas para implementar o FPD, incluindo os métodos iterativos tradicionais e o método recursivo publicado em Trias (2012). Ressalta-se que cada metodologia tem suas próprias vantagens e limitações, sendo sua escolha dependente tanto das características específicas do sistema elétrico em questão, quanto dos objetivos do estudo.

Entre as metodologias iterativas amplamente utilizadas para calcular o fluxo de potência em sistemas elétricos, destaca-se o método de Gauss-Seidel (Ward; Hale, 1956), o método de NR (Tinney; Hart, 1967), o método desacoplado e o desacoplado rápido (Stott; Alsac, 1974). Esses métodos fundamentam-se em iterações sucessivas para determinar os valores dos fasores de tensão em cada barra do sistema, até que as EBPs sejam satisfeitas.

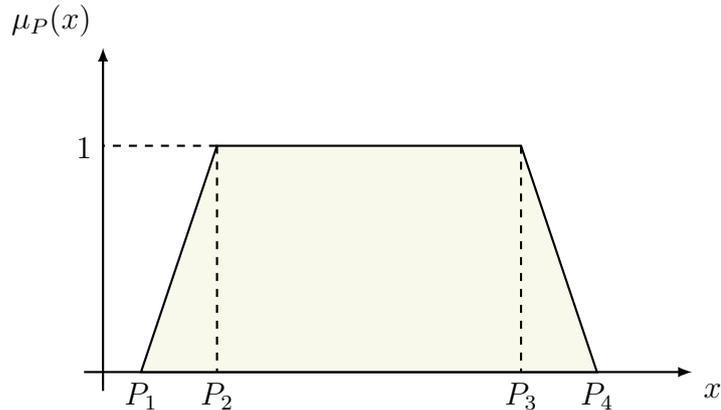
3.3.2 Fluxo de potência fuzzy

A formulação do FPF foi descrita pela primeira vez em Miranda e Matos (1989). Nessa formulação, o FPF recorre à aritmética *fuzzy* para introduzir incertezas na modelagem do fluxo de potência, de forma que as cargas e as gerações sejam representadas por *números nebulosos* ou a partir de *distribuições de possibilidade* e *funções de pertinência* associadas às injeções de potência nos barramentos (Lima; Murari; Pereira, 2003; Pereja, 2009).

Geralmente, as distribuições de possibilidade utilizadas para modelar as incertezas do FPP tem uma variedade de formas no FPF. Por simplicidade, a representação mais

comumente adotada é a do tipo trapezoidal (Santos, 2008). Na Figura 9, um exemplo ilustrativo apresenta uma carga modelada por um conjunto *fuzzy* trapezoidal, o qual descreve a seguinte afirmação: “*uma certa carga deverá estar entre P_1 e P_4 , porém é mais provável que a mesma esteja entre P_2 e P_3* ”.

Figura 9 – Carga modelada por um conjunto fuzzy trapezoidal.



Fonte: Adaptada de Santos (2008).

Nessa figura, o intervalo $[P_2; P_3]$ compreende o conjunto de valores da carga que possuem alta possibilidade de ocorrência. Por sua vez, os intervalos $[P_1; P_2]$ e $[P_3; P_4]$ possuem possibilidade de ocorrência reduzida. Dessa forma, a representação das cargas e gerações a partir de números *fuzzy* ou distribuições de possibilidade permite que as mesmas possam ser quantificadas e aplicadas em um algoritmo de fluxo de potência.

3.3.3 Fluxo de potência intervalar

Comparado aos métodos anteriores, o FPI se destaca como a abordagem mais simples e prática, conforme destacado em Souza (2023). Inicialmente proposto em Wang e Alvarado (1992), o método recorre à AI, conforme detalhado no Apêndice A, para fornecer soluções de fluxo de potência que incorporam incertezas relacionadas à demanda, geração e impedância da rede (Souza, 2018; Souza; Costa, 2018). Nesse objetivo, quatro métodos principais podem ser utilizados para resolver as não-linearidades das equações que regem o FPI:

- **Método de Newton-Raphson:** ferramenta que consiste em calcular iterativamente as soluções das EBPs em intervalos decrescentes, até se atingir uma solução que satisfaça um critério de convergência definido no algoritmo (Tinney; Hart, 1967);
- **Método da biseção:** metodologia simples e robusta, que divide o intervalo em dois e testa em qual dos subintervalos está a solução. O processo é repetido até que o intervalo contendo a solução seja encontrado (Burden; Faires, 2008);

- **Método de Newton modificado:** variação do método de NR que pode ser mais robusto para algumas configurações do problema de fluxo de potência. A metodologia recorre a uma matriz jacobiana modificada que considera as incertezas presentes no sistema (Chapra, 2017);
- **Método do ponto fixo intervalar:** técnica iterativa que converge para a solução de um sistema de equações não lineares utilizando a ideia de pontos fixos (Caprani; Madsen, 1978).

Para acomodar as incertezas associadas às gerações intermitentes e às cargas, as potências ativas e reativas injetadas em uma barra são representadas por uma faixa de valores, ao invés de um único valor fixo. Essa faixa é obtida associando limites inferiores e superiores de variações às potências ativas e reativas. Dessa forma, as incertezas nas potências ativa e reativa demandadas e geradas em uma barra k podem ser modeladas a partir das Equações (3.65) a (3.68), onde g e d denotam as potências geradas e demandadas, respectivamente, e a variável α define o percentual de incerteza a ser considerado em cada barra k , com k variando de 1 a N barras (Pereira, 2011; Quintanilha; Costa, 2017).

$$\hat{P}_k^g = [(1 - \alpha)P_k^g; (1 + \alpha)P_k^g] \quad (3.65)$$

$$\hat{Q}_k^g = [(1 - \alpha)Q_k^g; (1 + \alpha)Q_k^g] \quad (3.66)$$

$$\hat{P}_k^d = [(1 - \alpha)P_k^d; (1 + \alpha)P_k^d] \quad (3.67)$$

$$\hat{Q}_k^d = [(1 - \alpha)Q_k^d; (1 + \alpha)Q_k^d] \quad (3.68)$$

3.3.3.1 Superestimação Intervalar

Um dos maiores desafios da AI é fazer com que os intervalos obtidos como solução sejam os menores possíveis, para não comprometer a precisão dos resultados (Araújo, 2016). Por conseguinte, espera-se que os intervalos de saída do FPI acomodem as faixas de variação da abordagem de MC (Junior, 2023).

Nesse objetivo, algumas abordagens foram propostas para reduzir a superestimação intervalar causada pelos algoritmos de FPI tradicionais, dentre as quais se destacam:

- **Aritmética afim:** utiliza grandezas de interesse como combinações afins de variáveis primitivas que representam os dados incertos (Vaccaro; Canizares; Villacci, 2010);
- **Extensão intervalar:** recorre à interseção entre intervalos advindos de extensões intervalares de uma mesma função (Junior, 2023);

- **Operador Krawczyk:** utiliza o operador Krawczyk para evitar a inversão da matriz Jacobiana no método de NR (Junior; Melo; Nepomuceno, 2022);
- **Série de Taylor de segunda ordem:** calcula as derivadas de segunda ordem das EBPs com relação a um parâmetro de incerteza percentual (Souza, 2023).

Embora existam vantagens e desvantagens específicas associadas a essas abordagens, não existe na literatura uma técnica holomórfica capaz de lidar efetivamente tanto com as incertezas inerentes ao fluxo de potência quanto com a superestimação intervalar decorrente dos algoritmos de FPI. É nesse contexto que esta pesquisa se enquadra e se destaca em inovação.

3.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Este capítulo abordou as principais expressões matemáticas utilizadas pelo método de NR na solução das não-linearidades das equações que regem o fluxo de potência e analisou suas múltiplas soluções sob a óptica do domínio fractal. À luz dos estudos de Trias (2012), este capítulo também introduziu a formulação canônica do FPHo como uma abordagem para resolver as equações algébricas que regem o fluxo de potência. A utilização da sofisticada aproximação de Padé demonstrou ser uma estratégia eficaz para ampliar a continuidade analítica das séries de MacLaurin. Além disso, ao analisar as técnicas de controle de reativos, foi destacado que a abordagem de pequenos incrementos/decrementos de tensão sobressai devido à eficiência computacional superior quando comparada à metodologia de re-especificação do tipo de barra.

Foram examinadas as principais categorias de algoritmos empregados no tratamento das incertezas no contexto do problema de fluxo de potência em sistemas elétricos. Embora a abordagem intervalar tenha sido apresentada como a mais simples e prática, foi destacado que essa técnica pode apresentar problemas de superestimação. Além disso, mesmo que tenham sido discutidas as principais estratégias utilizadas para mitigar essa questão, é importante ressaltar que nenhuma das abordagens existentes na literatura para lidar com a incerteza em sistemas elétricos incorpora a abordagem holomórfica como uma possível ferramenta de resolução.

No próximo capítulo, será proposta a aplicação conjunta do FPHo e da AI como uma abordagem potencialmente valiosa para a integração de incertezas na modelagem do problema de fluxo de potência.

4 METODOLOGIA PROPOSTA

Este capítulo introduz uma nova técnica para a análise de incertezas nos dados de geração e carga em sistemas elétricos, denominada FPHoI. Nesse contexto, todos os aspectos da abordagem serão minuciosamente explorados e discutidos com uma análise abrangente de sua aplicação e implicações.

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A metodologia delineada nesta dissertação se fundamenta na premissa de que os dados relacionados à carga e geração de energia em sistemas elétricos estão sujeitos a incertezas. Para abordar essa questão, é atribuído um valor percentual de incerteza α a cada parâmetro de entrada sujeito a variações. Para modelar essas incertezas, recorre-se à aplicação de uma abordagem baseada em AI, cujos conceitos fundamentais são detalhadamente explicados no Apêndice A deste trabalho.

4.2 FLUXO DE POTÊNCIA HOLOMÓRFICO INTERVALAR

Dado que a versão determinística do FPHo permite o cálculo antecipado de valores determinísticos de tensões e potências, a EBP holomórfica associada a cada barra do sistema elétrico pode então ser expressa pela Equação (4.1).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m[n] = \left(S_k^{cal} \right)^* W_k^*[n-1] - Y_k^{sh} V_k^{cal}[n-1] \quad (4.1)$$

Em (4.1), S_k^{cal} e V_k^{cal} representam, respectivamente, o valor determinístico da potência complexa e da tensão calculados previamente. Além disso, $W_k[n]$ pode ser calculado recursivamente a partir da Equação (4.2).

$$W_k[n] = - \frac{\sum_{m=0}^{n-1} W_k[m] V_k^{cal}[n-m]}{V_k^{cal}[0]} \quad (4.2)$$

4.2.1 Introdução de incertezas

Com base nos valores determinísticos calculados das potências ativa e reativa, os quais são utilizados para determinar os limites inferior e superior utilizando um valor percentual de incerteza α , valores intervalares para as potências ativas e reativas podem ser determinados conforme as Equações (4.3) e (4.4).

$$\hat{P}_k = \begin{cases} \left[(1-\alpha) P_k^{cal}; (1+\alpha) P_k^{cal} \right], & \text{se } P_k^{cal} \geq 0 \\ \left[(1+\alpha) P_k^{cal}; (1-\alpha) P_k^{cal} \right], & \text{se } P_k^{cal} < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\hat{Q}_k = \begin{cases} [(1 - \alpha) Q_k^{cal}; (1 + \alpha) Q_k^{cal}], & \text{se } Q_k^{cal} \geq 0 \\ [(1 + \alpha) Q_k^{cal}; (1 - \alpha) Q_k^{cal}], & \text{se } Q_k^{cal} < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Esse parâmetro de incerteza é comumente utilizado na literatura para avaliar o impacto da carga/geração incerta nas magnitudes/ângulos de tensão no contexto do FPI e podem variar de 5% a 50%, dependendo da finalidade da análise e complexidade da rede elétrica (Melo, 2023).

Observe que a incerteza está associada tanto aos dados de carga quanto aos dados de geração, assumindo um valor de intervalo correspondente. Essa abordagem é geralmente utilizada em análises de FPI considerando incertezas na carga e também incertezas associadas a unidades de geração despacháveis e não despacháveis, como parques de energia eólica e sistemas fotovoltaicos (Melo, 2023; Souza, 2023). Uma vez que a geração de energia dessas unidades está associada a uma alta variabilidade, essa característica resulta em maiores incertezas durante a operação dos sistemas de energia. Essa abordagem já foi explorada na literatura e a técnica proposta nesta dissertação também pode ser aplicada a essa análise. Nesse caso, o mesmo procedimento utilizado para formar os valores de intervalo pode ser aplicado aos valores de geração de energia, conforme apresentado nas Equações (4.3) e (4.4).

Conforme apresentado na Equação (4.5), \hat{S}_k^{cal} é expressa com um acento circunflexo, indicando que essa variável pode ser calculada como um intervalo, assim como \hat{P}_k e \hat{Q}_k .

$$\hat{S}_k^{cal} = \hat{P}_k + j\hat{Q}_k \quad (4.5)$$

4.2.2 Expansão em séries de MacLaurin intervalares

Para resolver as equações holomórficas considerando as variáveis intervalares, a cada recursão, um novo termo intervalar $\hat{V}_k[n]$ é calculado a partir de (4.1). Considerando que as tensões fasoriais são expressas como uma soma desses termos intervalares, a tensão fasorial obtida dessa expressão deve ser, portanto, um número complexo intervalar. Nesse contexto, são descritas nas seções subsequentes as equações utilizadas para se calcular termo a termo os n termos intervalares das séries de MacLaurin necessários para a convergência numérica do FPHoI.

4.2.2.1 Termo de Ordem $n = 0$

Para calcular o termo de ordem zero, a Equação (4.6) é utilizada, significando que todas as tensões fasoriais são iguais a 1 p.u. para a solução germinal.

$$\hat{V}_k[n] = [1; 1], \quad k \in (\text{V}\theta, \text{PQ} \text{ e } \text{PV}) \quad (4.6)$$

Na Equação (4.7), $\hat{W}_k[n]$ representa o recíproco do intervalo $\hat{V}_k[n]$ e também é igual a 1 p.u. no início do algoritmo.

$$\hat{W}_k[n] = \frac{1}{\hat{V}_k[n]} = [1; 1], \quad k \in (\mathbf{V}\theta, \text{PQ e PV}) \quad (4.7)$$

4.2.2.2 Termo de Ordem $n = 1$

O termo intervalar de ordem $n = 1$ é calculado utilizando as Equações (4.8) e (4.9). Observe que o operador *mid* é definido no Apêndice A como o valor médio do intervalo correspondente e \hat{S}_k^{cal} representa um intervalo com limites inferiores e superiores determinados pela porcentagem de incerteza α , conforme descrito em (4.3) e (4.4).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = V_k^{esp} - 1, \quad k \in \mathbf{V}\theta \quad (4.8)$$

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = \text{mid} \left((\hat{S}_k^{cal})^* - Y_k^{sh} \right), \quad k \in (\text{PQ}, \text{PV}) \quad (4.9)$$

4.2.2.3 Termos de Ordem $n > 1$

Para os termos de ordem superior, as equações intervalares são determinadas a partir das Equações (4.10) e (4.11), com o recíproco das tensões $\hat{W}_k[n]$ sendo calculado a partir da Equação (4.12).

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = [0; 0], \quad k \in \mathbf{V}\theta \quad (4.10)$$

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = (\hat{S}_k^{cal})^* \text{mid} \left(\hat{W}_k^*[n-1] \right) - \text{mid} \left(Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1] \right), \quad k \in (\text{PQ}, \text{PV}) \quad (4.11)$$

$$\hat{W}_k[n] = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} \hat{W}_k[m] \hat{V}_k[n-m]}{\hat{V}_k[0]}, \quad k \in (\text{PQ}, \text{PV}) \quad (4.12)$$

Observe que, a cada novo termo calculado, uma nova solução intervalar é gerada para as séries de MacLaurin, permitindo que a solução do FPHo seja obtida com base em um método não iterativo. Isso representa a maior contribuição deste trabalho.

Observe também que, no caso das barras PV, uma vez que seus valores de Q_k foram previamente calculados pelo FPHo determinístico, eles são fornecidos como dados de entrada no formato de intervalos para o FPHoI. Portanto, não é necessário incorporar equações adicionais para representar as barras PV.

A seguir, são delineadas no Quadro 3 as expressões pertinentes para calcular os termos intervalares das séries de MacLaurin associados a cada tipo de barra.

Quadro 3 – Termos intervalares das séries de MacLaurin segundo o tipo de barra.

Termo	Barra	Equacionamento
$n = 0$	V θ , PQ e PV	$\hat{V}_k[n] = [1; 1]$ $\hat{W}_k[n] = [1; 1]$
$n = 1$	V θ	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = V_k^{esp} - 1$
	PQ e PV	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = mid \left((S_k^{cal})^* - Y_k^{sh} \right)$
$n > 1$	V θ	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = [0; 0]$
	PQ e PV	$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} \hat{V}_m[n] = (S_k^{cal})^* mid \left(\hat{W}_k^*[n-1] \right) - mid \left(Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1] \right)$ $\hat{W}_k[n] = - \frac{\sum_{m=0}^{n-1} \hat{W}_k[m] \hat{V}_k[n-m]}{\hat{V}_k[0]}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4.2.3 Continuação analítica máxima intervalar

Ao serem considerados termos intervalares das séries de MacLaurin, essas devem ser levadas até sua máxima continuação analítica por meio do cálculo da aproximação de Padé em sua versão intervalar, como definido na Equação (4.13), onde o grau L/M do aproximante é determinado conforme a Equação (4.14).

$$\hat{V}_k(\gamma) \approx [L/M]_{\hat{V}_k(\gamma)} = \frac{a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \dots + a_L\gamma^L}{b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2 + \dots + b_M\gamma^M} \quad (4.13)$$

$$L/M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (4.14)$$

Para o cálculo dos coeficientes do aproximante de Padé intervalar, empregam-se as Equações (4.15) e (4.16).

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_k[L-M+1] & \hat{V}_k[L-M+2] & \cdots & \hat{V}_k[L] \\ \hat{V}_k[L-M+2] & \hat{V}_k[L-M+3] & \cdots & \hat{V}_k[L+1] \\ \hat{V}_k[L-M+3] & \hat{V}_k[L-M+4] & \cdots & \hat{V}_k[L+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{V}_k[L] & \hat{V}_k[L+1] & \cdots & \hat{V}_k[L+M-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{V}_k[L+1] \\ \hat{V}_k[L+2] \\ \hat{V}_k[L+3] \\ \vdots \\ \hat{V}_k[L+M] \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$a_L = \hat{V}_k[L] + \sum_{i=1}^{L/M} b_i \hat{V}_k[L-i] \quad (4.16)$$

Após serem calculados todos os coeficientes do aproximante, o resultado intervalar da tensão nodal de cada um dos barramentos é então obtido pela avaliação de $\gamma = 1$ em (4.13).

4.2.4 Convergência

O critério de convergência é satisfeito quando a maior diferença absoluta entre o valor médio de duas tensões intervalares calculadas sucessivamente por meio da continuação analítica máxima é menor do que uma tolerância especificada ξ , conforme descrito na Equação (4.17).

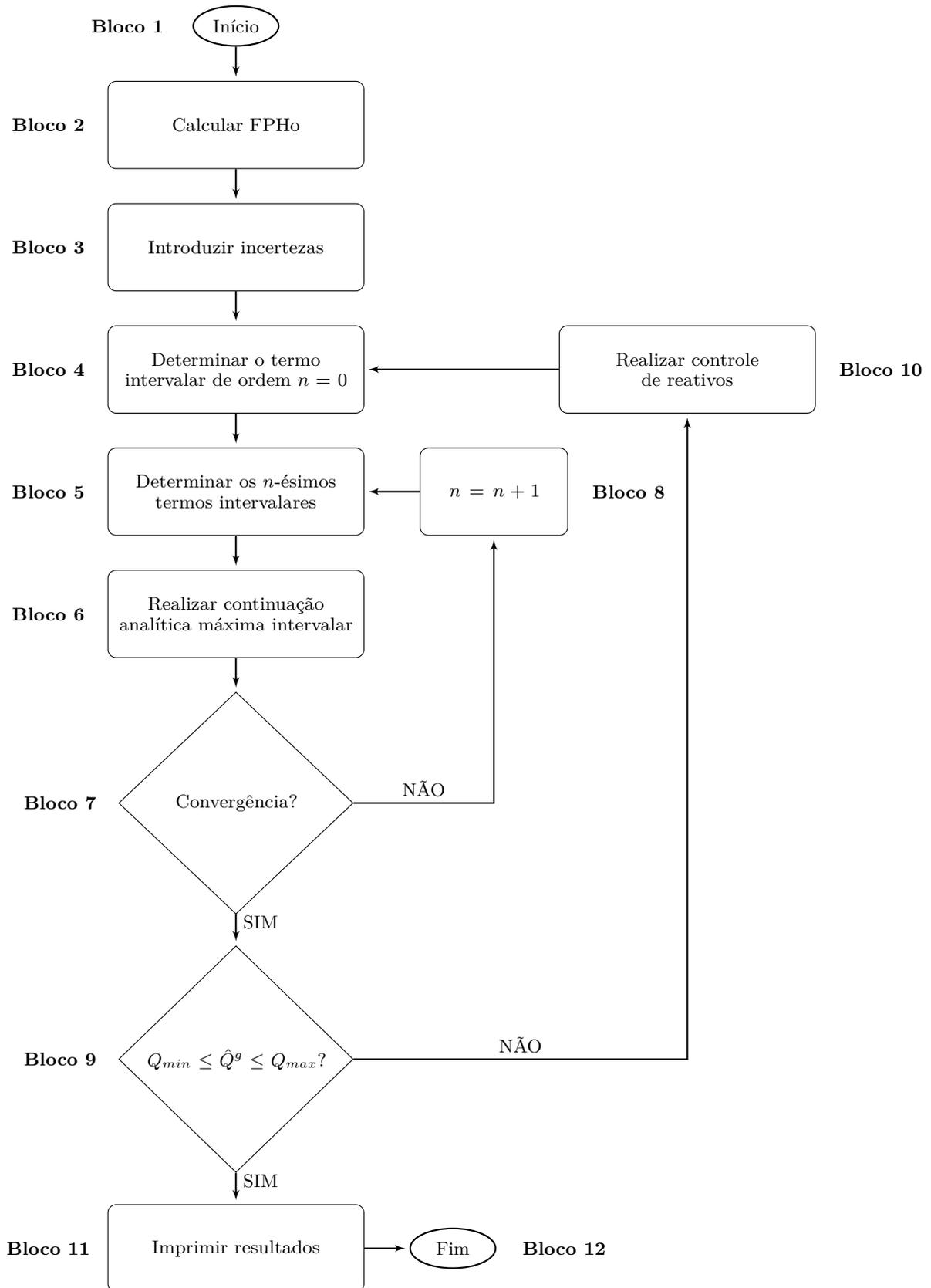
$$\max \left(\text{mid} \left(|\hat{V}_k[n]| \right) - \text{mid} \left(|\hat{V}_k[n-1]| \right) \right) \leq \xi \quad (4.17)$$

4.3 FLUXOGRAMA

Um fluxograma incluindo todos os procedimentos para a implementação do FPHoI é exibido na Figura 10. O mesmo foi dividido em vários blocos para que seus detalhes possam ser melhor explicados.

- **Bloco 1:** representa o início do algoritmo;
- **Bloco 2:** esse bloco indica que o FPHo deve ser executado para determinar as tensões, potências ativas e reativas associadas a cada barra da rede conforme metodologia descrita detalhadamente no fluxograma da Figura 6;
- **Bloco 3:** nesse bloco, os valores dos intervalos são determinados para os dados de carga e geração considerando as potências ativa e reativa do intervalo, conforme apresentado em (4.3) e (4.4);
- **Bloco 4:** o termo intervalar de ordem zero é calculado considerando (4.6) e (4.7);

Figura 10 – Fluxograma para implementação do fluxo de potência holomórfico intervalar.



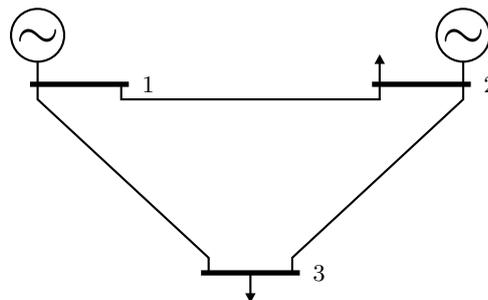
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

- **Bloco 5:** nesse bloco são determinados os valores dos intervalos para os termos de n -ésima ordem das tensões expressas em séries de MacLaurin, bem como as potências reativas das barras PV. Note que para $n = 1$, os termos são calculados a partir de (4.9) e (4.8). Para $n > 1$, (4.11) e (4.10) devem ser consideradas;
- **Bloco 6:** utilizando aproximações de Padé intervalares, a continuação analítica máxima é implementada para cada variável intervalar calculada no Bloco 5;
- **Bloco 7:** a convergência do algoritmo é avaliada conforme descrito em (4.17). Nesse caso, o cálculo de novos termos das séries de MacLaurin intervalares é interrompido avaliando a diferença absoluta entre o valor médio de duas tensões intervalares calculadas sucessivamente por meio da continuação analítica máxima intervalar;
- **Bloco 8:** se a convergência não for satisfeita, esse bloco incrementa o número de termos a serem avaliados nas séries de MacLaurin intervalares em 1 unidade;
- **Bloco 9:** esse bloco avalia se os valores de potência reativa gerada das barras PV estão entre os limites pré-estabelecidos;
- **Bloco 10:** nesse bloco, a magnitude da tensão da barra PV violada é recalculada para manter os limites físicos da unidade geradora cujo limite de reativo foi extrapolado;
- **Bloco 11:** nesse bloco, todos os termos são determinados recursivamente e os resultados dos intervalos para as tensões fasoriais são obtidos como solução e impressos na tela;
- **Bloco 12:** representa o término do algoritmo.

4.4 EXEMPLO NUMÉRICO

Optou-se por utilizar um sistema tutorial de três barras, conforme ilustrado na Figura 11.

Figura 11 – Diagrama unifilar do sistema tutorial.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Dados dos barramentos e limites dos geradores estão listados nas Tabelas 5 e 6. Na Tabela 7 são apresentados os dados dos circuitos incluindo a resistência R , a reatância X e a susceptância *shunt* B^{sh} dos circuitos. 100 MVA é a potência base adotada.

Tabela 5 – Dados de barra do sistema tutorial.

Barra	Tipo	P_d (p.u.)	Q_d (p.u.)	P_g (p.u.)	Q_g (p.u.)	$ V_k^{esp} $ (p.u.)	θ ($^\circ$)
1	V θ					1	0
2	PV	0,80		0,50		1	
3	PQ	2	1,24	0	0		

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 6 – Limites de reativo do sistema tutorial.

Barra	Tipo	Q_{min} (p.u.)	Q_{max} (p.u.)
1	V θ	-0,60	0,60
2	PV	-1,20	1,20

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 7 – Dados de linha do sistema tutorial.

De	Para	R (p.u.)	X (p.u.)	B^{sh} (p.u.)
1	2	0,01008	0,05040	0,10250
1	3	0,00744	0,03720	0,07750
2	3	0,01272	0,06360	0,12750

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

4.4.1 Fluxo de potência holomórfico determinístico

A princípio, o ponto de operação do sistema será calculado a partir de uma abordagem determinística do FPHo.

4.4.1.1 Início

O primeiro passo para a resolução do fluxo de potência é a construção da matriz de admitâncias Y_{km} . Nessa matriz, a parte real de seus elementos é representada por G_{km} e a parte imaginária por B_{km} , ambas em p.u.

$$Y_{km} = \begin{bmatrix} 8,9852 - j44,8360 & -3,8156 + j19,0781 & -5,1696 + j25,8478 \\ -3,8156 + j19,0781 & 6,8393 - j34,0817 & -3,0237 + j15,1185 \\ -5,1696 + j25,8478 & -3,0237 + j15,1185 & 8,1933 - j40,8638 \end{bmatrix}$$

Conforme descrito na Subseção 3.2.2, a metodologia do FPHo preconiza a separação dos elementos da matriz de admitâncias em elementos *shunt* e série. Nesse objetivo, são apresentados a seguir as matrizes Y_k^{sh} e Y_{km}^{sr} , essa última definida a partir da relação $Y_{km}^{sr} = Y_{km} - \text{diag}(Y_k^{sh})$.

$$Y_k^{sh} = \begin{bmatrix} j0,0900 \\ j0,1150 \\ j0,1025 \end{bmatrix}$$

$$Y_{km}^{sr} = \begin{bmatrix} 8,9852 - j44,9260 & -3,8156 + j19,0781 & -5,1696 + j25,8478 \\ -3,8156 + j19,0781 & 6,8393 - j34,1967 & -3,0237 + j15,1185 \\ -5,1696 + j25,8478 & -3,0237 + j15,1185 & 8,1933 - j40,9663 \end{bmatrix}$$

4.4.1.2 Incorporação Holomórfica

O sistema de equações incorporadas holomorficamente que deve ser resolvido é apresentado a seguir:

$$V_k(\gamma) = 1 + (V_k^{esp} - 1)\gamma, \quad \text{para } k = 1;$$

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(\gamma) = \frac{\gamma P_k^{esp} - jQ_k(\gamma)}{V_k^*(\gamma^*)} - \gamma Y_k^{sh} V_k(\gamma), \quad \text{para } k = 2;$$

$$V_k(\gamma) * V_k^*(\gamma^*) = 1 + (|V_k^{esp}|^2 - 1)\gamma, \quad \text{para } k = 2;$$

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{sr} V_m(\gamma) = \frac{\gamma (S_k^{esp})^*}{V_k^*(\gamma^*)} - \gamma Y_k^{sh} V_k(\gamma), \quad \text{para } k = 3.$$

4.4.1.3 Solução Germinal

Resolvendo as equações anteriores para $\gamma = 0$, a solução germinal do problema é calculada aplicando (3.23) a (3.25):

$$V_1(0) = V_1[0] = 1;$$

$$Q_2(0) = Q_2[0] = 0;$$

$$V_3(0) = V_3[0] = 1.$$

4.4.1.4 Matriz de Recursão

Como o primeiro coeficiente das séries de MacLaurin já foi computado (solução germinal), resta calcular os demais termos das referidas séries; para isso, deve-se construir e fatorar a matriz de recursão. Como essa matriz é quadrada, de ordem $2N \times 2N$, substituindo os dados do sistema tutorial em (3.49) e (3.50), obtém-se a expressão

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,8156 & -19,0781 & 0 & 34,0817 & -3,0237 & -15,1185 \\ 19,0781 & -3,8156 & 1 & 6,8393 & 15,1185 & -3,0237 \\ -5,1696 & -25,8478 & 0 & -15,1185 & 8,1933 & 40,9663 \\ 25,8478 & -5,1696 & 0 & -3,0237 & -40,9663 & 8,1933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ Q_2[n] \\ V_2^{im}[n] \\ V_3^{re}[n] \\ V_3^{im}[n] \end{bmatrix} \\ = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,8393 \\ -34,1967 \\ -3,0237 \\ 15,1185 \end{bmatrix} [V_2^{re}[n]] \\ + \begin{bmatrix} \begin{cases} 1-1, & \text{se } n=1 \\ 0, & \text{se } n>1 \end{cases} \\ 0 \\ re \left(-0,30W_2^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_2[m]W_2^*[n-m] \right) - 0,1150V_2[n-1] \right) \\ im \left(-0,30W_2^*[n-1] - j \left(\sum_{m=1}^{n-1} Q_2[m]W_2^*[n-m] \right) - 0,1150V_2[n-1] \right) \\ re \left((2+j1,24)^* W_3^*[n-1] - 0,1025V_3[n-1] \right) \\ im \left((2+j1,24)^* W_3^*[n-1] - 0,1025V_3[n-1] \right) \end{bmatrix},$$

sendo

$$V_2^{re}[n] = \begin{cases} \frac{|1|^2-1}{2}, & \text{se } n=1, \\ -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} V_2[k]V_2^*[n-k] \right), & \text{se } n>1. \end{cases}$$

4.4.1.5 Expansão em Séries de MacLaurin

Resolvendo o sistema anterior recursivamente, e considerando como critério de convergência a máxima diferença entre duas tensões calculadas sucessivamente por meio da continuação analítica (10^{-6} p.u.), são calculados oito termos para as séries de MacLaurin, conforme exposto na Tabela 8, onde os dados foram truncados na quarta casa decimal. Para esse exemplo, o processo recursivo finalizou quando um erro máximo de $4,9338 \times 10^{-7}$

p.u. foi encontrado. Observe que para a barra V θ e para as barras PQ, termos referentes às tensões são calculados. Já para a barra PV são calculados termos relativos à potência reativa desconhecida pelo fluxo de potência.

Tabela 8 – Termos das séries de MacLaurin para as variáveis de estado do sistema tutorial.

Ordem n	V_1 (p.u.)	V_2 (p.u.)	Q_2 (p.u.)	V_3 (p.u.)
0	1	1	0	1
1	0	-j0,0363	0,5124	-0,0361 - j0,0550
2	0	-0,0007 - j0,0008	0,0550	-0,0040 + j0,0002
3	0	-j0,0001	0,0042	-0,0003
4	0	0	0,0005	0
5	0	0	0,0001	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

4.4.1.6 Continuação Analítica Máxima

Uma vez obtidos os coeficientes das séries de MacLaurin, as séries resultantes para as tensões em todas as barras e as séries de MacLaurin referentes à potência reativa gerada nas barras PV são aproximadas, para expandir seu raio de convergência, utilizando (3.57).

Para determinar o grau dos aproximantes de Padé a serem implementados, faz-se uso da relação (3.53). Destaca-se que, nesse contexto, o grau mais elevado dos termos nas séries de MacLaurin calculadas é $n = 7$, conforme evidenciado na Tabela 8.

$$L/M = \frac{7-1}{2} = 3 \quad (4.18)$$

Por exemplo, para calcular o valor expandido da tensão da barra 3, o seguinte sistema matricial considerando $L = M = 3$ pode ser escrito ($\tilde{0}$ representa um número complexo de módulo muito pequeno, diferente de zero):

$$\begin{bmatrix} -0,0361 - j0,0550 & -0,0040 + j0,0002 & -0,0003 \\ -0,0040 + j0,0002 & -0,0003 & \tilde{0} \\ -0,0003 & \tilde{0} & \tilde{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \end{bmatrix}.$$

Realizando os devidos cálculos, tem-se que

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0002 - j0,0001 \\ 0,0029 + j0,0069 \\ -0,1769 - j0,0493 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes a do polinômio (3.52) são calculados por simples substituição dos valores de b em (3.58), considerando $b_0 = 1$. Assim sendo, tem-se que

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2130 + j0,0057 \\ 0,0080 - j0,0012 \\ 0,0001 + j0,0001 \end{bmatrix}.$$

Nessa conjuntura, a solução para cada variável de estado é então determinada a partir da expressão racional (3.52), considerando $\gamma = 1$. Para a tensão da barra 3, por exemplo, tem-se que

$$\begin{aligned} V_3 &\approx \frac{1 + (-0,2130 + j0,0057) + (0,0080 - j0,0012) + (0,0001 + j0,0001)}{1 + (-0,1769 - j0,0493) + (0,0029 + j0,0069) + (0,0002 - j0,0001)} \\ &\approx 0,9596 - j0,0547 \\ &\approx 0,9612 \angle -3,2646^\circ. \end{aligned}$$

4.4.1.7 Convergência

A avaliação da convergência do método FPHo é conduzida por meio da análise comparativa entre duas tensões calculadas sucessivamente por meio de aproximações de Padé diagonais, conforme descrito em (3.59). No cenário examinado, a maior discrepância observada está relacionada à magnitude da tensão na barra 3, que alcança um valor de $5,7521 \times 10^{-7}$ p.u. no ponto de convergência do algoritmo.

4.4.1.8 Controle de Reativos

Embora a metodologia tenha alcançado uma convergência notável, torna-se imperativo aferir se a solução está consoante com os limites físicos das unidades de geração. Nesse propósito, faz-se necessário examinar a quantidade de reativos gerados por cada máquina e verificar se tais valores respeitam os limites físicos dos geradores. Com esse desígnio em mente, os dados correspondentes aos reativos gerados pelas unidades 1 e 2 são apresentados na Tabela 9. Nota-se, conforme preconizado, que os valores de reativos gerados se encontram estritamente nos limites físicos estabelecidos pelos geradores.

Tabela 9 – Geração de potência reativa no sistema tutorial.

Barra	Limite (Mvar)		Geração (Mvar)
	Q_{min}	Q_{max}	
1	-60	60	54,2523
2	-120	120	57,2233

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

4.4.1.9 Resultados Determinísticos

A Tabela 10 expõe os resultados determinísticos referentes às tensões, bem como às potências ativas e reativas geradas no sistema tutorial sob análise.

Tabela 10 – Tensões e potências determinísticas calculadas para o sistema tutorial.

Barra	Tensão		Geração	
	$ V $ (p.u.)	θ ($^\circ$)	P (MW)	Q (Mvar)
1	1	0	233,4890	54,2523
2	1	-2,1288	50	57,2233
3	0,9612	-3,2646	-	-

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

4.4.2 Fluxo de potência holomórfico intervalar

Agora, o ponto de operação do sistema não será mais dado por valores determinísticos das variáveis de estado do problema do fluxo de potência, mas por valores intervalares.

4.4.2.1 Introdução de Incertezas

Neste trabalho, as incertezas são introduzidas nos dados de geração e de carga, conforme apresentado em (4.3) e (4.4). Expandindo (4.5) e adotando α igual a 5% em ambos os tipos de dados, as seguintes expressões podem ser escritas:

$$\begin{aligned}\hat{S}_1^{cal} &= [(1 - \alpha) P_1^{cal}; (1 + \alpha) P_1^{cal}] + j [(1 - \alpha) Q_1^{cal}; (1 + \alpha) Q_1^{cal}] \\ &= [(1 - 0,05) (0); (1 + 0,05) (0)] + j [(1 - 0,05) (0); (1 + 0,05) (0)] \\ &= [0,0000; 0,0000] + j [0,0000; 0,0000];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_2^{cal} &= [(1 - \alpha) P_2^{cal}; (1 + \alpha) P_2^{cal}] + j [(1 - \alpha) Q_2^{cal}; (1 + \alpha) Q_2^{cal}] \\ &= [(1 + 0,05) (-0,30); (1 - 0,05) (-0,30)] + j [(1 - 0,05) (0,5722); (1 + 0,05) (0,5722)] \\ &= [-0,3150; -0,2850] + j [0,5336; 0,6008];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_3^{cal} &= [(1 - \alpha) P_3^{cal}; (1 + \alpha) P_3^{cal}] + j [(1 - \alpha) Q_3^{cal}; (1 + \alpha) Q_3^{cal}] \\ &= [(1 + 0,05) (-2); (1 - 0,05) (-2)] + j [(1 + 0,05) (-1,24); (1 - 0,05) (-1,24)] \\ &= [-2,1000; -1,9000] + j [-1,3020; -1,1780].\end{aligned}$$

4.4.2.2 Expansão em Séries de MacLaurin Intervalares

A seguir, é apresentado o desenvolvimento para o cálculo dos termos das séries de MacLaurin intervalares de ordem n igual a 0, 1 e superior.

4.4.2.2.1 Termo de ordem $n = 0$

Conforme descrito em (4.6), os termos de ordem zero correspondem à solução germinal do problema e apresentam tensões intervalares degeneradas iguais a 1 p.u., ou seja,

$$\hat{V}_1[0] = \hat{V}_2[0] = \hat{V}_3[0] = [1; 1].$$

Para calcular o inverso dessas tensões, (4.7) é aplicada, resultando em:

$$\hat{W}_1[0] = \hat{W}_2[0] = \hat{W}_3[0] = [1; 1].$$

4.4.2.2.2 Termo de ordem $n = 1$

Aplicando (4.8) e (4.9), obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 Y_{1m}^{sr} \hat{V}_m[1] &= V_1^{esp} - 1 \\ Y_{11}^{sr} \hat{V}_1[1] + Y_{12}^{sr} \hat{V}_2[1] + Y_{13}^{sr} \hat{V}_3[1] &= V_1^{esp} - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 Y_{2m}^{sr} \hat{V}_m[1] &= mid(\hat{S}_2^{cal*} - Y_2^{sh}) \\ Y_{21}^{sr} \hat{V}_1[1] + Y_{22}^{sr} \hat{V}_2[1] + Y_{23}^{sr} \hat{V}_3[1] &= mid(\hat{S}_2^{cal*} - Y_2^{sh}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 Y_{3m}^{sr} \hat{V}_m[1] &= mid(\hat{S}_3^{cal*} - Y_3^{sh}) \\ Y_{31}^{sr} \hat{V}_1[1] + Y_{32}^{sr} \hat{V}_2[1] + Y_{33}^{sr} \hat{V}_3[1] &= mid(\hat{S}_3^{cal*} - Y_3^{sh}). \end{aligned}$$

4.4.2.2.3 Termo de ordem $n > 1$

Aplicando (4.10), (4.11) e (4.12) para o termo de ordem 2, por exemplo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 Y_{1m}^{sr} \hat{V}_m[2] &= [0; 0] \\ Y_{11}^{sr} \hat{V}_1[2] + Y_{12}^{sr} \hat{V}_2[2] + Y_{13}^{sr} \hat{V}_3[2] &= [0; 0]; \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^3 Y_{2m}^{sr} \hat{V}_m[2] = (\hat{S}_2^{cal})^* \text{mid}(\hat{W}_2^*[2-1]) - \text{mid}(Y_2^{sh} \hat{V}_2[2-1])$$

$$Y_{21}^{sr} \hat{V}_1[2] + Y_{22}^{sr} \hat{V}_2[2] + Y_{23}^{sr} \hat{V}_3[2] = (\hat{S}_2^{cal})^* \text{mid}(\hat{W}_2^*[1]) - \text{mid}(Y_2^{sh} \hat{V}_2[1]);$$

$$\sum_{m=1}^3 Y_{3m}^{sr} \hat{V}_m[2] = (\hat{S}_3^{cal})^* \text{mid}(\hat{W}_3^*[2-1]) - \text{mid}(Y_3^{sh} \hat{V}_3[2-1])$$

$$Y_{31}^{sr} \hat{V}_1[2] + Y_{32}^{sr} \hat{V}_2[2] + Y_{33}^{sr} \hat{V}_3[2] = (\hat{S}_3^{cal})^* \text{mid}(\hat{W}_3^*[1]) - \text{mid}(Y_3^{sh} \hat{V}_3[1]);$$

$$\hat{W}_2[2] = -\frac{\sum_{m=0}^{2-1} \hat{W}_2[m] \hat{V}_2[2-m]}{\hat{V}_2[0]}$$

$$= -\frac{(\hat{W}_2[0] \hat{V}_2[2]) + (\hat{W}_2[1] \hat{V}_2[1])}{\hat{V}_2[0]};$$

$$\hat{W}_3[2] = -\frac{\sum_{m=0}^{2-1} \hat{W}_3[m] \hat{V}_3[2-m]}{\hat{V}_3[0]}$$

$$= -\frac{(\hat{W}_3[0] \hat{V}_3[2]) + (\hat{W}_3[1] \hat{V}_3[1])}{\hat{V}_3[0]}.$$

4.4.2.3 Continuação Analítica Máxima Intervalar e Convergência

O procedimento descrito anteriormente é seguido de maneira recursiva até assegurar a convergência do método. Para essa simulação, os cálculos foram estendidos até o termo de ordem $n = 201$, garantindo assim que a discrepância máxima entre o valor médio de duas tensões intervalares consecutivas, obtidas por meio da continuação analítica máxima implementada a partir da aproximação de Padé intervalar, seja inferior a 10^{-6} p.u., conforme indicado em (4.17), assegurando a convergência do algoritmo.

4.4.2.4 Controle de Reativos

Assim como na versão determinística do FPHo, a potência reativa intervalar gerada pelas máquinas foi analisada em caso de convergência do processo recursivo. Caso algum limite reativo tenha sido violado, as máquinas que tiveram seus limites de potência reativa violados tiveram seus valores de tensão ajustados. Nessas barras, a potência reativa injetada foi então igualada ao respectivo limite violado e, posteriormente, um novo fluxo de potência foi calculado. Esse processo ocorreu até que os reativos gerados pelas máquinas 1 e 2, a cada recursão, obedecessem aos limites físicos estabelecidos pelos geradores e apresentados na Tabela 6.

4.4.2.5 Resultados Intervalares

A seguir, na Tabela 11 e na Tabela 12, são apresentados os resultados intervalares das magnitudes e ângulos das tensões fasoriais para todas as barras do sistema tutorial, juntamente com a quantidade de reativo gerado por cada uma de suas máquinas, conforme indicado na Tabela 13.

Tabela 11 – Magnitudes de tensão do sistema tutorial.

Barra	Método		
	FPHo (p.u.)	FPHoI (p.u.)	MC (p.u.)
1	1	[1,0000; 1,0000]	[1,0000; 1,0000]
2	1	[1,0000; 1,0000]	[1,0000; 1,0000]
3	0,9612	[0,9552; 0,9672]	[0,9589; 0,9634]

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 12 – Ângulos de tensão do sistema tutorial.

Barra	Método		
	FPHo (°)	FPHoI (°)	MC (°)
1	0	[0,0000; 0,0000]	[0,0000; 0,0000]
2	-2,1288	[-2,5007; -1,7612]	[-2,2364; -2,0200]
3	-3,2646	[-3,6691; -2,8650]	[-3,4328; -3,0971]

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Tabela 13 – Geração de potência reativa no sistema tutorial.

Barra	Método		
	FPHo (Mvar)	FPHoI (Mvar)	MC (Mvar)
1	54,2523	[20,1757; 88,3316]	[49,8678; 58,7191]
2	57,2233	[53,4586; 61,0470]	[53,4586; 61,0470]

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Para garantir a confiabilidade dos resultados, foram realizadas comparações com os resultados obtidos por meio de simulações de MC, considerando um total de 20.000 simulações.

Analisando os resultados apresentados nas Tabelas 11, 12 e 13, é possível notar que todos os intervalos calculados pelo método FPHoI são mais amplos do que aqueles determinados pela abordagem de MC. Tal característica é necessária para validação da técnica proposta, conforme discutido em Sousa e Melo (2021).

4.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, todas as etapas envolvidas no desenvolvimento do FPHoI foram minuciosamente detalhadas. Isso abrange desde a adição de incertezas nos dados de carga e geração do sistema elétrico até a aplicação da AI para a obtenção de resultados intervalares do fluxo de potência.

Visando proporcionar uma visão geral e visual da sequência de procedimentos, foi apresentado um fluxograma que reúne as informações, para delinear de maneira clara como as simulações computacionais devem ser conduzidas.

Este capítulo também apresentou um exemplo prático da aplicação da metodologia intervalar proposta neste estudo, comparando seus resultados com os obtidos pela abordagem de MC. Por meio da exposição detalhada do FPHoI e sua implementação em um contexto específico, foi estabelecida uma base sólida para os leitores compreenderem e avaliarem a viabilidade e eficácia da metodologia proposta.

No próximo capítulo, o FPHoI será aplicado a sistemas de transmissão de diferentes tamanhos, sob diferentes cenários e condições operacionais. Seu desempenho será comparado com os resultados obtidos por diferentes abordagens, buscando demonstrar sua robustez numérica e eficiência computacional, e possíveis limitações da metodologia proposta serão discutidas.

5 RESULTADOS

São apresentados neste capítulo os resultados alcançados por meio de simulações realizadas em sistemas-teste com 6, 14, 30 e 57 barras. Para garantir a robustez e confiabilidade desses resultados, comparações com as abordagens clássicas amplamente empregadas no tratamento das incertezas em sistemas elétricos são tecidas.

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste trabalho, as simulações computacionais visam demonstrar a viabilidade e eficiência do método proposto para determinar soluções intervalares para o fluxo de potência, as quais podem ser comparadas com simulações de MC, implementadas por meio do método de NR em coordenadas polares considerando o controle de reativos.

Foram consideradas 5.000 simulações para o método de MC, sendo o parâmetro de incerteza α igual a 5% associado com os dados de carga e geração. Nesse caso, uma distribuição uniforme é associada aos dados de entrada do fluxo de carga (potência ativa e reativa) para calcular soluções intervalares para magnitudes e ângulos de tensão para cada barra do sistema. A tolerância de convergência adotada é de $\xi = 10^{-6}$ p.u. em todos os métodos implementados.

O algoritmo do FPHoI foi desenvolvido e implementado utilizando o software MATLAB em conjunto com o pacote de software IntLab, e todas as simulações foram conduzidas em um computador equipado com processador Intel® Core™ i5-1035G1 com velocidade de 1,00 GHz e 8 GB de memória RAM, executando o sistema operacional Windows 11.

Com base na Equação (5.1), é calculado o Índice de Sensibilidade IS_k para cada barra do sistema. Esse cálculo considera os valores das magnitudes de tensão determinísticas V_k^{det} calculadas em p.u., juntamente com os limites inferior V_k^{inf} e superior V_k^{sup} associados à solução intervalar fornecida pela metodologia intervalar.

$$IS_k = \frac{|V_k^{sup}| - |V_k^{inf}|}{|V_k^{det}|} 100\% \quad (5.1)$$

O Índice de Acomodação IA_k descrito na Equação (5.2) é empregado para avaliar a capacidade da solução proposta pelo FPHoI de acomodar os resultados intervalares obtidos pelo método de MC. Ambos os índices são calculados segundo as descrições detalhadas em Junior, Melo e Nepomuceno (2022).

$$IA_k = \frac{|V_k^{sup,MC}| - |V_k^{inf,MC}|}{|V_k^{sup,FPHoI}| - |V_k^{inf,FPHoI}|} 100\% \quad (5.2)$$

5.1.1 Cenários

Quatro cenários são considerados para as simulações computacionais:

- **Cenário I:** o sistema de potência está operando com carga nominal;
- **Cenário II:** o sistema de potência está operando com carga leve;
- **Cenário III:** o sistema de potência está operando com carga pesada;
- **Cenário IV:** o sistema de potência está operando com carga localizada próxima ao PMC.

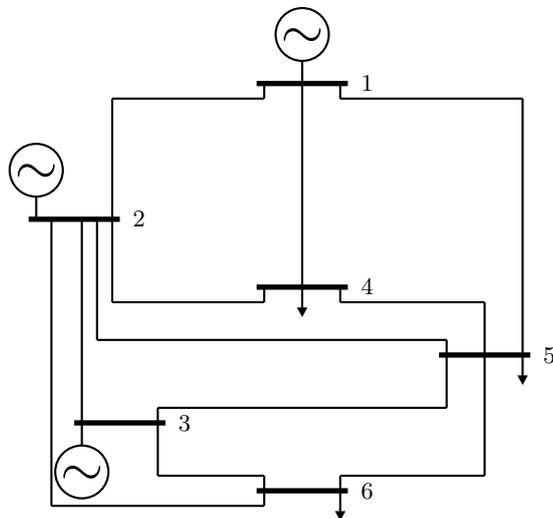
5.1.2 Sistemas-Teste

Três sistemas-teste foram selecionados para as simulações computacionais detalhadas: os sistemas de 6, 30 e 57 barras. A escolha desses sistemas visa abranger uma ampla variedade de configurações elétricas, proporcionando percepções abrangentes sobre o comportamento do FPHoI em diferentes contextos. A seguir, apresentam-se detalhes sobre as redes elétricas em questão.

5.1.2.1 Sistema 6 Barras Modificado

O sistema 6 barras modificado é apresentado originalmente em Wood, Wollenberg e Sheblé (2013). Entretanto, para atender aos desígnios delineados neste capítulo, foram realizadas pequenas adaptações nos dados do sistema, conforme descrito no Apêndice B deste trabalho. O diagrama unifilar da rede está representado na Figura 12, composto por três geradores, três cargas e 11 linhas de transmissão.

Figura 12 – Diagrama unifilar do sistema 6 barras modificado.

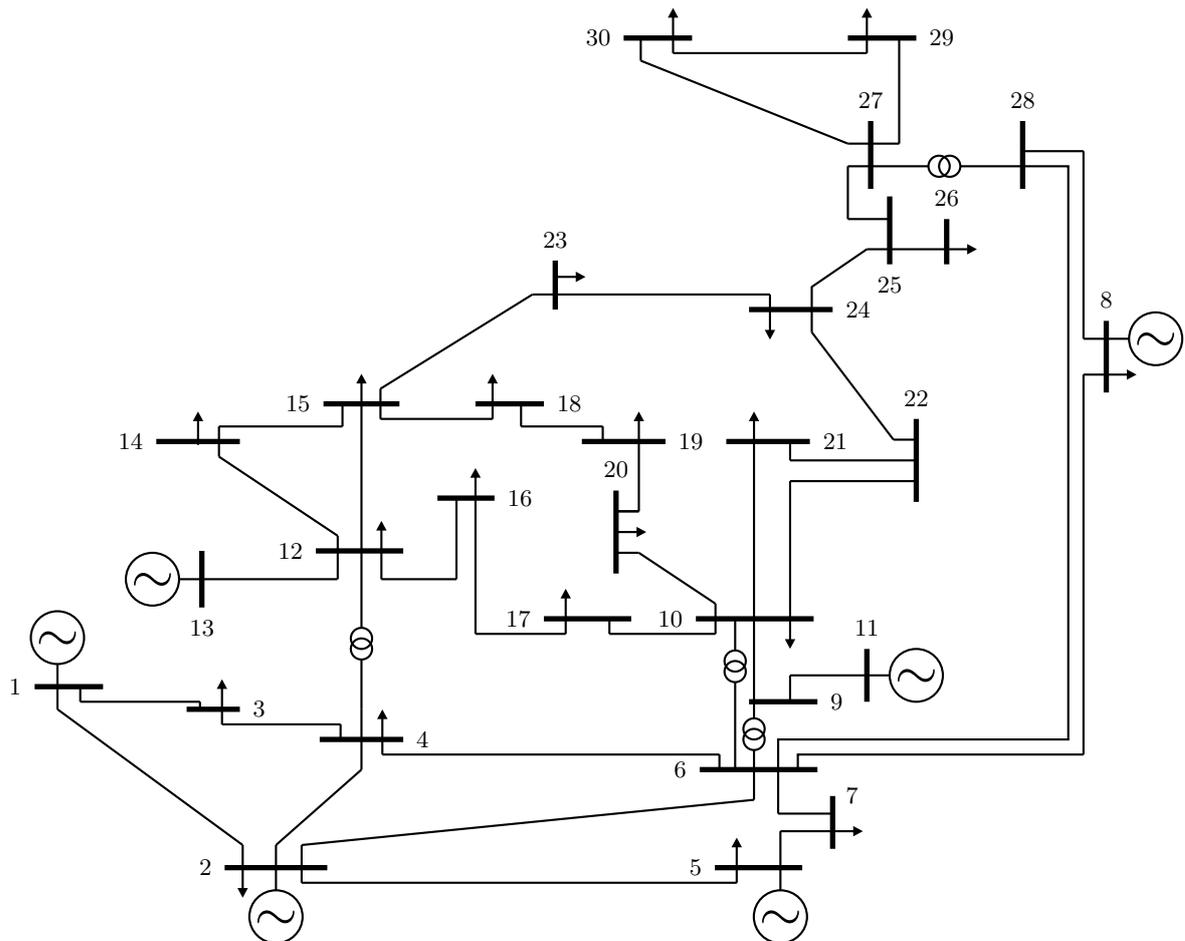


Fonte: Adaptada de Wood, Wollenberg e Sheblé (2013).

5.1.2.2 Sistema IEEE-30 Barras

O sistema IEEE-30 representa uma parte do sistema de potência do Centro-Oeste dos Estados Unidos em dezembro de 1961. O diagrama unifilar da rede é exemplificado na Figura 13, composto por seis geradores, 24 cargas, 41 linhas de transmissão e quatro transformadores. Dados originais relativos às cargas, linhas e limites de reativos podem ser consultados em UWEE (1999).

Figura 13 – Diagrama unifilar do sistema IEEE-30 barras.

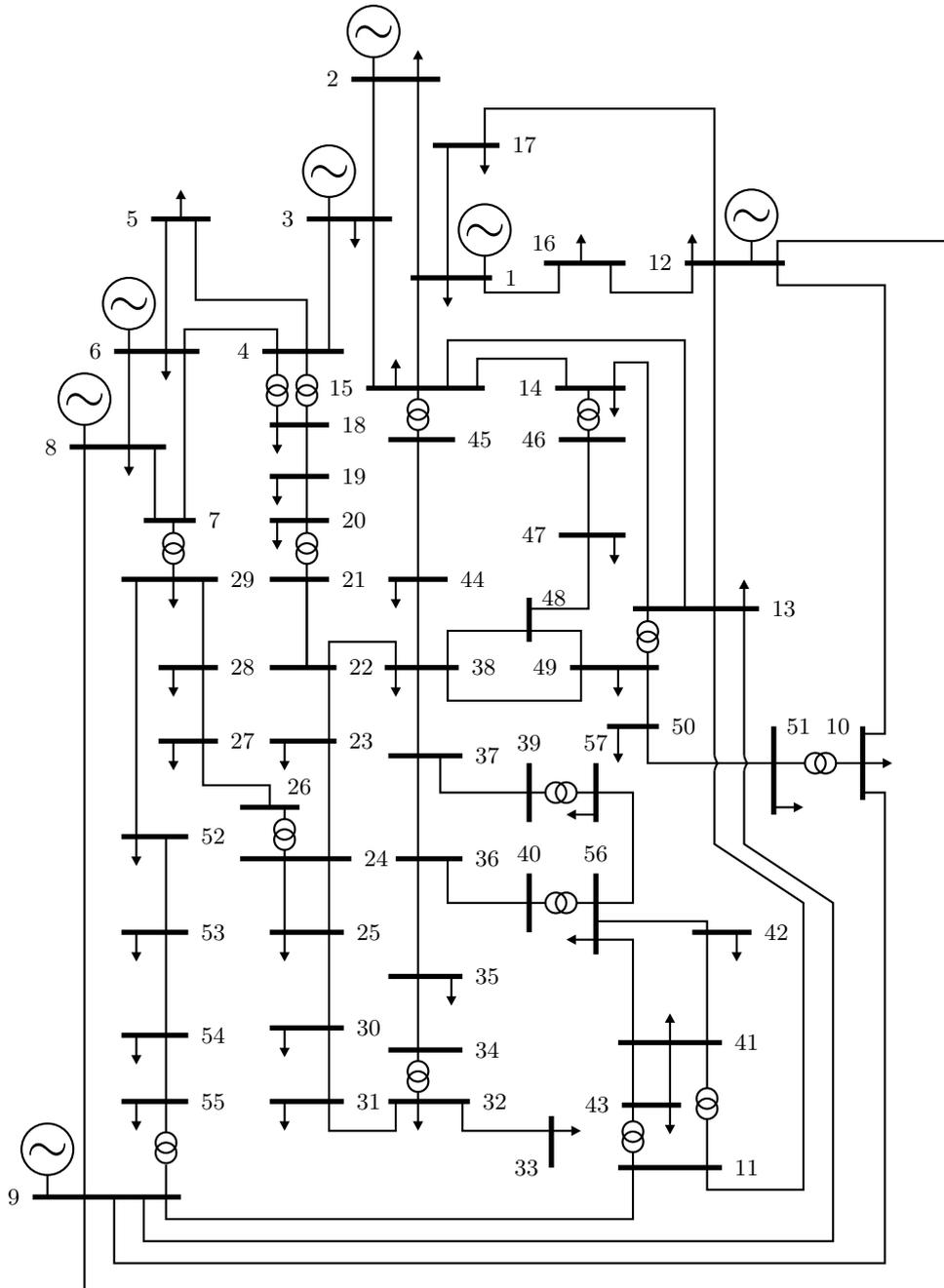


Fonte: Adaptada de UWEE (1999).

5.1.2.3 Sistema IEEE-57 Barras

O sistema IEEE-57 barras representa uma simplificação do sistema de potência do Centro-Oeste dos Estados Unidos em meados da década de 1960. A topologia malhada do sistema, ilustrada na Figura 14, é composta por sete geradores, 42 cargas, 65 linhas de transmissão e 15 transformadores. Dados originais relativos às cargas, geradores, linhas e limites de reativos estão disponíveis para consulta em UWEE (1999).

Figura 14 – Diagrama unifilar do sistema IEEE-57 barras.



Fonte: Adaptada de UWEE (1999).

5.2 FLUXO DE POTÊNCIA SEM CONTROLE DE REATIVOS

As simulações desta seção foram inicialmente conduzidas sem considerar os limites físicos das máquinas, para analisar a aplicabilidade do FPHoI.

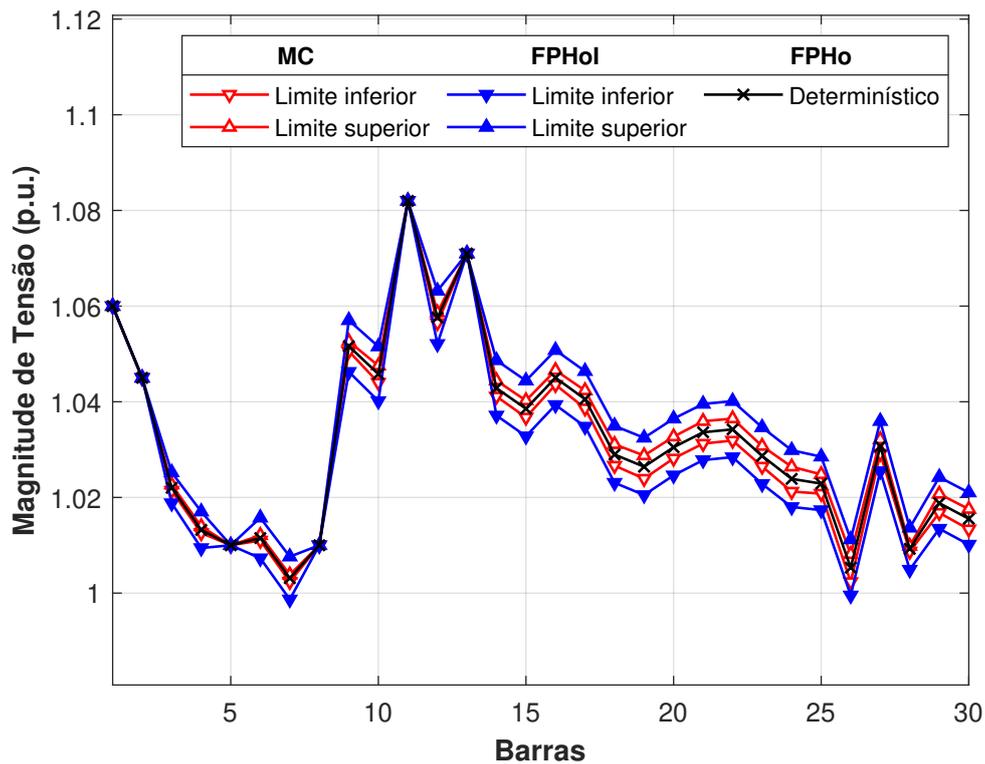
5.2.1 Soluções intervalares para o sistema IEEE-30 barras

5.2.1.1 Cenário I

Este estudo de caso pretende avaliar a aplicabilidade da metodologia proposta considerando a operação do sistema IEEE-30 barras com carga nominal.

As Figuras 15 e 16 apresentam os resultados do estado do sistema, exibindo as magnitudes e ângulos das tensões intervalares em cada barra do SEP. Note que os resultados são gerados por duas abordagens distintas, sendo a representação da metodologia de MC na cor vermelha e do FPHoI na cor azul.

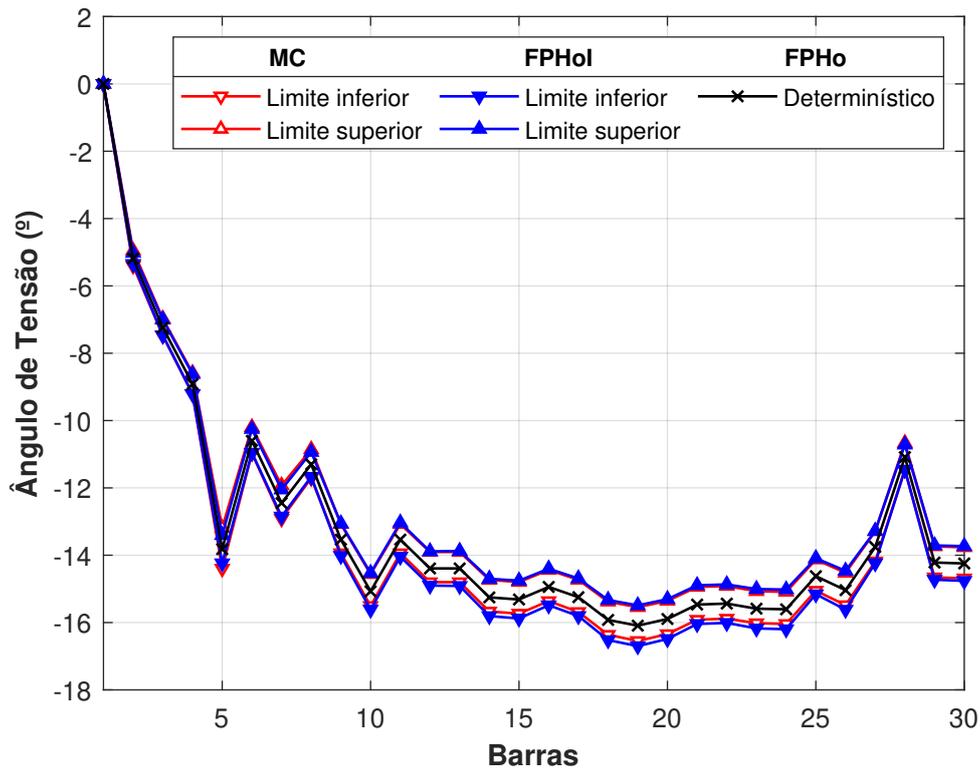
Figura 15 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A solução obtida pelo FPHoI é semelhante àquela calculada pelo método de MC, pois todos os valores do FPHoI acomodam os resultados obtidos pelas simulações de MC. Além disso, a tendência do perfil de tensão também é semelhante, e os valores determinísticos obtidos com o FPHo tradicional estão contidos nos limites calculados pelos intervalos.

Figura 16 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.



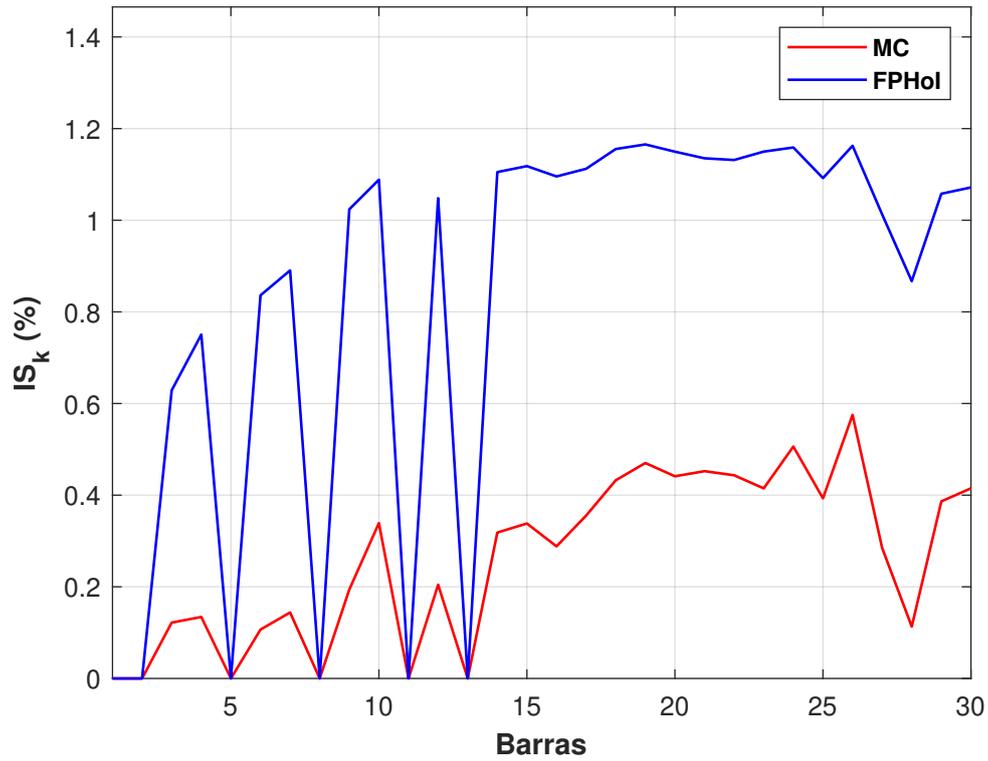
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Com base em (5.1), o índice IS_k é determinado para cada barra do sistema. Esse cálculo considera os valores das grandezas de tensão calculados em p.u., considerando um nível de incerteza de 5% associado aos dados de geração e carga.

Como se pode notar na Figura 17, os índices IS_k calculados utilizando a metodologia FPHoI demonstram sensibilidades mais elevadas do que aqueles obtidos pela abordagem de MC. Esse resultado era esperado, uma vez que os intervalos calculados pelo FPHoI são mais amplos do que os obtidos por meio das simulações de MC. No entanto, em ambas as metodologias, os valores de IS_k são iguais a zero nas barras PV (2, 5, 8, 11 e 13), já que suas tensões são especificadas. Ambas as metodologias implementadas indicam que a maior sensibilidade de tensão está associada à barra 26, a qual é inferior a 1,20% quando se utiliza o FPHoI.

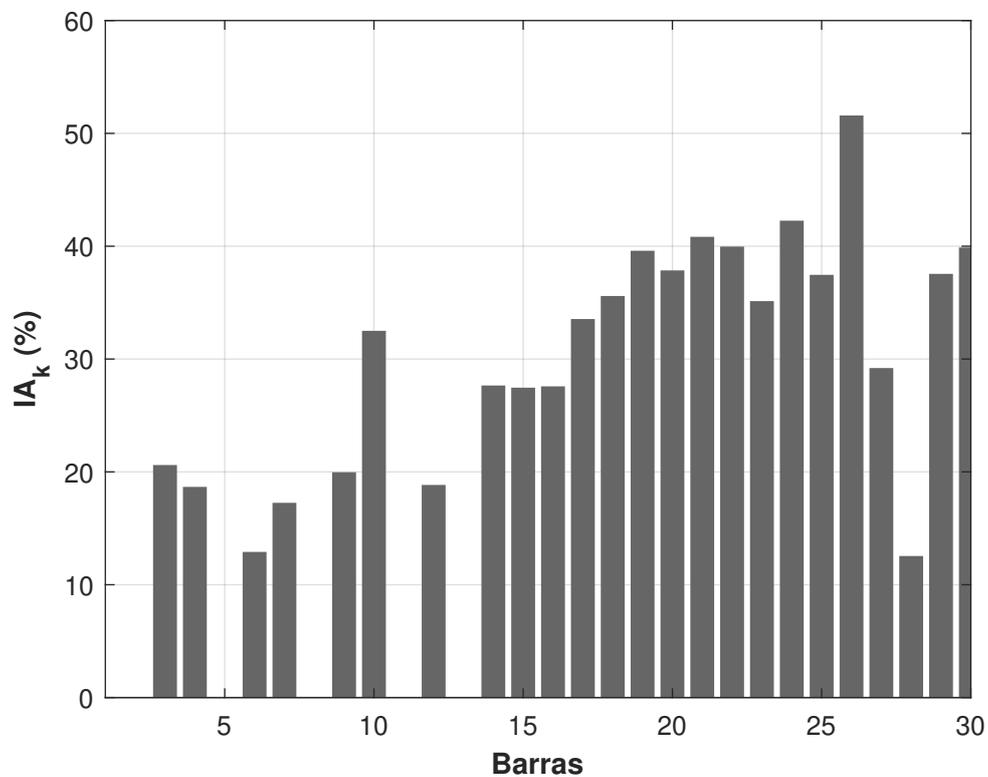
Na Figura 18, são apresentados os índices IA_k para todas as barras do sistema IEEE-30 barras, evidenciando que os resultados obtidos com o FPHoI se alinham com os intervalos determinados pela abordagem de MC, validando a metodologia para a carga nominal. Embora esses índices geralmente fiquem abaixo de 52%, isso não implica em uma desvantagem do método proposto, pois esses valores estão consoantes ao que é comumente observado no contexto da análise intervalar do fluxo de potência, conforme discutido em Junior, Melo e Nepomuceno (2022).

Figura 17 – Índices de sensibilidade do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 18 – Índices de acomodação do sistema IEEE-30 barras – Cenário I.

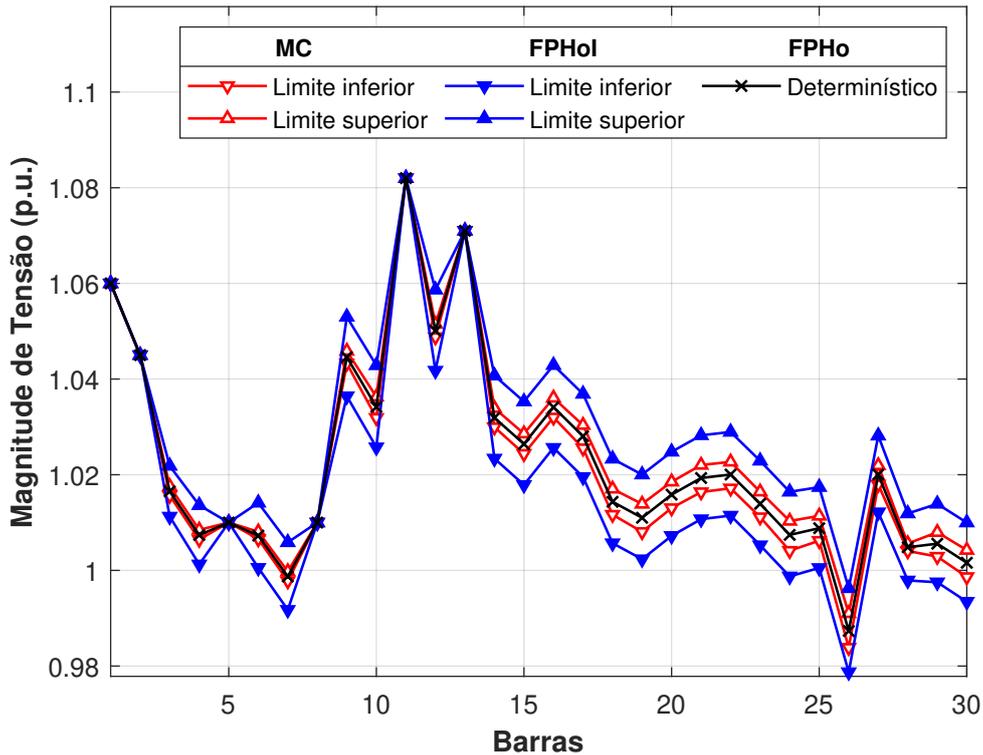


Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

5.2.1.2 Cenário III

Neste cenário de estudo, a carga do sistema é aumentada em 20%, com o objetivo de avaliar a continuidade da compatibilidade entre os resultados da metodologia proposta e os resultados obtidos pelo método de MC. Nessa conjuntura, as Figuras 19 e 20 exibem os resultados das magnitudes e ângulos das tensões em todas as barras do sistema-teste.

Figura 19 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.



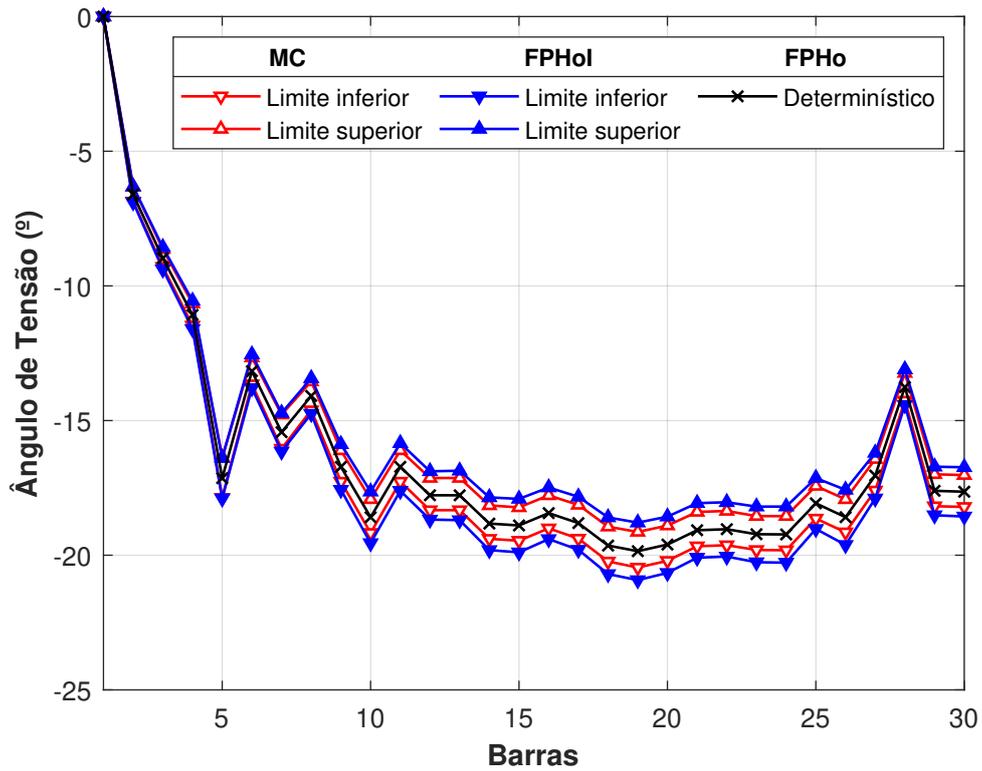
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Uma vez que a carga do sistema é aumentada, é possível observar magnitudes de tensão mais baixas no perfil de tensão, como 0,98 p.u. Além disso, ângulos maiores em relação à barra $V\theta$ também podem ser observados. Mesmo nessa situação mais extrema, os intervalos apresentaram resultados satisfatórios, com os resultados do FPHoI e da abordagem de MC sendo semelhantes em seus padrões e valores.

A Figura 21 apresenta os resultados dos índices IS_k para cada barra do sistema no Cenário III. Como era esperado, devido ao aumento da carga, são obtidas sensibilidades mais elevadas. No entanto, tanto os resultados da abordagem de MC quanto os do FPHoI indicam de forma satisfatória o impacto dos dados incertos de carga/geração. Os intervalos calculados pelo FPHoI resultam em uma sensibilidade inferior a 1,80%.

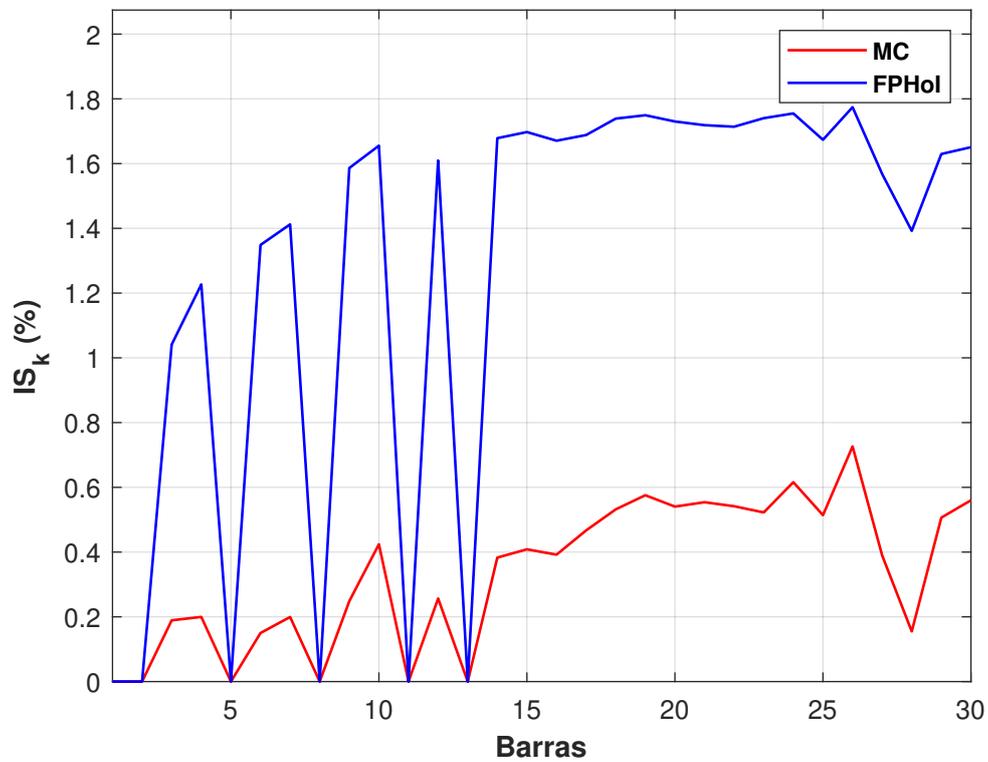
O índice IA_k também é calculado neste estudo de caso, conforme apresentado na Figura 22. Em comparação com o Cenário I, percebe-se uma redução dos índices IA_k em todas as barras do sistema, o que também é comumente observado no contexto da análise intervalar do fluxo de potência (Junior; Melo; Nepomuceno, 2022).

Figura 20 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.



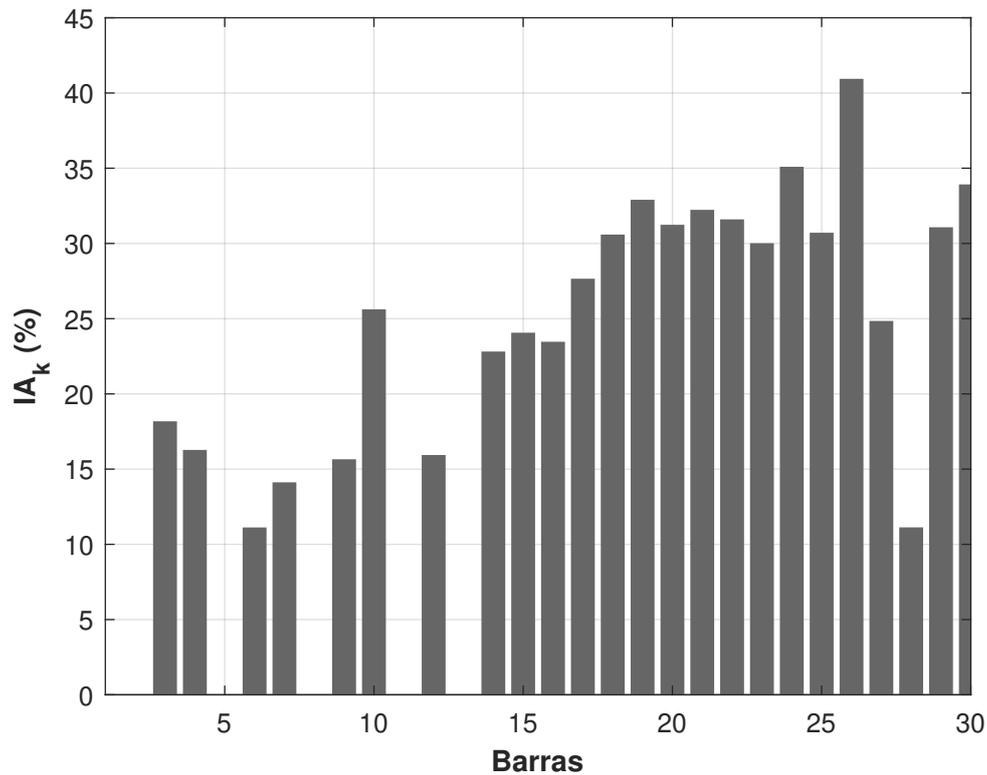
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 21 – Índices de sensibilidade do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 22 – Índices de acomodação do sistema IEEE-30 barras – Cenário III.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

5.3 FLUXO DE POTÊNCIA COM CONTROLE DE REATIVOS

Diferentemente dos estudos de caso anteriores, as simulações realizadas nesta seção consideram os limites físicos das máquinas.

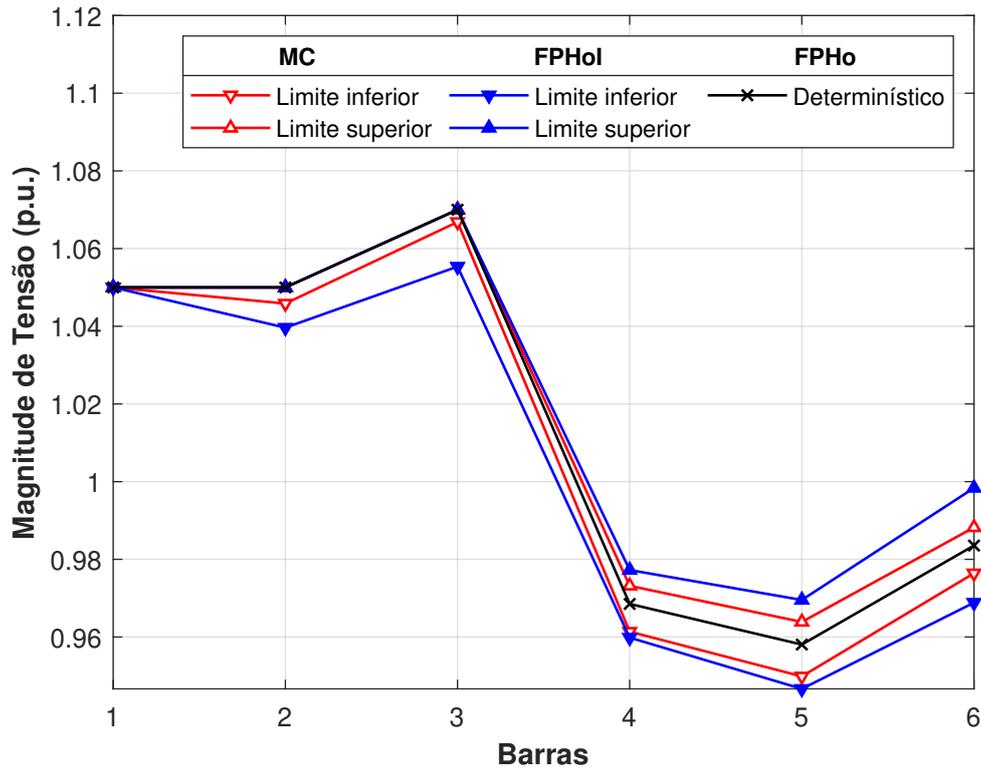
5.3.1 Soluções intervalares para o sistema 6 barras modificado

5.3.1.1 Cenário I

Neste primeiro cenário, o sistema 6 barras modificado está operando com carga nominal. Os resultados das magnitudes e ângulos de tensão dos barramentos são apresentados nas Figuras 23 e 24, respectivamente. Todos os intervalos calculados pelo FPHoI são mais amplos do que os obtidos por simulações de MC, mesmo em casos em que a geração de potência reativa é igual aos seus limites correspondentes.

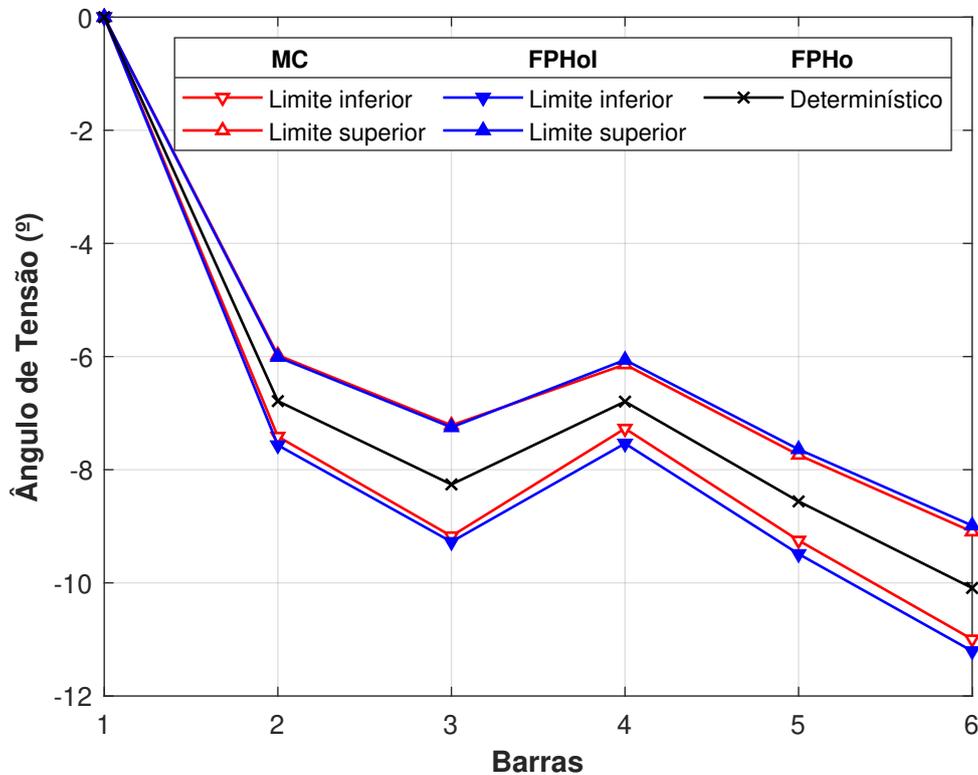
Na Figura 25, a forma na cor rosa representa os limites de potência reativa das barras PV e da barra $V\theta$. Os intervalos determinados pelo método proposto são semelhantes aos obtidos pelas simulações de MC. Observe que a potência reativa associada às barras 2 e 3 é igual aos seus valores máximos correspondentes. Conforme discutido em Vaccaro, Canizares e Villacci (2010), quando a potência reativa associada às barras PV atinge seus limites correspondentes, o limite superior do intervalo é igual ao limite de potência reativa, respeitando os limites físicos da máquina.

Figura 23 – Magnitudes de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário I.



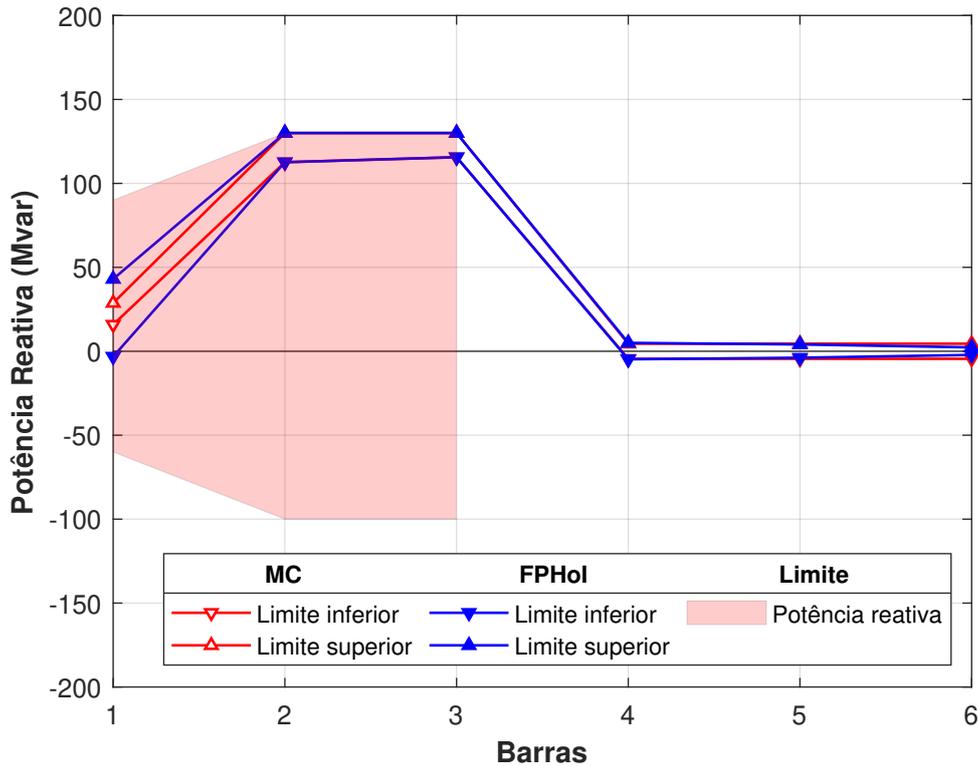
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 24 – Ângulos de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 25 – Potência reativa gerada no sistema 6 barras modificado – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Observe que, sempre que a potência reativa atinge seu limite, a magnitude de tensão associada à barra PV correspondente é determinada por um intervalo não degenerado, o que significa que a tensão especificada para a barra PV está entre os limites superior e inferior devido às incertezas associadas à carga e geração do sistema.

5.3.1.2 Cenário II

Neste estudo de caso, a carga do sistema 6 barras modificado é reduzida, sendo multiplicada por 0,10, simulando uma condição de carga leve. Para essa condição de carregamento, as Figuras 26 e 27 apresentam resultados intervalares para as magnitudes e ângulos de tensão para todos os barramentos do sistema.

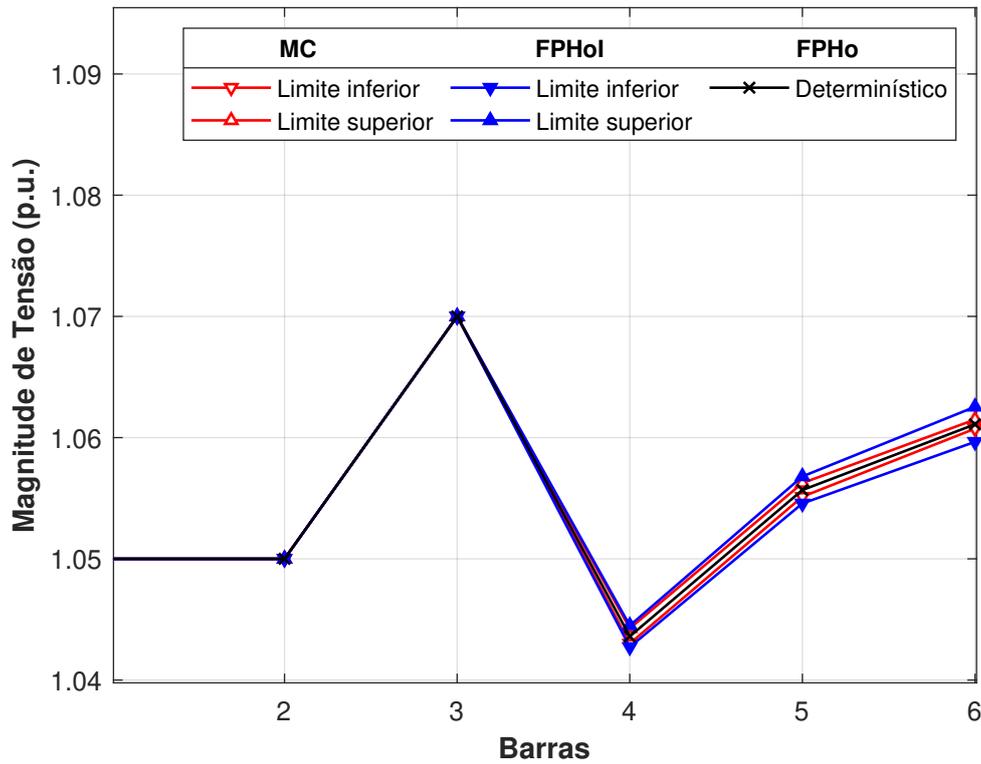
Observa-se na Figura 28 que todas as potências reativas são calculadas dentro dos limites determinados pela forma na cor rosa.

5.3.1.3 Cenário III

Neste estudo de caso, a carga do sistema é multiplicada por 1,10. As Figuras 29 e 30 apresentam os resultados intervalares para as magnitudes e ângulos de tensão para todos os barramentos do sistema.

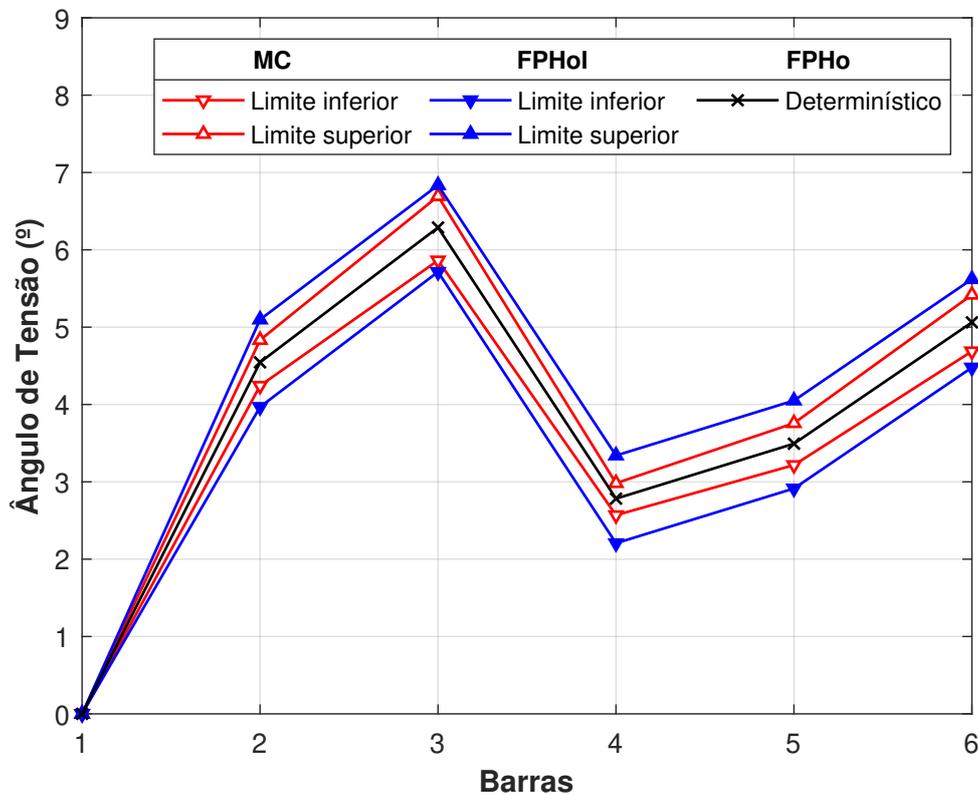
Observe que, na Figura 31, mesmo nessa situação extrema, o FPHoI é capaz de determinar os intervalos respeitando os limites físicos dos geradores.

Figura 26 – Magnitudes de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário II.



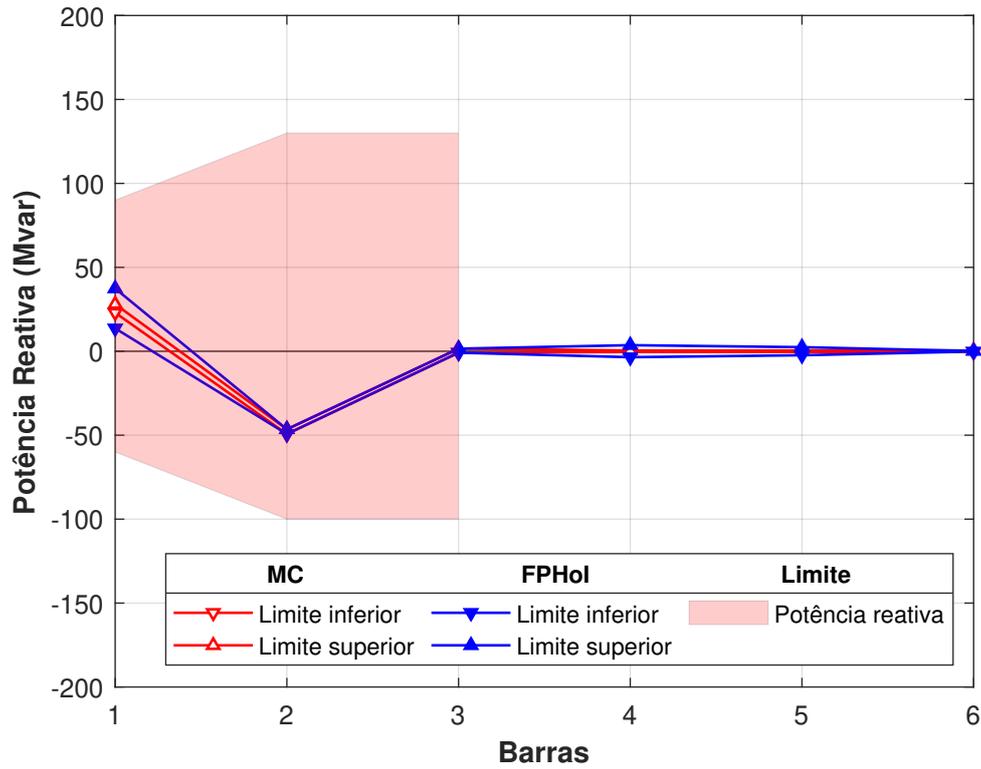
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 27 – Ângulos de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário II.



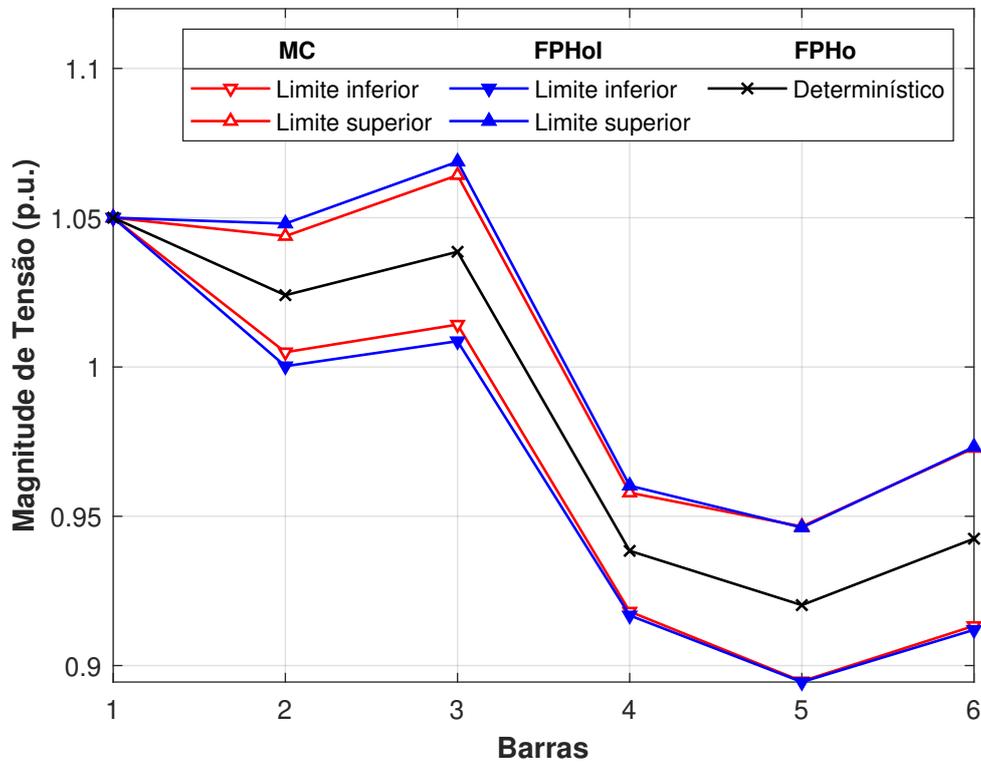
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 28 – Potência reativa gerada no sistema 6 barras modificado – Cenário II.



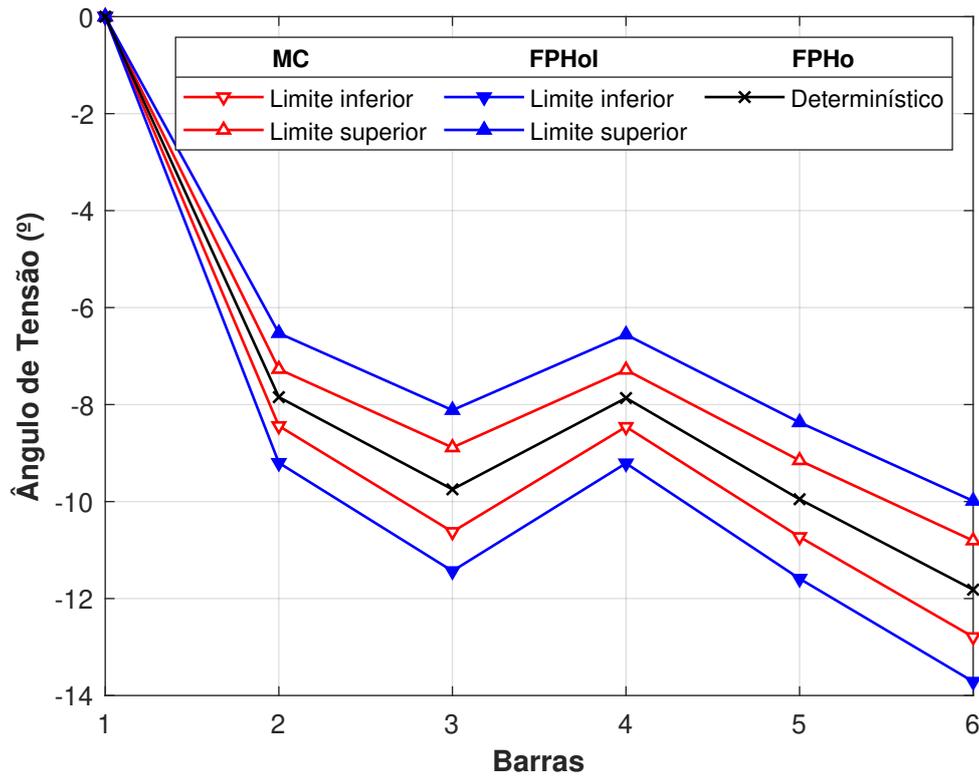
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 29 – Magnitudes de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário III.



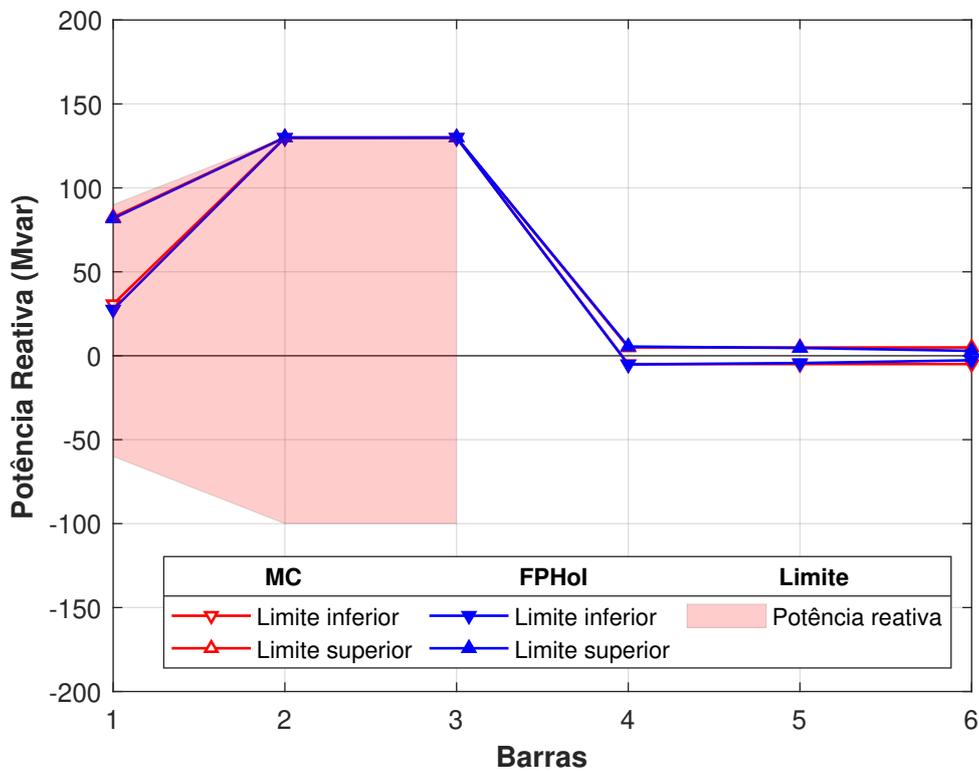
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 30 – Ângulos de tensão do sistema 6 barras modificado – Cenário III.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 31 – Potência reativa gerada no sistema 6 barras modificado – Cenário III.



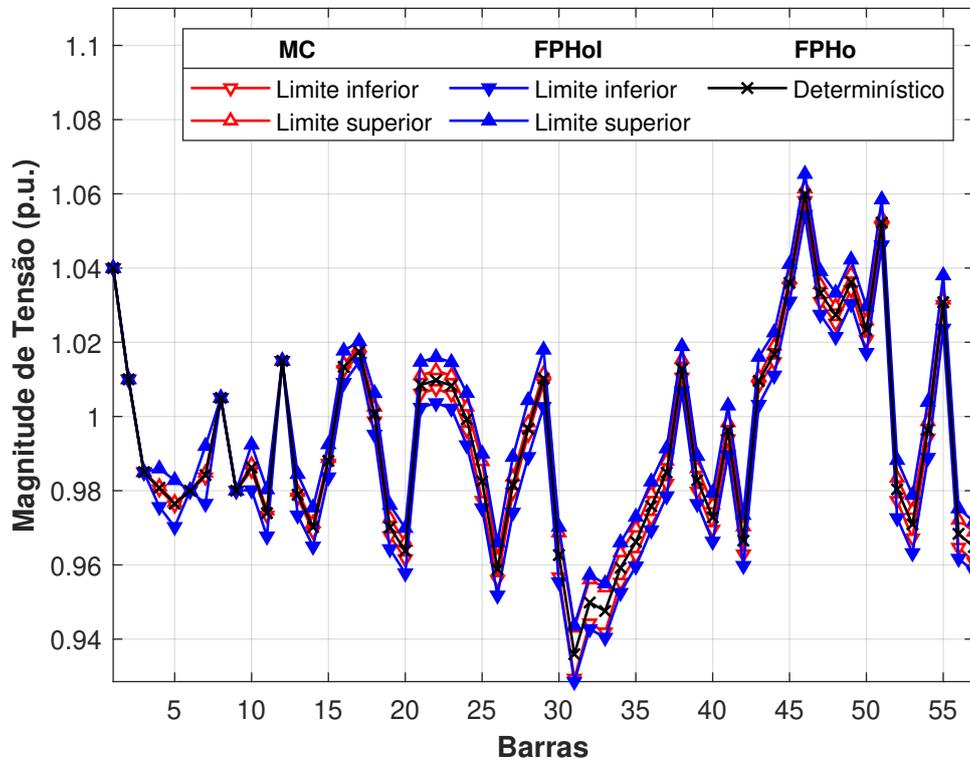
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

5.3.2 Soluções intervalares para o sistema IEEE-57 barras

5.3.2.1 Cenário I

As Figuras 32 e 33 exibem as magnitudes e os ângulo das tensões intervalares considerando carga nominal. Conforme esperado, os resultados obtidos pelo FPHoI englobam tanto os resultados determinísticos, quanto os obtidos pelas simulações de MC. É relevante observar que, nas barras PV (2, 3, 6, 8, 9 e 12) e na barra de referência (1), os intervalos calculados para as magnitudes de tensão por meio do MC e do FPHoI são degenerados. Isso pressupõe que os valores intervalares da geração de reativos sejam afetados pelas incertezas nos dados de carga e geração.

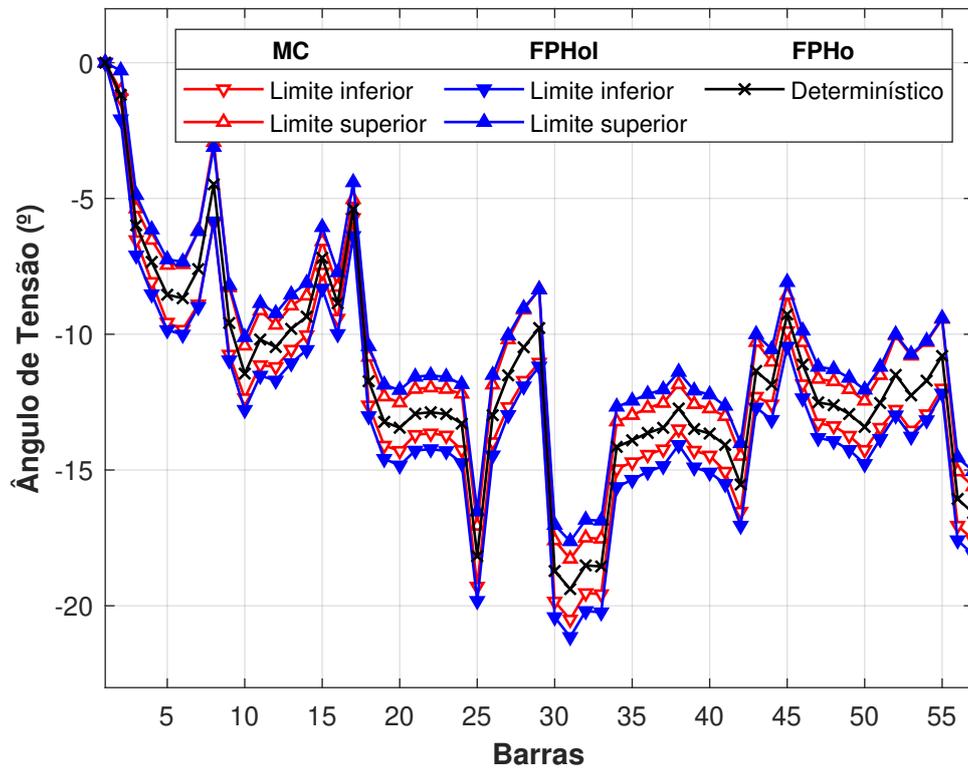
Figura 32 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

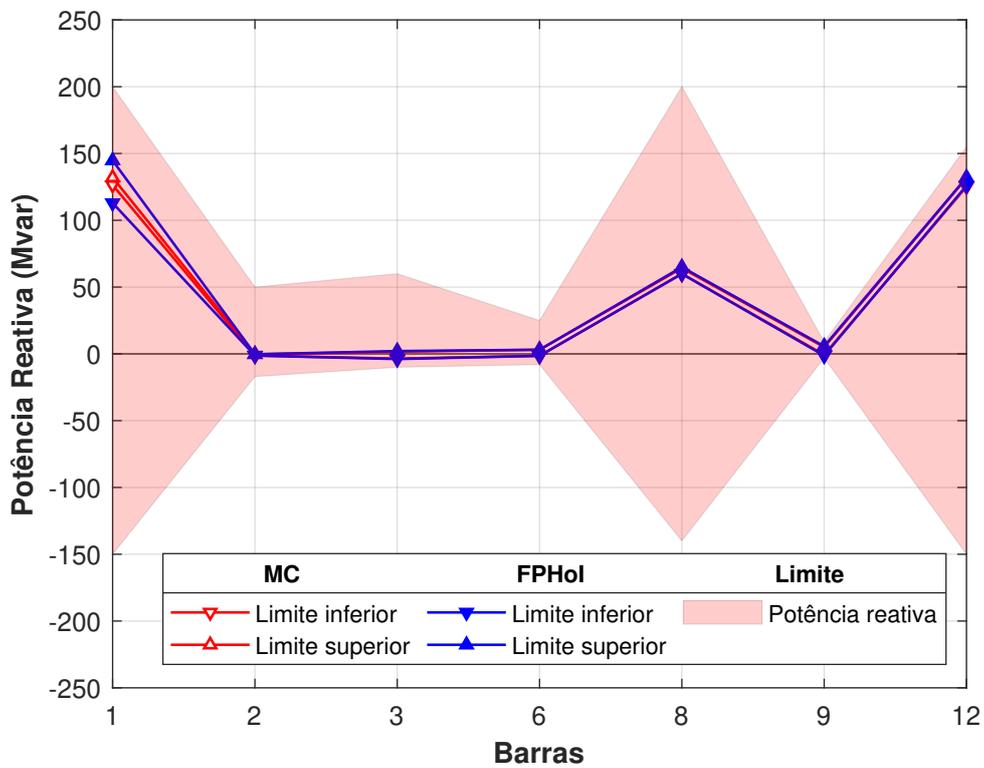
Resultados intervalares da potência reativa gerada no sistema IEEE-57 estão ilustrados na Figura 34. Note que também foram consideradas duas metodologias distintas para a análise dos reativos gerados (MC em vermelho e FPHoI em azul) e que os limites inferiores e superiores da geração de reativos impostos às barras PV e à barra $V\theta$ estão associados à região hachurada em rosa. Observe que os limites de potência reativa gerada não foram ultrapassados em nenhuma das barras PV, e o reativo gerado pelas máquinas é representado por intervalos não degenerados, como esperado. Esses resultados demonstram que as máquinas estão operando entre os limites de potência reativa especificados. Embora pareça que a potência gerada pela máquina 2 seja um número intervalar degenerado, o *zoom* apresentado na Figura 35 mostra sua não-degeneração.

Figura 33 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário I.



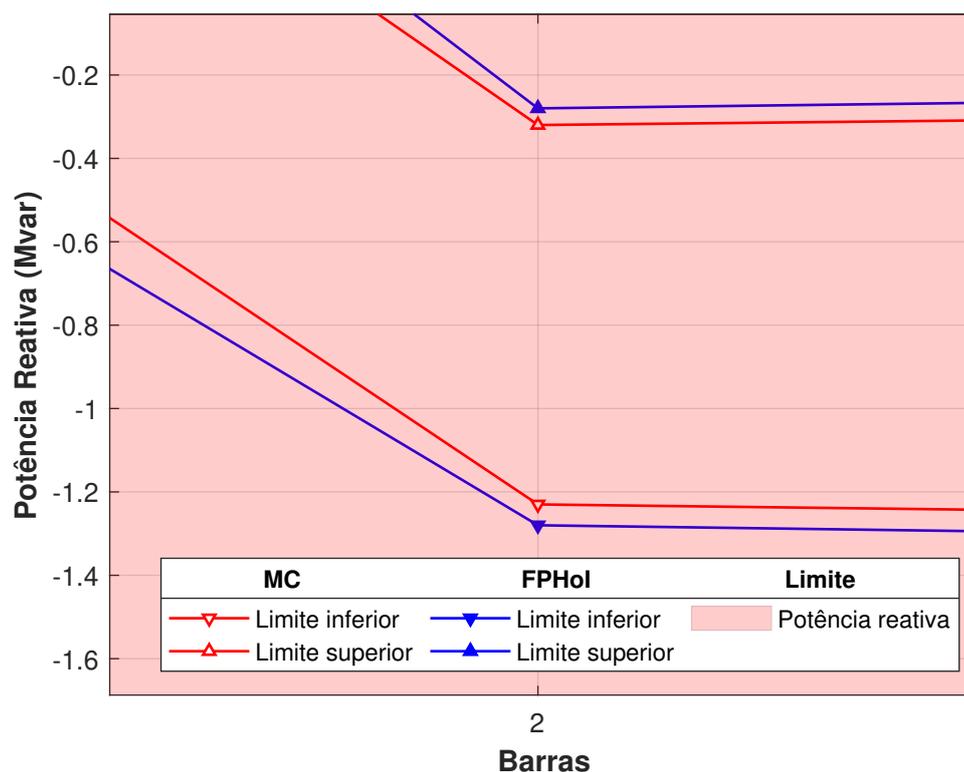
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 34 – Potência reativa gerada no sistema IEEE-57 barras – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 35 – Potência reativa gerada pelo gerador 2 do sistema IEEE-57 barras – Cenário I.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

De modo geral, os resultados encontrados corroboram com a afirmação previamente mencionada, indicando que as incertezas inerentes aos dados de carga e geração, ao não se manifestarem nos valores das magnitudes de tensão, se refletem na geração de reativos.

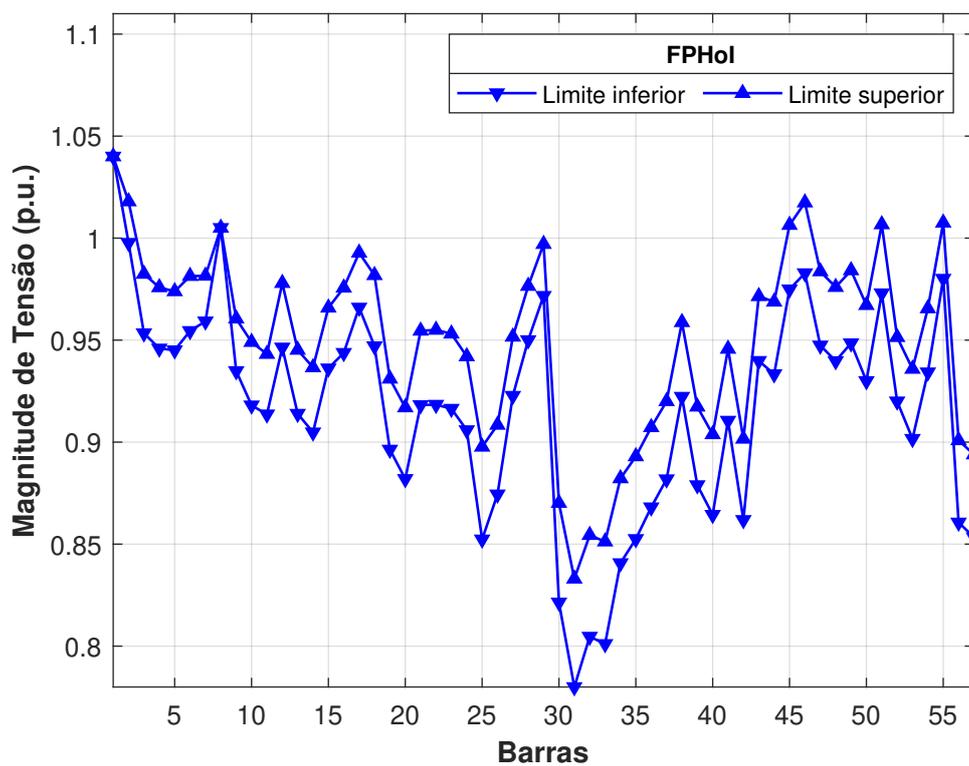
5.3.2.2 Cenário IV

Neste estudo de caso, a robustez do FPHoI é analisada utilizando o sistema IEEE-57 barras, com a carga posicionada próxima ao PMC ($\lambda = 1,40$), a fim de proporcionar uma análise mais aprofundada da resiliência e eficácia do FPHoI frente ao método de NR em cenários desafiadores e sujeitos às incertezas nos dados de carga e geração.

Resultados intervalares dos fasores de tensão para todas as barras do sistema, calculados pelo método FPHoI, são exibidos nas Figuras 36 e 37. Tais resultados evidenciam a robustez da metodologia proposta na análise de SEPs em situações críticas e próximas ao ponto de colapso de tensão.

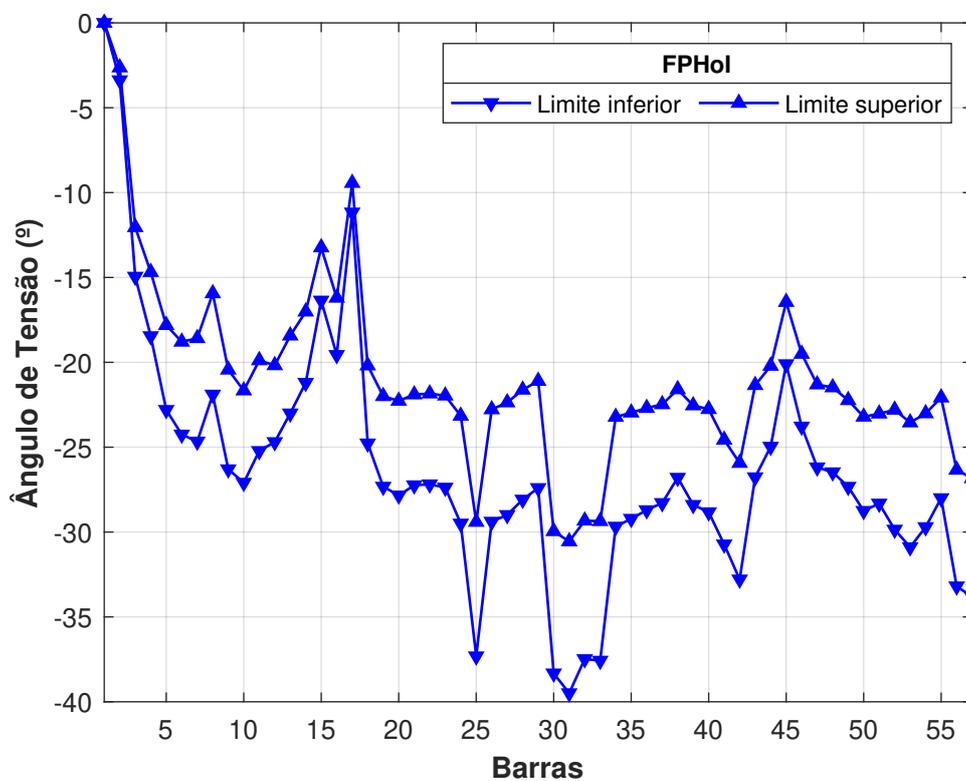
A razão para serem apresentados somente os resultados do FPHoI reside no fato de que o método de NR de primeira ordem implementado não converge para uma solução factível do fluxo de potência com o sistema operando próximo ao PMC. Ademais, é importante salientar que o sistema-teste IEEE-57 barras apresenta mal-condicionamento numérico da matriz Jacobiana, mesmo quando opera em carga nominal, uma vez que possui elevadas normas de incrementos, conforme discutido em Oliveira (2021).

Figura 36 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário IV.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

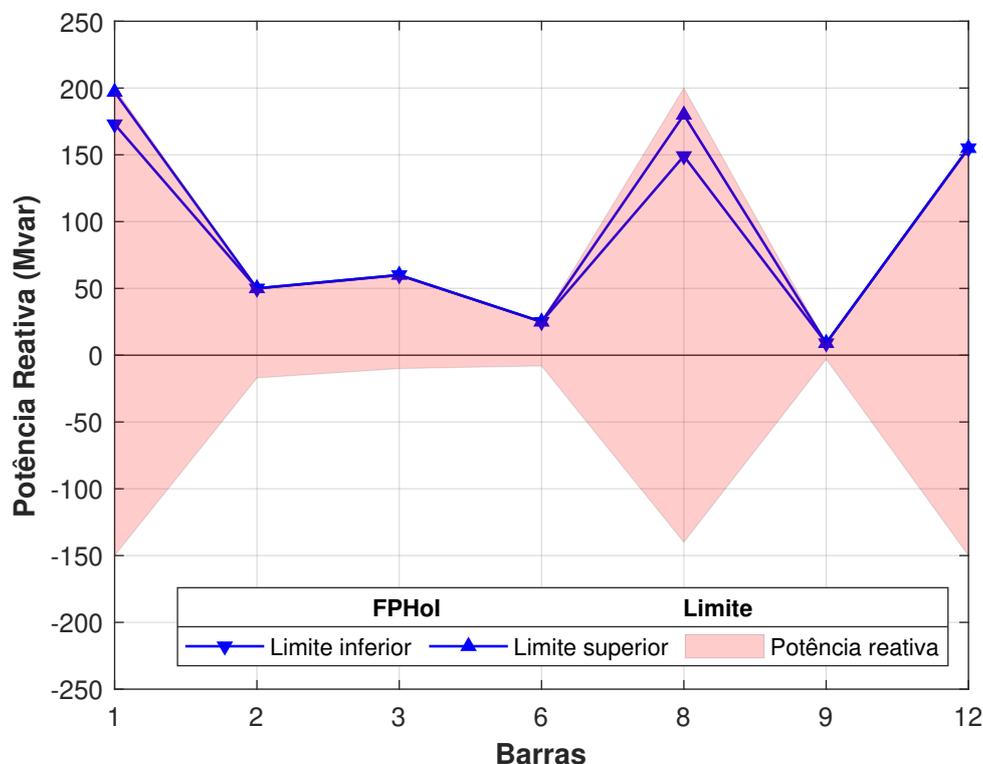
Figura 37 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-57 barras – Cenário IV.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A Figura 38 apresenta os resultados intervalares para a potência reativa gerada pelas máquinas do sistema IEEE-57 operando próximo ao PMC.

Figura 38 – Potência reativa gerada no sistema IEEE-57 barras – Cenário IV.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

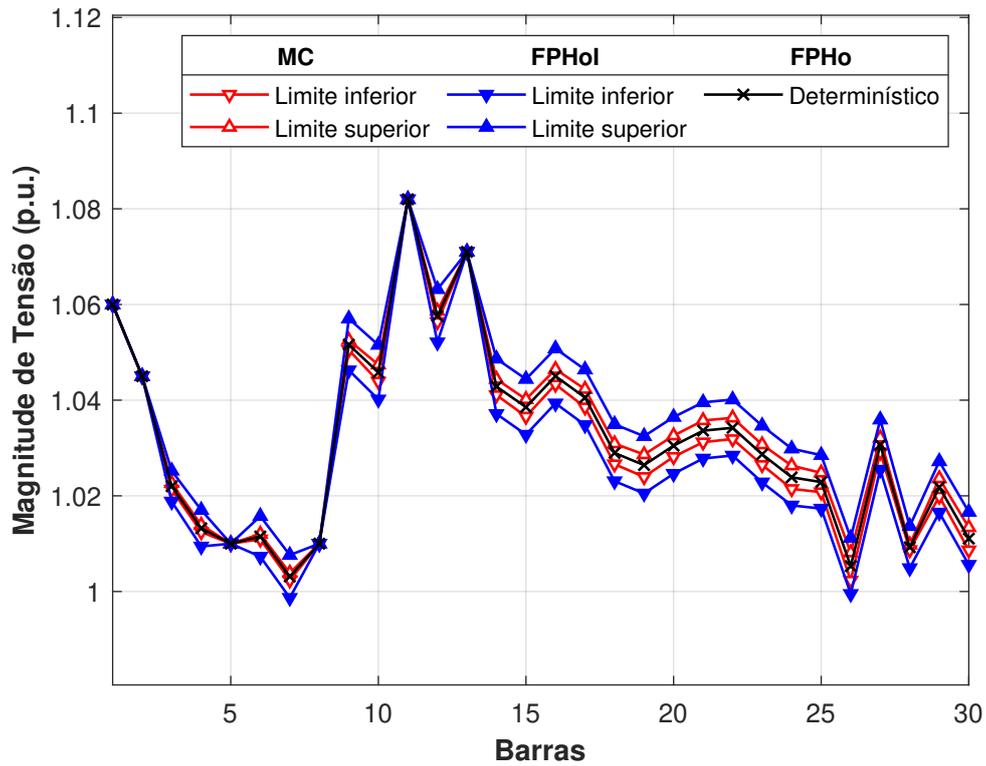
5.4 ANÁLISE DE CONTINGÊNCIA

Neste estudo de caso, é simulada uma contingência simples na rede IEEE-30 barras em carregamento nominal, com base em uma interrupção da linha que conecta as barras 29 e 30. O propósito é avaliar o comportamento do método proposto também para análises de contingência.

As Figuras 39 e 40 exibem os resultados intervalares para todas as magnitudes e ângulos em cada barra do sistema. É evidente que ambas as metodologias produzem resultados semelhantes, como era esperado, demonstrando um desempenho bem-sucedido do método proposto.

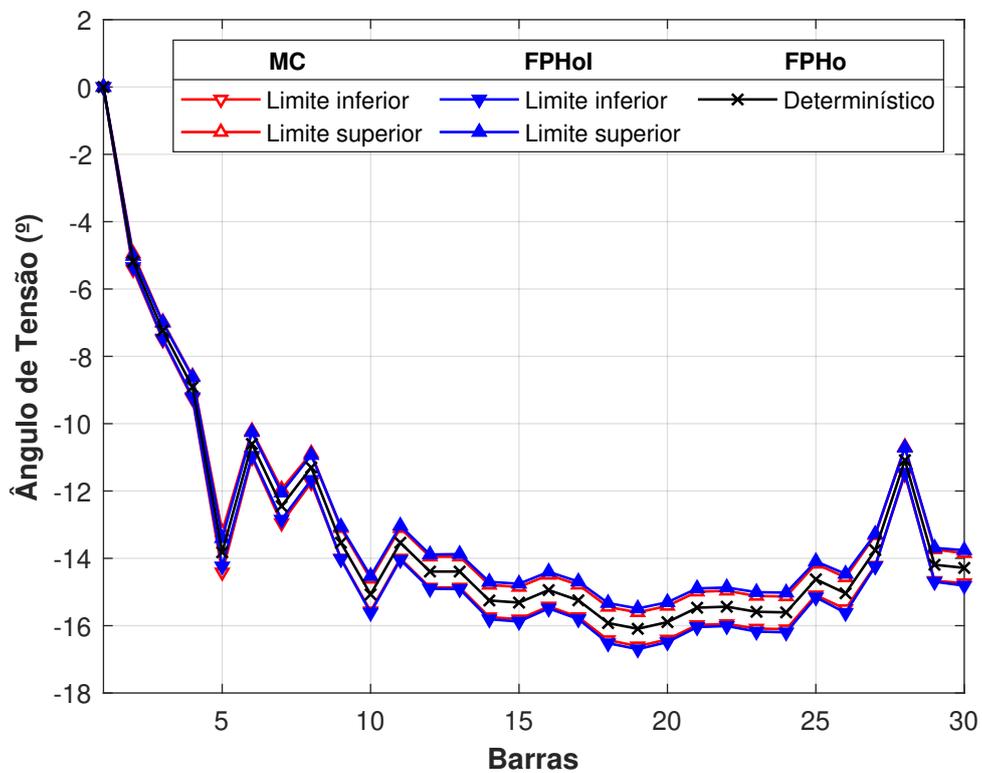
Na Figura 41, são exibidos os valores do índice IS_k para todas as barras. É notável que, mesmo após a ocorrência da contingência, os resultados intervalares ainda são eficazes na avaliação do impacto dos dados incertos sobre os resultados do fluxo de potência. Isso ressalta a robustez do método proposto, que mantém sua capacidade de análise mesmo em situações de contingência, fornecendo percepções valiosas para a compreensão do comportamento do sistema elétrico frente a eventos inesperados.

Figura 39 – Magnitudes de tensão do sistema IEEE-30 barras em contingência.



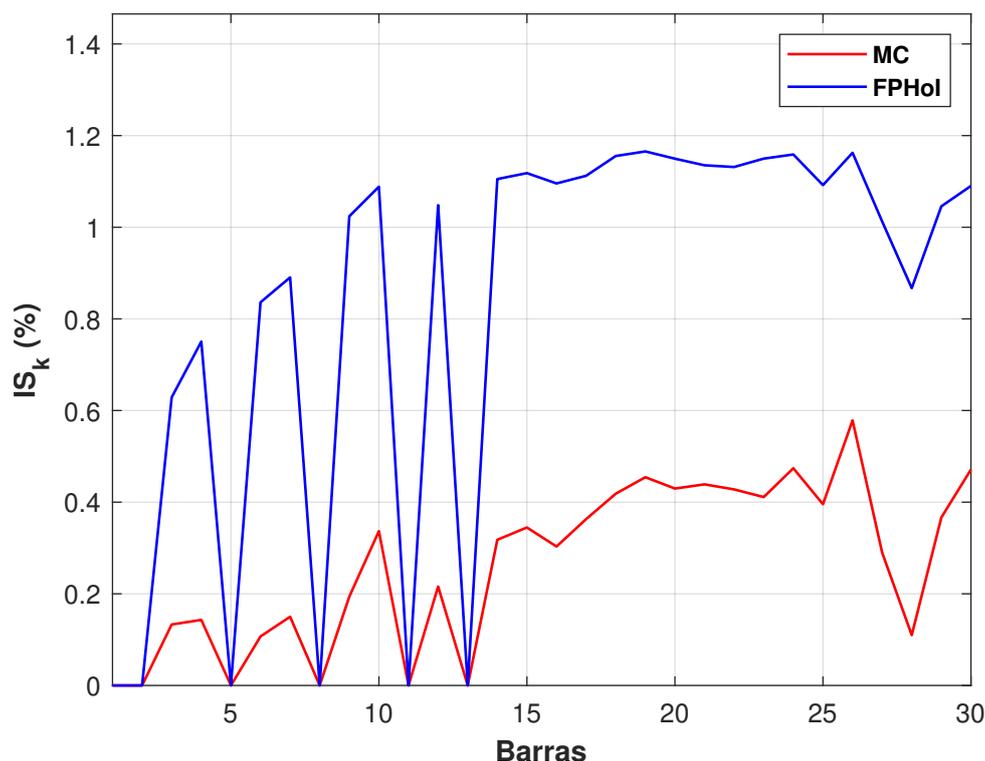
Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 40 – Ângulos de tensão do sistema IEEE-30 barras em contingência.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 41 – Índices de sensibilidade do sistema IEEE-30 barras em contingência.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Na Figura 42, são apresentados os índices IA_k calculados para cada uma das barras do sistema após a ocorrência da contingência. Observa-se que todos os valores são ligeiramente inferiores aos observados quando o sistema opera em condições normais de rede. Essa leve redução dos valores após a contingência indica que o sistema analisado demonstra resiliência a essa simulação de contingência. Esse resultado é indicativo tanto da segurança quanto da estabilidade do sistema, uma vez que os valores das tensões em todos os barramentos permanecem praticamente inalterados após a ocorrência da contingência na linha 29–30.

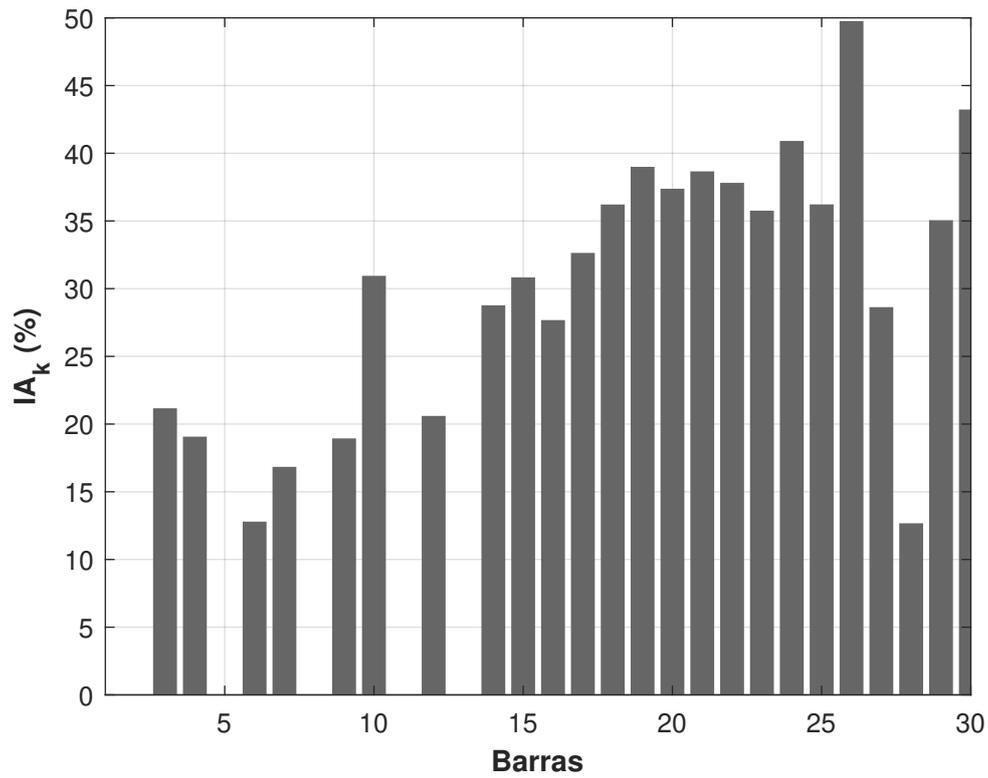
5.5 CURVA PV ASSOCIADA AO INCREMENTO DE CARGA

A metodologia proposta neste trabalho também foi utilizada para avaliar o comportamento das curvas PV no contexto da estabilidade de tensão.

Para as simulações, a carga de cada barra PQ é multiplicada por fatores de carregamento de 0,20 p.u. até 1,20 p.u. Uma vez que a barra crítica do sistema IEEE-30 barras é a barra 30 (Teixeira; Melo; Filho, 2021), a curva PV associada a essa barra é apresentada na Figura 43.

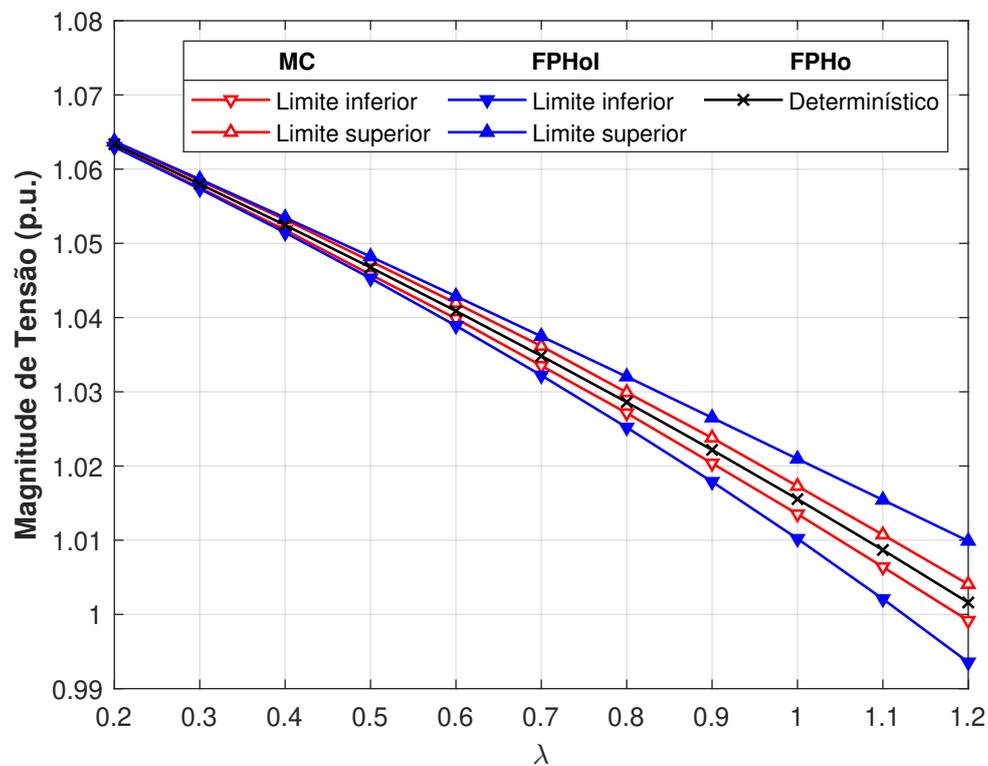
Observe que, para cada fator de carga, são calculados tanto o valor determinístico quanto os intervalos determinados pelo método de MC e pelo FPHol. É notável que os intervalos gerados pela abordagem de MC são mais estreitos do que os resultados do

Figura 42 – Índices de acomodação do sistema IEEE-30 barras em contingência.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Figura 43 – Curva PV para a barra 30 do sistema IEEE-30 barras.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

FPHoI e apresentam uma característica peculiar: à medida que o fator de carga aumenta, os intervalos se tornam mais sensíveis, ou seja, mais amplos. Essa propriedade não é exclusiva das abordagens de MC e FPHoI, mas também pode ser observada em outros métodos intervalares, conforme discutido em Sousa e Melo (2021) e em Junior, Melo e Nepomuceno (2022). Todavia, é possível observar satisfatoriamente a tendência de redução da magnitude da tensão com o aumento da carga, uma vez que a rede está operando em estado normal e seguro.

5.6 ANÁLISE COMPARATIVA COM MÉTODOS ALTERNATIVOS

Dado que o FPHoI é introduzido nesta dissertação, é de suma importância comparar seus resultados intervalares com métodos alternativos, bem como aplicá-lo a outros sistemas elétricos. Nesse contexto, busca-se neste estudo de caso comparar valores máximos dos índices IS_k e IA_k para cada sistema em carregamento nominal, com o propósito principal de comprovar a eficácia da metodologia desenvolvida e sua eficiência computacional.

Nesse objetivo, o FPHoI proposto é submetido a uma comparação com outras soluções alternativas para análise intervalar, incluindo métodos como Krawczyk, AA, série de Taylor de segunda ordem e simulações de MC.

Para a análise comparativa, o operador de Krawczyk foi implementado conforme proposto em Junior, Melo e Nepomuceno (2022), utilizando os conceitos básicos da AI. Para a implementação da AA, foi utilizado Araújo e Costa (2018), e para a série de Taylor de segunda ordem, a referência Souza (2023).

Simulações foram conduzidas utilizando sistemas-teste do IEEE de 14, 30 e 57 barras, cujos dados de barras e circuitos estão detalhados em UWEE (1999). No que diz respeito à abordagem de MC, um total de 20.000 simulações foram realizadas com o objetivo de testar a acurácia dos resultados obtidos.

A Tabela 14 expõe os resultados dos valores máximos do índice IS_k para os sistemas-teste em carga nominal. É notório que os intervalos obtidos por meio do FPHoI são notavelmente menos sensíveis em comparação com outras abordagens similares.

Tabela 14 – Máximo valor do índice de sensibilidade segundo diferentes abordagens.

Sistema	Método				
	MC (%)	FPHoI (%)	Taylor (%)	Krawczyk (%)	AA (%)
IEEE-14	0,4651	1,0604	2,0501	2,7584	2,6214
IEEE-30	0,5817	1,1487	2,3568	2,9845	2,8447
IEEE-57	1,1637	1,3959	2,9512	3,0430	2,9556

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Embora a série de Taylor de segunda ordem tenha sido desenvolvida para reduzir os intervalos determinados por outros métodos tradicionais, o FPHoI proposto é capaz de fornecer resultados com sensibilidades mais baixas, indicando que estão mais próximos dos resultados obtidos pela abordagem de MC, garantindo assim uma carga computacional reduzida e uma maior congruência dos resultados.

A Tabela 15 exibe os valores máximos relacionados ao índice IA_k para os sistemas-teste, considerando os resultados obtidos com o FPHoI proposto em comparação com os obtidos por meio da série de Taylor, Krawczyk e AA. É evidente que o método proposto apresenta resultados similares quando comparado com abordagens tradicionais.

Tabela 15 – Máximo valor do índice de acomodação segundo diferentes abordagens.

Sistema	Método			
	FPHoI (%)	Taylor (%)	Krawczyk (%)	AA (%)
IEEE-14	42,65	41,02	40,77	41,54
IEEE-30	51,59	50,15	50,12	50,51
IEEE-57	97,24	96,01	95,60	96,01

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Como discutido anteriormente, a abordagem de MC é precisa e versátil, sendo frequentemente empregada para validar outros métodos intervalares. No entanto, sua eficácia está diretamente ligada à realização de um grande número de simulações para garantir a confiabilidade dos intervalos obtidos. Portanto, para comparar o tempo computacional do FPHoI com a abordagem de MC, essa última foi simulada 5.000, 10.000 e 20.000 vezes.

Nesse viés, o tempo computacional empregado para obter os valores intervalares das magnitudes e ângulos de tensão utilizando o FPHoI é comparado com o tempo de simulação do método de MC, conforme apresentado na Tabela 16. Observa-se que, enquanto as simulações de MC demandam mais de 10 segundos, no mínimo, o FPHoI fornece resultados intervalares semelhantes em um tempo computacional significativamente reduzido – menor que 1 segundo.

Tabela 16 – Análise do tempo computacional em função do número de simulações.

Sistema	Método			
	MC _{5.000} (s)	MC _{10.000} (s)	MC _{20.000} (s)	FPHoI (s)
IEEE-14	11,9026	21,0966	39,0299	0,2912
IEEE-30	20,6876	38,7838	77,8418	0,3139
IEEE-57	64,9829	128,4272	263,6153	0,4067

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

5.7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

O principal objetivo de um FPI é determinar intervalos de magnitudes de tensão e ângulos para todas as barras do sistema, considerando dados incertos, incluindo potências ativas e reativas associadas aos valores de carga e geração. Nesse caso, o impacto dos dados incertos nos resultados do fluxo de potência pode ser avaliado por meio de índices de sensibilidade e acomodação intervalares. Geralmente, os valores superiores e inferiores dos intervalos dependem da porcentagem de incerteza associada aos dados de carga e geração, sendo mais amplos para incertezas maiores.

O método mais tradicional utilizado para calcular o impacto das incertezas nos resultados do fluxo de potência é a técnica probabilística de MC, na qual um grande número de simulações é realizado considerando a estocasticidade das cargas e fontes de energia. Nesse caso, uma FDP deve ser definida para representar a característica variável dos dados de carga e geração. Tradicionalmente, a distribuição uniforme é utilizada para modelar a aleatoriedade desses dados quando não há informações prévias disponíveis. A principal desvantagem dessa técnica é o tempo computacional, que pode ser impraticável para aplicações em tempo real. Dentro desse contexto, a aplicação de conceitos de AI nas equações de fluxo de potência deve ser explorada para fornecer resultados semelhantes com uma carga computacional reduzida.

O primeiro objetivo das simulações computacionais desta dissertação foi comprovar a viabilidade da metodologia intervalar proposta, sem considerar limites de geração de potência reativa. Para tal finalidade, na Subseção 5.2.1.1, utilizou-se o sistema-teste IEEE-30 barras. Com o sistema sob carga nominal, foi demonstrado que as magnitudes e ângulos de tensão associados a todas as barras do SEP foram calculados corretamente. Com base nos resultados apresentados nas Figuras 15 e 16, foi possível inferir que os intervalos obtidos pelo FPHoI são mais amplos do que aqueles determinados pelas simulações de MC, considerando os limites superiores e inferiores de todas as tensões das barras do sistema. Observe que essa característica é necessária para validar outras técnicas, como o método de Krawczyk, AA e a série de Taylor (Sousa; Melo, 2021). Padrões semelhantes são observados nas Figuras 15 e 16 em relação aos resultados fornecidos pelo método de MC e pelo FPHoI, o que significa que o impacto de dados de carga e geração incertos nos resultados intervalares é semelhante para ambas as abordagens.

Para comprovar a escalabilidade do método proposto, a carga do sistema IEEE-30 barras foi incrementada na Subseção 5.2.1.2. Com base nas Figuras 19 e 20, é possível inferir que os resultados intervalares têm um padrão semelhante quando comparados com aqueles obtidos por meio de simulações de MC, embora os índices IS_k sejam mais amplos do que os calculados na Subseção 5.2.1.1 para carga nominal. Essa característica demonstra que ambas as metodologias são compatíveis e podem avaliar o impacto de dados incertos nos resultados do fluxo de carga de maneira semelhante, considerando diferentes condições

de carga.

O segundo objetivo das simulações computacionais realizadas foi comprovar a aplicabilidade da metodologia proposta considerando os limites de potência reativa gerada pelas máquinas. Para alcançar esse propósito, conduziram-se simulações utilizando sistemas-teste de 6 e 57 barras na Seção 5.3, os quais foram submetidos a diferentes perfis de carregamento.

Um teste importante foi considerado na Subseção 5.3.2, no qual os limites de potência reativa das unidades de geração do sistema IEEE-57 barras foram avaliados assumindo condições extremas de carga. O método proposto mostrou sua resiliência e robustez na determinação dos intervalos associados à solução do fluxo de potência, levando em consideração os limites físicos das unidades de geração.

Em relação às simulações conduzidas utilizando o sistema IEEE-57 com carga localizada próxima ao PMC, a metodologia proposta neste trabalho demonstrou, na Subseção 5.3.2.2, uma robustez superior em comparação com o método de NR de primeira ordem implementado juntamente às simulações de MC. Embora o FPHoI tenha sido a única metodologia capaz de calcular com precisão o ponto de operação do sistema sob essa condição extrema, metodologias iterativas robustas e adequadas para sistemas mal condicionados, como o método de NR de segunda ordem (Ferreira; Costa, 2005) e o método Iwamoto-Tamura (Iwamoto; Tamura, 1981), poderiam ser utilizadas para solucionar o problema de fluxo de potência com eficácia.

A metodologia proposta também foi aplicada à análise de contingência simples de rede, conforme descrito na Seção 5.4. Os resultados obtidos foram satisfatórios e permitem uma avaliação abrangente da segurança e estabilidade do sistema IEEE-30 barras em condições adversas.

Adicionalmente, o FPHoI foi utilizado na avaliação do comportamento das curvas PV no contexto da estabilidade de tensão. Com esse propósito, a metodologia foi aplicada na Seção 5.5 para construir a curva PV associada ao barramento mais crítico do sistema IEEE-30 barras. Os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que demonstraram a tendência de redução do valor da magnitude de tensão à medida que o carregamento do sistema aumenta.

Para comparar os resultados obtidos pelo FPHoI com metodologias alternativas de FPI, na Seção 5.6, os índices IS_k e IA_k determinados a partir da aplicação do método proposto foram comparados com a abordagem de MC, o método de Krawczyk, a AA e a série de Taylor de segunda ordem. Para os sistemas-teste de 14, 30 e 57 barras, pode-se notar que o FPHoI fornece intervalos mais estreitos do que os demais, estando mais próximos dos valores determinados pela simulação de MC. Como uma vantagem importante do método proposto, os resultados intervalares são obtidos em menos de um segundo. Por outro lado, a abordagem tradicional de MC fornece resultados semelhantes

com um tempo computacional extremamente desvantajoso, como indicado na Tabela 16.

Observe que o principal objetivo deste trabalho foi alcançado (os resultados intervalares calculados são mais congruentes aos obtidos pelas simulações de MC do que outras técnicas alternativas utilizadas, e o tempo computacional apresenta uma notável vantagem) e sua principal contribuição é a aplicação direta dos conceitos da AA nas equações do FPHo, mantendo a característica recursiva associada ao algoritmo determinístico original proposto em Trias (2012).

Para abordar as limitações e desafios da metodologia proposta, é importante salientar que o FPHo é uma abordagem recente na análise de fluxo de potência. Seu desenvolvimento envolve abstrações matemáticas não triviais, que incluem funções holomorfas, aproximações de Padé, expansão em séries de MacLaurin e técnicas recursivas. Os principais desafios associados tanto ao FPHo quanto ao FPHoI residem na representação dos dispositivos da eletrônica de potência utilizados para a conexão de novos tipos de cargas e fontes de energia renovável e no emprego da técnica de ajustes alternados quando o sistema está operando em pontos de operação próximos aos seus limites.

5.8 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo, uma extensa série de simulações foi conduzida com o propósito de analisar a eficiência e a robustez da metodologia proposta. As análises realizadas nos sistemas-teste com 6, 14, 30 e 57 barras demonstraram a capacidade da metodologia em abordar a modelagem de incertezas nos dados de carga e geração em sistemas elétricos sob diferentes cenários de carregamento.

Os resultados apresentados destacaram-se significativamente tanto em termos de redução do custo computacional quanto pela proximidade e acurácia dos resultados intervalares obtidos em relação àqueles fornecidos por meio das simulações de MC.

No capítulo seguinte, serão apresentadas as conclusões finais do trabalho, bem como as sugestões de continuidade.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último capítulo, serão apresentadas as conclusões finais do trabalho, bem como as propostas destinadas a orientar e dar continuidade à pesquisa.

6.1 CONCLUSÕES FINAIS

Esta dissertação apresentou uma inovadora proposta denominada FPHoI para a análise de dados incertos em sistemas de potência. Essa abordagem pioneira resulta da integração de duas técnicas estabelecidas na literatura: a AI, concebida em Moore (1966), e o FPHo, proposto em Trias (2012). A metodologia proposta destaca-se ao incorporar os princípios da AI às complexas equações subjacentes ao FPHo, oferecendo uma perspectiva inovadora para a análise e planejamento de sistemas elétricos sob condições de incerteza.

A técnica proposta permite calcular com precisão a solução intervalar para o fluxo de potência, operando tanto em condições normais de rede quanto em contingências. Os resultados das magnitudes e ângulos de tensão obtidos revelam que o FPHoI geralmente fornece intervalos de solução mais amplos em comparação com as simulações de MC, mesmo quando os padrões e valores são notavelmente semelhantes. Essa característica destaca a capacidade do FPHoI em lidar com as incertezas nos dados de carga e geração, reforçando sua eficácia e potencial para aprimorar a análise e o planejamento de sistemas elétricos.

Adicionalmente, verificou-se que o FPHoI apresenta notável capacidade de rastrear a curva PV, sendo essencial para a avaliação da segurança de tensão e representação adequada dos limites de potência reativa das barras PV. O controle de potência reativa implementado contribuiu para uma compreensão mais aprofundada do desempenho do FPHoI e de seu potencial de aplicação prática.

O FPHoI demonstrou eficácia notável na análise intervalar, especialmente ao lidar com um SEP originalmente mal condicionado, o sistema IEEE-57 barras. Em situações de carregamento próximo ao PMC, o FPHoI superou o método de MC, que enfrentou limitações devido a problemas de mal-condicionamento numérico. A capacidade diferenciada do FPHoI em condições extremas destaca sua robustez, utilidade prática e eficácia na análise de sistemas elétricos em situações críticas.

A avaliação dos índices IS_k e IA_k evidenciou que o FPHoI destaca-se ao apresentar um desempenho superior em comparação com métodos tradicionais, incluindo o método de Taylor de segunda ordem, o operador de Krawczyk e a AA. Suas sensibilidades de intervalo mostraram-se pelo menos duas vezes menores do que outros métodos intervalares tradicionais, ressaltando sua robustez e competitividade na análise intervalar do fluxo de potência.

Os resultados computacionais do FPHoI também se destacam pela eficiência, alcançando um tempo de processamento aproximadamente 300 vezes mais rápido que a abordagem de MC para 20.000 simulações. Essa redução no tempo computacional evidencia não apenas a rapidez do FPHoI, mas também sua capacidade de fornecer resultados em tempo hábil para aplicações práticas, alinhando-se com simulações de MC e destacando sua precisão e eficácia em um tempo substancialmente reduzido.

Em relação às limitações, destaca-se um custo computacional expressivo quando o limite de reativos gerados pelas máquinas é considerado nas simulações, especialmente quando o carregamento do sistema está próximo ao PMC. Isso contrasta com o método de re-especificação dos tipos de barras implementado em conjunto com o método de NR, indicando uma área potencial para melhorias futuras.

Em suma, a contribuição central deste trabalho reside no desenvolvimento de uma técnica inovadora para a análise intervalar do fluxo de potência em sistemas elétricos sujeitos a dados incertos. A principal distinção do FPHoI consiste, portanto, em sua capacidade de fornecer a solução de forma recursiva, alinhada com as aplicações do FPHo, sem a necessidade de incorporar metodologias iterativas adicionais ou modelos de otimização para derivar a solução intervalar. Essa abordagem simplificada representa não apenas uma eficiência computacional considerável, mas também uma perspectiva mais direta e prática para a análise de sistemas de potência.

6.2 TRABALHOS FUTUROS

Este estudo não apenas lança luz sobre as complexidades do tema abordado, mas também oferece um ponto de partida sólido para investigações subsequentes. Assim sendo, pesquisas futuras podem contemplar:

- Consideração de incertezas nos parâmetros de impedância do sistema;
- Minimização da superestimação intervalar por meio da aplicação da AA;
- Inclusão de equipamentos baseados em eletrônica de potência para controle, regulação de tensão e frequência;
- Modelagem de dispositivos armazenadores de energia;
- Análise de soluções instáveis;
- Implementação do controle de potência reativa gerada por meio de técnicas computacionais mais vantajosas em relação a tempo computacional;
- Avaliação da operação de microrredes em sistemas de distribuição trifásicos desequilibrados com fontes renováveis.

REFERÊNCIAS

- AIA. **HELM: The artificial intelligence platform for energy**. 2023. Disponível em: <<https://aia.es/technologies/helm/>>. Acesso em: 10 ago. 2023.
- ALEFELD, G. **Intervallrechnung über den komplexen Zahlen und einige Anwendungen**. Tese (Doutorado em Ciências) — Universität Karlsruhe, 1968.
- ARAÚJO, B. M. C. **Aritméticas Intervalares Aplicadas à Solução do Problema de Fluxo de Potência via Equações de Injeção de Corrente**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.
- ARAÚJO, B. M. C.; COSTA, V. M. da. New developments in the interval current injection power flow formulation. **IEEE Latin America Transactions**, IEEE, v. 16, n. 7, p. 1969–1976, 2018.
- BARBOSA, C. H. N. de R. **Reconfiguração e Restauração Ótima de Sistemas de Distribuição Primária de Energia Elétrica Carlos**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- BARRETO, R. M.; CAMPOS, M. A. IntPy: Um framework intervalar em python. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE (UFRN). **5º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2008**. Natal, 2008.
- BASIRI-KEJANI, M.; GHOLIPOUR, E. Holomorphic embedding load-flow modeling of thyristor-based FACTS controllers. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 32, n. 6, p. 4871–4879, 2017.
- BORKOWSKA, B. Probabilistic load flow. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-93, n. 3, p. 752–759, 1974.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008. ISBN 9788522106011.
- CAPRANI, O.; MADSEN, K. Iterative methods for interval inclusion of fixed points. **BIT**, v. 18, p. 42–51, 1978.
- CHAGAS, G. S. **Fluxo de Potência Numericamente Robusto via Método de Levenberg-Marquardt de Ordem Superior**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Itajubá, 2018.
- CHAPRA, S. C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas**. 3. ed. Medford: McGraw Hill, 2017.
- CHATURVEDI, A.; PRASAD, K.; RANJAN, R. Use of interval arithmetic to incorporate the uncertainty of load demand for radial distribution system analysis. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 21, n. 2, p. 1019–1021, 2006.
- CHEN, W.; WANG, K.; XU, J. The holomorphic embedding method to calculate continuation power flow. In: **2020 5th Asia Conference on Power and Electrical Engineering (ACPEE)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 1950–1954.

DAMIÃO, L. J. dos S. **Análise de Incorporação de Geração Distribuída em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica por Meio de Fluxo de Potência Probabilístico**. Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2019.

DAS, B. Radial distribution system power flow using interval arithmetic. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 24, p. 827–836, 12 2002.

DENG, J. J.; CHIANG, H. D. Convergence region of newton iterative power flow method: Numerical studies. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2013, 2013.

FENG, Y. **Solving for the Low-Voltage/Large-Angle Power-Flow Solutions by using the Holomorphic Embedding Method**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Arizona State University, 2015.

FERREIRA, C. A.; COSTA, V. M. da. A second order power flow based on current injection equations. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 27, n. 4, p. 254–263, 2005. ISSN 0142-0615.

FREITAS, F. D.; JUNIOR, A. C. dos S.; FERNANDES, L. F. J.; ACLE, Y. G. I. Restarted holomorphic embedding load-flow model based on lower-order padé approximant and estimated bus power injection. **Electrical Power and Energy Systems**, Elsevier, v. 112, p. 326–338, 2019.

GALIAS, Z. The dangers of rounding errors for simulations and analysis of nonlinear circuits and systems – and how to avoid them. **IEEE Circuits and Systems Magazine**, v. 13, n. 3, p. 35–52, 2013.

GARGANTINI, I.; HENRICI, P. Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros. **Numerische Mathematik**, v. 18, p. 305–320, 1971.

GONTIJO, R. M. P. **Alocação de Geradores Distribuídos Orientada por Fluxo de Potência Probabilístico**. Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2017.

GRAVES-MORRIS, P. R.; ROBERTS, D. E.; SALAM, A. The epsilon algorithm and related topics. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 122, n. 1, p. 51–80, 2000. ISSN 0377-0427.

GRIGOLETTI, P.; DIMURO, G.; BARBOZA, L. V. Módulo Python para matemática intervalar. **TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 8, p. 73–82, 03 2007.

HARGREAVES, G. I. **Interval Analysis in MATLAB**. [S.l.], 2002. (Numerical Analysis Reports, 416).

HEATH, T. L. **The Works of Archimedes**. Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

HEIDARIFAR, M.; ANDRIANESIS, P.; CARAMANIS, M. Efficient load flow techniques based on holomorphic embedding for distribution networks. **arXiv preprint arXiv:1905.03660**, 2019.

HEIDARIFAR, M.; ANDRIANESIS, P.; CARAMANIS, M. Holomorphic embedding load flow method in three-phase distribution networks with ZIP loads. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, p. 1–12, 2022.

HOFSCHUSTER, W.; KRÄMER, W. C-XSC 2.0 – A C++ library for extended scientific computing. In: **Numerical Software with Result Verification**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 15–35. ISBN 978-3-540-24738-8.

IWAMOTO, S.; TAMURA, Y. A load flow calculation method for ill-conditioned power systems. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-100, n. 4, p. 1736–1743, 1981.

JUNIOR, H. M. R. **Fluxo de Potência Intervalar para Sistemas de Distribuição Multifásicos Baseado no Método da Injeção de Correntes Trifásico**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2023.

JUNIOR, H. M. R.; MELO, I. D. de; NEPOMUCENO, E. G. An interval power flow for unbalanced distribution systems based on the three-phase current injection method. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 139, p. 107921, 2022.

KEARFOTT, R. B. Algorithm 763: INTERVAL_ARITHMETIC: A Fortran 90 module for an interval data type. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 22, n. 4, 1996. ISSN 0098-3500.

KEARFOTT, R. B.; DAWANDE, M.; DU, K.; HU, C. Algorithm 737: INTLIB — A portable Fortran 77 interval standard-function library. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 20, n. 4, p. 447–459, 1994. ISSN 0098-3500.

KNÜPPEL, O. PROFIL/BIAS — A fast interval library. *computing*, 53, 277–287. **Computing**, v. 53, p. 277–287, 09 1994.

LERCH, M.; TISCHLER, G.; HOFSCHUSTER, W.; KRÄMER, W. FILIB++: A fast interval library supporting containment computations. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 32, p. 299–324, 06 2006.

LI, Y. **Effect of Various Holomorphic Embeddings on Convergence Rate and Condition Number as Applied to the Power Flow Problem**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Arizona State University, 2015.

LIAO, X.; LIU, K.; ZHANG, Y.; WANG, K.; QIN, L. Interval method for uncertain power flow analysis based on Taylor inclusion function. **IET Generation, Transmission & Distribution**, IET, v. 11, n. 5, p. 1270–1278, 2017.

LIMA, G. R. S.; MELO, I. D. de; PASSOS FILHO, J. A.; RODRIGUES, F. M. e S. Fluxo de potência holomórfico probabilístico aplicado às redes de distribuição: Uma análise comparativa com métodos iterativos. In: SBQEE. **Anais da XV Conferência Brasileira sobre Qualidade da Energia Elétrica, 2023**. São Luís, 2023.

LIMA, M. M. P.; MURARI, C. A. F.; PEREIRA, M. A. Uma nova metodologia para fluxos de carga fuzzy. **Revista Controle & Automação**, v. 14, n. 1, 2003.

LIU, C.; QIN, N.; SUN, K.; BAK, C. L. Remote voltage control using the holomorphic embedding load flow method. **IEEE Transactions on Smart Grid**, v. 10, n. 6, p. 6308–6319, 2019.

LIU, C.; WANG, B.; HU, F.; SU, K.; LETH, C. Real-time voltage stability assessment for load areas based on the holomorphic embedding method. **arXiv preprint arXiv:1702.01464**, Jun 2017.

MARTINS, A. S. C. **Alocação de Capacitores em Sistemas de Distribuição de Energia Elétrica: Uma Abordagem Baseada em Fluxo de Potência Trifásico Probabilístico Ótimo**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2022.

MEDEIROS, B. da S. **Proposição de Modelos de Fluxo de Potência Polar Intervalar Mediante Utilização de Métodos de Compensação**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018.

MELO, I. D. de. **Fluxo de Potência: teoria e implementação de códigos computacionais**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2023.

MELO, I. D. de; MINGORANÇA, J. S. Interval current injection method for harmonic analysis in distribution systems: An approach using the krawczyk operator. **Electric Power Systems Research**, v. 208, p. 107891, 2022.

MIRANDA, V.; MATOS, M. Distribution system planning with fuzzy models and techniques. In: **IET. 10th International Conference on Electricity Distribution**. Brighton: [s.n.], 1989. CIRED 1989, p. 472–476.

MOLINA, T.; ORTEGA, J.; MUÑOZ, J. HELMpy, open source package of power flow solvers, including the holomorphic embedding load flow method (HELM), developed on python 3. **Journal of Open Research Software**, v. 9, n. 1, p. 23, 2021.

MONTICELLI, A.; GARCIA, A. **Introdução a Sistemas de Energia Elétrica**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2011.

MONTICELLI, A. J. **Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 1983.

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1966.

MOORE, R. E.; KEARFOTT, R. B.; CLOUD, M. J. **Introduction to Interval Analysis**. Philadelphia: SIAM, 2009.

OLIVEIRA, L. N. de. **Impactos do Congelamento da Matriz Jacobiana no Método de Heun-King-Werner para Fluxo de Carga Aplicado a Sistemas de Potência de Grande Porte**. Dissertação (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade de Brasília, 2021.

PEREIRA, L. E. de S. **Metodologia Intervalar para Tratamento de Incertezas em Problemas de Fluxo de Potência**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.

PEREIRA, L. E. de S. **Metodologias Generalizadas de Solução do Fluxo de Potência Intervalar Considerando Dados Incertos**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

PEREIRA, L. E. de S.; COSTA, V. M. da. An efficient starting process for calculating interval power flow solutions at maximum loading point under load and line data uncertainties. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 80, p. 91–95, 2016.

PEREIRA, L. E. de S.; COSTA, V. M. da; ROSA, A. L. S. Interval arithmetic in current injection power flow analysis. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 43, n. 1, p. 1106–1113, 2012.

PEREIRA, L. E. S.; COSTA, V. M. da. Interval analysis applied to the maximum loading point of electric power systems considering load data uncertainties. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 54, p. 334–340, 2014.

PEREJA, L. A. G. **Fluxo de Potência em Redes de Distribuição de Energia Elétrica Considerando Incertezas**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2009.

PETKOVIĆ, M.; PETKOVIC, L. D. **Complex Interval Arithmetic and its Applications**. 1. ed. Berlin: John Wiley & Sons, 1998. v. 105.

PONTES, R. de P. **Nova Metodologia Full Newton para Consideração dos Limites de Geração de Potência Reativa no Problema de Fluxo de Potência**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018.

PRUSTY, B. R.; JENA, D. A critical review on probabilistic load flow studies in uncertainty constrained power systems with photovoltaic generation and a new approach. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 69, p. 1286–1302, 2017.

QUINTANILHA, L. M.; COSTA, V. M. da. Método intervalar de fluxo de potência baseado na expansão completa em série de Taylor. **The 12th Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission**, 2017.

RAO, S.; FENG, Y.; TYLAVSKY, D. J.; SUBRAMANIAN, M. K. The holomorphic embedding method applied to the power-flow problem. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 31, n. 5, p. 3816–3828, 2015.

RODRIGUES, F. M. e S. **Análise da Estabilidade de Tensão em Sistemas de Distribuição por Meio do Levantamento de Curvas PV: uma abordagem considerando o Fluxo de Potência Holomórfico**. Monografia (Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2023.

RODRIGUES, F. M. e S.; MELO, I. D. de; LIMA, G. R. S. Análise fractal das múltiplas soluções do fluxo de potência em sistemas elétricos. In: SBQEE. **Anais da XV Conferência Brasileira sobre Qualidade da Energia Elétrica, 2023**. São Luís, 2023.

RUMP, S. M. INTLAB-INTerval LABoratory. **Developments in Reliable Computing**, Kluwer Academic Publishers, p. 77–104, 1999.

- SANTANA, F. T.; SANTANA, F. L.; NETO, A. D. D.; SANTIAGO, R. H. N. Sinais e sistemas definidos sobre aritmética intervalar complexa. **TEMA: Tend. Mat. Apl. Comput.**, Uma Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, v. 13, n. 1, p. 85–96, 2012.
- SANTOS, M. J. dos. **Modelagem de Incertezas no Problema de Fluxo de Potência**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- SILVA, M. A. da. **Análise Complexa e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2018.
- SINGH, P.; TIWARI, R. Extended holomorphic embedded load-flow method and voltage stability assessment of power systems. **Electric Power Systems Research**, v. 185, p. 106381, 2020.
- SOUSA, L. L. S. de; MELO, I. D. de. Interval power flow analysis of microgrids with uncertainties: an approach using the second-order taylor series expansion. **Electrical Engineering**, Springer, p. 1–11, 2021.
- SOUZA, L. L. S. de. **Desenvolvimento de Modelo de Fluxo de Potência Polar Intervalar Baseado na Expansão da Série de Taylor**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2018.
- SOUZA, L. L. S. de. **Análise Intervalar do Fluxo de Potência em Microrredes com Distorções Harmônicas: Uma Abordagem usando Série de Taylor**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2023.
- SOUZA, L. L. S. de; COSTA, V. M. da. Fluxo de potência intervalar baseado na expansão da série de taylor. **Congresso Brasileiro de Automática**, 2018.
- STOTT, B. Review of load-flow calculation methods. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 62, n. 7, p. 916–929, 1974.
- STOTT, B.; ALSAC, O. Power flow solution by newton’s method. **IEEE Transactions on Power Apparatus and System**, PAS-93, n. 3, p. 859–869, 1974.
- SUBRAMANIAN, M. K. **Application of Holomorphic Embedding to the Power-Flow Problem**. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Arizona State University, 2014.
- SUBRAMANIAN, M. K.; FENG, Y.; TYLAVSKY, D. PV bus modeling in a holomorphically embedded power-flow formulation. In: **North American Power Symposium (NAPS)**. Manhattan, KS: [s.n.], 2013.
- SUN, K. **Power System Simulation using Semi-Analytical Methods**. Piscataway: Willey-IEEE Press, 2023.
- SUN, Y.; DING, T.; XU, T.; MU, C.; SIANO, P.; CATALÃO, J. P. S. Power flow analytical method for three-phase active distribution networks based on multi-dimensional holomorphic embedding method. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, v. 69, n. 12, p. 5069–5073, 2022.

SUR, U.; BISWAS, A.; BERA, J. N.; SARKAR, G. A modified holomorphic embedding method based hybrid AC-DC microgrid load flow. **Electric Power Systems Research**, v. 182, p. 106267, 2020.

TAMURA, Y.; MORI, H.; IWAMOTO, S. Relationship between voltage instability and multiple load flow solutions in electric power systems. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., PAS-102, n. 5, p. 1115–1125, 1983. ISSN 0018-9510.

TEIXEIRA, M. O. N.; MELO, I. D. de; FILHO, J. A. P. An optimisation model based approach for power systems voltage stability and harmonic analysis. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 199, p. 107462, 2021.

THORP, J.; NAQAVI, S. A.; CHIANG, H. D. M. Load flow fractals. **Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control**, v. 2, p. 1822–1827, 1989.

TINNEY, W. F.; HART, C. E. Power flow solution by Newton's Method. **IEEE Transactions on Power Apparatus and System**, PAS-86, n. 11, p. 1449–1460, 1967.

TOSTADO-VÉLIZ, M.; KAMEL, S.; JURADO, F. An effective load-flow approach based on Gauss-Newton formulation. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 113, p. 573–581, 2019. ISSN 0142-0615.

TOSTADO-VÉLIZ, M.; KAMEL, S.; JURADO, F. An efficient power-flow approach based on Heun and King-Werner's methods for solving both well and ill-conditioned cases. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 119, p. 105869, 2020. ISSN 0142-0615.

TRIAS, A. The holomorphic embedding load flow method. In: **2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting**. San Diego: [s.n.], 2012. p. 1–8.

TRIAS, A. **The Holomorphic Embedding Load-Flow Method: Foundations and Implementations**. 1. ed. Boston: Now Publishers, 2018. ISBN 978-1680835168.

TRIAS, A.; MARÍN, J. L. The holomorphic embedding loadflow method for DC power systems and nonlinear DC circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 63, n. 2, p. 322–333, 2016.

UWEE. **Power System Test Archive – UWEE, University of Washington**. 1999. Disponível em: <<http://labs.ece.uw.edu/pstca/>>. Acesso em: 19 abr. 2023.

VACCARO, A.; CANIZARES, C. A.; VILLACCI, D. An affine arithmetic-based methodology for reliable power flow analysis in the presence of data uncertainty. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 25, n. 2, p. 624–632, 2010.

WANG, B.; LIU, C.; SUN, K. Multi-stage holomorphic embedding method for calculating the power-voltage curve. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 33, n. 1, p. 1127–1129, 2018.

WANG, C.; LIU, D.; TANG, F.; LIU, C. A clustering-based analytical method for hybrid probabilistic and interval power flow. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 126, p. 106605, 2021.

WANG, S.; HAN, L.; WU, L. Uncertainty tracing of distributed generations via complex affine arithmetic based unbalanced three-phase power flow. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 30, n. 6, p. 3053–3062, 2015.

WANG, Z.; ALVARADO, F. L. Interval arithmetic in power flow analysis. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 7, n. 3, p. 1341–1349, 1992.

WARD, J. B.; HALE, H. W. Digital computer solution of power-flow problems. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems**, PAS-75, n. 3, p. 398–404, 1956.

WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F.; SHEBLÉ, G. B. **Power Generation, Operation, and Control**. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2013. ISBN 978-0-471-79055-6.

YAO, R.; QIU, F.; SUN, K. Contingency analysis based on partitioned and parallel holomorphic embedding. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 37, n. 1, p. 565–575, 2022.

ZANETTA, L. C. **Fundamentos de Sistemas Elétricos de Potência**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

ZHANG, C.; CHEN, H.; NGAN, H.; YANG, P.; HUA, D. A mixed interval power flow analysis under rectangular and polar coordinate system. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 32, n. 2, p. 1422–1429, 2017.

APÊNDICE A – ARITMÉTICA INTERVALAR

A AI é uma técnica dedicada à estimação de grandezas por meio de intervalos. Um dos primeiros relatos de seu uso reporta aos estudos de Arquimedes em sua tentativa de estimar corretamente o valor da constante π (Heath, 1897). Desde então, diversos trabalhos foram desenvolvidos objetivando tratar erros de arredondamento por meio da análise intervalar, porém, os fundamentos modernos da AI só foram concebidos a partir de 1966 por meio dos trabalhos publicados por Moore (Hargreaves, 2002).

De forma geral, a aritmética de Moore representa um certo valor x não como um número isolado, mas como uma gama de possibilidades que se encontram dentro do intervalo fechado $[x^{inf}; x^{sup}]$, sendo x^{inf} e x^{sup} os limites *inferior* e *superior* de x nesse intervalo, respectivamente (Moore, 1966; Moore; Kearfott; Cloud, 2009). Por exemplo, ao invés de representar a resistência de um componente elétrico como um valor exato, pode-se representá-la como um intervalo que contém todos os valores possíveis dessa resistência, considerando as incertezas inerentes ao processo de medição.

A partir da década de 1990, a análise intervalar recebeu real notoriedade da comunidade científica e, desde então, tem sido objeto de estudo por pesquisadores de todo o mundo, com aplicações em diversas áreas da Engenharia Elétrica (Junior, 2023). No entanto, a técnica apresenta algumas limitações, como será detalhado mais adiante.

A.1 ARITMÉTICA INTERVALAR REAL

A aritmética intervalar real é uma técnica dedicada ao cálculo e à manipulação de intervalos de números reais (Moore; Kearfott; Cloud, 2009). De modo geral, a abordagem oferece um potencial significativo para aprimorar a compreensão e a resolução dos problemas complexos e incertos do mundo real.

A.1.1 Intervalo real

Definição 1. Um intervalo real \hat{x} é um conjunto não vazio denotado pela Equação (A.1).

$$\hat{x} = [x^{inf}; x^{sup}] = \{x \in \mathbb{IR} : x^{inf} \leq x \leq x^{sup}\} \quad (\text{A.1})$$

Quando o limite inferior e superior do intervalo são iguais, isto é, $x^{inf} = x^{sup}$, o intervalo é chamado de *degenerado*, sendo representado apenas por x . Nesse caso, as operações realizadas sobre ele seguem as operações dos números reais (Santana *et al.*, 2012).

Nesse contexto, define-se \mathbb{IR} conforme descrito a seguir.

Definição 2. Define-se \mathbb{IR} como o conjunto de todos os intervalos de números reais descritos pela Equação (A.2), para todo $x^{inf} \leq x^{sup}$.

$$\mathbb{IR} = \left\{ [x^{inf}; x^{sup}] : x^{inf}, x^{sup} \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Relações entre intervalos reais

Sejam $\hat{x} = [x^{inf}; x^{sup}]$ e $\hat{y} = [y^{inf}; y^{sup}]$ dois intervalos contidos em \mathbb{IR} . As relações de *igualdade*, *interseção*, *união* e *distância* entre \hat{x} e \hat{y} são definidas equivalentemente à teoria dos conjuntos, assim como descrito nas expressões a seguir (Moore; Kearfott; Cloud, 2009).

Igualdade

Os intervalos \hat{x} e \hat{y} são ditos *iguais* se e somente as Equações (A.3) e (A.4) são satisfeitas.

$$x^{inf} = y^{inf} \quad (\text{A.3})$$

$$x^{sup} = y^{sup} \quad (\text{A.4})$$

Interseção

A *interseção* entre os intervalos \hat{x} e \hat{y} é dada pela Equação (A.5).

$$\hat{x} \cap \hat{y} = \begin{cases} [max \{x^{inf}, y^{inf}\}; min \{x^{sup}, y^{sup}\}], & \text{se } max \{x^{inf}, y^{inf}\} \leq min \{x^{sup}, y^{sup}\} \\ \emptyset, & \text{se } max \{x^{inf}, y^{inf}\} > min \{x^{sup}, y^{sup}\} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

União

A *união* entre \hat{x} e \hat{y} é um conjunto de números reais pertencente a \hat{x} ou \hat{y} (ou ambos). Se $\hat{x} \cap \hat{y} \neq \emptyset$, a *união* dos intervalos \hat{x} e \hat{y} é representada a partir da Equação (A.6).

$$\hat{x} \cup \hat{y} = [min \{x^{inf}, y^{inf}\}; max \{x^{sup}, y^{sup}\}] \quad (\text{A.6})$$

Distância

A *distância* entre os intervalos \hat{x} e \hat{y} é dada pelo número real positivo correspondente à maior distância em módulo entre os extremos dos intervalos em questão, conforme descrito na Equação (A.7).

$$dist(\hat{x}, \hat{y}) = \max \left\{ |x^{inf} - y^{inf}|, |x^{sup} - y^{sup}| \right\} \quad (\text{A.7})$$

Além das relações intervalares apresentadas anteriormente, as *relações de ordem* dos números reais também podem ser estendidas para os intervalos. Nesse viés, se $\star \in \{<, \leq, \geq, >\}$ e $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{IR}$ e $\hat{x} \star \hat{y} = \{x \star y : x \in \hat{x}, y \in \hat{y}\}$, pode-se inferir as relações descritas nas Equações (A.8) a (A.11).

$$\hat{x} < \hat{y} \iff x^{sup} < y^{inf} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{x} \leq \hat{y} \iff x^{sup} \leq y^{inf} \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{x} > \hat{y} \iff x^{inf} > y^{sup} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{x} \geq \hat{y} \iff x^{inf} \geq y^{sup} \quad (\text{A.11})$$

A.1.3 Operações elementares entre intervalos reais

Assim como a matemática convencional, a aritmética de Moore trabalha sobre as variáveis por intermédio de operações elementares simples. Entretanto, a principal diferença é que para a AI as variáveis são intervalos de números, e não apenas um único número como na matemática básica.

Definição 3. *Sejam \hat{x} e \hat{y} dois intervalos pertencentes a \mathbb{IR} , e $\bullet \in \{+, -, \times, /\}$ uma operação binária sobre o conjunto dos números reais, então, $\hat{x} \bullet \hat{y} = \{x \bullet y : x \in \hat{x}, y \in \hat{y}\}$ define as operações aritméticas sobre \mathbb{IR} .*

Nesse viés, operações intervalares elementares para dois intervalos reais, $\hat{x} = [x^{inf}; x^{sup}]$ e $\hat{y} = [y^{inf}; y^{sup}]$, sendo $S = \{x^{inf} \times y^{inf}, x^{inf} \times y^{sup}, x^{sup} \times y^{inf}, x^{sup} \times y^{sup}\}$ e $T = \{x^{inf}/y^{inf}, x^{inf}/y^{sup}, x^{sup}/y^{inf}, x^{sup}/y^{sup}\}$, podem ser definidas (Moore; Kearfott; Cloud, 2009).

Soma

A soma entre \hat{x} e \hat{y} é dada pela Equação (A.12).

$$\hat{x} + \hat{y} = [x^{inf} + y^{inf}; x^{sup} + y^{sup}] \quad (\text{A.12})$$

Subtração

A subtração entre \hat{x} e \hat{y} é definida pela Equação (A.13).

$$\hat{x} - \hat{y} = [x^{inf} - y^{sup}; x^{sup} - y^{inf}] \quad (\text{A.13})$$

Multiplicação

A multiplicação entre \hat{x} e \hat{y} é dada pela Equação (A.14).

$$\hat{x} \times \hat{y} = [\min \{S\}; \max \{S\}] \quad (\text{A.14})$$

Divisão

A divisão entre \hat{x} e \hat{y} é definida pela Equação (A.15).

$$\frac{\hat{x}}{\hat{y}} = [\min \{T\}; \max \{T\}], \quad \text{com } 0 \notin \hat{y} \quad (\text{A.15})$$

Pseudo inverso aditivo

O pseudo inverso aditivo de \hat{x} é dado pela Equação (A.16).

$$-\hat{x} = [-x^{sup}; -x^{inf}] \quad (\text{A.16})$$

Pseudo inverso multiplicativo

O pseudo inverso multiplicativo de \hat{x} é definido pela Equação (A.17).

$$\hat{x}^{-1} = \frac{1}{\hat{x}} = \left[\frac{1}{x^{sup}}; \frac{1}{x^{inf}} \right], \quad \text{com } 0 \notin \hat{x} \quad (\text{A.17})$$

Observações:

1. Levando em consideração a relação (A.17), (A.15) pode ser reescrita conforme apresentado na Equação (A.18);

$$\frac{\hat{x}}{\hat{y}} = \hat{x} \times \frac{1}{\hat{y}} = \hat{x} \times \left[\frac{1}{y^{sup}}; \frac{1}{y^{inf}} \right], \quad \text{com } 0 \notin \hat{y} \quad (\text{A.18})$$

2. As operações de *subtração* e *divisão intervalares* não são operações inversas às de *soma* e *multiplicação intervalares* como na aritmética convencional. Por exemplo:

$$[0; 2] - [0; 2] = [-2; 2];$$

$$\frac{[1; 3]}{[1; 2]} = \left[\frac{1}{2}; 3 \right].$$

A.1.4 Definições em \mathbb{IR}

As definições de *módulo*, *diâmetro*, *raio* e *ponto médio* podem ser traçadas em \mathbb{IR} , para todo intervalo real \hat{x} (Santana *et al.*, 2012).

Módulo

O *módulo* de \hat{x} representa a maior distância em módulo de um de seus extremos até zero, conforme descrito na Equação (A.19).

$$abs(\hat{x}) = dist(\hat{x}, 0) = max(|x^{inf}|, |x^{sup}|) \quad (\text{A.19})$$

Diâmetro

O *diâmetro* de \hat{x} é definido na Equação (A.20).

$$diam(\hat{x}) = x^{sup} - x^{inf} \quad (\text{A.20})$$

Raio

O *raio* de \hat{x} é o número real dado pela Equação (A.21).

$$rad(\hat{x}) = \frac{x^{sup} - x^{inf}}{2} \quad (\text{A.21})$$

Ponto médio

O *ponto médio* de \hat{x} é descrito na Equação (A.22).

$$mid(\hat{x}) = \frac{x^{sup} + x^{inf}}{2} \quad (\text{A.22})$$

A.2 ARITMÉTICA INTERVALAR COMPLEXA

A análise intervalar real pode ser estendida para o plano complexo por meio de duas abordagens: uma que recorre a regiões retangulares, denominada aritmética retangular (Alefeld, 1968), e outra que utiliza regiões circulares, designada aritmética circular

(Gargantini; Henrici, 1971). Nesta dissertação, serão definidas somente as operações com retângulos, as quais servirão de base para a descrição da metodologia proposta no Capítulo 4.

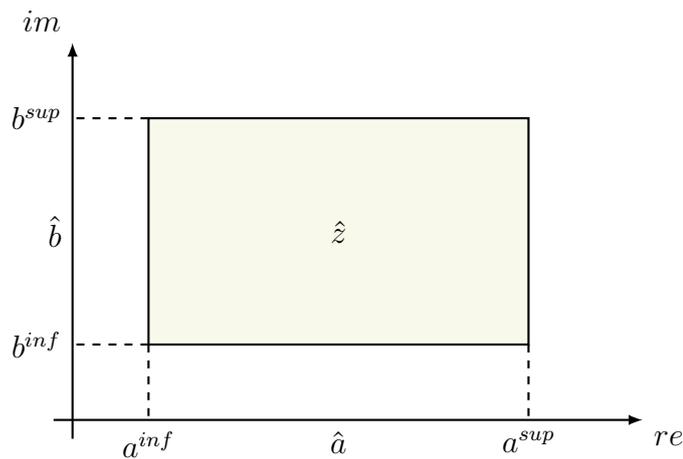
A.2.1 Intervalo complexo

Definição 4. Sejam $\hat{a} = [a^{inf}; a^{sup}]$ e $\hat{b} = [b^{inf}; b^{sup}] \in \mathbb{IR}$. O número complexo intervalar \hat{z} é definido conforme apresentado na Equação (A.23), com \hat{z} pertencendo ao conjunto dos números complexos intervalares, denotado por \mathbb{IC} .

$$\hat{z} = \hat{a} + j\hat{b} \quad (\text{A.23})$$

Geometricamente, \hat{z} constitui um retângulo no plano complexo com lados paralelos aos eixos coordenados, como pode ser observado na Figura 44 (Santana *et al.*, 2012).

Figura 44 – Representação geométrica de um intervalo complexo retangular.



Fonte: Adaptada de Alefeld (1968).

A.2.2 Relações entre intervalos complexos

Sejam $\hat{z} = \hat{a} + j\hat{b}$ e $\hat{w} = \hat{c} + j\hat{d}$ dois intervalos complexos contidos em \mathbb{IC} . As relações de *igualdade*, *interseção*, *união* e *distância* entre \hat{z} e \hat{w} são definidas conforme descrito a seguir (Petković; Petkovic, 1998).

Igualdade

Diz-se que \hat{z} e \hat{w} são *iguais* se e somente se as Equações (A.24) e (A.25) são satisfeitas. Dessa forma, a relação de igualdade entre os elementos de \mathbb{IC} é simétrica, reflexiva e transitiva.

$$\hat{a} = \hat{c} \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{b} = \hat{d} \quad (\text{A.25})$$

Interseção

A *interseção* entre \hat{z} e \hat{w} é dada pela Equação (A.26).

$$\hat{z} \cap \hat{w} = \begin{cases} (\hat{a} \cap \hat{c}) + j(\hat{b} \cap \hat{d}), & \text{se } \hat{a} \cap \hat{c} \neq \emptyset \text{ ou } \hat{b} \cap \hat{d} \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{se } \hat{a} \cap \hat{c} = \emptyset \text{ ou } \hat{b} \cap \hat{d} = \emptyset \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

União

A *união* entre \hat{z} e \hat{w} é um conjunto de números complexos que pertence a \hat{z} ou \hat{w} (ou ambos). Se $\hat{z} \cap \hat{w} \neq \emptyset$, a união dos intervalos \hat{z} e \hat{w} é calculada a partir da Equação (A.27).

$$\hat{z} \cup \hat{w} = (\hat{a} \cup \hat{c}) + j(\hat{b} \cup \hat{d}) \quad (\text{A.27})$$

Distância

A *distância* entre \hat{z} e \hat{w} é dada pela Equação (A.28).

$$\text{dist}(\hat{z}, \hat{w}) = \text{dist}(\hat{a}, \hat{c}) + \text{dist}(\hat{b}, \hat{d}) \quad (\text{A.28})$$

As *relações de ordem* também podem ser estendidas para os intervalos complexos, conforme descrito nas Equações (A.29) a (A.32).

$$\hat{z} < \hat{w} \iff \hat{a} < \hat{c} \text{ e } \hat{b} < \hat{d} \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{z} \leq \hat{w} \iff \hat{a} \leq \hat{c} \text{ e } \hat{b} \leq \hat{d} \quad (\text{A.30})$$

$$\hat{z} > \hat{w} \iff \hat{a} > \hat{c} \text{ e } \hat{b} > \hat{d} \quad (\text{A.31})$$

$$\hat{z} \geq \hat{w} \iff \hat{a} \geq \hat{c} \text{ e } \hat{b} \geq \hat{d} \quad (\text{A.32})$$

A.2.3 Operações elementares entre intervalos complexos

Definição 5. Sejam \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} e \hat{d} intervalos reais e $\diamond \in \{+, -, \times, /\}$ o conjunto de operações aritméticas em \mathbb{R} . Para $\hat{z} = \hat{a} + j\hat{b}$ e $\hat{w} = \hat{c} + j\hat{d} \in \mathbb{C}$, então $\hat{z} \diamond \hat{w} = \{z \diamond w : z \in \hat{z}, w \in \hat{w}\}$ define as operações complexas intervalares sobre \mathbb{C} .

Nesse contexto, são definidas as operações elementares entre os intervalos complexos \hat{z} e \hat{w} , conforme descrito a seguir (Petković; Petkovic, 1998).

Soma

A *soma* entre \hat{z} e \hat{w} é definida conforme descrito na Equação (A.33).

$$\hat{z} + \hat{w} = (\hat{a} + \hat{c}) + j(\hat{b} + \hat{d}) \quad (\text{A.33})$$

Subtração

A *subtração* entre \hat{z} e \hat{w} é calculada a partir da Equação (A.34).

$$\hat{z} - \hat{w} = (\hat{a} - \hat{c}) + j(\hat{b} - \hat{d}) \quad (\text{A.34})$$

Multiplicação

A *multiplicação* entre \hat{z} e \hat{w} é dada pela Equação (A.35).

$$\hat{z} \times \hat{w} = (\hat{a}\hat{c} - \hat{b}\hat{d}) + j(\hat{a}\hat{d} + \hat{b}\hat{c}) \quad (\text{A.35})$$

Divisão

A *divisão* entre \hat{z} e \hat{w} é definida na Equação (A.36).

$$\frac{\hat{z}}{\hat{w}} = \left(\frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{b}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right) + j \left(\frac{\hat{b}\hat{c} - \hat{a}\hat{d}}{\hat{c}^2 + \hat{d}^2} \right), \quad \text{com } 0 \notin (\hat{c}^2 + \hat{d}^2) \quad (\text{A.36})$$

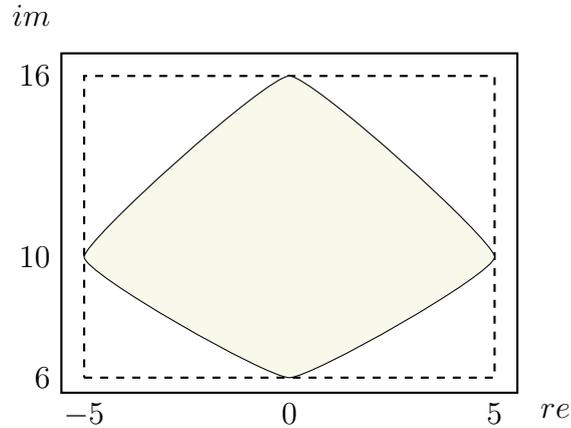
Observações:

1. Os números complexos intervalares $[0; 0] + j[0; 0]$ e $[1; 1] + j[0; 0]$ são os elementos neutros da *soma* e da *multiplicação complexa*, respectivamente;
2. A *multiplicação* entre intervalos complexos retangulares produz uma superestimação do intervalo resultante (Hargreaves, 2002).

Exemplo 1. Se $\hat{z} = [1; 2] + j[1; 2]$ e $\hat{w} = [3; 4] + j[3; 4]$, a multiplicação definida por (A.36) tem como resposta o retângulo descrito pela Equação (A.37), enquanto a resposta correta para essa multiplicação é dada pela região sombreada da Figura 45, que não é retangular, mas está contida na área delimitada por (A.37), exibida com linhas tracejadas.

$$\hat{z} \times \hat{w} = [-5; 5] + j[6; 16] \quad (\text{A.37})$$

Figura 45 – Exemplo de multiplicação intervalar complexa.



Fonte: Adaptada de Petković e Petkovic (1998).

A.3 SUPERESTIMAÇÃO INTERVALAR

Embora amplamente adotada pela comunidade científica, a AI exibe certas limitações, sendo a mais significativa a tendência à superestimação intervalar, que se origina da presença de múltiplas ocorrências de variáveis intervalares em uma operação, como demonstrado em Barbosa (2012), ou decorre da utilização da aritmética complexa retangular, conforme observado em Hargreaves (2002). O exemplo a seguir proporciona uma ilustração clara dessa problemática.

Exemplo 2. Seja $\hat{x} = [1; 2]$ um intervalo contido em $\mathbb{I}\mathbb{R}$. Determine $f(\hat{x}) = \hat{x}(1 - \hat{x})$ e $g(\hat{x}) = \hat{x} - \hat{x}^2$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \hat{x}(1 - \hat{x}) \\ &= [1; 2](1 - [1; 2]) \\ &= [1; 2]([-1; 0]) \\ &= [-2; 0]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\hat{x}) &= \hat{x} - \hat{x}^2 \\ &= [1; 2] - [1; 2]^2 \\ &= [1; 2] - [1; 4] \\ &= [-3; 1]. \end{aligned}$$

Ainda que $f(\hat{x})$ e $g(\hat{x})$ apresentem expressões equivalentes para a aritmética convencional, suas contrapartidas intervalares são diferentes e a função $g(\hat{x})$ encontra-se

superestimada. Embora não seja sempre possível, o problema pode ser atenuado por meio da utilização de funções simplificadas (Galias, 2013).

A.3.1 Extensões intervalares

Quando a superestimação intervalar não pode ser amenizada com o uso de funções simplificadas, pode-se tentar solucionar o problema utilizando extensões intervalares, conforme discutido na Seção 3.3.3.1.

Definição 6. *Seja $f(x)$ uma função real de variável real e \hat{x} um intervalo. A extensão intervalar de $f(x)$ em \hat{x} é a função intervalar $F(\hat{x})$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a Equação (A.38) se faz verdadeira.*

$$F(\hat{x}) = f(x) \tag{A.38}$$

Exemplo 3. Seja $f(x) = 2x + x$ e o intervalo degenerado $\hat{x} = [1,1]$. Determine se $F(\hat{x})$ é uma extensão intervalar de $f(x)$.

Substituindo x real por \hat{x} , obtém-se

$$\begin{aligned} F(\hat{x}) &= 2 \times [1,1] + [1,1] \\ &= [2,2] \times [1,1] + [1,1] \\ &= [2,2] + [1,1] \\ &= [3,3]. \end{aligned}$$

De outro modo, tem-se que

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1 + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Logo, tem-se que $F([1,1]) = f(1)$. Então, $F(\hat{x})$ é uma extensão intervalar de $f(x)$. Nessa conjuntura, o conceito aqui definido implica em dizer que, para \hat{x} , a solução correta do cálculo de uma função $f(x)$ estará contida em uma resposta obtida por sua extensão intervalar $F(\hat{x})$.

A.4 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS INTERVALARES

A AI tem sido objeto de extensas pesquisas, impulsionadas pela necessidade de lidar com incertezas e imprecisões em cálculos numéricos e modelagem de sistemas complexos. Diante dos desafios apresentados por essas situações, inúmeras ferramentas computacionais intervalares foram desenvolvidas para aprimorar a precisão e a eficiência desses processos.

Diversas ferramentas estão disponíveis para realizar cálculos intervalares em linguagens de programação tradicionais. Em C++, destacam-se as bibliotecas PROFIL/BIAS (Knüppel, 1994), C-XSC (Hofschuster; Krämer, 2004) e FILIB++ (Lerch *et al.*, 2006). Para a linguagem Python, os módulos PyInterval (Grigoletti; Dimuro; Barboza, 2007) e IntPy (Barreto; Campos, 2008) são amplamente adotados. No contexto da linguagem Fortran, merecem destaque as bibliotecas INTLIB (Kearfott *et al.*, 1994) e INTERVAL_ARITHMETIC (Kearfott, 1996). Para MATLAB e GNU Octave, a ferramenta intervalar mais amplamente utilizada é o IntLab (Rump, 1999).

Neste trabalho, optou-se por utilizar o IntLab, um pacote de software de código proprietário conhecido por sua alta velocidade e desempenho excepcional em cálculos intervalares (Moore; Kearfott; Cloud, 2009; Junior, 2023), para tornar as análises dessa pesquisa mais precisas e consistentes.

A.4.1 IntLab

Inicialmente desenvolvida para as plataformas MATLAB e GNU Octave, a ferramenta IntLab oferece duas abordagens distintas para a declaração de intervalos, cada uma com vantagens específicas, de forma que a escolha de qual utilizar dependerá do contexto específico da análise e das características dos dados em estudo.

A primeira abordagem utiliza a função `midrad`, que gera um intervalo a partir de seu ponto médio *mid* e de seu raio *Rad*. Essa representação é especialmente útil quando se busca uma análise centrada em um valor de referência, permitindo uma caracterização mais precisa das incertezas associadas aos dados (Rump, 1999).

```
» x_intervalar = midrad(mid, Rad);
```

Por outro lado, a segunda abordagem emprega a função `infsup` para criar um intervalo a partir dos valores de seus limites inferior e superior, *inf* e *sup*, respectivamente. Essa definição é vantajosa quando a ênfase recai sobre a amplitude completa do intervalo, fornecendo uma visão abrangente das possíveis variações dos dados (Rump, 1999).

```
» x_intervalar = infsup(inf, sup);
```

O exemplo a seguir ilustra a aplicação dessas duas abordagens na declaração de intervalos e suas diferenças.

Exemplo 4. Sejam a e b dois números reais, tal que $a = 1$ e $b = 4$, determine \hat{x} se $\hat{x} = \text{midrad}(a, b)$ e $\hat{x} = \text{infsup}(a, b)$.

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \text{midrad}(a, b) \\ &= [a - b; a + b];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \text{infsup}(a, b) \\ &= [a; b].\end{aligned}$$

Embora os parâmetros utilizados nas duas funções sejam iguais, é possível perceber que as abordagens geram intervalos diferentes, pois seus limites inferiores e superiores não são equivalentes.

APÊNDICE B – DADOS DO SISTEMA 6 BARRAS MODIFICADO

Para atender aos objetivos do Capítulo 5, os dados do sistema 6 barras, originalmente apresentados em Wood, Wollenberg e Sheblé (2013), foram modificados.

A Tabela 17 fornece informações sobre os dados de carga do sistema 6 barras modificado, incluindo o tipo de barras, potências ativas e reativas demandadas e geradas, bem como as magnitudes de tensão controlada para as barras PV.

Tabela 17 – Dados de barra do sistema 6 barras modificado.

Barra	Tipo	P_d (p.u.)	Q_d (p.u.)	P_g (p.u.)	Q_g (p.u.)	$ V_k^{esp} $ (p.u.)	θ (°)
1	V θ					1,05	0
2	PV	0		0,50		1,05	
3	PV	0		0,60		1,07	
4	PQ	0,90	0,90	0	0		
5	PQ	0,90	0,90	0	0		
6	PQ	0,90	0,90	0	0		

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

A Tabela 18 contém informações relativas aos limites de reativo dos geradores.

Tabela 18 – Limites de reativo do sistema 6 barras modificado.

Barra	Tipo	Q_{min} (p.u.)	Q_{max} (p.u.)
1	V θ	-0,60	0,90
2	PV	-1,00	1,30
3	PV	-1,00	1,30

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Os dados relativos às linhas do sistema estão apresentados na Tabela 19.

Tabela 19 – Dados de linha do sistema 6 barras modificado.

De	Para	R (p.u.)	X (p.u.)	B^{sh} (p.u.)
1	2	0,10	0,20	0,04
1	4	0,05	0,20	0,04
1	5	0,08	0,30	0,06
2	3	0,05	0,25	0,06
2	4	0,05	0,10	0,02
2	5	0,10	0,30	0,04
2	6	0,07	0,20	0,05
3	5	0,12	0,26	0,05
3	6	0,02	0,10	0,02
4	5	0,20	0,40	0,08
5	6	0,10	0,30	0,06

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).