UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Jorge Luís Amaro Penna

Uma proposta ao estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Juiz de Fora

2023

Jorge Luís Amaro Penna

Uma proposta ao estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Penna, Jorge Luís Amaro.
Uma proposta ao estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais / Jorge Luís Amaro Penna. – 2023.
55 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2023.

1. Palavra-chave. 2. Palavra-chave. 3. Palavra-chave. I. Sobrenome, Nome do orientador, orient. II. Título.

Jorge Luís Amaro Penna

Uma proposta ao estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 28 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª. Drª. Ana Tércia Monteiro Oliveira

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Osnel Broche Cristo

Universidade Federal de Lavras

Juiz de Fora, 05/09/2023.

Documento assinado eletronicamente por **Jose Barbosa Gomes**, **Professor(a)**, em 29/09/2023, às 08:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Ana Tercia Monteiro Oliveira**, **Professor(a)**, em 29/09/2023, às 10:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Osnel Broche Cristo**, **Usuário Externo**, em 29/09/2023, às 13:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pois sem Ele, jamais teria conseguido concluir mais esta etapa tão importante em minha vida. Que nos momentos mais difíceis deu-me forças para continuar. Muito obrigado, Deus.

Agradeço a minha família, em especial aos meus pais Tecla e Wantuil, minha esposa Rosemary e minha querida filha Luísa por todo amor, confiança e suporte. Obrigado por sempre estarem dando todo o suporte e atenção a mim.

Agradeço ao Professor Dr. José Barbosa Gomes pela orientação e suporte na realização desse trabalho.

Aos amigos do curso PROFMAT da UFJF que sempre fomos unidos nesse período de estudo, onde fiz novas amizades e reforcei as já existentes.

Agradeço aos amigos da Escola Estadual Dilermando Costa Cruz por toda a torcida e força que deram-me por todo este período de estudo para a execução deste trabalho.

RESUMO

Apresentamos uma descrição e uma crítica sobre o assunto grandezas, juntamente com uma análise dos livros do PNLD (2020-2023) referentes ao tratamento tradicionalmente oferecido. Preocupados com uma melhor qualidade e rigor no processo de ensino-aprendizagem deste assunto, apresentamos uma proposta de ensino um pouco diferente da tradicionalmente feita. Tal proposta foi aplicada em duas salas de aula de uma escola pública estadual, no estado de Minas Gerais, sendo que a receptividade, por parte dos alunos, dentro do que percebemos, foi satisfatória.

Palavras-chave: Grandezas. Diretamente proporcionais. Inversamente proporcionais.

ABSTRACT

We present a description and critique on the subject of magnitudes, together with an analysis of the PNLD books (2020-2023) referring to the treatment traditionally offered. Concerned with better quality and rigor in the teaching-learning process of this subject, we present a teaching proposal that is slightly different from that traditionally done. This proposal was applied in two classrooms of a state public school, in the state of Minas Gerais, and the receptivity on the part of the students, from what we noticed, was satisfactory.

Keywords: Quantities. Directly proportional. Inversely proportional.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – $y = k \cdot x$, com $x > 0$ e $k = 2$. 14
Figura 2 – $y = \frac{k}{x}$, com $x > 0$ e $k = 2$. 16
Figura 3 – Quantidade de cadernos e seu custo 29
Figura 4 – $y = \frac{30}{x}$, com $x > 0$. 30
Figura 5 – Relacionando lado do quadrado com área do quadrado 36
Figura 6 – Quantidade de cadernos e seu custo 48
Figura 7 – $y = \frac{30}{x}$, com $x > 0$. 49
Figura 8 – Relacionando lado do quadrado com área do quadrado 55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela relacionando a quantidade de cadernos e o seu custo 28
Tabela 2 – Algumas medidas de lado do quadrado com sua respectiva área 35
Tabela 3 – Tabela relacionando a quantidade de cadernos e o seu custo 47
Tabela 4 – Algumas medidas de lado do quadrado com sua respectiva área 54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PNLD	Programa Nacional do Livro Didático

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}_{+}^{*}$	Conjunto dos números reais positivos
$\in$	Pertence
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 GRANDEZAS 13

2.1 GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS 13

2.1.1 Representação Gráfica 14

2.2 GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS 15

2.2.1 Representação Gráfica 16

2.3 GRANDEZAS NÃO PROPORCIONAIS 16

3 A ABORDAGEM DO ASSUNTO GRANDEZAS NOS LIVROS DIDÁTICOS 18

4 A PROPOSTA 25

4.1 O PLANO DE AULA 25

4.2 DESCRIÇÃO DE COMO FOI FEITA A APLICAÇÃO DA PROPOSTA 37

5 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA 39

5.1 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA PELOS ALUNOS 39

5.2 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA PELOS PROFESSORES 40

6 CONCLUSÃO 42

REFERÊNCIAS 43

APÊNDICE A – Plano de aula 44

1 INTRODUÇÃO

As idéias de Eudoxo, de acordo com alguns autores, foram essenciais para a resolução do problema das grandezas incomensuráveis, criando a teoria das proporções possibilitando trabalhar com grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Desta forma, desde este estudo a Geometria passa a ter uma maior importância na Matemática Grega. Desde então nossos ancestrais vêm lidando com os algarismos indoarábicos, com as regras de cálculo com frações, radicais e decimais, com equações algébricas, etc. É notável que o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra ocorreu sob influência da tradição grega. Os tópicos "razões e proporções" e "regra de três" são exemplos típicos da colaboração do estudo de Eudoxo.

O estudo sobre grandezas é de suma importância, visto que auxilia na continuidade dos estudos em Matemática, como por exemplo no Teorema de Tales, e muito útil para o cotidiano dos alunos, como por exemplo o caso do número de pedreiros, dimensões da parede a ser construída e número necessário de dias.

Primeiramente, consultamos vários livros didáticos verificando a forma em que foram abordados os conceitos em relação ao tema grandezas e como que foram abordadas as resoluções dos exemplos dados em cada livro pelos autores.

Preocupados com a qualidade e o nível do ensino do assunto grandezas, além da preocupação com o rigor matemático com o tratamento do assunto, elaboramos uma proposta com o intuito de trazer uma visão com mais rigor matemático.

A proposta foi testada em duas turmas do 9º ano regular do ensino fundamental de uma escola pública estadual de Juiz de Fora com 42 alunos (22 alunos numa turma e 20 na outra turma) num período de 15 aulas (ou seja, três semanas).

Um grupo de professores de Matemática foi escolhido para opinar sobre a metodologia da proposta sobre o tema Grandezas, tendo sido aceita a ideia, porém com certas observações a serem levadas em consideração.

No Capítulo 2, apresentamos as definições de grandezas, grandezas diretamente e inversamente proporcionais e apresentamos a prova de dois teoremas sobre equivalências entre definições de grandezas diretamente (Teorema 1) ou inversamente proporcionais (Teorema 2). No fim desse capítulo, consideramos o caso das grandezas não proporcionais.

No Capítulo 3, fizemos o levantamento das abordagens do tema Grandezas em 11 coleções de livros didáticos presentes no PNLD 2020-2023. Levantando observações e críticas ao que estava sendo abordado nos livros.

No Capítulo 4, apresentamos a proposta, sendo mostrado o plano de aula e a descrição de como ocorreu a aplicação do plano de aula nas turmas em que ocorreu o estudo.

No Capítulo 5, discorremos sobre o que foi observado da receptividade da proposta junto aos alunos e alguns professores. Também fazemos observações entre o que ocorreu em cada turma no decorrer de cada aula do plano de aula.

Por fim, apresentamos uma pequena conclusão no Capítulo 6.

2 GRANDEZAS

Neste capítulo, iremos definir o termo grandeza, classificá-lo em grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais e representaremos graficamente cada situação.

Grandeza é tudo que pode ser medido. Exemplos: distância, velocidade, comprimento, massa, etc.

2.1 GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Definição. Duas grandezas são diretamente proporcionais quando são verificadas ambas as condições abaixo:

- se aumentarmos uma delas, a outra também aumenta;

- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra também fica multiplicada por esse mesmo número.

O teorema abaixo é baseado nas referências (1) e (2).

Teorema 1 *Seja* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *uma função crescente. As três afirmações abaixo são equivalentes:*

(1) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x > 0$*.*

(2) $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$*, para todo* $t > 0$ *e todo* $x > 0$*.*

(3) Fazendo $k = f(1)$*, tem-se* $f(x) = k \cdot x$*, para todo* $x > 0$*.*

Demonstração.

Primeiro, provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2).

Seja r um número racional positivo, arbitrário: $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Como $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$, podemos escrever que $n \cdot f(r \cdot x) = f(n \cdot r \cdot x)$ e, como $r = \frac{m}{n}$, ou seja, $r \cdot n = m$, teremos: $f(n \cdot rx) = f(mx) = m \cdot f(x)$.

Logo, $f(rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$, para todo $x > 0$.

Suponhamos por absurdo que exista c>0 irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x > 0$.

Desta forma, ou $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$ ou $f(c \cdot x) > c \cdot f(x)$.

- Se $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$ então, como $f(x) > 0$, $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < c$. Tomemos r racional de modo que $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < r < c$.

Como r é racional, $r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$. Sendo f crescente e $r \cdot x < c \cdot x$, obtemos $r \cdot f(x) = f(r \cdot x) < f(c \cdot x)$, que é uma contradição.

- Se $f(c \cdot x) > c \cdot f(x)$ então, como $f(x) > 0$, $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} > c$. Tomemos r racional de modo que $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} > r > c$. Como $f(x) > 0, f(c \cdot x) > r \cdot f(x) > c \cdot f(x)$.

Como r é racional, $r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$. Sendo f crescente e $r \cdot x > c \cdot x$, obtemos $r \cdot f(x) = f(r \cdot x) > f(c \cdot x)$, que é uma contradição.

Portanto, $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ para todo $c > 0$ irracional e todo $x > 0$.

Conclui-se que $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x > 0$.

Agora, vamos provar que (2) $\Rightarrow$ (3).

Seja $k = f(1)$. Então, $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot k = kx$, para todo $x > 0$.

Por fim, provaremos que (3) $\Rightarrow$ (1).

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$, arbitrários. Então, por hipótese, $f(n \cdot x) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$.

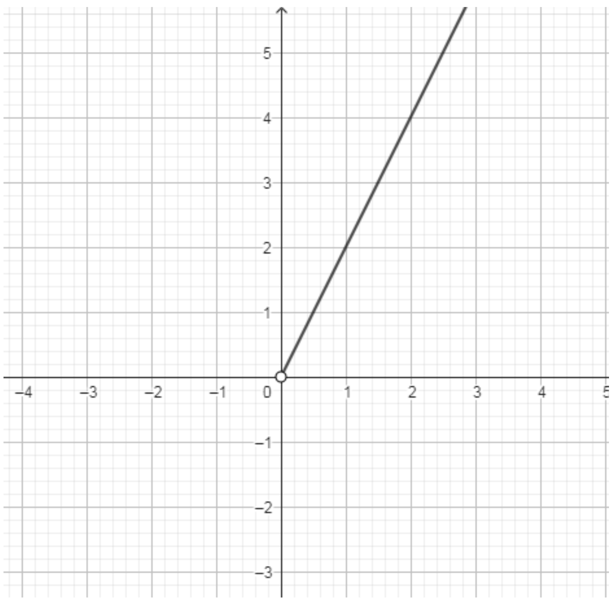
□

2.1.1 Representação Gráfica

Conforme o Teorema 1, quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais temos que $y = k \cdot x$, com $x > 0$ e $k > 0$, cujo gráfico será uma semirreta.

Veja a figura abaixo:

Figura 1 – $y = k \cdot x$, com $x > 0$ e $k = 2$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor, utilizando o programa Geogebra.

2.2 GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Definição. Duas grandezas são inversamente proporcionais quando são verificadas ambas as condições abaixo:

- se aumentarmos uma delas, a outra diminui;

- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.

Teorema 2 *Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ uma função decrescente. As três afirmações abaixo são equivalentes:*

(1) $f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$.

(2) $f(t \cdot x) = \frac{1}{t} \cdot f(x)$, para todo $t > 0$ e todo $x > 0$.

(3) Fazendo $k = f(1)$, tem-se $f(x) = \frac{k}{x}$, para todo $x > 0$.

Demonstração.

Primeiro, provaremos que (1) $\Rightarrow$ (2).

Seja r um número racional positivo, arbitrário: $r = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Como $f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$, podemos escrever que $\frac{1}{n} \cdot f(r \cdot x) = f(n \cdot r \cdot x)$ e, como $r = \frac{m}{n}$, teremos: $f(r \cdot x) = n \cdot f(n \cdot r \cdot x) = n \cdot f(m \cdot x) = \frac{n}{m} \cdot f(x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$, para todo $x > 0$.

Suponhamos por absurdo que exista c>0 irracional tal que $f(cx) \neq \frac{1}{c} \cdot f(x)$ para algum $x > 0$.

Desta forma, ou $f(c \cdot x) < \frac{1}{c} \cdot f(x)$ ou $f(c \cdot x) > \frac{1}{c} \cdot f(x)$.

- Se $f(c \cdot x) < \frac{1}{c} \cdot f(x)$ então, como $f(x) > 0$, $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < \frac{1}{c}$. Tomemos r racional de modo que $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} < \frac{1}{r} < \frac{1}{c}$.

Como r é racional, $\frac{1}{r} \cdot f(x) = f(r \cdot x)$. Sendo f decrescente e $\frac{1}{r} \cdot x < \frac{1}{c} \cdot x$, obtemos $\frac{1}{r} \cdot f(x) = f(r \cdot x) < f(c \cdot x)$, o que é uma contradição.

- Se $f(c \cdot x) > \frac{1}{c} \cdot f(x)$ então, como $f(x) > 0$, $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} > \frac{1}{c}$. Tomemos r racional de modo que $\frac{f(c \cdot x)}{f(x)} > \frac{1}{r} > \frac{1}{c}$. Como $f(x) > 0, f(c \cdot x) > \frac{1}{r} \cdot f(x) > \frac{1}{c} \cdot f(x)$.

Como r é racional, $\frac{1}{r} \cdot f(x) = f(r \cdot x)$. Sendo f decrescente e $\frac{1}{r} \cdot x > \frac{1}{c} \cdot x$, obtemos $\frac{1}{r} \cdot f(x) = f(r \cdot x) > f(c \cdot x)$, o que é uma contradição.

Portanto, $f(c \cdot x) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$ para todo $c > 0$ irracional e todo $x > 0$.

Conclui-se que $f(t \cdot x) = \frac{1}{t} \cdot f(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x > 0$.

Agora, provaremos que (2) $\Rightarrow$ (3).

Seja $k = f(1)$. Então, $f(x) = f(x \cdot 1) = \frac{1}{x} \cdot f(1) = \frac{1}{x} \cdot k = \frac{k}{x}$, para todo $x > 0$.

Por fim , provaremos que (3) $\Rightarrow$ (1).

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$, arbitrários. Então, por hipótese, $f(n \cdot x) = \frac{k}{n \cdot x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{x} = \frac{1}{n} \cdot f(x)$.

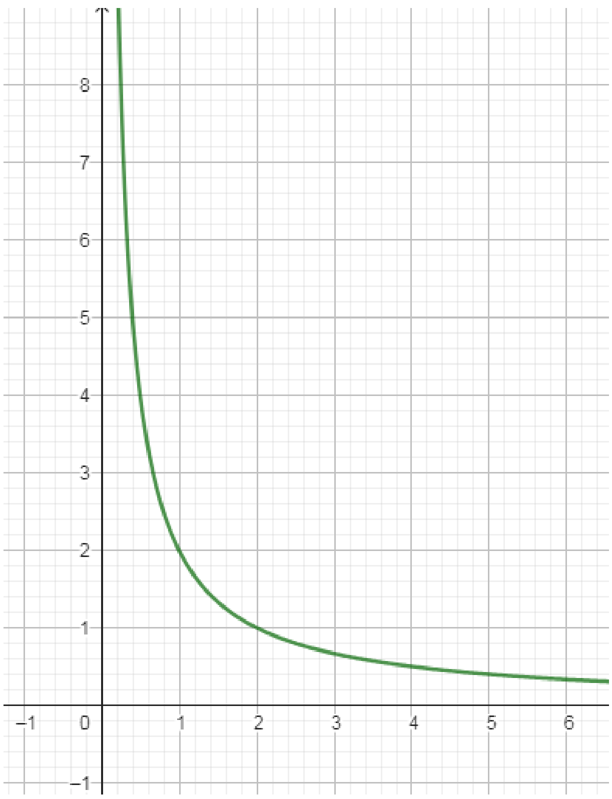
$\square$

2.2.1 Representação Gráfica

Conforme o Teorema 2, quando duas grandezas x e y são inversamente proporcionais temos que $y = \frac{k}{x}$, com $x > 0$ e $k > 0$, cujo gráfico é uma curva decrescente que chamamos de ramo de hipérbole.

Veja a figura abaixo:

Figura 2 – $y = \frac{k}{x}$, com $x > 0$ e $k = 2$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor, utilizando o programa Geogebra.

2.3 GRANDEZAS NÃO PROPORCIONAIS

Existem grandezas que não são nem diretamente e nem inversamente proporcionais. Por exemplo, a relação entre a área do quadrado e a medida do lado do quadrado. Pois, neste caso, apesar de aumentando a medida do lado do quadrado também estaremos aumentando a área do quadrado, em contrapartida, ao multiplicarmos a medida do lado do quadrado por um valor n, com n sendo um número natural, o valor da área do quadrado não será multiplicado pelo mesmo valor de n.

3 A ABORDAGEM DO ASSUNTO GRANDEZAS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, traremos o levantamento do que foi observado após analisar as 11 coleções de livros didáticos do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) em vigor atualmente referente ao tema grandezas.

De acordo com os livros didáticos do PNLD 2020 - 2023 (referências (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12) e (13)), foi averiguado o que descrevemos a seguir. Por conveniência, omitiremos os títulos dos livros, que serão aqui indicados por A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K.

Livro A - 7º ano - Neste livro foi dado os conceitos de razão, proporção e grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Existe a resolução de situações-problema no caso de duas grandezas. As resoluções destas situações-problema foram através da montagem de uma proporção dos valores, sendo que no caso de grandezas inversamente proporcionais, os valores de uma das grandezas foram invertidos. Também foi abordado o caso em que as duas grandezas não são nem diretamente e nem inversamente proporcionais.

Livro A - 8º ano - Neste livro o conceito de grandezas diretamente e inversamente proporcional foi tratado de forma que os valores atribuídos em cada grandeza seria como se fosse uma sequência numérica e a razão entre os termos das sequências numéricas se fosse a mesma seria o caso de grandezas diretamente proporcionais e o resultado da razão seria o valor do k (fator de proporcionalidade). Já no caso das grandezas inversamente proporcionais, os valores das grandezas também eram tratados como sequências numéricas e a razão entre os termos da sequência, sendo que numa sequência os termos seriam invertidos, teria que sempre resultar no mesmo valor k (fator de proporcionalidade). No final do capítulo também é abordado o caso de não existir proporcionalidade, mostrando que atribuindo os valores das grandezas como uma sequência numérica e consequentemente calculando a razão entre os termos das sequências foi averiguado que os resultado não seriam iguais, desta forma não existindo proporcionalidade.

Livro A - 9º ano - O conceito de razão novamente foi abordado, porém mostrando mais casos de aplicabilidade do conceito de razão. Retoma, também, o conceito de proporção e aborda o caso de divisão em partes proporcionais. Por fim, é abordado os casos de "regra de três simples e composta". Pensando em cada grandeza como uma razão entre valores, em que a razão é escrita sendo o valor inicial como numerador e o valor final como denominador. Porém, no caso de grandezas inversamente proporcionais, inverte-se os valores da razão, ou seja, valor inicial seria o denominador e valor final o numerador. Montadas as razões, iguala-se (tendo assim uma proporção) e resolvendo-a. No caso de mais de duas grandezas, a razão onde possui o termo a se descobrir ficava de um lado da igualdade e as demais razões, do outro lado da igualdade, sendo o produto destas. Após isso, resolvia-se a proporção.

Livro B - 7º ano - Traz os conceitos de razão e proporção. Em seguida, define o que seria uma grandeza e aborda os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Também, atenta-se para o caso de termos grandezas que se relacionam, mas não são proporcionais, como o caso abordado idade e altura. Mostra o caso de divisão em partes diretamente e inversamente proporcionais. No final do capítulo, aborda o caso de "regra de três simples" sendo que no caso de diretamente proporcional é montado uma proporção, com as razóes de cada grandeza. Já no caso de inversamente proporcionais, o livro trata uma igualdade entre o produto dos valores de cada grandeza.

Livro B - 8º ano - Neste livro, aborda-se novamente os conceitos de razão e proporção. Em seguida, temos os casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. O livro aborda os conceitos enfatizando observações como no caso de diretamente proporcionais, em que uma grandeza era duplicada e a outra também ficava duplicada, se fosse triplicada, a outra também seria, e assim sucessivamente. Neste livro, é abordada a representação gráfica dos casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Livro B - 9º ano - Neste livro, o conceito de razão novamente é abordado. Porém, ao citar o conceito de grandezas diretamente proporcionais como sendo o caso onde as razões terão sempre o mesmo valor, chamado de k (constante de proporcionalidade). Novamente, o caso de grandezas inversamente proporcionais é tratado como a igualdade do produto dos valores atribuídos as grandezas dadas. Em seguida, é tratado o caso de "regra de três composta" em que a resolução é feita através de uma proporção, em que de um lado da igualdade ficava a razão com o termo a se descobrir e do outro lado da igualdade teríamos o produto das demais razões, caso alguma grandeza fosse inversamente proporcional a grandeza que possui o termo a se descobrir, a razão seria inversa.

Livro C - 7º ano - Este livro traz os conceitos de razão e proporção. Compara duas sequências numéricas se são diretamente ou inversamento proporcionais através da razão entre os termos das sequências, e através da razão, que sempre terá o mesmo valor, o valor da razão é dito como k (constante de proporcionalidade). No decorrer do capítulo, o livro aborda o caso de "regra de três simples" como sendo uma proporção.

Livro C - 8º ano - Neste livro, é abordado novamente os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais e traz uma observação importante que é a possibilidade de escrevermos através de uma sentença matemática a relação entre as grandezas dadas (no caso abordado de duas grandezas). Em seguida, é abordado o caso de grandezas que se relacionam de forma não proporcional. E, por fim, é mostrado a representação gráfica dos casos de grandezas proporcionais e não proporcionais.

Livro C - 9º ano - Não traz nada relacionado ao assunto.

Livro D - 7º ano - Aborda os conceitos de razão e proporção. No final do capítulo, o autor abordou situações-problemas em que era possível determinar valores desconhecidos através da descoberta de razões equivalentes.

Livro D - 8º ano - Não traz nada relacionado ao assunto.

Livro D - 9º ano - Traz o conceito de razão com suas aplicabilidades. Aborda o conceito de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, observando que no caso de diretamente proporcionais, ao dobrarmos uma grandeza a outra também dobrará, se triplicarmos uma grandeza a outra também triplicará, e assim, sucessivamente. E, o autor também observou o caso de inversamente proporcional, mostrando que ao dobrar uma grandeza a outra seria reduzida a metade, se triplicar uma grandeza, a outra seria reduzida a terça parte, e assim, sucessivamente. É abordado, também, o caso de não proporcionalidade. O capítulo traz, também, o caso de regra de três simples tendo como resolução uma proporção entre os valores dados na questão. Porém, o autor, traz a possibilidade de resolução de questões envolvendo duas grandezas, utilizando um quadro, e adotando os conceitos adquiridos. No caso de diretamente proporcional, se multiplicarmos um valor de uma grandeza por 2, o outro valor equivalente, da outra grandeza, será multiplicado também por 2, e assim, sucessivamente. No caso de inversamente proporcionais, se um valor fosse multiplicado por 2, o seu equivalente na outra grandeza seria reduzido a metade, e assim sucessivamente. No final do capítulo, o autor traz o caso de resolução de regra de três composta, onde ele fixa grandezas a fim que sobram apenas duas grandezas para que seja possível resolver da mesma forma que a regra de três simples. Em seguida, o autor fixa a grandeza que foi utilizada e resolve a questão novamente com as duas grandezas que sobram, obtendo assim o resultado.

Livro E - 7º ano - Conceitua razão e proporção. Traz a ideia de sequência de números diretamente e inversamente proporcionais, mostrando que o valor da razão sempre será o mesmo, chamado de k (constante de proporcionalidade). Em seguida, mostra o conceito de grandezas e posteriormente o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais. O autor enfatiza também a possibilidade de termos uma sentença algébrica para a resolução de situações-problemas com duas grandezas. Por fim, o autor aborda "regra de três simples" resolvendo como proporção.

Livro E - 8º ano - O autor reforça os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais dados no livro do 7º ano e mostra a representação gráfica dos casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais e do caso de grandezas não proporcionais.

Livro E - Nada é abordado referente ao tema em questão.

Livro F - 7º ano - O autor conceitua razão e proporção. Em seguida, mostra o que seriam número diretamente e inversamente proporcionais ao relacionar duas colunas de valores (duas grandezas), definindo que se forem diretamente proporcionais, as razões (numerador sempre um valor da primeira coluna e denominado sendo um valor da segunda coluna que seja equivalente ao valor atribuido da primeira coluna) sempre serão iguais. Enquanto o caso de inversamente proporcionais, é definido como uma igualdade como produto de um termo da primeira coluna com o seu equivalente na segunda coluna. Em seguida, é definido o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais através do valor da razão entre os termos das grandezas. Por fim, o autor traz a ideia de regra de três simples e composta. Na regra de três simples, resolve-se através da resolução da proporção adquirida com os dados obtidos. Já na regra de três composta, após determinar quais grandezas seriam diretamente e inversamente proporcionais à grandeza em que possui o termo desconhecido, o autor monta uma proporção em que de um lado teremos a razão com o termo desconhecido e do outro lado da igualdade temos o produto das razões restantes.

Livro F - 8º ano - O autor traz os conceitos de razão, proporção, grandezas proporcionais e não proporcionais. Em seguida, mostra a representação gráfica de dois casos, mas, não define se são casos de grandezas proporcionais ou não e nem tão pouco se são diretamente ou inversamente proporcionais. Posteriormente, o autor aborda aplicabilidade do conceito de razão. Ao ir finalizando o capítulo, o autor aborda o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais, trazendo a representação de cada caso. Por fim, o autor traz o mesmo tratamento atribuído nos conceitos de regra de três simples e composta no livro do 7ºano.

Livro F - 9º ano - Não é abordado nada sobre o tema em questão.

Livro G - 7º ano - Traz o conceito de razão e proporção. Em seguida, define o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais e grandezas não proporcionais, mostrando alguns casos de representação gráfica, porém não definindo quando que a representação gráfica representa cada caso.

Livro G - 8º ano - O autor definiu os conceitos de razão e proporção. Em seguida, o livro traz o que seriam grandezas proporcionais. Esclarecendo o que são grandezas diretamente e inversamente proporcionais e representando a relação entre as grandezas através de uma expressão algébrica juntamente com a representação gráfica no plano cartesiano. Posteriormente, foi definida a ideia de grandezas não proporcionais e mostrou como podemos escrever uma expressão algébrica que define este tipo de grandeza e sua representação gráfica. Por fim, o autor mostrou a resolução dos casos de regra de três simples através da obtenção de uma proporção.

Livro G - 9º ano - Neste livro, temos os conceitos de razão, proporção e números proporcionais diretamente e inversamente. Em seguida, o autor traz o item "regra de três composta" resolvendo na forma de proporção, tendo em uma parte da igualdade a razão da grandeza em que temos o termo desconhecido e do outro lado da igualdade o produto das razões das demais grandezas.

Livro H - 7º ano - O autor traz o conceito de razão e, em seguida, já se discute sobre o conceito de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, inserindo o uso de fórmulas para a resolução de situações-problemas, indicando nesses casos o que seria a constante de proporcionalidade.

Livro H - 8º ano - O autor traz os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais e introduz a relação entre as grandezas através de expressão algébrica juntamente com a representação gráfica através do plano cartesiano. Faz-se o mesmo para o caso de grandezas não proporcionais. Por fim, o autor traz os casos de "regra de três simples" e mostra a resolução através da igualdade entre as razões obtidas através das duas grandezas em questão.

Livro H - 9º ano - Neste livro, o autor retorna o conceito de razão e apresenta casos em que usa-se a ideia de razão. Posteriormente, o autor define o que é proporção e números proporcionais. Em seguida, apresenta-se a divisão em partes proporcionais. Por fim, apresenta-se os conceitos de "regra de três simples e composta" com a resolução sendo baseada em proporções.

Livro I - 7º ano - O autor traz o conceito de razão e proporção. Em seguida, mostra a relação entre grandezas, definindo o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais resolvendo através de proporções.

Livro I - 8º ano - O livro traz a ideia de proporção novamente. Posteriormente, o autor fala sobre grandezas proporcionais e não proporcionais. Por fim, mostra-se o caso de grandezas diretamente proporcionais em que o autor apresenta a possibilidade de traçar uma expressão algébrica que defina o exemplo dado e a sua representação algébrica. Ainda, o autor mostra o caso com mais de duas grandezas, resolvendo-o de forma em que mantém fixa uma grandeza e utilizam-se apenas as duas grandezas que sobram. Depois de obter o resultado, fixa-se a grandeza que não possui o termo a se descobrir e utiliza-se a grandeza fixada anteriormente.

Livro I - 9º ano - O autor conceitua razão e mostra sua aplicabilidade e, também apresenta o conceito de proporção. Posteriormente, são definidos os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Livro J - 7º ano - Conceitua razão e proporção. Logo após, o autor comenta sobre o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais e grandezas não proporcionais. Em seguida, definiu-se o que seria coeficiente de proporcionalidade. Por fim, temos regra de três simples sendo os exemplos resolvidos através de proporção.

Livro J - 8º ano - Relembrou primeiramente os conceitos sobre grandezas proporcionais vistos no livro do 7º ano. Em seguida, o autor mostrou duas formas de resolução da "regra de três composta". Um método era de resolver através de regras de três simples, fixando as demais grandezas. O outro método é utilizar todas as grandezas ao mesmo tempo, através de uma proporção. Com um lado da igualdade sendo a razão que possui o termo desconhecido, enquanto o outro lado da igualdade será o produto das razões obtidas pelas demais grandezas. Por fim, o livro traz no final do capítulo a representação gráfica de casos de grandezas diretamente proporcionais.

Livro J - 9º ano - Não traz nada sobre o tema abordado.

Livro K - 7º ano - Traz os conceitos de razão e proporção e aplicabilidade destes conceitos. Em seguida, é discutido os conceitos de grandezas proporcionais. Explicitando o que seriam grandezas diretamente e inversamente proporcionais deixando explícito o valor de k (constante de proporcionalidade) e demonstrando que é possível escrever uma expressão algébrica que defina como podemos resolver os casos de grandezas proporcionais.

Livro K - 8º ano - O autor traz sobre proporcionalidade direta e inversa, mostrando que cada caso pode ser atribuído uma expressão algébrica. E, posteriormente é possível deerminar a representação gráfica de cada caso.

Livro K - 9º ano - Apresenta o caso de duas grandezas diretamente e inversamente proporcionais. E, posteriormente, mostra o caso de mais de duas grandezas sendo resolvido apenas através de proporção.

Após a análise das 11 coleções de livros didáticos de Matemática do PNLD 2020-2023 dos anos finais do ensino fundamental, constatou-se que:

- Todas as coleções abordam o conceito de razão e proporção. Porém, apenas em 8 coleções que é registrado a aplicabilidade do conceito de razão em casos especiais, tais como velocidade média, densidade demográfica entre outros.

- Em 6 coleções é abordado o conceito de números diretamente e inversamente proporcionais.

- Em todas as coleções foi definido o conceito de grandezas diretamente e inversamente proporcionais sendo o seguinte: "Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas é sempre a mesma". E, "Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os inversos dos valores correspondentes da segunda grandeza é sempre a mesma". Portanto, não definiram grandezas diretamente ou inversamente proporcionais seguindo a ideia de que é necessário serem satifeitas as condições:

* Para grandezas diretamente proporcionais:

- se aumentarmos uma delas, a outra também aumenta;

- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra também fica multiplicada por esse mesmo número.

* Para grandezas inversamente proporcionais:

- se aumentarmos uma delas, a outra diminui;

- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.

- Em 8 coleções foi determinado o valor de k em casos de duas grandezas, porém não foi discutido se era válido para qualquer valor possível pelas grandezas em questão.

Nenhum livro trouxe a discussão da determinação da constante de proporcionalidade (K) com mais de duas grandezas.

- Em 6 coleções foi abordado o caso de grandezas não proporcionais. Sendo observado, pelo autor. que não existia proporcionalidade direta ou inversa.

- Em 2 coleções a representação gráfica foi abordada apenas para o caso de grandezas diretamente proporcionais.

- Em 6 coleções foi abordado a representação gráfica dos casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

- Em 5 coleções temos a representação gráfica dos casos de grandezas não proporcionais.

- Em 6 coleções, o autor aborda que podemos determinar uma expressão algébrica para a resolução de casos com duas grandezas.

- Em 9 coleções, o autor traz a resolução de "regra de três simples" através de tabela de valores e uma proporção (igualdade entre duas razões). Em que nos casos de grandezas inversamente proporcional, utiliza-se uma das razões sendo inversa. Sendo deduzido o caso se é diretamente ou inversamente proporcional.

- Em 9 coleções, o tratamento para a resolução dos casos de "regra de três composta" foi de observação dos valores em tabela e aplicação de proporção. Sendo que de um lado da igualdade teríamos uma razão com o termo a se descobrir e do outro lado da igualdade temos um produto de razões. Em um dos livros, o autor aborda uma outra forma de resolução para esses casos, que é dividir a questão em "regra de três simples". Desta forma, o autor fixa uma grandeza e trabalha com as outras duas grandezas, sendo que uma delas é a que possui o termo a se descobrir. Determinando o valor a ser descoberto, o autor novamente resolve outra regra de três simples, com "a nova razão do termo a se descobrir" e a razão da grandeza que tinha sido fixada anteriormente, descobrindo assim outro resultado. Neste caso, confunde-se qual seria o real valor a ser descoberto, visto que encontra-se um primeiro valor e depois utiliza-se este para determinar outro resultado.

- Em 2 coleções, o termo "regra de três" não é abordado. Porém, o processo de resolução mantém-se sendo análise dos valores através de uma tabela e resolução por proporção.

- Em 1 coleção é definido função tendo como base a relação entre grandezas.

4 A PROPOSTA

Neste capítulo, serão apresentados o plano de aula proposto para se trabalhar o assunto grandezas e também a descrição de como foi feita a sua aplicação em duas turmas de nono ano de uma escola estadual do município de Juiz de Fora.

4.1 O PLANO DE AULA

Nesta seção, iremos apresentar o plano de aula adotado para trabalhar a proposta sobre o tema grandezas.

Aula 1: Grandezas Proporcionais

O que é uma grandeza?

Grandeza é tudo que pode ser medido. Exemplos: distância, velocidade, comprimento, massa, etc.

O que é uma razão?

Uma razão é uma comparação entre duas grandezas através de uma divisão entre os valores destas grandezas.

Exemplo. Dadas duas grandezas A e B, sendo que A = 20 e B = 30, dizemos que a razão entre A e B será $\frac{20}{30}$, ou ainda, podemos dizer que a razão entre A e B é igual a $\frac{2}{3}$. Pois, $\frac{2}{3}$ é a fração equivalente de $\frac{20}{30}$ e é irredutível.

Quando que teremos proporcionalidade entre grandezas?

Quando temos duas grandezas, a razão entre elas serve para avaliá-las e obtermos outras grandezas.

Exemplo. Velocidade $= \frac{dist}{tempo}$.

Porém, quando temos uma igualdade entre duas razões distintas, obtidas pela divisão entre duas grandezas cujo resultado é o mesmo, chamamos de proporção, e as grandezas serão ditas proporcionais.

Exemplo.$\frac{20\,m}{5\,s} = \frac{80\,m}{20\,s} = 4\,m/s.$

Agora, fica a pergunta: todas as grandezas se relacionam de forma proporcional? Bem, pensemos no caso de massa e altura de uma pessoa. Notemos que não são proporcionais. Temos pessoas com pouca altura e com pouca ou muita massa, o mesmo ocorre com pessoas altas. Assim, não é possível dizermos que exista um padrão para que tenhamos uma proporção entre massa e altura. Não será nem mesmo possível dizer que a massa está em função da altura ou que a altura está em função da massa: a um mesmo valor da altura podemos ter caso de dois valores de massas diferentes e também a um mesmo valor de massa podemos ter caso de dois valores de alturas diferentes.

A partir de agora, para as relações entre duas grandezas, sempre consideraremos que uma está em função da outra.

Exercícios: (Faremos o item A de cada exercício em sala de aula, deixando B e C como tarefa.)

1) Escala é uma razão que indica a relação entre as dimensões do espaço real e do espaço representado. Seja a razão 1 : 79.000.000 a escala de um mapa. Ou seja, cada 1 cm no mapa representa 79.000.000 cm do espaço real. Desta forma, achar qual seria a distância real entre duas cidades, se a distância no mapa fosse:
A) 3 cm B) 12 cm C) 20 cm
2) Determine o valor de x, em cada proporção abaixo:
A) $\frac{x}{4}=\frac{6}{2}$ B) $\frac{6}{x}=\frac{9}{6}$ C) $\frac{7}{4}=\frac{x}{12}$

Aula 02: Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando são verificadas ambas as condições abaixo:
- se aumentarmos uma delas, a outra também aumenta;
- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra também fica multiplicada por esse mesmo número.

Por exemplo, se uma grandeza dobrar, a outra grandeza também dobrará. Se uma grandeza triplicar, a outra também triplicará.

Vejamos o exemplo abaixo:
Exemplo. Se cada caderno custa R$ 3,00, o preço de dois cadernos será R$ 6,00 e o preço de quatro cadernos será R$ 12,00. Observe que se multiplicarmos o número x de cadernos por n = 1, 2, 3, 4, . . . , o valor y dos cadernos também fica multiplicado pelo mesmo n e que ao aumentarmos o número de cadernos, o valor também aumenta. Desta forma, concluímos que as grandezas x (número de cadernos) e y (custo dos cadernos em reais) são diretamente proporcionais.

Exercícios:

1) Abaixo, marque toda aquela situação que apresenta relação entre duas grandezas diretamente proporcionais:

A) A velocidade de um veículo e o tempo necessário para ele percorrer determinado trecho.

B) O tempo de funcionamento de um televisor e a energia elétrica por ele consumida.

C) Quantidade de funcionários de uma mesma categoria e a correspondente despesa na folha salarial da empresa.

D) Número de eleitores de uma cidade e a quantidade de votos obtidos por um determinado político.

2) Na bula de um certo remédio para crianças, a dosagem a ser dada é diretamente proporcional à massa corporal da criança. Sabendo-se que a recomendação é de 5 gotas desse remédio a cada 3 kg, então a dosagem a ser administrada para uma criança com 24 kg é de:

A) 20 gotas B) 25 gotas C) 30 gotas D) 35 gotas E) 40 gotas

Aula 03: Grandezas Inversamente Proporcionais

(Inicialmente, será feita a correção dos exercícios da aula anterior.)

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando são verificadas ambas as condições abaixo:

- se aumentarmos uma delas, a outra diminui;
- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.

Um bom exemplo de grandezas inversamente proporcionais é a comparação entre as grandezas velocidade e tempo, mantendo-se a distância percorrida. Pois, se uma aumenta, a outra diminui e também multiplicando a velocidade por um número natural, o tempo de percurso (mantendo a distância) será dividido pelo mesmo número natural:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow n.v = n.(\frac{d}{t}) \Rightarrow \frac{d}{\frac{t}{n}}.$$

Exercício:

1) Abaixo, marque toda aquela situação que apresenta relação entre duas grandezas inversamente proporcionais:

A) A quantidade de crianças em uma festa e a quantidade de bolo necessária.

B) Número de moradores de um estado e a densidade demográfica deste estado.

C) A velocidade de um veículo e a distância por ele percorrida em um dado intervalo de tempo.

D) Diâmetro de um cano de saída e o tempo gasto para que um certo reservatório seja esvaziado.

Aula 04: A Representação Gráfica dos casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais

1º caso: Grandezas diretamente proporcionais

Sejam A e B duas grandezas diretamente proporcionais. Chamaremos os valores da grandeza A de x e os valores da grandeza B de y, com y em função de x: $y = f(x)$. Adotando que $f(1) = k$, podemos mostrar que $f(x) = k \cdot x$.

Sendo assim, na prática, o valor de k costuma ser encontrado substituindo-se em $y = k \cdot x$ os valores iniciais de x e y correspondentes: $y_0 = k \cdot x_0$. A partir daí, com $y = k \cdot x$, para o k encontrado, a cada valor de x encontraremos o valor de y correspondente.

Podemos dizer que k é positivo, pois os valores das duas grandezas serão positivos.

Ainda, sendo $y = f(x) = k \cdot x$, com $k > 0$, com y sendo o valor da grandeza A e x o valor da grandeza B, temos que f é crescente e que, multiplicando ambos os lados da equação por n, teremos:

$$n \cdot y = n \cdot k \cdot x = k \cdot (n \cdot x).$$

Ou seja, quando multiplicamos uma grandeza por um número natural n qualquer, a outra grandeza também fica multiplicada pelo menos número natural.

Exemplo. Se cada caderno custa R$ 3,00, o preço de dois cadernos será R$ 6,00, o preço de quatro cadernos será R$ 12,00, e, assim, sucessivamente.

Como visto, as grandezas número de cadernos e custo dos cadernos são grandezas diretamente proporcionais. Fazendo-se $y = f(x) = k \cdot x$, teremos que $k = 3$, pois, sendo $x = 1$ (ou seja, 1 caderno), temos o valor correspondente $y = f(1) = 3$, o custo de um caderno. Portanto, temos a relação entre y e x abaixo:

$$y = 3 \cdot x$$

em que y é o custo dos cadernos e x é o número de cadernos.

Desta forma, teremos a tabela abaixo:

Tabela 1 – Tabela relacionando a quantidade de cadernos e o seu custo

Número de cadernos (x)	Custo dos cadernos (y)
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

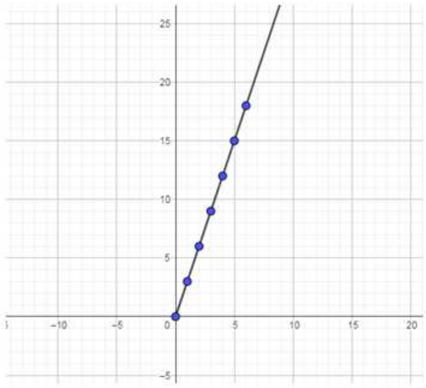
Com isso, a tabela nos dá os seguintes pontos (0,0), (1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5,15), (6,18) que iremos marcar no plano cartesiano.

Vale ressaltar que bastam dois pontos conhecidos para podermos traçar a parte de uma reta que encontramos acima, pois todo gráfico de uma função linear é uma reta.

- 2º caso: Grandezas inversamente proporcionais

Sejam A e B duas grandezas inversamente proporcionais. Chamaremos os valores da grandeza A de x e os valores da grandeza B de y.

Figura 3 – Quantidade de cadernos e seu custo



Fonte: produzido pelo próprio autor

.

Denotando $y = f(x)$ e adotando que $f(1) = k$, podemos mostrar que $f(x) = \frac{k}{x}$. Podemos dizer que k é positivo, pois os valores das duas grandezas serão positivos.

Sendo assim, na prática, o valor de k costuma ser encontrado substituindo-se em $y = \frac{k}{x}$ os valores iniciais de x e y correspondentes: $y_0 = \frac{k}{x_0}$. A partir daí, com $y = \frac{k}{x}$, para o k encontrado, a cada valor de x encontraremos o valor de y correspondente.

Sendo $y = f(x) = \frac{k}{x}$, com y sendo o valor da grandeza A e x o valor da grandeza B, teremos que f é decrescente e que multiplicando ambos os lados da equação por n, teremos que

$$n \cdot y = n \cdot (\frac{k}{x}) = \frac{n \cdot k}{x} = \frac{k}{\frac{x}{n}}.$$

Ou seja, quando multiplicamos uma grandeza por um número natural n qualquer, a outra grandeza fica dividida pelo menos número natural.

Como exemplo, vamos dar uma ideia de como fica o gráfico de $y = \frac{30}{x}$.

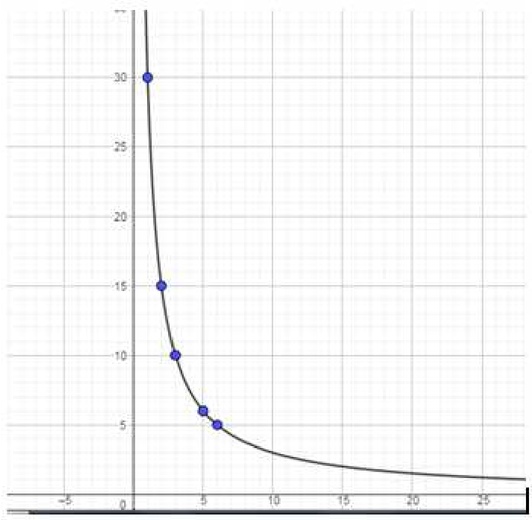
Vamos marcar alguns pontos (x, y) do gráfico: (1,30), (2,15), (3,10), (5,6) e (6,5). A figura abaixo representa o gráfico de $y = \frac{30}{x}$ (com $x > 0$).

É possível notar que a representação gráfica de uma relação entre grandezas inversamente proporcionais não será uma reta. Mas, sim, uma curva decrescente do tipo ramo de hipérbole.

Aula 05 : Problemas envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Nesta aula, iremos ver alguns exemplos de problemas que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais, a fim de que possamos diferenciar os dois casos ao presenciarmos situações que envolvam este tipo de grandezas.

Figura 4 – $y = \frac{30}{x}$, com $x > 0$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor, utilizando o programa Geogebra.

Exemplo 1. Dona Maria recebeu encomendas para fazer bolos. Sabe-se que cada bolo custa 8 reais. Qual será o custo de 3 bolos? E de 5 bolos?

Podemos dizer que o número de bolos x e o seu custo $y = c(x)$ são diretamente proporcionais, pois se aumentarmos uma dessas quantidades, a outra também aumenta e também ao multiplicarmos uma delas por um número n natural qualquer, a outra também será multiplicado por n. Então, $y = k \cdot x$.

Como $y = k \cdot x$ e sabendo que $y_0 = 8$ para $x_0 = 1$, temos que $k = 8$.

Desta forma, podemos dizer que o custo da encomenda será $y = 8 \cdot x$, sendo x a quantidade de bolos que serão encomendados. A partir dessa expressão, podemos calcular o custo da encomenda de qualquer quantidade x de bolos.

Por exemplo, se a encomenda for de 5 bolos, o seu custo será de $8 \cdot 5 = 40$, ou seja, 40 reais.

Exemplo 2. Numa construção, foram contratados 2 pedreiros que foram capazes de executar o serviço em 40 dias. Desta forma, quantos dias seriam necessários, para 4 pedreiros conseguissem terminar a obra?

Podemos dizer que o número de pedreiros x e o tempo gasto y são inversamente proporcionais, pois se aumentarmos uma dessas quantidades, a outra quantidade diminuirá e também ao multiplicarmos uma delas por um número n natural qualquer, a outra será dividida pelo mesmo n. Então, $y = \frac{k}{x}$.

Como $y = \frac{k}{x}$ e sabendo que $y_0 = 40$ para $x_0 = 2$, temos que $k = 80$.

Desta forma, podemos dizer que o tempo gasto para fazer a obra será dado por $y = \frac{80}{x}$, sendo x a quantidade de pedreiros e $y = f(x)$ o tempo gasto para execução da obra. A partir dessa expressão, podemos calcular o tempo gasto para a execução da obra de qualquer quantidade x de pedreiros.

Por exemplo, se o número de pedreiros for 4 pedreiros, para sabermos o tempo gasto para conclusão da obra, teremos: $y = \frac{80}{4} = 20$, ou seja, 20 dias.

Exercícios:

1) Para encher o reservatório de água de um certo condomínio, foram utilizadas 4 torneiras que levam, juntas, 12 horas para o enchimento completo. Supondo-se que a vazão das torneiras seja sempre a mesma, quanto tempo levaria para que o reservatório do tanque ficasse cheio com apenas 3 torneiras?

A) 16 horas B) 13 horas C) 12 horas D) 10 horas E) 7 horas

2) Pretendo fazer uma viagem de uma cidade para a outra, com uma velocidade média de 60 km/h, demora-se 3 horas e 40 minutos. Qual seria o tempo gasto se acaso a velocidade fosse de 100 km/h?

A) 2 horas e 25 minutos
B) 2 horas e 18 minutos
C) 2 horas e 12 minutos
D) 2 horas e 10 minutos
E) 2 horas e 5 minutos

3) Em uma empresa temos que 25 funcionários são capazes de arquivar 600 processos diariamente. Se fossem aberta uma contratação para mais 10 funcionários, com a mesma capacidade que os anteriores, quantos processos seriam arquivados diariamente com a nova equipe?

A) 450 B) 240 C) 840 D) 585 E) 800

4) Uma certa gráfica aceitou um pedido para realizar a produção de uma quantidade grande de cartazes. Considerou-se que 5 máquinas gastariam 24 horas para concluir todo o serviço. Porém, caso duas dessas máquinas apresentassem defeito antes do início do serviço, qual seria o tempo necessário para atender o pedido?

A) 30 horas B) 20 horas C) 26 horas D) 36 horas E) 40 horas

5) Uma empreiteira foi contratada para a reforma de um prédio. Estimou-se que com 8 funcionários a reforma demoraria 15 dias para ser concluída. Se ocorresse a contratação de mais 2 funcionários, o tempo necessário para concluir a reforma seria de:

A)10 dias B)11 dias C)12 dias D)13 dias E)14 dias

Aula 06: Problemas envolvendo Grandezas Diretamente e Inversamente Pro-

porcionais com mais de duas grandezas se relacionando

Sabemos que se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais então $y = k \cdot x$. E, se as grandezas x e y forem inversamente proporcionais, teremos que $y = \frac{k}{x}$, em que k é a constante de proporcionalidade.

Agora, vamos trabalhar com um número maior de variáveis. Vamos supor que a cada grupo de valores dado a (x, y, r) (por exemplo, $(x = 2, y = 3, r = 4)$) corresponde exatamente um valor de z.

Dizemos que z é diretamente proporcional a x quando:
- aumentando a grandeza x (mantendo fixas as outras variáveis), a grandeza z também aumentará;
- ao multiplicarmos x por um número natural n qualquer (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica multiplicado pelo mesmo número n.

De forma análoga, dizemos que z é diretamente proporcional a y.

Dizemos que z é inversamente proporcional a r quando:
- ao aumentarmos a grandeza r (mantendo fixas as outras variáveis), a grandeza z diminuirá;
- e ao multiplicarmos r por um número natural n qualquer (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica dividido pelo mesmo número n.

De forma análoga, temos estas definições para os casos com números diferentes de variáveis.

Podemos verificar que se uma grandeza z é diretamente proporcional a x e y e inversamente proporcional a r, então existe uma constante k tal que

$$z = k\frac{xy}{r}.$$

A constante k é chamada de constante de proporcionalidade e é o valor de z quando x=y=r=1.

Esse resultado também vale, analogamente, para um número diferente de variáveis.

Costumamos achar o valor de k utilizando os valores dados inicialmente no problema: $z_0 = k \cdot \frac{x_0 \cdot y_0}{r_0}$.

Agora, de acordo com o que acabamos de definir, vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 1. Em uma fábrica de brinquedos, 8 homens constroem 20 carrinhos no período de 5 dias. Quantos carrinhos serão fabricados por 4 homens em 15 dias?

Solução:

Observe que tendo mais homens para construir carrinhos, teremos mais carrinhos construídos e multiplicando a quantidade de homens por n, também iremos multiplicar a quantidade de carrinhos por n, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, a quantidade de homens e a quantidade de carrinhos são diretamente proporcionais.

Analisando a quantidade de dias e carrinhos construídos, podemos dizer que tendo mais dias iremos ter mais carrinhos construídos e que multiplicando por n a quantidade de dias, iremos multiplicar pelo mesmo n o número de carrinhos construídos, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, a quantidade de dias e carrinhos construídos serão diretamente proporcionais.

Nesta situação, teremos dois casos de grandezas diretamente proporcionais. Agora, como determinaremos a quantidade de carrinhos, tendo 4 homens e um total de 15 dias?

Iremos adotar c como a quantidade final de carrinhos, d a quantidade final de dias e h a quantidade final de homens. E, ainda, c_o a quantidade inicial de carrinhos, d_o a quantidade inicial de dias e h_o a quantidade inicial de homens.

Adotando k como a quantidade de carrinhos feitas por dia por cada homem, teremos que

$$k = \frac{c_o}{d_o \cdot h_o}$$

e

$$k = \frac{c}{d \cdot h},$$

ou seja,

$$c = k \cdot d \cdot h.$$

Então,

$$k = \frac{c_o}{d_o \cdot h_o} = \frac{c}{d \cdot h}.$$

Assim,

$$\frac{20}{8 \cdot 5} = \frac{c}{4 \cdot 15}.$$

Logo,

$$c = \frac{20}{40} \cdot 60 = 30.$$

Exemplo 2: Cinco torneiras conseguem encher um reservatório em 8 horas. Quantas horas serão necessárias para que 10 torneiras encham 4 reservatórios idênticos ao primeiro reservatório?

Solução:

Observe que tendo mais torneiras precisaremos de menos horas para encher um reservatório e multiplicando a quantidade de torneiras por n, iremos dividir a quantidade de horas por n, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, o número de torneiras e a quantidade de horas são inversamente proporcionais.

Analisando a quantidade de reservatórios e a quantidade de horas, podemos dizer que tendo mais reservatórios iremos precisar de mais horas para encher os reservatórios e que multiplicando por n a quantidade de reservatórios, iremos multiplicar pelo mesmo n o número de horas, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, a quantidade de reservatórios e a quantidade de horas são diretamente proporcionais.

Nesta situação, teremos um caso de grandezas diretamente proporcionais e outro caso de grandezas inversamente proporcionais. Agora, como determinaremos a quantidade de horas, tendo 10 torneiras e um total 4 reservatórios?

Iremos adotar t como a quantidade final de torneiras, h a quantidade final de horas e r a quantidade final de reservatórios. E, ainda, t_o a quantidade inicial de torneiras, h_o a quantidade inicial de horas e r_o a quantidade inicial de reservatórios.

Adotando k como a quantidade de horas necessárias para encher um reservatório de água com uma torneira, teremos que

$$k = \frac{h_o \cdot t_o}{r_o}$$

e

$$k = \frac{h \cdot t}{r},$$

ou seja,

$$h = k \cdot \frac{r}{t}.$$

Então,

$$\frac{h \cdot t}{r} = \frac{h_o \cdot t_o}{r_o}.$$

Assim,

$$\frac{h \cdot 10}{4} = \frac{8 \cdot 5}{1}$$

Daí,

$$\frac{10h}{4} = \frac{40}{1},$$

o que resulta

$$h = 16.$$

Resposta: 16 horas.

Exercícios:

1) Com doze operários, no período de 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, conseguem fazer 36 m de tecido. Em quantos dias 15 operários farão 12 m do mesmo tecido, trabalhando 6 horas por dia?

2) Para produzir um determinado tipo de peça, 8 máquinas idênticas conseguem a produção de 300 peças em 3 dias, em operação 5 horas por dia. Sabendo-se que duas máquinas deram defeito, qual será a quantidade de peças fabricadas em 8 dias se as máquinas restantes ficarem em operação durante 6 horas por dia?

A) 680 B) 700 C) 720 D) 660 E) 740

3)Numa obra, 20 operários, em serviço 3 horas por dia, demoram 18 dias para construir um muro de 400 m. Quanto tempo levará uma equipe de 10 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 200 m?

A) 2 dias B) 4 dias C) 6 dias D) 8 dias E) 10 dias

Aula 7: Grandezas não proporcionais

Nem sempre duas grandezas A e B serão diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo. Seja um quadrado ABCD de lado ℓ. Sabe-se que sua área é ℓ^2.

Então, vamos observar a tabela abaixo:

Tabela 2 – Algumas medidas de lado do quadrado com sua respectiva área

Lado	Área
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor da área do quadrado depende da medida do lado do quadrado:

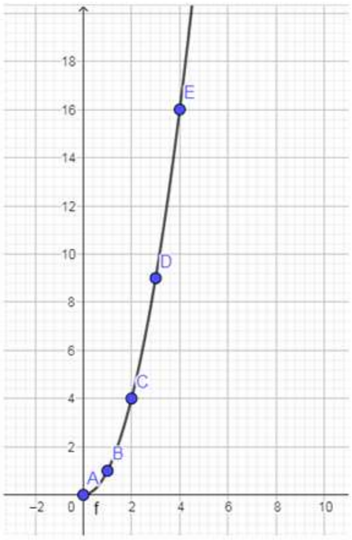
$$A(\ell) = \ell^2.$$

É notório que ao multiplicarmos por um número natural n qualquer a grandeza "lado do quadrado", a grandeza "área do quadrado" não ficará multiplicada e nem dividida pelo mesmo número natural n.

Desta forma, apesar que à medida que aumentamos uma grandeza a outra aumenta, não ocorre a exigência de que ao multiplicar uma grandeza por um número natural n qualquer que a outra grandeza precisaria ser multiplicada ou dividida pelo mesmo número natural n. Portanto, temos grandezas que não são nem diretamente nem inversamente proporcionais.

Vejamos como é o comportamento gráfico no caso da comparação das grandezas "lado do quadrado" e "área do quadrado".

Figura 5 – Relacionando lado do quadrado com área do quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor, utilizando o programa Geogebra.

É um gráfico do tipo ramo de uma parábola.

Agora, vamos resolver o exercício que se segue.

1) A área de um círculo é $\pi \cdot r^2$, onde adotamos $\pi = 3,14$ e r é o raio do círculo. Sendo assim, qual será a área do círculo se a medida do raio for igual a 2 cm? E, se a medida do raio fosse igual a 6 cm? As grandezas raio e área do círculo são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?

4.2 DESCRIÇÃO DE COMO FOI FEITA A APLICAÇÃO DA PROPOSTA

Nesta seção vamos descrever como foi a aplicação da proposta em sala de aula numa escola pública do estado de Minas Gerais, relatando as observações feitas em cada aula.

A aplicação da proposta foi realizada numa escola pública do estado de Minas Gerais na cidade de Juiz de Fora em duas turmas do ensino fundamental, ambas de 9º ano.

A Aula 1 foi expositiva em um primeiro momento em ambas as turmas, sendo copiada pelos alunos em seus cadernos. Num segundo momento, houve a discussão dos conceitos existentes na Aula 1. Foram levantados exemplos além dos expostos na aula. Por fim, houve atividades para ver até em que ponto ficaram claros os conceitos adquiridos.

Na Aula 2 os alunos tiveram o conceito do que seriam grandezas diretamente proporcionais. Inicialmente, a aula foi expositiva e houve a discussão dos conceitos, com levantamentos de outras situações problemas por parte dos alunos e do professor. Na realização das atividades, houve uma boa discussão de quais casos seriam ou não casos de grandezas diretamente proporcionais.

Na aula sobre grandezas inversamente proporcionais os alunos junto ao professor tiveram uma ótima discussão com relação aos exemplos dados e ao conceito dado. No momento de resolução das atividades, os alunos tentaram resolver, porém tiveram muitas dúvidas.

Na quarta aula, tivemos a aula com maior complexidade de conceitos para os alunos. A representação gráfica foi dividida em dois casos. Foram expostos exemplos para a obtenção da representatividade gráfica de cada caso. No final da aula, ocorreu a resolução de atividades, às quais os alunos interagiram entre eles com muita discussão em cada atividade abordada.

Na Aula 5, foram expostos exemplos da forma que pudéssemos resolver as situações-problemas com o uso da ideia de função. Os alunos fizeram muitos levantamentos sobre cada passo, houve muita discussão contribuindo para uma melhor compreensão do que estava sendo exposto em aula. No momento das atividades, os alunos sentaram em pequenos grupos, com um dos alunos sendo mais aplicado à disciplina e auxiliou os demais na resolução das atividades dadas. Na hora da correção das atividades, os alunos tiveram uma boa participação, discutindo como deveria ser cada passo da resolução.

Na Aula 6, foram expostos o método de resolução de casos com mais de duas grandezas. E, decorrente a dificuldade por parte dos alunos, foram expostos outros exemplos em sala para que ocorressem mais discussões sobre o método de resolução. Por fim, no momento da resolução das atividades, os alunos sentaram em duplas e discutiram cada situação-problema dada e em certos momentos vinham junto ao professor para discutirem o que haviam pensado para saberem se estavam na direção correta para a resolução da atividade.

Na última aula do plano de aula, sobre o assunto de grandezas não proporcionais, tivemos a exposição de um caso sobre a área do quadrado e seu lado. No momento da explicação, os alunos ficaram comprometidos em resolver e preencher a tabela para que fosse possível termos os pontos para que pudéssemos ter condições de obter o gráfico que representaria a situação-problema dada. Após a obtenção dos pontos, esboçamos no plano cartesiano e os alunos viram o quão diferente ficou o gráfico em relação aos gráficos que eles já conheciam (o gráfico de grandezas diretamente e inversamente proporcionais). Novamente, os alunos fizeram duplas e discutiram a atividade proposta. No momento da correção, os alunos mais comprometidos pediram para mostrar os cálculos na lousa e esboçaram o gráfico obtido.

Para finalizarmos o plano de aula, após a correção da atividade da Aula 7, fizemos uma roda de conversa sobre como foi abordado o tema proposto. Por volta de 35% dos alunos disse que era difícil. Porém, esses alunos em sua maioria já possuem muita dificuldade com a disciplina Matemática e são alunos que fazemos sempre intervenções para que possam acompanhar a turma. Já cerca de 60% dos alunos disseram que boa parte do que foi exposto era mediano para fácil. No entanto, na parte onde tinham muitas grandezas, disseram que era necessária muita atenção para que não ocorressem erros na resolução das atividades propostas. Vale ressaltar que esse grupo de alunos é composto de estudantes esforçados e que não desistem de resolver as atividades, são bem focados apesar de apresentarem em alguns momentos um pouco de dificuldade na disciplina. Uma pequena parcela, de 5%, dos alunos não viram dificuldades e gostaram muito da proposta de resolução dos casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. É bom destacar que essa pequena parcela dos alunos já possuem uma facilidade maior de compreensão da disciplina.

5 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA

Neste capítulo iremos apresentar a receptividade dos alunos que foram trabalhados a proposta e dos professores escolhidos para analisar a proposta.

5.1 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA PELOS ALUNOS

Agora, vamos detalhar a receptividade da proposta pelos alunos que foi trabalhada a metodologia de ensino do tema grandezas.

Como já foi dito anteriormente, a aplicação da proposta foi realizada numa escola pública do estado de Minas Gerais na cidade de Juiz de Fora em duas turmas do ensino fundamental, ambas de 9º ano.

Na Aula 1, ambas as turmas conseguiram acompanhar os conceitos de forma satisfatória. Na resolução das questões, uma turma foi bem participativa, enquanto na outra turma os alunos foram apáticos para a resolução das questões, com exceção de dois alunos (sendo que uma aluna é novata que vem desempenhando bem em todas as disciplinas) que tentaram as questões e discutiram no momento da correção dessas questões.

Na Aula 2, os alunos deram um bom retorno ao conceito de grandeza diretamente prorpocional. Em ambas as turmas tiveram discussão de possíveis situações em que teríamos grandezas diretamente proporcionais. No momento de realizar as atividades, obtive um retorno maior que na aula 1.

Na Aula 3, começaram a surgir muitas dúvidas. A discussão de situações-problemas foi maior. Porém, houve uma dificuldade maior em relação de quando teríamos grandezas inversamente proporcionais. Essa dificuldade permaneceu na resolução das atividades propostas.

Na Aula 4, foi o momento de maior dificuldade. Enquanto estava sendo discutido o 1º caso (grandezas diretamente proporcionais) os alunos conseguiram acompanhar e compreenderam bem o motivo da representação gráfica ser uma reta crescente. Porém, ao ser discutido o 2º caso (grandezas inversamente proporcionais), as dúvidas apareceram e a expectativa dos alunos foi frustrada, pois pensaram que a representação gráfica deste caso seria outra reta, só que decrescente.

Na Aula 5, os alunos da turma mais comprometida tiveram um pouco de dúvidas no início, porém, foram esforçados e discutiram muito os exemplos dados e apresentaram outras situações que discutimos em sala e conseguiram desenvolver as atividades propostas. Mas, na outra turma, apenas quatro alunos (sendo a novata presente neste grupo de alunos) tentaram resolver as atividades e obtiveram um êxito quase total nas atividades.

Na Aula 6, ocorreram muitas dúvidas, porém os alunos da turma mais aplicada se esforçaram bem e parte da turma conseguiu um bom êxito nas atividades. Já a outra turma apresentou muita dificuldade em compreender a forma de resolver as questões apresentadas, mesmo os alunos que se comprometem mais não conseguiram bom êxito nas atividades destas aulas. Após a correção das atividades, conseguiram compreender um pouco mais sobre o assunto. Para fechar a aula e irmos para a Aula 7, foi necessário fazer uma discussão geral sobre o assunto da Aula 6, exibindo outros exemplos e resolvendo-os a fim de sanar as dificuldades encontradas.

Na Aula 7, os alunos compreenderam bem os conceitos exibidos. No momento do exemplo dado, fizeram observações sobre o gráfico ser bem diferente do que haviam vistos no caso de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Ainda, levantaram a discussão de ser possível definir o tipo de grandeza apenas com a exibição do gráfico. Conseguiram ver que o caso de grandezas não proporcionais não comtempla totalmente o que é exigido nas definições do que seriam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Por fim, após todas as aulas, ficou perceptível a interação de parte dos alunos nas aulas e dos pontos que houve uma grande dificuldade da compreensão dos alunos. Os alunos comprometidos conseguiram um bom êxito nas discussões em sala de aula sobre o assunto e nas atividades. Tiveram uma certa dificuldade no momento em que ocorreram o caso de duas grandezas inversamente proporcionais e no caso de mais de duas grandezas, independentemente se eram diretamente ou inversamente proporcionais.

5.2 RECEPTIVIDADE DA PROPOSTA PELOS PROFESSORES

Nesta seção, iremos comentar sobre a receptividade que a proposta teve entre alguns professores, quatro professores, solicitados para que analisassem a proposta de trabalho sobre o tema grandezas.

A proposta foi compartilhada com professores a fim de sabermos o quão receptível foi a metodologia abordada em relação ao tema grandezas.

Para os professores envolvidos na análise da proposta foi de comum consenso que a ideia de inserir a proposta no 9ºano teria vínculo com o que é abordado no 9ºano, visto que nesta série que são inseridos os conceitos iniciais de função.

Ocorreram algumas observações, uma delas o professor afirmou que a abordagem da proposta, ao momento, seria difícil, pelo fato de termos tido um período recente de pandemia, momento este em que os alunos ficaram com muitas defasagens de conceitos de séries anteriores e perderam o ritmo de estudo.

Outra observação importante foi o comparativo entre abordar a proposta em escolas públicas e em escolas particulares. Foi citado que a abordagem da proposta poderia ter melhor êxito em escolas particulares do que nas escolas públicas.

Perante essas observações levantadas pelos professores, os mesmos chegaram a conclusão que a proposta é interessante, que pode ser trabalhada no 9º ano do ensino fundamental anos finais. Sendo que para cada turma de 9º nono talvez fosse necessário fazer uma nova divisão das aulas, talvez exibindo mais exemplos, para que os alunos pudessem estabelecer mais conexões das ideias por trás da proposta.

6 CONCLUSÃO

A proposta sobre a metodologia abordada sobre o tema grandezas foi relativamente bem aceita por alunos e professores consultados, salvo algumas observações relatadas pelos quatro docentes escolhidos. É fato que os alunos conseguiram uma melhor aceitação da proposta com referência as situações-problemas que estavam mais adaptadas ao cotidiano deles, como eram os casos de grandezas diretamente proporcionais. É fato que a apresentação de mais uma forma de resolução de situações-problemas, do tema abordado, para os alunos foi válida pois tiveram mais um caminho de resolução dos problemas para que fosse possível analisar estes tipos de situações.

REFERÊNCIAS

1 LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

2 LIMA, E. L. Que são grandezas proporcionais? **RPM - Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 09, p. 21–29, 1986.

3 FUGITA, F.; OLIVEIRA, C. N. C. de; ROCHA, A. G. **Geração alpha matemática - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 2ª edição. São Paulo: SM Educação, 2018.

4 LONGEN, A. **Apoema: matemática - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 1ª edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

5 GAY, M. R. G.; SILVA, W. R.; MACHADO, C. A. V. B.; CATALANI, E. M. T.; LUCIANO, E. J.; LEONARDO, F. M. de; IKEDA, J.; BARROSO, J. M.; MOURA, L. de O. G.; VERIDIANO, M. C. da S.; SOUZA, M. J. G. de; SOUZA, M. C. D. de; PENHA, P. C. da; RIBEIRO, R. da S.; COLETTI, S. **Araribá mais: matemática - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 1ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

6 BIANCHINI, E. R. **Matemática - Bianchini - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 9ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

7 SILVEIRA, E. N. de M. **Matemática: compreensão e prática - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 5ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2018.

8 GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **A conquista da matemática - 7° ano, 8º ano e 9º ano**. 4ª edição. São Paulo: Editora FTD, 2018.

9 CHAVANTE, E. R. **Convergências matemática: ensino fundamental - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 2ª edição. São Paulo: Editora SM Educação, 2018.

10 PATARO, P. R. M.; BALESTRI, R. D. **Matemática essencial - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 1ª edição. São Paulo: Editora Scipione, 2018.

11 SOUZA, J. R. de **Matemática realidade** & **tecnologia - 7° ano, 8º ano e 9º ano**. 1ª edição. São Paulo: Editora FTD, 2018.

12 DANTE, L. R. **Teláris matemática - 7° ano, 8º ano e 9º ano**. 3ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2018.

13 SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática - 7º ano, 8º ano e 9º ano**. 1ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2018.

APÊNDICE A – Plano de aula

Aula 1: Grandezas Proporcionais

O que é uma grandeza?

Grandeza é tudo que pode ser medido. Exemplos: distância, velocidade, comprimento, massa, etc.

O que é uma razão?

Uma razão é uma comparação entre duas grandezas através de uma divisão entre os valores destas grandezas.

Exemplo. Dadas duas grandezas A e B, sendo que A = 20 e B = 30, dizemos que a razão entre A e B será $\frac{20}{30}$, ou ainda, podemos dizer que a razão entre A e B é igual a $\frac{2}{3}$. Pois, $\frac{2}{3}$ é a fração equivalente de $\frac{20}{30}$ e é irredutível.

Quando que teremos proporcionalidade entre grandezas?

Quando temos duas grandezas, a razão entre elas serve para avaliá-las e obtermos outras grandezas.

Exemplo. Velocidade $= \frac{dist}{tempo}$.

Porém, quando temos uma igualdade entre duas razões distintas, obtidas pela divisão entre duas grandezas cujo resultado é o mesmo, chamamos de proporção, e as grandezas serão ditas proporcionais.

Exemplo.$\frac{20\,m}{5\,s} = \frac{80\,m}{20\,s} = 4\,m/s.$

Agora, fica a pergunta: todas as grandezas se relacionam de forma proporcional? Bem, pensemos no caso de massa e altura de uma pessoa. Notemos que não são proporcionais. Temos pessoas com pouca altura e com pouca ou muita massa, o mesmo ocorre com pessoas altas. Assim, não é possível dizermos que exista um padrão para que tenhamos uma proporção entre massa e altura. Não será nem mesmo possível dizer que a massa está em função da altura ou que a altura está em função da massa: a um mesmo valor da altura podemos ter caso de dois valores de massas diferentes e também a um mesmo valor de massa podemos ter caso de dois valores de alturas diferentes.

A partir de agora, para as relações entre duas grandezas, sempre consideraremos que uma está em função da outra.

Exercícios: (Faremos o item A de cada exercício em sala de aula, deixando B e C como tarefa.)

1) Escala é uma razão que indica a relação entre as dimensões do espaço real e do espaço representado. Seja a razão 1 : 79.000.000 a escala de um mapa. Ou seja, cada 1 cm no mapa representa 79.000.000 cm do espaço real. Desta forma, achar qual seria a distância real entre duas cidades, se a distância no mapa fosse:

A) 3 cm B) 12 cm C) 20 cm

2) Determine o valor de x, em cada proporção abaixo:

A) $\frac{x}{4}=\frac{6}{2}$ B) $\frac{6}{x}=\frac{9}{6}$ C) $\frac{7}{4}=\frac{x}{12}$

Aula 02: Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando são verificadas ambas as condições abaixo:

- se aumentarmos uma delas, a outra também aumenta;
- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra também fica multiplicada por esse mesmo número.

Por exemplo, se uma grandeza dobrar, a outra grandeza também dobrará. Se uma grandeza triplicar, a outra também triplicará.

Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo. Se cada caderno custa R$ 3,00, o preço de dois cadernos será R$ 6,00 e o preço de quatro cadernos será R$ 12,00. Observe que se multiplicarmos o número x de cadernos por n = 1, 2, 3, 4, . . . , o valor y dos cadernos também fica multiplicado pelo mesmo n e que ao aumentarmos o número de cadernos, o valor também aumenta. Desta forma, concluímos que as grandezas x (número de cadernos) e y (custo dos cadernos em reais) são diretamente proporcionais.

Exercícios:

1) Abaixo, marque toda aquela situação que apresenta relação entre duas grandezas diretamente proporcionais:

A) A velocidade de um veículo e o tempo necessário para ele percorrer determinado trecho.

B) O tempo de funcionamento de um televisor e a energia elétrica por ele consumida.

C) Quantidade de funcionários de uma mesma categoria e a correspondente despesa na folha salarial da empresa.

D) Número de eleitores de uma cidade e a quantidade de votos obtidos por um determinado polítioo.

2) Na bula de um certo remédio para crianças, a dosagem a ser dada é diretamente proporcional a massa corporal da criança. Sabendo-se que a recomendação é de 5 gotas desse remédio a cada 3 kg, então a dosagem a ser administrada para uma criança com 24 kg é de:

A) 20 gotas B) 25 gotas C) 30 gotas D) 35 gotas E) 40 gotas

Aula 03: Grandezas Inversamente Proporcionais

(Inicialmente, será feita a correção dos exercícios da aula anterior.)

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando são verificadas ambas as condições abaixo:
- se aumentarmos uma delas, a outra diminui;
- ao se multiplicar uma delas por um número natural qualquer, a outra fica dividida por esse mesmo número.

Um bom exemplo de grandezas inversamente proporcionais é a comparação entre as grandezas velocidade e tempo, mantendo-se a distância percorrida. Pois, se uma aumenta, a outra diminui e também multiplicando a velocidade por um número natural, o tempo de percurso (mantendo a distância) será dividido pelo mesmo número natural:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow n.v = n.(\frac{d}{t}) \Rightarrow \frac{d}{\frac{t}{n}}.$$

Exercício:

1) Abaixo, marque toda aquela situação que apresenta relação entre duas grandezas inversamente proporcionais:

A) A quantidade de crianças em uma festa e a quantidade de bolo necessária.

B) Número de moradores de um estado e a densidade demográfica desse estado.

C) A velocidade de um veículo e a distância por ele percorrida em um dado intervalo de tempo.

D) Diâmetro de um cano de saída e o tempo gasto para que um certo reservatório seja esvaziado.

Aula 04: A Representação Gráfica dos casos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais

1º caso: Grandezas diretamente proporcionais

Sejam A e B duas grandezas diretamente proporcionais. Chamaremos os valores da grandeza A de x e os valores da grandeza B de y, com y em função de x: $y = f(x)$. Adotando que $f(1) = k$, podemos mostrar que $f(x) = k \cdot x$.

Sendo assim, na prática, o valor de k costuma ser encontrado substituindo-se em $y = k \cdot x$ os valores iniciais de x e y correspondentes: $y_0 = k \cdot x_0$. A partir daí, com $y = k \cdot x$, para o k encontrado, a cada valor de x encontraremos o valor de y correspondente.

Podemos dizer que k é positivo, pois os valores das duas grandezas serão positivos.

Ainda, sendo $y = f(x) = k \cdot x$, com $k > 0$, com y sendo o valor da grandeza A e x o valor da grandeza B, temos que f é crescente e que, multiplicando ambos os lados da equação por n, teremos:

$$n \cdot y = n \cdot k \cdot x = k \cdot (n \cdot x).$$

Ou seja, quando multiplicamos uma grandeza por um número natural n qualquer, a outra grandeza também fica multiplicada pelo menos número natural.

Exemplo. Se cada caderno custa R$ 3,00, o preço de dois cadernos será R$ 6,00, o preço de quatro cadernos será R$ 12,00, e, assim, sucessivamente.

Como visto, as grandezas número de cadernos e custo dos cadernos são grandezas diretamente proporcionais. Fazendo-se $y = f(x) = k \cdot x$, teremos que $k = 3$, pois, sendo $x = 1$ (ou seja, 1 caderno), temos o valor correspondente $y = f(1) = 3$, o custo de um caderno. Portanto, temos a relação entre y e x abaixo:

$$y = 3 \cdot x$$

em que y é o custo dos cadernos e x é o número de cadernos.

Desta forma, teremos a tabela abaixo:

Tabela 3 – Tabela relacionando a quantidade de cadernos e o seu custo

Número de cadernos (x)	Custo dos cadernos (y)
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Com isso, a tabela nos dá os seguintes pontos (0,0), (1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5,15), (6,18) que iremos marcar no plano cartesiano.

Vale ressaltar que bastam dois pontos conhecidos para podermos traçar a parte de uma reta que encontramos acima, pois todo gráfico de uma função linear é uma reta.

- 2º caso: Grandezas inversamente proporcionais

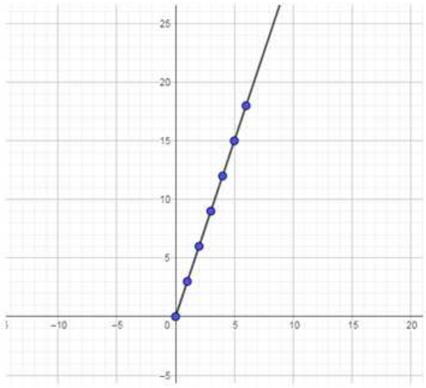
Sejam A e B duas grandezas inversamente proporcionais. Chamaremos os valores da grandeza A de x e os valores da grandeza B de y.

Denotando $y = f(x)$ e adotando que $f(1) = k$, podemos mostrar que $f(x) = \frac{k}{x}$. Podemos dizer que k é positivo, pois os valores das duas grandezas serão positivos.

Sendo assim, na prática, o valor de k costuma ser encontrado substituindo-se em $y = \frac{k}{x}$ os valores iniciais de x e y correspondentes: $y_0 = \frac{k}{x_0}$. A partir daí, com $y = \frac{k}{x}$, para o k encontrado, a cada valor de x encontraremos o valor de y correspondente.

Sendo $y = f(x) = \frac{k}{x}$, com y sendo o valor da grandeza A e x o valor da grandeza B, teremos que f é decrescente e que multiplicando ambos os lados da equação por n, teremos

Figura 6 – Quantidade de cadernos e seu custo



Fonte: produzido pelo próprio autor

.

que

$$n \cdot y = n \cdot (\frac{k}{x}) = \frac{n \cdot k}{x} = \frac{k}{\frac{x}{n}}.$$

Ou seja, quando multiplicamos uma grandeza por um número natural n qualquer, a outra grandeza fica dividida pelo menos número natural.

Como exemplo, vamos dar uma ideia de como fica o gráfico de $y = \frac{30}{x}$.

Vamos marcar alguns pontos (x, y) do gráfico: (1,30), (2,15), (3,10), (5,6) e (6,5). A figura abaixo representa o gráfico de $y = \frac{30}{x}$ (com $x > 0$).

É possível notar que a representação gráfica de uma relação entre grandezas inversamente proporcionais não será uma reta. Mas, sim, uma curva decrescente do tipo ramo de hipérbole.

Aula 05 : Problemas envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais

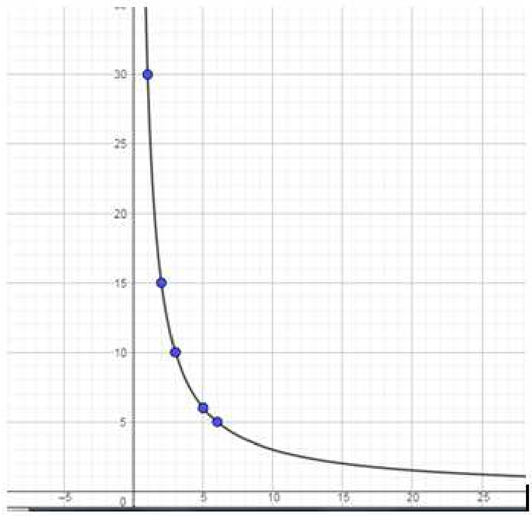
Nesta aula, iremos ver alguns exemplos de problemas que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais, a fim de que possamos diferenciar os dois casos ao presenciarmos situações que envolvam este tipo de grandezas.

Exemplo 1. Dona Maria recebeu encomendas para fazer bolos. Sabe-se que cada bolo custa 8 reais. Qual será o custo de 3 bolos? E de 5 bolos?

Podemos dizer que o número de bolos x e o seu custo $y = c(x)$ são diretamente proporcionais, pois se aumentarmos uma dessas quantidades, a outra também aumenta e também ao multiplicarmos uma delas por um número n natural qualquer, a outra também será multiplicado por n. Então, $y = k \cdot x$.

Como $y = k \cdot x$ e sabendo que $y_0 = 8$ para $x_0 = 1$, temos que $k = 8$.

Figura 7 – $y = \frac{30}{x}$, com $x > 0$.



Fonte: Produzido pelo próprio autor, utilizando o programa Geogebra.

Desta forma, podemos dizer que o custo da encomenda será $y = 8 \cdot x$, sendo x a quantidade de bolos que serão encomendados. A partir dessa expressão, podemos calcular o custo da encomenda de qualquer quantidade x de bolos.

Por exemplo, se a encomenda for de 5 bolos, o seu custo será de $8 \cdot 5 = 40$, ou seja, 40 reais.

Exemplo 2. Numa construção, foram contratados 2 pedreiros que foram capazes de executar o serviço em 40 dias. Desta forma, quantos dias seriam necessários, para 4 pedreiros conseguissem terminar a obra?

Podemos dizer que o número de pedreiros x e o tempo gasto y são inversamente proporcionais, pois se aumentarmos uma dessas quantidades, a outra quantidade diminuirá e também ao multiplicarmos uma delas por um número n natural qualquer, a outra será dividida pelo mesmo n. Então, $y = \frac{k}{x}$.

Como $y = \frac{k}{x}$ e sabendo que $y_0 = 40$ para $x_0 = 2$, temos que $k = 80$.

Desta forma, podemos dizer que o tempo gasto para fazer a obra será dado por $y = \frac{80}{x}$, sendo x a quantidade de pedreiros e $y = f(x)$ o tempo gasto para execução da obra. A partir dessa expressão, podemos calcular o tempo gasto para a execução da obra de qualquer quantidade x de pedreiros.

Por exemplo, se o número de pedreiros for 4 pedreiros, para sabermos o tempo gasto para conclusão da obra, teremos: $y = \frac{80}{4} = 20$, ou seja, 20 dias.

Exercícios:

1) Para encher o reservatório de água de um certo condomínio, foram utilizadas 4 torneiras que levam, juntas, 12 horas para o enchimento completo. Supondo-se que a vazão das torneiras seja sempre a mesma, quanto tempo levaria para que o reservatório do tanque ficasse cheio com apenas 3 torneiras?

A) 16 horas   B) 13 horas   C) 12 horas   D) 10 horas   E) 7 horas

2) Pretendo fazer uma viagem de uma cidade para a outra, com uma velocidade média de 60 km/h, demora-se 3 horas e 40 minutos. Qual seria o tempo gasto se acaso a velocidade fosse de 100 km/h?

A) 2 horas e 25 minutos
B) 2 horas e 18 minutos
C) 2 horas e 12 minutos
D) 2 horas e 10 minutos
E) 2 horas e 5 minutos

3) Em uma empresa temos que 25 funcionários são capazes de arquivar 600 processos diariamente. Se fossem aberta uma contratação para mais 10 funcionários, com a mesma capacidade que os anteriores, quantos processos seriam arquivados diariamente com a nova equipe?

A) 450   B) 240   C) 840   D) 585   E) 800

4) Uma certa gráfica aceitou um pedido para realizar a produção de uma quantidade grande de cartazes. Considerou-se que 5 máquinas gastariam 24 horas para concluir todo o serviço. Porém, caso duas dessas máquinas apresentassem defeito antes do início do serviço, qual será o tempo necessário para atender o pedido?

A) 30 horas   B) 20 horas   C) 26 horas   D) 36 horas   E) 40 horas

5) Uma empreiteira foi contratada para a reforma de um prédio. Estimou-se que com 8 funcionários a reforma demoraria 15 dias para ser concluída. Se ocorresse a contratação de mais 2 funcionários, o tempo necessário para concluir a reforma seria de:

A)10 dias   B)11 dias   C)12 dias   D)13 dias   E)14 dias

Aula 06: Problemas envolvendo Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais com mais de duas grandezas se relacionando

Sabemos que se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais então $y = k \cdot x$. E, se as grandezas x e y forem inversamente proporcionais, teremos que $y = \frac{k}{x}$, em que k é a constante de proporcionalidade.

Agora, vamos trabalhar com um número maior de variáveis. Vamos supor que a cada grupo de valores dado a (x, y, r) (por exemplo, $(x = 2, y = 3, r = 4)$) corresponde exatamente um valor de z.

Dizemos que z é diretamente proporcional a x quando:
- aumentando a grandeza x (mantendo fixas as outras variáveis), a grandeza z também aumentará;
- ao multiplicarmos x por um número natural n qualquer (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica multiplicado pelo mesmo número n.

De forma análoga, dizemos que z é diretamente proporcional a y.

Dizemos que z é inversamente proporcional a r quando:
- ao aumentarmos a grandeza r (mantendo fixas as outras variáveis), a grandeza z diminuirá;
- e ao multiplicarmos r por um número natural n qualquer (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica dividido pelo mesmo número n.

De forma análoga, temos estas definições para os casos com números diferentes de variáveis.

Podemos verificar que se uma grandeza z é diretamente proporcional a x e y e inversamente proporcional a r, então existe uma constante k tal que

$$z = k\frac{xy}{r}.$$

A constante k é chamada de constante de proporcionalidade e é o valor de z quando x=y=r=1.

Esse resultado também vale, analogamente, para um número diferente de variáveis.

Costumamos achar o valor de k utilizando os valores dados inicialmente no problema: $z_0 = k \cdot \frac{x_0 \cdot y_0}{r_0}$.

Agora, de acordo com o que acabamos de definir, vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 1. Em uma fábrica de brinquedos, 8 homens constroem 20 carrinhos no período de 5 dias. Quantos carrinhos serão fabricados por 4 homens em 15 dias?

Solução:

Observe que tendo mais homens para construir carrinhos, teremos mais carrinhos construídos e multiplicando a quantidade de homens por n, também iremos multiplicar a quantidade de carrinhos por n, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, a quantidade de homens e a quantidade de carrinhos são diretamente proporcionais.

Analisando a quantidade de dias e carrinhos construídos, podemos dizer que tendo mais dias iremos ter mais carrinhos construídos e que multiplicando por n a quantidade de dias, iremos multiplicar pelo mesmo n o número de carrinhos construídos, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, a quantidade de dias e carrinhos construídos serão diretamente proporcionais.

Nesta situação, teremos dois casos de grandezas diretamente proporcionais. Agora, como determinaremos a quantidade de carrinhos, tendo 4 homens e um total de 15 dias?

Iremos adotar c como a quantidade final de carrinhos, d a quantidade final de dias e h a quantidade final de homens. E, ainda, c_o a quantidade inicial de carrinhos, d_o a quantidade inicial de dias e h_o a quantidade inicial de homens.

Adotando k como a quantidade de carrinhos feitas por dia por cada homem, teremos que

$$k = \frac{c_o}{d_o \cdot h_o}$$

e

$$k = \frac{c}{d \cdot h},$$

ou seja,

$$c = k \cdot d \cdot h.$$

Então,

$$k = \frac{c_o}{d_o \cdot h_o} = \frac{c}{d \cdot h}.$$

Assim,

$$\frac{20}{8 \cdot 5} = \frac{c}{4 \cdot 15}.$$

Logo,

$$c = \frac{20}{40} \cdot 60 = 30.$$

Exemplo 2: Cinco torneiras conseguem encher um reservatório em 8 horas. Quantas horas serão necessárias para que 10 torneiras encham 4 reservatórios idênticos ao primeiro reservatório?

Solução:

Observe que tendo mais torneiras precisaremos de menos horas para encher um reservatório e multiplicando a quantidade de torneiras por n, iremos dividir a quantidade de horas por n, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, o número de torneiras e a quantidade de horas são inversamente proporcionais.

Analisando a quantidade de reservatórios e a quantidade de horas, podemos dizer que tendo mais reservatórios iremos precisar de mais horas para encher os reservatórios e que multiplicando por n a quantidade de reservatórios, iremos multiplicar pelo mesmo n o número de horas, sendo n um número natural qualquer. Desta forma, a quantidade de reservatórios e a quantidade de horas são diretamente proporcionais.

Nesta situação, teremos um caso de grandezas diretamente proporcionais e outro caso de grandezas inversamente proporcionais. Agora, como determinaremos a quantidade de horas, tendo 10 torneiras e um total 4 reservatórios?

Iremos adotar t como a quantidade final de torneiras, h a quantidade final de horas e r a quantidade final de reservatórios. E, ainda, t_o a quantidade inicial de torneiras, h_o a quantidade inicial de horas e r_o a quantidade inicial de reservatórios.

Adotando k como a quantidade de horas necessárias para encher um reservatório de água com uma torneira, teremos que

$$k = \frac{h_o \cdot t_o}{r_o}$$

e

$$k = \frac{h \cdot t}{r},$$

ou seja,

$$h = k \cdot \frac{r}{t}.$$

Então,

$$\frac{h \cdot t}{r} = \frac{h_o \cdot t_o}{r_o}.$$

Assim,

$$\frac{h \cdot 10}{4} = \frac{8 \cdot 5}{1}$$

Daí,

$$\frac{10h}{4} = \frac{40}{1},$$

o que resulta

$$h = 16.$$

Resposta: 16 horas.

Exercícios:

1) Com doze operários, no período de 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, conseguem fazer 36 m de tecido. Em quantos dias 15 operários farão 12 m do mesmo tecido, trabalhando 6 horas por dia?

2) Para produzir um determinado tipo de peça, 8 máquinas idênticas conseguem a produção de 300 peças em 3 dias, em operação 5 horas por dia. Sabendo-se que duas máquinas deram defeito, qual será a quantidade de peças fabricadas durante 8 dias se as máquinas restantes ficarem em operação durante 6 horas por dia?

A) 680 B) 700 C) 720 D) 660 E) 740

3)Numa obra, 20 operários, em serviço 3 horas por dia, demoram 18 dias para construir um muro de 400 m. Quanto tempo levará uma equipe de 10 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 200 m?

A) 2 dias B) 4 dias C) 6 dias D) 8 dias E) 10 dias

Aula 7: Grandezas não proporcionais

Nem sempre duas grandezas A e B serão diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo. Seja um quadrado ABCD de lado ℓ. Sabe-se que sua área é ℓ^2.

Então, vamos observar a tabela abaixo:

Tabela 4 – Algumas medidas de lado do quadrado com sua respectiva área

Lado	Área
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Fonte: Elaborada pelo autor.

O valor da área do quadrado depende da medida do lado do quadrado:

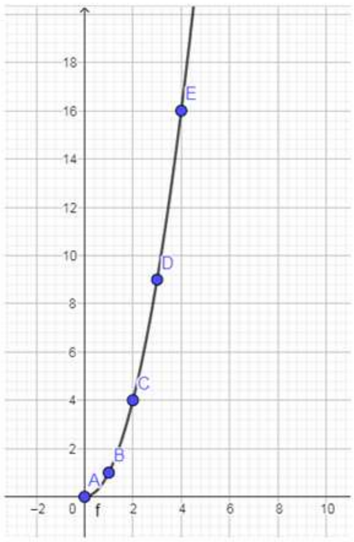
$$A(\ell) = \ell^2.$$

É notório que ao multiplicarmos por um número natural n qualquer a grandeza "lado do quadrado", a grandeza "área do quadrado" não ficará multiplicada e nem dividida pelo mesmo número natural n.

Desta forma, apesar que à medida que aumentamos uma grandeza a outra aumenta, não ocorre a exigência de que ao multiplicar uma grandeza por um número natural n qualquer que a outra grandeza precisaria ser multiplicada ou dividida pelo mesmo número natural n. Portanto, temos grandezas que não são nem diretamente nem inversamente proporcionais.

Vejamos como é o comportamento gráfico no caso da comparação das grandezas "lado do quadrado" e "área do quadrado".

Figura 8 – Relacionando lado do quadrado com área do quadrado



Fonte: Elaborada pelo autor, utilizando o programa Geogebra.

É um gráfico do tipo ramo de uma parábola.

Agora, vamos resolver o exercício que se segue.

1) A área de um círculo é $\pi \cdot r^2$, onde adotamos $\pi = 3,14$ e r é o raio do círculo. Sendo assim, qual será a área do círculo se a medida do raio for igual a 2 cm? E, se a medida do raio fosse igual a 6 cm? As grandezas raio e área do círculo são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?