

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lucas Lauro Brugger

Uma perspectiva moderna para o experimento de Stern-Gerlach

Juiz de Fora

2023

Lucas Lauro Brugger

Uma perspectiva moderna para o experimento de Stern-Gerlach

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Programa de Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Brugger, Lucas L..

Uma perspectiva moderna para o experimento de Stern-Gerlach / Lucas  
Lauro Brugger. – 2023.

41 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Trabalho de Conclusão de Curso(graduação) – Universidade Federal  
de Juiz de Fora, Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas .  
Programa de Graduação em Física, 2023.

Experimento de Stern-Gerlach. Qubits. Esfera de Bloch. Rizzuti, Bruno  
Ferreira, orient. II. Título.

Lucas Lauro Brugger

Uma perspectiva moderna para o experimento de Stern-Gerlach

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Programa de Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Física.

Aprovada em 06 de Julho de 2023

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Profa. Dra. Zélia Maria Da Costa Ludwig  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Maikel Yusat Ballester Furones  
Universidade Federal de Juiz de Fora



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
REITORIA - ICE - Departamento de Física

**ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

A Coordenação do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física Diurno declara que, no dia 06/07/2023, o aluno **Lucas Lauro Brugger**, matrícula **201965671E**, orientado pelo **Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti**, apresentou seu trabalho de conclusão de curso, intitulado **“Uma perspectiva moderna para o experimento de Stern-Gerlach”**, tendo sido aprovada pela banca examinadora com nota **95**.

Juiz de Fora, 06 de julho de 2023

Prof. Dr. Valdemir Eneias Ludwig

Coordenador do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física

Banca examinadora:

Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador

Departamento de Física - ICE - UFJF

Zélia Maria da Costa Ludwig

Departamento de Física - ICE - UFJF

Maikel Yusat Ballester Furones

Departamento de Física - ICE - UFJF

7/10/23, 12:45 AM

SEI/UFJF - 1351340 - GERAL 02: Ata de Reunião



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Ferreira Rizzuti, Professor(a)**, em 06/07/2023, às 19:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Zelia Maria da Costa Ludwig, Professor(a)**, em 06/07/2023, às 20:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maikel Yusat Ballester Furones, Professor(a)**, em 06/07/2023, às 21:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valdemir Eneias Ludwig, Professor(a)**, em 07/07/2023, às 11:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj ([www2.ufff.br/SEI](http://www2.ufff.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1351340** e o código CRC **D2415B4B**.

Referência: Processo nº 23071.926273/2023-42

SEI nº 1351340

Dedico este trabalho a todas as vítimas da Pandemia de Coronavírus de 2019. Que suas memórias permaneçam vivas entre nós, que os exemplos do passado nos auxiliem na construção de um melhor amanhã.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente aos meus pais, Aparecida Lauro e Jorge Brugger, que através de profundo e árduo esforço garantiram o acesso meu e de meu irmão à educação. Vocês são um exemplo de pais e de pessoas, me espelho cada dia em vocês. Não poderia esquecer também da pessoa que possuo o laço mais profundo nesta vida, quem me incentivou a cursar exatas e foi e ainda é meu apoio pessoal nos mais árduos momentos da vida, obrigado meu querido irmão Rafael. Agradeço também as minhas madrinhas Regina e Márcia por terem sido tão cruciais em meu caminho educacional, pelo apoio e incentivo de vocês pude trilhar este caminho com calma e clareza. Deixo também meu profundo agradecimento aos meus inúmeros familiares, que gostaria de citar todos os nomes mas são muitos, muito obrigado por todo o apoio. Poder chamar vocês de família é um prazer!

Especialmente deixo meu agradecimento mais profundo a minha companheira, pelos mais saborosos conselhos da vida e pela maravilhosa jornada ao seu lado. Com você os dias são mais doces e nenhum obstáculo será grande demais para nós dois. Paraphraseando a velha canção soviética, 'Noite Escura', “[...] Eu tenho fé em você, meu amor. E essa fé me protege dos perigos nessa noite escura [...]”.

Aos professores do departamento de física, o meu especial agradecimento para meu orientador, Bruno F. Rizzuti, que me oferece conselhos para muito além da física, e que são essenciais para minha formação como ser humano. Aos demais professores com quem tive o prazer de desfrutar momentos de conhecimento, meu muito obrigado. Não poderia deixar faltar o profundo agradecimento a todos os professores, que em meus momentos de dificuldade pessoal, foram compreensivos e ofereceram apoio, sou eternamente grato a vocês por isso. E aos meus amigos que ganhei ao longo do curso, foi e ainda é um prazer dividir o dia a dia com vocês, muito obrigado pelas experiências!

Por fim, agradeço a Universidade Federal de Juiz de Fora pela maravilhosa estrutura oferecida, pelas relações humanas proporcionadas e pelo incrível ambiente de desenvolvimento científico e sociocultural. Este trabalho foi financiado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - XXXII BIC/Universidade Federal de Juiz de Fora - 2020/2021/2022/2023.



Nessa batalha, à qual estávamos predestinados  
estamos à espera de destinos desconhecidos  
Ainda assim erguemos, orgulhosa e corajosamente  
A sagrada bandeira da luta dos trabalhadores  
A bandeira que luta por todos os povos  
por liberdade e por um mundo melhor  
(Varshavianka 1905 - Wacław Świącicki)

## RESUMO

Inspirados no centenário das obras seminais de Stern e Gerlach, esta contribuição é uma proposta de como usar seu famoso experimento em uma perspectiva mais contemporânea. A ideia principal apresentada neste trabalho é reformular o experimento na linguagem moderna de cenários de preparar e medir. Ao fazer isso, é possível conectar aspectos geométricos e algébricos do espaço de estados com o espaço físico. Mesclando uma perspectiva mais moderna com um experimento exemplificador, é esperado que este trabalho possa servir como uma porta de entrada para a teoria da informação quântica e os fundamentos da mecânica quântica.

Palavras-chave: Experimento de Stern-Gerlach. Qubits. Esfera de Bloch.

## ABSTRACT

Inspired by the one-hundredth anniversary of the seminal works of Stern and Gerlach, this contribution is a proposal of how to use their famous experiment in a more contemporary perspective. The main idea in this work is to re-cast the experiment in the modern language of prepare-and-measure scenarios. By doing so, it is possible to connect geometric and algebraic aspects of the space of states with the physical space. Merging a more modern perspective with a paradigmatic experiment, we hope this work can serve as an entry door for quantum information theory and the foundations of quantum mechanics.

Keywords: Stern-Gerlach experiment. Qubits. Bloch Sphere.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 :Representação esquemática do experimento de Stern-Gerlach (Imagem retirada da referencia (1)) . . . . .	12
Figura 2: Representação esquemática de um cenário de preparar e medir, com um resultado $a = 2$ .(Imagem retirada da referencia (2)) . . . . .	21
Figura 3: Esquema experimental de dois dispositivos SG gerados pela simulação interativa PhET.(Imagem retirada da referencia (2)) . . . . .	24
Figura 4: $Pr(+ \hat{r}_x^+, \hat{r}_y^+)$ como função do ângulo entre $\hat{r}_x$ e $\hat{r}_y$ .(Imagem retirada da referencia (2)) . . . . .	24
Figura 5: Representação geométrica de $S^2$ e da esfera de Bloch: antípodas representam estados ortonormais.(Imagem retirada da referencia (2)) . . . . .	30
Figura 6: Representação geométrica da esfera unitária $S^n$ , com as antípodas identificadas.(Imagem retirada da referencia (2)) . . . . .	33
Figura 7: Representação esquemática da projeção estereográfica.(Imagem retirada da referencia (2)) . . . . .	34
Figura 8: Representação gráfica da composição dos mapeamentos (Imagem gerada pelo autor e parcialmente retirada da ref (2)). . . . .	36

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Álgebra Linear . . . . .</b>	<b>14</b>
2.1	Espaços Vetoriais . . . . .	14
2.2	Projetores . . . . .	19
2.3	Traço . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Simulando um cenário de preparar e medir . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Fatos experimentais sobre o experimento SG . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Esfera de Bloch revelada . . . . .</b>	<b>26</b>
5.1	Geometria de Probabilidades . . . . .	26
5.2	Interpretação Geométrica da esfera de Bloch . . . . .	27
5.3	Comentários Gerais e Discussões . . . . .	29
<b>6</b>	<b>A geometria de estados indistinguíveis . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões . . . . .</b>	<b>38</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>40</b>

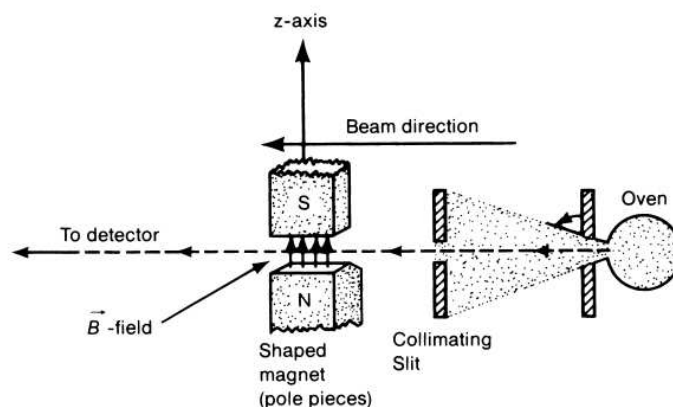
## 1 Introdução

O experimento Stern-Gerlach (SG) (como na figura 1) ramifica-se sobre todos cantos da teoria quântica. Estende-se desde aspectos históricos da mecânica quântica, abrangendo a quantização do ângulo do momento angular espacial de um átomo em relação a um campo magnético específico dentro do modelo atômico de Sommerfeld (3) e seus desdobramentos, apresentando resultados positivos neste assunto (4). Os artigos mais relevantes foram publicados pouco tempo mais tarde, em 1922 (5, 6). Estes, estritamente conectados à descoberta do spin, embora este fato não fosse claro à época (7). Atualmente é a base para medições de última geração em qubits (8). Não podemos desprezar também o seu potencial pedagógico, como explorado, por exemplo, em (9).

Essencialmente, o experimento consiste em ejetar um feixe de partículas sobre um campo magnético não-homogêneo. Simplificando, descrições clássicas preveem alguma espécie de padrão de espalhamento gaussiano como resultado do experimento. Entretanto, contrário às predições clássicas, o feixe não se localiza em um único ponto: ele divide-se em dois (10), e somente dois, o que também tornou-se fato intrigante à época, uma vez que o possíveis valores do momento angular são da ordem de  $2l + 1$  e, portanto, esperaria-se  $2l + 1$  divisões do feixe. Um esquema do experimento pode ser visto na Fig.1.

Embora o experimento de SG tenha sido amplamente discutido em (1), nesta contribuição, gostaríamos de utilizá-lo como um *kit* de ferramentas completo para analisar a sua própria natureza quântica, deixando de lado detalhes técnicos ou experimentais. Parte do trabalho será focado nos seguintes itens,

1. Uma concatenação de dois experimentos SG simula uma aproximação física e operacional do que é chamado de cenário preparar e medir (11, 12).
2. O espaço de estados em um experimento SG é bi-dimensional, usualmente chamado



– Figura 1 :Representação esquemática do experimento de Stern-Gerlach (Imagem retirada da referencia (1))

de qubit ( $\cong \mathbb{C}^2$  sobre o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos). Outros exemplos, tal qual a polarização do fóton ou ainda o experimento de fenda dupla, estão sobre o mesmo panorama. Em exemplos típicos de sistemas quânticos de dois níveis, é comum escrever um vetor arbitrário utilizando uma parametrização de estado padrão (13)

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle. \quad (1.1)$$

com  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Neste caso, o vetor de estado mora sobre o que é chamado de esfera de Bloch. Este manuscrito provê um significado operacional para os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$ . Ante a uma parametrização puramente matemática, o par  $(\theta, \varphi)$  identifica a orientação do magneto utilizado na preparação dos estados no espaço físico tri-dimensional, dando origem a (1.1). Essa conexão intrínseca entre o espaço tri-dimensional (real) e o espaço de estados bi-dimensional (complexo) é explorado através da Fibração de Hopf.

3. O caráter pedagógico que este trabalho foi elaborado, visando simplificar o ensino introdutório de mecânica quântica mediante uma abordagem de sistemas de dois níveis.

Faz-se notar também o significado de,

$$|\psi'\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \quad (1.2)$$

Por si só,  $|\psi'\rangle$ , não possui significado físico algum, uma vez que pertence a  $\mathbb{C}^2$ . Entretanto, o quadrado de seu módulo tem grande valor físico e indica as probabilidades do sistema ser encontrado em cada estado. Conforme a interpretação de Copenhagen, adotada em (10).

$$\|\psi'\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.3)$$

Sobre o panorama dos comentários históricos e técnicos tecidos acima, este trabalho é impulsionado adiante não apenas para comemorar os 100 anos dos trabalhos de Stern e Gerlach, mas também para explorar seu potencial pedagógico. Este trabalho será distribuído como se segue. Começamos a seção 2 trazendo uma sucinta apresentação da Álgebra Linear, abordando tópicos essenciais para o entendimento da construção que será feita nas seções posteriores deste trabalho. A seção 3 é dedicada a introduzir o leitor ao cenário preparar-e-medir, orientado por uma concatenação de dois aparatos SG. Já na seção 4 serão explorados os fatos experimentais relacionados ao esquema anteriormente introduzido. Aproveitando-se de fundamentos geométricos, construímos a esfera de Bloch na seção 5, onde também será tratada a geometria de probabilidades intrinsecamente conectada com a mecânica quântica. Aliado ao que foi apresentado anteriormente, construímos na seção 6 a Fibração de Hopf. Por fim, na seção 7 serão apresentadas as conclusões. Destaca-se, por fim, que este trabalho é fruto do recente artigo publicado em (2).

## 2 Álgebra Linear

Na concepção de uma física moderna, é indispensável a utilização de espaços vetoriais (14), objetos abstratos de origem matemática, que são uma ferramenta poderosa no auxílio da descrição dos fenômenos ligados aos mais variados ramos de estudo da natureza, na mecânica quântica não é diferente. De fato, a mecânica clássica utiliza uma formulação basicamente vetorial. O mesmo poderíamos dizer das relatividades especial e geral. Ao assumirmos que o espaço-tempo é uma variedade recaímos sobre uma descrição de grandezas físicas que vivem no plano tangente, novamente um espaço vetorial.

Toda a construção da Mecânica Quântica encontra-se ligada intimamente a um espaço vetorial conhecido, o Espaço de Hilbert, como será apresentado mais à frente. Sua definição consiste resumidamente em um espaço vetorial normado completo sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , com a norma induzida pelo produto interno.

### 2.1 Espaços Vetoriais

Começamos então esta discussão com o objeto que é a base no nosso estudo, o *espaço vetorial*. Este pode ser visto como um conjunto de objetos abstratos sobre os quais definimos certas regras e operações. Usualmente chamamos os objetos que compõem tais conjuntos de *vetores*, além do próprio conjunto ser chamado de espaço vetorial. Nossa apresentação será baseada nas referências (14) e (15). Sendo assim,

#### Definição 2.1.1. Espaço vetorial

Um espaço vetorial  $\mathbf{E}$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é um conjunto não vazio de elementos conhecidos como vetores que dispõem de duas operações, sendo elas a adição de vetores e multiplicação por escalar,

$$\begin{aligned} + : \mathbf{E} \times \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{E} \\ (|u\rangle, |v\rangle) &\longmapsto |u\rangle + |v\rangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{E} \\ (\lambda, |u\rangle) &\longmapsto \lambda |u\rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

com as seguintes propriedades,

#### I) Adição

Sejam  $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle \in \mathbf{E}$  dados arbitrariamente. Temos,

1. (*Comutatividade*):  $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$ .
2. (*Associativa*):  $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$ .
3. (*Existência do elemento neutro*):  $|u\rangle + 0 = |u\rangle + 0 = |u\rangle$ .



4. (*Existência do elemento inverso*):  $|u\rangle + (-|u\rangle) = 0$ .

II) *Multiplicação por escalar*

Sejam  $|u\rangle, |v\rangle \in \mathbf{E}$  e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$  dados arbitrariamente. Temos,

1.  $1|u\rangle = |u\rangle$ .

2. (*Comutatividade da multiplicação escalar*):  $(\alpha_1\alpha_2)|u\rangle = \alpha_1(\alpha_2|u\rangle)$ .

3. (*Distributividade da multiplicação escalar*):  $(\alpha_1 + \alpha_2)|u\rangle = \alpha_1|u\rangle + \alpha_2|u\rangle$ .

4. (*Distributividade da multiplicação na soma*):  $\alpha(|u\rangle + |v\rangle) = \alpha|u\rangle + \alpha|v\rangle$ .

**Exemplo 2.1.1.** O conjunto  $\mathbb{C}^n$  com as operações

$$\begin{aligned} (z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n) &:= (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n) \\ \alpha(z_1, \dots, z_n) &:= (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $\alpha, z_i, w_i \in \mathbb{C}$ , é um espaço vetorial.

Além do espaço vetorial, será útil também a noção de um subespaço vetorial, sendo

**Definição 2.1.2.** Subespaço Vetorial

Um conjunto não vazio  $\mathbf{S}$  de um espaço vetorial  $\mathbf{E}$  é dito um subespaço vetorial quando  $\mathbf{S}$  é também um espaço vetorial. Abaixo colocamos alguns teoremas de caracterização de subespaços. embora as demonstrações não serão feitas.

**Teorema 2.1.1.**  $\mathbf{S}$  é um subespaço de  $\mathbf{E}$  se, e somente se,  $\forall |s_1\rangle, |s_2\rangle \in \mathbf{S}$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\alpha|s_1\rangle + |s_2\rangle \in \mathbf{S}$ .

**Teorema 2.1.2.** Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . A intersecção de qualquer coleção de subespaços de  $\mathbf{E}$  é também um subespaço de  $\mathbf{E}$ .

**Exemplo 2.1.2.** Em  $\mathbb{C}^n$ , o conjunto  $\{(z, 0, \dots, 0) | z \in \mathbb{C}\}$  é um subespaço.

**Exemplo 2.1.3.** Em  $\mathbb{C}^n$ , os subespaços  $\mathbf{E}_1 = \{(z_1, 0, \dots, 0) | z_1 \in \mathbb{C}\}$  e  $\mathbf{E}_2 = \{(z_1, z_2, \dots, 0) | z_{1,2} \in \mathbb{C}\}$ , tem intersecção  $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$ , que é um subespaço.

**Definição 2.1.3.** Conjuntos linearmente dependentes ou independentes

Seja  $U$  um subconjunto não vazio de um espaço vetorial  $\mathbf{E}$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$ .  $U$  é dito *linearmente dependente* se existe vetores distintos  $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle \in U$  e escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , não todos zero, tal que,

$$\alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle + \dots + \alpha_n|u_n\rangle = 0. \tag{2.4}$$

Caso o conjunto não seja linearmente dependente, então ele é chamado *linearmente independente*.

**Exemplo 2.1.4.** Seja  $U = \{|u_i\rangle\}, i = 1, \dots, n$  um subconjunto de  $\mathbf{E}$  e constantes  $b_i \in \mathbb{K}$ . Se  $U$  é linearmente independente, então,

$$b_1 |u_1\rangle + b_2 |u_2\rangle + \dots + b_n |u_n\rangle = 0 \implies b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0. \quad (2.5)$$

**Definição 2.1.4.** Base e Dimensão

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vetorial. Uma base para  $\mathbf{E}$  é um conjunto  $\beta \subset \mathbf{E}$  de vetores linearmente independentes que geram este espaço vetorial (a palavra gerar, neste contexto, significa escrever qualquer vetor do espaço como combinação linear dos vetores de  $\beta$ ). Se esta base é finita, ou seja, contém um número finito de vetores, este número é chamado de *dimensão* (*dim*) de  $\mathbf{E}$ .

**Exemplo 2.1.5.** Seja  $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$  e  $b_i \in \mathbb{R}$ , com as regras usuais de soma e multiplicação no  $\mathbb{R}^3$ . Este conjunto é linearmente independente,

$$b_1(1, 0, 0) + b_2(0, 1, 0) + b_3(0, 0, 1) = 0 \implies b_1 = b_2 = b_3 = 0. \quad (2.6)$$

Além disso, qualquer vetor de  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores de  $\beta$ :

$$b_1(1, 0, 0) + b_2(0, 1, 0) + b_3(0, 0, 1) = (b_1, b_2, b_3). \quad (2.7)$$

Logo  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Os resultados acima nos permitem concluir que  $\beta$  é uma base para o  $\mathbb{R}^3$ . Esta é conhecida como a base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .

Tendo em mente agora as noções básicas de espaços vetoriais e subespaços, podemos nos questionar acerca de uma estrutura interna que os compõem. Podemos construir uma noção de distância entre os objetos de espaço vetorial, começamos pela norma

**Definição 2.1.5.** Norma

Seja  $\mathbf{E}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que a norma sobre  $\mathbf{E}$  é uma função real,

$$\|\cdot\| : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (2.8)$$

$$u \longmapsto \| |u\rangle \| \quad (2.9)$$

satisfazendo,

1.  $\| |u\rangle \| > 0$ .
2.  $\| |u\rangle \| = 0 \Leftrightarrow |u\rangle = 0$ .
3.  $\| |\alpha u\rangle \| = |\alpha| \| |u\rangle \|$ .
4.  $\| |u_1\rangle + |u_2\rangle \| \leq \| |u_1\rangle \| + \| |u_2\rangle \|$ .

**Exemplo 2.1.6.** Seguindo com nosso exemplo de interesse  $\mathbb{C}^n$ , com  $|v\rangle = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,

$$\| |v\rangle \| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}. \quad (2.10)$$

**Demonstração:**

- (1,2) Sendo  $z_i = a_i + ib_i$ , onde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ , nem todos nulos,

$$\| |v\rangle \| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \dots + a_n^2 + b_n^2}. \quad (2.11)$$

Portanto vemos que 1 e 2 são satisfeitas.

- (3) Seja  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha |v\rangle \| &= \sqrt{\alpha^2 |z_1|^2 + \alpha^2 |z_2|^2 + \dots + \alpha^2 |z_n|^2} = \sqrt{\alpha^2 (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)} = \\ &= |\alpha| \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2} = |\alpha| \| |v\rangle \|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

temos assim 3 satisfeito.

- (4) Sejam  $|u_1\rangle = (z_1, \dots, z_n)$  e  $|u_2\rangle = (w_1, \dots, w_n)$ . Temos,

$$\begin{aligned} \| |u_1\rangle + |u_2\rangle \|^2 &= |z_1 + w_1|^2 + \dots + |z_n + w_n|^2 \\ &= (z_1 + w_1)(z_1^* + w_1^*) + \dots + (z_n + w_n)(z_n^* + w_n^*) \\ &= |z_1|^2 + |w_1|^2 + z_1 w_1^* + w_1 z_1^* + \dots + |z_n|^2 + |w_n|^2 + z_n w_n^* + w_n z_n^*. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Podemos notar que os somatórios da forma  $\sum_i^n z_i w_i^*$  e  $\sum_i^n w_i z_i^*$  vão de encontro com o produto interno definido a seguir no exemplo 2.1.7. Assim, usando a famosa desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \| |u_1\rangle + |u_2\rangle \|^2 &= \| |u_1\rangle \|^2 + \| |u_2\rangle \|^2 + \langle u_1 | u_2 \rangle + \langle u_2 | u_1 \rangle \\ &\leq \| |u_1\rangle \|^2 + \| |u_2\rangle \|^2 + |\langle u_1 | u_2 \rangle| + |\langle u_2 | u_1 \rangle| \\ &\leq \| |u_1\rangle \|^2 + \| |u_2\rangle \|^2 + 2 \| |u_1\rangle \| \| |u_2\rangle \| \\ &= (\| |u_1\rangle \| + \| |u_2\rangle \|^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como a norma é positivo defina, ou melhor, não negativo, temos, finalmente,

$$\| |u_1\rangle + |u_2\rangle \| \leq \| |u_1\rangle \| + \| |u_2\rangle \|. \quad (2.15)$$

Além disso, vale mencionar que um espaço vetorial normando é sempre um espaço vetorial métrico, uma vez que,

$$m(|u\rangle, |v\rangle) = \| |u\rangle - |v\rangle \|. \quad (2.16)$$

Construímos até aqui, noções valiosas acerca dos nossos espaços, como “distância” entre os vetores e seus respectivos “tamanhos”. Junto a isso, mostramos como tais construções são dadas em relação à soma e multiplicação por escalar. Resta ainda uma última definição que esta de certa forma associada às anteriores. Ela é uma operação que leva pares de vetores em escalares, com ela, conseguimos, imediatamente reconstruir as anteriores. Estamos falando do

**Definição 2.1.6.** Produto Interno

Seja  $\mathbf{V}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que  $\mathbf{V}$  está munido com um produto interno da forma,

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (2.17)$$

$$(|u\rangle, |v\rangle) \longmapsto \langle u|v\rangle, \quad (2.18)$$

quando estão satisfeitas as seguintes propriedades, para quaisquer  $u, v, w \in \mathbf{V}$

1.  $\langle u + v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$ .
2.  $\langle \alpha u|v\rangle = \alpha \langle u|v\rangle$ .
3.  $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$ .
4.  $\langle u|u\rangle > 0, \forall |u\rangle \neq 0$ .
5.  $\langle u|u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

**Exemplo 2.1.7.** Em  $\mathbb{C}^n$ ,  $\langle v|u\rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* u_i$  é um produto interno. E,  $\| |v\rangle \| = +\sqrt{\langle v|v\rangle}$  é uma norma induzida pelo produto interno.

A partir das definições que demos acima, podemos iniciar a construção de espaços vetoriais mais complexos que serão úteis para nosso estudo em mecânica quântica. O primeiro desses espaços, e que servirá de base para o próximo que construiremos, é o *Espaço de Banach*, sendo

**Definição 2.1.7.** Espaço de Banach

Seja  $\mathbf{V}$  um espaço vetorial. Dizemos que  $\mathbf{V}$  é um *Espaço de Banach* se este é um espaço completo normado, com a métrica induzida pela norma. Por completo queremos dizer que qualquer sequência de Cauchy é convergente para um elemento do próprio espaço (16).

Por fim, chegamos ao espaço mais importante para este trabalho, o *Espaço de Hilbert*. Sua utilidade na física é imensa, principalmente na mecânica quântica como já citamos, a sua definição formal é a seguinte.

**Definição 2.1.8.** Espaço de Hilbert

Seja  $\mathbf{H}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , dizemos que ele é um *espaço de Hilbert* quando é um espaço vetorial completo pela norma induzida pelo produto interno.

A interpretação para a noção de completude neste sentido pode ser entendida numa analogia entre  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$ . Enquanto  $\mathbb{Q}$  possui “buracos”, por exemplo  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , a reta  $\mathbb{Q}$  é completa neste sentido. Utilizando  $\mathbb{R}$  como valores de medidas de distância teríamos problemas para medir a diagonal de um quadrado, esta lacuna já não ocorre com  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbf{H}$  será utilizado como conjunto onde vivem os estados de um sistema quântico, não podemos correr este risco. Daí surge a necessidade de se exigir a completude.

## 2.2 Projetores

Um espaço de Hilbert qualquer pode ser decomposto a partir do conjunto dos vetores geradores, isto é, o conjunto de vetores que geram todo este espaço como mostrado em 2.1.4. Munido desta construção, podemos então definir os projetores. Se pensarmos que  $\mathbf{H}$ , com  $\dim = n$ , admite a decomposição  $\mathbf{H} = \bigoplus_i^n \mathbf{E}_i$ , como indicado previamente, então um projetor será um operador que leva vetores de  $\mathbf{H}$  em cada um dos subespaços  $\mathbf{E}_i$ .

**Definição 2.2.1.** Projetores

Seja  $\mathbf{H}$  um espaço de Hilbert sobre o corpo  $\mathbb{K}$  de dimensão  $\dim = n$ , e  $v = \alpha_1 |v_1\rangle + \dots + \alpha_n |v_n\rangle = \alpha^i |v_i\rangle$  um vetor pertencente a dado espaço, expandido na base  $\beta = \{|v_i\rangle\}_1^n$ . O projetor sobre o subespaço é então definido por,

$$P_i = |v_i\rangle \langle v_i| : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H} \tag{2.19}$$

$$|v\rangle \longmapsto P_i |v\rangle = |v_i\rangle \langle v_i|v\rangle = \alpha_i |v_i\rangle .$$

Claramente  $\alpha_i |v_i\rangle \in \mathbf{E}_i$

Os Projetores apresentam as seguintes propriedades,

1.  $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$ .
2.  $P_j^2 = P_j$ .
3.  $P = \sum_{i=1}^k P_i = \sum_{i=1}^k |v_i\rangle \langle v_i| = \mathbb{I}$ .

## 2.3 Traço

Uma outra operação sobre matrizes (ou operadores lineares) será bastante útil à frente, envolvendo, por exemplo, probabilidades em mecânica quântica assim,

**Definição 2.3.1.** Traço

Seja  $M$  uma  $n \times n$  matriz,  $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ , com elementos  $m_{ij}$ . O traço da matriz é definido por,

$$\begin{aligned} \text{Tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ M &\longmapsto \text{Tr}M = \sum_i^n m_{ii}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

O traço possui as seguintes propriedades, que podem facilmente ser demonstradas,

1.  $\text{Tr}(M_1 + M_2) = \text{Tr}M_1 + \text{Tr}M_2$ .
2.  $\text{Tr}(\lambda M) = \lambda \text{Tr}M$ .
3.  $\text{Tr}(M_1 M_2) = \text{Tr}(M_2 M_1)$ .

**Exemplo 2.3.1.** Seja  $\mathbb{I}_n \in \mathbb{M}_n$  a matriz identidade  $n \times n$ ,

$$\text{Tr}\mathbb{I}_n = n. \tag{2.21}$$

Como existe uma bijeção entre o conjunto de  $\mathcal{L}(\mathbf{H})$  de operadores lineares em um espaço vetorial  $\mathbf{H}$  com  $\dim = n$  e matrizes em  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ , podemos expandir a definição acima também para elementos de  $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ , fazendo, para  $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ,  $\text{Tr}(T) := \text{Tr}[T]$ , onde  $[T]$  é a matriz que representa  $T$  em uma dada base. Fazendo uma troca de base, a nova representação de  $T$  se relaciona com a antiga por,

$$[T'] = P[T]P^{-1}. \tag{2.22}$$

onde  $P$  é uma  $n \times n$ -matriz invertível. Com a propriedade 3 concluímos que  $\text{Tr}[T'] := \text{Tr}[T]$  e logo a definição de traço de um operador está bem posta.

Estes são alguns conceitos básicos de álgebra linear que são, de certa forma, centrais para a descrição de sistemas quânticos. Nas próximas seções utilizaremos tais conceitos de forma ampla pra a análise e investigação do experimento de Stern-Gerlach, sob uma perspectiva moderna, como definimos ainda na introdução.

### 3 Simulando um cenário de preparar e medir

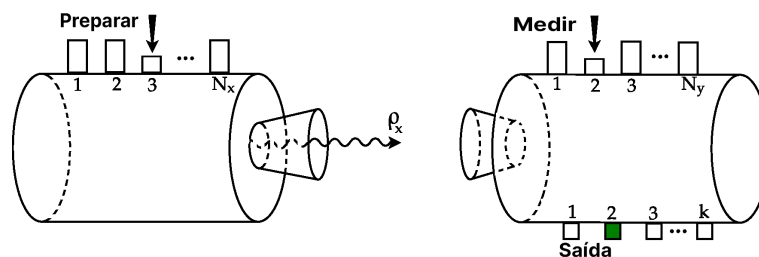
Os cenários preparar e medir consistem em basicamente duas caixas (11, 12, 17). A primeira possuindo  $N_x$  botões que preparam o sistema em um estado  $\rho_x$  sob demanda. A segunda caixa possui outros  $N_y$  botões que performam medidas fornecendo diferentes resultados indexados por  $a = 1, \dots, k$ . A figura 2 retrata essa ideia. Tais cenários são utilizados, por exemplo, para análise e investigação de emaranhamento e comunicação quântica, onde surgem correlações entre os sistemas que não possuem análogos clássicos (18).

Quando nenhuma informação sobre a natureza do sistema envolvido neste cenário está disponível para o experimentalista, a única coisa a se fazer é descrever o sistema através de um conjunto de probabilidades condicionais  $Pr(a|x, y)$  de obter um resultado  $a$  após preparar o sistema no estado  $x$  e medir  $y$ .

Nota-se, então, que isso é exatamente o que uma concatenação de aparatos SG provê. Na verdade, apertar o botão  $x$  significa, operacionalmente, selecionar a direção do campo magnético que separa o fluxo de partículas em dois, juntamente com barrar um dos feixes separados, enquanto o outro move-se livremente (em direção ao aparelho de medida). Deve-se tomar cuidado ao utilizar o termo 'a orientação' do campo magnético neste caso. Uma possível forma para o campo magnético não-homogêneo do instrumento SG é da forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\xi x \hat{e}_1 + (B_0 + \xi z) \hat{e}_3 \quad (3.1)$$

onde  $\{\hat{e}_i, i = 1, 2, 3\}$  é a base para o espaço físico de vetores deslocamento  $\mathbb{D} \cong \mathbb{R}^3$ , com coordenadas  $x, y$  e  $z$ .  $B_0$  é o componente de  $\vec{B}$  na direção  $z$  (19).  $\xi$  representa uma pequena variação no sentido que  $|\xi z|$  e  $|\xi x|$  é muito menor que  $|B_0|$ . Isso nos garante que (i) temos um campo magnético não-homogêneo e (ii)  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , como esperado. Neste caso, dizemos que o campo magnético aponta na direção  $z$ , apenas por um abuso de notação. Podemos também notar que o botão  $y$  representa outra direção para o campo magnético, que, novamente, irá dividir o feixe incidente em dois. Em uma das saídas há



– Figura 2: Representação esquemática de um cenário de preparar e medir, com um resultado  $a = 2$ . (Imagem retirada da referência (2))

uma parede para parar o feixe, já na outra saída há um detector do tipo Geiger. Este é o espírito do que foi chamado de experimento “sim-não” ou proposição - o cerne da descrição dos antigos sistemas quânticos baseados no cálculo proposicional (20). Na terminologia moderna, chamamos isso de uma medida projetiva (sobre um qubit) ou um teste (14). Tal fato é especificado por um conjunto  $\mathcal{M} = \{|\psi_-\rangle, |\psi_+\rangle\}$ . Se medirmos o qubit preparado no estado  $\rho_x$ , então os possíveis resultados são  $-$  ou  $+$  interpretados aqui como sendo ou bloqueado pela parede ou contabilizado no detector. Tal estrutura pode ser rephraseada notando que  $y$  pode ser interpretado não apenas como uma medida mas também como uma preparação de estados. Portanto, a medida da segunda caixa pode ser repensada pelo questionamento (sim-não): uma vez que o sistema é preparado em  $\rho_x$ , estaria o sistema no estado  $\rho_y$ ? Questões da forma: “Qual é o estado do sistema?” aparentam uma dificuldade de serem estruturadas experimentalmente (21, 22, 23).



#### 4 Fatos experimentais sobre o experimento SG

O fato experimental básico associado à sequência de dois aparatos SG no cenário preparar e medir é relacionado a uma probabilidade condicional. Usaremos a seguinte notação. Cada botão  $x$  (ou  $y$ ) de preparação (ou medida) é definido por uma direção ( $\hat{r}_x$ ) ( $\hat{r}_y$ ) no espaço físico que orienta o campo magnético. Ainda mais, seleciona ou um (+) ou o outro (−) feixe espalhado (ambos em  $x$ , permitindo um dos feixes espalhados em viajar para o aparato de medida e  $y$ , para configurar o detector). Definimos então

$$x \leftrightarrow \hat{r}_x^+ \text{ ou } \hat{r}_x^- \quad (4.1)$$

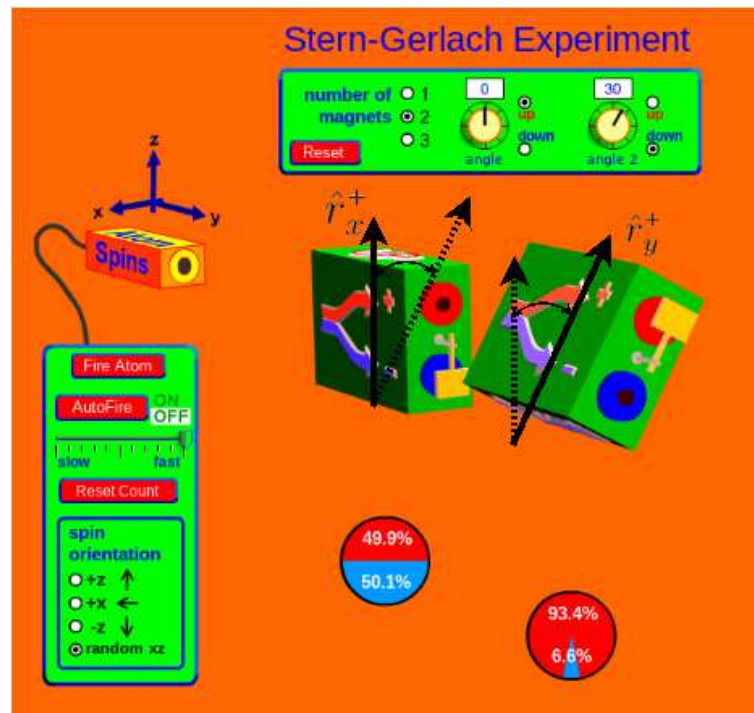
Tal notação é explorada em <sup>1</sup> na figura 3. Neste caso,  $\hat{r}_x^+$  seleciona o feixe com o spin up na direção  $z$ . Além disso,  $\hat{r}_y^+$  conta os átomos que disparam a parede com spin up em uma direção rotacionada por  $\pi/6$  do primeiro campo magnético. Os círculos com as porcentagens são oriundos de um contador do tipo Geiger, que indica o número de partículas passando por cada saída. Esta figura também mostra um exemplo particular de um fato experimental,

$$Pr(+|\hat{r}_x^+, \hat{r}_y^+) = \frac{1 + \cos\angle(\hat{r}_x^+, \hat{r}_y^+)}{2}. \quad (4.2)$$

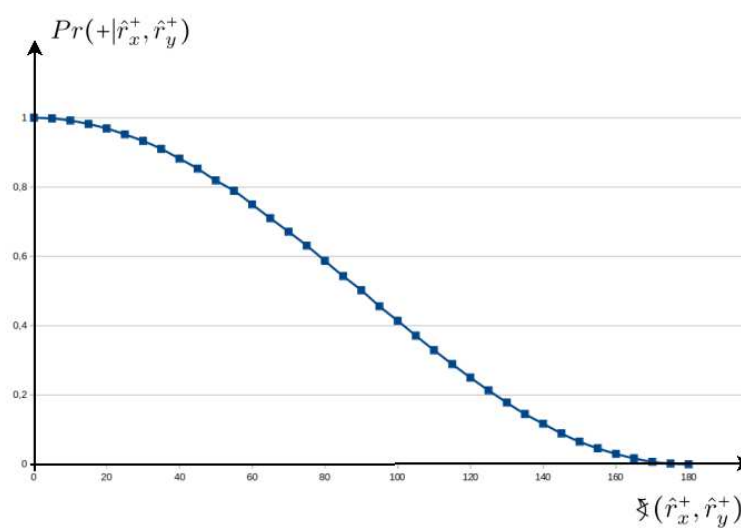
Para poder enxergar isso, o gráfico da figura 4 foi plotado, repetindo uma sequência de experimentos SG, mantendo  $\hat{r}_x$  fixado enquanto variando  $\hat{r}_y$ . O resultado curioso é consistente com (4.2). Os dados utilizados para plotar o gráfico foram, mais uma vez, coletados utilizando o as simulações interativas SG PhET, onde é possível definir o ângulo entre os campos magnéticos entre os dois aparatos.

Antes concluirmos a construção dos estados neste experimento em particular, discutiremos um recurso peculiar da concatenação de dois aparatos SG, sendo este relacionado ao conceito de reprodutibilidade de testes. Configurando uma sequência de dois aparatos SG, totalmente caracterizados por  $\hat{r}^+$ , encontramos que  $Pr(+|\hat{r}^+, \hat{r}^+) = 1$ . Em outras palavras, a questão de ter os estados preparados e medidos por um mesmo campo magnético é respondida com 100% de certeza. Além disso, poderíamos adicionar outras caixas depois das duas primeiras, realizando o mesmo questionamento. A respostas seria “Sim” repetidamente. Agora, vem um passo complexo que não possui correspondente clássico (24). Consideremos três aparatos SG, caracterizados por, digamos,  $\hat{r}^+$ ,  $\hat{u}^+$  e  $\hat{r}^+$ , respectivamente. Cada caixa pode ser interpretada tanto como um aparato de preparar ou medir. Isto se dá pois o feixe incidente, como discutido anteriormente é dividido por dois. O primeiro e terceiro aparatos são o mesmo. Entretanto, o segundo teste destrói a preparação realizada pela primeira caixa. Então, a resposta na terceira não é obtida repetidamente. Neste

<sup>1</sup> Usamos extensivamente as simulações interativas PhET disponíveis em <https://phet.colorado.edu/pt/simulation/legacy/stern-gerlach>.



– Figura 3: Esquema experimental de dois dispositivos SG gerados pela simulação interativa PhET. (Imagem retirada da referencia (2))



– Figura 4:  $Pr(+|\hat{r}_x^+, \hat{r}_y^+)$  como função do ângulo entre  $\hat{r}_x^+$  e  $\hat{r}_y^+$ . (Imagem retirada da referencia (2))

sentido, o primeiro e segundo teste são chamados incompatíveis. Por outro lado, dois testes distintos, digamos  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , são chamados compatíveis quando o teste  $\mathcal{B}$ , aplicado entre duas repetições do teste  $\mathcal{A}$ , não afeta a reprodutibilidade de  $\mathcal{A}$ . Aponta-se que tal situação é drasticamente diferente de seu correspondente clássico. De fato, para um pião girando, com momento angular  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ , poderia-se obter, digamos  $\omega_x$  e  $\omega_y$  simultaneamente. Aqui  $I$  é o momento de inércia e  $\vec{\omega}$  a velocidade angular correspondente (1).

Um exemplo puramente didático e, até certo ponto, cômico foi apresentado em (25). Trata-se um experimento de SG no qual separa meias por sua cor, digamos, brancas ou pretas (teste  $\mathcal{A}$ ) e um segundo que divide as meias em curtas ou compridas (teste  $\mathcal{B}$ ). Classicamente esperaríamos meias, digamos pretas e curtas. Quanticamente, contudo, mesmo tendo separado inicialmente as meias pela cor, a medida/preparação no segundo teste destrói a primeira preparação.

## 5 Esfera de Bloch revelada

A discussão apresentada até agora não revelou a representação adequada de estados no experimento SG. A incompatibilidade dos testes discutidos antes é apenas uma evidência para sua descrição quântica. Além disso, a divisão do feixe incidente em dois indica que poderíamos utilizar um espaço de Hilbert bidimensional para representar totalmente o experimento, partido do pressuposto que sistemas quânticos são, de fato, representados em espaços vetoriais complexos. Assumimos, então, que o espaço de estados é  $\mathbb{C}^2$ , com vetores representados através da notação de Dirac padrão. Essa imposição *leva* à probabilidade condicional correta (4.2) através da regra de Born, a ser apresentado um pouco a frente, veja (5.35) e (5.36). Também construiremos a esfera de Bloch que é uma representação geométrica para sistemas de dois níveis. Para isso, dividimos nossas tarefas em subseções. Na primeira, tentamos explorar uma ligação entre a geometria dos espaços de Hilbert e probabilidades. Em seguida, direcionamos nossos esforços para a própria esfera de Bloch. Finalmente, uma lista de comentários será dado.

### 5.1 Geometria de Probabilidades

A parametrização apresentada na (1.1) reflete um entendimento geométrico claro em termos da preparação dos estados. De fato, o par  $(\theta, \varphi)$  descreve unicamente o estado preparado por

$$x \longleftrightarrow \hat{r}_x^+ = \sin\theta\cos\varphi\hat{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\hat{e}_2 + \cos\theta\hat{e}_3 \quad (5.1)$$

isto é, a direção radial arbitrária em coordenadas esféricas no espaço físico indica a orientação do campo magnético. Como usual,  $\{\hat{e}_i, i = 1, 2, 3\}$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^3$

Esclareçamos este ponto, que indica como operacionalmente há uma conexão entre o espaço físico de preparação experimental de estados, representados em um espaço de Hilbert **bidimensional**. Como mencionado anteriormente, os dois feixes divididos indicam que  $\mathbb{C}^2$  é um bom candidato para o espaço de estados. Escolhemos uma base no  $\mathbb{C}^2$ . Ao pressionar o botão  $x$  na preparação, selecionamos tanto uma direção particular no espaço para apontar o campo magnético, quanto um dos feixes espalhados. Então tomamos,

$$x_1 \longleftrightarrow \hat{e}_3^+ \longleftrightarrow |0\rangle \quad (5.2)$$

$$x_2 \longleftrightarrow \hat{e}_3^- \longleftrightarrow |1\rangle \quad (5.3)$$

Isso significa que os vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  representam duas preparações possíveis. Estas duas escolhas mostram que o sistema pode conter propriedades excludentes (*i.e.* de ser selecionado  $x_1$  ou  $x_2$  em (5.2)). Assim, associamos uma propriedade do sistema a um subespaço no espaço de estados. Existe uma maneira de descrever o que é a probabilidade de um sistema possuir uma propriedade particular: olhamos para o projeção do vetor de estado no subespaço correspondente. Esta geometria de probabilidades pede por produto

interno em  $\mathbb{C}^2$ ,  $\langle | \rangle : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Para o nosso caso, se o sistema é preparado no estado  $|1\rangle$ , ele deveria não possuir componentes no subespaço gerado por  $|0\rangle$ . De fato, as propriedades de ser selecionado por  $x_1$  ou  $x_2$  são excludentes. Então  $\langle 0|1\rangle = 0$ , o que também implica que  $\mathcal{Z} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$  pode ser tomado como base para o  $\mathbb{C}^2$ , já que os vetores em  $\mathcal{Z}$  são linearmente independentes. Junto com a descrição acima, para um vetor geral do espaço de estados

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (5.4)$$

onde  $|\alpha|^2$  representa a probabilidade do sistema em ser medido por  $y_1 \longleftrightarrow \hat{e}_3^+$ , tal qual  $|\beta|^2$  por  $y_2 \longleftrightarrow \hat{e}_3^-$ , possuindo a geometria de probabilidades construída. Exigindo que  $|\psi\rangle$  seja normalizado,  $\langle \psi|\psi\rangle = 1$ , conseguimos dar tal interpretação probabilística pois  $0 \leq |\alpha|^2 \leq 1$ ,  $0 \leq |\beta|^2 \leq 1$  e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Matematicamente, projetamos  $|\psi\rangle$  no subespaço correspondente e tomamos seu quadrado. Isto é, se  $\hat{r}^+ \longleftrightarrow |\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ , então

$$Pr(+|\hat{r}^+, \hat{e}_3^+) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2, \quad (5.5)$$

$$Pr(-|\hat{r}^+, \hat{e}_3^-) = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2. \quad (5.6)$$

Ao invés de  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , poderíamos tomar os projetores que representam o estado

$$\rho_{x_1} = |0\rangle \langle 0|, \rho_{x_2} = |1\rangle \langle 1|, \quad (5.7)$$

ou ainda  $\rho_x = |\psi\rangle \langle \psi|$ . As probabilidades estimadas em (5.5), assumem a forma

$$\begin{aligned} Pr(+|\hat{r}^+, \hat{e}_3^+) &= Tr(\rho_x \rho_{x_1}) = |\alpha|^2, \\ Pr(-|\hat{r}^+, \hat{e}_3^-) &= Tr(\rho_x \rho_{x_2}) = |\beta|^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Com isso temos liberdade para representar estados tanto por vetores quanto pelos projetores indicados acima, uma vez que os resultados probabilísticos são os mesmos.

## 5.2 Interpretação Geométrica da esfera de Bloch

Nossa tarefa final consiste em encontrar os coeficientes complexos  $\alpha$  e  $\beta$  em termos do par  $(\theta, \varphi)$ , que definem unicamente  $\hat{r}^+$ , tal qual (5.1).

Primeiramente, devemos descobrir quais são os estados correspondentes às preparações  $\hat{e}_1^\pm$ . De acordo com  $Pr(+|\hat{e}_1^+, \hat{e}_3^+) = Pr(-|\hat{e}_1^-, \hat{e}_3^-) = \frac{1}{2}$ , o estado preparado varia em 50%/50% quando perguntado sobre  $\hat{e}_3^\pm$ . Então, [mudei aqui](#)

$$\hat{e}_1^+ \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) =: |+\rangle, \quad (5.9)$$

$$\hat{e}_1^- \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) =: |-\rangle, \quad (5.10)$$

sendo  $\langle +|- \rangle = 0$ , como esperado (as propriedades de ser preparado em  $\hat{e}_1^+$  ou  $\hat{e}_1^-$  são excludentes). O conjunto  $\mathcal{X} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$  pode também ser tomado como base do  $\mathbb{C}^2$ . A troca  $\mathcal{Z} \leftrightarrow \mathcal{X}$  pode ser visto como uma rotação de  $\pi/4$  (ou uma transformação unitária no caso de espaços vetoriais complexos). Dessa forma, podemos “rotacionar” no espaço de estados complexo ambos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  pelo fator  $\pi/4$  para gerar a base  $\mathcal{Y} = \{|a\rangle, |b\rangle\}$ . Primeiramente escrevemos.

$$|a'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\pi}{4}}|0\rangle + e^{-i\frac{\pi}{4}}|1\rangle), \quad (5.11)$$

$$|b'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\pi}{4}}|0\rangle - e^{-i\frac{\pi}{4}}|1\rangle). \quad (5.12)$$

Notando que o fator de fase global é irrelevante (no sentido de preservar as probabilidades) finalmente definimos,

$$|a\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}|a'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle), \quad (5.13)$$

$$|b\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}|b'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle). \quad (5.14)$$

Como no caso de  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ , é também formado por vetores ortonormais e,

$$\hat{e}_2^\pm \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle). \quad (5.15)$$

Eles geram a variação correta de 50%/50% nas probabilidades,

$$Pr(\pm|\hat{e}_i^\pm, \hat{e}_j^\pm) = \frac{1}{2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \quad (5.16)$$

Com as bases  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{Z}$ , estamos em posição de obter os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  em (5.4), tal que  $\hat{r}^+ \longleftrightarrow |\psi\rangle$  e  $\hat{r}$  tem direção arbitrária no espaço físico.

Evocando novamente que a probabilidade condicional (4.2) é apenas uma função dos ângulos entre os vetores dos campos magnéticos envolvidos em preparar e medir, temos,

$$Pr(+|\hat{r}^+, \hat{e}_3^+) = \frac{1 + \hat{r} \cdot \hat{e}_3}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2} = |\alpha|^2 \quad (5.17)$$

A ultima igualdade aparece em decorrência da geometria de probabilidades construídas até agora. Então,  $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}e^{i\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como um fator de fase global não influencia probabilidades, escondemos  $e^{i\lambda}$  em  $\beta$ .

Seguindo neste caminho e sabendo que,

$$\begin{aligned} \hat{e}_1^+ &\longleftrightarrow |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ \hat{e}_2^+ &\longleftrightarrow |a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \end{aligned} \quad (5.18)$$

teremos,

$$Pr(+|\hat{r}_1, \hat{e}_1^+) = \frac{1 + \text{sen}\theta \cos\varphi}{2} = |\langle +|\psi\rangle|^2 \Rightarrow 1 + \text{sen}\theta \cos\varphi = \cos^2\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}(\beta + \beta^*) + |\beta|^2. \quad (5.19)$$

Sendo  $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2 = 1 - \cos^2\frac{\theta}{2}$ , encontramos,

$$Re(\beta) = \text{sen}\frac{\theta}{2} \cos\varphi \quad (5.20)$$

Analogamente,

$$Pr(+|\hat{r}_2, \hat{e}_2^+) = \frac{1 + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi}{2} = |\langle a|\psi\rangle|^2 \quad (5.21)$$

implica,

$$Im(\beta) = \text{sen}\frac{\theta}{2} \text{sen}(\varphi). \quad (5.22)$$

Se agora juntarmos todas as peças, então, por (5.20) e (5.2), teremos  $\beta = \text{sen}\frac{\theta}{2}(\cos(\varphi) + i\text{sen}(\varphi))$  e finalmente,

$$\hat{r}^+ \longleftrightarrow |\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \text{sen}\frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (5.23)$$

completando nosso objetivo final de operacionalmente construir (1.1). Deixamos a próxima subseção para comentários gerais e discussões sobre a abordagem adotada.

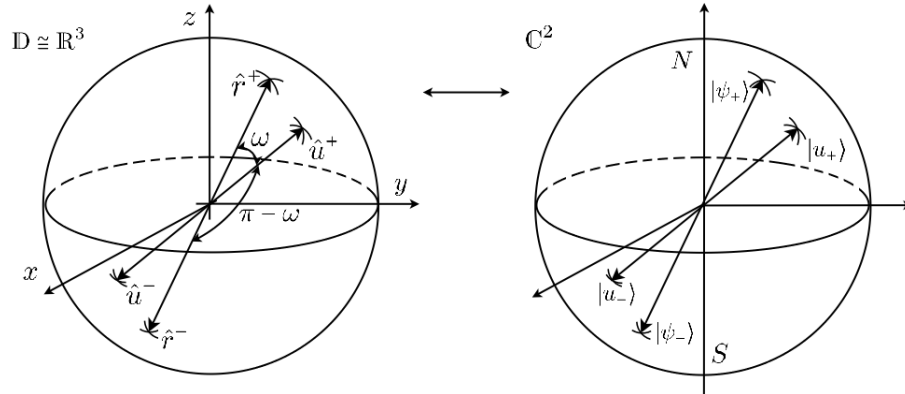
### 5.3 Comentários Gerais e Discussões

1. Partindo de um espaço físico tridimensional, podemos construir um espaço de estados bidimensional. Na verdade, assumimos que tínhamos um espaço de Hilbert bidimensional. Essa suposição nos levou a uma construção teórica que se encaixa perfeitamente com os dados experimentais disponíveis. O que pode ser dito sobre o inverso? A existência de qubits precisa necessariamente de um espaço tridimensional?
2. Nossa construção mostrou um significado geométrico para o par  $(\theta, \varphi)$  usado para parametrizar vetores de estado, dado por (5.23). Se o par executa valores no domínio padrão  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , então cobrimos a esfera unitária, e também  $|\psi\rangle$  sobre o que é chamado de esfera de Bloch. Com um fixo  $\varphi = 0$ , os dois vetores com  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  são conectados com os seguintes estados,

$$\begin{aligned} \hat{r}_1^+ &= \hat{e}_3^+ \longleftrightarrow |0\rangle, \\ \hat{r}_2^+ &= -\hat{e}_3^+ \longleftrightarrow |1\rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Esses cálculos indicam um resultado geral: pontos antipodais na esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  são relacionados a estados ortonormais. De fato, no espaço físico os pares  $(\theta, \varphi)$  e  $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$  geram um par de antípodas e, como constatado, temos,

$$\begin{aligned} \hat{r}^+(\theta, \varphi) &\longleftrightarrow |\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \text{sen}\frac{\theta}{2} |1\rangle, \\ \hat{r}^-(\theta, \varphi) &\longleftrightarrow |\psi_-\rangle = \text{sen}\frac{\theta}{2} |0\rangle - e^{i\varphi} \cos\frac{\theta}{2} |1\rangle. \end{aligned} \quad (5.25)$$



– Figura 5: Representação geométrica de  $S^2$  e da esfera de Bloch: antípodas representam estados ortonormais. (Imagem retirada da referencia (2))

onde,

$$\hat{r}^+(\theta, \varphi) = \text{sen}\theta \cos\varphi \hat{e}_1 + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \hat{e}_2 + \text{cos}\theta \hat{e}_3, \quad (5.26)$$

e  $\hat{r}^-(\theta, \varphi) = \hat{r}^+(\pi - \theta, \varphi + \pi)$ . Um calculo direto mostra que  $\hat{r}^+ \cdot \hat{r}^- = -1$ , tal qual  $\langle \psi_+ | \psi_- \rangle = 0$ . A figura 5 mostra uma forma geométrica deste resultado tanto na esfera unitária  $S^2$  imersa no espaço físico (denotado por  $\mathbb{D}$ ) e na esfera de Bloch.

Também podemos explorar a figura 5 para dar alguma perspectiva sobre a geometria das probabilidades de que falamos antes. Suponha que  $\hat{u}$  é um vetor unitário tal que o sistema é preparado no estado.

$$\hat{u}^+ \longleftrightarrow |u_+\rangle. \quad (5.27)$$

Faremos um teste designado por  $\mathcal{M} = \{|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$ . Quando  $|u_+\rangle$  cai no hemisfério norte (indicado por um  $N$  na Fig. 4), é mais provável encontrar um  $+$  na medição. Se  $|u_+\rangle$  é tal que o ângulo entre  $\hat{r}$  e  $\hat{u}$  é  $\pi/2$ , então as probabilidades de obter  $+$  ou  $-$  são as mesmas e iguais a  $1/2$ . Para confirmar este fato, definimos  $\angle(\hat{u}, \hat{r}) = \omega$ . Então,

$$\text{Pr}(+|\hat{u}^+, \hat{r}^+) = \frac{1}{2}(1 + \text{cos}\omega) = \text{cos}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.28)$$

$$\text{Pr}(-|\hat{u}^+, \hat{r}^-) = \frac{1}{2}(1 + \text{cos}(\pi - \omega)) = \text{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.29)$$

Embora nós representemos  $|\psi_+\rangle$  e  $|\psi_-\rangle$  caindo na mesma linha reta, em direções opostas, eles abrangem subespaços ortogonais em  $\mathbb{C}^2$ ,  $\text{span}\{|\psi_+\rangle\}^\perp = \text{span}\{|\psi_-\rangle\}$ . Com nossa visão limitada, os valores de probabilidade em (5.28) e (5.29) sugeririam esboçar  $|\psi_+\rangle$  e  $|\psi_-\rangle$  com um ângulo de  $\pi/2$ , contrário ao que foi mostrado na esfera de Bloch na figura 5. Infelizmente, é o máximo que podemos fazer.

3. Anteriormente introduzimos o uso de traços para avaliar probabilidades, veja (5.8). Vamos expandir essa ideia, que alinhará nossa notação à próxima Seção. Agora



invertemos o que fizemos no item anterior: suponha que o sistema esteja preparado no estado  $\rho_x = |\psi_+\rangle\langle\psi_+|$ , onde  $|\psi_+\rangle$  foi definido em (5.1). Um cálculo direto mostra que,

$$\rho_x = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \hat{r} \cdot \hat{\sigma}). \quad (5.30)$$

Aqui,  $\mathbb{I}_2$  é a matriz identidade de ordem 2. O cálculo foi conduzido na representação canônica,

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  são as matrizes de Pauli, e neste caso assumem a forma,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

A medida, por sua vez, está associada a  $\mathcal{M} = \{|u_+\rangle, |u_-\rangle\}$  onde  $\hat{u}^+$  é obtido por um deslocamento de  $\omega$  na coordenada  $\theta$  de  $\hat{r}^+$ . Nesse caso,

$$|u^+\rangle = \cos\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) |1\rangle, \quad (5.33)$$

$$|u^-\rangle = \sin\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) |0\rangle - e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) |1\rangle, \quad (5.34)$$

Novamente por um cálculo simples temos os seguintes resultados,

$$Pr(+|\hat{r}^+, \hat{u}^+) = Tr(\rho_x \mathcal{M}_+) = \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (5.35)$$

$$Pr(-|\hat{r}^+, \hat{u}^-) = Tr(\rho_x \mathcal{M}_-) = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (5.36)$$

onde  $\mathcal{M}_\pm = |u^\pm\rangle\langle u^\pm|$  são projetores ortogonais. Eles desempenham, neste caso particular, o papel de uma classe mais ampla de operadores que podem ser usados para generalizar o que foi definido em (5.35) e (5.36). Em geral, diz-se que um sistema tem comportamento quântico quando as probabilidades podem ser expressas por uma regra de Born,

$$Pr(a|x, y) = Tr(\rho_x \mathcal{M}_y^a), \quad (5.37)$$

onde  $a$  significa o resultado de um teste,  $x$  e  $y$  significa preparar e medir  $\mathcal{M}_y^a$  é uma medida de valor de operador positivo (POVM). Toda a nossa análise mostra que o experimento SG se enquadra neste tipo de descrição, como o exemplo padrão de um sistema quântico, sendo descrito de acordo. Uma descrição detalhada e didática sobre medidas quânticas e POVM's utilizando um feixe de laser polarizado é feita em (26).

## 6 A geometria de estados indistinguíveis

Esta seção é dedicado a formalizar a conexão entre qubits e o que é conhecido tecnicamente como fibração de Hopf. Uma exposição geométrica/topológica pode ser encontrada em (27). Abordaremos com um pouco mais de profundidade a última conexão entre o espaço físico e o espaço de estados.

**Definição 6.0.1.** Uma fibração é um mapa  $f$  que leva um espaço  $\mathbf{E}$  em um espaço base  $\mathbf{B}$ . Uma fibra é um conjunto  $F \subset \mathbf{E}$ , se  $F$  corresponde a imagem inversa  $f^{-1}$  para algum  $b \in \mathbf{B}$  (14).

**Exemplo 6.0.1.** A projeção de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^2$  é um exemplo trivial,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b, c) &\longmapsto (a, b) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Com as retas paralelas ao eixo  $z$  sendo as fibras (14).

Sendo assim, para construir a fibração de Hopf, nosso ponto de partida será os espaços projetivos reais. Eles podem ser prontamente generalizados para espaços complexos e, ao mesmo tempo, admitem um significado geométrico claro. Em primeiro lugar, consideramos o espaço linear  $\mathbb{R}^{n+1}$ , com elementos denotados por  $\vec{x}, \vec{y}$ , etc e  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $\sim$  a seguinte relação,

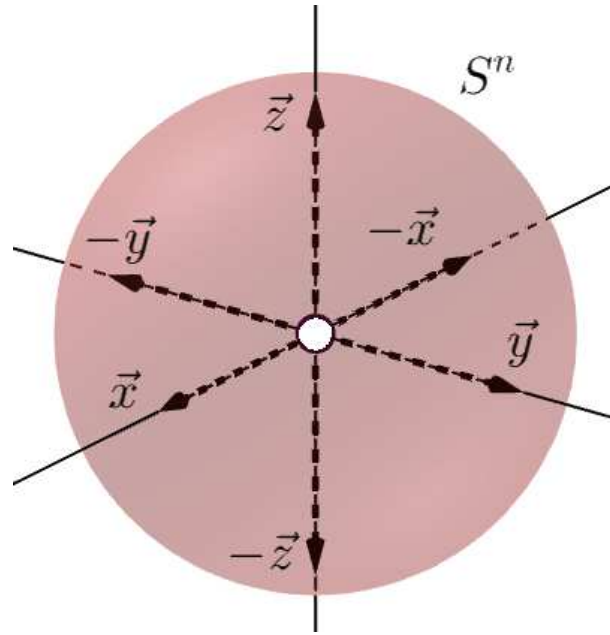
$$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = \lambda \vec{x}; \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Uma verificação direta mostra que  $\sim$  é simétrica, reflexiva e transitiva e, como tal, é uma relação de equivalência. A interpretação geométrica para as classes de equivalência pode ser obtida pegando  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$  e olhando para todos os  $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ , com  $\lambda$  real. São linhas retas, com  $\vec{x}$  sendo o vetor diretor correspondente. Vamos denotar o espaço quociente correspondente por  $\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} / \sim$  e chamamos isso de espaço projetivo. Apontamos que, dado  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , podemos encontrar  $\lambda$  tal que  $\lambda \vec{x}$  é unitário. De fato, tomamos  $\lambda = \pm 1/||x||$ . Portanto, o  $\mathbb{R}P^n$  pode ser visto como a esfera unitária  $S^n$ , com as antípodas identificadas. Resumimos essas primeiras etapas na figura (6), com o exemplo visual da esfera  $S^2$  imersa em  $\mathbb{R}^3$ . A origem foi removida de propósito, uma vez que não está em nenhuma classe de equivalência. À luz desta observação, a notação  $\mathbb{R}P^{n+1}/\{\vec{0}\}$  também é usada.

Espaços projetivos complexos são definidos da mesma maneira e são de interesse na mecânica quântica (28). De fato, deixe um qubit ser representado pelo vetor,

$$|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle. \tag{6.3}$$

Como usual,  $\mathcal{B} = \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$  é uma base para o espaço  $\mathbb{C}^2$  e os coeficientes  $a = x_1 + ix_2$  e  $b = x_3 + ix_4$  são números complexos com  $x_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . A condição de



– Figura 6: Representação geométrica da esfera unitária  $S^n$ , com as antípodas identificadas. (Imagem retirada da referencia (2))

normalização  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$  implica,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1. \quad (6.4)$$

Este resultado nos permite concluir que o estado quântico vive na esfera  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . O que acontece quando mudamos o vetor de estado  $|\psi\rangle$  por um fator de fase, digamos,  $|\psi'\rangle = e^{i\varphi} |\psi\rangle$  com  $\varphi \in \mathbb{R}$ ? Eles representam o mesmo estado, uma vez que as probabilidades são mantidas intocadas. Para ver isso, associamos a base  $\mathcal{B} = \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$  a um teste, com alternativas clássicas, digamos,  $\alpha$  e  $\beta$ . A probabilidade de encontrar  $\alpha(\beta)$ , de acordo com a regra de Born, é dada por  $|\alpha|^2(|\beta|^2)$ , quando o sistema está no estado  $|\psi\rangle$ . Por outro lado, o resultado é o mesmo se o sistema está agora no estado  $|\psi'\rangle$ ,

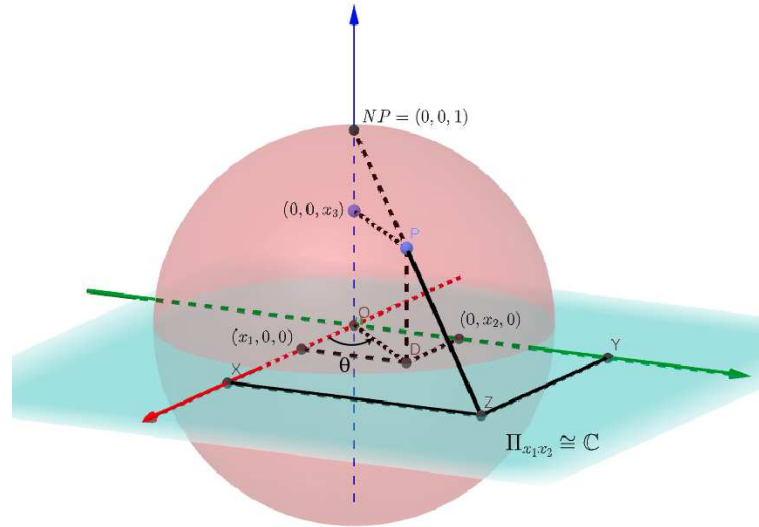
$$Pr(\alpha | e^{i\varphi} |\psi\rangle) = |\langle \alpha | e^{i\varphi} |\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2 = Pr(\alpha | |\psi\rangle). \quad (6.5)$$

Nesse caso, chamamos os estados  $|\psi\rangle$  e  $|\psi'\rangle$  indistinguíveis. Aqui,  $Pr(\alpha | |\psi\rangle)$  representa a probabilidade de encontrar  $\alpha$  quando o sistema está no estado  $|\psi\rangle$ .

Neste estágio, estamos prontos para conectar espaços complexos projetivos à geometria dos estados indistinguíveis. Vetores unitários em  $\mathbb{C}^2$  descrevem sistemas de dois níveis. Denotamos  $(a, b)$  com a restrição de que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Então vamos definir a seguinte relação,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (c, d) = e^{i\varphi} (a, b), \varphi \in \mathbb{R}. \quad (6.6)$$

Observamos a mesma estrutura de (6.2), que nos permite concluir que  $\sim$  é realmente uma relação de equivalência. Destacamos também que as classes de equivalência neste caso são órbitas da ação do grupo  $\mathcal{U}(1)$  em  $S^3$ .



– Figura 7: Representação esquemática da projeção estereográfica. (Imagem retirada da referência (2))

Cada classe  $[(a, b)] \subset \mathbb{C}^2/\{(0, 0)\}$  pode ser unicamente definida pelo seguinte mapeamento,

$$h : \mathbb{C}^2/\{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$[(a, b)] \mapsto h([(a, b)]) = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0. \quad (6.7)$$

Claramente  $h$  é um mapeamento definido por classes, uma vez que sua ação é independente do representante da classe. De fato, seja  $(c, d)$  um elemento arbitrário em  $[(a, b)]$ , isto é,  $(c, d) = e^{i\varphi}(a, b)$ . Então,

$$h([(a, b)]) = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}. \quad (6.8)$$

Olhando cuidadosamente para a expressão (6.7) vemos que o espaço alvo do mapeamento  $h$  é  $\mathbb{C}$ , que, por sua vez, pode ser mapeado bijetivamente na esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Vamos construir essa bijeção com o que é chamado de projeção estereográfica equatorial. Para isso, primeiro identificamos o plano  $\Pi_{x_1x_2} \subset \mathbb{R}^3$  com  $\mathbb{C}$ :  $\forall Z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}, \exists! (x_1, x_2, 0) \in \Pi_{x_1x_2}$  e vice-versa. Para cada ponto  $P = (x_1, x_2, x_3)$ , da esfera, com exceção do “polo norte”  $NP$  (com coordenadas  $(0, 0, 1)$ ), traçamos uma linha fixa conectando eles, até o ponto de intersecção com  $Z \in \Pi_{x_1x_2}$ , com coordenadas  $(X, Y, 0)$ . Vamos construir explicitamente este mapeamento,

$$e : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto e(x_1, x_2, x_3) = X + iY = \rho e^{i\theta}. \quad (6.9)$$

A figura 7 nos ajuda com as notações:  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$  e  $\theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$ . Nossa tarefa agora consiste em encontrar a dependência de ambos  $\rho$  e  $\theta$  em termos das coordenadas do ponto

$P$ . Devido à semelhança entre os triângulos  $\triangle(NP, O, Z)$  e  $\triangle(P, D, Z)$ , escrevemos

$$\frac{d(O, Z)}{d(O, NP)} = \frac{d(D, Z)}{d(D, P)} \iff \frac{\rho}{1} = \frac{\rho - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \implies \rho x_3 = \rho - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (6.10)$$

Sendo  $P \in S^2$ , temos  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{1 - x_3^2}$ . Por fim, da equação (6.10), e também notando que  $\frac{Y}{X} = \frac{x_2}{x_1}$ , descobrimos que ,

$$e(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sqrt{1 - x_3^2}}{1 - x_3} e^{i\theta}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \quad (6.11)$$

O caminho inverso também pode ser construído, isto é,

$$\begin{aligned} e^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow S^2 \\ z = X + iY &\mapsto e^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Este mapeamento será importante mais a frente. Por enquanto, lembrando que  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$  e, junto com (6.11), podemos encontrar  $x_3$  como uma função de  $X$  e  $Y$ ,

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - x_3^2}}{1 - x_3} = \sqrt{X^2 + Y^2} \implies x_3 = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1}. \quad (6.13)$$

Retornando novamente à figura 7, observamos que,

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} = \frac{x_2}{x_1} \implies x_2 = \frac{Y}{X} x_1. \quad (6.14)$$

Agora combinamos a restrição  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  junto de (6.13), e (6.14)

$$x_1^2 + \frac{Y^2}{X^2} x_1^2 + \left(\frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1}\right)^2 = 1 \implies x_1 = \frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}. \quad (6.15)$$

Este último resultado na (6.14), garante  $x_2$  como função de  $X$  e  $Y$ ,

$$x_2 = \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}. \quad (6.16)$$

Agora estamos em posição de escrever a forma direta do mapeamento  $e^{-1}(\cdot)$ ,

$$e^{-1}(z = X + iY) = \left(\frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1}\right). \quad (6.17)$$

Uma verificação imediata mostra que  $\|e^{-1}(z)\|^2 = 1$ , confirmando que estamos mapeando  $\mathbb{C}$  sobre uma esfera.

Resumindo o que encontramos até agora, existem dois mapeamentos de interesse, sendo eles,

$$h : S^3 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C} \quad (6.18)$$

$$e : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \iff e^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2. \quad (6.19)$$



Terminamos esta exposição com um comentário final. Vamos interpretar o mapa  $e^{-1} \circ h$  como uma projeção  $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ . Na verdade, podemos chamá-lo de fibração, sendo  $S^2$  o espaço de base. Diferentes pontos em  $S^3$  conectados por rotação representam o mesmo estado de um qubit. Isso é exatamente o que está escrito em (6.6). Devido à própria estrutura de (6.25), o fator de fase não faz diferença na projeção resultante:  $\pi(a, b) = \pi(c, d)$ . Por outro lado, a imagem inversa  $\pi^{-1}(P)$  de qualquer ponto  $P \in S^2$  é simplesmente a classe inteira de estados indistinguíveis. Como já vimos, são órbitas da ação de  $\mathcal{U}(1)$  sobre  $S^3$ , que são simplesmente grandes círculos. A imagem inversa de  $\pi$  são chamadas de fibras. Assim, podemos concluir que os estados indistinguíveis são simplesmente as fibras de  $\pi$ , que são circunferências, ou seja,  $\pi^{-1}(P) \cong S^1$ . Toda esta construção é resumida em termos geométricos como

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$$

e é conhecida como fibração de Hopf (28), como representado na figura 8.

## 7 Conclusões

Um século inteiro se passou desde os trabalhos seminais de Stern e Gerlach. A motivação para este trabalho foi não só comemorar o seu centenário, mas também explorar o potencial pedagógico que um sistema de dois níveis pode fornecer. Dessa forma, usamos o dispositivo SG para discutir e detalhar muitos tópicos da mecânica quântica moderna. Vamos enumerar nossos principais resultados.

1. Uma concatenação de dois aparelhos SG pode ser vista como uma aproximação para o chamado cenário de preparar e medir. O primeiro aparato divide o feixe de partículas incidentes em dois e impede que um dos feixes divididos se mova. Nesse caso, dizemos que o feixe permitido a continuar viajando foi preparado no estado, digamos,  $\rho$ . O segundo aparato, por sua vez, mede o sistema previamente preparado. A pergunta usual que se propõe a responder é: “O sistema está no estado  $\rho'$ ?”. As etapas de preparar e medir assumem uma forma bastante concreta uma vez que é obtido através do procedimento operacional de permitir que o feixe de partículas atravesse uma região espacial preenchida com um campo magnético.
2. Uma das características centrais de um sistema quântico é sua estrutura probabilística irreduzível (20). Em nossa construção, podemos literalmente ver isso, com dados coletados através da simulação interativa PhET, figuras (3 e 4). Na verdade, as probabilidades envolvidas em nosso formalismo podem ser escritas em termos do ângulo entre os campos magnéticos envolvidos na preparação e medindo o sistema, como indica (4.2).
3. A representação geométrica de estados puros em sistemas quânticos de dois níveis é representada na esfera de Bloch. O espaço de Hilbert subjacente é estendido pela base  $\{|0\rangle |1\rangle\}$  e um vetor arbitrário é escrito como a combinação linear,

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (7.1)$$

Partindo de uma geometria de probabilidades, nossa construção fornece uma significado geométrico claro para os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$  em (7.1). Eles estão em uma correspondência um-para-um com as coordenadas esféricas do espaço físico. Quando preparamos um sistema selecionando o feixe com spin up após passar-lo por um campo magnético com direção,

$$\hat{r}(\theta, \varphi) = \sin\theta\cos\varphi\hat{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\hat{e}_2 + \cos\theta\hat{e}_3 \quad (7.2)$$

então o estado é representado por  $|\psi\rangle$  em (7.1). Este cálculo elucidada a profunda conexão entre o espaço físico tridimensional e um qubit representado matematicamente por um espaço complexo bidimensional.



4. Para aprofundar ainda mais a conexão entre o espaço físico e o espaço de estados/esfera de Bloch, construímos detalhadamente a fibração de Hopf. Ela elucidada como estados indistinguíveis em  $S^3$  (as fibras) estão associadas a pontos em  $\mathbb{R}^3$ , definimos, por exemplo, pela orientação de um campo magnético que prepara estados. Por fim, destacamos que existem diversos sistemas quânticos de interesse representados por qubits. Por exemplo, fóton polarizado. Por um lado, a fibração mostra que a preparação de um qubit se dá em  $\mathbb{R}^3$  e por outro, luz polarizada está ligada a um campo elétrico oscilando em um plano de  $\mathbb{R}^2$ . Assim, seria interessante investigar quais os procedimentos experimentais em  $\mathbb{R}^3$  geram luz polarizada representada em  $\mathbb{C}^2$ .

## REFERÊNCIAS

- 1 J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, second edition ed., 2017. OCLC: 1029603578.
- 2 R. Grossi, L. L. Brugger, B. F. Rizzuti, and C. Duarte, “One hundred years later: Stern-gerlach experiment and dimension witnesses,” *Rev. Bras. Ensino Física*, vol. 45, 2023.
- 3 O. Stern, “Ein Weg zur experimentellen Prüfung der Richtungsquantelung im Magnetfeld,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 7, pp. 249–253, Dec. 1921.
- 4 W. Gerlach and O. Stern, “Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 8, pp. 110–111, Dec. 1921.
- 5 W. Gerlach and O. Stern, “Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 9, pp. 349–352, Dec. 1922.
- 6 W. Gerlach and O. Stern, “Das magnetische Moment des Silberatoms,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 9, pp. 353–355, Dec. 1922.
- 7 G. G. Gomes and M. Pietrocola, “O experimento de Stern-Gerlach e o spin do elétron: um exemplo de quasi-história,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 33, June 2011.
- 8 T.-Y. Wu, A. Kumar, F. Giraldo, and D. S. Weiss, “Stern–Gerlach detection of neutral-atom qubits in a state-dependent optical lattice,” *Nature Physics*, vol. 15, pp. 538–542, June 2019.
- 9 A. G. Santos and J. A. Huguenin, “Medidas quânticas: Abordagem experimental de medidas povm em polarização com feixe laser intenso,” *Rev. Bras. Ensino Física*, vol. 45, 2023.
- 10 C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum mechanics. Volume 1: Basic concepts, tools, and applications*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, second edition ed., 2020.
- 11 R. Gallego, N. Brunner, C. Hadley, and A. Acín, “Device-Independent Tests of Classical and Quantum Dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 230501, Nov. 2010.
- 12 C. de Gois, G. Moreno, R. Nery, S. Brito, R. Chaves, and R. Rabelo, “General method for classicality certification in the prepare and measure scenario,” *PRX Quantum*, vol. 2, p. 030311, Jul 2021.
- 13 M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. USA: Cambridge University Press, 10th ed., 2011.
- 14 B. Amaral, A. T. Baraviera, and M. O. T. Cunha, *Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação*. IMPA, 2011.
- 15 K. M. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1961.

- 16 E. L. Lima, *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora do IMPA, 6° ed., 2020.
- 17 C. Duarte and B. Amaral, “Resource theory of contextuality for arbitrary prepare-and-measure experiments,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 59, p. 062202, Jun 2018.
- 18 J. Pauwels, A. Tavakoli, E. Woodhead, and S. Pironio, “Entanglement in prepare-and-measure scenarios: many questions, a few answers,” *New Journal of Physics*, vol. 24, 2022.
- 19 L. M. Gaio, D. R. T. de Barros, and B. F. Rizzuti, “Grandezas físicas multidimensionais,” *Rev. Bras. Ensino Física*, vol. 41, 2019.
- 20 J. M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co, 1968.
- 21 O. Gühne and G. Toth, “Entanglement detection,” *Physics Reports*, vol. 474, p. 1–75, Apr 2009.
- 22 M. Cramer, M. B. Plenio, S. T. Flammia, R. Somma, D. Gross, S. D. Bartlett, O. Landon-Cardinal, D. Poulin, and Y.-K. Liu, “Efficient quantum state tomography,” *Nature Communications*, vol. 1, Dec 2010.
- 23 Z. Hradil, “Quantum-state estimation,” *Physical Review A*, vol. 55, p. R1561–R1564, Mar 1997.
- 24 D. Jennings and M. Leifer, “No return to classical reality,” *Contemporary Physics*, vol. 57, p. 60–82, Jul 2015.
- 25 C. Manogue, E. Gire, D. McIntyre, and J. Tate, “Representations for a spins-first approach to quantum mechanics,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 1413, 2012.
- 26 A. G. Santos and J. A. Huguenin, “Medidas quânticas: abordagem experimental de medidas povm em polarização com feixe laser intenso,” *Rev. Bras. Ensino Física*, vol. 45, 2023.
- 27 A. S. de Carvalho and R. M. Siejakowski, *Topologia e geometria de 3-variedades, uma agradável introdução*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora do IMPA, 2021.
- 28 I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.