Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marcony Meneguelli Alhadas

Proposta de ensino de logaritmos para o nível médio, usando uma abordagem geométrica

Juiz de Fora

2015

Marcony Meneguelli Alhadas

Proposta de ensino de logaritmos para o nível médio, usando uma abordagem geométrica

Dissertação apresentada ao PROFMAT — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alhadas, Marcony Meneguelli.

Proposta de ensino de logaritmos para o nível médio, usando uma abordagem geométrica / Marcony Meneguelli Alhadas. – 2015.

47 f. : il.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional , 2015.

1. Logaritmos. 2. Abordagem Geométrica. I. Faria, Luiz Fernando de Oliveira , orient. II. Título.

Marcony Meneguelli Alhadas

Proposta de ensino de logaritmos para o nível médio, usando uma abordagem geométrica

Dissertação apresentada ao PROFMAT — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 02 de Março de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Eduard Toon
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Anderson Luis Albuquerque de Araujo
Universidade Federal de Viçosa

Este trabalho é dedicado aos professores de Matemática do ensino básico!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pai de amor, e à minha família, reduto abençoado de crescimento e aprimoramento!

RESUMO

Este trabalho traz uma proposta diferente para o ensino de logaritmos no nível médio. De maneira distinta da abordagem usual, que trata os logaritmos como expoente, apresentamos uma abordagem geométrica, focada no conceito de áreas, destacando pontos que muitas vezes são deixados de lado.

Traz ainda aplicações e implicações que, à luz desta nova rota, tornam-se simples, ou pelo menos mais palpáveis, para professores e alunos, além de atividades sugeridas que envolvem o uso do software Geogebra.

Palavras-chave: Logaritmos. Abordagem Geométrica.

ABSTRACT

This work brings a different proposal for the teaching of logarithms at the medium level. Differently from the usual approach, which treats the logarithms as exponent, we present a geometric approach, focused on the concept of areas, highlighting points that are often left out.

It also brings applications and implications that,in light of this new route, become simple, or at least more tangible for teachers and students, and suggested activities that involve the use of GeoGebra software.

Key-words: Logarithms. Geometric Approach.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história da humanidade, percebemos que muitas descobertas e desenvolvimentos científicos e tecnológicos se concretizam diante das necessidades da sociedade. Com os logaritmos não foi diferente! No fim do século XVI, num cenário de expansão da astronomia e das navegações, pesados cálculos aritméticos se faziam necessários. Nesse sentido, seria de grande utilidade que se conseguisse simplificar as operações matemáticas, reduzindo-as às suas formas mais simples, ou seja, seria produtivo que as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação pudessem ser substituídas pelas de adição e subtração.

Trabalhando de forma independente, as figuras de Jost Biirgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617) publicaram as primeiras tábuas de logaritmos, que encerravam em si a solução dos ploblemas aritméticos acima mencionados. Enquanto o primeiro era suíço, matemático, inventor e fabricante de instrumentos astronômicos, o outro era um nobre escocês, matemático e teólogo. John Napier destacou-se mais e sua influência foi mais incisiva no desenvolvimento da nova ferramenta, ao ponto de os logaritmos naturais serem também chamados de logaritmos neperianos, em sua homenagem, embora os logaritmos naturais tenham valores distintos do logaritmo definido por Napier.

O presente trabalho trata essencialmente dos logaritmos, assunto muitas vezes rechaçado por grande parte dos alunos e até professores. Refletindo sobre o desenvolvimento das atividades ao longo do ano escolar, percebemos que chega um momento em que toda a escola parece modificar seu ritmo: todos correm, por já não aguentarem mais caminhar. Os alunos se desgastam com uma infinidade de atividades: provas bimestrais, provas finais, recuperações e trabalhos. Igualmente exauridos e desorientados seguem os docentes, que precisam fechar notas, participar de conselhos e ponderar as mais diversas situações. Neste ambiente inóspito, os jovens do primeiro ano do ensino médio se deparam com as duas últimas funções que precisam estudar: exponencial e logarítmica. Como se já não bastassem as circunstâncias, o assunto também não ajuda muito, no sentido de trazer elementos novos e uma série de propriedades para serem fixadas e manipuladas.

Entre outros fatores, os citados acima contribuem para o parco entendimento dos conteúdos mencionados.

É nessa atmosfera que trazemos uma proposta de mudança! Salientamos que esta abordagem não é inédita e foi concebida durante a disciplina de Logaritmos, cursada na graduação, cuja principal bibliografia adotada é (LIMA, 2009), na qual este caminho é desenvolvido. O que fazemos aqui é trazer uma roupagem adequada a ser trabalhada com os alunos do primeiro ano do ensino médio. Desta maneira, optamos por não fazer a demonstração formal de alguns dos resultados presentes no trabalho, fazendo, por outro lado, a verificação da validade dos mesmos mediante a utilização das definições e de figuras que levem às conclusões desejadas. Entretanto, resultados mais simples são demonstrados formalmente ao longo do texto.

A abordagem geométrica para a construção e sedimentação da teoria dos logaritmos traz uma gama de vantagens, dentre as quais podemos citar:

- o apelo visual que caracteriza a geometria;
- a possibilidade de tratar certas propriedades e desigualdades de uma maneira mais simples;
- a apresentação e o trato com o número e, extremamente importante na matemática;
- a possibilidade de trabalhar de forma coerente e honesta com potências de expoente irracional, produzindo significado para as mesmas.

Nesse sentido, esperamos que o material produzido possa contribuir como um recurso, como uma possibilidade de melhora.

Mesmo que o ganho, por parte dos alunos, seja mínimo, para os professores é um caminho que, sem sombra de dúvidas, enriquece e aprimora.

O trabalho está dividido da seguinte maneira:

No primeiro Capítulo, definimos a hipérbole e a faixa de hipérbole, bem como a área de uma faixa de hipérbole, apresentando a propriedade fundamental relativa às áreas de faixas de hipérbole, que trazem, em si, o ponto central desta nova abordagem.

No Capítulo dois, definimos os logaritmos naturais e as funções logarítmicas, com relação às quais apresentamos as principais propriedades e o gráfico.

No Capítulo três, trazemos algumas aplicações e implicações desta abordagem, mostrando resultados importantes que são facilitados mediante este novo caminho.

No Capítulo quatro, são apresentadas atividades que podem ser feitas em sala de aula, a maioria com a utilização do software Geogebra.

Por fim, trazemos algumas considerações finais associadas à continuação deste estudo, associadas à função exponencial e a um planejamento de aulas para o cumprimento desta proposta.

Chamamos a atenção para o apêndice deste trabalho, o qual traz a demonstração formal de resultados utilizados no texto, com vistas a um aprofundamento por parte do professor. Não recomendamos que tais demonstrações sejam trabalhadas com os alunos, pelo grau de amadurecimento e abstração que exigem, do ponto de vista matemático.

2 HIPÉRBOLE

Neste capítulo iremos apresentar a hipérbole e a equação associada a esta curva. Além disso, definiremos uma faixa de hipérbole e a área a ela associada, bem como mostraremos uma importante propriedade das faixas de hipérbole.

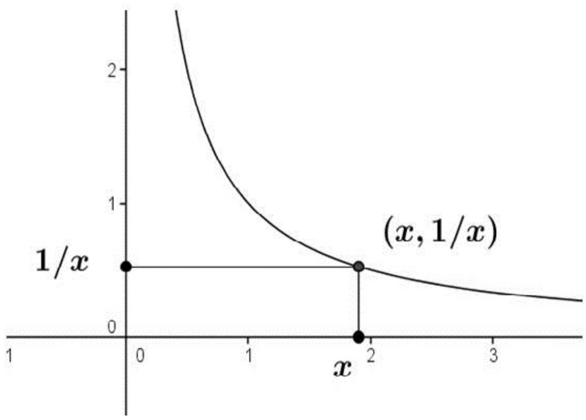
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para a abordagem a que nos propomos, iremos trabalhar com a hipérbole cuja equação é dada por

$$xy = 1.$$

Mais especificamente, iremos utilizar apenas o ramo positivo da referida hipérbole, ou seja, do gráfico da função $y = 1/x$, que associa a cada número real *positivo* x o número $y = 1/x$.

Figura 1 – Ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Chamando de H o ramo da curva acima citado, podemos entendê-lo como o subconjunto do plano formado pelos pontos da forma $(x, 1/x)$, em que $x > 0$. Simbolicamente, temos:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y = \frac{1}{x}\}.$$

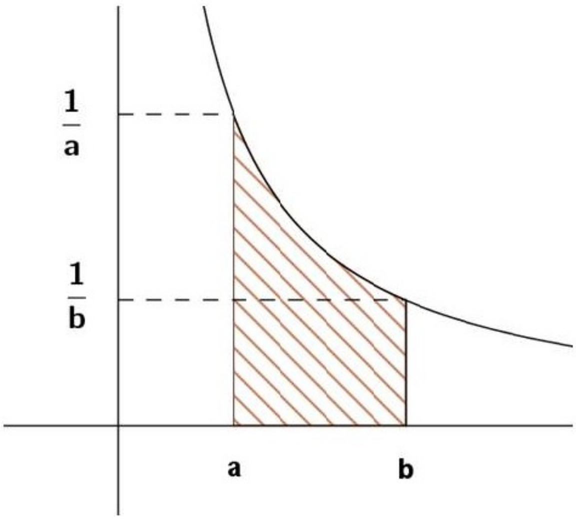
Para mais informações sobre hipérboles, consultar (SANTOS, 2007) e (DELGADO, 2013).

2.2 ÁREA DE UMA FAIXA DE HIPÉRBOLE

Vamos, agora, definir um novo objeto, a *faixa de hipérbole*, cuja área está diretamente associada a abordagem que propomos.

Definição 2.2.1. *Uma faixa de hipérbole é uma porção do plano obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b, com $a < b$, e tomamos a região limitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas, e pelo ramo H. Vamos indicar essa região pelo símbolo H_a^b.*

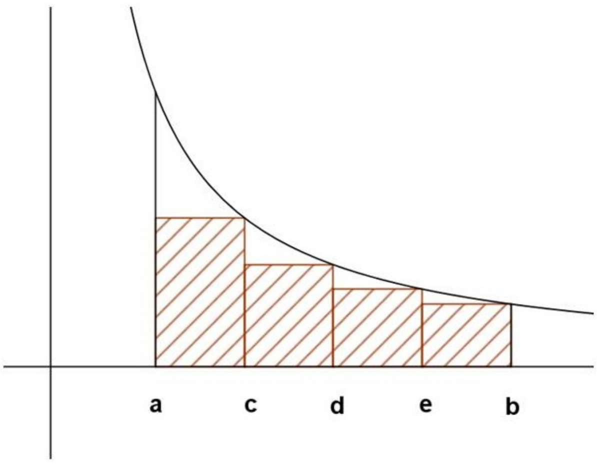
Figura 2 – A região hachurada é a faixa de hipérbole H_a^b



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Precisaremos, neste momento, calcular a área de uma faixa de hipérbole H_a^b. Mostraremos, portanto, um caminho que pode ser seguido para tal fim.

Figura 3 – Poligono retangular inscrito na faixa de hipérbole H_a^b



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Decompor o intevalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos justapostos, através da inserção de pontos intermediários. Para cada um dos intervalos $[c, d]$ da decomposição, (*onde* $c < d$) tomamos o retângulo de altura igual a $1/d$, chamado retângulo inscrito na faixa H_a^b. A reunião desses retângulos inscritos constitui o que chamaremos um *polígono retangular inscrito* na faixa H_a^b, conforme Figura 3.

A área de H_a^b é aproximada (por falta) pelas áreas dos polígonos retangulares nela inscritos. Esta aproximação será tanto melhor quanto mais refinada for a subdivisão de $[a, b]$. Assim, a área de H_a^b é uma cota superior do conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos na faixa. Não é difícil mostrar que a área de H_a^b é a menor entre as cotas superiores do referido conjunto, donde segue a Definição 2.2.2.

Definição 2.2.2. *A área de H_a^b é a menor entre as cotas superiores do conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.*

2.3 PROPRIEDADE FUNDAMENTAL

Com respeito às faixas de hipérbole, o resultado mais importante é o que segue.

Teorema 2.3.1. *Seja qual for o número real $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área.*

Demonstração. Vamos provar inicialmente que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um correspondente em H_{ka}^{kb}, de mesma área.

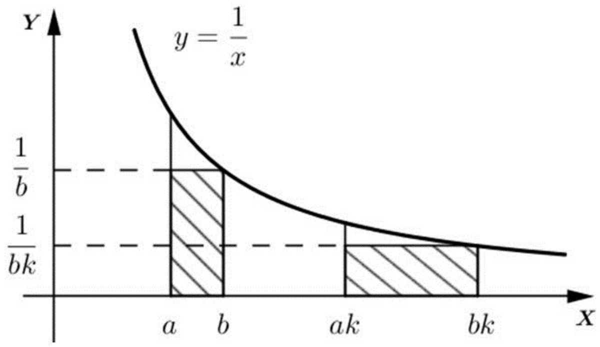
Com base na Figura 4 temos que a área do primeiro retângulo vale

$$(b - a) \cdot \frac{1}{b} = 1 - \frac{a}{b},$$

enquanto a área do segundo retângulo vale

$$(bk - ak) \cdot \frac{1}{bk} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Figura 4 – Os retângulos hachurados têm áreas iguais

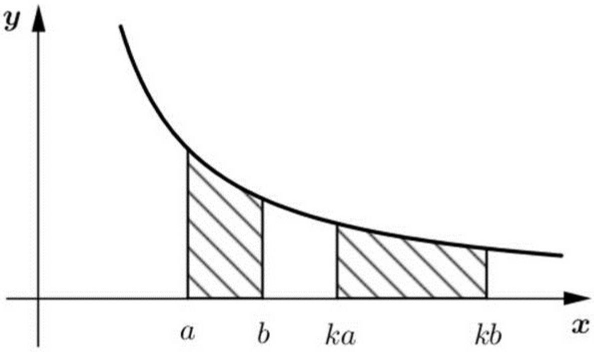


Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Assim, é possível verificar que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um polígono correspondente, de mesma área, inscrito em H_{ka}^{kb}, uma vez que os retângulos correspondentes que os compõe têm áreas iguais.

Logo, as áreas das duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores e, portanto, são iguais. $\square$

Figura 5 – As faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Uma importante consequência deste teorema é a possibilidade de restringirmos nossa análise às áreas das faixas da forma H_1^c, uma vez que

$$\text{Área } (H_a^b) = \text{Área } (H_1^{b/a}) = \text{Área } (H_1^c),\ c = b/a.$$

Quando $0 < a < b < c$, é intuitiva a igualdade que segue, exemplificada na Figura 6 e demonstrada no Apêndice A.

$$\acute{A}rea(H_a^b) + \acute{A}rea(H_b^c) = \acute{A}rea(H_a^c). \tag{1}$$

Por fim, para mantermos a validade da igualdade sobre as faixas de hipérbole expressa em (1), independente da relação de ordem entre a, b e c, convencionaremos que:

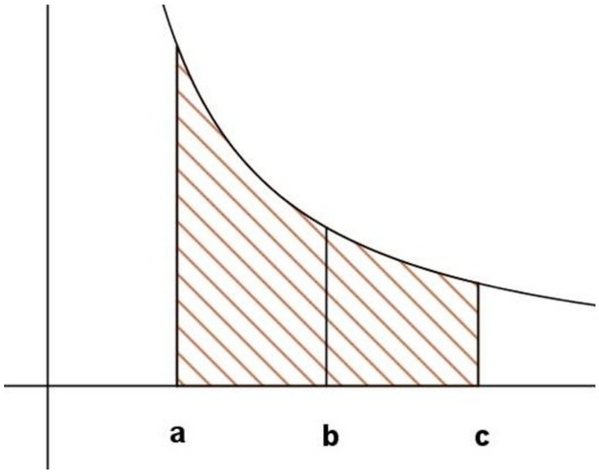
$$\text{Área } (H_a^a) = 0 \text{ e Área } (H_b^a) = - \text{ Área } (H_a^b), \text{ sendo } a < b.$$

É importante ressaltar que as áreas negativas aqui convencionadas devem ser entendidas num sentido de áreas orientadas. Se $a < b$, a área da faixa de hipérbole, de a até b, é positiva, enquanto a área da mesma faixa, de b até a, é negativa.

Por exemplo, se $b < a < c$, segue que

Área (H_b^a) + Área (H_a^c) = Área $(H_b^c) \Rightarrow -$ Área(H_a^b) + Área(H_a^c) = Área$(H_b^c) \Rightarrow$ Área(H_a^b) + Área(H_b^c) = Área(H_a^c).

Figura 6 – Área (H_a^b) + Área (H_b^c) = Área (H_a^c)



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

3 LOGARITMOS NATURAIS

Este capítulo é a parte central do nosso trabalho, uma vez que apresentaremos aqui a definição de logaritmo natural, associada ao conteúdo desenvolvido até então. Definiremos, também, as funções logarítmicas, destacando suas propriedades e o seu gráfico.

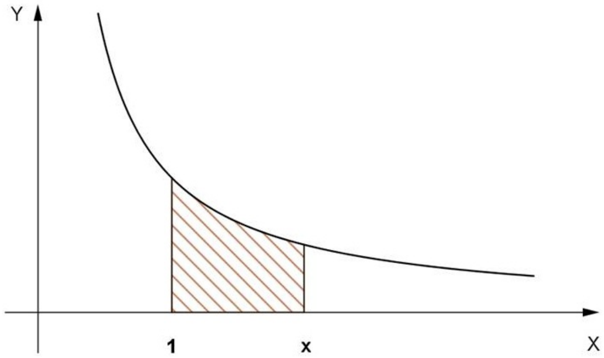
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Iniciamos esta seção definindo o logaritmo natural de um número real positivo.

Definição 3.1.1. *Dado um número real positivo x, definimos o logaritmo natural de x como a área da faixa H_1^x. Assim, escrevendo ln x para indicar o logaritmo natural de x, temos:*

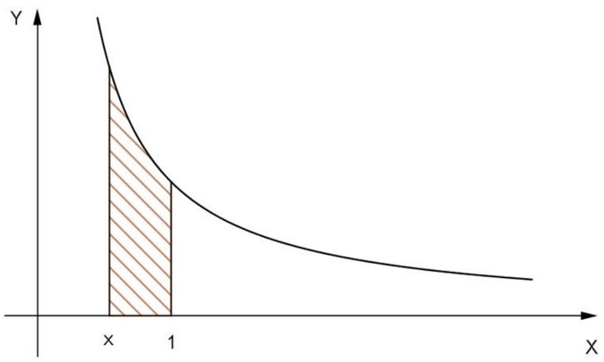
$$ln\ x = \acute{A}rea\ (H_1^x)$$

Figura 7 – A área hachurada vale *ln x*



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 8 – Quando $0 < x < 1$, *ln x* é a área hachurada associada a um sinal menos



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Pelo já posto até agora, é válido que:

- $ln\ 1 = 0$;
- $ln\ x > 0$, se $x > 1$;
- $ln\ x < 0$, se $0 < x < 1$.

3.2 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definimos, desta maneira, a função real *logaritmo natural* $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que a cada número real $x > 0$ faz corresponder seu logaritmo natural, $ln\ x$, acima definido.

Teorema 3.2.1. *A função* $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *goza das seguintes propriedades:*

1. $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$*;*
2. ln *é uma função crescente, ou seja,* $x < y \Rightarrow ln(x) < ln(y)$*.*

Demonstração. É verdade que

$$\text{Área } (H_1^{xy}) = \text{Área } (H_1^x) + \text{Área } (H_x^{xy}),$$

independente da relação de ordem entre os números 1, x *e* xy. Além disso, conforme o Teorema 2.3.1, vale que

$$\text{Área } (H_x^{xy}) = \text{Área } (H_1^y),$$

tomando $k = 1/x$. Logo,

$$\text{Área } (H_1^{xy}) = \text{Área } (H_1^x) + \text{Área } (H_1^y),$$

ou seja,

$$ln\ xy = ln\ x + ln\ y.$$

Para o item 2 temos: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x < y$. Assim, existe um número $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue-se que

$$ln\ y = ln\ a + ln\ x.$$

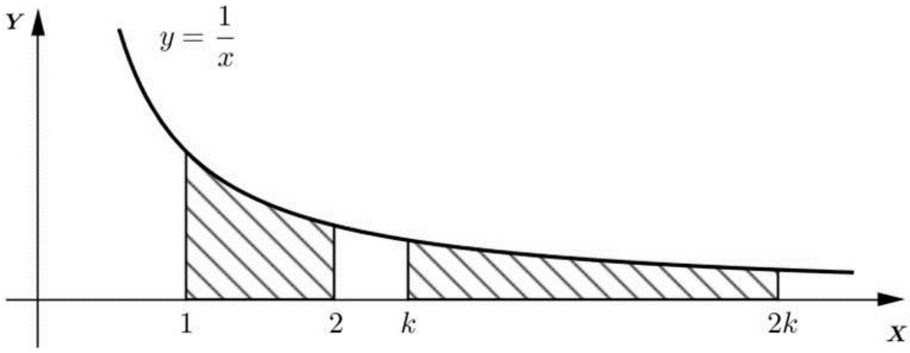
Sendo $a > 1$, temos $ln\ a > 0$, donde $ln\ x < ln\ y$. □

Chamamos de *função logarítmica* toda função que satisfaz as propriedades 1 e 2.

Propomos, agora, uma exemplificação da propriedade 1 das funções logarítmicas:

Vamos mostrar que $ln(2k) = ln(2) + ln(k)$, $k > 1$. Para isso, tomaremos como base a Figura 9.

Figura 9 – As áreas hachuradas são iguais



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Notemos que:

$$ln(2k) = \text{Área}(H_1^{2k}) = \text{Área}(H_1^k) + \text{Área}(H_k^{2k}) = \text{Área}(H_1^k) + \text{Área}(H_1^2)$$

$$= \text{Área}(H_1^2) + \text{Área}(H_1^k) = ln(2) + ln(k).$$

3.3 PROPRIEDADES

Toda função logarítmica goza de algumas propriedades decorrentes das duas principais acima citadas, as quais demonstramos a seguir.

Propriedade 1: A função $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é bijetiva.

A injetividade é obtida diretamente do fato de a função ser crescente.

Para a demonstração da sobrejetividade, indicamos o "método do elemento celestial", que é simples, porém extremamante extenso, presente em (LIMA, 2009).

Propriedade 2: $ln(1/x) = -ln(x)$, para todo $x > 0$.

$$0 = ln\ 1 = ln\ (x\ .\ \frac{1}{x}) = ln\ x + ln(1/x) \implies ln(1/x) = -ln\ x$$

Em termos geométricos, consideremos $x > 1$, donde $0 < 1/x < 1$.

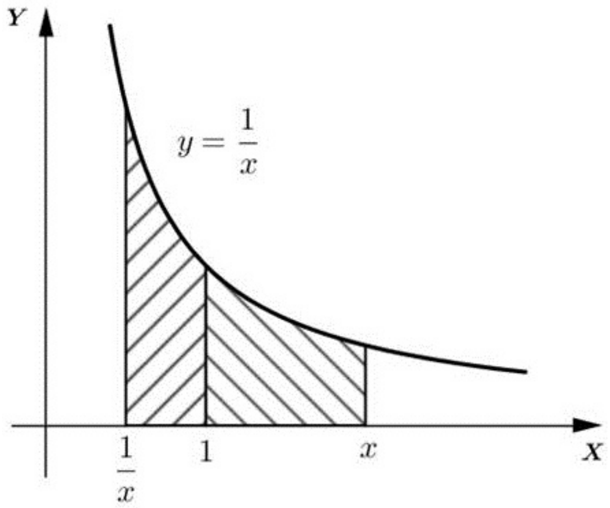
Neste caso,

$$ln(1/x) = \text{Área}\ (H_1^{1/x}) = -\ \text{Área}\ (H_{1/x}^1) = -\ \text{Área}\ (H_1^x) = -\ ln\ x,$$

conforme Teorema 2.3.1, exemplificado na Figura 10.

O caso em que $0 < x < 1$ é análogo.

Figura 10 – Área $(H_{1/x}^{1})$ = Área (H_1^x)



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Propriedade 3: ln $(x^r) = r$. ln (x), para todo $x > 0$ e todo r racional.

Para $r \in \mathbb{Z}^+$, a demonstração é simples e se faz por indução.

Para $r \in \mathbb{Z}^-$ temos:

Dado $x > 0$, $x^r \, . \, x^{-r} = 1$. Logo,

$$0 = ln\ 1 = ln(x^r.\ x^{-r}) = ln(x^r) + ln(x^{-r})$$

$$\implies ln(x^r) = -ln(x^{-r}) = -(-r)ln\ x = r\ ln\ x.$$

Para $r = 0$ temos:

$$ln(x^0) = ln\ 1 = 0 = 0\ .\ ln\ x.$$

Para $r = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$, temos:

Dado $x > 0$ vale que

$$(x^r)^q = x^p.$$

Assim,

$$q\ .\ ln(x^r) = ln[(x^r)^q] = ln(x^p) = p\ .\ ln\ x$$

$$\implies ln(x^r) = \frac{p}{q} \ . \ ln\ x = r\ ln\ x.$$

Propriedade 4: A função $ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é ilimitatda, superior e inferiormente.

Dado $\beta \in \mathbb{R}$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \beta/\ ln\ 2 \implies n.ln2 > \beta \implies ln(2^n) > \beta.$$

Assim, basta tomar $x = 2^n$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, é possível, mediante o exposto acima, encontrar x tal que $ln\ x\ >\ -\alpha$. Logo,

$$-ln\ x < \alpha \implies ln\ y < \alpha,\ y = 1/x.$$

Propriedade 5: Dadas duas funções logarítmicas $L,\ M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c\ .\ L(x)$ para todo $x > 0$.

Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Logo, $L(a^r) = M(a^r)$, para todo r racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que seja $L(b) < M(b)$. Tomemos n natural tal que

$$n\ .\ [M(b) - L(b)] > L(a).$$

Então

$$L(a^{1/n}) < M(b) - L(b).$$

Escrevamos $c = L(a^{1/n})$. Os números $c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots$ dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos de mesmo comprimento c. Pela desigualdade acima, pelo menos um desses números (digamos $m.c$) pertence ao interior do intervalo (L(b),M(b)). Temos que

$$m.c = m\ .\ L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}).$$

Neste caso

$$L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b).$$

Como L e M são crescentes temos que $b < a^{m/n} < b$. Esta contradição mostra que b não existe. Devemos ter, portanto, $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Em termos gerais, consideremos L e M funções logarítmicas arbitrárias e tomemos $c = M(2)/L(2)$. Consideremos, ainda, a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $N(x) = c.L(x)$.

Como $N(2) = c.L(2) = [M(2)/L(2)].L(2) = M(2)$, segue do que foi provado acima que $N(x) = M(x)$, para todo $x > 0$, ou seja, $M(x) = c.L(x)$ para todo $x > 0$.

Neste momento, chamamos a atenção para o tópico *mudança de base*, que pode ser simplificado mediante a condução que sugerimos a seguir.

Uma maneira de resolver , por exemplo, o problema da mudança da base a para a base b é a que segue:

Conforme a Propriedade 5 podemos escrever

$$log_b\ x = c\ .\ log_a\ x,\ para\ todo\ x > 0, para\ algum\ c > 0.$$

Tomando $x = a$ temos:

$$log_b\ a = c\ .\ log_a\ a = c\ .\ 1 = c.$$

Portanto, para transformar um logaritmo escrito na base a para um equivalente na base b devemos usar a constante $c = log_b\ a$.

Reescrevendo a fórmula com o valor de c segue

$$log_b\ x = log_b\ a\ .\ log_a\ x,\ para\ todo\ x > 0$$

Tomando $x = b$ temos

$$log_b\ b = log_b\ a\ .\ log_a\ b \implies 1 = log_b\ a\ .\ log_a\ b \implies log_a\ b\ = 1/\ log_b\ a$$

EXEMPLO: Calcular o valor de $log_3\ 2$, conhecendo $ln\ 3$ e $ln\ 2$.

Pelo já exposto, a constante c que satisfaz a equação

$$log_3\ 2 = c\ ln\ 2$$

é $c = log_3\ e = 1/\ ln\ 3$. Portanto

$$log_3\ 2 = \frac{ln2}{ln3}.$$

3.4 GRÁFICO

O gráfico da função logaritmo natural é o conjunto

$$G = \{(x, ln\ x);\ x > 0\}.$$

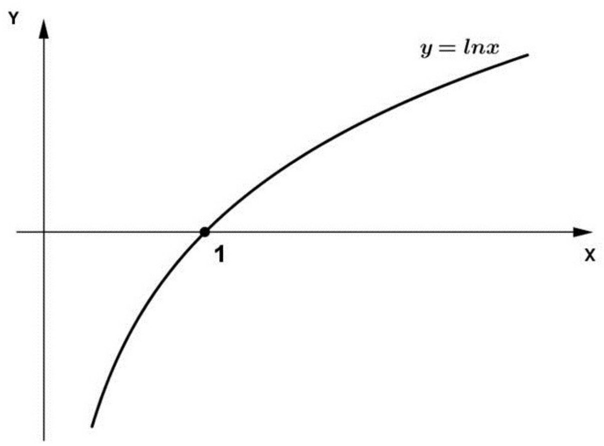
Dado que a função ln é crescente, bijetiva e ilimitada superior e inferiormente, podemos ter uma ideia de seu gráfico.

O fato de ser sobrejetiva faz com que o gráfico tenha pontos cujas ordenadas contemplem todo o eixo y. Quanto mais o x se aproxima de zero (pela direita), mais o y decresce (cresce em módulo, porém com o sinal negativo), tornando-se tão pequeno (grande em módulo, com sinal negativo) quanto se deseje. Analogamente, quando o x cresce indefinidamente, o y torna-se tão grande quanto se deseje.

Assim, o gráfico deve estar situado no primeiro e quarto quadrantes, tendo o eixo y (reta $x = 0$) como assíntota vertical, além de intersectar o eixo x em $x = 1$.

O único ponto que nos escapa, neste momento, está relacionado à concavidade da curva, fato que definiremos e trataremos no próximo capítulo. Apresentamos, na Figura 11, um esboço do referido gráfico.

Figura 11 – Gráfico de $y = ln\ x$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

4 APLICAÇÕES E IMPLICAÇÕES

Neste capítulo, veremos como esta abordagem favorece a resolução de alguns exercícios devido ao forte apelo geométrico a ela intrínseco. Uma prática que pode ser enriquecedora é a tentativa de resolução das mesmas atividades, utilizando a abordagem tradicionalmente empregada.

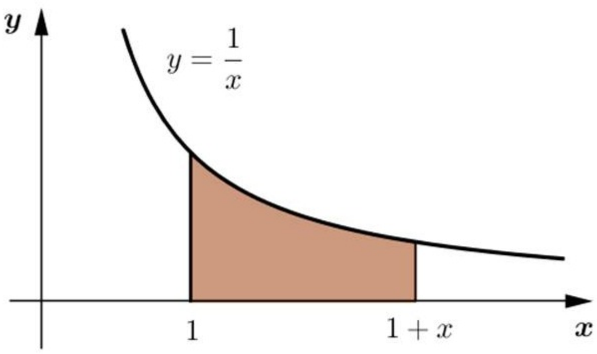
4.1 UMA DESIGUALDADE ESTRANHA, PORÉM VERDADEIRA

Um resultado extremamente simples, obtido a partir da interpretação geométrica dos logaritmos aqui apresentada, e que pode tornar-se complicado mediante a utilização de outras abordagens é a desigualdade

$$\frac{x}{1+x} < ln(1+x) < x,\ \ x \in \mathbb{R}^{+}.$$

Pela definição de logaritmo natural aqui exposta, $ln(1+x)$ é a área representada na Figura 12.

Figura 12 – A área preenchida vale $ln(1+x)$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

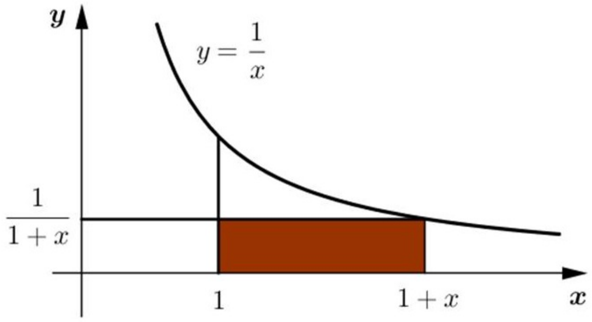
Para a primeira parte da desigualdade devemos associar a área acima expressa com o número $x/(1+x)$. Melhor seria, para nós, a possibilidade de representar tal número também por uma área vinculada à curva $y = 1/x$, para conseguirmos uma comparação direta entre os valores. O ponto positivo é que tal representação é possível, como mostra a Figura 13.

Notemos que a área do retângulo vale $[(1+x)-1].\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Fica, então, comprovada a primeira parte da desigualdade, como reforçado pela Figura 14, que traz as duas áreas acima citadas.

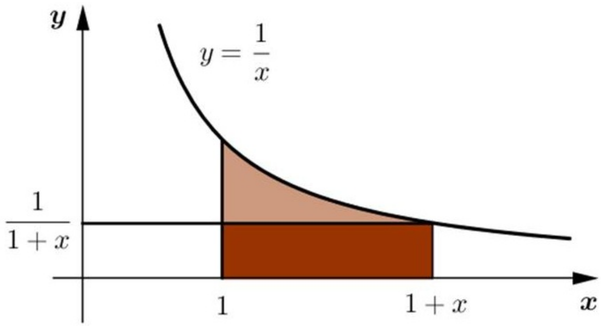
Vamos proceder de forma análoga para mostrar a segunda parte da desigualdade, buscando uma área associada ao número x, que nos permita uma comparação fácil com as

Figura 13 – A área preenchida vale $\frac{x}{1+x}$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

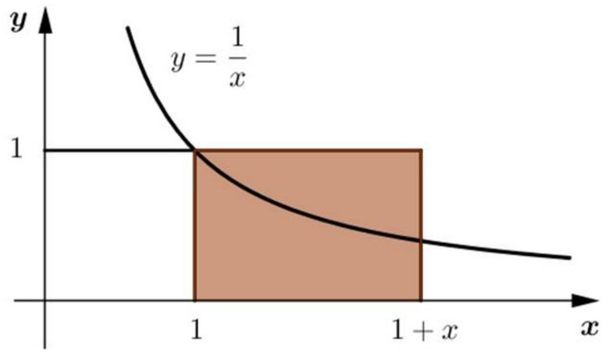
Figura 14 – Prova geométrica da primeira parte da desigualdade



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

outras áreas já expressas. Se observarmos a Figura 15, perceberemos que a área preenchida vale exatamente x.

Figura 15 – A área preenchida vale x

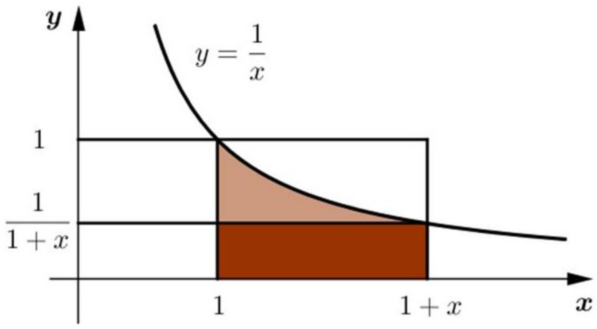


Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Reparemos que a área do retângulo vale $[(1+x)-1].1 = x$, e que extrapola a área da faixa de hipérbole (que vale $ln(1+x)$).

Diante do exposto, poderíamos retratar a desigualdade com uma única figura, apresentada a seguir (Figura 16).

Figura 16 – $\frac{x}{1+x} < ln(1+x) < x$



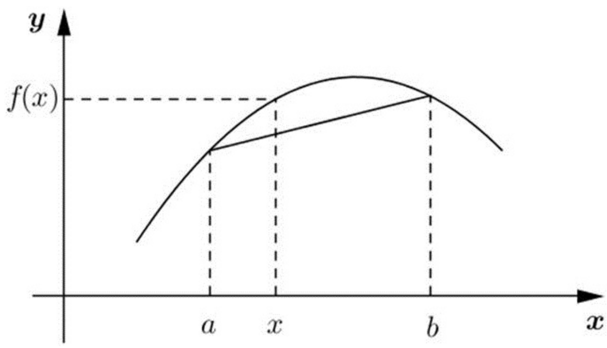
Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

4.2 A CONCAVIDADE DA CURVA $y = ln\ x$

Vamos demonstrar alguns resultados que nos permitirão concluir se a função $y = ln\ x$ é côncava (concavidade voltada para baixo) ou convexa (concavidade voltada para cima). Na realidade, diante da Figura 11, já sabemos que a referida função é côncava. Iremos, portanto, demonstrar tal fato.

Definição 4.2.1. *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, chama-se côncava quando, para quaisquer pontos $a,\ b$ em I, com $a < b$, a parte do gráfico de f situada sobre o intervalo (a, b) está acima do segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ no plano.*

Figura 17 – Função côncava



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

A equação reduzida da reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .\ (x - a).$$

Reparemos que, se f é côncava em (a, b), devemos ter, para $a \le x \le b$

$$f(x) \ge f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ .\ (x - a).$$

em função da definição posta.

Portanto, estamos interessados em mostrar que

$$ln\ x \geq\ ln\ a + \frac{(ln\ b\ -\ ln\ a)}{(b-a)}\ .\ (x-a),$$

ou seja,

$$\frac{(ln\ b\ -\ ln\ a)}{(b-a)}\ .\ (x-a) + ln\ a \leq\ ln\ x.$$

Considerando que todos os termos da expressão são positivos, deveremos ter:

$$\frac{(ln\ b\ -\ ln\ a)}{(b-a)}\ .\ (x-a) \leq\ (ln\ x\ -\ ln\ a),$$

que resulta em

$$\frac{(ln\ b\ -\ ln\ a)}{(ln\ x\ -\ ln\ a)}\ \leq\ \frac{(b-a)}{(x-a)}. \qquad (*)$$

Assim, se conseguirmos mostrar a desigualdade $(*)$, poderemos concluir que a função *ln* é, de fato, côncava. Para tal, segue a Proposição 4.2.1.

Proposição 4.2.1. *Sejam $a \leq x \leq b$ números positivos. Então, é verdade que:*

$$\frac{(ln\ b - ln\ a)}{(ln\ x - ln\ a)} \leq \frac{(b-a)}{(x-a)}.$$

Demonstração. Para fixar as ideias, vamos trabalhar com a hipótese de que

$$1 < a < x < b.$$

Os demais casos são análogos.

Podemos, assim, embasar nossa argumentação no esquema da Figura 18.

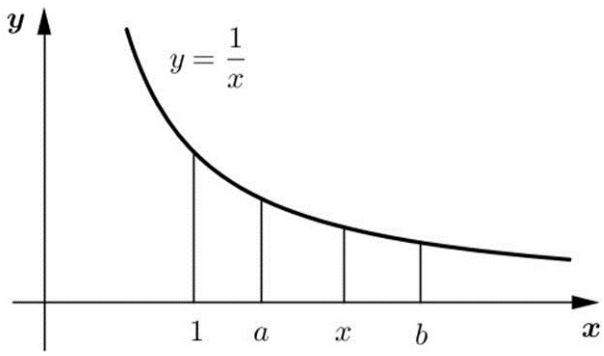
Seguem, destacadas abaixo (Figura 19 e Figura 20), as áreas correspondentes aos números $(ln\ b\ -\ ln\ x)$ e $(b-x)/x$, respectivamente, cuja análise se faz essencial para a obtenção do resultado proposto.

Analisando-as, é possível concluir que

$$(ln\ b\ -\ ln\ x)\ \leq\ \frac{(b-x)}{x}. \qquad (1)$$

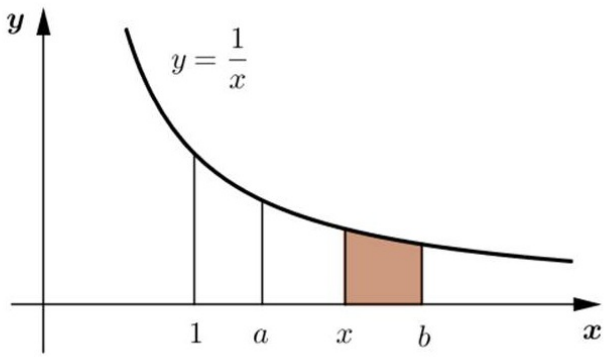
De maneira análoga, mediante a análise da Figura 21, podemos concluir que

Figura 18 – Relação de ordem adotada



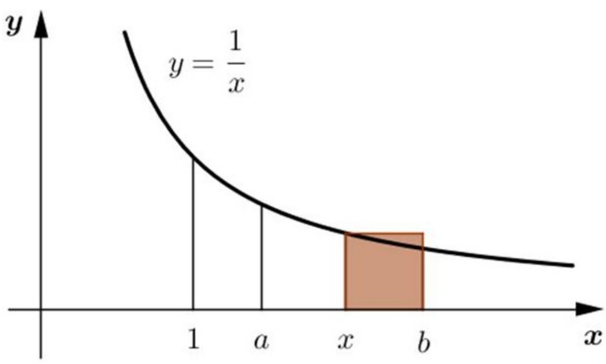
Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 19 – A área destacada vale $(ln\ b - ln\ x)$



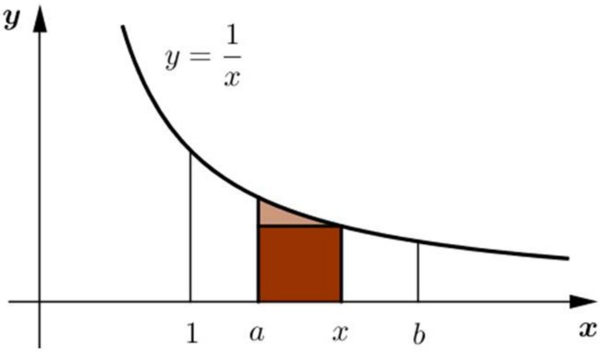
Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 20 – A área destacada vale $(b - x)/x$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 21 – A área da faixa de hipérbole é maior que a área do retângulo



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

$$(ln\ x\ -\ ln\ a)\ \geq\ \frac{(x-a)}{x}. \tag{2}$$

Diante da desigualdade (2) e considerando que todos os termos são positivos, segue que:

$$\frac{1}{(ln\ x\ -\ ln\ a)}\ \leq\ \frac{x}{(x-a)}. \tag{3}$$

Multiplicando, membro a membro, (1) e (3) temos:

$$\frac{(ln\ b\ -\ ln\ x)}{(ln\ x\ -\ ln\ a)}\ \leq\ \frac{(b-x)}{(x-a)}$$

$$\implies \frac{(ln\ b\ -\ ln\ x)}{(ln\ x\ -\ ln\ a)}+1\ \leq\ \frac{(b-x)}{(x-a)}\ +\ 1$$

$$\implies \frac{(ln\ b\ -\ ln\ x)\ +\ (ln\ x\ -\ ln\ a)}{(ln\ x\ -\ ln\ a)}\ \leq\ \frac{(b-x)\ +\ (x-a)}{(x-a)}$$

$$\implies \frac{(ln\ b\ -\ ln\ a)}{(ln\ x\ -\ ln\ a)}\ \leq\ \frac{(b-a)}{(x-a)}. \tag{4}$$

$\square$

4.3 UM RESULTADO SURPREENDENTE

Quando olhamos para a soma

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

um pensamento natural é que este valor, embora formado por uma infinidade de parcelas, seja limitado, uma vez que as parcelas diminuem, tornando-se tão pequenas quanto se deseje. Entretanto, de maneira surpreendente, as somas parciais

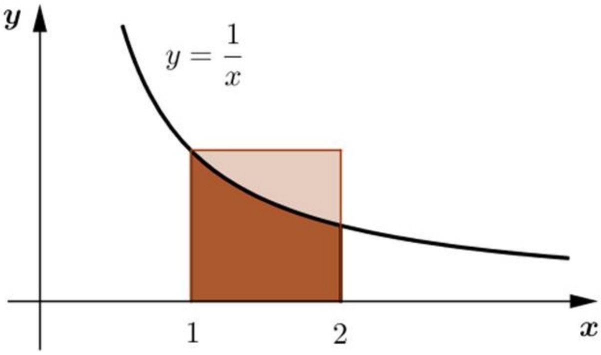
$$S_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$$

tornam-se tão grandes quanto desejarmos, superando qualquer limite estabelecido, fornecendo o famoso resultado: *a série harmônica é divergente.*

Mostrando que $S_p > ln(p+1)$ já garantimos o intento, uma vez que a função logaritmo natural é ilimitada superiormente. Faremos a demostração por indução.

Reparemos que $S_1 > ln(2)$, conforme a Figura 22.

Figura 22 – $S_1 = 1 =$ área do retângulo $>$ área da faixa de hipérbole $= ln(2)$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para $(p-1) \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_{p-1} > ln(p)$, e vamos provar que o resultado também é válido para $p \in \mathbb{N}$, ou seja, $S_p > ln(p+1)$.

Assim, estamos partindo da seguinte desigualdade:

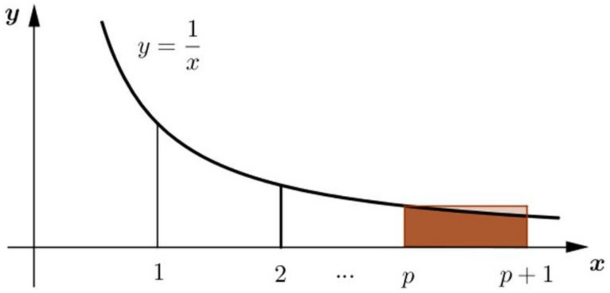
$$S_{p-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} > ln(p)$$

O que devemos acrescentar ao primeiro membro da desigualdade para que ele se torne o número S_p é a parcela $1/p$. Por outro lado, para que $ln(p)$ se torne $ln(p+1)$, devemos acrescentar o valor $[ln(p+1) - ln(p)]$, que equivale à Área(H_p^{p+1}). Conforme a Figura 23, temos que $1/p >$ Área(H_p^{p+1}).

Portanto, $S_p > ln(p+1)$, provando o resultado.

Para uma demosntração usando análise matemática, consultar (LIMA, 2010).

Figura 23 – $1/p \; > \; H_p^{p+1}$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

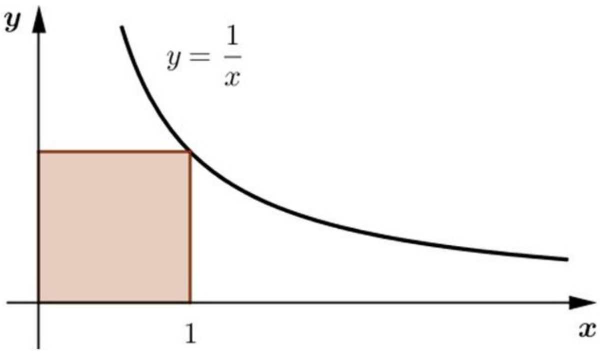
4.4 UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Para encerrar este capítulo apresentaremos, nesta seção, um problema simples de otimização, cuja resolução mais uma vez é facilitada pela abordagem que ora adotamos.

Qual a maior área possível para um retângulo inscrito no gráfico da função $y = 1/x$, se um de seus lados verticais tem abscissa 1?

Existem infinitos retângulos que atendem a tais condições. O único, porém, que tem um dos lados verticais com abscissa menor que 1 é o que segue na Figura 24, cuja área vale exatamente 1.

Figura 24 – A área do retângulo vale 1



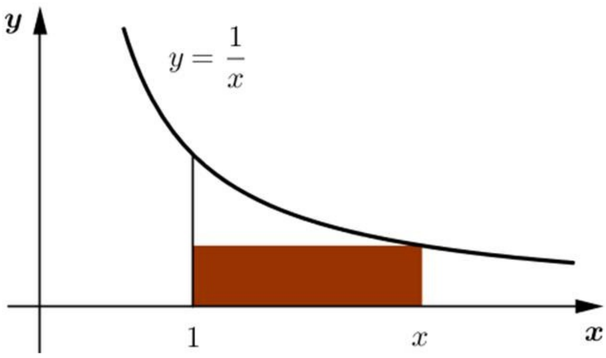
Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Os demais retângulos inscritos no gráfico têm área menor que 1, conforme Figura 25.

De fato, a área do retângulo destacado vale $(x - 1)/x = 1 - (1/x) \; < \; 1$.

Portanto, a maior área possível vale 1.

Figura 25 – A área do retângulo vale $(x-1)/x$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

5 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo propomos algumas atividades que poderiam ser feitas com os alunos, a fim de melhor compreenderem a abordagem proposta e se enriquecerem diante de novas ferramentas. Destacamos, em especial, o software Geogebra, que traz múltiplas possibilidades para o professor, sendo um instrumento eficaz no desenvolvimento de alguns assuntos em sala de aula.

5.1 CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE $y = 1/x, \ x \ > \ 0$

No desenvolvimento da teoria de funções, é comum observarmos uma prática inadequada por parte dos professores: a apresentação de gráficos como um axioma. Não existe, em grande parte das vezes, o cuidado em fazer com que o aluno perceba o comportamento de uma função e se convença da forma do respectivo gráfico.

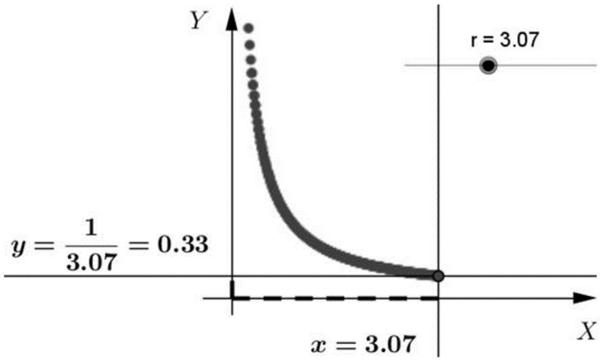
Nesse sentido, o software citado pode auxiliar, uma vez que mostra o passo-a-passo da construção de um gráfico.

Para a curva em questão sugerimos a seguinte rotina no Geogebra:

- criar um controle deslizante r, que representará os valores do domínio da função (números reais positivos);
- criar o ponto $A = (r, 0)$, cuja abscissa corresponde ao valor selecionado no controle deslizante;
- criar o ponto $B = (0, 1/r)$, cuja ordenada é a imagem de r pela função $y = 1/x$;
- traçar a reta s, perpendicular ao eixo X, passando por A;
- traçar a reta t, perpendicular ao eixo Y, passando por B;
- marcar o ponto C de interseção entre s e t;
- habilitar o rastro de C;
- ativar a animação do controle deslizante.

Uma prática interessante é elaborar o aplicativo na presença dos alunos, conversando sobre cada um dos objetos e discutindo os conceitos envolvidos no processo.

Figura 26 – Aplicativo do Geogebra



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

5.2 O SUPREMO DE UM CONJUNTO

Nesta seção iremos propor mais uma atividade com o uso do Geogebra, que objetiva levar o aluno a desenvolver a ideia do supremo (menor das cotas superiores) de um conjunto.

Iremos tratar, especificamente, do supremo do conjunto A={áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b}, que foi definido como sendo exatamente a Área(H_a^b).

A atividade consiste em montar um aplicativo que mostre ao aluno a seguinte desigualdade:

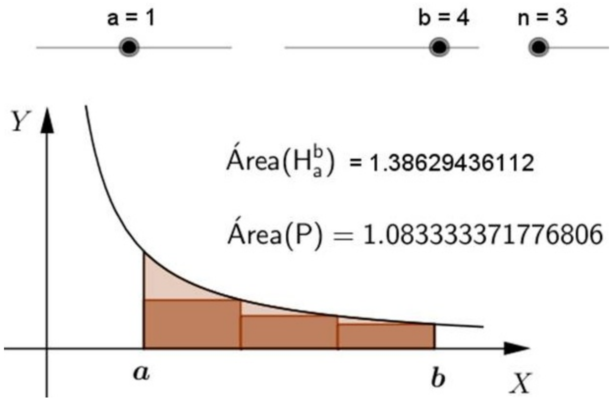
$$\text{Área}(H_a^b) > \text{Área}(P),\ \forall\ P \ \epsilon\ \text{A}.$$

A rotina sugerida é a que segue:

- criar três controles deslizantes, a, b e n, para controlar os valores associados á faixa e o número de retângulos componentes de P;
- traçar a curva $y = 1/x$;
- criar a faixa H_a^b;
- obter o valor da Área(H_a^b), mediante a ferramenta *Integral* (obtida no campo de Entrada), especificando os limites a e b;
- criar a $SomaDeRiemannInferior$, especificando os limites a e b e o número de retângulos n, para a obtenção de P;
- variar o valor de n e observar a veracidade da igualdade acima expressa.

É interessante observar que mesmo com o aumento do número de retângulos componentes de P, a área da faixa de hipérbole é sempre maior que a área do polígono inscrito.

Figura 27 – P é formado por 3 retângulos



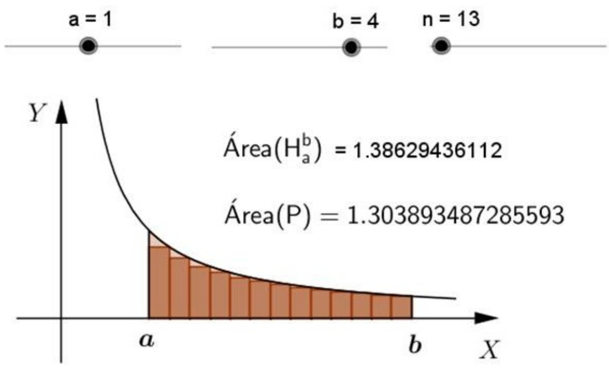
Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Vale comentar que, dado qualquer número real $\epsilon > 0$, por menor que ele seja, é possível conseguir um polígono inscrito P cuja área atende à relação:

$$\text{Área}(H_a^b) - \epsilon < \text{Área}(P) < \text{Área}(H_a^b).$$

Com o aumento de n, chega um ponto em que não conseguimos mais visualizar os retângulos componentes de P com nitidez, mas a relação entre as áreas permanece válida.

Figura 28 – P é formado por 13 retângulos

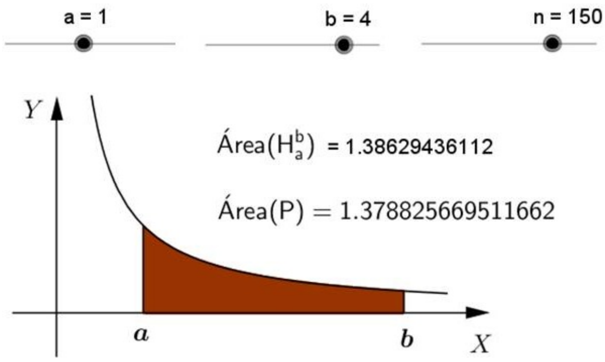


Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

As Figuras 28 e 29 são oriundas do mesmo aplicativo. Uma traz o polígono inscrito P formado por 13 retângulos, enquanto a segunda é obtida com um número significativamente maior de retângulos, recaindo na situação acima descrita.

O número de retângulos pode ser tão grande quanto desejarmos, bastando ajustar o controle deslizante referente a n, em suas propriedades.

Figura 29 – P é formado por 150 retângulos



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

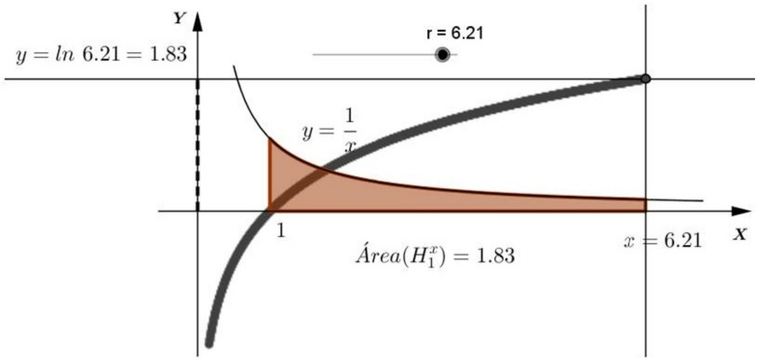
5.3 CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE $y = ln\ x$

Apresentamos, a seguir, a rotina sugerida para o Geogebra para a construção do gráfico da função logaritmo natural.

- criar um controle deslizante r, que representará os valores do domínio da função (números reais positivos);
- traçar a curva $y = 1/x$, $x > 0$, selecionando os intervalos do domínio, se necessário;
- criar a faixa H_1^r;
- obter o valor da Área$(H_1^r) = s$, mediante a ferramenta $Integral$ (obtida no campo de Entrada), especificando os limites 1 e r;
- criar o ponto $A = (r, 0)$, cuja abscissa corresponde ao valor selecionado no controle deslizante;
- criar o ponto $B = (0, s)$, cuja ordenada é a imagem de r pela função $y = ln\ x$;
- traçar a reta t, perpendicular ao eixo X, passando por A;
- traçar a reta u, perpendicular ao eixo Y, passando por B;
- marcar o ponto C de interseção entre t e u;
- habilitar o rastro de C;
- ativar a animação do controle deslizante.

Mais uma vez reforçamos a importância de conversar com os alunos a respeito da construção do aplicativo, indicando cada um dos objetos e explicando su significado no processo de confecção do referido gráfico.

Figura 30 – Gráfico de $y = ln\ x$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

5.4 ENCONTRANDO O NÚMERO e

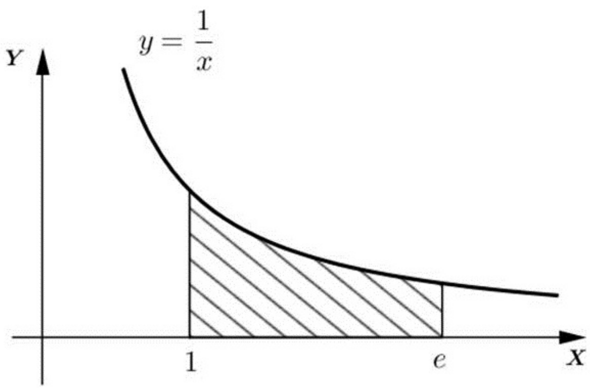
Um dos números mais famosos da matemática é o número de Euler, que pode ser definido de diversas maneiras. A mais apropriada ao nosso contexto é a que segue.

Definição 5.4.1. *O número e é o número real maior que 1 que satisfaz a seguinte igualdade:*

$$ln(e) = 1$$

Em todo sistema L de logaritmos, o número $a > 1$ que satisfaz $L(a) = 1$ é chamado base do sistema de logaritmos.

Figura 31 – A área hachurada vale 1



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

A atividade proposta se faz com a utilização do Geogebra e consiste em identificar o valor real de x que fornece $ln\ x = 1$.

A rotina sugerida é a que segue:

- criar um controle deslizante r, que representará os valores do domínio da função (números reais positivos);
- traçar a curva $y = 1/x$, $x > 0$, selecionando os intervalos do domínio, se necessário;
- criar a faixa H_1^r;
- obter o valor da Área$(H_1^r) = s$, mediante a ferramenta *Integral* (obtida no campo de Entrada), especificando os limites 1 e r;
- mover o controle deslizante até obter o valor da área igual a 1.

Como o número e é irracional este processo é aproximado, de modo que sugerimos que seja mostrado aos alunos o intervalo no qual se encontra o referido valor.

De maneira objetiva, pode-se mostrar que

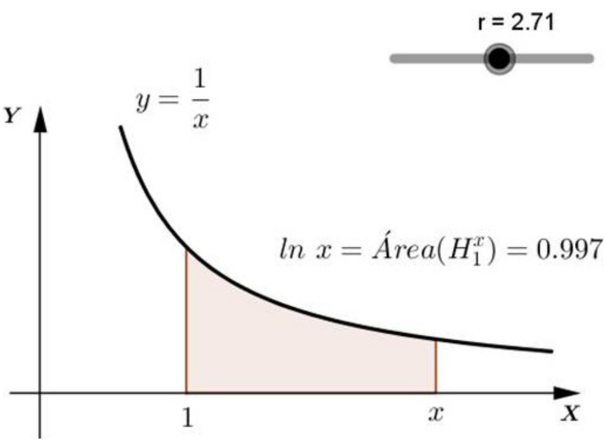
$$ln(2.71) < 1 \text{ e } ln(2.72) > 1,$$

de modo que devemos ter

$$2.71 \; < \; e \; < \; 2.72.$$

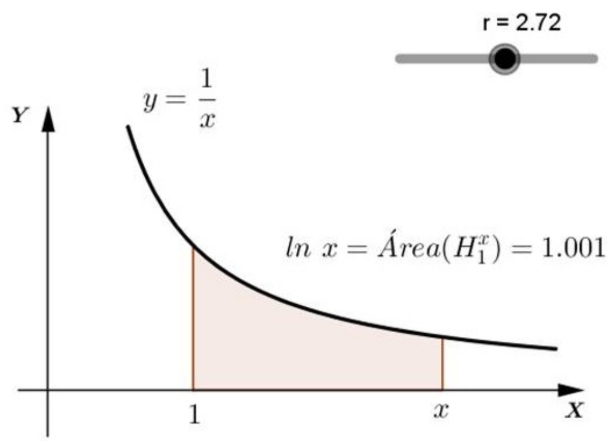
Uma das grandes vantagens desta abordagem é o fato de darmos a devida importância ao número e, o que não ocorre na abordagem tradicionalmente usada.

Figura 32 – ln 2.71 < 1



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 33 – ln 2.72 > 1



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo faremos alguns comentários sobre pontos de relevante interesse associados a este trabalho. Serão discussões de caráter menos aprofundado, cujo objetivo é traçar diretrizes para o prosseguimento das atividades em sala de aula, e não discorrer de maneira detalhada sobre cada tópico.

6.1 RECONCILIAÇÃO DE ABORDAGENS

Faremos, neste momento, uma reconciliação dos caminhos usados no desenvolvimento da teoria de logaritmos. Se, até o presente , a expressão $ln\ x,\ x > 0$ representa uma área, mostraremos que ela também representa um expoente, conforme a abordagem comumente usada.

Teorema 6.1.1. *Seja r um número racional. Tem-se $y = e^r$ se, e somente se, $ln\ y = r$.*

Demonstração. Vamos fazer a ida e a volta.

($\Longrightarrow$) $y = e^r \implies ln\ y = ln\ e^r = r\ ln\ e = r\ .\ 1 = r$

($\Longleftarrow$) Seja $y > 0$ tal que $ln\ y = r$. Como $ln(e^r) = r$ e ln é uma função bijetiva, temos que $y = e^r$.

□

6.2 INTRODUÇÃO À FUNÇÃO EXPONENCIAL

É interessante observar que, nesta abordagem, a ordem de apresentação da funções logarítmica e exponencial foi alterada, se comparada aos tratamentos tradicionais dos conteúdos. Isto, porém, nos traz um ganho enorme que é a possibilidade de tratarmos de potências de expoente irracional, como faremos agora, segundo a Definição 6.2.1.

Definição 6.2.1. *Dado o número real x, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural vale x.*

A existência e a unicidade acima referidos são garantidos pela bijetividade da função logaritmo natural.

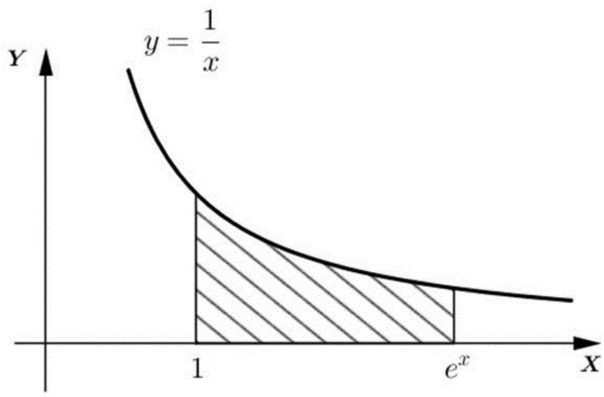
Geometricamente, $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa H_1^y tenha área x.

Mediante as novas definições e análise da Figura 34 temos:

- $e^x > 0$ para todo x;

- $x > 0 \implies e^x > 1$
- $x < 0 \implies e^x < 1$

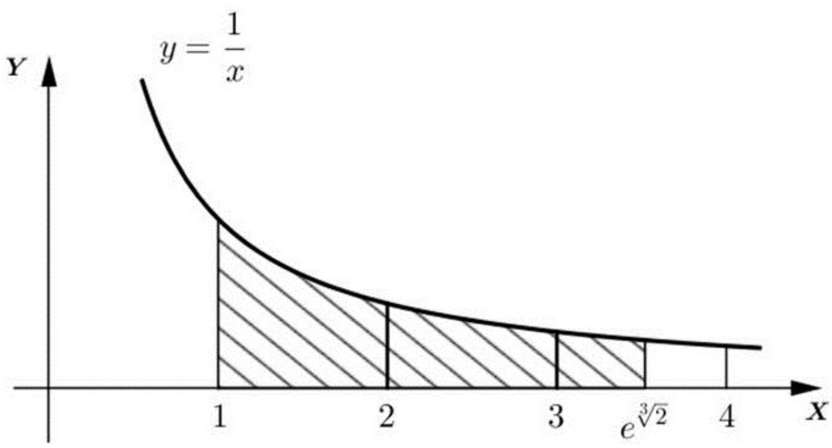
Figura 34 – A área hachurada vale x



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Vemos, na Figura 35, a representação geométrica que nos fornece o número $e^{\sqrt[3]{2}}$.

Figura 35 – A área hachurada vale $\sqrt[3]{2}$



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

6.3 PLANEJAMENTO DE AULAS

Sugerimos o seguinte cronograma para a apresentação desta proposta em sala de aula:

- Hipérbole, Faixa de Hipérbole e Propriedade Fundamental: 3 aulas
- Definição de Logaritmo Natural, Função Logarítmica e propriedades: 3 aulas
- Exemplos, resultados e aplicações: 2 aulas

A partir daí, após estas duas semanas, se daria a continuidade do conteúdo, com os itens deste capítulo e os demais pontos subsequentes da ementa.

REFERÊNCIAS

DELGADO, J. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, E. L. *Análise Real volume 1, Funções de Uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

SANTOS, R. de J. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2007.

APÊNDICE A – Igualdade (1), Seção 2.3, Capítulo 2

Vamos fazer aqui a demonstração formal do resultado mencionado no título deste apêndice.

Para tal, vamos precisar da Definição A.0.1

Definição A.0.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se* ***supremo*** *(sup)do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:*

S_1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

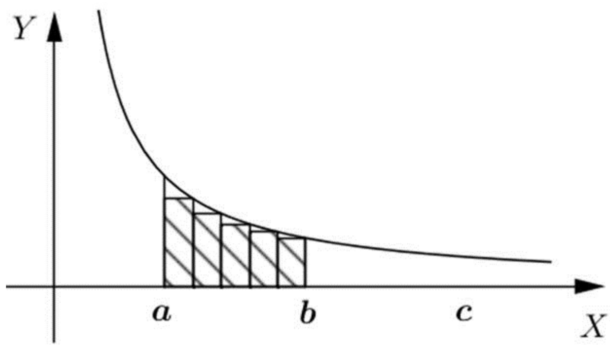
S_2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \varepsilon X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Definido o supremo de um conjunto, tomemos $0 < a < b < c$ e mostremos que:

$$\text{Área } (H_a^b) + \text{Área } (H_b^c) = \text{Área } (H_a^c).$$

Podemos interpretar um *polígono retangular inscrito* em H_a^b e um *polígono retangular inscrito* em H_b^c como um único *polígono retangular inscrito* em H_a^c. Desta maneira, a soma de um elemento de A= {conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b} com um elemento de B= {conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_b^c} produz um elemento de C={conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^c}, conforme Figuras 36, 37 e 38.

Figura 36 – Área(H_a^b)

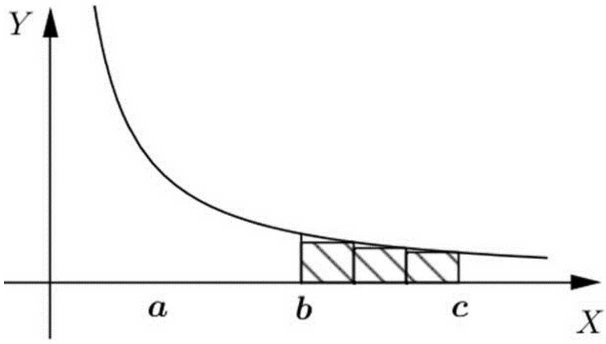


Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

A discussão acima mostra que o conjunto $A + B = \{x = u + v; u \in A \text{ e } v \in B\}$ está contido no conjunto C.

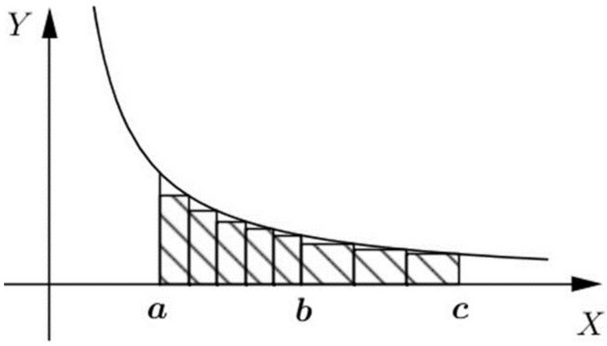
Além disso, sendo $s_a = \text{sup(A)}$ e $s_b = sup(B)$, vamos mostrar que $sup(A + B) = s_a + s_b$.

Figura 37 – Área(H_b^c)



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 38 – Área(H_a^c)



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

É fácil ver que $s_a + s_b$ é uma cota superior de A+B. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ u \in A$ e $v \in B$; $s_a - \frac{\varepsilon}{2} < u < s_a$ e $s_b - \frac{\varepsilon}{2} < v < s_b$, pela definição de supremo de um conjunto. Logo, segue que:

$$(s_a + s_b) - \varepsilon < u + v < (s_a + s_b).$$

Conluímos, assim, que $s_a + s_b$ é a menor das cotas superiores de A+B, ou seja, $sup(A + B) = s_a + s_b$.

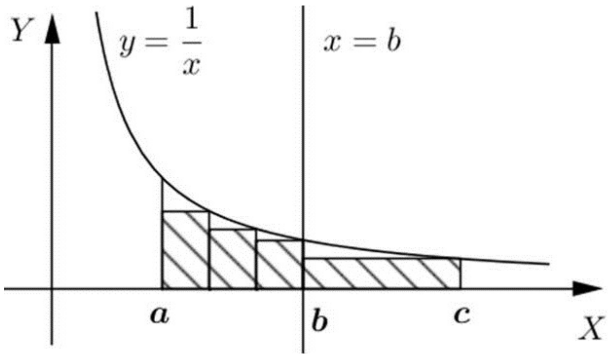
Desta maneira, concluímos que $s_a + s_b \leq sup(C)$.

Por outro lado, quando consideramos um polígono retangular inscrito em H_a^c, temos duas possibilidades:

1) A reta vertical $x = b$ contém parte da fronteira de dois retângulos que compõe o polígono, conforme Figura 39;

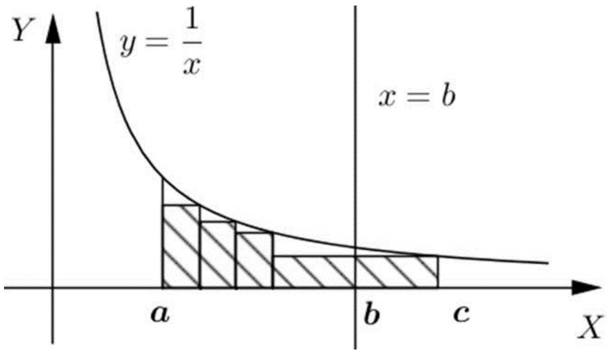
2) A reta vertival $x = b$ secciona um retângulo do referido polígono, conforme Figura 40.

Figura 39 –



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Figura 40 –

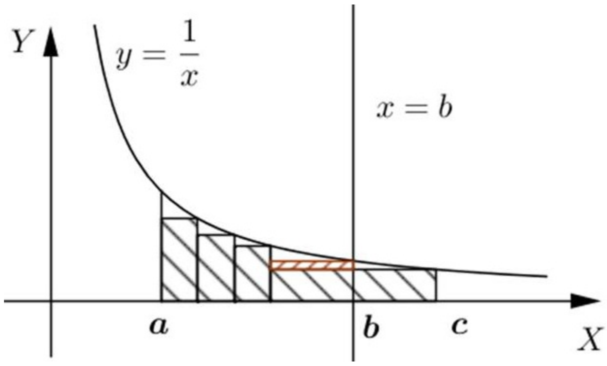


Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

No primeiro caso, é imediato considerarmos o polígono retangular inscrito em H_a^c como dois polígonos retangulares, um inscrito em H_a^b e o outro em H_b^c.

No segundo caso, é possível obtermos dois polígonos retangulares, um inscrito em H_a^b e o outro em H_b^c, tais que a soma das áreas dos dois seja maior que a área do polígono retangular inscrito em H_a^c, conforme Figura 41.

Figura 41 –



Fonte: Figura produzida pelo próprio autor.

Dainte do exposto, dado qualquer elemento de $y \epsilon C$, é possível exibirmos um elemento $x = u + v$ de A+B tal que $y < x$. Logo, devemos ter $sup(C) \ \leq \ s_a + s_b$.

Portanto, é verdade que $sup(C) = s_a + s_b$.

Da Definição 1.2.2 segue que $sup(C) = \acute{A}rea(H_a^c)$, $s_a = \acute{A}rea(H_a^b)$ e $s_b = \acute{A}rea(H_b^c)$, ficando provado o resultado.