UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Lenilson do Carmo Ferreira

O USO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO AUXÍLIO DO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA

Juiz de Fora

2023

Lenilson do Carmo Ferreira

O USO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO AUXÍLIO DO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ferreira, Lenilson do Carmo.
O USO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO AUXÍLIO DO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA / Lenilson do Carmo Ferreira. – 2023.
100 f. : il.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS. MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT), 2023.

1. Geometria plana. 2. Resolução de problemas. 3. Teorema dos carpetes. I. Mazorche, Sandro Rodrigues, orient. II. Título.

Lenilson do Carmo Ferreira

O uso de resolução de problemas no auxílio do ensino da geometria plana

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 23 de março de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof[a]. Dr[a]. Valéria Mattos da Rosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Universidade Federal de São João del-Rei

Juiz de Fora, 20/03/2023.

Dedico este trabalho ao meu pai e amigo, que sempre me incentivou, aconselhou e torceu por mim, mas que infelizmente não está mais aqui para ver a conclusão do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Luiz e Cida, que sempre me incentivaram aos estudos.

Agradeço ao IMPA e à SBM, por ofertar essa modalidade e possibilidade de mestrado a professores que, por alguma circunstância na vida, não puderam dar prosseguimento aos estudos pela via tradicional logo após a graduação.

Agradeço à UFJF por ter aderido ao programa PROFMAT e permitido que alunos e professores da região pudessem ter essa evolução em suas carreiras.

Agradeço aos colegas de turma, que dividiram histórias, precupações, angústias, tristezas, sonhos e alegrias no decorrer do curso.

Agradeço a todos os professores do curso que, de uma forma ou de outra, cada um com seu jeito particular, contribuíram para o conhecimento adquirido durante o mesmo, e consequente realização deste trabalho.

Agradeço em especial ao meu orientador, Sandro, pela enorme paciência e constante incentivo, dignos de um verdadeiro Mestre.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um material que inicie ou incentive a prática de resolução de problemas por meio de desafios geométricos. Tal iniciativa surgiu a partir da observação de uma falta de incentivo maior em volta do tema de geometria, tema este que é bastante cobrado em níveis mais elevados para seleções de colégios e escolas públicas importantes, além da própria Olimpíada Brasileira de Matemática. Além disso, o tema de geometria é um dos fundamentos da área de matemática segundo a Base Nacional Comum Curricular, sendo mais uma vez reconhecida sua grande importância para a formação tanto de alunos como de professores. Seja para um grupo discente, seja para um grupo docente, são apresentados problemas de geometria plana de diversos níveis, além de conceitos teóricos necessários para uma solução dos mesmos. Num primeiro momento são apresentados conceitos mais abordados nas escolas em geral, e em outra oportunidade são apresentados conceitos menos conhecidos, como teorema de Menelaus, de Ceva, Relação de Stewart, Lúnulas de Hipócrates, teorema dos carpetes e relação entre áreas e cevianas num triângulo. Tudo isso para aumentar a bagagem de ferramentas que auxiliam na resolução de problemas.

Palavras-chave: Geometria plana. resolução de problemas. Teorema dos carpetes. Lúnulas. Stewart. Menelaus. Ceva.

ABSTRACT

This work aims to present a material that initiates or encourages the practice of solving problems through geometric challenges. This initiative arose from the observation of a lack of greater incentive around the theme of geometry, a theme that is quite demanded at higher levels for selections of important schools and public schools, in addition to the Brazilian Mathematical Olympiad itself. In addition, the subject of geometry is one of the foundations of the area of mathematics according to the National Common Curricular Base, once again its great importance being recognized for the training of both students and teachers. Whether for a student group or a teaching group, plane geometry problems of different levels are presented, in addition to the theoretical concepts necessary for their solution. At first, concepts more discussed in schools in general are presented, and in another opportunity, lesser known concepts are presented, such as the theorem of Menelaus, Ceva, Stewart's Relation, Hippocratic lunulas, the carpet theorem and the relationship between areas and cevians in a triangle . All this to increase the baggage of tools that help in solving problems.

Keywords: Flat Geometry. Problem solving. Carpet theorem. Lunulas. Stewart. Menelaus. Ceva.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A motivação para a construção deste trabalho se iniciou ainda no curso do PROFMAT na Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, mais especificamente, durante a disciplina de Geometria. Naquele momento, pude constatar o que já havia percebido antes do curso em outras oportunidades em encontros de professores (tanto da rede pública como da rede particular), em cursinhos preparatórios, ou em conversas com amigos pais de alunos: muitos professores desconhecem e nunca viram alguns assuntos dentro de geometria plana, essa grande ramificação da matemática de enorme importância e que há muito já está nos programas didáticos do ensino fundamental, conforme (2) orienta.

Tal desconhecimento ou pouco engajamento transforma a situação num ciclo vicioso: a pouca atenção que é dada a alguns conteúdos não gera interesse nem nos cursos de formação de professores; estes não passam adiante para os seus alunos conteúdos que não são comumente cobrados e nem lhes foram devidamente apresentados; os alunos não terão conhecimento de ferramentas que poderiam ser de grande valor no que se refere à bagagem individual de solução de problemas em geral, com os quais um dia estes alunos deverão se deparar, seja para seleções, concursos, vestibulares, etc.

Essa falta de informação sobre alguns assuntos dentro da geometria acaba agravando também, de certa forma indiretamente, um problema de desequilíbrio no aproveitamento de algumas oportunidades para os jovens, como é o caso de seleções para colégios militares, colégios federais ou de aplicação, onde uma minoria de alunos interessados nestas vagas estão se preparando cada vez melhor com uma bagagem de soluções de problemas cada vez maior, em detrimento de uma maioria de alunos que sequer tomam conhecimento de tais seleções ou oportunidades.

Não há intenção aqui de dizer que um conteúdo é melhor do que outro, uma ferramenta melhor do que a outra, ou um teorema é mais solucionador do que outro. Quem tem um envolvimento mínimo com solução de problemas sabe que não existe solução ruim; pode existir uma mais trabalhosa, ou uma mais elegante, mas o objetivo maior é apresentar uma solução e, quanto mais recursos tiver, maiores serão as chances de conseguir.

Essa experiência por trás da atividade de solução de problemas é deveras interessante, não só sob o ponto de vista de ser aprovado ou não em seleções ou concursos, mas também sob o ponto de vista didático para se ter eficiência e disciplina em geral; carrega constantemente a idéia de que quanto mais preparado estiver, quanto mais ferramentas tiver à disposição, maior a chance de resolver uma questão, ou até um problema do dia a dia.

E é nesse sentido que se torna interessante aumentar a bagagem de conteúdo sobre determinado tema, tanto para professores quanto para alunos, fato que também vem sendo posto em xeque com a crescente popularização da Olimpíada Brasileira de Matemática das

Escolas Públicas (OBMEP), que vem trazendo à tona desafios matemáticos diferenciados e em níveis que eram totalmente desconhecidos por grande parte do público ligado à educação básica, gerando com isso uma demanda maior por este tipo de conteúdo.

Essa demanda maior exige uma oferta maior, qual seja, preparar melhor os professores para que tenham melhores condições de atender a essa - talvez ainda pequena mas crescente - leva de alunos um pouco mais interessados. E mesmo que estes formem um número pouco expressivo, e mesmo se for o caso de apenas um aluno dentre os seus se destacar, é dever do professor saber orientá-lo a perseguir a evolução, participando diretamente dela ou não, caso contrário corre o risco de enterrar ou apagar um possível talento, o que vai totalmente de encontro com um dos objetivos de um educador.

De forma que este trabalho tem a intenção de acender (ou reacender) discussões sobre a temática de resolução de problemas, trazendo um pequeno material de geometria plana com algum conteúdo que é normalmente abordado nos anos finais do ensino fundamental e alguns exercícios a princípio diferenciados e desafiadores, para alunos e também para professores, nunca com o objetivo de possível desmerecimento, mas sim com o objetivo de melhorar a qualidade dos debates acerca destes conteúdos.

Na seção 2 deste trabalho levantaremos alguns pontos sobre a importância da geometria, bem como a importância da prática de solução de problemas e contato com desafios; na seção 3 será apresentada uma breve revisão de alguns conteúdos essenciais normalmente apresentados nas escolas; na seção 4 serão apresentados alguns conteúdos menos conhecidos mas muito importantes para ampliar a bagagem de ferramentas para solucionar problemas; na seção 5 são apresentadas 4 listas de exercícios, com diferentes níveis de dificuldade e seus respectivos gabaritos; na seção 6 são apresentadas as considerações finais e, na seção seguinte, um anexo com nova lista de exercícios propostos.

2 A IMPORTÂNCIA DA GEOMETRIA E DOS DESAFIOS

É notório que as formas de ensino nos dias atuais vem se modificando de forma cada vez mais rápida, com o objetivo de se adequar às novas tecnologias, ou de forma a chamar a atenção dos alunos, ou até mesmo uma corrida saudável e natural entre as escolas e colégios pela melhor didática. Cabe ao Ministério da Educação, às escolas e aos educadores buscarem os melhores procedimentos para tratar essa questão do ensino-aprendizagem, de forma a garantir conhecimentos mínimos necessários ao bom desenvolvimento dos alunos.

Neste sentido, o Ministério da Educação elaborou há alguns anos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que orienta habilidades mínimas a serem trabalhadas em sala, com temas comuns a toda a rede nacional, a fim de que os profissionais envolvidos tenham um norte nas suas ofertas pedagógicas.

Mais especificamente, a BNCC elenca a geometria como uma das unidades temáticas fundamentais para serem trabalhadas em sala de aula, tendo em vista todo o potencial que ela pode trazer ao aluno considerando as habilidades desejadas para o mesmo, tais como um melhor raciocínio lógico, uma investigação de soluções de problemas, uma melhor produção de argumentos, etc.

Segundo a BNCC

> “A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência”. (páginas 271 e 272 da BNCC)

No que se refere ao direcionamento pedagógico, a BNCC orienta ainda que, para os anos finais do Ensino Fundamental,

> “O ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo

> que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo".

Em se tratando de evolução didática, o ensino da geometria nas escolas brasileiras, principalmente no final do Ensino Fundamental, veio se adaptando às novas tecnologias. Mais recursos computacionais foram introduzidos nas metodologias de forma a proporcionar uma melhoria no ensino e se aproximar da nova realidade de alguns alunos. Porém, infelizmente, tais recursos não podem ser utilizados pela maioria das escolas da rede pública por questões logísticas ou financeiras; ou quando são utilizadas - e aqui são incluídas as escolas particulares -, na maioria das vezes não buscam explorar ou extrair grande parte do potencial daquela ferramenta, como é o caso por exemplo do software Geogebra, que é um software livre, gratuito, de fácil acesso (via celular ou computador), com enorme poder de apresentação de conteúdo ou criação de figuras, mas não é ainda tão utilizado por alunos ou incentivado por professores.

Independente de se ter recursos tecnológicos à disposição ou não, a geometria tem ficado à margem de outros temas da matemática em relação ao desenvolvimento de um raciocínio mais lógico, onde a oferta desse tema por parte dos professores aos alunos se restringe, na maioria das vezes, em apresentar de forma simples muitos conceitos e não evoluir em níveis de dificuldade, resultando em soluções simples de problemas majoritariamente básicos, ou simplesmente aplicação direta de fórmulas.

Esta oferta docente de conteúdos de maneira simples, ou sem buscar uma evolução de dificuldade na matéria apresentada, pode não ser simplesmente ou totalmente intencional, mas fruto da formação do próprio professor, onde já na sua base de formação não foi apresentada a geometria de maneira satisfatória ou com a devida importância, onde chegamos num ciclo vicioso: tema que não é abordado da maneira correta já na formação do professor, que não transmite com a devida importância aos seus alunos, que não se interessam pelo tema, e que se torna pouco discutido.

A falta desta discussão mais aprofundada ocorre então já no ensino fundamental, prejudicando em geral o tema na sua base, e prejudicando também a oportunidade de muitos alunos que podem ter um potencial para aquele tema. Fato que é explorado, no que se refere a tentar amenizar, pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com a aplicação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Segundo a apresentação de (7)

> "A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas

> brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação - MEC e do Ministério de Ciência, Tecnologia e Inovação - MCTI. Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área, a OBMEP tem como objetivos principais: - Estimular e promover o estudo da Matemática; - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.”

A iniciativa da SBM gerou resultados significativos no que tange a descoberta de talentos, e também no aumento de discussões de problemas mais elaborados, seja na geometria, álgebra ou aritmética. Tal avaliação nacional trouxe à tona nas escolas públicas o importante contexto de desafio. Problemas e exercícios mais desafiadores foram expostos a quem não sabia dessa realidade, com graus de dificuldade diferentes daqueles cobrados pelas escolas básicas. O contexto de desafio extrapolou a educação pública e gerou interesse das escolas privadas, em que os alunos destas também tiveram interesse em participar dos desafios.

O que outrora era exclusividade de alguns alunos que tinham conhecimento de questões mais elaboradas (por serem cobradas nas seleções de colégios militares ou alguns colégios de aplicação onde existem provas de seleção) agora se torna cada vez mais público esse nível de cobrança ou desafio, trazendo mais participantes para a disputa positiva.

Todas estas circunstâncias somadas motivaram a elaboração do presente trabalho.

Trazer um material de geometria plana que pode ser apresentado tanto para alunos dos anos finais do ensino fundamental (ou médio), quanto para professores que buscam contato com ferramentas pouco utilizadas e que podem ser apresentadas aos seus alunos que se interessarem um pouco mais por estes tipos de problemas mais desafiadores. É muito importante para um professor saber reconhecer em sua turma aqueles alunos que têm uma predisposição maior para desafios ou conteúdos extras; e tão importante quanto saber reconhecer, é saber alimentar essa demanda discente.

Sob o formato de pequenas listas de exercícios com graus de dificuldade variados - do nível fácil ao nível olímpico - são apresentados alguns problemas e suas respectivas soluções (em alguns casos convidando para o debate de outras), e também são apresentadas soluções com uso de ferramentas pouco exploradas ou até desconhecidas pela maioria dos alunos (e também por alguns professores!), oferecendo novas possibilidades para trabalhar problemas diferenciados.

Alguns poucos problemas foram retirados da Olimpíada Brasileira de Matemática, outros retirados da rede social Caravana da Matemática[1], alguns foram criados pelo próprio autor, e a maioria foi encontrada na rede social do Twitter, no perfil @gogoljecco, que reúne professores e entusiastas de desafios de geometria plana apresentados com figuras bastante coloridas. Os perfis de redes sociais citados estarão na bibliografia.

Absolutamente todas as figuras apresentadas aqui foram feitas pelo autor com o software Geogebra, que é importante ferramenta ao alcance de todos (inclusive alunos) para os mais variados objetivos, em especial para a criação e elaboração de imagens geométricas. A manipulação dele pode parecer difícil num primeiro momento, mas a pouca prática já leva a se familiarizar com os comandos - como foi o caso - tornando-o mais inclusivo ainda.

Além das listas de exercícios, também serão tratados e apresentados alguns conteúdos da geometria que são suficientes para as soluções de todos os problemas propostos. Em sua maioria, alguns conteúdos são de fato expostos nas escolas, mas outros nem tanto. Aos primeiros, será apresentado um resumo bem rápido, apenas para recordação dos mesmos uma vez que, como já comentado, eles são apresentados nas escolas. Aos conteúdos menos conhecidos, serão apresentados sem o rigor teórico de formações acadêmicas, mas com uma atenção melhor e de uma forma bem acessível a todos os alunos.

[1] A caravana da Matemática é uma iniciativa da UFJF e que funciona ativamente nas redes sociais. Disponível em https://www2.ufjf.br/caravanadamatematica/redes-sociais/, acesso em 23 nov. 2022.

3 BREVE REVISÃO DE CONTEÚDOS ESSENCIAIS

Nesta seção serão apresentados alguns conteúdos da geometria plana do ensino fundamental de forma resumida, sem nenhuma demonstração, nenhum exemplo ou alguma consideração mais aprofundada; porque o objetivo é apenas deixar registrado neste trabalho algumas ferramentas que são corriqueiramente apresentadas nas escolas, e que ao mesmo tempo se fizeram úteis em alguma resolução de algum problema aqui apresentado.

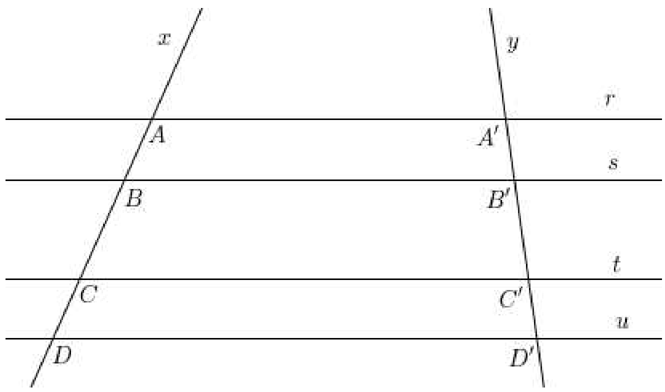
Desta forma, o leitor poderá fazer uma breve revisão de alguns tópicos e, caso queira se aprofundar mais nesta revisão, encontrará nas referências bibliográficas material de excelente valor. Esta apresentação conceitual foi balizada majoritariamente em (5).

Sem esta breve revisão, no entanto, o objetivo deste trabalho poderia ser alcançado mediante consultas de conteúdo à parte, o que seria inferior se comparado a um material onde se encontram juntos os problemas e desafios e ao mesmo tempo a revisão.

Ainda, a título de convencionar algumas nomenclaturas para tornar mais fluida a leitura, usaremos por exemplo a notação AB no lugar de $\overline{AB}$ para segmentos de reta; além de letras maiúsculas para pontos e/ou vértices.

3.1 TEOREMA DE THALES

No mesmo plano, as retas r, s, t e u são paralelas, e as retas x e y são transversais às primeiras, determinando os pontos como na figura abaixo.



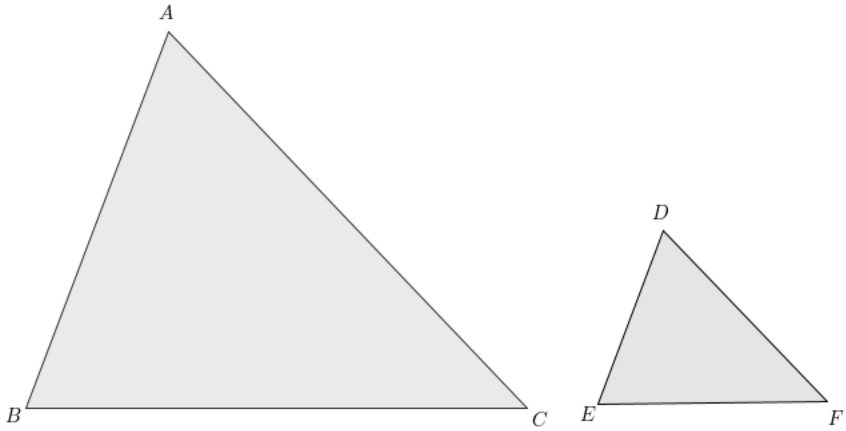
– Teorema de Thales

Pelo teorema de Thales, temos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

3.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Existem alguns casos de semelhança de triângulos, tais quais o caso LLL (os três lados correspondentes de dois triângulos estão na mesma proporção), o caso ALA (dois ângulos iguais), e o caso LAL (dois lados correspondentes estão na mesma proporção e os ângulos entre eles nos triângulos são iguais).



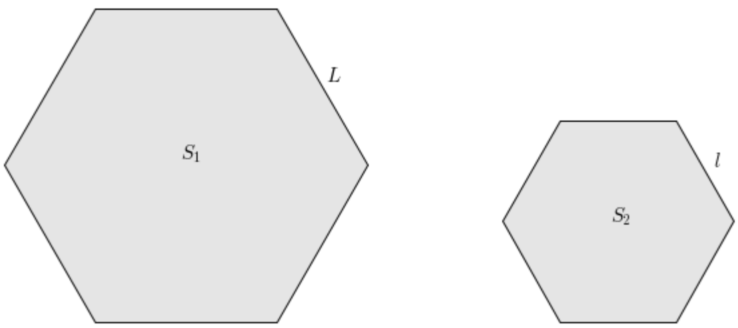
– Semelhança de triângulos

Quando os triângulos forem semelhantes, temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

3.3 SEMELHANÇA DE POLÍGONOS QUAISQUER

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.



– Semelhança de polígonos

No exemplo acima de dois hexágonos regulares, temos

$$\frac{S_1}{S_2} = (\frac{L}{l})^2$$

Uma observação:

Quando trabalhamos com razões, é importante ter o conhecimento de algumas propriedades de proporções, onde a razão da proporção não se altera se fizermos operações lineares em seus termos. Por exemplo

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A}{B} + 1 = \frac{C}{D} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$$

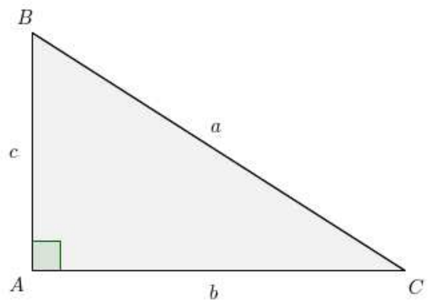
Ou alguns dos resultados

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D} = \frac{A-B}{A} = \frac{C-D}{D}$$

Dentre outros.

3.4 TEOREMA DE PITÁGORAS

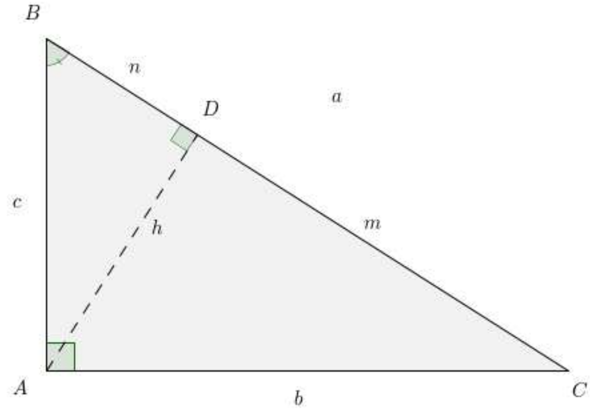
Num triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.



– Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3.5 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



– Relações métricas

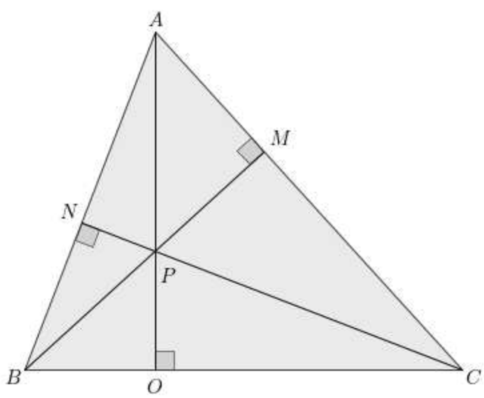
Num triângulo retângulo ABC, traçando a altura do vértice A em relação à hipotenusa de medida a, temos a altura h e as projeções m e n dos catetos b e c, respectivamente, como a figura acima. Essa configuração permite, por semelhança, as seguintes relações:

$$a.h = b.c \qquad b^2 = a.m$$
$$c^2 = a.n \qquad h^2 = m.n$$

3.6 PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

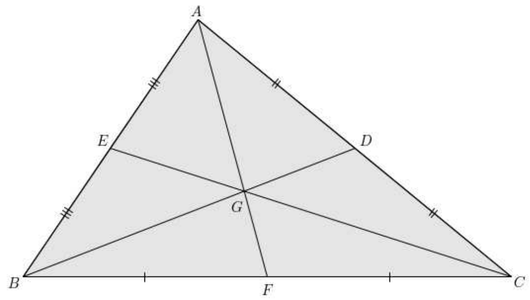
São três os principais pontos notáveis:

Ortocentro (encontro das alturas)



– Ortocentro

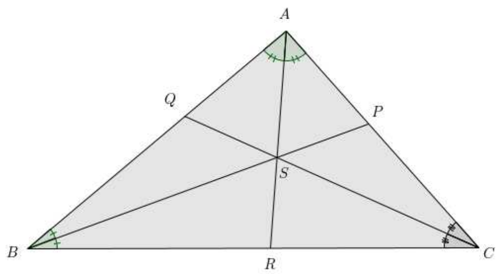
Baricentro (encontro das medianas)



– Baricentro

Uma propriedade do baricentro é dividir o triângulo em seis áreas iguais; outra propriedade é que suas medianas se encontram no ponto G que as divide na proporção 2:1.

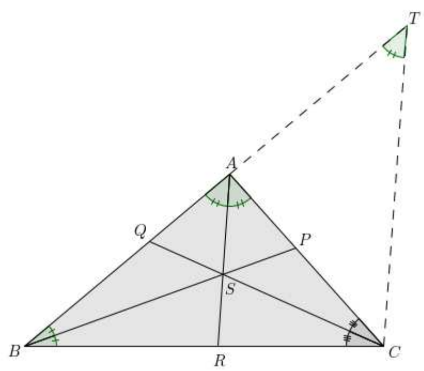
Incentro (encontro das bissetrizes internas)



– Incentro

3.7 TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

A bissetriz interna determina no lado oposto ao seu ângulo, segmentos proporcionais aos lados que formam este ângulo.



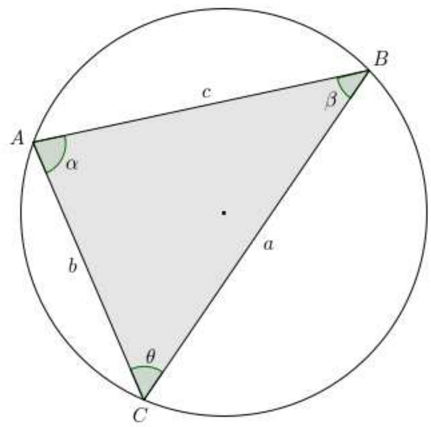
– Bissetriz interna

Na figura temos a bissetriz AR determinando em BC os segmentos BR e CR; por semelhança, temos

$$\frac{BR}{CR} = \frac{AB}{AC}$$

3.8 LEI DOS SENOS

Num triângulo qualquer, a razão entre a medida de um lado e o seno de seu ângulo oposto é constante e igual a duas vezes o raio da sua circunferência circunscrita.



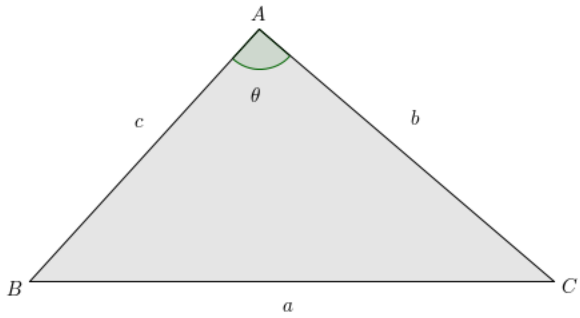
– Lei dos senos

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\theta} = 2R$$

3.9 LEI DOS COSSENOS

Em todo triângulo, é válida a seguinte relação:

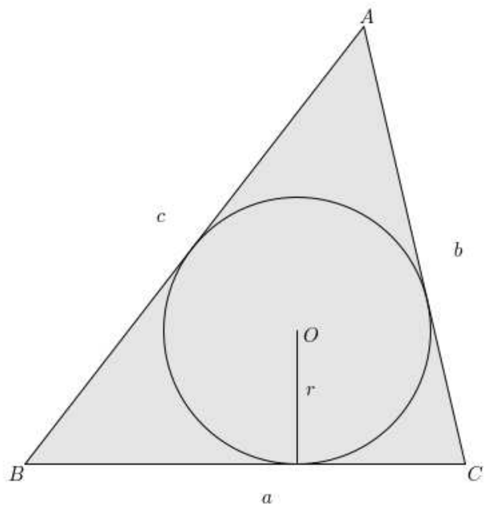
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\theta$$



– Lei dos cossenos

3.10 CÍRCULOS E TRIÂNGULOS

Círculo inscrito é aquele que é tangente internamente a todos os lados de um polígono; como no exemplo a seguir, aos três lados do triângulo.



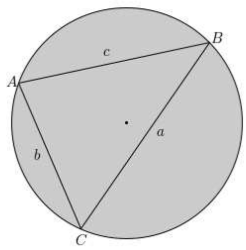
– Círculo inscrito

Denominando a área do triângulo como $[ABC]$, existe uma relação entre a área dele e o raio do seu círculo inscrito, qual seja

$$[ABC] = \frac{r.(a+b+c)}{2}$$

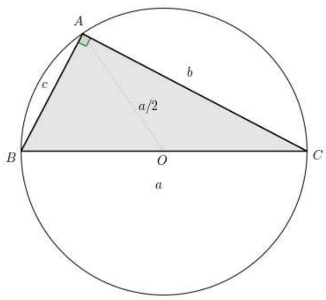
Círculo circunscrito é aquele em que todos os vértices do polígono estão na circunferência. No exemplo do triângulo, também existe uma relação entre a área do mesmo e o raio do círculo circunscrito.

$$[ABC] = \frac{a.b.c}{4R}$$



– Círculo circunscrito

No caso particular do triângulo retângulo inscrito numa circunferência, temos que o raio da circunferência é metade da medida da hipotenusa, que é a mediana relativa a ela.

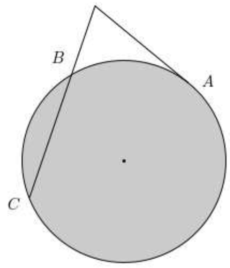


– Triângulo retângulo inscrito

3.11 POTÊNCIA DE PONTO

Potência de um ponto exterior à circunferência, com uma reta secante e uma reta tangente à mesma:

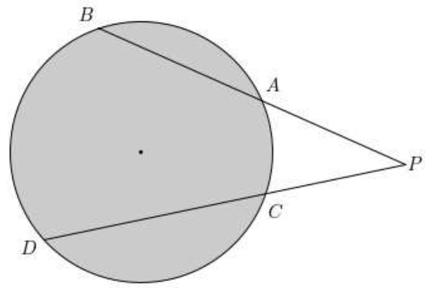
$$(PA)^2 = PB.PC$$



– Potência de ponto - tangente

Potência de um ponto exterior à circunferência, com duas retas secantes:

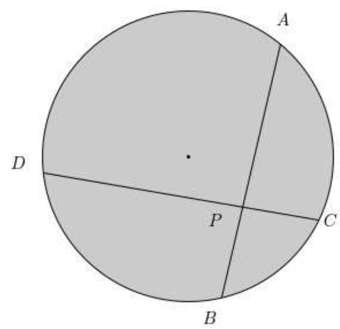
$$PA.PB = PC.PD$$



– Potência de ponto - exterior

Potência de um ponto interior à circunferência:

$$PA.PB = PC.PD$$

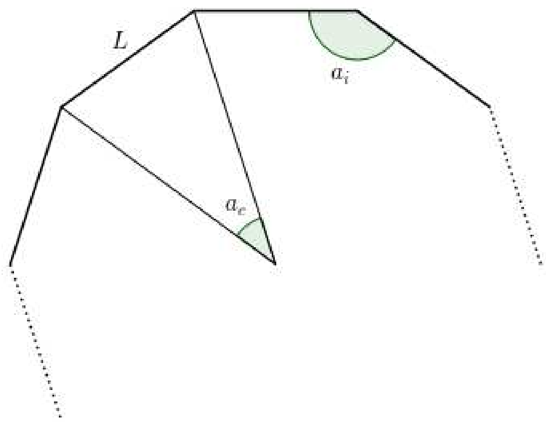


– Potência de ponto - interior

3.12 ÂNGULOS INTERNO E CENTRAL DE POLÍGONOS REGULARES

Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. As relações de seus ângulos centrais e ângulos internos são

$$a_i = \frac{180°.(n-2)}{n}$$
$$a_c = \frac{360°}{n}$$

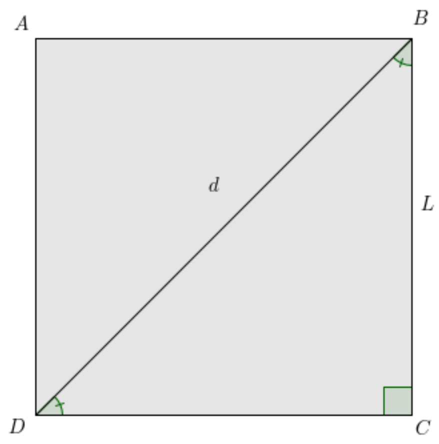


– Ângulos interno e central

3.13 ÁREAS DO QUADRADO, TRIÂNGULO E HEXÁGONO REGULARES

3.13.1 QUADRADO

Seja o quadrado $ABCD$ de lado medindo L e diagonal medindo d, temos:



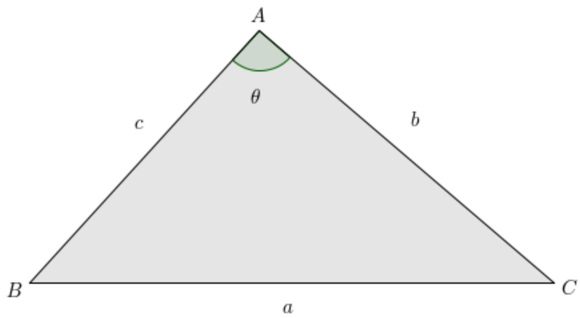
– Área do quadrado

$$[ABCD] = L^2$$

$$[ABCD] = \frac{d^2}{2}$$

3.13.2 TRIÂNGULO

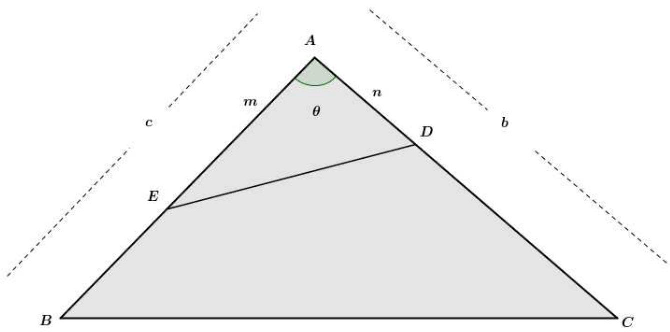
Existem muitas formas de se calcular a área de um triângulo, algumas já apresentadas nesta mesma seção. Além da forma mais clássica calculando o semiproduto da medida da base pela medida da altura, também temos a seguinte:



– Área do triângulo

$$[ABC] = \frac{b.c.\,\mathrm{sen}\theta}{2}$$

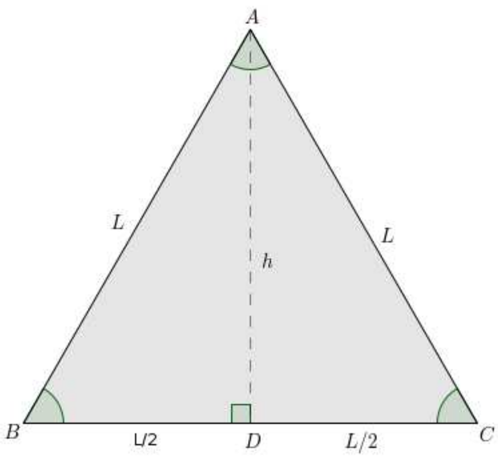
Esta é a maneira de calcular a área de um triângulo utilizando dois de seus lados e o ângulo que eles formam. A partir desta forma, existe uma maneira de relacionar áreas de triângulos que possuem um ângulo em comum, como no exemplo a seguir:



– Área do triângulo em função dos lados

$$\frac{[ADE]}{[ABC]} = \frac{m.n}{b.c}$$

Para um triângulo equilátero, usando pitágoras no triângulo ADC, encontramos $h = \frac{L.\sqrt{3}}{2}$. A área vai ser o semiproduto da base pela altura.

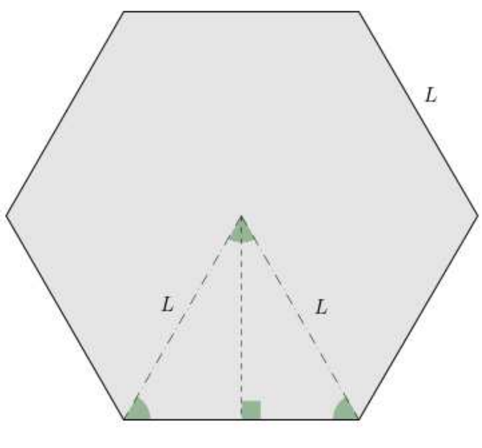


– Área triângulo equilátero

$$[ABC] = \frac{L^2.\sqrt{3}}{4}$$

3.13.3 HEXÁGONO

O hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros de lado medindo L. Sua área A então será:

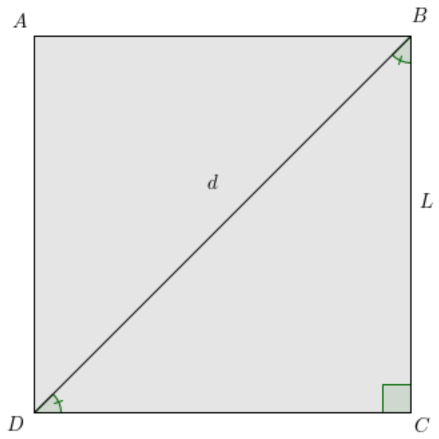


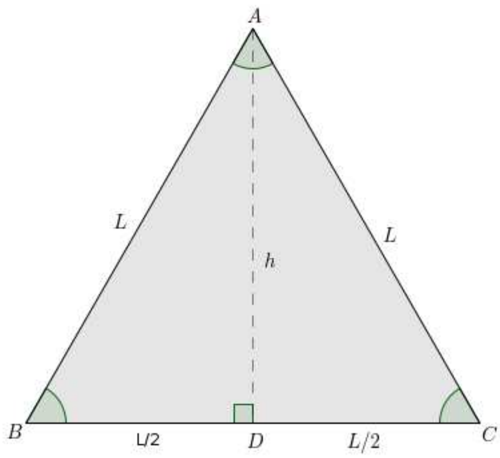
– Hexágono

$$A = \frac{6.L^2.\sqrt{3}}{4}$$

3.14 SEN, COS E TG DE 30°, 45° E 60°

Não é preciso memorizar os valores desses ângulos mais usuais. Basta saber o conceito corretamente de seno, cosseno e tangente e aplicá-los no quadrado (para o ângulo de 45°) e no triângulo equilátero (para os ângulos de 30° e 60°).





– Ângulos notáveis

3.15 RELAÇÃO FUNDAMENTAL E OPERAÇÃO ENTRE ARCOS

Relação Fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Soma e subtração de arcos:

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\beta).\cos(\alpha)$$
$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\beta).\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha).\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta)$$

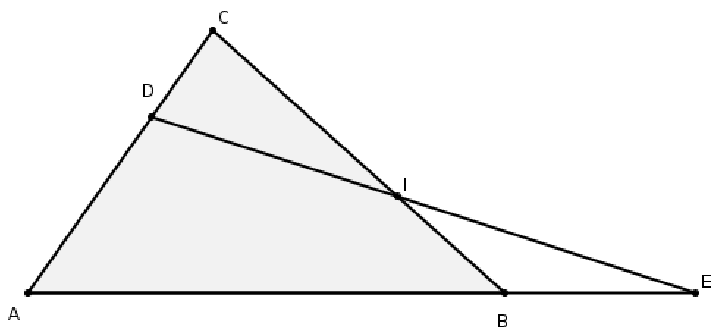
4 CONTEÚDOS MENOS CONHECIDOS

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos e teoremas um pouco mais elaborados e que, na esmagadora maioria das vezes, não são apresentados aos alunos, seja de ensino básico, médio ou até superior! Tais conceitos servirão para a resolução de alguns exercícios apresentados neste trabalho, a fim de que o leitor possa se familiarizar ou ter seu primeiro contato com essas ferramentas aparentemente tão simples mas muito poderosas nas resoluções de alguns problemas.

Também não entraremos no mérito de demonstrar formalmente algum teorema, já que o propósito principal é apresentar de uma forma rápida e prática para que o leitor possa entender como se chega aos teoremas e possa replicar a forma toda vez que precisar usar mas se esquecer da relação final.

4.1 TEOREMA DE MENELAUS

Uma reta qualquer determina, sobre as retas suportes dos lados de um triângulo ABC, os pontos $D, \quad E \quad e \quad I$, como mostra a figura:

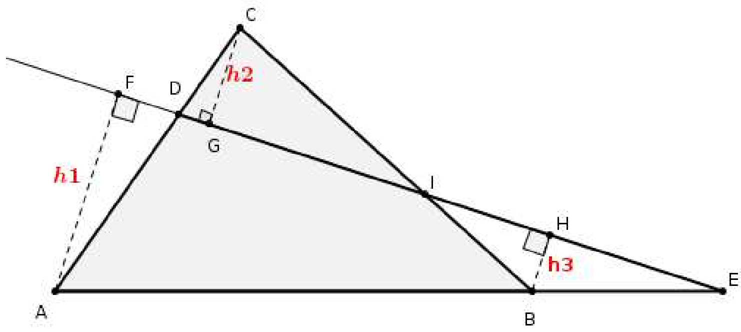


– Teorema de Menelaus

Mostraremos que $\frac{CD}{CI} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} = 1$

A figura clássica do Teorema consiste num triângulo qualquer com um prolongamento de um de seus lados. Deste prolongamento, traça-se uma secante aos outros dois lados do triângulo, como na figura apresentada. O teorema de Menelaus afirma que este prolongamento e a secante determinam segmentos no triângulo com a relação anterior.

Uma demonstração consiste em projetar os três vértices do triângulo na secante, gerando alguns triângulos semelhantes, como na figura abaixo.



– Teorema de Menelaus demonstração

De algumas semelhanças, temos:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{h_1}{h_2} \qquad \frac{CI}{BI} = \frac{h_2}{h_3} \qquad \frac{BE}{AE} = \frac{h_3}{h_1}$$

Multiplicando as três igualdades, temos:

$$\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CI}{BI} \cdot \frac{BE}{AE} = 1$$

E portanto

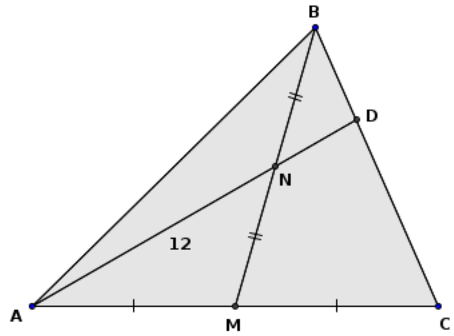
$$\frac{CD.AE.BI}{CI.AD.BE} = 1$$

Apesar de parecer simples ou talvez "antiquado", considerando uma interpretação mais profunda, o teorema de Menelaus trata de demonstrar ou não a colinearidade entre 3 pontos. Ter essa noção é importante para fazer demonstrações de outros teoremas, ou soluções de problemas mais elaborados, como por exemplo alguns problemas olímpicos.

Vejamos alguns exemplos do uso desta ferramenta:

4.1.1 EXEMPLO 1

No triângulo abaixo, temos que M é ponto médio de AC, N é ponto médio de BM e $AN = 12$. Calcule ND.



– Exercício 1

Uma solução:

Usaremos duas vezes o teorema de Menelaus: o triângulo BCM com a secante AD, e o triângulo ACD com a secante BM. Chamaremos de x a medida do segmento AM que é igual ao segmento CM, y o segmento BN que é igual ao segmento MN, p o segmento CD e q o segmento BD.

$$x.(p+q).(ND) = 12.x.q \tag{4.1}$$

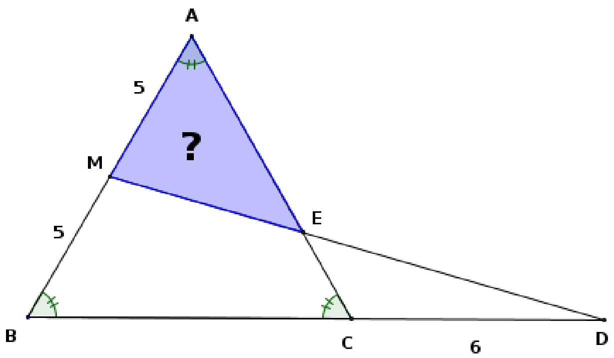
$$q.2x.y = y.p.x \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2), temos:

$p = 2q$ e $ND = 4.$

4.1.2 EXEMPLO 2

Na figura, ABC é um triângulo equilátero, $AM = BM = 5 \quad e \quad CD = 6$. Quanto é a área hachurada?



– Exercício 2

Uma solução:

Precisamos saber quanto mede o segmento AE; é uma figura clássica do Teorema de Menelaus, e vamos usar esta ferramenta, onde já sabemos quanto vale $AC \quad e \quad BC$ que são os lados do triângulo equilátero.

Pelo Teorema de Menelaus

$$AM.BD.CE = AE.BM.CD$$

Então

$$5.16.(10 - x) = x.5.6$$

Daí

$$80 - 8x = 3x$$

Portanto

$$x = \frac{80}{11}$$

A razão entre as áreas dos dois triângulos que têm um vértice em comum será a razão do produto dos seus dois lados correspondentes.

$$\frac{[AME]}{[ABC]} = \frac{AM.AE}{AB.AC}$$

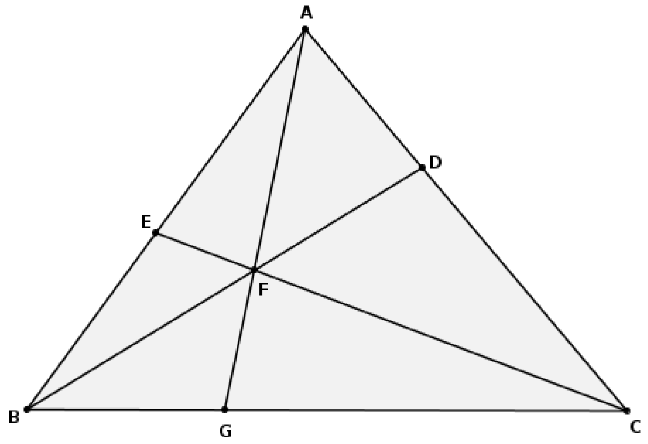
Então

$$\frac{[AME]}{25\sqrt{3}} = \frac{5.(\frac{80}{11})}{10.10}$$

Portanto

$$[AME] = \frac{100\sqrt{3}}{11}$$

4.2 TEOREMA DE CEVA

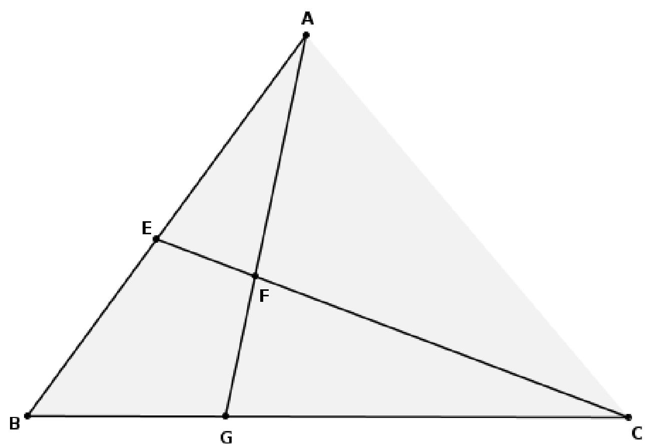


– Teorema de Ceva

Consideremos em um triângulo ABC e três cevianas (mo triângulo são segmentos de reta entre um vértice e seu lado oposto), AG, BD e CE, onde D, E e G estão nos lados AC, AB e CB respectivamente. Se essas três cevianas forem concorrentes, então

$$\frac{AE.BG.CD}{AD.BE.CG} = 1$$

É possível demonstrar o Teorema de Ceva usando o Teorema de Menelaus citado anteriormente. Conforme a figura abaixo, temos um desenho clássico do teorema de Menelaus "dentro" do teorema de Ceva (são três figuras de Menelaus no total):



– Teorema de Ceva e Menelaus

Temos então:

$$\frac{AE.BC.FG}{AF.BE.CG} = 1$$

Da figura original do teorema de Ceva e retirando agora o lado AB, encontramos a relação:

$$AD.BC.FG = CD.AF.BG$$

Isolando $\frac{AF}{BC.FG}$ nas duas equações, obteremos:

$$\frac{AE}{BE.CG} = \frac{AD}{CD.BG}$$

Então

$$AE.CD.BG = AD.BE.CG$$

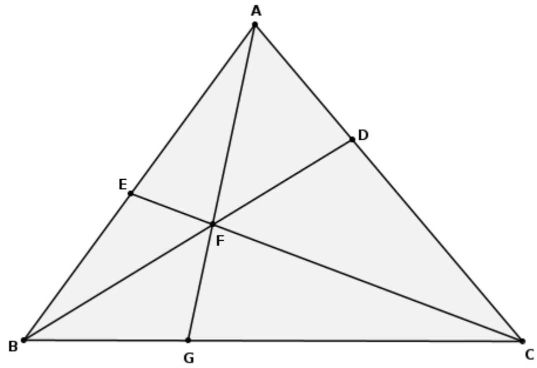
Portanto

$$\frac{AE.CD.BG}{AD.BE.CG} = 1$$

Assim como o teorema de Menelaus, Ceva também tem sua importância conceitual como ferramenta de demonstrações mais elaboradas; este teorema trata da questão de concorrência entre 3 pontos. Mais adiante será tratado um caso onde foi determinante esse conceito.

4.2.1 EXEMPLO 1

Num triângulo ABC, as cevianas da figura a seguir concorrem num ponto F interior ao triângulo. Sabendo que as cevianas AG e BD dividem os lados BC e AC, respectivamente, tal que $3.BG = CG$ e $2.AD = CD$, qual será a razão AE/BE?



– Exercício 1

Da relação direta de Ceva, temos:

$$AE.BG.CD = AD.BE.CG$$

Ou seja

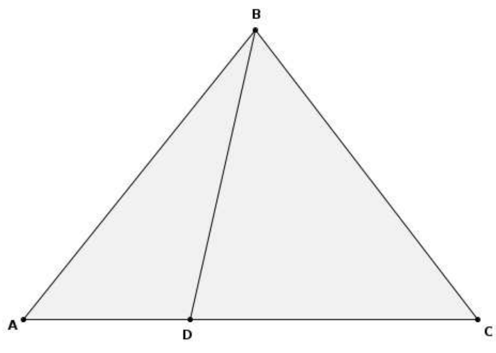
$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD.CG}{BG.CD}$$

Portanto

$$\frac{AE}{BE} = \frac{3}{2}$$

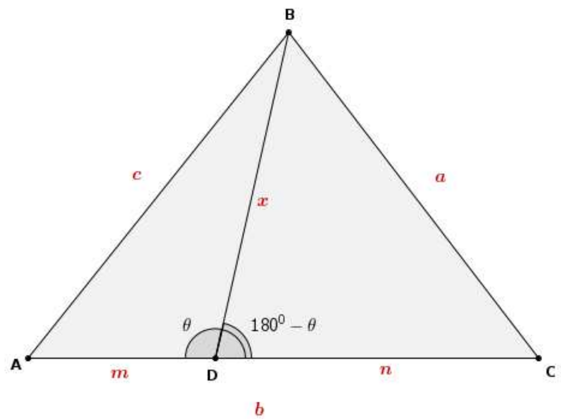
4.3 RELAÇÃO DE STEWART

O teorema de Stewart trata de relacionar uma ceviana qualquer de um triângulo com as medidas dos seus três lados.



– Relação de Stewart

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e seja x o comprimento de uma ceviana BD que divide AC em dois segmentos $AD = m$ e $CD = n$, conforme a figura a seguir:



– Relação de Stewart demonstração

Da lei dos cossenos, temos:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2.x.m.cos\theta$$

$$a^2 = x^2 + n^2 - 2.x.n.\cos(180^\circ - \theta)$$

Multiplicando a primeira equação por n, a segunda por m e lembrando que $\cos(180^\circ - a) = -cos(a)$, somando as duas equações em seguida, temos:

$$c^2.n + a^2.m = x^2.(m + n) + m^2n + m.n^2$$

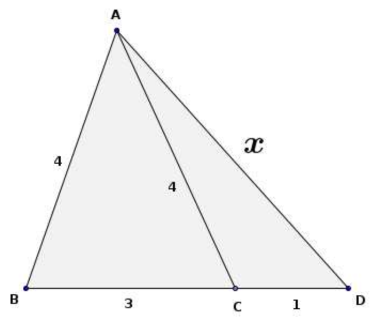
Portanto

$$c^2.n + a^2.m = b.x^2 + b.m.n$$

De forma que esta relação de Stewart nos permite calcular qualquer ceviana, inclusive as principais num triângulo, como a mediana, bissetriz ou altura.

4.3.1 EXEMPLO 1

Na figura abaixo, encontre o valor de x.



– Exercício 1

Aplicando a relação de Stewart temos

$$3.x^2 + 1.4^2 = 4.4^2 + 4.3.1$$

Ou seja

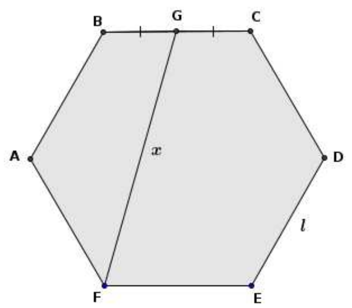
$$3.x^2 = 64 + 12 - 16$$

Portanto

$$x = 2\sqrt{5}$$

4.3.2 EXEMPLO 2

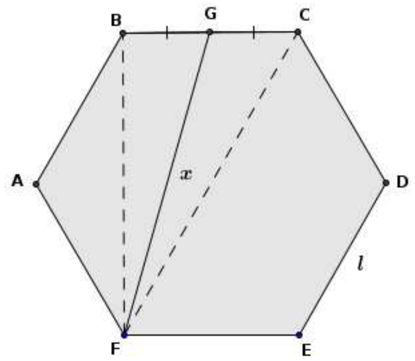
No hexágono regular ABCDEF de lado medindo l marca-se o ponto médio G do lado BC. Calcule FG.



– Exercício 2

Uma solução:

Traçamos as diagonais BF e CF conforme a figura abaixo.



– Exercício 2 solução

Temos que a diagonal BF possuui a mesma medida da altura de dois triângulos equiláteros de lado l, ou seja, $l\sqrt{3}$; por pitágoras em FBC, encontramos $FC = 2l$. Um caminho para encontrar FG é aplicar pitágoras no triângulo FBG, mas outro caminho é aplicar Stewart no triângulo BFC onde FG é a mediana. No exemplo tivemos esse caminho menor por pitágoras, mas outros polígonos regulares ou até outras diagonais do hexágono não teriam essa mesma facilidade, então vamos neste caminho do Stewart para treino:

Da relação de Stewart

$$(l\sqrt{3})^2.(\frac{l}{2}) + (2.l)^2.(\frac{l}{2}) = x^2.l + l.(\frac{l}{2})(\frac{l}{2})$$

Ou seja

$$(\frac{3.l^3}{2}) + l^3 = l.x^2 + (\frac{l^3}{4})$$

Então

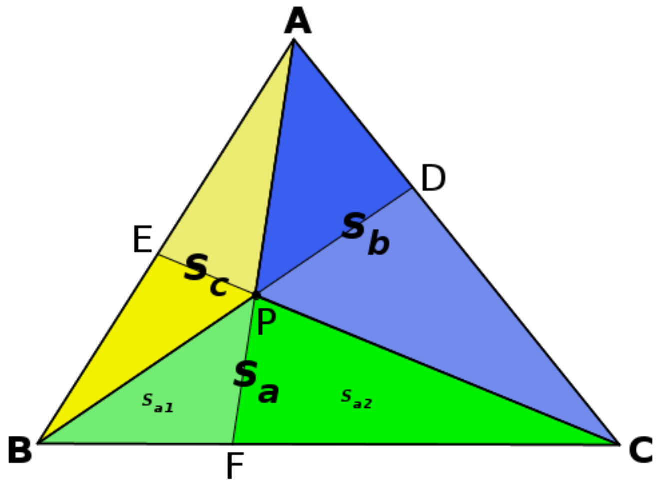
$$x^2 = \frac{9.l^2}{4}$$

Portanto

$$x = \frac{3.l}{2}$$

4.4 RELAÇÃO ENTRE ÁREAS E CEVIANAS NUM TRIÂNGULO

Na figura abaixo, considere o triângulo ABC sendo um triângulo qualquer; AF, BD e CE são cevianas quaisquer que concorrem no ponto P; $S_a, S_b \quad e \quad S_c$ são as áreas de tonalidade verde, azul e amarela, respectivamente, que também serão denotadas como $[BCP], [ACP] \quad e \quad [ABP]$, respectivamente. Também vamos chamar de h a altura do ponto P ao lado BC e H a altura do vértice A ao lado BC. Ainda, vamos chamar de S_{a1} a área de BPF e S_{a2} a área de CPF, onde $S_{a1} + S_{a2} = S_a$.



– Relação entre áreas e cevianas

Temos o seguinte:

$$S_{a1} = \frac{BF.h}{2} \qquad , \qquad S_{a2} = \frac{CF.h}{2}$$

Portanto

$$\frac{S_{a1}}{S_{a2}} = \frac{BF}{CF}$$

Ocorre que existem outros dois triângulos nessa figura cujas áreas também são proporcionais a essa relação BF/CF:

$$S_{a1} + S_c = \frac{BF.H}{2}$$

$$S_{a2} + S_b = \frac{CF.H}{2}$$

$$\frac{S_{a1} + S_c}{S_{a2} + S_b} = \frac{BF}{CF}$$

Então:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{S_{a1}}{S_{a2}} = \frac{S_{a1} + S_c}{S_{a2} + S_b}$$

Por propriedades de proporções, onde operações lineares não alteram a razão, podemos concluir que:

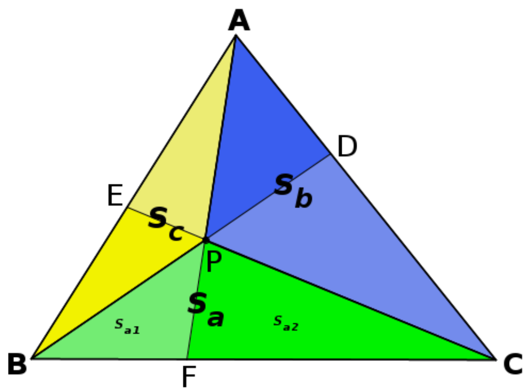
$$\frac{BF}{CF} = \frac{S_c}{S_b}$$

Da mesma forma, com os tons de azul e de amarelo, chega-se em:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{S_b}{S_a}$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{S_c}{S_a}$$

Ainda temos o seguinte, chamando de h' a projeção do vértice B até a ceviana AF e H' a projeção do vértice C até a ceviana AF:



– Relação entre áreas e segmentos

$S_c = AP.h'/2 \qquad S_{a1} = FP.h'/2 \qquad S_b = AP.H'/2 \qquad S_{a2} = FP.H'/2$

$$\frac{AP}{FP} = \frac{S_c}{S_{a1}} = \frac{S_b}{S_{a2}} = \frac{S_b + S_c}{S_{a1} + S_{a2}} = \frac{S_b + S_c}{S_a}$$

E, da mesma forma, acontece com as outras cevianas:

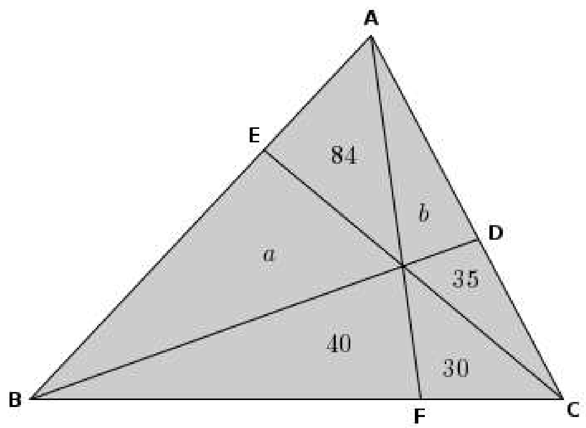
$$\frac{BP}{DP} = \frac{S_a + S_c}{S_b}$$

$$\frac{CP}{EP} = \frac{S_a + S_b}{S_c}$$

Concluindo assim as relações.

4.4.1 EXEMPLO 1

Na figura abaixo, o triângulo ABC tem as cevianas AF, BD e CE que determinam regiões cujas áreas estão indicadas. quanto valem as áreas a e b?



– Exercício 1

Uma solução:

Neste exemplo, usaremos a idéia das áreas proporcionais aos mesmos segmentos. Por exemplo, a razão entre as áreas dos triângulos ABF e ACF é a mesma razão entre 40 e 30, que são as áreas dos triângulos menores que têm as bases AF e CF. Da mesma forma, a razão dos triângulos ABD e CBD é a mesma razão entre b e 35. Assim:

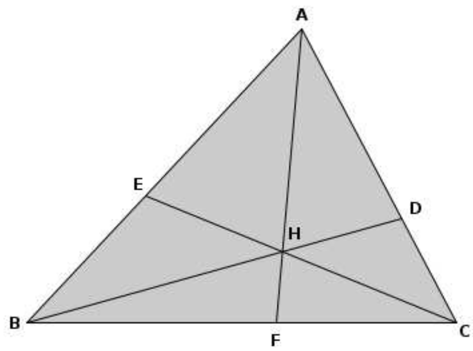
$$\frac{84+a+40}{b+35+30}=\frac{40}{30},$$

$$\frac{a+84+b}{40+30+35}=\frac{b}{35}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = 56$ e $b = 70$

4.4.2 EXEMPLO 2

No triângulo ABC, as cevianas AF, BD e CE se interceptam no ponto H. AB = 5, AC = 7, AE = 2, AD = 3 e AH = 3. Quanto mede FH?



– Exercício 2

Pelas relações apresentadas, temos que:

$$\frac{AH}{FH}=\frac{[ABH]+[ACH]}{[BCH]}$$

Também podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{AH}{FH}=\frac{[ABH]}{[BCH]}+\frac{[ACH]}{[BCH]}$$

Ocorre que $\frac{[ABH]}{[BCH]}=\frac{AD}{DC}$ e $\frac{[ACH]}{[BCH]}=\frac{AE}{BE}$

Temos então

$$\frac{AH}{FH} = \frac{AD}{DC} + \frac{AE}{BE}$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$\frac{3}{FH} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$$

Portanto

$$FH = \frac{36}{17}$$

Esta poderosa relação entre áreas nos permite demonstrar também alguns teoremas, entre eles o de Menelaus e o de Ceva, além de demonstrar uma propriedade importante do baricentro (encontro das medianas de um triângulo), conforme será apresentado a seguir.

4.4.3 OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE MENELAUS

Seja ABC um triângulo qualquer e AF, BD e CE cevianas que se encontram no ponto P. Conforme já citado, temos as seguintes relações entre as áreas e os segmentos formados por estas cevianas:

$$AP/FP = (S_b + S_c)/S_a \qquad (I)$$

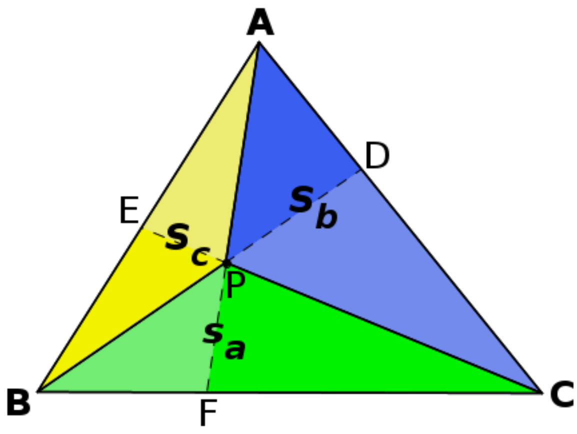
$$BP/DP = (S_a + S_c)/S_b \qquad (II)$$

$$CP/EP = (S_a + S_b)/S_c \qquad (III)$$

$$BF/CF = S_c/S_b \qquad (IV)$$

$$AE/BE = S_b/S_a \qquad (V)$$

$$AD/CD = S_c/S_a \qquad (VI)$$



– Novas demonstrações

De IV, temos:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{S_c}{S_b}$$

Então

$$\frac{BF + CF}{CF} = \frac{S_b + S_c}{S_b}$$

E assim

$$\frac{BC}{CF} = \frac{S_b + S_c}{S_b} \qquad (VII)$$

Dividindo I por VII, temos:

$$\frac{AP}{FP} \cdot \frac{CF}{BC} = \frac{S_b + S_c}{S_a} \cdot \frac{S_b}{S_b + S_c}$$

Então

$$\frac{AP}{FP} \cdot \frac{CF}{BC} = \frac{S_b}{S_a} \qquad (VIII)$$

De (V), temos:

$$\frac{AP}{AE}.\frac{BE}{BC}.\frac{CF}{FP} = 1$$

4.4.4 OUTRA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE CEVA

Das relações já citadas, multiplicando diretamente as relações IV, V e VI, temos:

$$\frac{BF}{CF}.\frac{AE}{BE}.\frac{CD}{AD} = \frac{S_c}{S_b}.\frac{S_b}{S_a}.\frac{S_a}{S_c}$$

Portanto

$$\frac{AE}{AD}.\frac{BF}{BE}.\frac{CD}{CF} = 1$$

4.4.5 DEMONSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE DO BARICENTRO

Da relação IV, temos:

$$BF/CF = S_c/S_b$$

Como os pontos D, E e F são os pontos médios, temos que $S_a = S_b = S_c$. Da relação I temos:

$$AP/FP = (S_c + S_b)/S_a$$

Então

$$AP/FP = 2$$

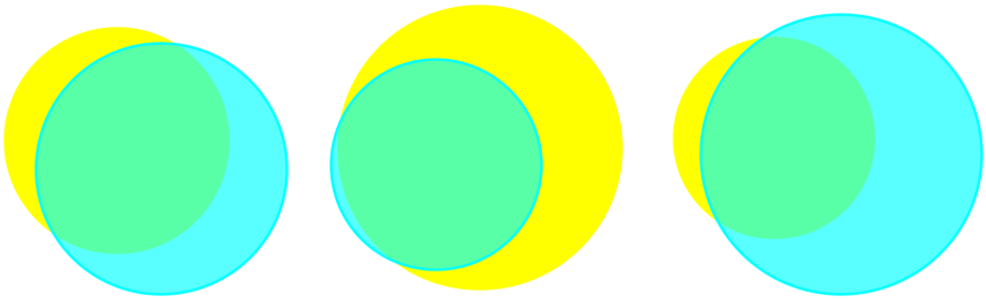
E portanto

$$AP = 2FP$$

Usando o mesmo raciocínio para as outras medianas, concluímos que o baricentro divide cada uma na proporção 2:1.

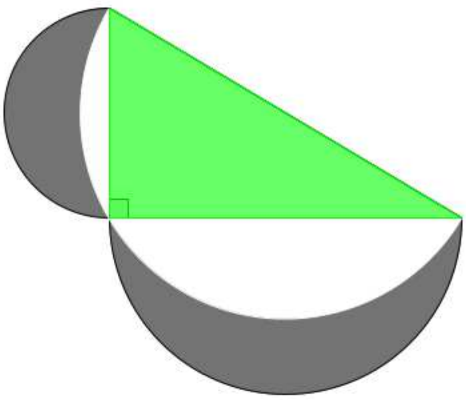
4.5 LÚNULAS

Outro tema pouco conhecido ou discutido em salas de aula, seja nível fundamental, médio ou até salas de nível superior! Uma lúnula também conhecida como "meia-lua" é uma região delimitada por dois arcos de circunferências diferentes. Nos exemplos abaixo temos as partes em amarelo.



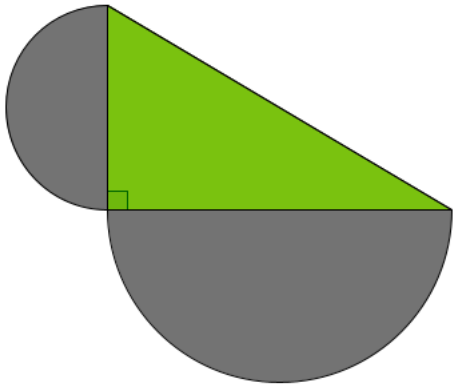
– Lúnulas

Hipócrates relacionou a área de um triângulo retângulo com as lúnulas formadas a partir de seus catetos, o que deixou este exemplo como o mais conhecido das Lúnulas de Hipócrates.



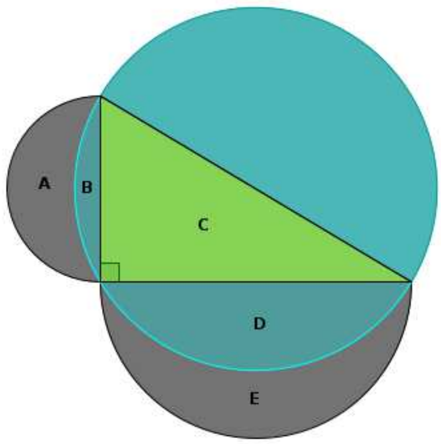
– Lúnulas de Hipócrates

Num triângulo retângulo, a partir dos catetos, construímos semicircunferências cujos raios são as metades dos catetos, conforme a figura abaixo.



– Lúnulas de Hipócrates construção

Em seguida, também construímos uma circunferência cujo raio é a metade da hipotenusa e seu centro localizado no ponto médio desta hipotenusa. Assim criaram-se duas lúnulas com áreas iguais a A e E. Chamaremos as medidas dos catetos de x e y, e a da hipotenusa por z. Da figura abaixo, podemos afirmar que:



– Lúnulas de Hipócrates construção 2

A + B é a área da semicircunferência de raio igual à metade de um cateto:

$$A + B = \frac{\pi.\frac{x^2}{4}}{2} = \pi.\frac{x^2}{8} \qquad (I)$$

Da mesma forma:

$$D + E = \frac{\pi.\frac{y^2}{4}}{2} = \pi.\frac{y^2}{8} \qquad (II)$$

Da semicircunferência maior, temos:

$$B + C + D = \frac{\pi.\frac{z^2}{4}}{2} = \pi.\frac{z^2}{8} \qquad (III)$$

De (I) e (II):

$$A + B + D + E = \pi.(x^2 + y^2)/8 \qquad (IV)$$

Como $z^2 = x^2 + y^2$, comparando (III) e (IV):

$$B + C + D = A + B + D + E$$

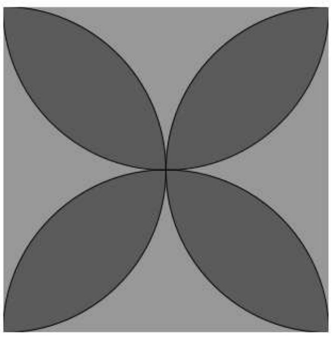
Portanto

$$C = A + E$$

A soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo retângulo! Este é o exemplo mais conhecido das Lúnulas de Hipócrates.

4.5.1 EXEMPLO 1

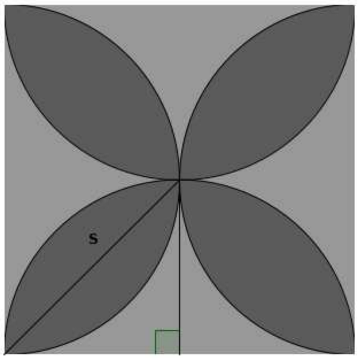
Qual é a fração da área pintada em cinza escuro em relação à área do quadrado?



– Exercício 1

Uma solução:

Considere a medida do lado do quadrado como sendo L, e a área S como sendo a metade de uma “pétala” desta figura, o que também é um segmento circular de 90° de uma circunferência de raio L/2, conforme a figura.



– Exercício 1 solução

A área S deste segmento será:

$$S = \pi.(L/2)^2/4 - (L/2)^2/2$$

Então

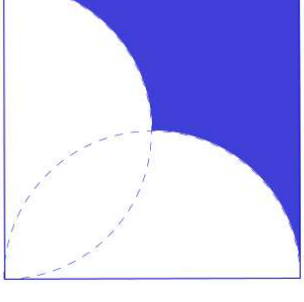
$$S = L^2.(\pi - 2)/16$$

A área da figura será 8 vezes a área S, e a fração pintada F será:

$F = (\pi - 2)/2$

4.5.2 EXEMPLO 2

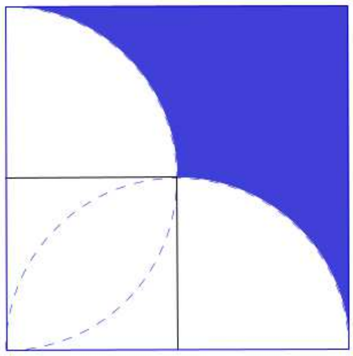
Que fração do quadrado está pintada de azul?



– Exercício 2

Uma solução:

Conseguimos construir sem muita dificuldade, como na figura abaixo, um quadrado de lado L/2, considerando o lado do quadrado maior sendo L. A área pintada S vai ser a área do quadrado maior menos a área do quadrado menor, menos a área de dois setores de 90° de circunferência de raio L/2.



– Exercício 2 solução

$S = L^2 - [(L/2)^2 + \pi.(L/2)^2/2]$

Então

$S = L^2(6 - \pi)/8$

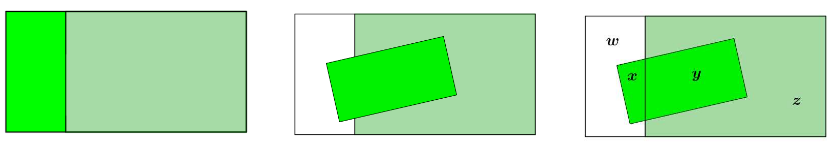
A fração F da área pintada em relação ao quadrado maior será:

$F = (6 - \pi)/8$

4.6 TEOREMA DOS CARPETES

Um dos assuntos mais interessantes tratados aqui. A idéia é tão simples e, ao mesmo tempo, tão poderosa. Infelizmente é pouco conhecida e pouco trabalhada nas salas de aula, até mesmo em salas de graduação ou pós-graduação, fato que inclusive ajudou a motivar a apresentação deste trabalho.

O nome teorema dos carpetes é um nome informal para uma idéia relativa a áreas. Considere a primeira imagem da figura sendo uma sala com dois carpetes verdes.



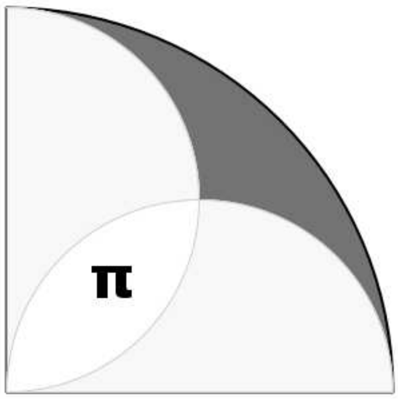
– Teorema dos carpetes

A segunda imagem da figura propôe deslocarmos um carpete pelo chão da sala. Ao fazer isso, temos agora 4 regiões na sala conforme a imagem 3. Ocorre que, nesta nova disposição, não é difícil notar que a área da sala que não possui carpete (w) é a mesma área correspondente à intersecção dos dois carpetes (y), independente das formas que elas apresentam, pois a área total da sala continua a mesma assim como a área total dos dois carpetes. Também é possível interpretar da seguinte forma: a área do carpete verde claro $(x + y)$ é igual à área da sala que estava destinada a ele inicialmente $(x + w)$; portanto, $y = w$.

Vejamos outros exemplos:

4.6.1 EXEMPLO 1

Na figura a seguir temos um setor circular de 90°, e duas semicircunferências com diâmetros iguais aos raios deste setor. Sabendo que a área da intersecção das semicircunferências é π, calcule a região pintada de cinza.



– Exercício 1

Uma solução:

Poderíamos usar um raciocínio semelhante ao segundo exercício resolvido da seção Lúnulas; calcularíamos a área do setor maior, e diminuiríamos a área de dois setores menores, e também a área de um pequeno quadrado; teríamos a área pintada de cinza. A área que foi dada, π, seria duas vezes a área de um segmento circular, e daí retiraríamos a relação entre a área dada e a área pintada.

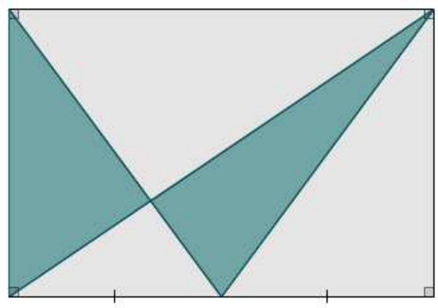
Com certa frequência, áreas de lúnulas costumam ser calculadas usando o teorema dos carpetes. Neste exemplo, a área do setor maior, considerando o seu raio como R, vai ser $\pi.R^2/4$.

A área das duas semicircunferências somadas vai ser $2[\pi.(R/2)^2/2] = \pi.R^2/4$.

Ou seja, a área das duas semicircunferências somadas é igual à área do setor maior. Isso significa, pelo teorema dos carpetes, que a área do setor que não está ocupada por nenhuma semicircunferência (área cinza) é igual à intersecção das áreas das duas semicircunferências. Neste caso, a área cinza também vale π.

4.6.2 EXEMPLO 2

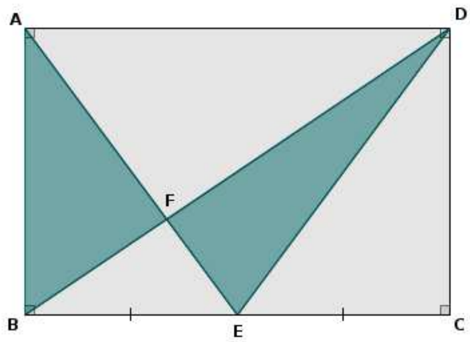
Considere o retângulo abaixo onde um de seus lados está dividido ao meio, conforme a figura. A área pintada representa que fração do retângulo?



– Exercício 2

Uma solução:

Considere o retângulo ABCD, o ponto médio E e a intersecção F entre AE e BD.



– Exercício 2 solução

Observe que os triângulos ABD e AED possuem a mesma área, pois têm a mesma base AD e mesma altura AB; além disso, esta área é metade da área do retângulo. Assim, a área dos dois triângulos mencionados têm áreas somadas equivalente à área de todo o retângulo; então, pelo teorema dos carpetes, a área de intersecção entre os dois triângulos ($[ADF]$) vai ser igual à área do retângulo que eles não preenchem ($[BEF] + [CDE]$).

Os triângulos BEF e ADF são semelhantes, e a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Desta forma

$$[BEF]/[ADF] = 1/4$$

Então

$$[ADF] = 4.[BEF]$$

Como $[ADF] = ([BEF] + [CDE])$, e como $[CDE]$ é 1/4 da área de ABCD (pois tem a metade da base de ABCD), temos:

$$4.[BEF] = [BEF] + (1/4).[ABCD]$$

Então

$$[BEF] = (1/12).[ABCD]$$

Assim, $[ADF] = (1/3).[ABCD]$

A área pintada S será

$$S = [ABCD] - [BEF] - [ADF] - [CDE]$$

Portanto

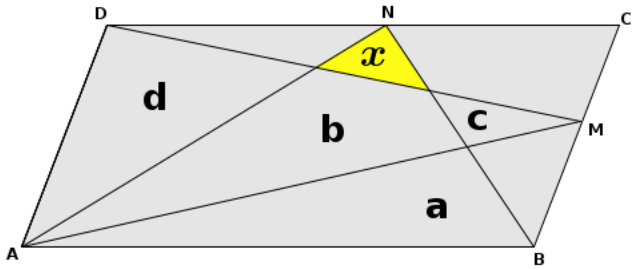
$$S = [ABCD](1 - (1/12) - (1/3) - (1/4))$$

Então

$$S = [ABCD].(1/3)$$

4.6.3 EXEMPLO 3

No paralelogramo ABCD, M e N são pontos dos lados BC e CD respectivamente. Sendo as áreas a, b, c e d conhecidas, calcule a área x.



– Exercício 3

Mais um problema de áreas bem genéricas, que não apresentam um formato mais conhecido, o que sugere buscar uma alternativa de solução com o uso do teorema dos carpetes.

Observe que o triângulo ADM tem a metade da área do paralelogramo, pois tem a mesma base AD e a mesma altura; de forma semelhante, o triângulo ABN também tem área igual à metade do paralelogramo, desta vez usando a base AB.

Desta forma, os triângulos ABN e ADM tem a mesma área e tem a região b em comum. Pelo teorema dos carpetes, $x + a = c + d$.

Assim, $x = c + d - a$.

5 LISTAS DE PROBLEMAS

Nesta seção serão apresentados alguns problemas de geometria e suas respectivas soluções, organizados em pequenas listas.

Na lista 1 foi levado em consideração na escolha desta sequência o fato de serem problemas que, em sua grande maioria, atendem ao perfil de não precisar de um enunciado muito extenso ou simplesmente não ter um enunciado; somente a figura, propositalmente configurada com cores chamativas, dando todas as informações necessárias para ser resolvido.

Por exemplo, já no PROBLEMA 1, não houve a informação que o hexágono e o triângulo são regulares, mas podemos considerar que são. Poderíamos também considerar que não, mas neste caso não haveria uma solução tão exequível. A idéia é a diversão de usar o menor enunciado possível mas, se preferir o rigor, pode ser comunicado no início da sequência para considerar as figuras regulares quando parecer, ou buscar uma solução possível (o que passa por considerar as figuras regulares) ou algo do tipo.

Tais listas inclusive podem ser apresentadas para uma turma de alunos, toda a sequência ou parte dela, dependendo da turma e do tempo que se tem à disposição, a fim de observar a reação desta experiência de fato em sala de aula. Os problemas e suas respectivas soluções são exequíveis já a partir de conteúdos do ensino fundamental, mas podem tranquilamente ser apresentados para turmas de nível médio ou até de graduação, já que o nível dos problemas e desafios não deixam a desejar na questão de dificuldade.

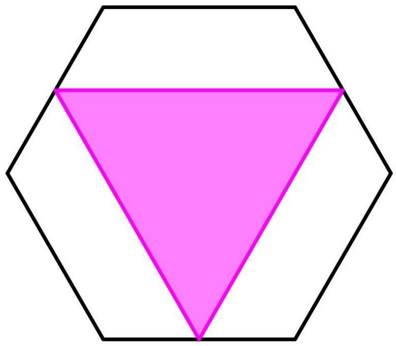
A origem dos problemas é do perfil do Instagram @caravanadamatematica, que é uma iniciativa da UFJF; alguns perfis particulares nas redes sociais de entusiastas de desafios geométricos; outros retirados de portais oficiais da OBMEP ou alguns concursos como o processo de seleção para admissão para o Colégio Naval, da Marinha; e outros foram criações ou adaptações do autor de problemas em geral retirados da internet.

5.1 LISTA 1

Nesta lista, foram organizados os problemas que necessitam de pouco ou nenhum enunciado, como originalmente propostos em redes sociais de professores e entusiastas. Basicamente é calcular a área pintada em destaque em relação a outra maior, ou calcular algo em destaque em relação aos dados fornecidos.

5.1.1 PROBLEMA 1

Qual fração do hexágono está pintada?



– Fração do hexágono

Uma solução:

O centro do hexágono regular é o baricentro do triângulo equilátero rosa. O apótema do hexágono então será 2/3 da altura do triângulo. Se chamar o lado do hexágono de L, seu apótema será $L\sqrt{3}/2$. Como isso é 2/3 da altura do triângulo rosa, e a altura de um triângulo equilátero (cujo lado vamos chamar de T) é $T\sqrt{3}/2$, vamos ter:

$$L\sqrt{3}/2 = (2/3).T\sqrt{3}/2$$

Então

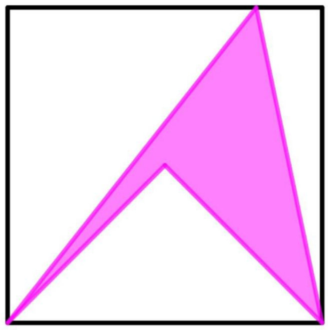
$$L = (2/3).T$$

Calculando a área do triângulo em relação a T, a área do hexágono em relação a L e substituindo L, vai encontrar a fração 3/8.

Outra solução:

Na figura temos trapézios isósceles, onde a base menor é L, a base maior é T e os lados oblíquos medem $L/2$. Os ângulos desse trapézio medem 120° e 60° e, usando uma relação de cosseno entre as informações, chega na relação entre o lado do triângulo e o lado do hexágono da solução anterior.

5.1.2 PROBLEMA 2



– Fração do quadrado

Uma solução:

Sendo L o lado do quadrado, sua área é L^2.

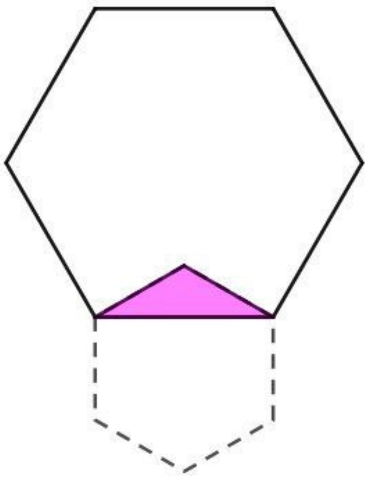
A área do triângulo branco que tem um vértice no centro do quadrado vai ser $(L.L/2)/2 = L^2/4$.

A área do triângulo que tem um vértice no lado oposto ao da base vai ser $(L.L)/2 = L^2/2$.

A área rosa vai ser $L^2/2 - L^2/4 = L^2/4$.

A fração pintada vai ser $(L^2/4)/L^2 = 1/4$.

5.1.3 PROBLEMA 3



– Fração do hexágono

Uma solução:

Chame o lado do hexágono maior de L.

Olhando para o triângulo pintado, temos que se trata de um triângulo isósceles, cujo lado maior é L cujo ângulo obtuso é 120°.

A altura deste triângulo vai ser h e usando a relação de tangente no ângulo de 30°, tem que $h = (L\sqrt{3})/6$.

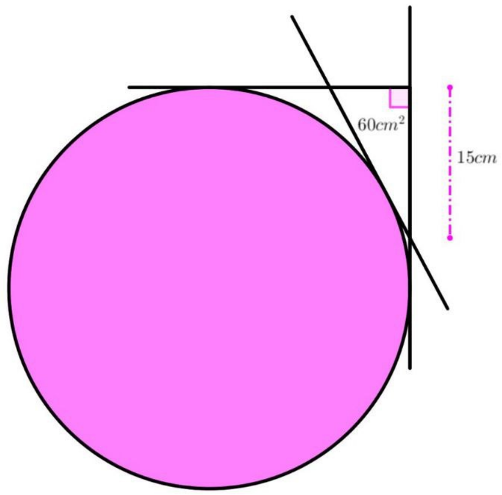
Assim, a área do triângulo hachurado será $(L/2).h = (L^2\sqrt{3})/12$.

A fração F pintada será a área do triângulo dividido pela área do hexágono maior de lado L.

$F = [(L^2\sqrt{3})/12]/[6(L^2\sqrt{3})/4]$

$F = 1/18$

5.1.4 PROBLEMA 4



– Área da circunferência

Uma solução:

O problema quer a área pintada, considerando as informações prestadas no desenho.

O triângulo retângulo de área igual a 60 cm² apresenta altura igual a 15 cm; sua base então será 8 cm. Sua hipotenusa é formada por um segmento de reta que é tangente à circunferência, e esse segmento é dividido em duas partes que chamaremos de x e y.

Pela propriedade de potência de um ponto exterior à uma circunferência, e considerando as retas suportes dos catetos do triângulo retângulo, temos que o raio R da circunferência será:

$R = y + 8$

$R = 15 + x$

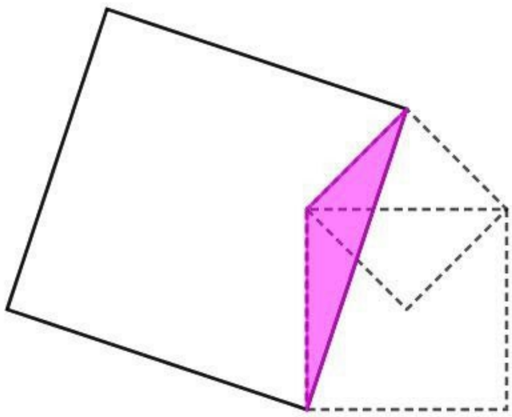
então:

$y = x + 7$

temos também por pitágoras que $(x + y)^2 = 15^2 + 8^2$

Montando esse sistema e resolvendo, temos que $x = 5$ e $y = 12$. E o raio da circunferência $R = 20$; logo sua área vai ser 400π.

5.1.5 PROBLEMA 5



– Área do quadrado

Uma solução:

O problema quer a fração do quadrado que está pintada; chamaremos essa área pintada que é um triângulo de S.

Chamaremos o lado do quadrado maior de L; o lado do quadrado pequeno de K; a diagonal do quadrado pequeno vai valer $K\sqrt{2}$, e esse é justamente o lado do quadrado médio.

Temos então que o triângulo pintado tem lados $K, K\sqrt{2} \quad e \quad L$, e um ângulo obtuso de $90° + 45° = 135°$.

Usando a lei dos cossenos, teremos:

$L^2 = K^2 + (K\sqrt{2})^2 - 2.K.K\sqrt{2}.(cos 135°)$

$L^2 = 5K^2$

Calculando a área do triângulo usando a lei dos senos, com os lados K e $K\sqrt{2}$, temos:

$S = K.K\sqrt{2}.sen 135°/2)$

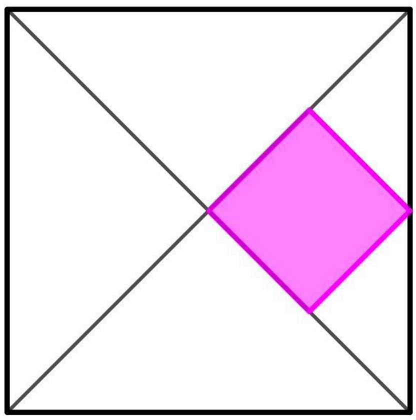
$S = K^2/2$

A fração F vai ser:

$F = (K^2/2)/5K^2$

$F = 1/10$

5.1.6 PROBLEMA 6



– Fração do quadrado

Uma solução:

Pode-se considerar que o problema quer saber que fração do quadrado maior está pintada.

Chamando o lado do quadrado maior de L, temos que o quadrado pintado está localizado entre duas semidiagonais e um lado do quadrado maior; também temos, junto com esse quadrado menor, dois triângulos retângulos isósceles menores, cujos catetos têm a mesma medida do lado do quadrado menor que chamaremos de l.

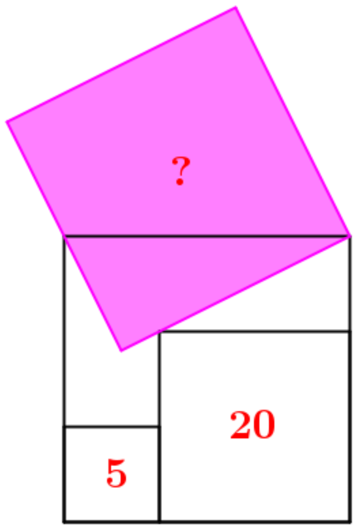
Considerando os lados desses triângulos retângulos isósceles, vamos ter:

$$l = [(L\sqrt{2})/2] - l$$
$$l = (L\sqrt{2})/4$$

A fração pintada chamada de F vai ser:

$$F = l^2/L^2$$
$$F = 1/8$$

5.1.7 PROBLEMA 7



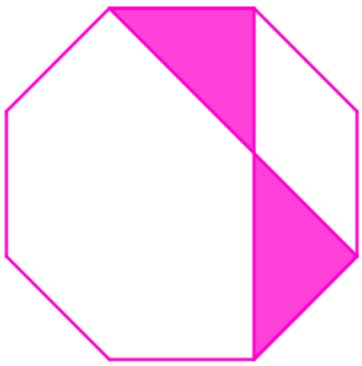
– Área do quadrado

Uma solução:

O quadrado menor tem lado igual a $\sqrt{5}$, o quadrado médio tem lado $2\sqrt{5}$ e o quadrado maior tem lado $3\sqrt{5}$. Acima do quadrado médio temos um triângulo retângulo cujos catetos medem $2\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$, apresentando então uma hipotenusa igual a 5.

Este triângulo retângulo tem acima dele outro triângulo retângulo rosa semelhante, cuja hipotenusa é igual a $3\sqrt{5}$; Com a semelhança e as contas, chegamos que o lado do quadrado rosa será 6 e sua área 36.

5.1.8 PROBLEMA 8



– Área do octógono

Que área do octógono está hachurada?

Uma solução:

O ângulo interno do octógono mede 135°, então o losango branco da figura vai ter ângulos de 135° e 45°; os triângulos rosas são congruentes retângulos isósceles de catetos l e hipotenusa $l\sqrt{2}$, assim a altura do octógono será $(l + l\sqrt{2})$.

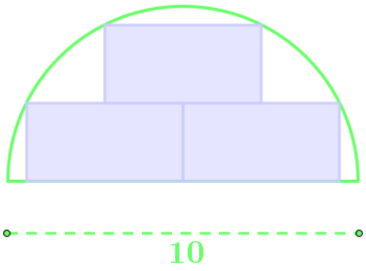
A área do octógono pode ser calculada, dentre outras formas, considerando 8 triângulos isósceles congruentes (todos com um vértice no centro do octógono), onde a base é l e a altura é $(l + l\sqrt{2})/2$. Com os cálculos, a área dele vai ser $2l^2(\sqrt{2} + 1)$. A área pintada é a área de um quadrado de lado l.

Com as contas, a fração pintada será $(\sqrt{2} - 1)/2$.

5.2 LISTA 2

Esta lista de problemas segue a idéia anterior da LISTA n°1, onde praticamente não é necessário algum enunciado para o entendimento do problema.

5.2.1 PROBLEMA 1



– Área dos retângulos

Qual a área dos retângulos?

Uma solução:

Chamando a base do retângulo de b e a altura de a, e traçando um segmento de reta entre o centro da semicircunferência e um vértice do retângulo de cima (um raio), e outro segmento entre o centro da semicircunferência e a metade da base superior do mesmo retângulo, temos:

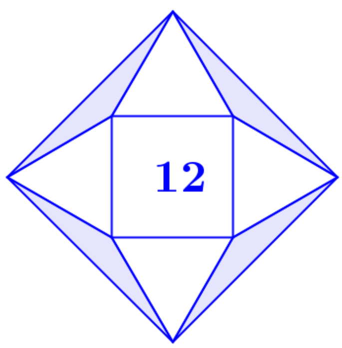
$(2a)^2 + (b/2)^2 = 5^2$

$16a^2 + b^2 = 100$ (I)

Também temos que $a^2 + b^2 = 5^2$ (II)

De I e II temos que $a^2 = 5 \quad e \quad b^2 = 20.$ Onde $ab = 10$ e as três áreas dá um total de 30.

5.2.2 PROBLEMA 2



– Área hachurada do quadrado

Uma solução:

Temos aqui outro formato diferente de fração, onde podemos interpretar que, dado o valor da área informada, o problema quer saber o valor da área pintada (também podemos interpretar que o problema pede a fração do quadrado maior que está pintada, é uma questão a ser combinada com os alunos ou uma questão de se considerar as diferentes respostas).

Considere um dos triângulos isósceles pintados; ele é formado por dois lados iguais, que são os mesmos lados dos triângulos equiláteros, que tem a mesma medida do quadrado menor; chamaremos de L.

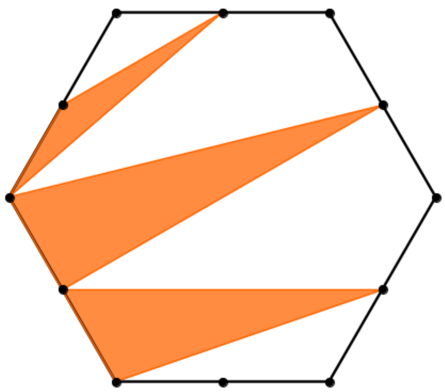
O triângulo pintado então terá área S, que será calculada usando a fórmula do seno, uma vez que seu ângulo obtuso mede 150°.

$S = L.L.sen150°/2$

$S = L^2/4$

Como L^2 é dado e igual a 12, temos que $S = 3$. Assim, a área pintada vai ser 12.

5.2.3 PROBLEMA 3



– Área pintada do hexágono

Qual fração do hexágono está pintada?

Uma solução:

Considere o hexágono regular de lado igual a $2L$; os triângulos chamaremos de T_1, T_2 e T_3, de cima para baixo, respectivamente. Vamos calcular a área de todos usando a fórmula básica que relaciona a base com a altura.

T_1 vamos considerar a base L; para calcular sua altura vamos prolongar a reta suporte de sua base e traçar a perpendicular até o vértice oposto à base. Como o ângulo externo do hexágono é 60°, temos que essa altura de T_1 será $(L\sqrt{3})/2$. Então sua área vai ser:

$S_{T1} = (L/2).(L\sqrt{3})/2$

$S_{T1} = (L^2\sqrt{3})/4$

T_2 também tem base L; a altura vai ser duas vezes o apótema do hexágono.

$S_{T2} = (L/2).2.(L\sqrt{3})/2$

$S_{T2} = (L^2\sqrt{3})/2$

T_3 está dentro de um trapézio isósceles, e sua base é a base maior deste trapézio. Identificando os ângulos internos desse trapézio como 120° e 60°, chegamos com facilidade que a base maior do trapézio vai ser $3L$ e a altura $(L\sqrt{3})/2$.

$S_{T3} = (3L/2).(L\sqrt{3})/2$

$S_{T3} = 3(L^2\sqrt{3})/4$

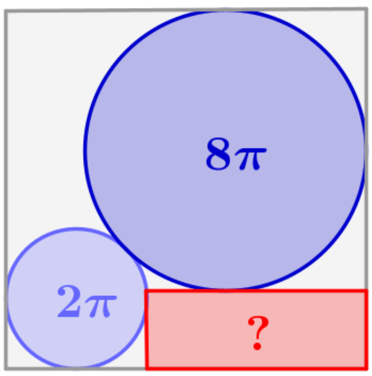
$S_{T1} + S_{T2} + S_{T3} = 3(L^2\sqrt{3})/2$

A fração será:

$F = [3(L^2\sqrt{3})/2]/6((2L)^2\sqrt{3})/4$

$F = 1/4$

5.2.4 PROBLEMA 4



– Quadrado, círculos e retângulo

Uma solução:

Vamos chamar o lado do quadrado de L, o raio do círculo maior de R e o raio do círculo menor r; a base do retângulo vermelho b e sua altura a.

Pela área do círculo maior, tem:

$8\pi = \pi.R^2$

$R = 2\sqrt{2}$

Círculo menor:

$2\pi = \pi.r^2$

$r = \sqrt{2}$

Pela diagonal do quadrado que passa pelos centros das circunferências, temos:

$L\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + R + R\sqrt{2}$

$L = 3 + 3\sqrt{2}$

$a = L - 2R$

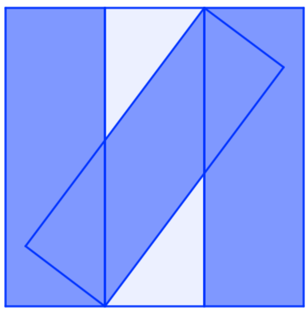
$a = 3 - \sqrt{2}$

$b = L - 2r$

$b = 3 + \sqrt{2}$

$ab = 7$

5.2.5 PROBLEMA 5



– Fração pintada do quadrado

Uma solução:

O lado do quadrado chamaremos de L; observe que os quatro triângulos retângulos da figura são congruentes, pois tem ângulos iguais e um dos catetos igual a $L/3$. Chamaremos o outro cateto de K, então a hipotenusa será $L - K$ e temos:

$(L - K)^2 = K^2 + L^2/9$

$K = 4L/9$

A área dos triângulos brancos vai ser:

$S_1 = 2[(L/3).K/2]$

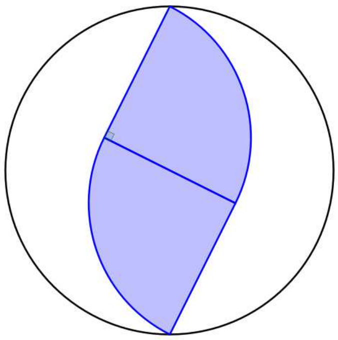
$S_1 = 4L^2/27$

A fração F pintada vai ser:

$F = (L^2 - 4L^2/27)/L^2$

$F = 23/27$

5.2.6 PROBLEMA 6



– Fração pintada da circunferência

Uma solução:

É marcado o diâmetro da circunferância maior unindo duas pontas dos setores circulares, e dois raios menores completando o triângulo retângulo como na figura. Por pitágoras, temos

$(2R)^2 = (2r)^2 + r^2$

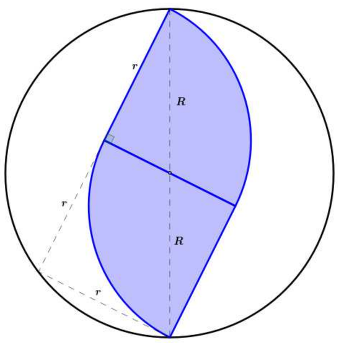
$4R^2 = 4r^2 + r^2$

$r^2 = 4R^2/5$

A razão F entre a área pintada e a área do círculo maior vai ser:

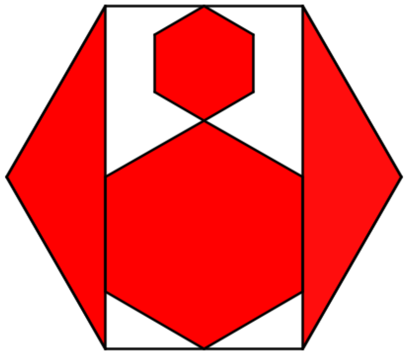
$F = (\pi.r^2/2)/\pi.R^2$

$F = 2/5$



– Fração pintada solução

5.2.7 PROBLEMA 7



– Fração pintada do hexágono

Que fração do hexágono maior está pintada?

Uma solução:

L é o lado do hexágono totalmente vermelho maior, e l o lado do hexágono vermelho menor; o lado do maior hexágono da figura vai ser $L\sqrt{3}$, porque é exatamente a altura do hexágono vermelho maior (duas vezes $(L\sqrt{3})/2$).

A altura do maior hexágono de lado igual a $L\sqrt{3}$ vai ser:

$2[(L\sqrt{3})\sqrt{3}/2] = 2L + 2l$

$2l = L$

A área vermelha vai ser a área do hexágono menor, somada á área do hexágono médio e às áreas dos dois triângulos isósceles.

$A_v = 6(l^2\sqrt{3})/4 + 6(L^2\sqrt{3})/4 + 2(L\sqrt{3}.L\sqrt{3}sen120°/2)$

$A_v = 27L^2(\sqrt{3})/8$

Área do hexágono maior:

$A_h = 6(L\sqrt{3})^2(\sqrt{3})/4$

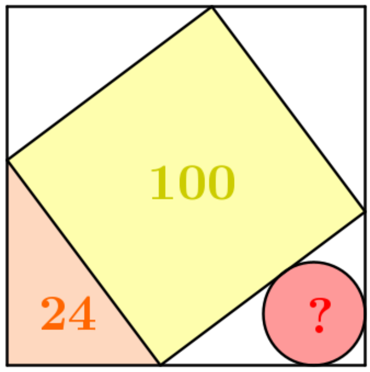
$A_h = 36L^2(\sqrt{3})/8$

A fração F vai ser:

$F = A_v/A_h$

$F = 3/4$

5.2.8 PROBLEMA 8



– Quadrado, retângulo e círculo

Uma solução:

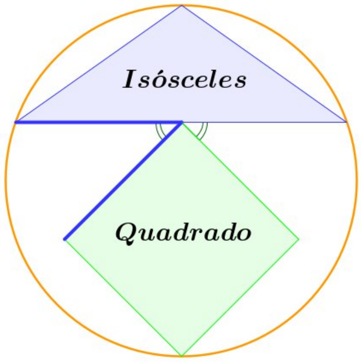
É fácil notar que o lado do quadrado amarelo mede 10; também não é difícil notar que a área total do quadrado maior será 24 x 4 + 100 = 196, onde então seu lado vai medir 14. Considerando a circunferência inscrita no triângulo, usando a propriedade de potência de ponto, e sabendo que os catetos tem o semiproduto igual a 24, chegamos à um sistema de equações cuja solução encontrará os catetos valendo 6 e 8. Com isso, encontramos o raio da circunferência igual a 2 e sua área 4π.

5.3 LISTA 3

Aqui temos uma lista de problemas originalmente propostos pelo perfil de Instagram da Caravana da Matemática, uma iniciativa da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). A Caravana da Matemática fazia a proposta dos desafios em seu perfil, e os seguidores ou entusiastas respondiam na própria plataforma do Instagram. Uma curiosidade nesta proposta de desafio era a forma de apresentação das possíveis respostas, pois como não é possível carregar com imagens as respostas, estas deveriam ser unicamente na forma escrita, exatamente conforme estão apresentadas a maioria das respostas neste trabalho.

5.3.1 PROBLEMA 1

Qual é a razão entre as áreas do triângulo e do quadrado? Qual é o raio do círculo?



– Caravana - quadrado e triângulo isósceles

Uma solução:

Chamando o lado do quadrado de L, a diagonal dele é $L\sqrt{2}$. A altura do triângulo chama de h.

No círculo temos as duas cordas $(L\sqrt{2}+h)$ e $(L+L)$ que se interceptam perpendicularmente e, pela propriedade de potência de ponto, tem que

$$h.L.\sqrt{2} = L.L \qquad \Rightarrow \qquad L = h\sqrt{2}$$

A área do triângulo é $(L+L).(h/2)$.

A área do quadrado é L^2.

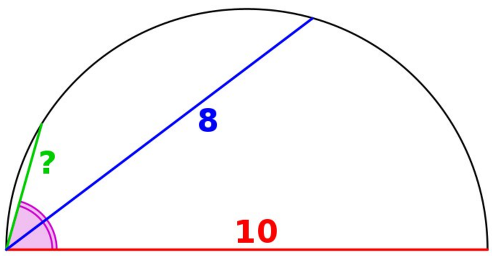
Substituindo e fazendo as contas, chega que a razão procurada é $\sqrt{2}/2$.

Pela propriedade de potência de ponto, temos

$L.L = h.L\sqrt{2}$

Com as contas, chega que $R = (3L\sqrt{2})/4$

5.3.2 PROBLEMA 2



– Caravana - cordas e semicircunferência

Uma solução:

Chamando o segmento verde de AB, o azul de AC, vermelho de AD e o encontro entre os segmentos AC e BD será P.

O triângulo ACD é retângulo e o terceiro lado mede 6. O triângulo ABD também é retângulo porque também está numa semicircunferência.

Por semelhança entre ACD e DCP, temos:

$8/6 = 6/PC \qquad \Rightarrow \qquad PC = 9/2.$

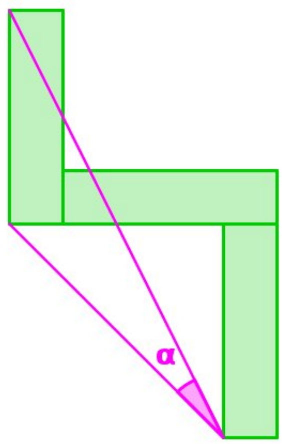
Por outra semelhança entre ABP e ACD, temos:

$(8 - 9/2)/AB = 10/8 \qquad \Rightarrow \qquad AB = 28/10$

Sugestão de modificação do problema original

Quanto mede o segmento que une a extremidade do segmento verde à extremidade do segmento azul?

5.3.3 PROBLEMA 3



– Caravana - retângulos verdes

Uma solução:

Repare que a linha rosa menor é a diagonal de um quadrado cujo lado é o comprimento do retângulo verde (chamaremos de L). Neste caso, alfa mais um outro ângulo beta (à direita de alfa) é igual a 45°. Desenhe outro retângulo verde, também na horizontal, à direita da extremidade do retângulo mais alto (que está na vertical), de forma que a altura da nova figura vai continuar sendo duas vezes o comprimento do retângulo. Se fechar essa figura com uma linha (vai ficar parecida com o dígito 9), tem um triângulo retângulo onde a linha rosa maior é hipotenusa, catetos L e 2L, e o ângulo beta já comentado. Daí tira que a tangente de beta é 1/2, e com a relação trigonométrica de arco diferença de tangentes, $tg(45° - \beta) = tg\alpha$, chega que a $tg\alpha = 1/3$.

Outra solução:

A linha rosa maior está entre os pontos que chamaremos de A e B, e a linha amarela menor, entre os pontos B e C. BC é diagonal de um quadrado cujo lado é o comprimento do retângulo verde, chamaremos esse comprimento de L. Temos então no triângulo ABC um lado que mede L, outro lado que mede $L\sqrt{2}$ e o ângulo entre eles igual a 135° (90° + 45°). Faremos lei dos cossenos pra achar o lado AB (vai ser $L\sqrt{5}$) e, ainda nesse triângulo, já sabendo todos os lados, faremos lei dos senos pra encontrar seno de alfa. Com o seno de alfa na mão, faremos a relação fundamental da trigonometria pra encontrar o cosseno de alfa; sabendo o seno e o cosseno, vamos achar que a $tg\alpha$ é 1/3.

Terceira solução:

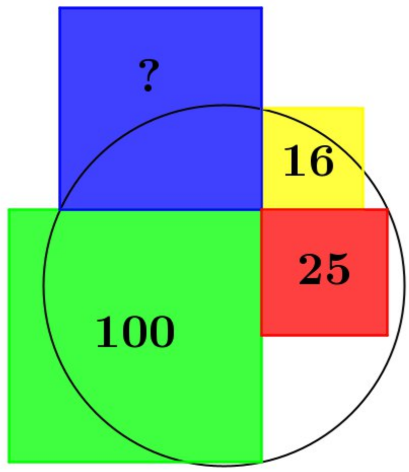
Desenhe outro retângulo verde também na vertical imediatamente abaixo daquele que está mais à esquerda, e na parte de baixo da figura, feche com uma linha. Vamos ter um triângulo retângulo com hipotenusa igual à linha rosa maior e catetos 2L e L, e um ângulo igual à $(45° + \alpha)$.

Então $tg(45° + \alpha) = 2L/L$, o que significa que $tg(45° + \alpha) = 2$, de onde, pela fórmula do arco soma de tangente, vai chegar em $tg\alpha = 1/3$.

Quarta solução diferente:

A linha rosa pequena é diagonal de um quadrado com lado igual ao comprimento do retângulo (chamaremos esse comprimento de L); completaremos esse desenho de quadrado. Por semelhança, temos que a linha rosa grande é mediana do triângulo isósceles retângulo cuja hipotenusa é a linha rosa pequena. Essa perpendicular do pé da mediana até a hipotenusa pequena (linha rosa pequena) mede, por outra semelhança, a metade da altura do triângulo retângulo isósceles, ou seja, $(L\sqrt{2}/2)/2$. A distância do pé desta última perpendicular até o vértice de alfa será $L\sqrt{2} - L\sqrt{2}/4 = 3L\sqrt{2}/4$. A $tg\alpha$ será $(L\sqrt{2}/4)/(3L\sqrt{2}/4) = 1/3$

5.3.4 PROBLEMA 4



– Caravana - quadrados coloridos

Uma solução:

Pela propriedade de potência de ponto, e considerando o ponto em comum dos quatro vértices dos quadrados e os pontos de intersecção entre alguns vértices dos quadrados e a circunferência, temos que:

$$4.10 = 5.L_{az} \qquad \Rightarrow \qquad L_{az} = 8$$

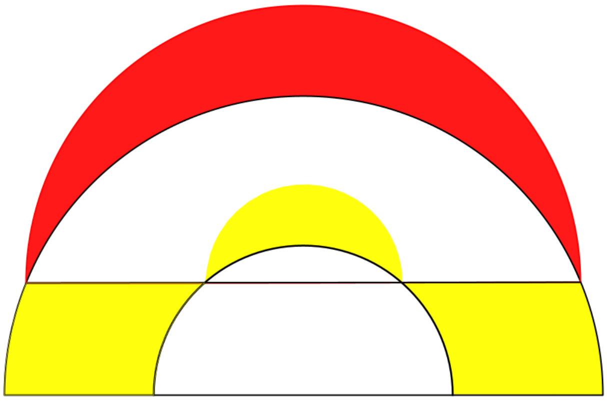
Sendo L_{az} o lado do quadrado azul, sua área vai ser igual à 64.

Para encontrar o raio desta circunferência, faremos em seguida a projeção do centro do círculo até cada uma das cordas; encontraremos um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao raio, R.

Usando novamente a propriedade de potência de ponto nessas cordas ($L_{az}.L_{vm} = L_{am}.L_{vd}$) encontraremos a relação $L_{az}^2 + L_{vd}^2 + L_{vm}^2 + L_{am}^2 = 4R^2$.

Fazendo as contas, R vai ser $\sqrt{205}/2$.

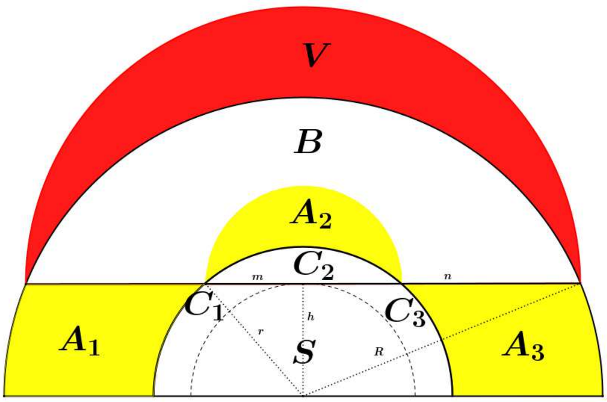
5.3.5 PROBLEMA 5



– Caravana - razão entre área vermelha e amarela

Qual é a razão entre as áreas vermelha e amarela?

Uma solução:



– Caravana - solução razão entre área vermelha e amarela

Considere C_1, C_2 e C_3 os trechos de área da semicoroa circular de raios r e h. Temos:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \pi.(r^2 - h^2)/2 \qquad \text{(i)}$$

Considere o semicírculo de área $A_2 + C_2$

$$A_2 + C_2 = \pi.m^2/2 \qquad \text{(ii)}$$

Como, por pitágoras, $m^2 = r^2 - h^2$, temos de (i) e (ii):

$$A_2 = C_1 + C_3 \qquad \text{(iii)}$$

Da mesma forma, considere agora os trechos da semicoroa circular formada pelos círculos de raios h e R, temos:

$$A_1 + C_1 + A_2 + C_2 + A_3 + C_3 + B = \pi.(R^2 - h^2)/2 \qquad \text{(iv)}$$

Considere o semicírculo de área $V + B + A_2 + C_2$.

$V + B + A_2 + C_2 = \pi.(m+n)^2/2$ (v)

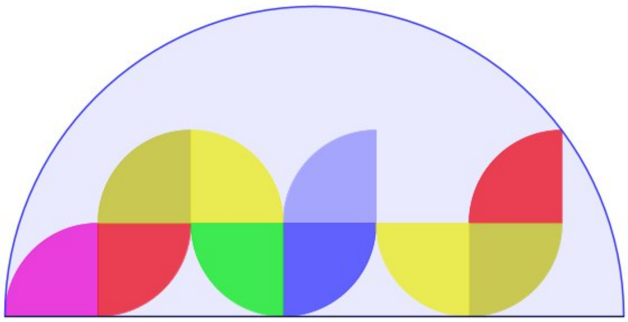
Como, por Pitágoras, $(m+m)^2 = (R^2 - h^2)$, temos de (iv) e (v)

$A_1 + C_1 + A_3 + C_3 = V$

Como $C_1 + C_3 = A_2$, temos que

$V = A_1 + A_2 + A_3$

5.3.6 PROBLEMA 6



– Caravana - pequenos setores na semicircunferência

Qual área da semicircunferência está pintada?

Uma solução:

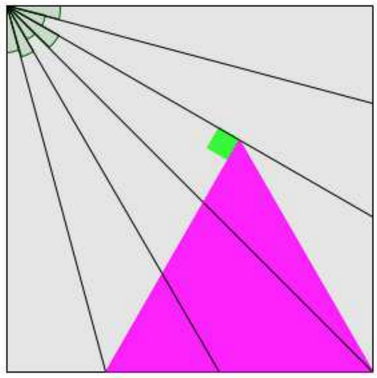
Chamando de r o raio dos quartos de círculos coloridos e R o raio da semicircunferência branca.

O diâmetro da semicircunferência chamaremos AB; o ponto do quarto de círculo vermelho mais à direita que toca a semicircunferência chamaremos P. A projeção de P sobre AB é uma altura que mede $2r$ e divide AB em dois segmentos, $6r$ e $(2R - 6r)$. O triângulo ABP é retângulo em P e, pelas relações métricas num triângulo retângulo, temos que $(2r)^2 = 6r(2R - 6r)$.

Com as contas, temos que $R = 10r/3$.

Calculando as áreas em questão, temos que a razão é $9/20$.

5.3.7 PROBLEMA 7



– Caravana - triângulo é equilátero?

Outro problema que precisa de um enunciado mínimo: o triângulo destacado é equilátero? Justifique.

Uma solução:

A partir do ângulo dividido e no sentido horário, considere os pontos A, B, C, D, E, F, G e H os vértices e encontros de retas que tocam o quadrado; o vértice reto verde chamaremos de I e, entre I e G, chamaremos J e K os outros encontros de retas; e considere o lado do quadrado L.

O ângulo AGH mede 75°, AGI mede 45° e então IGE mede 60°, assim como AFG.

Encontrando os senos de 15° e 75° com as fórmulas de arco soma e arco diferença de 30° e 45°, chegaremos que $\text{sen}15° = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ e $\text{sen}75° = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$

Usando a lei dos senos no triângulo AGH, encontraremos $GH = (2 - \sqrt{3})L$ e $AG = (\sqrt{6} - \sqrt{2})L$

Sabendo GH, encontramos EG com facilidade (subtraindo GH de L):

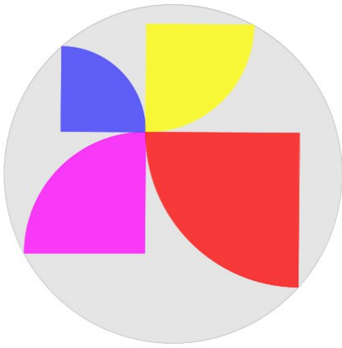
$EG = L\sqrt{3} - L$

Conhecendo AG, encontramos GI (pois AG é a diagonal de um quadrado de lado GI):

$GI = (\sqrt{3} - 1)L$

Como $EG = GI$ e o ângulo EGI é 60°, o triângulo rosa é equilátero.

5.3.8 PROBLEMA 8



– Caravana - Fração dos setores na circunferência

Qual a área do círculo maior está pintada?

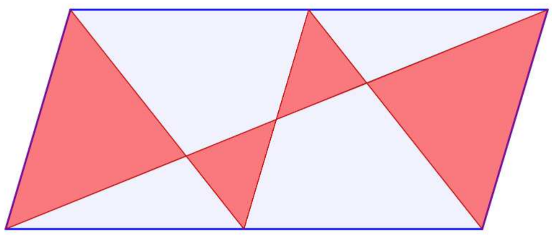
Uma solução:

Para resolver este problema, vamos fazer a projeção do centro do círculo até cada uma das cordas (formadas pelas cordas dos setores coloridos); encontraremos um triângulo retângulo de hipotenusa igual ao raio, R. Usando também a propriedade de potência de ponto nessas cordas ($ac = bd$) vamos encontrar a relação $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$. Voltando ao desafio, a soma das áreas dos quartos de círculo vai ser $S1 + S2 + S3 + S4 = [(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2]\pi/4$, onde $(r_1)^2 = a^2/2, (r_2)^2 = b^2/2, (r_3)^2 = c^2/2 \quad e \quad (r_4)^2 = d^2/2$.

Fazendo as contas, a razão vai ser 1/2.

5.4 LISTA 4

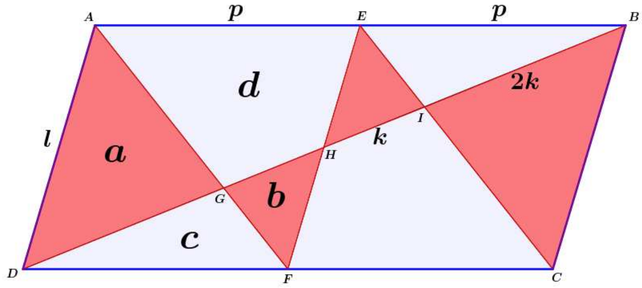
5.4.1 PROBLEMA 1



– Fração do paralelogramo

Que fração do paralelogramo está pintada em destaque?

Uma solução:



– Solução da fração do paralelogramo

E, F e H são os pontos médios de AB, CD e BD respectivamente; Considere as áreas $[ADG] = a$, $[FHG] = b$, $[DFG] = c$ e $[AEHG] = d$.

Os triângulos $[EHI]$ e $[BCI]$ são semelhantes e razão de semelhança igual a 1/2. Temos

$b/a = ((l/2)/l)^2 \quad \Rightarrow \quad b/a = 1/4 \quad \Rightarrow \quad a = 4b$

Também temos

$c/[BCD] = p.2k/2p.6k \quad \Rightarrow \quad c/[BCD] = 1/6 \quad \Rightarrow \quad c = [ABCD]/12$

$b + c = [BCD]/4 \quad \Rightarrow \quad b + c = [ABCD]/8$

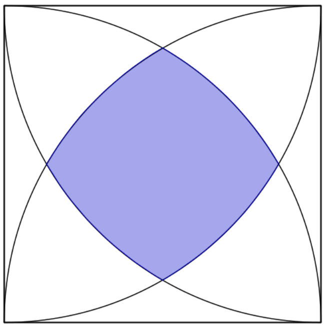
Como c é conhecido , temos

b = [ABCD](1/8 - 1/12) $\quad \Rightarrow \quad b = [ABCD]/24 \quad \Rightarrow \quad a = [ABCD]/6$

Então

$2a + 2b = [ABCD](1/3 + 1/12) \quad \Rightarrow \quad 2a + 2b = [ABCD].5/12$

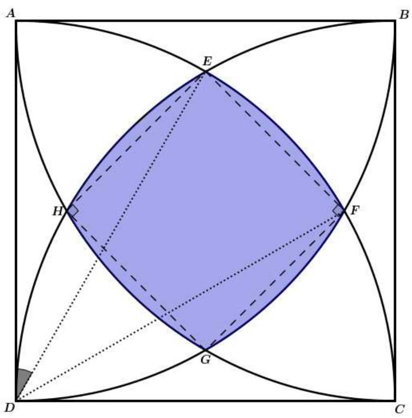
5.4.2 PROBLEMA 2



– Fração do quadrado

Que fração do quadrado está pintada em destaque?

Uma solução:



– Solução de fração do quadrado

É preciso encontrar o valor da área do quadrado EFGH, e somar com o quádruplo da área do segmento circular formado pelo setor EDF e triângulo EDF.

Considere o lado do quadrado sendo L. O triângulo EDC é equilátero de lado L; com isso, o ângulo ADE mede 30° e, pelo mesmo raciocínio, o ângulo CDF também mede 30°.

O triângulo EDF é isósceles de lados L e ângulo formado por eles de 30°; pela lei dos cossenos aplicada ao triângulo EDF, é possível encontrar o lado EF:

$EF^2 = L^2 + L^2 - 2.L.L.\cos 30°$

$EF^2 = L^2(2 - \sqrt{3})$

A área S de um segmento circular vai ser:

$S = \pi.L^2/12 - L^2.\,\text{sen}30°/2$

$S = L^2(\pi - 3)/12$

A área total A_T pintada vai ser:

$A_T = EF^2 + 4.S$

$A_T = L^2(2 - \sqrt{3}) + L^2.\pi/3 - L^2$

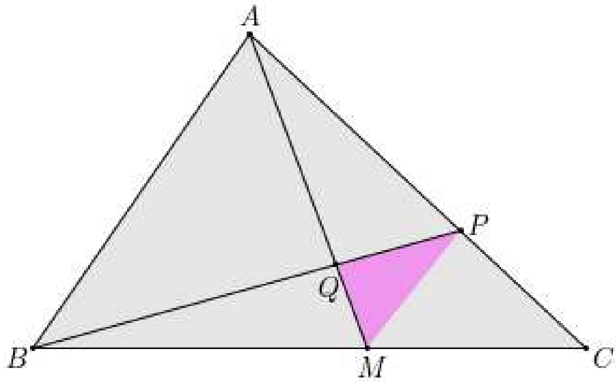
$A_T = L^2(1 - \sqrt{3} + \pi/3)$

A fração pintada F vai ser:

$F = 1 - \sqrt{3} + \pi/3$

5.4.3 PROBLEMA 3

Sabendo que AQ = 3.MQ e AP = 2.CP, encontre a fração do triângulo ABC que está pintada em destaque?



– Fração hachurada do triângulo

Uma solução:

$[APM] = 2[CPM]$

$[APQ] = 3[PQM]$

$[PQM] = A \quad \Rightarrow \quad [APQ] = 3A \quad \Rightarrow \quad [APM] = 4A \quad \Rightarrow \quad [CPM] = 2A$

Usando Menelaus no triângulo ACM e secante BP, sendo $CP = x$ e $QM = y$, temos

$2x.BC..y = 3y.x.BM$

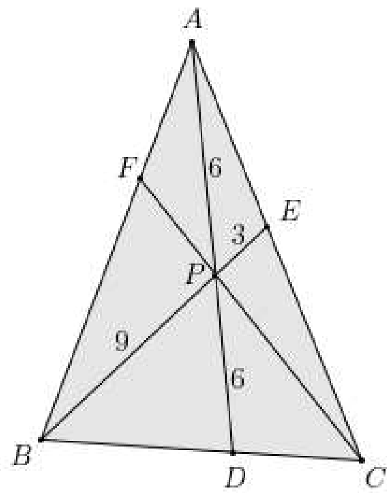
$BC/BM = 3/2 \quad \Rightarrow \quad (BM + CM)/BM = 3/2 \quad \Rightarrow \quad CM/BM = 1/2 \quad \Rightarrow \quad BM = 2.CM$

Usando a razão entre dois triângulos e um ângulo em comum, temos

$x.CM/(3x.3CM) = 2A/S \quad \Rightarrow \quad A = S/18$

5.4.4 PROBLEMA 4

Na figura, CF = 20. O triângulo CPD representa que fração do triângulo ABC?



– Triângulo com cevianas dadas

Uma solução:

Da relação entre áreas do capítulo de Conteúdos Menos Conhecidos, temos relações entre as áreas e segmentos das cevianas em um triângulo. Neste exercício, temos:

$AP/PD = ([APB] + [APC])/[BPC]$
$BP/EP = ([BPC] + [APB])/[APC]$

Substituindo os valores, temos:
$[BPC] = [APB] + [APC]$
$3[APC] = [BPC] + [APB]$
Simplificando as equações, encontramos $[APC] = [APB]$ e $[BPC] = 2.[APC]$
Assim, a área de BPC é $[ABC]/4$

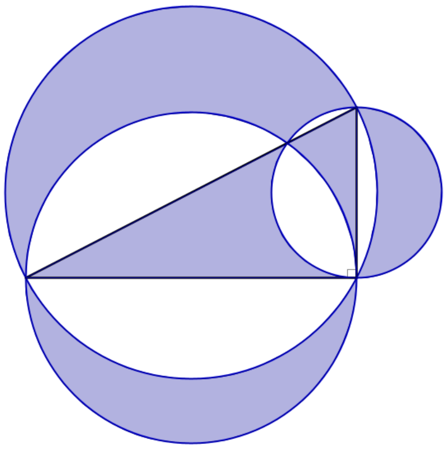
Também das relações daquele capítulo, temos:

$BD/CD = [APB]/[APC] \quad \Rightarrow \quad BD = CD$

Logo, as áreas $[BPD]$ e $[CPD]$ são iguais, e cada uma vale a metade de $[ABC]/4$, ou seja, $[ABC]/8$.

5.4.5 PROBLEMA 5

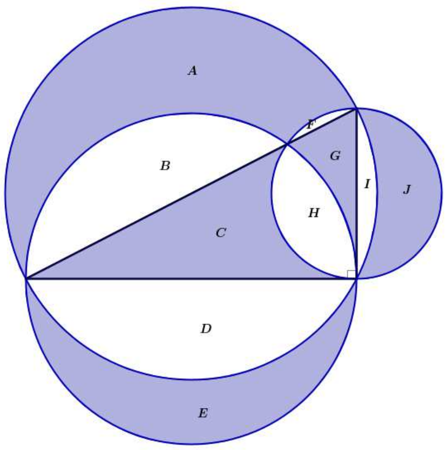
Sendo a área do triângulo retângulo abaixo igual a 1, quanto é a área pintada da figura?



– Lúnulas congestionadas

Uma solução:

Na figura abaixo estão nomeadas as áreas. Por pitágoras, considerando as metades das circunferências, temos



– Lúnulas congestionadas solução

$(B + C + H) + (F + G + H) = A + B + F$

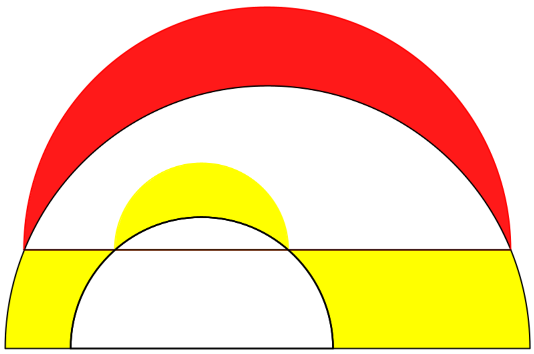
$A = (C + G + H) + H$

Ou seja, a área A preenche a área do triângulo completo mais a área H. Temos até aqui duas vezes a área do triângulo.

$E + J$ são as lúnulas de hipócrates, cujo total é a área do triângulo. Assim, sendo a área do triângulo igual a 1, temos que $A + C + G + E + J = 3$.

5.4.6 PROBLEMA 6

Encontre a razão entre a área vermelha e a área amarela da figura abaixo.

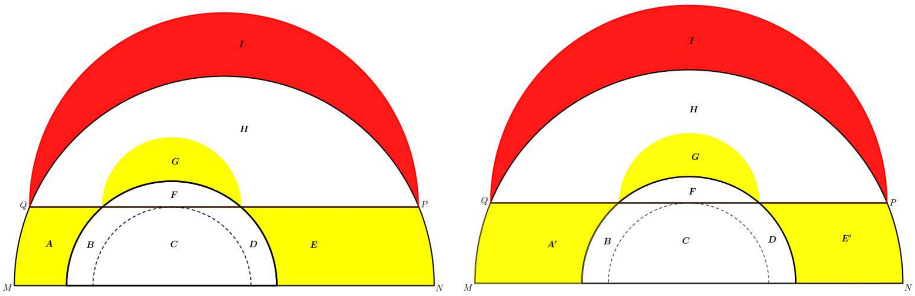


– Razão entre área vermelha e amarela modificado

Uma solução:

Dando nome a algumas áreas, é possível perceber que a área total da região da semicircunferência maior delimitada pelos pontos $MNPQ$ é sempre constante, como a idéia do teorema dos carpetes. nas figuras, as áreas B, C e D não se alteram, mas A e E sim. Porém, podemos garantir pelo teorema dos carpetes que $A + E = A' + E'$, pois em ambos os casos, é a área delimitada pelos pontos $MNPQ$ menos a área $(B + C + D)$.

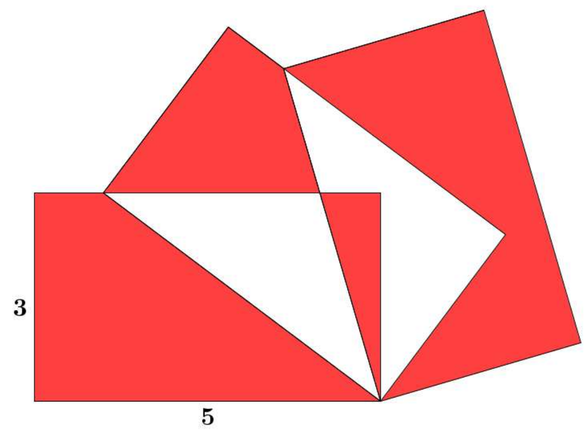
Desta forma, é possível organizar as semicircunferências de áreas $(B + C + D + F)$ de modo que tenham o mesmo centro da semicircunferência maior, o que transforma o problema atual no PROBLEMA 5 da LISTA 3, já resolvido.



– Razão entre área vermelha e amarela solução

5.4.7 PROBLEMA 7

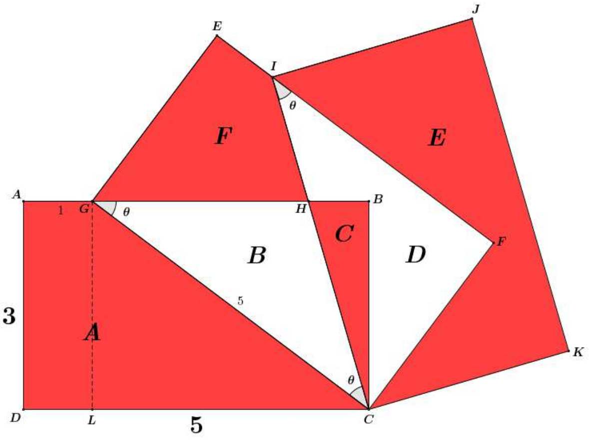
Três retângulos congruentes. Qual a medida da área vermelha?



– Três retângulos congruentes

Uma solução:

Pelo teorema dos carpetes, temos que a área A é igual á soma das áreas F e D (pois dois retângulos tem em comum B e C); A soma das áreas F e B é igual à área E (pois dois retângulos têm em comum C e D); e a soma das áreas A e B é igual à soma das áreas D e E (pois dois retângulos têm em comum a área C).



– Três retângulos congruentes solução

A área A é a soma do retângulo $AGLD$ com o triângulo retângulo GLC. $A = 3 + (4.3)/2 = 9$.

O trapézio $EICG$ é congruente ao trapézio $AGCD$. logo

$F + B = E \qquad \Rightarrow \qquad E = 9$

Também temos que o triângulo BCG é congruente ao triângulo FCI; e, por carpetes, $B = D$.

No retângulo $EFCG$, temos

$B + C + D + F = 15$

Como $(B + C) = 6$ e $(C + D) = 6$ (pois é o resultado da subtração entre a área total do retângulo que é 15 e a área do trapézio que é 9), e somando C aos dois membros da igualdade acima, temos

$B + C + D + C + F = 15 + C$

$6 + 6 + F = 15 + C$

$F = C + 3$

Uma forma de encontrar a área C é descobrir a relação BH/GH, pois com ela é possível encontrar a relação entre as áreas dos triângulos de área C e área $(B + C)$. Uma maneira de encontrar o segmento BH é aplicando a relação de Stewart no triângulo BCG e ceviana CH. Sendo $BH = x$, $GH = (4 - x)$, $BC = 3$ e $CH = (4 - x)$ (pois o triângulo GHC é isósceles, uma vez que o ângulo HGC é igual ao ângulo FIC por congruência dos triângulos, e o ângulo HCG é alterno interno de FIC), temos

$5^2.x + 3^2.(4 - x) = (4 - x)^2.4 + 4x.(4 - x)$

$25.x + 36 - 9x = 64 - 32x + 4x^2 + 16x - 4x^2$

$16x + 32x - 16x = 64 - 36$

$x = 28/32$

$x = 7/8$

A área C vai ser:

$C/(B + C) = (7/8)/4 \quad \Rightarrow \quad C/6 = 7/32 \quad \Rightarrow \quad C = 21/16$

E a área F vai ser

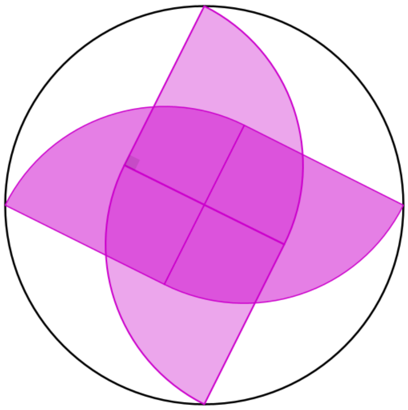
$F = C + 3 \quad \Rightarrow \quad F = 69/16$

Por fim, a área total vermelha

$A + F + C + E = 9 + 9 + 21/16 + 69/16 = 189/8$

5.4.8 PROBLEMA 8

Qual fração da circunferência está pintada?

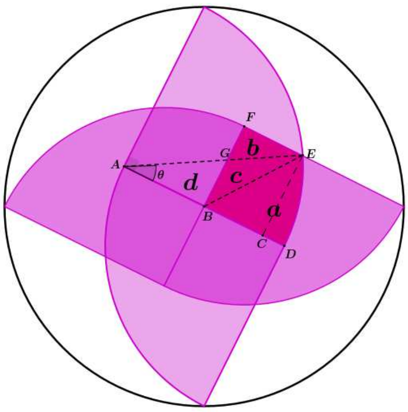


– Rosa dos ventos ampliada

Uma solução:

Este problema é uma variante mais elaborada de outro já apresentado neste trabalho, o PROBLEMA 6 da LISTA 2.

Para resolução deste, é preciso descobrir a área de intersecção das duas figuras congruentes; a área pintada vai ser o dobro da área de uma figura, menos a intersecção delas. Para calcular a intersecção, vamos calcular a área delimitada pelos pontos $FEDB$, e depois multiplicar por 4.



– Rosa dos ventos ampliada solução

Essa área em destaque é a soma entre a área do triângulo $BEF(b+c)$ e a área delimitada pelos pontos $BDE(a)$.

$b + c = EF.BF/2 \quad \Rightarrow \quad b + c = (r\sqrt{3}/2 - r/2).(r/2)/2 \quad \Rightarrow \quad b + c = r^2(\sqrt{3} - 1)/8$

A área a da figura vai ser a área do setor $EAD(a+c+d)$ menos a área do triângulo $ABE(c+d)$. E o ângulo DAE é 30° pois $EC = r/2$ e $AE = r$, sendo r o raio do setor de 90°.

$a = \pi.r^2/12 - (r/2).(r/2).1/2 \quad \Rightarrow \quad a = \pi.r^2/12 - r^2/8$

$a+b+c = \pi.r^2/12 - r^2/8 + r^2(\sqrt{3}-1)/8 \quad \Rightarrow \quad a+b+c = r^2(\pi/12+\sqrt{3}/8-2/8)$

A área de intersecção entre as figuras maiores vai ser $4(a + b + c)$, e a área total pintada vai ser duas vezes a área de uma figura rosa, menos a área de intersecção entre elas; lembrando do PROBLEMA 6 que a relação entre os raios é $5r^2 = 4R^2$, a fração F da área pintada e a área da circunferência maior vai ser:

$$F = \frac{[2(\pi.r^2/2) - 4.r^2(\pi/12 + \sqrt{3}/8 - 2/8)]}{\pi.R^2}$$

$$F = \frac{4[\pi - 4.(\pi/12 + \sqrt{3}/8 - 1/4)]}{5\pi}$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar problemas dos mais diferentes níveis - desde o nível cobrado nas escolas públicas regulares até o nível de problemas olímpicos - de uma forma aparentemente mais chamativa em comparação às apresentações mais tradicionais de problemas, onde foram construídas figuras com desenhos mais autoexplicativos e com cores mais vivas, diferenciando-se das apresentações de problemas mais clássicas, ora com enunciados a serem interpretados, ora com figuras básicas monocromáticas. Tal idéia é apresentada nos mais diversos fóruns ou redes sociais de professores ou entusiastas de desafios. A intenção é despertar o interesse pelo desafio, e buscar uma possível solução para o mesmo.

Além do formato da apresentação dos problemas, também foi tomado o cuidado de selecionar aqueles que exigem um conhecimento básico e, em alguns casos, um conhecimento mais elaborado; o objetivo nesse sentido é justamente mostrar ferramentas pouco conhecidas e que são bastante úteis para a resolução de problemas. As listas foram organizadas de acordo com as semelhanças dos problemas, onde cada uma possui problemas de níveis diferentes de dificuldade; nada impede, é claro, de se formar novas listas com os mesmos problemas, por exemplo usando os mais fáceis de cada lista, ou os mais difíceis, ou aqueles que são exigidos conteúdos mais simples, etc.

A escolha e apresentação do conteúdo menos conhecido foi com o propósito de divulgar um pouco mais o assunto, tendo em vista que muitos problemas da OBMEP ou de seleções de colégios federais são solucionados com estas ferramentas. No próprio livro base de geometria do curso do PROFMAT, não houve citação de algumas ferramentas aqui comentadas o que, como já comentado, motivou a idéia deste trabalho. Não é demérito algum para um professor quando este não conhece em detalhes todo o conteúdo extenso da matemática. Mas é algo útil quando lhe é apresentada a maior variedade de conteúdos possível, mormente se forem conteúdos que são utilizados por alunos do ensino fundamental em certas avaliações, ainda que estes formem uma pequena parcela do total.

É algo que também engrandece o professor, o fato de saber lidar com aqueles poucos alunos que podem ser melhor exigidos e trabalhados para extrair seu potencial. A OBMEP está popularizando nas escolas públicas os problemas mais desafiadores, e isso tem gerado uma demanda cada vez maior de alunos interessados. É necessário então aumentar a oferta de manipulação desses conteúdos, com a melhor capacitação dos professores.

Também é oportuno fazer um registro aqui sobre o software Geogebra: uma poderosa ferramenta gratuita, intuitiva e de fácil acesso - seja por computador, tablet ou um celular -, inclusive por quem não tem tanta familiaridade com programas. Todas as figuras dos problemas apresentados, bem como as figuras dos teoremas e dos conteúdos de geometria expostos neste trabalho, foram feitas a partir do Geogebra e sem muita dificuldade na grande maioria das vezes. É de fácil manejo tanto para ensino como para aprendizagem, oferecendo ainda uma interação imediata com os alunos, já que as tarefas realizadas podem ser compartilhadas e/ou acessadas por outros usuários inclusive em dispositivos móveis.

Cursos em formatos de vídeos no Youtube para manipulação do programa, comunidades para tirar dúvidas, compartilhamentos de trabalhos já realizados são outros fatores que corroboram com a proposta de interface colaborativa do Geogebra. Ainda, também é importante reconhecer que o Geogebra é uma fonte de conhecimento inovador sendo objeto inclusive de iniciação para primeiros contatos com áreas da computação.

Ademais, foi levantada uma questão com a intenção de continuar estimulando a discussão de se preparar melhor professores e alunos, aproveitando a iniciativa do IMPA juntamente com a SBM em buscar melhorias no ensino e encontrar talentos que estão escondidos pelas escolas do país. O próprio PROFMAT também faz parte desta iniciativa, cabendo a todos os envolvidos darem suas contribuições visando melhorias neste processo que é pulsante, vivo e já começou há algum tempo.

REFERÊNCIAS

1 ARAÚJO, Raphael Ramon Oliveira. **Uma perspectiva do Teorema de Menelaus através do software Geogebra**. 2017. Dissertação (PROFMAT) - Centro de ciências da natureza, Universidade Federal do Piauí, Piauí, 2017.

2 Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 23 nov. 2022.

3 CASTRO, Luciano Guimarães Monteiro. **Geometria (Relação Entre Áreas) Nível 3** . Youtube, 23 nov. 2022. Disponível em: https://www.youtube.com/@PolosOlimpicos. Acesso em: 23 nov. 2022.

4 MORGADO, A.C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro: F.C. Araújo da Silva, 2002.

5 MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria** coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

6 NUNES, Ana Lúcia Teixira. **O teorema dos carpetes**. Revista do professor de matemática (RPM), 2014. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/86/6.html. Acesso em 23 nov. 2022.

7 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm. Acesso em 23 nov. 2022.

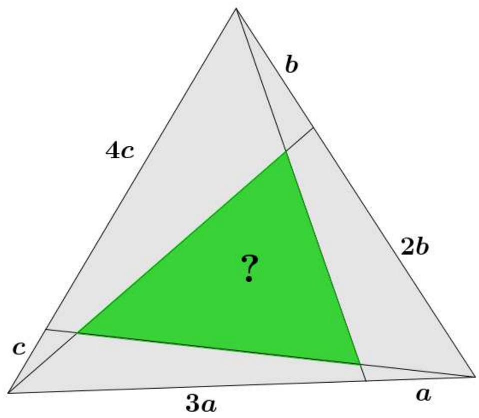
ANEXO A – Lista de exercícios

1 - LISTA ANEXA

Nesta lista será apresentada uma sequência de problemas a serem trabalhados com um grupo de alunos. Alguns problemas mais fáceis e outros, mais desafiadores.

PROBLEMA 1

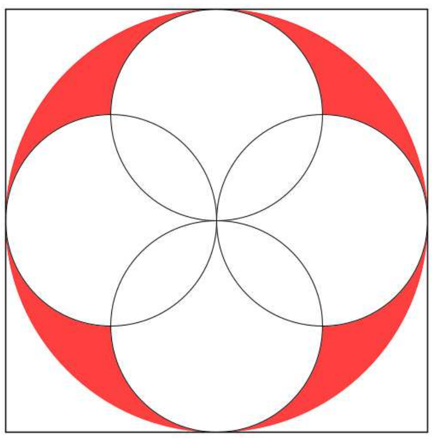
Qual fração do triângulo maior está destacada?



– Anexo 1

PROBLEMA 2

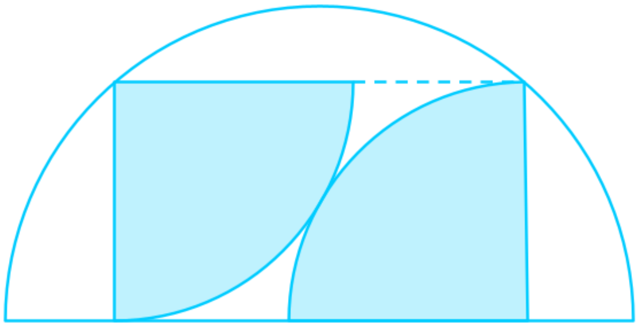
Que fração do quadrado está pintada?



– Anexo 2

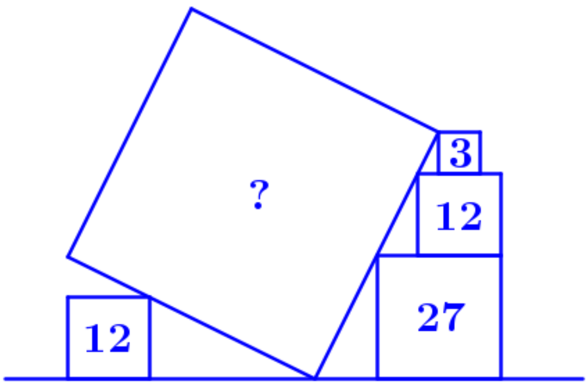
PROBLEMA 3

Que fração da semicircunferência está pintada?



– Anexo 3

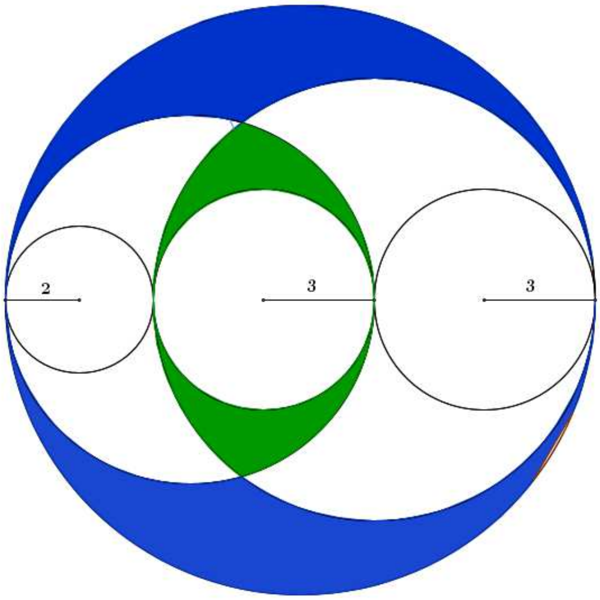
PROBLEMA 4



– Anexo 4

PROBLEMA 5

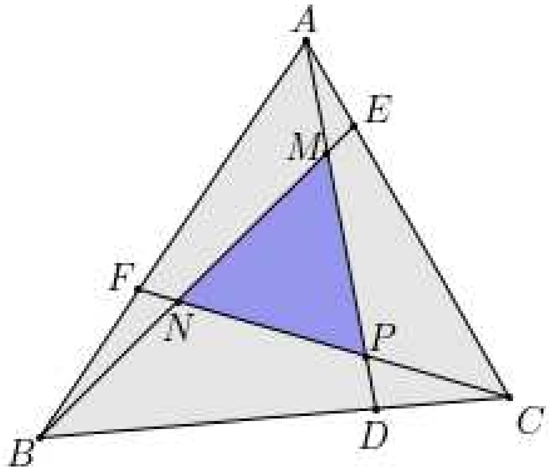
Quanto vale a área azul menos a área verde?



– Anexo 5

PROBLEMA 6

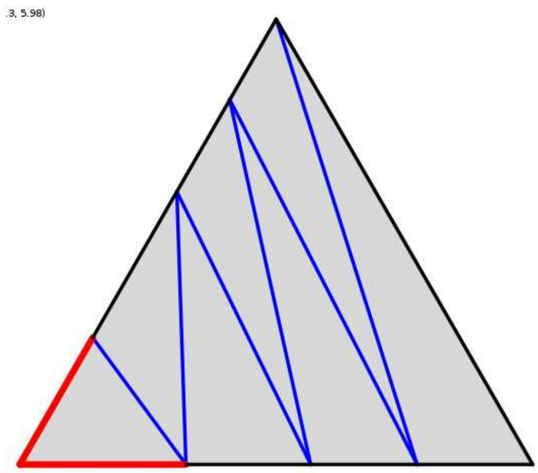
Cevianas AD, BE e CF dividem os lados nas proporções 1/4, 1/5 e 1/3, respectivamente. Que fração do triângulo maior está pintada?



– Anexo 6

PROBLEMA 7

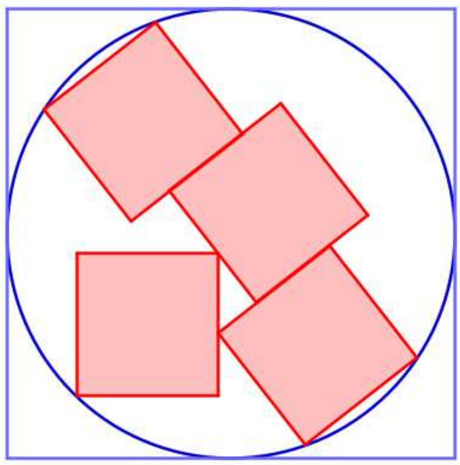
Triângulo equilátero dividido em sete áreas iguais. Quanto vale a soma dos segmentos vermelhos?



– Anexo 7

PROBLEMA 8

Que fração do quadrado maior está pintada?



– Anexo 8

2 - GABARITO

PROBLEMA 1

Chamaremos de A o vértice entre os segmentos de medidas $4c$ e b; chamaremos de B o vértice entre os segmentos $3a$ e c; e chamaremos de C o vértice entre a e $2b$. A ceviana que se inicia em A chamaremos de AF; a que se inicia em B, BD; e a que se inicia em C, CE. O ponto em comum entre AF e BD chamaremos de P; entre AF e CE, R; e BD e CE, Q.

Na seção 3 deste trabalho é apresentada uma forma de relacionar áreas de triângulos que possuem um ângulo em comum. Com aquela idéia, podemos concluir que $[ACF] = [ABC]/4$, $[ABD] = [ABC]/3$ e $[BCE] = [ABC]/5$.

A mesma idéia vai ser válida com os triângulos ADP e ACF, mas será preciso encotnrar a relação AP/PF; essa relação será encontrada usando o teorema de Menelaus no triângulo ACF e secante BD onde, depois das contas, encontrará $AP/PF = 2/3$. Sabendo esta relação, encontrará $[ADP] = [ABC]/30$.

O mesmo raciocínio será usado para encontrar as áreas $[BEQ]$ e $[CFR]$; Fazendo as devidas subtrações e contas, chegará na resposta $[PQR] = 529[ABC]/1870$.

PROBLEMA 2

Este problema utiliza recursos já explicados no EXEMPLO 1 da seção LÚNULAS com o EXEMPLO 1 da seção TEOREMA DOS CARPETES.

Assim, a medida da área das partes vermelhas será igual à soma das áreas das quatro pétalas brancas, onde uma "pétala"é a interseção entre duas circunferências menores.

Pelo exemplo das lúnulas, essa área será igual a $L^2.(\pi - 2)/2$, e a área do quadrado maior vale $4.L^2$. A resposta será essa razão que é $(\pi - 2)/8$.

PROBLEMA 3

Chamaremos de R o raio da circunferência maior e r o raio dos setores circulares menores. Os setores menores são iguais e estão dentro de um retângulo cuja diagonal mede $2r$ e, como um dos lados mede r, o outro medirá $r\sqrt{3}$. O diâmetro maior que é igual a $2R$, mede $x + r\sqrt{3} + x$; por relações métricas num triângulo retângulo, temos:

$(x + r\sqrt{3}).x = r^2$

$x^2 + r.\sqrt{3}.x - r^2 = 0$

$x = (\sqrt{7} - \sqrt{3}).r/2$

Como $2R = 2x + r\sqrt{3}$, temos $R = \sqrt{7}.r/2$

A fração F da semicircunferência maior que está pintada será:

$F = 4/7$

PROBLEMA 4

O lado do quadrado maior forma com os outros três quadrados sobrepostos triângulos retângulos semelhantes. É preciso encontrar as hipotenusas desses três triângulos retângulos para encontrar o lado do quadrado maior e calcular sua área. Com as áreas dadas dos quadrados sobrepostos, é possível encontrar seus respectivos lados e, com as semelhanças, chegaremos nos valores das hipotenusas $3.\sqrt{15}/2$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{15}/2$. Então a área do quadrado maior será 135.

PROBLEMA 5

Na figura, temos duas regiões de azul idênticas, que chamaremos cada uma de "d"; duas regiões de verde também idênticas que chamaremos cada uma de "c";Temos uma circunferência de raio 5 com duas regiões idênticas que chamaremos de "a"cada uma e, por fim, uma circunferência de raio 6 com duas regiões também idênticas que chamaremos de "b".

A área da maior circunferência de raio 16 vai ser:

$2.a + 2.b + 2.c + 2.d + 4 + 9 + 9 = 64$

A área da circunferência de raio 5 vai ser:

2.a + 2.c + 4 + 9 = 25

A área da circunferência de raio 6 vai ser:

2.b + 2.c + 9 + 9 = 36

Temos assim um sistema de 3 equações e, fazendo a primeira equação menos a segunda e menos a terceira, chega no resultado de $2.d - 2.c = 12$.

PROBLEMA 6

É a mesma idéia do PROBLEMA 1, e aqui a resposta é 3481/8400.

PROBLEMA 7

Chamaremos o triângulo equilátero de AEF, sendo A o vértice mais à esquerda e E o vértice mais alto. Entre A e E, temos os pontos B, C e D; entre A e F, os pontos I, H e G, nesta ordem. A área de ABI é igual à área de BCI, então $AB = BC$ (chamaremos de x). Da mesma forma, a área de ACI é duas vezes a área de CHI, $[ACI] = [2.CHI]$. Nesse caso, chamaremos HI de y, então $AI = 2.y$. Fazendo essas comparações em todos os segmentos, encontraremos $x = 35/16$ e $y = 8/5$. A resposta será 431/80.

PROBLEMA 8

Chamaremos de l o lado de um quadrado vermelho (no final usaremos multiplicado por 4). Na figura temos 3 quadrados vermelhos que estão desalinhados no mesmo eixo e um quarto quadrado fora do eixo; imagine a figura sem esse quarto quadrado e com os três quadrados alinhados no mesmo eixo; é possível montar um triângulo retângulo traçando o raio da circunferência que parte de seu centro até um vértice de um quadrado que está na circunferência, e traçando também um segmento que parte do centro até a metade do lado do mesmo quadrado. a hipotenusa será R, e os catetos $l/2$ e $3l/2$.

Com as contas, chegaremos em $R = l\sqrt{10}/2$. Como o lado do quadrado maior L é igual a $2R$, temos que a fração F entre as áreas dos quatro quadrados pintados e a ára do quadrado maior será

$F = 4l^2/10l^2$

$F = 2/5$