UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Luis Ricardo Guedes Kelmer

Um estudo de progressão aritmética no ensino médio com uso de uma planilha eletrônica gratuita

Juiz de Fora

2023

Luis Ricardo Guedes Kelmer

Um estudo de progressão aritmética no ensino médio com uso de uma planilha eletrônica gratuita

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Kelmer, Luis Ricardo Guedes.
Um estudo de progressão aritmética no ensino médio com uso de uma planilha eletrônica gratuita / Luis Ricardo Guedes Kelmer. – 2023.
50 f. : il.

Orientadora: Valéria Mattos da Rosa
Dissertação Mestrado – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2023.

1. Progressão aritmética. 2. Sequências. 3. Progressões. I. Rosa, Valéria Mattos da, orient. II. Doutora.

Luís Ricardo Guedes Kelmer

Um estudo de progressão aritmética no ensino médio com uso de uma planilha eletrônica gratuita

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 21 de março de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Valéria Mattos da Rosa - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Fernando de Souza Bastos

Universidade Federal de Viçosa

Juiz de Fora, 17/03/2023.

Documento assinado eletronicamente por **Valeria Mattos da Rosa**, **Professor(a)**, em 23/03/2023, às 13:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Sandro Rodrigues Mazorche**, **Professor(a)**, em 24/03/2023, às 07:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Fernando de Souza Bastos**, **Usuário Externo**, em 24/03/2023, às 13:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1191301** e o código CRC **CDE8099C**.

Dedico este trabalho a todos os profissionais da área de educação que contribuíram na minha formação e à minha família que sempre me apoiou e esteve junto comigo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, à minha orientadora, Professora Doutora Valéria Mattos da Rosa pelo auxílio no desenvolvimento da dissertação, aos meus professores e colegas de curso pela força e incentivo e aos alunos que contribuíram na realização das atividades para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço à minha mãe, Vania Maria Guedes Kelmer, pelo carinho e ajuda durante minha jornada de estudos.

"A Matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito". Manoel Paiva.

RESUMO

O conteúdo de progressão aritmética faz parte do currículo da Matemática do Ensino Médio, apresentando-se em várias situações cotidianas que seguem padrões, como por exemplo na matemática financeira e na combinatória. Um dos objetivos gerais do ensino de matemática refere-se à necessidade de interpretar, descrever, representar e argumentar, construindo assim, uma comunicação matemática e fazendo uso de diversas linguagens, estabelecendo relações entre elas e diferentes representações matemáticas. Este trabalho visa abordar o conteúdo de progressão aritmética aplicada ao Ensino Médio com a utilização de uma planilha eletrônica gratuita para trabalhar com questões sobre o assunto.

Palavras-chave: Progressão Aritmética. Ensino Médio. Planilha eletrônica.

ABSTRACT

The arithmetic progression content is part of the High School Mathematics curriculum, appearing in several everyday situations that follow patterns, such as financial mathematics and combinatorics. One of the general objectives of teaching mathematics refers to the need to interpret, describe, represent and argue, thus building mathematical communication and making use of different languages, establishing relationships between them and different mathematical representations. This work aims to address the content of arithmetic progression applied to High School using a free spreadsheet to work with questions on the subject.

Keywords: Arithmetic Progression. High school. Electronic spreadsheet.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta didática que aborda o ensino-aprendizagem do conteúdo de Progressão Aritmética aplicada ao Ensino Médio, utilizando uma planilha eletrônica gratuita para trabalhar com questões sobre o assunto.

Progressões ou sucessões são sequências numéricas que apresentam determinada regularidade ou padrão. Percebemos no nosso dia a dia várias situações que apresentam tal padrão, como por exemplo no cálculo do montante no regime de capitalização simples, no estudo do crescimento de uma população de bactérias, bem como nas datas de ocorrências da copa do mundo.

Vários registros antigos mostram que as sequências numéricas estavam presentes na vida das pessoas. Está registrado no Papiro de Rhind o seguinte problema: "Divida 100 pães entre cinco homens de modo que as partes recebidas estejam em PA e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores". Percebe-se que as Progressões Aritméticas (PA's) foram estudadas pelos povos antigos (GEORGE, 2012). Diofanto (século III d.C.) também registrou em um de seus livros: "Encontre três números em PA sabendo que a soma de dois quaiquer deles é um quadrado". Nesse problema, Diofanto trata um número como sendo parte dos racionais positivos (LIMA, 2008).

Os pitagóricos construíram sequências usando pedras dispostas geometricamente. Surgem os números triangulares, quadrados, pentagonais, Hexagonais, etc. Os números figurados podem ter sido a primeira manifestação de PA's de segunda ordem (ROQUE, 2012). O conteúdo de Progressão Aritmética faz parte do currículo da Matemática do Ensino Médio, apresentando-se em várias situações cotidianas que seguem padrões. Um dos objetivos gerais do ensino de matemática refere-se à necessidade de interpretar, descrever, representar e argumentar, construindo assim, uma comunicação matemática e fazendo uso de diversas linguagens, estabelecendo relações entre elas e diferentes representações matemáticas.

Esta dissertação visa abordar o conteúdo de Progressão Aritmética aplicada ao Ensino Médio com uso de uma planilha eletrônica gratuita com objetivo de inserir o uso da tecnologia presente no dia a dia dos alunos no ensino-aprendizagem de matemática, buscando a participação, o interesse, a fixação dos conceitos e fórmulas, ou seja, tornar o ensino de progressões aritméticas mais divertido e relacionado com a realidade dos estudantes. O conteúdo que aqui pretende-se desenvolver, pode ser aplicado a partir do primeiro ano do Ensino Médio.

2 PROGRESSÕES

As sequências podem ser definidas por meio de uma função. Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, números reais, a função $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$, dada por $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \ldots, f(n) = a_n, \ldots$ é representada por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ ou (a_n). O índice n indica a posição do elemento na sequência. Dessa forma, o primeiro termo é indicado por a_1, o segundo é indicado por a_2 e assim por diante. A notação usual para uma sequência infinita é (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n, ...) e para a sequência finita, (a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n).

Sequências podem ser definidas por meios de fórmulas, isto é, por uma lei de formação ou um termo geral.Quando se conhece o primeiro termo de uma sequência e uma lei que permite calcular cada termo (a_n) a partir de seus anteriores imediatos, diz-se que se explicita, a sequência por recorrência.

Exemplo 2.1. A sequência finita f cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ é:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5,$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8,$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11,$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14,$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17,$

$f = (2, 5, 8, 11, 14, 17)$

Exemplo 2.2. A sequência infinita g cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 1$ e $a_n = 3\ .\ a_{n-1}$, $\forall n \in N\ , n \geq 2$, é:

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 1 = 3$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 3 = 9$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot a_3 = 3 \cdot 9 = 27$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot a_4 = 3 \cdot 27 = 81$

$g = (1, 3, 9, 27, 81, ...)$

Uma sequência pode ser definida a partir de uma lei geral, expressando cada termo em função de sua posição.

Exemplo 2.3. A sequência finita f cujos termos obedecem à lei: $a_n = 2^n$, $\forall n \in \{1, 2, 3, 4\}$ é:

$a_1 = 2^1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 2$

$a_3 = 2^3 = 8$

$a_4 = 2^4 = 16$
$f = (2, 4, 8, 16)$

Exemplo 2.4. A sequência infinita g cujos termos obedecem à seguinte fórmula geral: $a_n = 3\,n + 1, \forall n \in N^*$, é:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$

$g = (4, 7, 10, 13, 16, ...)$

Definição 1. Uma sequência de números onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante r dada, é denominada de progressão aritmética.

Definição 2.Uma sequência de números onde cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante q dada, é denominada de progressão geométrica.

2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE PRIMEIRA ORDEM

2.1.1 INTRODUÇÃO TEÓRICA

Segundo MORGADO,Augusto César, WAGNER, Eduardo e CARVALHO,Paulo Cezar Pinto, no livro A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, SBM, “são comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais”.

Exemplo: Uma fábrica de peças industriais produziu 1500 peças em julho e aumenta mensalmente sua produção de 30 peças. Quantas peças produziu em dezembro?

Solução: Os valores da produção mensal, a partir de julho, são 1500, 1530, 1560, 1590, 1620, 1650, ... Em dezembro, a fábrica produziu 1650 peças. Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando da seguinte forma: se a produção aumenta de 30 peças por mês, em 5 meses ela aumenta de $5 \times 30 = 150$ peças. Em dezembro, a fábrica produziu $1500 + 150 = 1650$ peças.

Progressões aritméticas (PA) são sequências (sucessões) nas quais o aumento de cada termo para o próximo é sempre constante. A sequência (1500, 1530, 1560, 1590, 1620, 1650, ... é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seu sucessor é denominado de razão da progressão. A razão dessa progressão é igual a 30. Portanto, uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante, chamada de razão da progressão aritmética e representada pela letra r ($r = a_{n+1} - a_n$).

2.1.2 FÓRMULA DE RECORRÊNCIA

Uma PA de primeira ordem é uma sequência numérica (a_n), $n \in N$ definida recursivamente por $a_{n+1} = a_n + r$; $n > 1$, onde o primeiro termo a_1 é um número dado. O número r é chamado razão da progressão.

Portanto, a fórmula de recorrência de uma PA, é dada pela equação:

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Demonstração: Esta propriedade decorre diretamente da definição 1., onde a diferença entre dois termos sucessivos é constante. $a_{n+1} - a_n = r$. Com a definição, chega-se à fórmula recursiva, em que um termo qualquer, é igual ao termo anterior, adicionado da razão ($a_{n+1} = a_n + r$).

2.1.3 CLASSIFICAÇÃO DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma PA de primeira ordem pode ser classificada como crescente, decrescente ou constante (estacionária) de acordo com a sua razão:

Crescentes: são as P.A. em que cada termo é maior que o anterior. É imediato que isso ocorre somente se r>0, pois:
$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow r > 0$.

Decrescentes: são as P.A. em que cada termo é menor que o anterior. É imediato que isso ocorre somente se r<0, pois:
$a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow r < 0$. **Constante (estacionária)**: são as P.A. em que cada termo é igual ao anterior. É fácil ver que isso só ocorre quando r=0, pois:
$a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow r = 0$.
Exemplo: As sequências (1, 3, 5, 7, 9, ...) e (20, 30, 40, 50, ...) são P.A.s crescentes de razão 2 e 10, respectivamente. As sequências (61, 51, 41, 31, ...) e (-32, -35, -38, -41, ...) são P.A.s decrescentes de razão -10 e -3, respectivamente. As sequências (5, 5, 5, ...) e (-6, -6, -6,...) são P.A.s constantes, isto é, P.A.s de razão 0.

2.1.4 FÓRMULA DO TERMO GERAL

Em uma progressão aritmética (a_1,a_2,a_3,...), para avançar um termo, basta somar uma razão (r); para avançar dois termos, basta somar duas razões ($2r$), e assim por diante.

Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13} avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois, ao passar de a_1 para a_n , avançamos $n-1$ termos.

De maneira mais formal, pela definição de PA temos:
$a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, ..., $a_{n-1} = a_{n-2} + r$, $a_n = a_{n-1} + r$.

Somando as $n-1$ igualdades, temos:
$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$
$= (a_1 + \mathrm{r}) + (a_2 + \mathrm{r}) + \ldots + (a_{n-1} + \mathrm{r}) =$
$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (\mathrm{r} + \mathrm{r} + \ldots + \mathrm{r}) =$
$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (n-1)r$

Assim, $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Exemplo: Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de 1.000,00 reais, e as demais aumentarão 20,00 reais ao mês. Ao final do financiamento, qual o valor da última parcela para o comprador?

Solução: Temos que os valores das parcelas são representados pela sequência $(1.000, 1.020, 1.040, 1.060, ...)$ que é uma PA. Queremos obter a 24ª parcela. Dessa forma, para passar de a_1 para a_{24} avançamos 23 termos. Portanto,

$a_{24} = a_1 + (24-1)r \Rightarrow a_{24} = 1000 + (24-1)20 \Rightarrow a_{24} = 1460$

Logo, a última parcela para o comprador será 1.460,00 reais.

Demonstração - princípio da indução finita:
Para $n = 1$ temos que a fórmula é verdadeira, pois $a_1 = a_1 + (1-1)r$. Suponhamos que a afirmação é verdadeira para certo natural k, ou seja, que $a_k = a_1 + (k-1)r$. Como $a_{k+1} - a_k = r$, temos que $a_{k+1} = a_k + r$ e, pela hipótese de indução, segue que $a_{k+1} = a_1 + (k-1)r + r$. Portanto, $a_{k+1} = a_1 + kr = a_1 + [(k+1) - 1]r$. Logo, $a_n = a_1 + (n-1)r$,$\forall n \in N^*$.

Observemos que a recíproca da proposição anterior é verdadeira: Se o termo geral de uma sequência $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall n \in N^*$, para algum número real r, então (a_n) é uma P.A. de razão r. De fato, neste caso $a_{n-1} - a_n = (a_1 + nr) - (a_1 + (n-1)r) = r, \forall n \in N^*$.

Exemplo: Um capital de 5.000,00 reais é aplicado a juros simples durante 4 anos à uma taxa de 1 % ao mês. Calcule o montante após o período de aplicação.

Solução: Temos que os valores mensais (M_i) do montante, na aplicação são dados por:

$M_1 = 5000 + 0,01 \cdot 5000 = 5050$

$M_2 = 5000 + 0,01 \cdot 5000 \cdot 2 = 5100$

$M_3 = 5000 + 0,01 \cdot 5000 \cdot 3 = 5150$

$\vdots$

Observe que os valores 5.050, 5.100, 5.150, ..., formam uma PA. Assim:
$M_{48} = M_1 + (48 - 1)r$
$M_{48} = 5050 + (48 - 1)50$
$M_{48} = 7400.$
Portanto, o montante dessa aplicação é de 7.400,00 reais.

Exemplo: (ENEM 2012) A média, em kg, de resíduos domiciliares produzidos anualmente por habitante, no período de 1995, 2000 e 2005, foi de 460 Kg, 500 Kg e 540 Kg , respectivamente.Se essa produção continuar aumentando, mantendo o mesmo padrão observado na tabela, qual a previsão de produção de resíduos domiciliares, por habitante no ano de 2020, em kg?

Solução: Temos que a produção de resíduos domiciliares por habitante segue o padrão de uma PA. Assim, $a_1 = 460$, $a_2 = 500$, $a_3 = 540, \ldots$.
Queremos determinar a produção de resíduos por habitante para o ano de 2020, ou seja, a_6.
$a_n = a_1 {+} (n - 1)r$
$a_6 = 460 + (6 - 1)40$
$a_6 = 660$
Logo, a previsão de produção de resíduos domiciliares, por habitante no ano de 2020, é de 660 Kg.

Observação: Se (a_n) é uma PA de razão r, então $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para todo $n$inteiro e positivo. Estas progressões aritméticas são conhecidas como PA de 1ª ordem devido ao fato de seu termo geral ser um polinômio de grau 1 em n.
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = a_1 + nr - r$
$a_n = rn^1 + (a_1 - r)$
Assim, toda progressão aritmética é uma função afim.

Demonstração: Usando a caracterização da função afim tem-se que:
$f(x_n) = x_1 + (n - 1)r$
$f(x_{n+h}) = x_1 + (n + h - 1)r$
$f(x_{n+h}) - f(x_n) = hr = \varphi(h)$
Portanto, a progressão aritmética é caracterizada como uma função afim, pois a diferença entre $f(x_{n+h})$ e $f(x_n)$ depende apenas de h, sendo r uma constante. Convém destacar que

o domínio da função é restrito ao conjunto dos números naturais não nulos.
Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1. Reciprocamente, se em uma sequência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n de grau menor que ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética.

Com efeito, se $x_n = an + b$, (x_n) é a progressão aritmética na qual $a = r$ e b = $a_1 - r$, ou seja, $a = r$ e $a_1 = a + b$. Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural não nulo n o valor a_n , o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

2.1.5 FÓRMULA DO TERMO GERAL NA POSIÇÃO n, EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO k

A fórmula do termo geral de uma PA, na posição n, em função da posição k, é dada pela equação: $a_n = a_k + (n - k)r$.

Demonstração:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$a_n = a_1 + nr - r + kr - kr$
$a_n = a_1 + kr - r + nr - kr$
$a_n = a_1 + (k - 1)r + (n - k)r$
$a_n = a_k + (n - k)r$

Exemplo: Uma empresa registrou suas arrecadações mensais dos dez primeiros meses de 2020, e constatou que estes seguiam o padrão de uma PA. Sabendo que a arrecadação no mês de abril foi de 20 mil reais e em setembro, 44 mil reais, determine a arrecadação para o mês de outubro.

Solução: Seja a sequência $(a_1,a_2,a_3,...,a_{10})$, onde cada termo representa a arrecadação dos meses de janeiro a outubro. Assim, $(a_1,...,a_4 = 20,..., a_9 = 44, a_{10})$.
Para avançarmos de a_4 para a_9 devemos passar por 5 termos. Assim, $a_9 = a_4 + 5$r $\Rightarrow 44 = 20 + 5r \Rightarrow r = 4,8$ mil. Portanto, a arrecadação para o mês de outubro será 44 mil + $4,8$ mil = $48,8$ mil reais.

Exemplo: Determine a P.A. em que o 6° termo é 7 e o 10° é 15.

Solução:

$a_n = a_k + (n-k)r$
$a_{10} = a_6 + (10-6)r$
$15 = 7 + 4r$
$r = 2$
$a_6 = a_1 + (6-1)r$
$7 = a_1 + 5.2$
$a_1 = -3$
$a_2 = -3 + 2 = -1$
$a_3 = -1 + 2 = 1$
$\vdots$
Logo, a PA é $(-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$

2.1.6 NOTAÇÕES

Quando procuramos obter uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos, é muito prática a notação seguinte:
i) para 3 termos: $(x, x+r, x+2r)$ ou $(x-r, x, x+r)$.
ii) para 4 termos: $(x, x+r, x+2r, x+3r)$ ou $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$, em que $y = r/2$.
iii) para 5 termos: $(x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r)$ ou $(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$.

Exemplo: Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.

Solução: Empregando a notação $(x-r, x, x+r)$ para a P.A., temos:
$x - r + x + x + 2 = 24 \Rightarrow x = 8$
$(8-r) \cdot 8 \cdot (8+r) = 440$
$8^2 - r^2 = 55$
$r = \pm 3$

Assim,
$r = 3 \Rightarrow (8-3, 8, 8+3) = (5, 8, 11)$
$r = -3 \Rightarrow (8-(-3), 8, 8+(-3)) = (11, 8, 5)$

Exemplo: Obtenha uma P.A. de 4 termos inteiros em que a soma dos termos é 32 e o produto é 3465.

Solução: Empregando a notação $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$ para a P.A., temos:
$x - 3y + x - y + x + y + x + 3y = 32 \Rightarrow x = 8$
$(8-3y) \cdot (8-y) \cdot (8+y) \cdot (8+3y) = 3465 \Rightarrow 8y^4 - 640y^2 + 631 = 0 \Rightarrow y = \pm 1, y = \pm\sqrt{\frac{631}{9}}$

Como os termos são inteiros, então $y = 1$ ou $y = -1$. Logo, a PA é:
$y = 1 \Rightarrow$(8-3,8-1,8+1,8+3)=(5,7,9,11)
y= $-1 \Rightarrow$(8+3,8+1,8-1,8-3)=(11,9,7,5)

Exemplo: Obtenha uma P.A. de 5 termos, sabendo que sua soma é 25 e a soma de seus cubos é 3025.

Solução: Empregando a notação $(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)$ para a P.A., temos:
$x - 2r$ + $x - r$ + x +x + r + x + 2r = 25 $\Rightarrow$x=5
(5-2r)^3 + $(5-r)^3 + (5+r)^3 + (5+2r)^3 = 3025$
$150r^2 - 2400 = 0$
r=$\pm$4

Logo, a PA é:
r=4$\Rightarrow$ $(5-8, 5-4, 5, 5+4, 5+8) = (-3, 1, 5, 9, 13)$
$r = -4 \Rightarrow (5+8, 5+4, 5, 5-4, 5-8) = (13, 9, 5, 1, -3)$

2.1.7 FÓRMULA DO TERMO CENTRAL DE TRÊS NÚMEROS

A fórmula do termo central de uma PA, é dado pela média aritmética dos extremos, através da equação:

$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

Demonstração: Pela definição recursiva de PA, verifica-se que um termo qualquer, é sempre o anterior, adicionado da razão, ou da mesma forma, o termo atual, é o termo seguinte, subtraído da razão. Então, $a_n = a_{n-1} + r$ e $a_n = a_{n+1} - r$. Somando estas duas equações, teremos: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$\Rightarrow$a$_n$ = $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$

Exemplo: A produção anual de peças de uma indústria, durante os três primeiros anos de vida, seguiu o padrão de uma PA. Sabendo que a produção anual no primeiro e terceiro anos foi de 7 bilhões e 13 bilhões, respectivamente, determine a produção para o segundo ano.

Solução: Como os três valores seguem o padrão de uma PA, temos:
Se $(7, x, 13)$ é uma PA, então: $x - 7 = 13 - x$ $\Rightarrow$2x = 7 + 13$\Rightarrow$x=10

Assim, a produção do segundo ano foi de 10 bilhões de peças.

2.1.8 FÓRMULA DO TERMO CENTRAL, DISTANTE K POSIÇÕES

O termo central numa PA, é a média aritmética dos extremos e dada pela equação: $a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$.

Demonstração: (i) Seja a fórmula de recorrência, aplicada sucessivamente a partir do termo de ordem n, até o termo de ordem n + k.

a$_n = a_n$
$a_{n+1} = a_n + r$
$a_{n+2} = a_n + 2r$
$a_{n+3} = a_n + 3r$
$\vdots$
$a_{n+k} = a_n + kr$

Então, conclui-se, que um termo qualquer a_{n+k}, distante de k posições de um termo de ordem n, é o termo de ordem n, adicionado de k vezes a razão r.

(ii) Seja a fórmula de recorrência, aplicada sucessivamente a partir do termo de ordem n, até o termo de ordem n - k.

a$_n = a_n$
$a_{n-1} = a_n - r$
$a_{n-2} = a_n - 2r$
$a_{n-3} = a_n - 3r$
$\vdots$
$a_{n-k} = a_n - kr$

Então, conclui-se, que um termo qualquer a_{n-k}, distante de k posições de um termo de ordem n, é o termo de ordem n, subtraído de k vezes a razão r.

Assim, somando as equações $a_{n+k} = a_n + kr$ e $a_{n-k} = a_n - kr$, temos:
$a_{n+k} + a_{n-k} = 2a_n + kr - kr \Rightarrow$a$_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$

Exemplo: A produção mensal de peças de uma indústria, durante os quinze primeiros meses de vida, seguiu o padrão de uma PA. Sabendo que a produção mensal no quarto e décimo segundo meses foi de 2 bilhões e 14 bilhões, respectivamente, determine a produção para o oitavo mês.

Solução: Como os três valores seguem o padrão de uma PA, temos:

Seja a PA representando a situação: $(a_1, \ldots, a_4, \ldots, a_8, \ldots, a_{12}, ..., a_{15})$.

Temos que: $a_8 = a_4 + (8-4)r \Rightarrow a_4 = a_8$ - 4r e $a_{12} = a_8 + (12-8)r$. Somando as duas equações, obtemos:

$$a_4 + a_{12} = 2a_8 \Rightarrow a_8 = \frac{a_4+a_{12}}{2}.Logo, a_8 = \frac{2+14}{2} \Rightarrow a_8 = 8$$

Assim, a produção do oitavo mês foi de 8 bilhões de peças.

2.1.9 SOMA DOS TERMOS DE UMA PA

Quando o grande matemático alemão Carl F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. O professor ficou surpreso quando, depois de poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98,... . Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era 50.101 = 5050. Baseados nessa ideia, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

2.1.9.1 Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

Seja $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, uma PA de razão r. Então a soma dos n primeiros termos será dada por $s_n{=}\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Demonstração: Escrevendo s_n de dois modos diferentes:
$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$
$s_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$

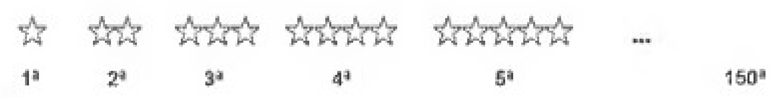
Somando membro a membro as duas equações tem-se:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + +(a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observando que em cada parênteses a soma é a mesma (termo central numa PA), então $2s_n = (a_1 + a_n)n$, de onde se tem $s_n{=}\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Exemplo: (ENEM 2010) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

– Figura 2: Painel de Natal com estrelas.



Fonte: https://www.tudax.com.br/post/progress

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:
FUNCIONÁRIO I: aproximadamente 200 estrelas.
FUNCIONÁRIO II: aproximadamente 6 000 estrelas.
FUNCIONÁRIO III: aproximadamente 12 000 estrelas.
FUNCIONÁRIO IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
FUNCIONÁRIO V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

Solução:

Quantidade de estrelas na linha 150:
$\mathrm{a}_{150} = a_1 + (150 - 1)$
$a_{150} = 1 + 149.1 = 150$

Total de estrelas no painel:
$\mathrm{s}_{150} = \frac{(a_1+a_{150})150}{2}$
$s_{150} = (1 + 150)75$
$s_{150} = 11250$

Portanto, o funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária foi o III.

Exemplo: Um matemático (com pretensões a carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada de obra. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, se o primeiro degrau mede 50 cm e o último 30 cm e supondo que não há desperdício de madeira no corte, determine o comprimento mínimo da peça.

Solução: Temos uma P.A, onde o primeiro termo é 50, o último termo é 30 e o número de termos é 20. E o que gente quer é o tamanho da peça que no caso vai ser a soma da PA.

$s_{20} = (a_1 + a_{20})\frac{20}{2}$

$s_{20} = (50+30)10$

$s_{20} = 800$

O tamanho da peça é de 800 cm ou 8 metros.

Abaixo, enunciamos uma proposição que mostra a relação entre a soma dos termos de uma PA de primeira ordem e polinômios do 2º grau. Conferir, por exemplo, (MORGADO; CARVALHO, 2015)

A soma dos n primeiros termos de uma PA de primeira ordem é $s_n = \frac{r}{2}n^2+(a_1-\frac{r}{2})n$, um polinômio do segundo grau em n , sem termo independente.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progressão aritmética.

Demonstração: De fato,

$s_n = (a_1 + a_n)n/2$

$s_n = [a_1 + a_1 + (n-1)r]n/2$

$s_n = a_1 n + (n^2 r - nr)/2$

$s_n = (r/2)\ n^2 + (a_1 - r/2)n.$

Observe que, se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio do segundo grau em n. Se r = 0, então S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Reciprocamente, $P(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos de alguma PA na qual $r/2 = a$ e $a_1 - r/2 = b$, ou seja $r = 2a$ e $a_1 = a + b$.

Exemplo: Dada a PA (6, 10, 14, 18, ...) determine o valor da soma dos 30 primeiros termos.

Solução:

Temos que:

s_n = (r/2) n$^2 + (a_1 - r/2)n$.

s$_n$ = (4/2) 30$^2 + (6 - 4/2)30$.

s$_n$ = 1920

3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA NO ENSINO MÉDIO COM USO DE UMA PLANILHA ELETRÔNICA GRATUITA

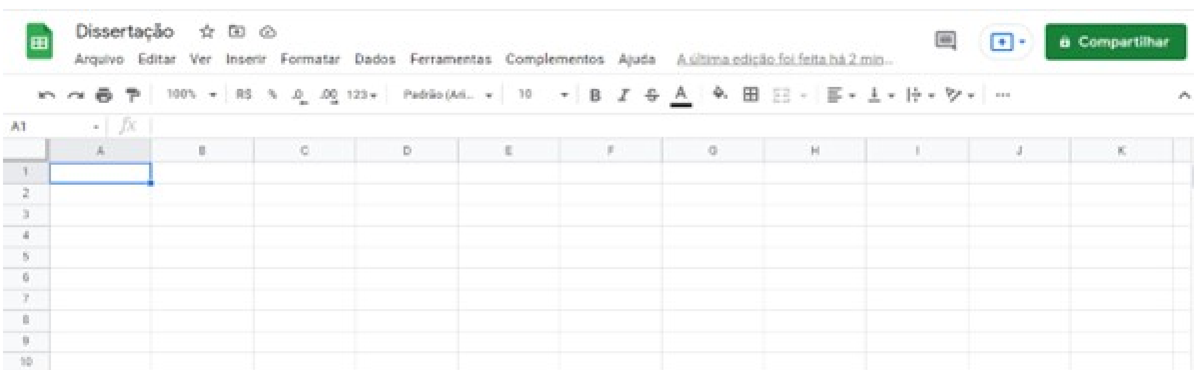
Neste capítulo farei considerações acerca do uso das tecnologias na educação, principalmente com uso da Planilha Google, também chamada “Google Sheets” que consiste em uma ferramenta online e gratuita, onde através de uma conta Google seu acesso é permitido. Apresento, assim, sugestões de atividades para professores e alunos do Ensino Médio utilizando a planilha eletrônica para o estudo de PA.

Segundo BARRETO, Saul , ALVES, Fábio e NORONHA, Claudianny , no livro Ensino e Aprendizagem de Progressão Aritmética: uso e construção de aplicativos, “a comunicação no universo digital é uma realidade bem presente nas salas de aula e o compartilhamento de informações através de dispositivos móveis é uma tendência atual de nossa sociedade. Pensando em uma aprendizagem por meio de dispositivos móveis, a UNESCO reuniu pesquisadores do mundo todo e elaborou diretrizes políticas para a aprendizagem móvel, pois acredita que a aprendizagem onipresente é o futuro. O ensino de matemática por meio de dispositivos móveis se deve ao amplo crescimento e barateamento desse tipo de tecnologia. Os telefones inteligentes (smartphones) e as infinidades de aplicativos vem tomando conta do mercado, no que diz respeito ao mundo digital e a partir daí, devemos pensar na transformação desses recursos em ferramentas para a aprendizagem”.

Iremos trabalhar com a Planilha Google, também chamada “Google Sheets”, uma planilha online e gratuita. Para utilizá-la, basta acessar o endereço:
https://www.google.com/sheets/about/.

A planilha eletrônica é uma tabela formada por linhas e colunas. Nela, as linhas são identificadas por números e as colunas, por letras .

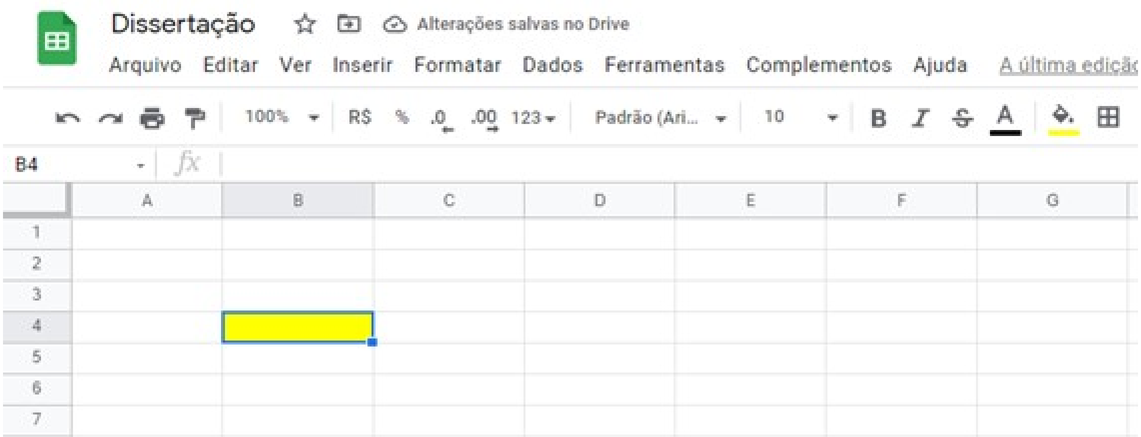
– Figura 3: Planilha eletrônica - linhas e colunas.



Fonte: autor

A localização de uma célula na planilha é analisada pelas localizações horizontal e vertical. Assim, por exemplo, a célula B4 está localizada na coluna B, na quarta linha .

– Figura 4: Planilha eletrônica - localização.



Fonte: autor

Um dos objetivos de se usar planilhas eletrônicas (por exemplo Excel - não gratuito) para o ensino de matemática é fazer rapidamente os cálculos de forma precisa e propor atividades interessantes onde o aluno possa agir ativamente no processo de ensino-aprendizagem podendo ser um recurso tecnológico no ambiente educacional.

3.1 **Sugestões de atividades**

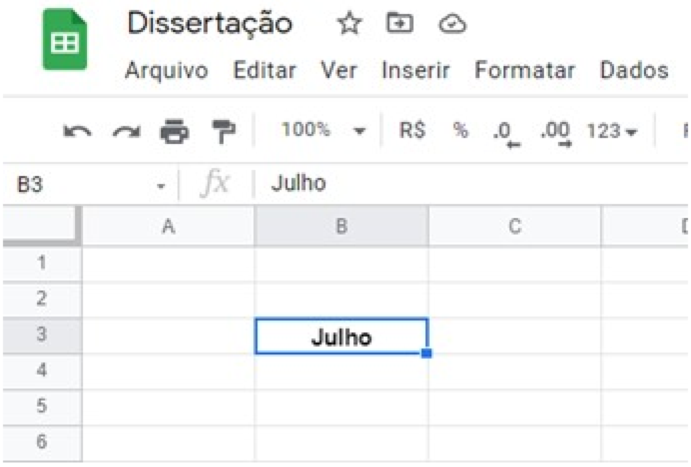
3.1.1 Título: Estudo da P.A. e de sua razão (r)

Objetivo: usar a planilha do Excel para a formalização dos conceitos de P.A. e razão.

Exemplo 1: Uma fábrica de peças industriais produziu 1500 peças em julho e aumenta mensalmente sua produção de 30 peças. Quantas peças produziu em dezembro?

Primeiramente vamos preencher uma célula (B3) com o mês de julho .

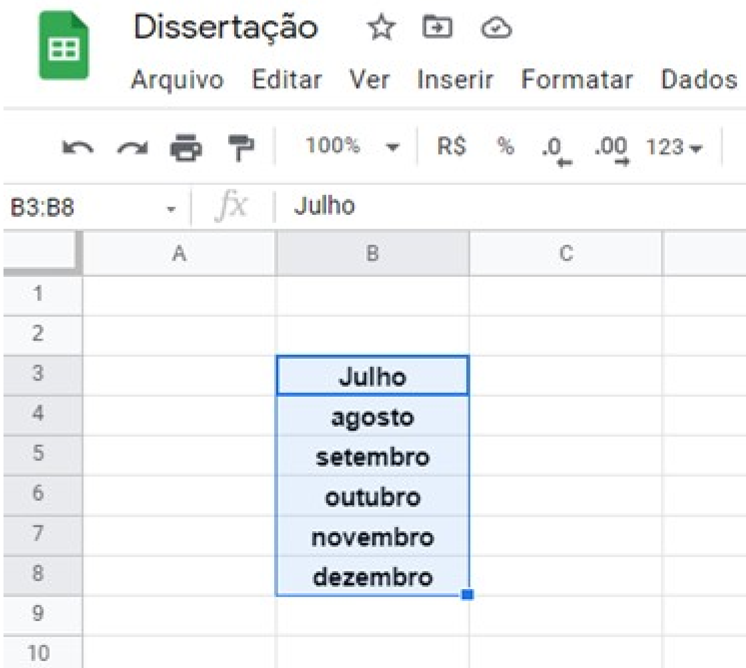
– Figura 5: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

Ao selecionar a célula (C3), aparece um quadradinho colorido no canto inferior direito da região selecionada, denominado alça de preenchimento. Pressionando e arrastando a alça para baixo, os meses de agosto até dezembro são preenchidos automaticamente .

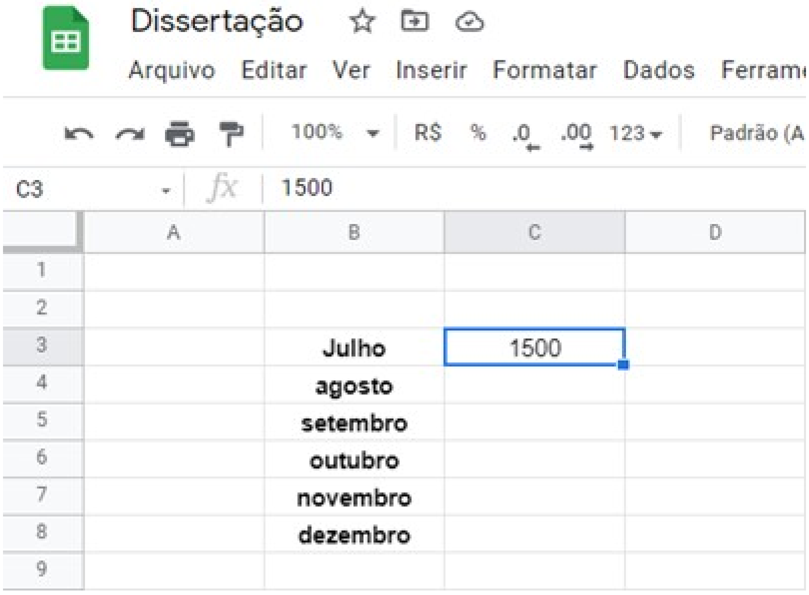
– Figura 6: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

Em seguida, vamos colocar a produção de peças em frente ao mês de julho.

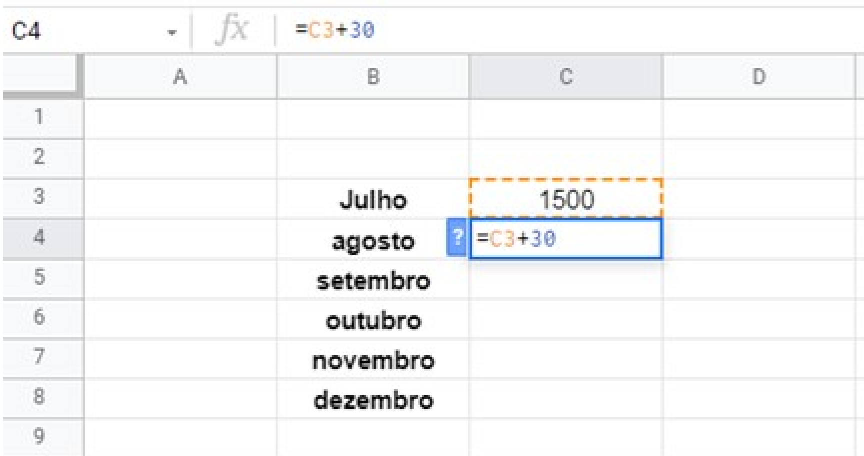
– Figura 7: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

Como a produção aumenta em 30 peças por mês, e desejamos aplicar esse aumento em todos os meses, façamos na célula C4 a seguinte fórmula: =C3+30 .

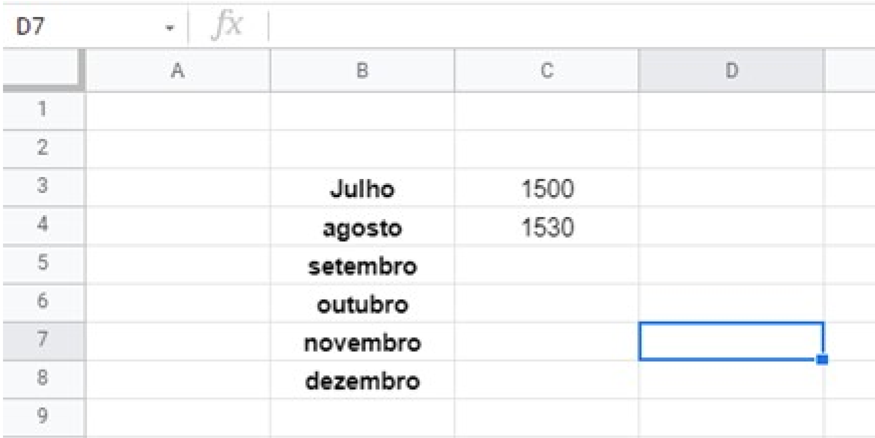
– Figura 8: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

Ao clicarmos em outra célula ou enter, o resultado da soma do valor da célula C3 com 30 aparece em C4 .

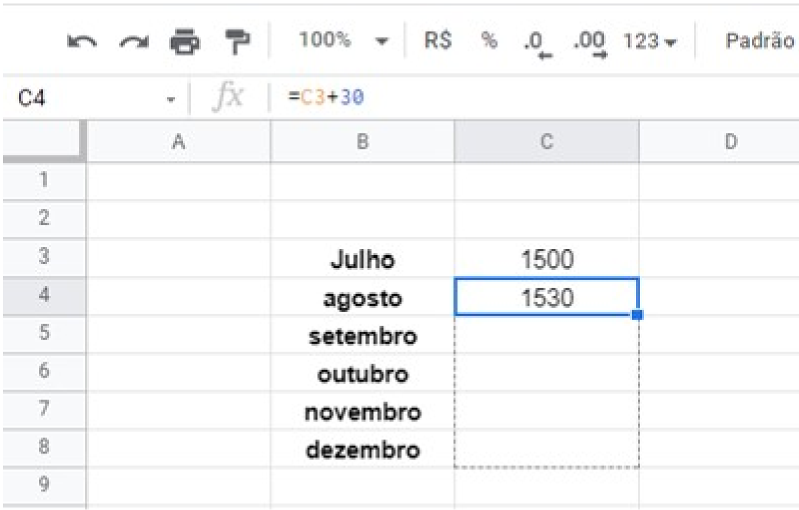
– Figura 9: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

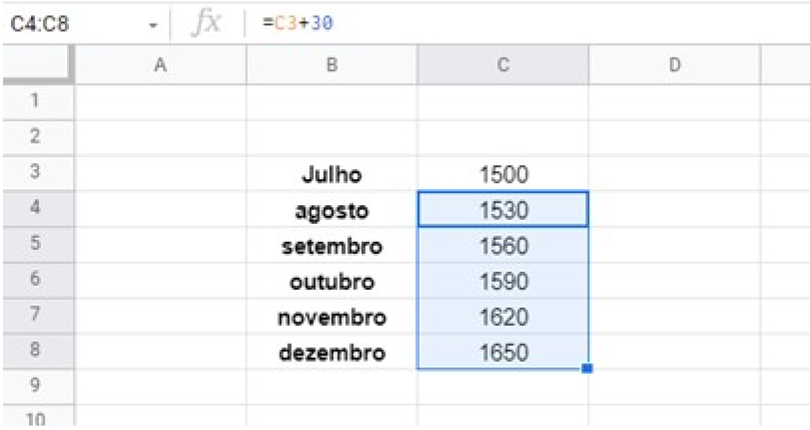
Pressionando e arrastando a alça de preenchimento da célula C4 para baixo até o mês de dezembro, a fórmula inserida (=C3+30) será aplicada automaticamente, porém usando-se o valor da linha anterior e somando-o com 30. Assim, os valores serão obtidos para todos os meses .

– Figura 10: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

– Figura 11: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



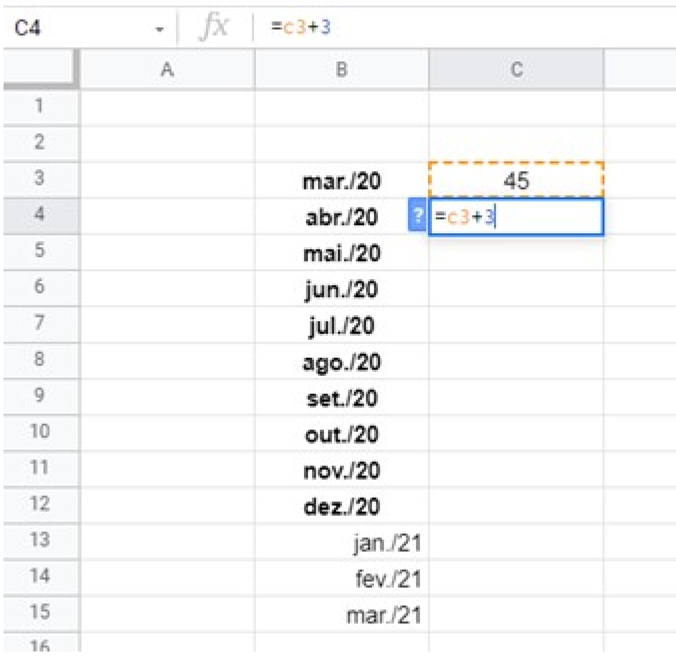
Fonte: autor

Exemplo 2: Sugestão de atividade para fazer na planilha. Uma fábrica de automóveis vendeu 45 veículos em março de 2020 e aumenta mensalmente sua venda de 3 automóveis. Quantos automóveis foram vendidos em março de 2021? Se esse aumento permanecer, qual a previsão de venda para março de 2025?

Sugestão: na planilha preencha a célula com mês e ano (mar/20).

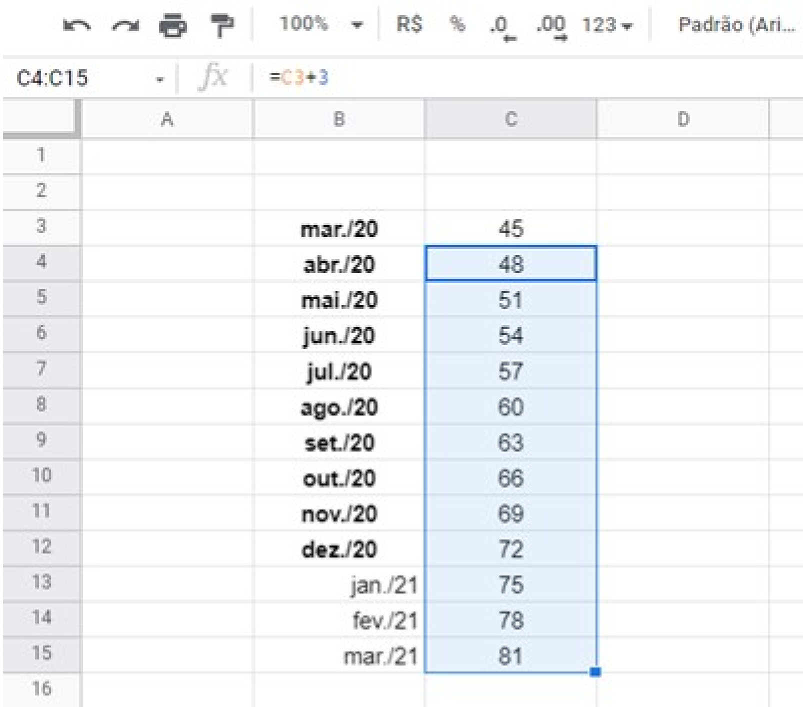
Sugestão de planilha para a resolução:

– Figura 12: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



Fonte: autor

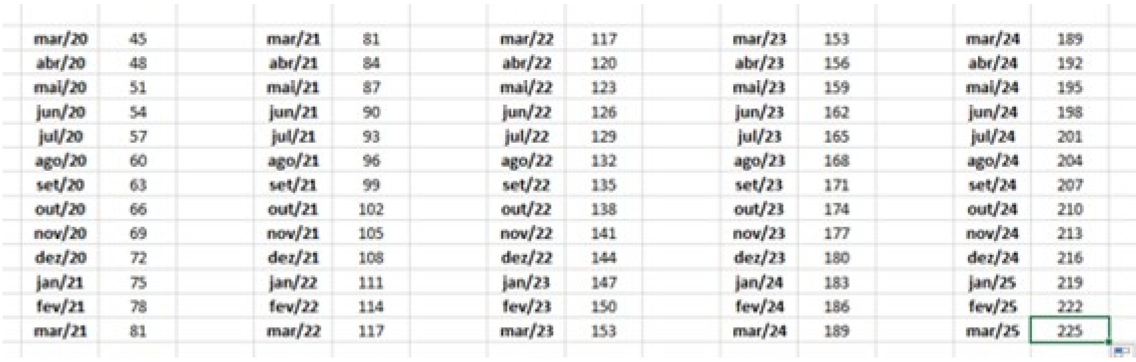
– Figura 13: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



	A	B	C	D
1				
2				
3		mar./20	45	
4		abr./20	48	
5		mai./20	51	
6		jun./20	54	
7		jul./20	57	
8		ago./20	60	
9		set./20	63	
10		out./20	66	
11		nov./20	69	
12		dez./20	72	
13		jan./21	75	
14		fev./21	78	
15		mar./21	81	
16				

Fonte: autor

– Figura 14: Planilha eletrônica - conceitos de P.A. e razão.



mar/20	45	mar/21	81	mar/22	117	mar/23	153	mar/24	189
abr/20	48	abr/21	84	abr/22	120	abr/23	156	abr/24	192
mai/20	51	mai/21	87	mai/22	123	mai/23	159	mai/24	195
jun/20	54	jun/21	90	jun/22	126	jun/23	162	jun/24	198
jul/20	57	jul/21	93	jul/22	129	jul/23	165	jul/24	201
ago/20	60	ago/21	96	ago/22	132	ago/23	168	ago/24	204
set/20	63	set/21	99	set/22	135	set/23	171	set/24	207
out/20	66	out/21	102	out/22	138	out/23	174	out/24	210
nov/20	69	nov/21	105	nov/22	141	nov/23	177	nov/24	213
dez/20	72	dez/21	108	dez/22	144	dez/23	180	dez/24	216
jan/21	75	jan/22	111	jan/23	147	jan/24	183	jan/25	219
fev/21	78	fev/22	114	fev/23	150	fev/24	186	fev/25	222
mar/21	81	mar/22	117	mar/23	153	mar/24	189	mar/25	225

Fonte: autor

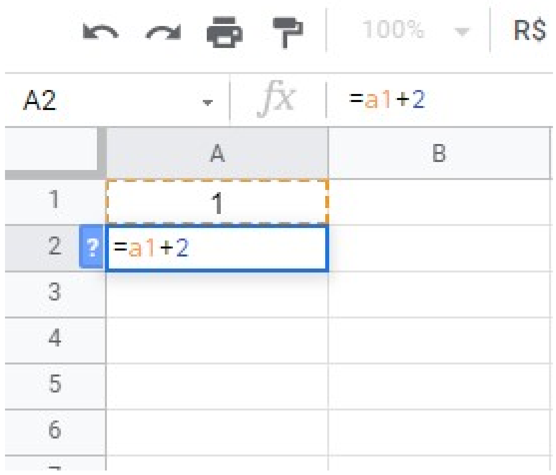
3.1.2 Título: Estudo da classificação de uma P.A

Objetivo: usar a planilha eletrônica para calcular a razão e classificar a P.A.

Exemplo 1: Calcule a razão e classifique as sequências (1, 3, 5, 7, 9, ...), (61, 51, 41, 31, ...) e (5, 5, 5, ...).

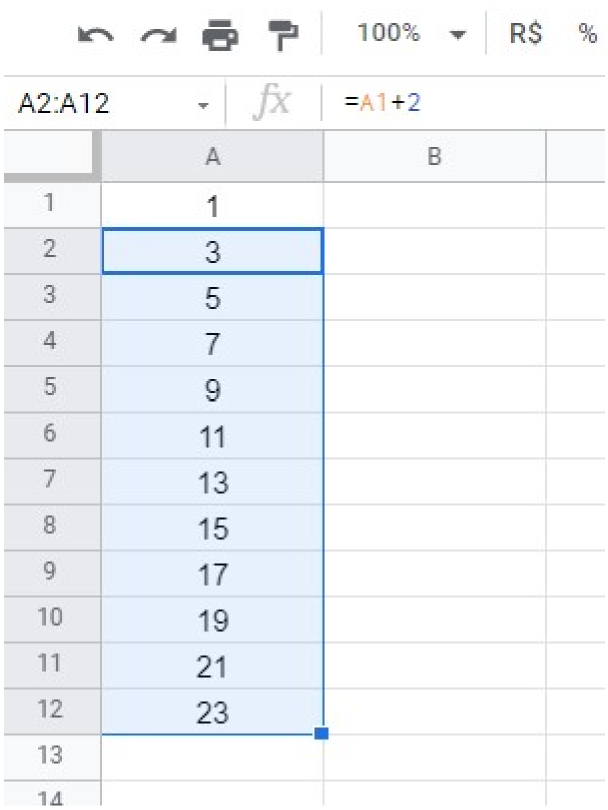
Para classificar (1, 3, 5, 7, 9, ...), digite o primeiro termo da sequência em qualquer célula (A1) e calculemos os demais termos usando a fórmula em A2 (=A1+2) e a alça de preenchimento.

– Figura 15: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

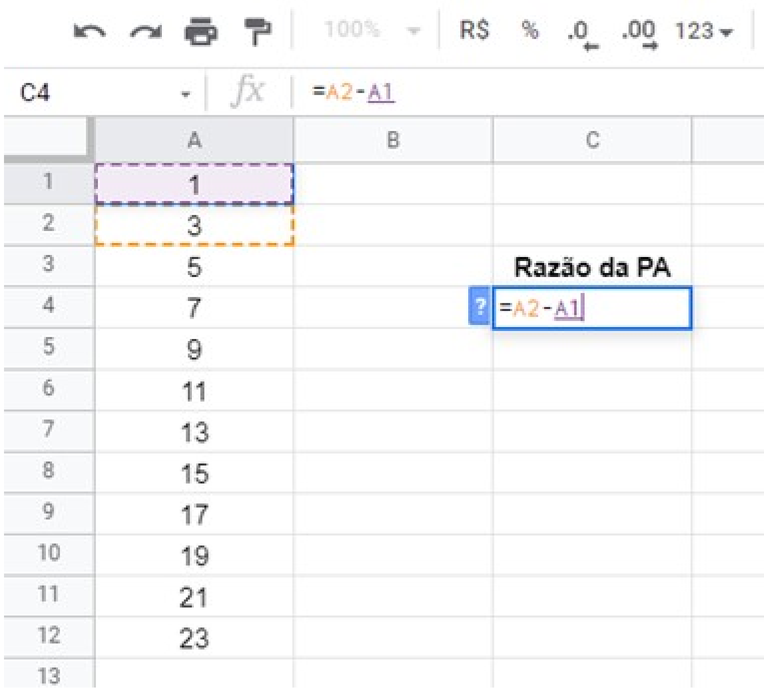
– Figura 16: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

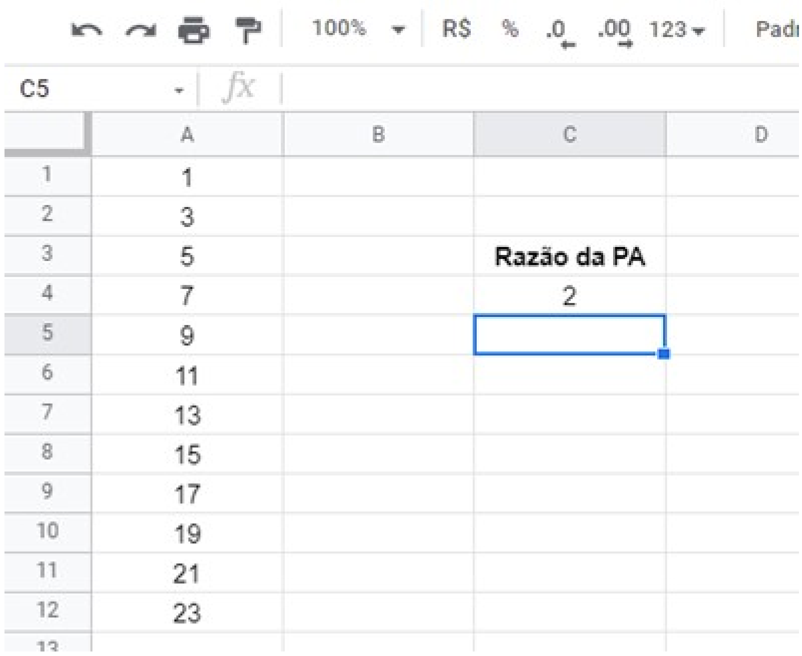
Em outra célula qualquer (C4), vamos escrever Razão da PA e na célula abaixo (C5) calculá-la usando a fórmula =A2-A1, por exemplo, ou outra que faça um termo qualquer menos o seu anterior.

– Figura 17: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

– Figura 18: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.

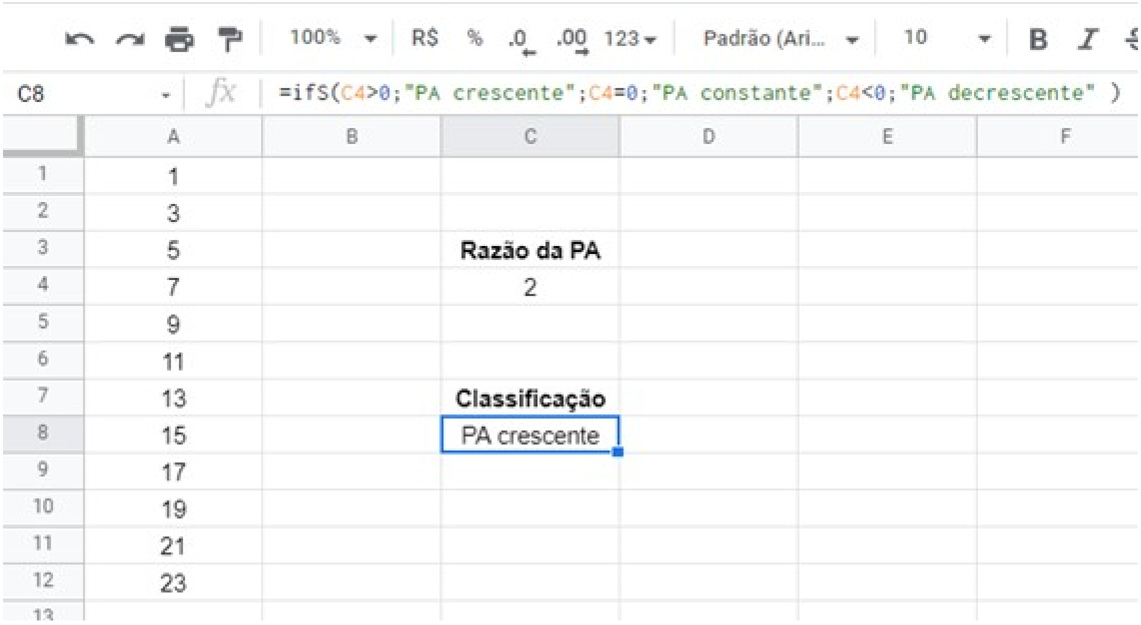


Fonte: autor

Em outra célula (C7), vamos escrever Classificação e na célula abaixo (C8) fazer o seguinte comando, para obter sua classificação:

=IFS(C4>0;"PA crescente";C4=0;"PA constante";C4<0;"PA decrescente")

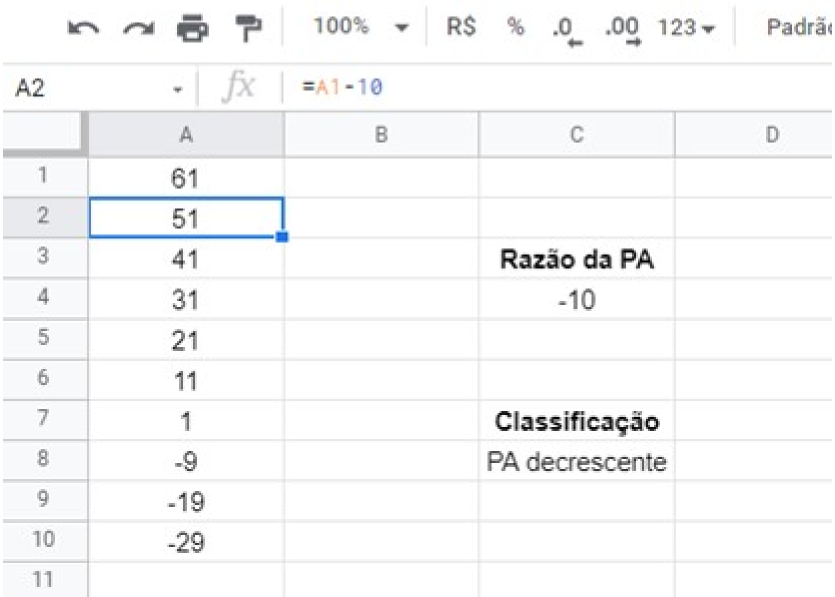
– Figura 19: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

Para a sequência (61, 51, 41, 31, ...), basta utilizarmos a mesma planilha, apenas modificando o primeiro termo e a fórmula da célula abaixo dele:

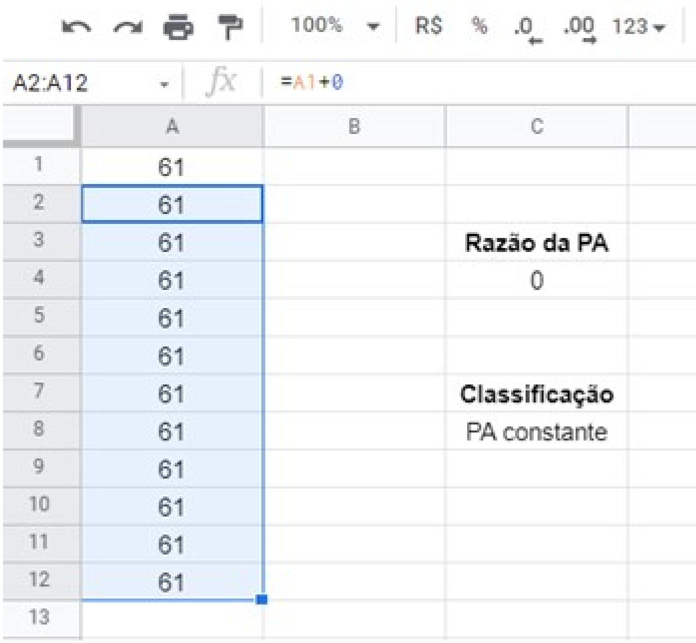
– Figura 20: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

Para a sequência (5, 5, 5, ...) basta proceder de forma análoga.

– Figura 21: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.

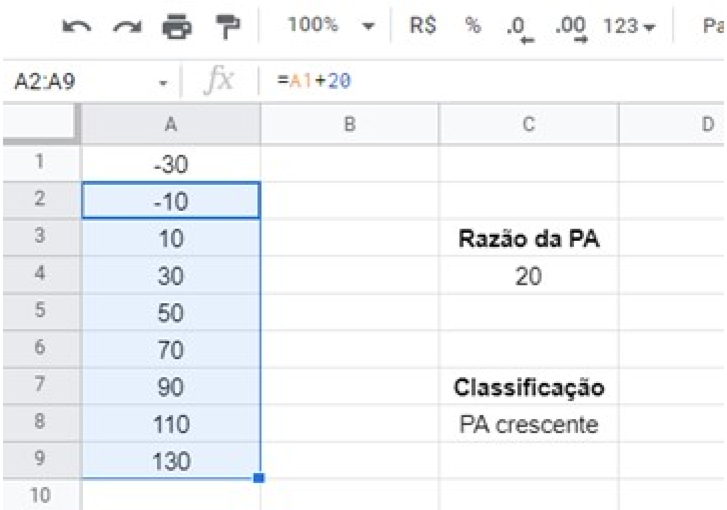


Fonte: autor

Exemplo 2: Sugestão de atividade para fazer na planilha. Calcule a razão e classifique as sequências (-30, -10, 10, 30, 50, ...), (1; 0,5; 0; -0,5; -1; ...) e (10, 10, 10, ...).

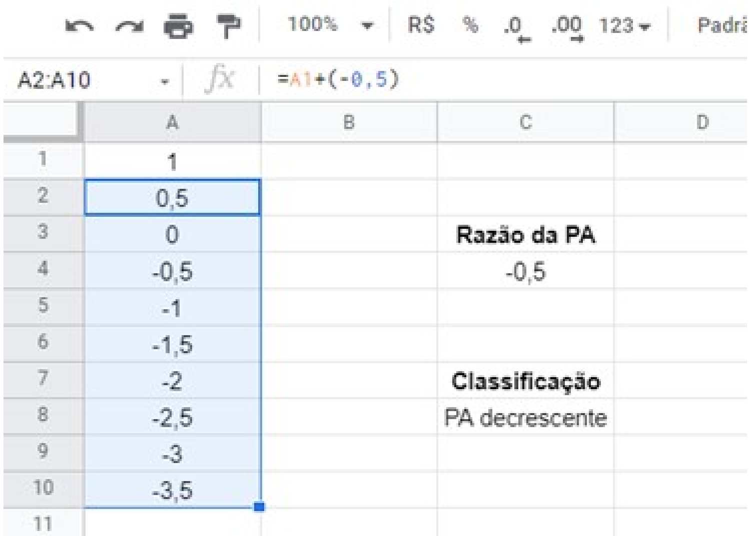
Sugestão de planilha para a resolução:

– Figura 22: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



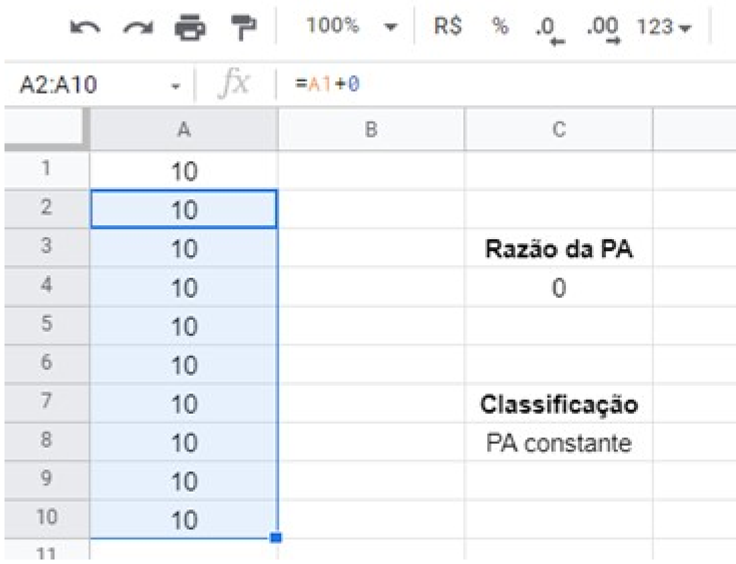
Fonte: autor

– Figura 23: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

– Figura 24: Planilha eletrônica - classificação de uma P.A.



Fonte: autor

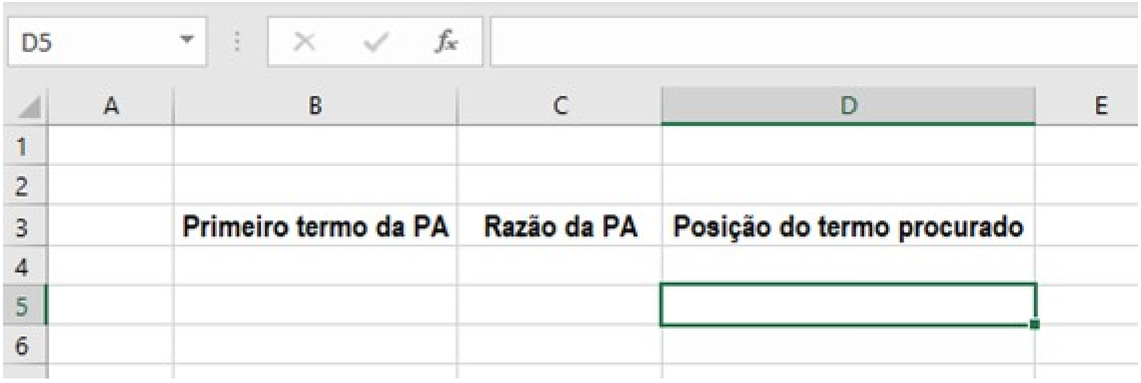
3.1.3 Título: Estudo da fórmula do termo geral de uma P.A

Objetivo: usar a planilha eletrônica (aqui farei com o Excel) para calcular um termo qualquer de uma P.A.

Exemplo 1: Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de 1.000,00 reais, e as demais aumentarão 20,00 reais ao mês. Ao final do financiamento, qual o valor da última parcela para o comprador?

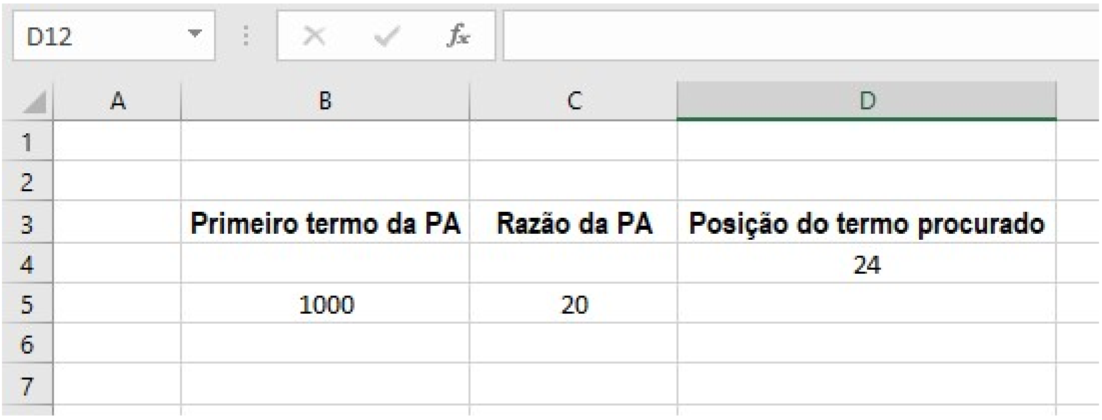
Primeiramente vamos preencher três células (B3, C3, D3) com “Primeiro termo”, “Razão da PA” e “Posição do termo procurado” e os valores respectivos:

– Figura 25: Planilha eletrônica - termo geral.



Fonte: autor

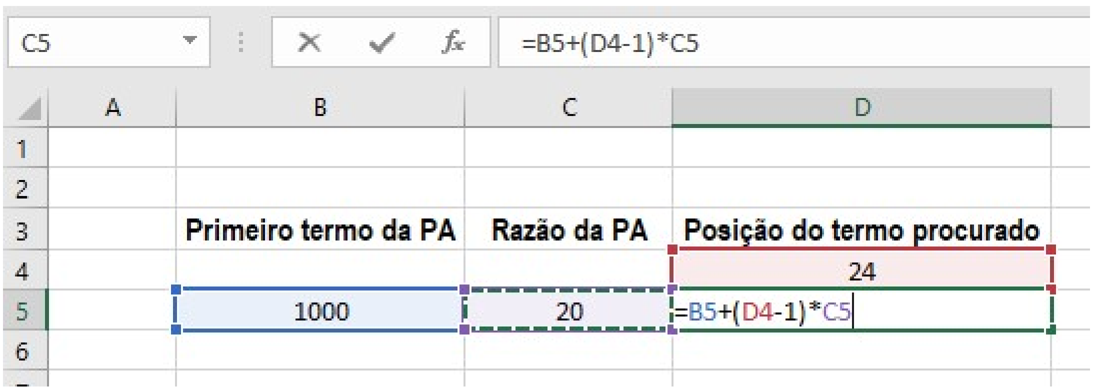
– Figura 26: Planilha eletrônica - termo geral.



Fonte: autor

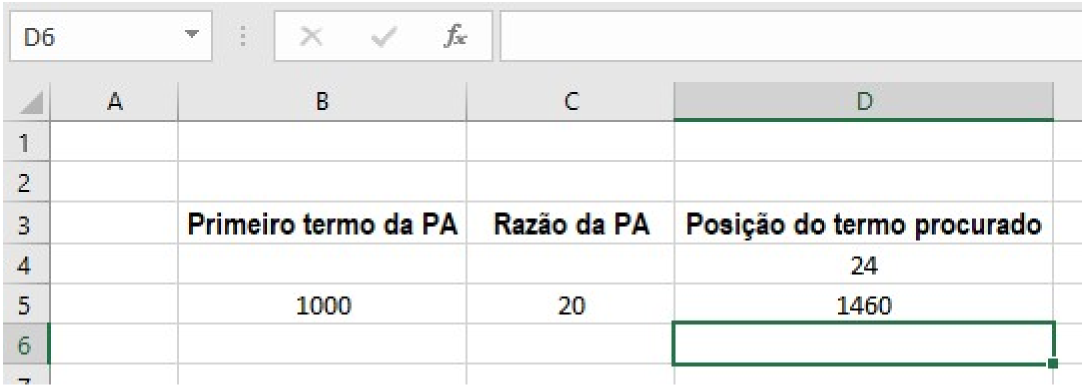
Em D4, façamos a fórmula do termo geral: =B5+(D4-1)*C5

– Figura 27: Planilha eletrônica - termo geral.



Fonte: autor

– Figura 28: Planilha eletrônica - termo geral.



D6 | f_x

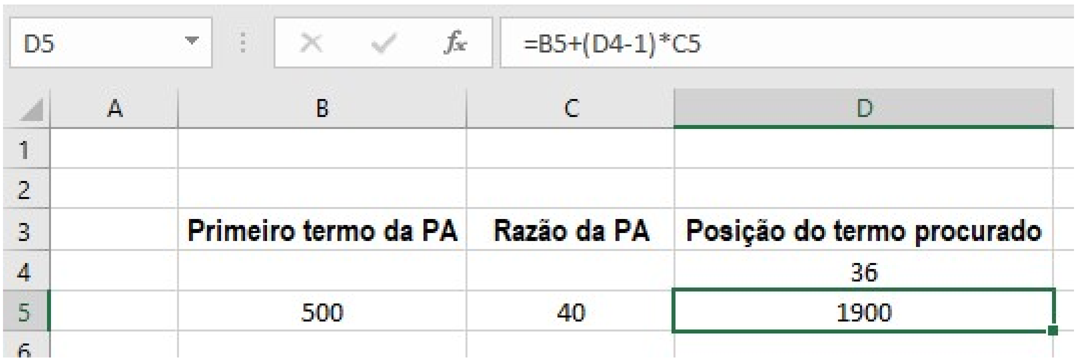
	A	B	C	D
1				
2				
3		Primeiro termo da PA	Razão da PA	Posição do termo procurado
4				24
5		1000	20	1460
6				

Fonte: autor

Exemplo 2: Sugestão de atividade para fazer na planilha. Uma concessionária vende um carro financiado em três anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de 500,00 reais, e as demais aumentarão 40,00 reais ao mês. Ao final do financiamento, qual o valor da última parcela para o comprador?

Sugestão de planilha para a resolução:

– Figura 29: Planilha eletrônica - termo geral.



D5 | f_x | =B5+(D4-1)*C5

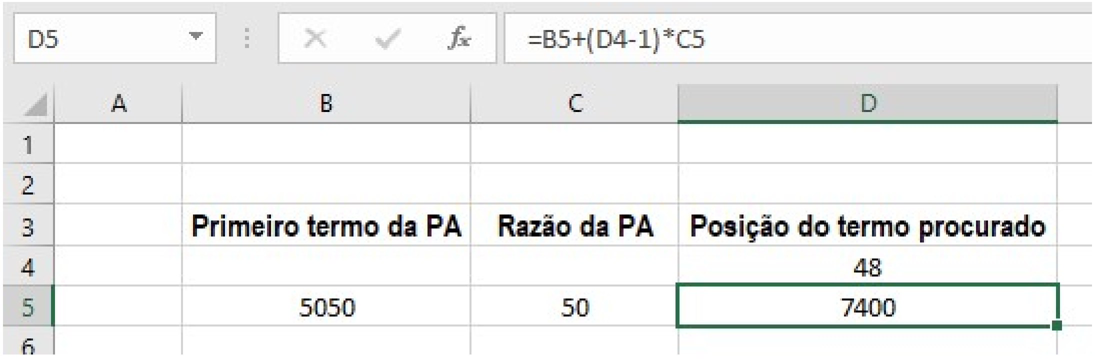
	A	B	C	D
1				
2				
3		Primeiro termo da PA	Razão da PA	Posição do termo procurado
4				36
5		500	40	1900

Fonte: autor

Exemplo 3: Um capital de 5.000,00 reais é aplicado a juros simples durante 4 anos à uma taxa de 1 por cento ao mês. Calcule o montante após o período de aplicação.

Temos que os valores dos montantes formam uma PA.
$M_1 = 5000 + 0{,}01.5000 = 5050$
$M_2 = 5000 + 0{,}01.5000.2 = 5100$
$M_3 = 5000 + 0{,}01.5000.3 = 5150$
$\vdots$
Queremos calcular o 48^{o} termo da sequência. Assim,

– Figura 30: Planilha eletrônica - termo geral.



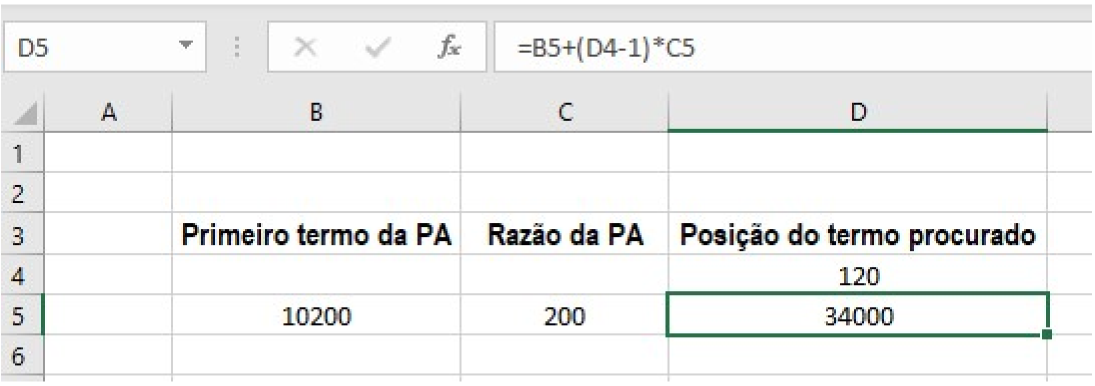
	A	B	C	D
1				
2				
3		Primeiro termo da PA	Razão da PA	Posição do termo procurado
4				48
5		5050	50	7400
6				

Fonte: autor

Exemplo 4: Sugestão de atividade para fazer na planilha. Um capital de 10.000,00 reais é aplicado a juros simples durante 10 anos à uma taxa de 2 por cento ao mês. Calcule o montante após o período de aplicação.

Sugestão de planilha para a resolução:

– Figura 31: Planilha eletrônica - termo geral.



	A	B	C	D
1				
2				
3		Primeiro termo da PA	Razão da PA	Posição do termo procurado
4				120
5		10200	200	34000
6				

Fonte: autor

Exemplo 5: Sugestão de atividade para fazer na planilha.

(ENEM 2012) A tabela seguinte apresenta a média, em kg, de resíduos domiciliares produzidos anualmente por habitante, no período de 1995 a 2005.

– Figura 32: Planilha eletrônica - termo geral.

Produção de resíduos domiciliares por habitante em um país

ANO	kg
1995	460
2000	500
2005	540

Fonte: autor

Se essa produção continuar aumentando, mantendo o mesmo padrão observado na tabela, qual a previsão de produção de resíduos domiciliares, por habitante no ano de 2020, em kg?

Sugestão de planilha para a resolução:

Temos que $a_1 = 460$, $a_2 = 500$,$a_3 = 540$,$\ldots$. Queremos determinar a produção de resíduos por habitante para o ano de 2020, ou seja, a_6.

– Figura 33: Planilha eletrônica - termo geral.

D5 | f_x | =B5+(D4-1)*C5

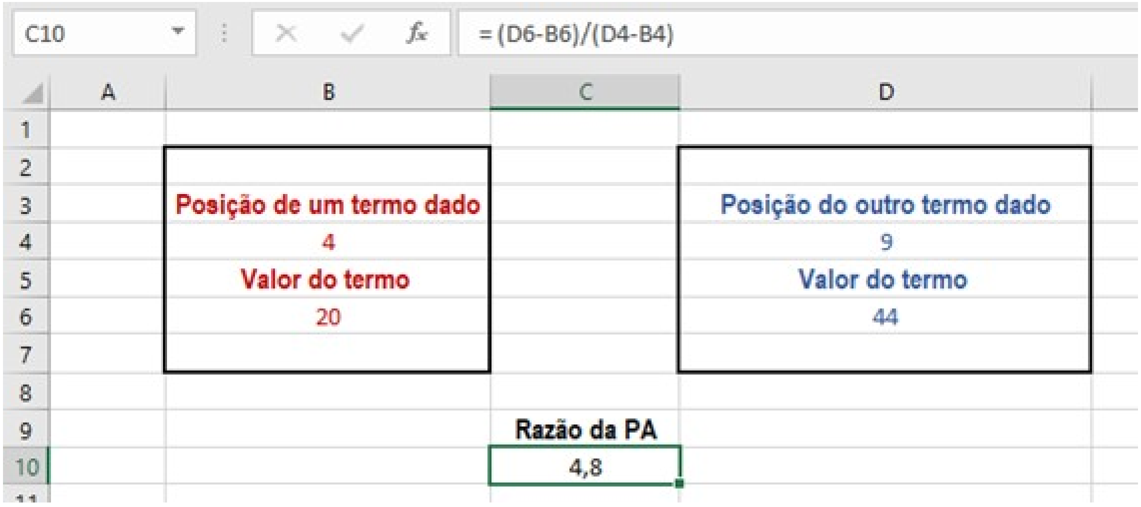
	A	B	C	D
1				
2				
3		**Primeiro termo da PA**	**Razão da PA**	**Posição do termo procurado**
4				6
5		460	40	660
6				

Fonte: autor

Exemplo 6: Uma empresa registrou suas arrecadações mensais dos dez primeiros meses de 2020, e constatou que estes seguiam o padrão de uma PA. Sabendo que a arrecadação no mês de abril foi de 20 mil reais e em setembro, 44 mil reais, determine a arrecadação para o mês de outubro.

Primeiramente vamos preencher a planilha, como mostra figura abaixo:

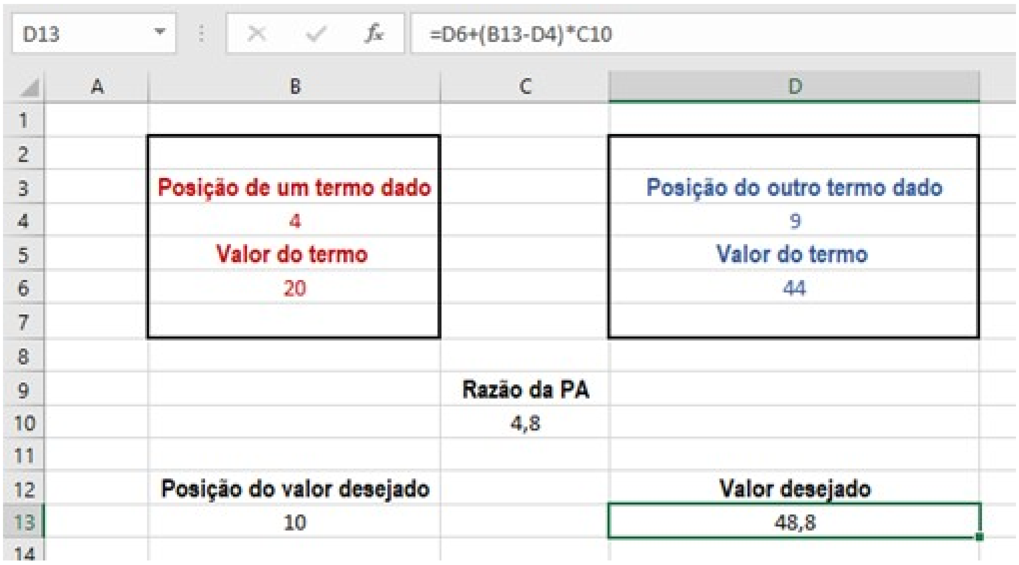
– Figura 34: Planilha eletrônica - termo geral.



Fonte: autor

Portanto, a arrecadação para o mês de outubro será:

– Figura 35: Planilha eletrônica - termo geral.

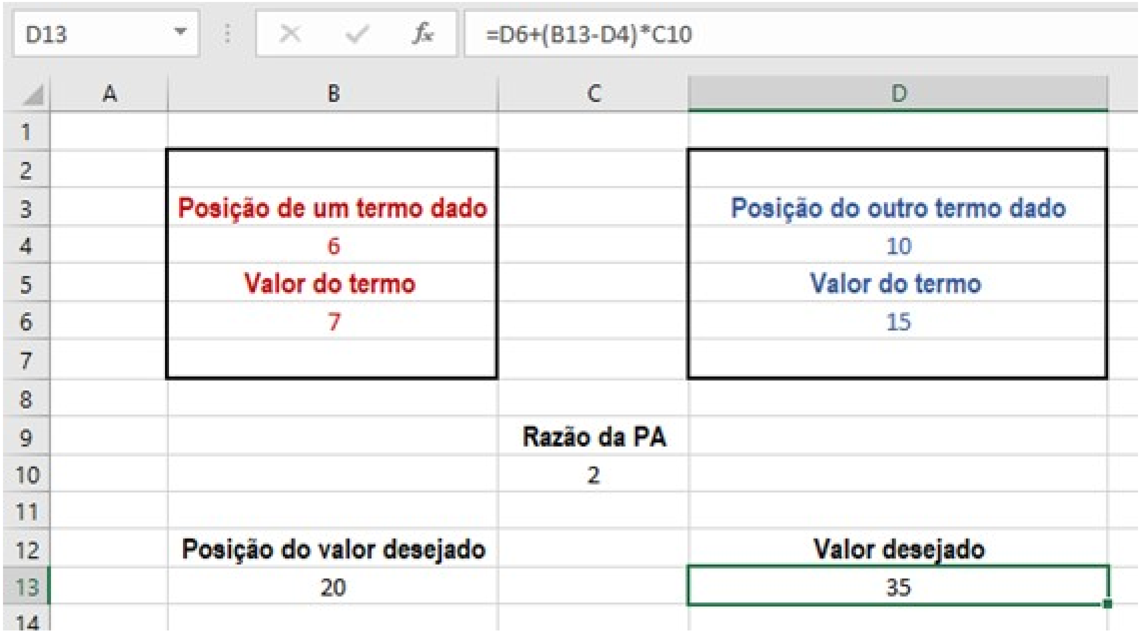


Fonte: autor

Exemplo 7: Sugestão de atividade para fazer na planilha. Determine o vigésimo termo da P.A. em que o 6° termo é 7 e o 10° é 15.

Sugestão de planilha para a resolução:

– Figura 36: Planilha eletrônica - termo geral.



Fonte: autor

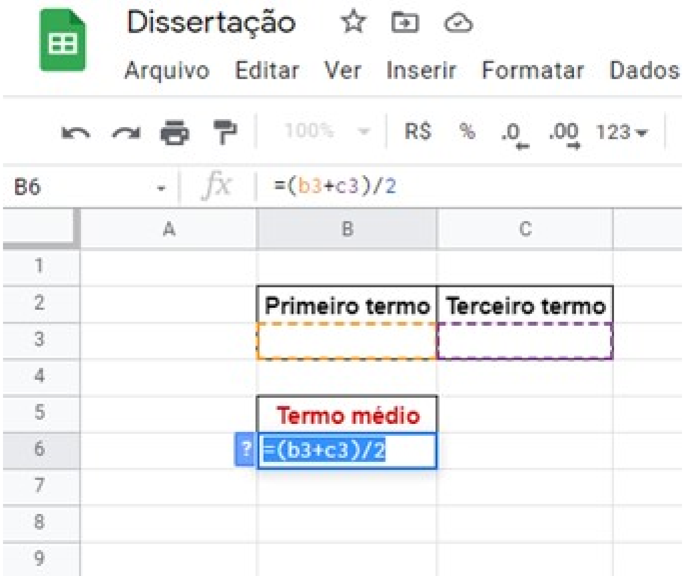
3.1.4 Título: Estudo do termo central de três números.

Objetivo: usar a planilha eletrônica para calcular o termo central de três números de uma P.A.

Exemplo 1: A produção anual de peças de uma indústria, durante os três primeiros anos de vida, seguiu o padrão de uma PA. Sabendo que a produção anual no primeiro e terceiro anos foi de 7 bilhões e 13 bilhões, respectivamente, determine a produção para o segundo ano.

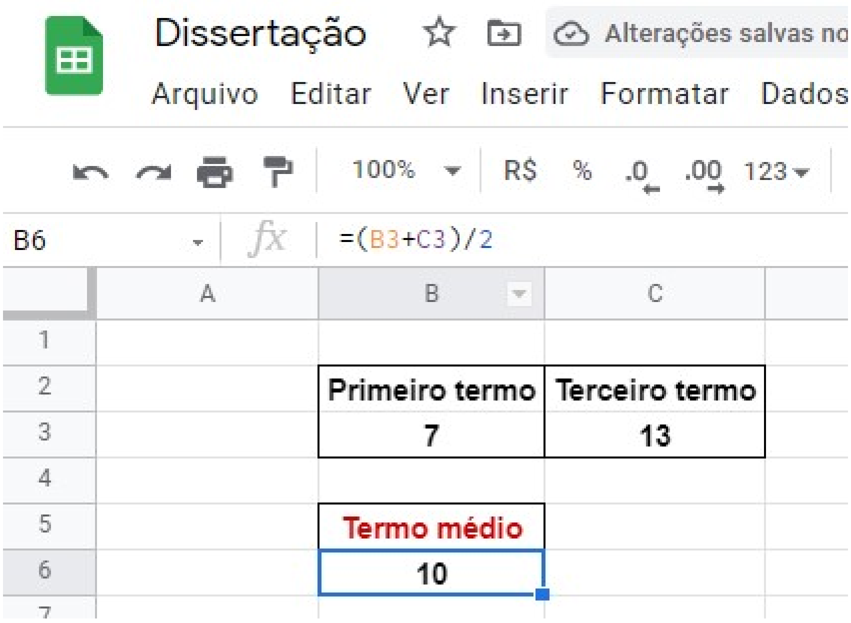
Primeiramente vamos preencher a planilha com os termos dados.

– Figura 37: Planilha eletrônica - termo central.



Fonte: autor

– Figura 38: Planilha eletrônica - termo central.



Fonte: autor

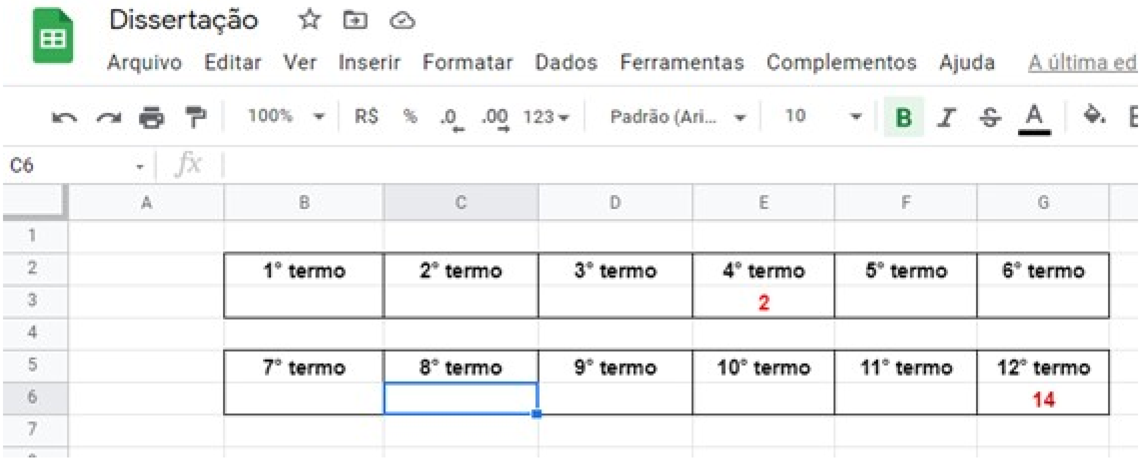
3.1.5 Título: Estudo do termo central, distante k posições.

Objetivo: usar a planilha eletrônica para calcular o termo central, distante k posições , de uma P.A.

Exemplo 1: A produção mensal de peças de uma indústria, durante os quinze primeiros meses de vida, seguiu o padrão de uma PA. Sabendo que a produção mensal no quarto e décimo segundo meses foi de 2 bilhões e 14 bilhões, respectivamente, determine a produção para o oitavo mês.

Primeiramente vamos preencher a planilha com os termos dados.

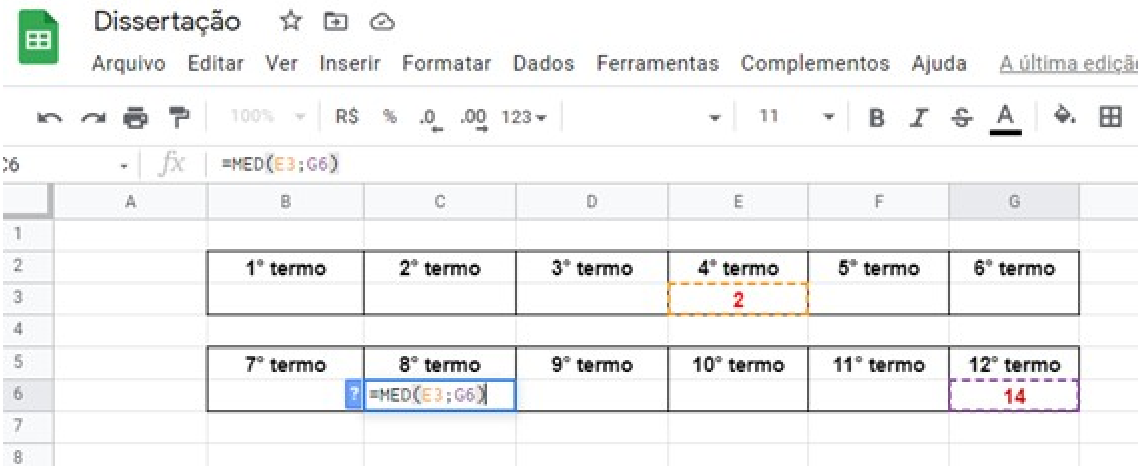
– Figura 39: Planilha eletrônica - termo central.



Fonte: autor

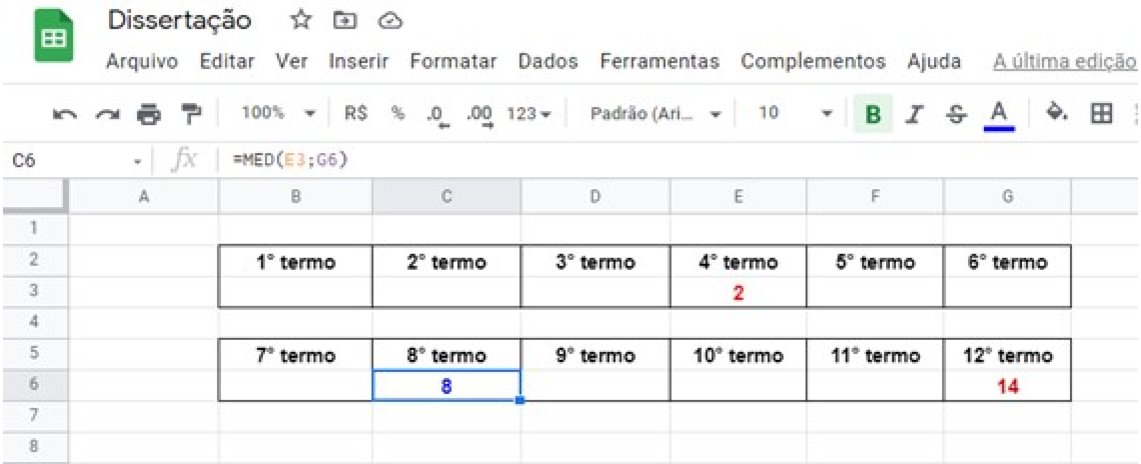
Como o 8° termo é o termo equidistante do 4° e do 12° termos, então seu valor será a média aritmética entre eles.

– Figura 40: Planilha eletrônica - termo central.



Fonte: autor

– Figura 41: Planilha eletrônica - termo central.



Fonte: autor

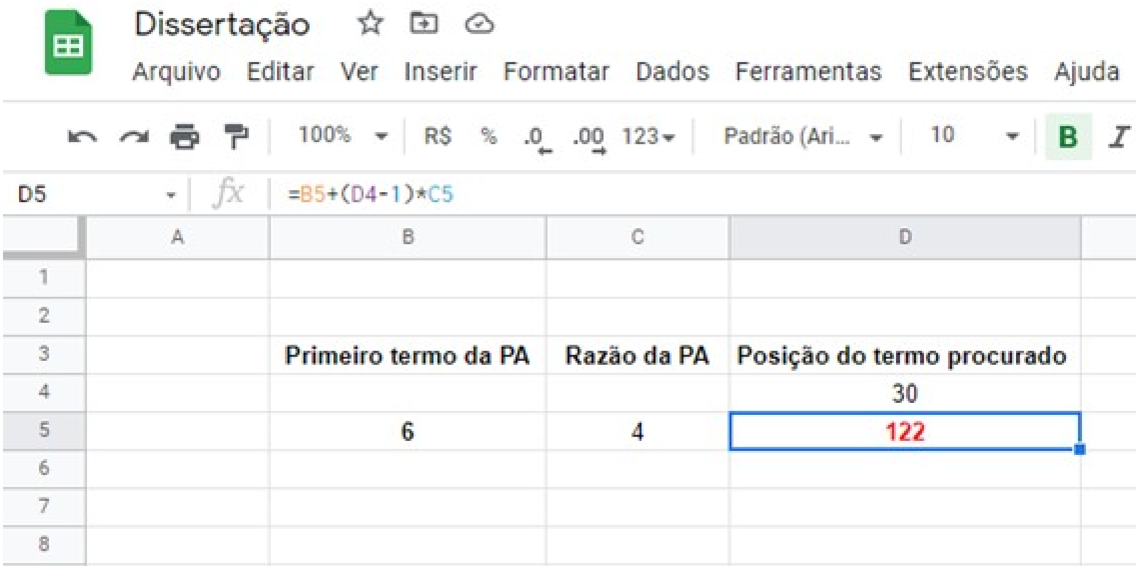
3.1.6 Título: Soma dos termos de uma PA

Objetivo: usar a planilha eletrônica para calcular a soma dos termos de uma PA.

Exemplo 1: Dada a PA (6, 10, 14, 18, ...) determine o valor da soma dos 30 primeiros termos.

Primeiramente, vamos calcular o trigésimo termo da PA.

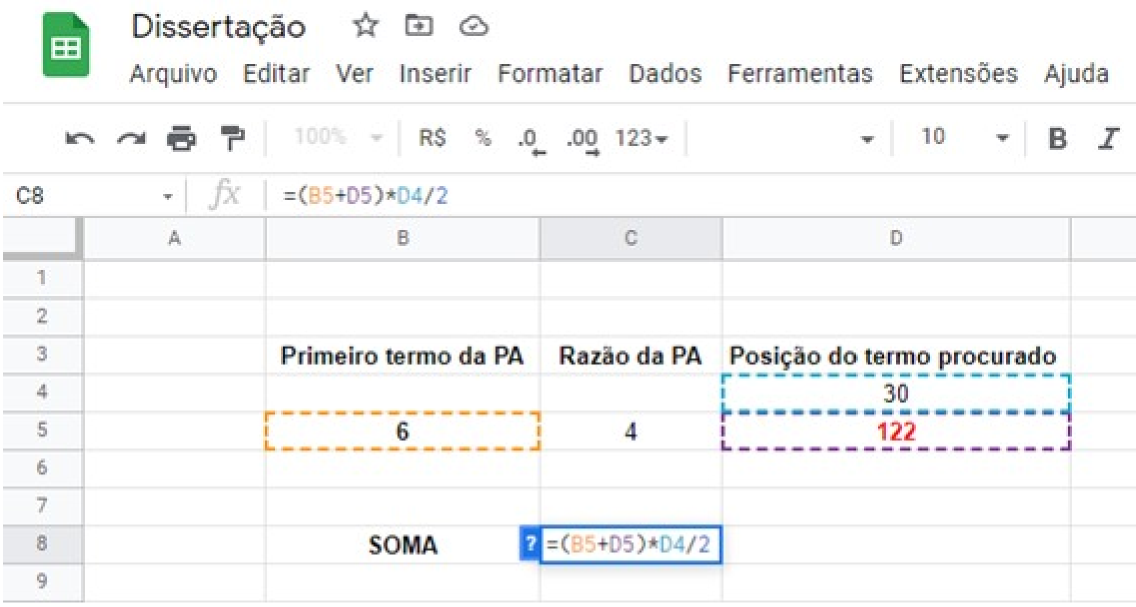
– Figura 42: Planilha eletrônica - Soma dos termos.



Fonte: autor

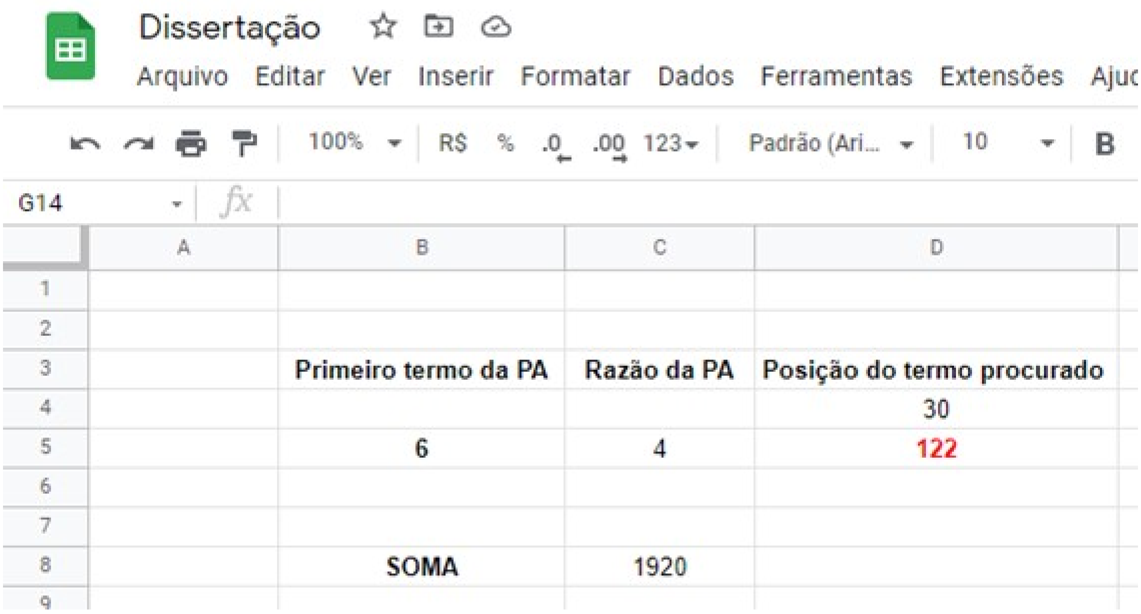
Façamos a soma dos 30 primeiros termos da sequência.

– Figura 43: Planilha eletrônica - Soma dos termos.



Fonte: autor

– Figura 44: Planilha eletrônica - Soma dos termos.



Fonte: autor

4 RESULTADOS

A atividade foi desenvolvida com 12 alunos da segunda série do Ensino Médio do Colégio Academia, na cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais, separados em duplas.

Iniciei a atividade mostrando aos alunos o que é uma planilha eletrônica, como trabalhar com as operações matemáticas, como programar uma fórmula, como montar uma tabela, etc. Em seguida distribui o bloco de atividades para cada dupla e fizemos a primeira atividade juntos. Posteriormente, propus que cada dupla seguisse o seu rítmo de trabalho. Durante o desenvolvimento do trabalho, eu assessorava as duplas e sanava as dúvidas.

O trabalho teve duração de 3 horas e, desde o primeiro momento, percebi a alegria dos alunos em fazer uma aula diferente, relacionando a tecnologia, que está presente na vida deles, com os conteúdos assimilados em sala de aula.

Transcrevo aqui o feedback de alguns alunos:

"A atividade foi extremamente positiva, tanto para aprender e fixar os conceitos da matéria (como as fórmulas), pois ao usar a planilha, o conteúdo se torna menos abstrato,e também para aprender conceitos básicos de programação, algo que acredito que ajudará bastante no curso que pretendo fazer".

"Efetivar o uso de planilhas através do estudo de PA, foi muito interessante, pois além de conhecer um pouco de algo que é tão presente na dinâmica do dia a dia, adentra a área de exatas, a qual eu não tenho muita segurança e, explorar esse aspecto foi bastante construtivo. Foi bem divertido também, ver como o mecanismo, o qual é tão complexo e ao mesmo tão simples, funciona."

"Trabalho extremamente positivo para meu aprendizado, e acredito que para todos presentes. Muito interessante ver como funciona esse tipo de programa tão utilizado hoje em dia, e como ele pode nos ajudar em várias ocasiões tanto na vida escolar, quanto nas nossas futuras vidas no mercado de trabalho."

"O trabalho contribuiu muito com o meu aprendizado, trazendo uma forma nova de enxergar a matéria, além de envolver a tecnologia o que é muito interessante nos dias atuais".

"O trabalho vai me ajudar muito no futuro, pois planilhas são extremamente úteis para a maioria das profissões e situações do dia a dia. Além disso o trabalho foi interessante, divertido e, contrariando minha ideia inicial, foi bem simples de aprender a usar o sistema."

"Hoje com a realização desse trabalho, pude aprender muito. Não somente com a matemática dada no dia a dia em sala de aula, mas também, aprendi a mexer um pouco de planilhas, o que me fez perceber que esse método de ensino seria muito útil tanto no aprendizado dentro de sala, mas também, fora dela."

"A aula de hoje foi uma aula singular, um método de ensino diferente que trabalha duas ou mais habilidades ao mesmo tempo. A aula foi divertida e de grande valor para mim, que não conhecia planilha eletrônica. É um método que pode ser fácilmente aplicado Brasil a fora."

5 CONCLUSÃO

Após realizar a análise de cada atividade realizada pelos alunos, percebi já de imediato a aceitação do uso da tecnologia por todos, a participação e o interesse na atividade proposta. Acredito que minha proposta de associar o uso de tecnologia no ensino-aprendizagem de matemática, gerou resultados positivos na fixação dos conceitos e fórmulas, a metodologia agradou aos alunos, tornando a aula divertida e relacionada com a realidade deles.

Portanto, conclui-se a partir disso, a importância da utilização destes recursos computacionais para o ensino de Sequências, proporcionando, tanto em termos de conhecimento para os estudantes, quanto como instrumento auxiliar no processo de ensino-aprendizagem, uma aprendizagem construtiva, significativa e agradável para todos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Versão final. Brasília: MEC / SEB, 2018. 595 p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC-EI-EF-110518-versaofinal-site.pdf. Acesso em: 05 mar. 2021. BRASIL.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (ENSINO MÉDIO) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2000. 58 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 05 mar. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática São Paulo: 1 ed. Ática, 2004.

IEZZI, G. e Outros, Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 4, São Paulo, Atual Ed.,1977.

LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., A Matemática do Ensino Médio - Volume 1, - 10.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2012.

LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., A Matemática do Ensino Médio - Volume 2, - 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

GIOVANNI, J. R.; Bonjorno, J. R.; Júnior, J. R. G. Matemática Fundamental: Uma Nova Abordagem. 1. ed. São Paulo: FTD, 2002. Único.

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática 2. 1.ed. São Paulo: Moderna, 1995.

BARRETO, Saul Rodrigo da C., Alves, Fábio J. da C. e Noronha, Claudianny A.Ensino e Aprendizagem de Progressão Aritmética: uso e construção de aplicativos. 1.ed. Belém - PA, 2019.