Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Altamiro Batista da Rocha Junior

Abordagens Cronológicas no Ensino de Matemática Financeira

Juiz de Fora-MG
2013

Altamiro Batista da Rocha Junior

Abordagens Cronológicas no Ensino de Matemática Financeira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora-MG
2013

Rocha Junior, Altamiro Batista da.

Abordagens cronológicas no ensino de Matemática Financeira / Altamiro Batista da Rocha Junior. - 2013.
77f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. História da Matemática. 3. Cronologia.
4. Matemática Financeira. I. Título.

Altamiro Batista da Rocha Junior

Abordagens Cronológicas no Ensino de Matemática Financeira

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia - UFSCar

Agradecimentos

Inicialmente, à minha mãe, Márcia, ao meu padrinho Marcos e a toda minha família por sempre terem me cercado de bons exemplos de força, garra e determinação, e por nunca terem desistido de serem, de fato, educadores pra mim.

A todos os professores dos quais tive, tenho e terei o imenso prazer de ser um eterno aluno.

Ao Prof. Dr. Luiz Fernando por toda sua orientação, atenção, paciência e, principalmente, pelos questionamentos que levaram a ricas reflexões.

Aos Professores Dr. Luís Fernando Crocco Afonso e Dr. Rodrigo da Silva Rdrigues pelas valiosas contribuições a este trabalho.

A cada um dos autores aqui citados por suas contribuições que tanto enriquecem a Matemática, a Educação e meio acadêmico em geral, refletindo em trabalhos por uma sociedade mais evoluída, democrática e justa.

A todos os Professores do PROFMAT da UFJF pela dedicação ao nosso curso, ajudando a enriquecer nosso repertório matemático.

Aos Professores Daniel, Ariovan, Anderson Luiz, Edilson, Luz, Leonardo, Murta, Robson pelo conhecimento humanístico que transborda em cada conversa, ao professor Vinícius pelas valiosas conversas sobre a História da Matemática, aos Professores Marcelo Coelho e Vanderlan pelas valiosíssimas contribuições com o LaTex, e a todos os professores da Escola Preparatória de Cadetes do Ar.

A todos os colegas da turma 2011 do PROFMAT e à UFJF, principalmente aos funcionários de cada biblioteca que prestam serviços de tamanha importância aos que buscam conhecimento.

À CAPES, não só pela bolsa, mas pela aposta nesta valiosa empreitada que é o PROFMAT.

À minha amada Lívia, e toda sua família, por sua imensa compreensão, paciência e apoio em todos os momentos.

E, finalmente, aos grandes homens e mulheres que dedicaram suas vidas à ciência e nos permitem "ver mais longe por estar sobre ombros de gigantes".

RESUMO

Este trabalho traz uma proposta de abordagem introdutória para o ensino de Matemática Financeira no ensino médio, que chamamos de Abordagem Cronológica, isto é, uma abordagem que valorize o correr natural do tempo, que analise etapa por etapa da evolução de uma dívida ou de um investimento. Desse modo podemos ter o aluno analisando o que realmente acontece período a período, tirando conclusões e, assim, se tornando autônomo. Como embasamento teórico, buscamos pela história da Matemática justificativas para as práticas usuais no mercado, principalmente as que aparentam ter culminado no surgimento do número e.

Palavras-Chave: História da Matemática. Cronologia. Matemática Financeira.

ABSTRACT

This paper proposes an introductory approach to Financial Math teaching in high-school, what we called Chronological Approach, that is, an approach that values the natural flow of time, which analyzes step by step the evolution of a debt or of an investment. This way, we can have the student analyzing what really happens in each period, drawing conclusions and, thus, becoming autonomous. As theoretical foundation, we looked through Mathematics History for explanations for the usual practices in the market, especially the ones that appears to have culminated in the emerging of the number e.
Key-words: Mathematics History. Chronology. Financial Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Gosto de pensar que o início de minha trajetória docente foi como aluno. Não no sentido de dar aulas, apesar de já ter, àquela época, o hábito de socorrer alguns amigos com a geometria, mas em relação aos muitos questionamentos e inconformismos típicos de uma mente jovem e que deviam estar presentes, de uma maneira saudável, é claro, em nossas mentes adultas também. Tive sorte de receber uma educação que não me permitiu rebeldias sem causa: precisava argumentar muito bem, tanto em casa quanto na escola, se quisesse razão. E num dos momentos de insatisfação com o modelo escolar vigente, ouvi de um padrinho, que é como um pai para mim, que não adiantava me rebelar contra o sistema pois ele não mudaria simplesmente por isso. Não sei se ele tinha a intenção de me fazer simplesmente conformar com as coisas ou me motivar a buscar estar em posição de mudar algo, mas para minha sorte, entendi do segundo modo e cá estou, no magistério.

A profissão docente envolve, dentre tantas coisas, a capacidade de propagar o conhecimento nas mais diversas áreas. Se algo é de interesse de certa pessoa, provavelmente ela estará aberta ao aprendizado, mas se alguém julga que algo não é interessante ou, ao menos, necessário, a missão do ensino encontra uma barreira. E a habilidade requerida para caminhar por tais questões passa por aliar o conhecimento e a didática. Não sou capaz de chamar a atenção de alguém para a importância de algo se não tiver o conhecimento que me permita perceber tal importância. Igualmente, mesmo que repleto de conhecimento, não consigo atrair as ideias de outras pessoas se não sei me expressar devidamente, argumentando em favor do que acredito.

E uma Matemática muito presente no dia a dia da maioria das pessoas é a Matemática Financeira. Nós compramos, vendemos, alugamos e acabamos por fazer isso com ou sem o conhecimento necessário. É, sem dúvida, uma questão relativa a educação básica. Mesmo entre pessoas com bom, até mesmo alto, grau de instrução, é comum vermos sujeitos endividados ou, mesmo gastando dentro do seu orçamento, fora da melhor opção disponível. A matemática envolvida em questões de compra financiada geralmente não passa de responder à pergunta "a prestação cabe no meu orçamento?". Questões além daí costumam ficar de fora do planejamento de muita gente. É claro que este é um problema muito amplo se tratando da vida em uma sociedade capitalista onde o "ter" supera o "ser" com frequência e onde muitos vivem com menos do que se entende por um mínimo necessário à subsistência. Porém, questões que vagam entre "desejo, necessidade e vontade" estão imersas em toda uma psicologia da compra e vão além dos objetivos deste trabalho.

Mas, aí, nos voltemos para a escola: o que esta instituição que tem enorme parte na formação do cidadão tem feito a respeito? Mais do que isto: o que e como estamos fazendo a Matemática escolar? Precisamos atentar para tais perguntas para saber se estamos contribuindo da melhor e mais democrática forma possível para a formação científico-cidadã da qual a escola participa. Não é interesse da escola (ou não deveria ser) simplesmente formar repetidores, mas na Matemática ainda é o que mais acontece. Aqui cabe tecer alguns comentários sobre o trabalho de ÁVILA, intitulado *Várias faces da Matemática* [2]. Neste, o autor passa por questões como o raciocínio dedutivo e a intuição na Matemática, e diz:

> A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico dedutivos (...) é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta (...). Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução.

Ele ainda, nesta mesma obra, intitula a intuição como *"uma faculdade mental mais poderosa que o próprio raciocínio"* e diz ser por meio desta a ocorrência de grandes criações do ser humano. E vendo que o conhecimento em geral, e especificamente a matemática para nós, se origina, intelectualmente, na intuição, faz sentido levá-la, inicialmente, ao conhecimento dos alunos por meio de raciocínios puramente dedutivos?

A Matemática surge da necessidade humana, ela é natural, cotidiana. E, mesmo assim, não é vista dessa forma por grande parte de seus estudantes. Visto isso, é provável que haja alguma falha no processo de apresentação de conceitos desconhecidos pelos alunos, de modo que se espere que eles possam lidar com algo que sequer lhes faz sentido. E, visto que os futuros profissionais do ensino de Matemática surgem dentre os que bem sucedem nesta área na escola, é fácil acontecer de este profissional acabar perpetuando um modelo já viciado e falho: como aquilo lhe foi de fácil compreensão (talvez a melhor palavra seja aceitação), ele pressupõe que assim também o seja para os seguintes e se desliga da necessidade de fazer surgir sentido nos temas abordados. E entenda-se este "fazer surgir sentido" não só para o aluno, mas para o próprio professor que às vezes prega algo que nem sabe se acredita de fato.

Outra questão abordada por este mesmo autor, também em [2], é a importância do conhecimento ser diversificado entre as áreas:

> É claro que uma pessoa pode prescindir de conhecimento matemático e mesmo assim ser um grande ator, escritor, estadista, enfim, um profissional realizado em muitos domínios do conhecimento. Mas certamente seus horizontes culturais serão mais restritos. A situação é análoga à de uma pessoa que, mesmo possuindo competência matemática, tenha pouco ou quase nada de conhecimentos humanísticos; seus horizontes culturais também serão mais limitados.

Aqui aproveitamos para destacar as ricas ligações entre o conhecimento matemático, a história e a língua pátria, no nosso caso, o Português. Ao longo do Capítulo 2, defendemos um ensino mais natural de Matemática por meio não só da questão intuitiva mas também de constantes aproximações com essas ciências tidas como humanas, muitas vezes por nós menosprezadas ou vistas como não tendo parte na construção de conhecimentos das ciências tidas como exatas. Ainda no Capítulo 2, falamos especificamente sobre Educação Financeira, no sentido de distinguí-la da Educação Econômica e mostrar as indicações legais (LDB e PCN's) da necessidade de sua abordagem. Diferente de outras épocas, onde documentos legais ou inexistiam ou estavam totalmente disconexos com a realidade, hoje, mesmo com eventuais divergências em relação a certos pontos, a LDB e os PCN's são esclarecedores para um profissional que esteja realmente determinado a fazer dos conhecimentos de sua área parte do que vai ser sabido pelo estudante.

Apesar da extrema importância de certos conhecimentos em Matemática na formação do cidadão, é comum percebermos uma aversão a isto, mesmo quando tratamos de temas simples. Abordagens mais naturais e próximas do cotidiano do aluno são fundamentais para que, com o tempo, venhamos a acabar com esse tipo de sentimento ou, ao menos, o reduzamos consideravelmente. Assim sendo, este trabalho tem por objetivo geral chamar atenção para fatores que costumam afastar a Matemática escolar da realidade dos alunos, através dos questionamentos aqui levantados por nós ou citados de outros autores. Como objetivo específico, propor abordagens mais naturais ao ensino de Matemática Financeira, especificamente no que diz respeito à equivalência de capitais (sequências de pagamentos), para que, este que é um tema tão presente na vida de todo cidadão, seja percebido como algo de interesse pelo aluno e, com isso, se torne objeto de curiosidade do mesmo. SKOVSMOSE, em [32], mostrou acreditar que os problemas estudados devem ter relevância e ser interessantes para os alunos pois, do contrário, não haverá por parte deles o desejo de resolvê-los. Quando tal curiosidade é despertada, o tema deixa de ser só mais uma obrigação imposta pelos meios escolares e seu aprendizado passa a fazer sentido para o estudante.

O Capítulo 3 é o que traz as ideias centrais defendidas aqui. Nele indicamos a necessidade de se ver o ensino de Matemática, especificamente em relação a problemas de equivalência de capitais, de modo mais natural, gradativo, que priorize introduções mais intuitivas, desligadas de fórmulas ou algoritmos já prontos e entendidos pelo professor, mas sem sentido para o aluno. Defendemos que se percorram, novamente, ao menos alguns raciocínios primitivos, já superados pelo homem, como se tentássemos nos reportar aos momentos dos surgimentos desses conceitos, de modo a entender, plenamente, sua essência e necessidade. Para nós, educadores, algo como uma desconstrução para uma reconstrução mais sólida. Para o aluno, a construção já sólida e que ainda irá lhe proporcionar autonomia.

Este trabalho foi elaborado de modo a ser facilmente aplicado em sala de aula. Se o professor dispõe de projetor ligado a um computador pode planejar a exibição das etapas dos desenvolvimentos aqui defendidos de modo simples e ágil. Mas caso não disponha, tais abordagens serão facilmente trabalhadas em uma lousa comum. A única necessidade para se trabalhar com prazos mais longos, como fazemos em alguns exemplos deste trabalho, é uma calculadora científica. Para problemas de prazos curtos uma calculadora simples ou uma tábua de logarítmos já é suficiente. Como veremos na seção 3.1.1, este é um assunto que pode ser entendido como uma aplicação dos conhecimentos de Progressões Geométricas, isto é, um tema para o 1º ano do ensino médio. Porém, no caso de impossibilidade disto, que se faça num outro momento, mas que não se deixe de tratar disso ainda no ensino médio devido a sua importância.

Ao final, o Capítulo 4 traz considerações gerais sobre o trabalho e sua aplicabilidade e, em seguida, temos quatro apêndices. Recomendamos fortemente a letura destes apêndices pois três deles trazem um aprofundamento matemático que julgamos importantíssimo ao professor de Matemática (comentaremos sobre o último no próximo parágrafo). As demonstrações e formalizações foram elaboradas com bases em certos autores, sempre citados, com o cuidado de mostrar as explicações de formas simples e claras. Mas escolhemos deixar estas formalizações e conceitos mais profundos em apêndices para que a leitura seja mais direta e simples. Com isso, o leitor que, mesmo com nossa insistência na importância de tais formalidades, veja este trabalho apenas como uma fonte para preparação e melhoria de suas aulas, o lerá com fluidez. Mas alguém que tenha interesse em saber um pouco mais a fundo sobre os temas envolvidos aqui, verá nos apêndices boa parte do embasamento matemático necessário, bem como indicações bibliográficas para aprofundamentos mais intensos.

Questionamentos que surgiram ao longo deste trabalho mas não se relacionaram diretamente com o foco do mesmo foram deixados para o último apêndice para que levem à reflexões, que julgamos interessantes ao professor de Matemática, a novos questionamentos e pesquisas e, também, a críticas ao presente trabalho.

Esperamos, também, que as indagações aqui expostas, tanto as respondidas quanto as deixadas em aberto, fomentem o interesse em pesquisa nesta área que é tão crucial para um país que deseje alcançar o *status* de nação, de fato, igualitária e democrática: a área de Educação Matemática.

Capítulo 2

POR UM ENSINO MAIS NATURAL DE MATEMÁTICA

Já há algum tempo a Educação Matemática é considerada um vasto campo de estudos. São diversos os motivos que despertam interesse nesta área. Destacamos aqui as questões que tangem as dificuldades de aprendizado por parte dos estudantes e a rigidez no tratamento da Matemática por parte de muitos professores. Inicialmente, tratemos da intenção de defender, ao longo deste capítulo, um ensino mais natural de Matemática.

A Matemática vem, desde os primórdios, evoluindo naturalmente conforme a necessidade humana; onde podemos entender esta necessidade tanto em seu sentido mais primitivo, nas tarefas que o homem foi desenvolvendo no seu dia a dia, quanto, até mesmo, dentro da curiosidade humana ao admitir questionamentos puramente matemáticos e sem compromisso aparente com problemas cotidianos. Mas certos temas que levaram anos, décadas ou, até mesmo, séculos para serem desenvolvidos são tratados por nós em algumas horas nas salas de aula. Num primeiro momento, o fato de já sermos apresentados a ideias prontas, já verificadas e formalizadas tantas vezes e de tantas formas, pode nos colocar numa posição confortável de não ter a necessidade de fazer uma descoberta. Mas sendo, majoritariamente, formado por professores o público alvo deste trabalho, vale lembrar que nossos alunos são, geralmente, jovens e, felizmente, um tanto curiosos. Com isso, questões como "pra que serve isso?" e "de onde isso veio?" são muito comuns no cotidiano escolar e podem ser aproveitadas para motivar e dar algum sentido a certos temas que possam acabar por carecer de significado usualmente. Cabe aqui citar, novamente, o trabalho de ÁVILA [2], que trata deste assunto.

> O ideal seria que o ensino pudesse se desenvolver de maneira a justificar, a cada passo, a relevância daquilo que

> se ensina. Cada novo tópico a ser tratado seria devidamente motivado. Embora isso não possa ser feito sempre, o professor certamente pode, com frequência, formular problemas práticos interessantes e trazer à aula pequenas histórias que ajudem a despertar a curiosidade dos alunos. (...) Trazendo frequentemente a suas aulas histórias, problemas e questões interessantes, o professor desperta no aluno uma crescente admiração pelo largo alcance da Matemática, estimulando seu interesse pela disciplina. E assim procedendo, ele se antecipa às perguntas dos alunos sobre a relevância da Matemática, a ponto de eles nem terem tanta necessidade de fazê-las.

Nesse sentido é que defendemos um ensino mais natural de Matemática. Se já começamos a desenvolver certo tema de modo muito abstrato, corremos o risco de fazê-lo sem que o aluno enxergue algum sentido para tal. Assim, se o professor tem o cuidado de buscar origens de certo tema e possíveis aplicações, ele se "arma" melhor, não só para responder questionamentos dos alunos, mas para que seja capaz de otimizar a organização de suas explanações, mensurando de modo eficaz elementos como gradação e cronologia, por exemplo.

Por mais que esbarremos em certos pontos subjetivos ao longo deste capítulo, os julgamos importantes na construção deste trabalho, tanto em relação ao embasamento teórico necessário ao mesmo quanto em questões motivacionais ou pedagógicas. Elegemos alguns temas mais diretamente ligados à parte central deste trabalho, os quais trataremos nas seções que seguem. Mas, como já dissemos na Introdução, recomendamos a leitura e reflexão sobre os questionamentos deixados para o Apêndice 4.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

"Se queres prever o futuro, estuda o passado."
Confúcio

Sendo a História uma ciência que estuda o homem e sua ação nos meios onde vive, através do tempo, são sempre pertinentes as consultas aos relatos existentes sobre o que é e como ocorreu toda essa Matemática que hoje temos por fatos, certezas, além, é claro, daquela que ainda temos por dúvida. E nos parece óbvia a necessidade desta passagem pela História no presente trabalho pois, já que defendemos um tratamento mais natural da Matemática em sala de aula, é necessário que o professor entenda a natureza de certos surgimentos, criações e invenções que estudamos, para que seja capaz de decidir sobre as melhores formas de motivar os alunos quanto a cada tema e sanar eventuais curiosidades pertinentes ao conhecimento em questão. E como tratamos, aqui, especificamente da Matemática Financeira, busquemos então algumas raízes disponíveis sobre tal tema.

Faz sentido começarmos falando de dinheiro. As primeiras moedas, semelhantes às de metal que nos são familiares, têm origem na Lídia (atual Turquia), situada na ásia menor, no século VII A.C[1]. Mas para chegar a isso, as atividades de troca percorreram um caminho. A começar pelo escambo, que era a troca do produto excedente:

> ... quem pescasse mais peixe do que o necessário para si e seu grupo trocava este excesso com o de outra pessoa que, por exemplo, tivesse plantado e colhido mais milho do que fosse precisar. Esta elementar forma de comércio foi dominante no início da civilização, podendo ser encontrada, ainda hoje, entre povos de economia primitiva, em regiões onde, pelo difícil acesso, há escassez de meio circulante, e até em situações especiais, em que as pessoas envolvidas efetuam permuta de objetos sem a preocupação de sua equivalência de valor. Este é o caso, por exemplo, da criança que troca com o colega um brinquedo caro por outro de menor valor, que deseja muito (Banco Central do Brasil [28]).

Também houve o uso mais rústico dos metais como referência em tais atividades, através de barras de bronze ou de ferro, assim como pesos de prata. Como, há algum tempo, os povos gregos já fundiam o ferro e esculpiam o bronze, é natural que os processos mais arcaicos ficassem para trás, dando lugar a estes discos, cunhados manualmente com símbolos culturais, naturais e dos deuses pertencentes às suas crenças.

Passando agora à questão das finanças, podemos definir o juro como a quantia a se pagar ao emprestador pelo tempo de uso do dinheiro, ou seja, uma compensação pelo tempo que ele ficou sem o mesmo. Assim, se eu tomo uma quantia emprestada, obviamente devolverei esta quantia acrescida de um valor, relativo à tal compensação.

Sobre a cobrança de juro, NOVAES (em [26]) faz um relato que nos parece ser relativo à Europa cristã:

> Antes da expansão comercial e do desenvolvimento do capitalismo, a cobrança de juros constituía um problema

[1]Vide, por exemplo, [27] ou [20]

> ético. Chamado de usura, era terminantemente proibido pela Igreja na Idade Média. Mas com o desenvolvimento do comércio, as novas exigências de capitais mais vultosos acabaram estimulando a sua cobrança. A Igreja teve então de fazer concessões e passou a proibir somente a cobrança de juros em empréstimos destinados ao consumo pessoal. No século XVI, a reforma calvinista aceitou e justificou teologicamente a cobrança dos juros. Na Inglaterra em 1545 o Rei Henrique VIII reconheceu a sua legalidade. A Igreja Católica só o fez 300 anos depois, e, no Islamismo o assunto ainda é polêmico. Mas foi somente no século XVIII que os estudiosos começaram a buscar uma justificativa econômica para a cobrança de juros sobre os empréstimos monetários.

Mas há relatos de cobranças de juros já entre os babilônios, sem contar o fato de não ter sido problema pra outras comunidades, como os judeus, por exemplo, que não o faziam entre eles mas praticavam os juros com pessoas e instituições exteriores à comunidade judaica[2].

Mais que uma simples compensação, a cobrança de juros é um grande negócio para muitas instituições financeiras. Para os que possuem capital acumulado e não têm intenção de uso, é vantajoso emprestar uma quantia e receber, após certo tempo, mais do que se emprestou. Na verdade, onde nos referimos a uma vantagem, é mais cabível falar em lucro, que é esta diferença entre o que se recebeu e o que se emprestou.

2.1.1 O número e entre o juro simples e o juro composto

Para o entendimento do que será tratado daqui em diante precisamos definir estes dois conceitos. Entende-se por um regime de *juros compostos* aquele que, em cada período, tais juros são calculados em relação à quantia existente no início desse período. Já no regime de *juros simples*, em cada período esses juros são calculados apenas em relação a uma quantia inicial (chamada *principal*). Afim de ilustrar isso, observemos o funcionamento dos juros compostos e dos juros simples através da explanação dada por MAOR em [22]:

> Suponha que investimos \$100 (o "principal") em uma conta que paga 5 por cento de juros compostos anualmente. No final de um ano nosso saldo será $100 \times 1,05 = 105$. O banco então considerará esta nova soma como um novo

[2]Vide [15], [1] e [31] para mais sobre a História dos juros.

> principal que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano o saldo será $105 \times 1,05 = 110,25$, e no final do terceiro ano $110,25 \times 1,05 = 115,76$, e assim por diante (...). Por contraste, uma conta que pague juros simples, de cinco por cento, o saldo aumentaria a cada ano de \$5 dando-nos uma progressão aritmética 100, 105, 110, 115 e assim por diante. Claramente o dinheiro investido a juros compostos - não importando qual seja a taxa - vai, após certo tempo, crescer mais rápido do que se for investido a juros simples.

Podemos dizer, então, que se aplicamos um principal C num fundo que rende 10% ao mês, em um ano tal valor será multiplicado por $1 + 0,1 = 1,1$ doze vezes, ou seja, teremos ao final do ano um montante acumulado de $C(1,1)^{12} \approx 3,14C$, o que representa um aumento aproximado de 214%. Assim, podemos dizer que aplicar a juros de 10% ao mês equivale a aplicar a juros de 214% ao ano (aproximadamente), muito mais que os $10 \times 12\% = 120\%$ que pessoas menos matematicamente instruídas podem pensar equivaler aos 10% mensais. Nesse sentido, o estudo e a construção desta parte do nosso trabalho trouxe uma interessante surpresa. Sempre me questionei quanto ao real sentido da existência dessa prática financeira, da qual LIMA, em [18], também fala:

> Um erro muito comum é achar que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem. (...) Um péssimo hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma frase como "144% ao ano, com capitalização mensal " significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 144% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional.

Segundo este autor, ainda em [18], a taxa anunciada de 144% ao ano é dita *taxa nominal*, enquanto a de (aproximadamente) 290% ao ano, que obtemos dos 12% ao mês, é chamada de taxa efetiva. E, de fato, não há nome melhor para tal taxa visto que o aumento sofrido pelo principal será de 290% e não de 144% como anunciado. Ou seja, podemos dizer que "36% ao ano com capitalização mensal" quer dizer uma taxa de 3% ao mês, que vai nos dar, efetivamente, mais de 36% ao ano. Ou ainda, que "5% ao trimestre com capitalização semestral" significa 10% ao semestre, que equivale a pouco menos do que os 5% anunciados por trimestre. No lugar do termo capitalização alguns autores, como MAOR em [22], usam o termo *composição.*

Sempre achei pouco natural que haja a distinção descrita acima. Mediante situações como esta, me perguntava se poderia haver um sentido para a existência de uma taxa nominal, visto que não será esta a usada no reajuste da aplicação. Desde que comecei a adquirir estes conhecimentos em finanças e abordá-los em minhas aulas, sinto como se isso fosse uma espécie de manipulação bancária visando algum tipo de vantagem ou uma falta de conhecimento matemático, por parte de algum agente financeiro em algum momento da história, que perdurou com o passar dos anos. Uma possível explicação para tal situação pode advir de uma história contada também por LIMA em seu livro *"Meu Professor de Matemática e outras histórias"* [19], que mostramos a seguir:

> Suponhamos que eu empreste a alguém a quantia de 1 cruzeiro a juros de 100% ao ano. No final de um ano, essa pessoa viria pagar-me e traria 2 cruzeiros: 1 que tomara emprestado e 1 de juros. Isso seria justo? (...) Se meu cliente viesse me pagar seis meses depois do empréstimo, eu receberia apenas $1 + 1/2$ cruzeiros. Mas isto quer dizer que, naquela ocasião, ele estava com $1+1/2$ cruzeiros meus e ficou com esse dinheiro mais seis meses, à taxa de 100% ao ano, logo deveria pagar-me
>
> $$\begin{aligned} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ =& 1\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ =& \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ =& \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$
>
> cruzeiros no fim do ano. Isto me daria 2,25 cruzeiros mas, mesmo assim, eu não acharia justo. Eu poderia dividir o ano num número arbitrário n de partes iguais. Transcorrido o período de $(1\text{ano})/n$, meu capital emprestado estaria valendo $1 + 1/n$ cruzeiros. No final do segundo período de $(1\text{ano})/n$, eu estaria com $(1 + 1/n)^2$ cruzeiros, e assim por diante. No fim do ano eu deveria receber $(1 + 1/n)^n$ cruzeiros.

Ou seja, percebemos que, apesar da taxa anunciada ser de 100% ao ano, o procedimento descrito e, aparentemente justo, fornece uma taxa real que excede os 100%. Assim, pensar com um raciocínio que envolva os juros simples num período menor que o estipulado (neste caso, o ano), favorece o cobrador. Outra abordagem, também por LIMA (et. al.) no livro "A Matemática do Ensino Médio", em seu Volume 1 [17], traz uma explicação um pouco mais confortante, usando a situação de um investidor que aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano onde, por simplicidade, faz-se $\alpha = k/100$, e o valor resgatado será $c_0(1+\alpha)$ reais, ao fim do ano:

> Sendo assim, raciocina o investidor, se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade do juro (aluguel) anual, logo receberei $c_0(1+\alpha/2)$ reais. Então, reinvestirei esta soma por mais um semestre e, no final do ano, em vez de $c_0(1+\alpha)$, vou receber $c_0(1+\alpha/2)^2$, que é uma quantia maior. (...) Pensando melhor, diz o investidor, posso resgatar e reinvestir meu capital mensalmente recebendo, no final de um ano, o total de $c_0(1+\alpha/12)^{12}$.

Segundo o próprio LIMA, ainda em [17], para perceber que as quantias de fato crescem com esses saques seguidos de reaplicações, o investidor pode usar uma calculadora, visto que a taxa é conhecida. Também podemos usar a desigualdade de Bernoulli, que demonstraremos a seguir.

Teorema 1. *Para todo $x \geq -1$, real, e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(1+x)^n \geq 1+nx$.*

Demonstração. Vamos provar isto por indução[3] sobre n. Para $n = 1$ a validade é óbvia. Supondo a desigualdade válida para um n, natural, temos

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

E, pelo princípio de indução finita, se o fato de valer a desigualdade para um n natural implica em valer para $n+1$, então vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Observemos que, de fato, é necessário por $x \geq -1$ para que se tenha $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$. Para mais detalhes quanto ao princípio de indução citado, ver o Apêndice 3.

Esta abordagem também causa estranheza pelo fato de, nestes períodos menores, se considerar os juros simples que, aparentemente, são pouco usuais no mercado. Mas podemos admitir que já tenham sido prioritariamente usados de modo a compreender melhor tal situação. Ou ainda, que um primeiro raciocínio primitivo em relação a este "aluguel do dinheiro" fosse, de fato, remunerar apenas em função de uma quantia inicial, o que levaria a

[3] vide Apêndice 3

necessidade de um sujeito mais matematicamente esperto para atentar que constantes retiradas e reaplicações culminariam no que conhecemos como juro composto, passando a aumentar mais rápido tal valor. Mas superada essa aparente inapropriação, o importante aqui é o entendimento da composição de uma taxa em períodos menores e, assim, ter em mente a diferença entre taxa efetiva e taxa nominal.

A surpresa anteriormente citada decorre da generalização disso, ou seja, a obtenção de uma fórmula que atenda as possíveis situações decorrentes deste processo, como feito nas duas últimas explicações. De fato, podemos pensar que, sendo C o capital investido (principal) a uma taxa i ao ano, obtemos um montante M(valor acumulado até o momento) que será igual a $C(1+i)$ após um ano, $C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$ após dois anos, $C(1+i)(1+i)(1+i) = C(1+i)^3$ após três anos e, assim, sucessivamente. Ou seja, após n anos teremos $M = C(1+i)^n$ como montante. Mas se considerarmos que na comunidade bancária há esses vários tipos de composição de juros $-$anual, semestral, trimestral, bimestral, mensal, semanal, diário, etc$-$, precisaremos adaptar tal fórmula. Supondo que, por ano, sejam m "períodos de composição", precisamos então dividir a taxa i por m e, assim, o "fator de reajuste" será $(1 + i/m)$. Como são m períodos desse por ano e estamos considerando n anos, serão mn multiplicações por $(1 + i/m)$ e, assim, o montante será dado por

$$M = C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Neste momento, aquele que se lembre minimamente de seus cursos de cálculo da graduação já começa a entender minha surpresa. Esta situação, corrente no mercado financeiro, que sempre me causou tanta estranheza, nos leva a uma expressão extremamente parecida com uma que nos foi exposta nas aulas de cálculo, cujo limite, quando se fazia a variável tender ao infinito, era este famoso e. Uma pena que, no início de nossas graduações em Matemática e afins, saibamos tanto sobre cálculos envolvendo este número, mas tão pouco sobre sua história.

De fato, observemos que, ao propor a situação hipotética de taxa de juro de 100% ao ano e n igual a 1 ano, obtemos

$$M = C\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}.$$

É claro que tal hipótese é muito distante da realidade atual, mas como relata o próprio MAOR, em [22], o período em torno do século XVII foi marcado por um enorme crescimento do comércio internacional e as transações financeiras de todos os tipos proliferaram e, em consequência, foi dada muita atenção à lei dos juros compostos. Suponhamos, então, que desejamos saber o que acontecerá com o montante se variarmos o número de períodos da composição dessa taxa (100%) ao longo do ano, ou seja, o m. Os resultados calculados para M em função de alguns valores para m estão na tabela abaixo, com precisão de cinco casas decimais.

m	M = C(1 + 1/m)^m
1	2C
2	2,25C
3	2,37037C
4	2,44141C
10	2,59374C
100	2,70481C
1 000	2,71692C
10 000	2,71815C
100 000	2,71827C
1 000 000	2,71828C
10 000 000	2,71828C
100 000 000	2,71828C

A observação dos resultados desta tabela nos leva, naturalmente, a questionar se este padrão aparente de aproximação de algum valor em torno do número 2,71828 acontece de fato. Será que, mesmo pensando em composições desta taxa espaçadas apenas por milésimos, por milionésimos de segundo, por períodos tão pequenos quanto se queira, que tendam a zero, não fará diferença para o montante? A resposta para esta pergunta é que, de fato, uma vez considerada uma margem de erro, a partir de algum valor para m não fará diferença. Isto é, qualquer que seja a quantidade de casas decimais a escolher para representar as aproximações de $(1 + 1/m)^m$, existirá um m a partir do qual todas essas aproximações serão iguais. E este número, para o qual tende o coeficiente de C na tabela acima, é o mesmo que vemos nas aulas de cálculo:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

A formalização disto encontra-se exposta no Apêndice 2 deste trabalho. Mas já na seção 3.4 trataremos de uma questão que surge naturalmente do que acabamos de expor: o que acontecerá se eu aumentar sem limites a quantidade de capitalizações em cada período? Recomendamos que o leitor não se contente apenas com as aplicações mostradas até a seção 3.3 e leia atentamente a 3.4, mesmo que não acredite ser possível aplicar seu conteúdo em sala de aula.

Segundo MAOR, não se sabe ao certo quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $(1 + 1/n)^n$ a medida que n tende ao infinito, o que obscurece a data de nascimento deste número que só mais tarde seria "batizado" por e. Ele também nos diz, em seu *e: a história de um número*, que outras questões não relacionadas aos juros compostos também levaram ao mesmo número na mesma época. Mas sendo a Matemática Financeira nosso objeto de estudo, não são, essas outras, parte do interesse deste trabalho. E, pessoalmente, sendo, talvez, as finanças as manifestações matemáticas mais presentes no nosso dia a dia, mesmo apesar das tantas aparições desse maravilhoso e na natureza, me inclino a crer que foi ao longo da evolução das práticas comerciais e, consequentemente, financeiras que tenha ocorrido a sua primeira manifestação aos olhos do homem.

Antes de prosseguir, precisamos chamar mais atenção para um fato pelo que pode nos ter passado despercebido. Quando consideramos que, após n períodos, o montante de uma aplicação de um principal C_0 a uma taxa igual a i por período é dado por $M_n = C_0(1 + i)^n$, admitimos que esta taxa i é a taxa efetiva da aplicação. Com efeito, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, para obter M_{n+1} basta multiplicar M_n por $(1 + i)$. Mas se consideramos

$$M_n = C\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn},$$

não obtemos M_{n+1} fazendo $M_n(1 + i)$, o que nos mostra que não é i uma taxa efetiva. Na verdade, nesse caso temos

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m(n+1)}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn+m-mn} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}.$$

Ou seja, este último é o fator que devemos multiplicar por M_n para obtermos M_{n+1}. Daí, se queremos, neste caso, determinar a taxa α efetiva para um período, basta notar que $1+\alpha = (1+i/m)^m$ e, portanto, $\alpha = (1+i/m)^m - 1$. Temos ainda, de acordo com a desigualdade de Bernoulli, que

$$\alpha = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} - 1 \geq 1 + m \cdot \frac{i}{m} - 1 = i.$$

Isto é, concluímos que ao anunciar uma taxa i por período, a ser capitalizada m vezes em cada período, obtemos uma taxa efetiva α por período, como exposta acima, que é maior do que ou igual a i. Exploraremos mais estas transições entre taxas nominais e efetivas na seção 3.4 e no Apêndice 3.

2.1.2 A limitação do positivismo

Entendendo como já adultos, das mais diferentes idades, o possível público-alvo deste trabalho, lanço aqui, para todos nós, a seguinte pergunta: somos hoje mais, menos ou tão curiosos que quando crianças ou adolescentes? Muito provavelmente a maioria de nós se enquadrará como menos. Quando muito novos, estamos começando uma vida de descobertas e aprendizados, alguns trazidos simplesmente pelas mãos da natureza, como o andar, o controle das funções motoras, o aprendizado da fala (em um primeiro momento); uns frutos simplesmente da convivência e da observação, e alguns a partir de formas institucionalizadas, nas escolas e afins. E há muita diferença no aprendizado entre situações como, por exemplo, a de só ouvir de um pai/mãe que não se pode colocar o dedo na tomada e a de fazê-lo, sentir o choque e, assim, perceber que este contato não convém. Mas o que tem isto a ver com o Positivismo?

Na primeira metade do século XIX surge com August Comte uma doutrina filosófica, sociológica e política denominada Positivismo. Tal nome pode até soar bem e, de fato, tal corrente depositava total confiança nas ciências e, com isso, apoio. Mas sua caracterização, principalmente no sentido político, abrangia forte rigidez e limitava a busca do conhecimento a apenas aquilo que era classificado como válido pelos líderes políticos e das ciências (vide [7] para mais sobre positivismo). Ao defender o conhecimento científico como único conhecimento verdadeiro os positivistas desconsideravam quaisquer sabedorias ligadas a crenças ou outras que não pudessem ser comprovadas cientificamente, além de subordinarem a imaginação à observação. E é este desprezo, esta limitação, que destacamos aqui.

Apesar da louvável fé na ciência que o Positivismo deposita, muitos dos grandes nomes escritos nas histórias das descobertas tiveram suas curiosidades motivadas, ao menos em parte, por suas crenças ou, simplesmente, seu imaginário, sem uma necessidade ou compromisso com o progresso. Assim, podemos enxergar em alguns momentos uma postura positivista na escola, o que até pode trazer benefícios bem razoáveis. A disciplina e a colocação de certos limites e metas é indispensável ao aprendizado e à formação de um cidadão, mas a escola precisa ser um berço da propagação e produção de conhecimento. E este último não deve ser limitado. Se, por um lado, é óbvio que não podemos deixar que a criança ponha o dedo na tomada, por outro, constantes proibições e imposições desnecessárias podem levar ou a algum tipo de apatia, no sentido de se deixar de questionar, criar e passar a somente aceitar, ou à rebeldia. E isto deve refletir na busca por conhecimento também. A escola quase que sempre impõe o que será estudado pelo aluno, sendo pouquíssimos ou inexistentes os momentos onde o estudante tenha como pesquisar livremente. A vida, seja pensando na sociedade ou especificamente nas ciências, trará oportunidades de escolha e o jovem poderá não estar preparado para pesar o que for necessário à escolher bem, para si e seu meio de convívio.

2.2 LÍNGUA E LINGUAGEM

Trabalhos de linguistas têm muito a acrescentar a nós, profissionais da educação, e principalmente nós, matemáticos, e, ainda, outros que usam a linguagem matemática em seu dia dia. E a Matemática é, de fato, uma linguagem, como podemos ver, por exemplo, ao ser estabelecido, nos PCN's do ensino médio, dentre os objetivos para o ensino da Matemática, "expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática".

A capacidade linguística humana é inata, ou seja, é como se o ser humano fosse "projetado" para se comunicar. Mas, a princípio, podemos não valorizar esse dito, visto que não é só nos seres humanos que se manifestam interações dessa natureza. Entretanto, tal capacidade humana goza de suas peculiaridades. Segundo o linguista americano Noam Chomsky, em [8], que defende tal inatismo, a faculdade da linguagem é, em grande parte, responsável pelo fato de, sozinhos no universo biológico, os seres humanos terem uma história, uma diversidade e evolução cultural de alguma complexidade e riqueza, além de sucesso biológico. Em passagem pela Universidade de Brasília em 1996, em uma palestra ele "pregou":

> A linguagem humana se baseia numa propriedade elementar que também parece ser uma propriedade biologicamente isolada: a propriedade da infinidade discreta, manifestada na sua forma mais pura pelos números naturais 1, 2, 3, ... As crianças não aprendem essa propriedade do sistema numeral. A menos que a mente já possua os princípios básicos, nenhuma quantidade de evidência poderia fornecê-los;(...) Do mesmo modo, nenhuma criança tem de aprender que há sentenças de três palavras e sentenças de quatro palavras, mas não sentenças de três palavras e meia, e que é sempre possível construir uma mais complexa, com uma forma e um significado definidos. Tal conhecimento tem de nos chegar pela "mão original da natureza" (the original hand of nature), segundo a expressão de David Hume, como parte do nosso dote biológico.

Ele ainda comenta que Galileu atribuia o *status* de maior de todas as invenções humanas à descoberta de um meio de comunicar até nossos "pensamentos mais secretos a qualquer outra pessoa com 24 pequenos caracteres", e que pouco tempo depois os autores da gramática de Port Royal[4] impressionaram-se com a "invenção maravilhosa" de um meio de construir, a partir de poucas dúzias de sons, uma infinidade de expressões. Quanto ao potencial dessas "invenções", é difícil mensurar, se é que há um modo de encontrar alguma limitação para tal, mas ao desligar o ensino da Matemática de questões linguísticas e históricas, por certo estamos desperdiçando boa parte deste potencial.

E como explorar essa "chegada do conhecimento pela mão original da natureza" na Matemática? Se esta questão é um pouco descabível para nós, professores, visto que quando nos deparamos com o aluno ele já está numa idade mais avançada e, assim, possa já ter acumulado certos conhecimentos por outras "mãos" que não esta, então façamos outra: Uma vez que certo conhecimento já foi obtido de forma artificial, mecanizada, vale a pena retroceder e, como que se desconsiderando o já sabido, reconstruir o conhecimento, dessa vez de forma mais natural? Vale observar que, já que estamos falando de linguagens, as mesmas já estavam bem estabelecidas quando começou a haver curiosidade por elas. Hoje, muito se sabe sobre tal tema, passando por esta breve explanação aqui presente, graças a essa inquietação humana que não se conformou simplesmente com, entre outras coisas, suas línguas, linguagens, sua existência. Visto isso e, remetendo a superação do positivismo anteriormente vista, nos parece claro que a resposta de tal questão é um forte sim.

Na mesma ocasião, Chomsky coloca uma posição interessante. Defende a existência de um "estado inicial", geneticamente determinado, da faculdade da linguagem e diz haver fortes razões para se acreditar que este estado inicial é comum à espécie: *"Se meus filhos tivessem crescido em Tóquio, eles falariam japonês. Isso significa que evidências do japonês se relacionam diretamente com o que se tem pressuposto relativamente ao estado inicial para o inglês".* E, novamente, passando de línguas para a linguagem Matemática, não seríamos todos nós portadores de alguma capacidade inata para tal? Afinal, conforme uma criança vai aprendendo a língua do lugar onde vive, vai se tornando mais capaz de abstrair, visto que, se no início ela aprende os "sons" que remetem a objetos e formas concretas, materiais (cadeira, mamãe, cachorro), em algum tempo ela admite palavras que não percebem formas físicas (coragem, acreditar, futuro). A seguir, tratamos mais deste assunto.

[4] Gramática que teve sua primeira edição em 1662 e tida como referência pelos duzentos anos seguintes (vide [14].

2.2.1 A Matemática e a língua pátria

> *"... no caso do processo de produção do conhecimento, na aprendizagem da Língua ou da Matemática, a técnica alimenta o significado que alimenta a técnica... e assim por diante."* Machado, em [21]

Com o passar dos anos e o aumento da gama de conhecimentos adquiridos pela humanidade, era inevitável que competências, que antes eram parte de uma mesma ciência, se separassem em cada vez mais áreas. O estudo das especificidades de determinado campo –no nosso caso a Matemática– é necessário ao estudante, mas pode afastá-lo de verdadeiros sentidos de muitos temas se ele for restrito apenas a conceitos específicos. Destacamos aqui a escassez, em grande parte das salas de aula, de ligações entre a Matemática e nossa língua pátria, o Português, e também com a História, ao menos no que diz respeito à História da Matemática e das ciências em geral (este último aspecto, mais até em relação à formação do professor que ao aluno). Tal escassez é nítida, por exemplo, nas avaliações, onde os alunos tem o hábito de não expressar suas ideias em textos, mesmo que pequenos, mas apenas expor cálculos. Tudo isso é muito pertinente ao aluno, que está, ao menos quando ainda novo, buscando algum sentido para aquilo que estuda.

E não só a partir de suas origens e das questões que permeiam seus aprendizados vem o sentido de se analisar, lado a lado, a Matemática e a Língua Materna. MACHADO, em [21], defende uma impregnação mútua entre estes dois e, ao longo de todo um livro analisa questões pertinentes a esta ligação, via traços históricos e os modos usuais de lidar com o ensino de Matemática.

Ele levanta muitos questionamentos pertinentes ao aprendizado da matemática escolar, respondendo alguns e deixando interessantes eixos abertos para reflexão. Destaco o fato de que, admitindo a existência de predisposições inatas, referentes a "*procedimentos elementares, de natureza lógica, que são fundamentais também para o desenvolvimento da linguagem, resulta (...) difícil compreender a razão da discrepância no desempenho da maioria das pessoas no aprendizado da Língua Materna e da Matemática: por que razão em um caso quase todos sobrevivem, enquanto no outro quase todos sucumbem?*"

Os professores de Língua Portuguesa, assim como de outras línguas, também passam situação parecida quanto à gramática. Há uma constante discussão sobre o quanto e como tratar a gramática na escola básica. Assim como na Matemática e em qualquer ciência, percebe-se a necessidade de não se trabalhar de forma artificial, sem dar sentido ao que se trata. Mas a língua nativa é naturalmente mais presente no cotidiano de um indivíduo que a Matemática escolar. E isso pode indicar um caminho para uma resposta a tal questão.

2.3 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

2.3.1 Distinguindo Educação Financeira e Educação Economica

Segundo REIFNER e SCHELHOWE, em [29], a Educação Financeira é diferente da Economica em três aspectos. Primeiro, ela é focada em apenas um setor da Economia: serviços financeiros. Segundo, ela não promove a compreensão de todas as facetas do setor financeiro, mas apenas aquelas que facilitam o seu uso para as necessidades dos consumidores. Terceiro, o papel de poupanças/investimentos a nível individual é diferente de em modelos macroeconômicos.

Para entendermos o que são produtos e serviços financeiros, observemos DANTAS, em [11], que diferencia os dois:

- **Produtos Financeiros** são instrumentos através dos quais as Instituições Financeiras efetuam suas operações de captação e aplicação, isto é, são as atividades executadas durante o processo de obtenção de recursos e concessão de créditos, pois têm seu preço definido em função do valor da operação.

- **Serviços Financeiros** são atividades não relacionadas com o processo de obtenção de recursos e concessão de créditos, sendo sua remuneração definida por um valor e/ou percentual fixo, pré-determinado(s), sobre o valor envolvido no serviço.

Ainda neste aspecto, COBRA, em [9], diz que "Serviços Financeiros são serviços prestados por instituições financeiras e que acompanham os Produtos Financeiros oferecidos a seus clientes, pessoas físicas e/ou pessoas jurídicas".

São exemplos desses produtos financeiros os financiamentos, empréstimos, fundos de investimento. O princípio básico de tais produtos se baseia na existência de indivíduos com capital excedente que, através de instituições financeiras, disponibilizam seu capital para aqueles que tenham necessidade dele e, em troca, obtenham um valor adicional pelo tempo transcorrido até que se faça a devolução da quantia cedida. De acordo com NOVAES, em [26], temos que SERRA [30] diz:

> Fundos de renda fixa, certificados de depósitos bancários, cadernetas de poupança e uma diversidade de outros mecanismos financeiros nada mais são do que meios de

> transferir poupanças entre agentes superavitários e agentes deficitários.

Defendemos aqui que observar e discutir, nos meios educacionais, a lógica desses mecanismos e seus funcionamentos é imprescindível para que o estudante, que, no futuro, muito provavelmente será consumidor, usuário de tais produtos, possa analisar se há a necessidade de usar algum destes e, em caso afirmativo, se situar sempre da melhor forma possível perante as opções disponíveis.

2.3.2 A importância do conhecimento em finanças

Este tópico pode, para alguns, parecer desprezível, mas há fatos importantes a serem expostos, totalmente pertinentes a este trabalho. Segundo matéria do Estadão[5], em 02 de setembro de 2012, 60,9 milhões de pessoas tinham operações de crédito ativas em instituições financeiras no País, ou seja, quase um em cada três brasileiros, segundo a mesma reportagem. Podemos pensar, então, que se tal situação não mudar muito nos próximos anos, aproximadamente um terço de nossos alunos irá consumir, de alguma forma, produtos financeiros como cartões de crédito, financiamentos imobiliários e de veículos, cheque especial, crediários em lojas, etc. E, considerando fatores como as recentes quedas nos juros, tal fração pode se tornar ainda maior. Numa outra reportagem, do Jornal Hoje[6], em 27/06/2012, consta que um em cada doze brasileiros não estava conseguindo pagar suas contas em dia. No que diz respeito a financiamento de veículos, a mesma matéria diz que eram 6% de inadimplentes, o maior percentual dos últimos 12 anos, desde que o Banco Central começou a registrar tais dados. São breves retratos de como, financeiramente, nossa população pode não estar muito bem educada. Despreparo este que leva indivíduos antes fora dessas estatísticas a integrá-las, assim como mantém outros constantemente entre os devedores.

Apesar das constantes dicas de profissionais em finanças que matérias como essas costumam trazer, o cidadão comum desconhece o funcionamento de tais produtos financeiros. De fato, boa parte da população, assim como de nossos alunos em sala de aula, tem pouco conhecimento da matemática básica que permeia as finanças, como porcentagem. Além disso, não é hábito de muitos brasileiros vigiar suas contas, seus gastos e atentar para as diversas modadidades financeiras em busca daquela mais vantajosa e, com isso,

[5] http://economia.estadao.com.br/noticias/economia%20brasil,-brasileiros-endividados-sao-609-milhoes-,125138,0.htm [25]

[6] http://g1.globo.com/jornal-hoje/noticia/2012/06/percentual-de-brasileiros-inadimplentes-e-o-maior-em-tres-anos.html [12]

não é raro observarmos comportamentos do tipo "se a parcela cabe no meu orçamento, então tudo certo".

Não é intenção deste trabalho condenar tais produtos, elevadas taxas de juros, etc. Queremos, aqui, chamar atenção para o fato de a formação de nossos alunos estar tão carente de conhecimento em finanças. Como trataremos mais adiante, os temas que vêm a auxiliar o cidadão comum no seu dia a dia financeiro são, em sua maioria, triviais. Então por que, em plena segunda década do século XXI estamos tão atrasados em educação financeira?

2.3.3 LDB, PCN's e a Matemática Financeira

Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB - Lei 9394 de 1996) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) encontramos informações muito úteis e pertinentes a este trabalho. Além de serem documentos legais que, obviamente, devem ser seguidos, respeitados, também nos trazem boas questões a serem refletidas, como comparações com leis mais antigas que se tornaram incondizentes com a realidade.

Em seu artigo 35, a LDB coloca dentre as finalidades do Ensino Médio:

- a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

- o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

A Matemática está envolvida na busca de tais finalidades de diversas maneiras. Ela é necessária na construção dos saberes que prepararão para o trabalho, o exercício da cidadania, a capacidade de adaptação a novas condições. Também é crucial para o aprimoramento do qual trata a lei e em tais questões de autonomia e criticidade. Especificamente, a Matemática Financeira é indispensável para que o indivíduo exerça sua cidadania no que diz respeito, até mesmo, a se proteger de eventuais "armadilhas" do mercado, comuns exatamente devido ao fato de grande parte dos consumidores não terem conhecimentos mínimos a respeito, fato que se relaciona diretamente com a questão do desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico. Ou seja, a realização de um trabalho sólido em Matemática Financeira no ensino médio não é só uma questão de necessidades e princípios, mas uma indicação legal que deve ser cumprida.

Já nos PCN's encontramos indicações nas quais podemos perceber um cunho mais didático. Logo no primeiro parágrafo do texto relativo aos conhecimentos de Matemática, é exposta a importância de a Educação se voltar para o desenvolvimento das capacidades de tomar decisões e fazer inferências.

É, de fato, o caso da Educação Financeira. Num mundo majoritariamente capitalista, após muitas centenas de anos de atividades monetárias é natural que haja um enorme leque de opções a um indivíduo que venha a utilizar, por necessidade ou não, um produto financeiro. Assim, a questão de tomadas de decisões passa obrigatóriamente por ter conhecimento, mesmo que básico, em finanças. E defendemos neste trabalho que entenda-se por conhecimento em finanças não apenas saber calcular porcentagens ou deslocar valores no tempo mas, necessariamente, saber como funcionam, dentre tais produtos, ao menos aqueles que estão acessíveis a maioria dos cidadãos de médio ou baixo poder aquisitivo, ou seja, os mais usados.

Como tais documentos explicitam, o ensino médio, como etapa final da educação básica, deve viabilizar a compreensão de fundamentos científicos, o conhecimento sólido dos elementos dessa linguagem que é a Matemática. Mas, tão importante quanto isto, ou mais, é a preparação do cidadão comum, pois é óbvio que todos que passarem pela escola de alguma forma irão viver em sociedade, trabalhar, consumir e ser vítimas dos acontecimentos sociais, financeiros, políticos que ocorrerem, enquanto apenas uma parte, que se espera cada vez maior, seguirá a estudar.

Capítulo 3

ABORDAGENS CRONOLÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Um fator crucial para os eventos financeiros é o tempo. Financiamentos, aplicações, todo tipo de operação financeira está, de alguma forma, atrelado ao passar do tempo. Sendo assim, se buscamos tornar o aprendizado de Matemática mais natural, não seria cabível, ao menos num momento inicial, abordar este tema de forma cronológica, isto é, na ordem com que seus eventos ocorrem? Aqui, queremos mostrar uma abordagem que valorize os acontecimentos através do tempo, na ordem que eles ocorrem, e esperamos que isto faça com que o aluno vá além de simplesmente calcular quantias e prazos, mas tenha um melhor entendimento sobre o funcionamento dos mecanismos financeiros e, assim, seja mais capaz de ter sucesso mediante situações inéditas a ele.

Notemos que tal abordagem tem cunho construtivista (veja [23], por exemplo). Ao introduzirmos Matemática Financeira segundo o que é, aqui, proposto, espera-se que o aluno se torne não só capaz de concluir, por si só, as fórmulas que cercam esse tema como, até mesmo, ser independente das mesmas, o que seria ainda melhor. Ele mesmo tem condições de construir todo o conhecimento em questão. Tal abordagem é mais natural por que explicita exatamente o que acontece em determinada operação, período a período, e em cada "etapa" da mesma. De forma prática e direta, tal trabalho prega que a Matemática Financeira seja introduzida como simples aplicação de Porcentagens, Progressões Aritméticas e, no caso de nosso foco, Progressões Geométricas.

Cabe aqui deixar claro que não é interesse deste trabalho que se substituam outras abordagens, como a do eixo das setas (vide [18] ou [26]), e sim adotá-la como abordagem introdutória visando uma melhor familiarização e, consequêntemente, independência por parte do aluno. Outras abordagens são sempre bem vindas posteriormente.

3.1 A ABORDAGEM VISUAL

Ainda não há muitos trabalhos realizados no Brasil em torno da Educação Financeira, o que pode ser um indício da necessidade de atenção a esta área tão presente na vida das pessoas. Entre os existentes, destaco aqui o "UMA ABORDAGEM VISUAL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO" [26], de Rosa C. Novellino de Novaes, realizado em 2009 para obtenção do seu grau de Mestre.

Uma das dificuldades por ela apurada em sua pesquisa é a dificuldade dos alunos em tratar quantias em diferentes épocas. Isso é, inclusive, um motivador para o presente trabalho visto que defendemos uma familiarização com tais mecanismos num primeiro momento, antes de cálculos mais avançados. Acreditamos que, assim, muitos dos alunos não cometerão mais este tipo de erros. Não usamos a mesma abordagem visual que ela propõe, mas exploramos esquemas para que o aluno veja de forma clara a evolução de cada investimento ou pagamento. Outras partes de seu trabalho são muito pertinentes ao que estamos defendendo aqui e serão expostas e comentadas a seguir.

3.1.1 A sequência didática proposta e a análise de livros didáticos

Para que se possa trabalhar esta que, a nível médio, é a parte final do conhecimento em finanças, é necessário já estar minimamente familiarizado com certos temas. NOVAES explicita como uma sequência didática para tal: i) porcentagem, ii) juros simples, iii) fator de aumento e fator de desconto, iv) juros compostos, v) o valor do dinheiro no tempo. O foco de nosso trabalho está relacionado a este último item e, de acordo com o que defendemos aqui, o terceiro item virá como consequência das conclusões do quinto. Também há problema em abordar juros simples posteriormente, na forma de observações, visto o menos frequente, mas não menos importante, uso deste no mercado financeiro. Um exemplo desta abordagem posterior de juros simples é encontrada no Capítulo 2 de [18]. Assim sendo, de acordo com as abordagens aqui propostas, entendemos como pré-requisitos do item v), dentre os acima expostos, apenas i) e iv). Além disso, é essencial o conhecimento de progressões geométricas, o que geralmente se encaixa antes de abordar iv). Assim, podemos concluir ser natural a abordagem de tal tema no 1ª ano de ensino médio, como já fazem dois dos autores que citaremos mais adiante.

Ela também nos lembra que vários fatores como a falta de tempo, por exemplo, fazem com que os livros didáticos tenham forte influência no trabalho dos professores em sala de aula e também diz acreditar que eles acabam determinando as escolhas dos conteúdos de maneira mais incisiva que os documentos oficiais. Sendo tão presente o livro didático no planejamento e orientação do professor, é cabível introduzir uma análise sobre o que é e como se aborda matemática financeira nesses materiais. No caso do nosso trabalho, a questão da equivalência de capitais, verificar quais livros chegam a tal ponto e como o fazem.

A análise feita por ela, toma os seguintes títulos:

- DANTE, L. R. Matemática, vol. 1, 1ª ed. São Paulo: Ática, 2004.
- PAIVA, M. Matemática, vol. único, 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.
- SMOLE, K.S.; DINIZ, M.D.. Matemática ensino médio, vol. 3, 5ª ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

Em seu relato, ela mostra, dentre outras coisas, que apenas o primeiro destes adentra pela matemática financeira até equivalência de capitais. Analisando o mesmo, percebemos que, mesmo que sem se aprofundar, tal tema é bem abordado via metodologia usual, ou seja, usando o eixo das setas.

Além destes, escolhemos, para complementar tal análise, quatro coleções de 3 volumes, cada, a nível médio enviados por editoras para nossa apreciação na Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAr), em Barbacena.

Alguns autores ainda divergem quanto ao momento de abordar a Matemática Financeira no ensino médio. A maioria já o faz em seguida às progressões, o que costuma ocorrer, atualmente, no 1º ano. Mas após analisar tais coleções, vimos que os investimenos e, principalmente, financiamentos, que são tão comuns em nossas vidas, ainda não são suficientemente abordados nos livros didáticos. E, assim como mostra a pesquisa de NOVAES, também vimos que mesmo nos livros onde o tema é abordado, isto é feito, geralmente, em final de capítulo, mais como curiosidade.

Os livros que analisamos para tal trabalho foram:

(1) IEZZI, G.(et al.) Matemática: ciência e aplicações. Volumes 1, 2 e 3.-5.ed.-São Paulo: Atual, 2010.

(2) DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. Volumes 1, 2 e 3.-1.ed.-São Paulo:Ática, 2010.

(3) SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M.I.S.V. Matemática: ensino médio. Volumes 1, 2 e 3. -6.ed.-São Paulo: Saraiva, 2010.

(4) SOUZA, J. R. Novo olhar matemática. Volumes 1, 2 e 3.-1.ed.-São Paulo, 2010.

(5) SILVA, C. X. da; BARRETO FILHO, Benigno. Matemática aula por aula. Volumes 1, 2 e 3.-São Paulo: FTD, 2009.

(6) GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. Matemática: uma nova abordagem. Volumes 1, 2 e 3-2.ed.-São Paulo: FTD, 2012.

(7) PAIVA, Manoel. Matemática. Volumes 1, 2 e 3.-1.ed.-São Paulo: Moderna, 2009.

No Volume 1 da coleção (1) encontramos um capítulo, logo após as progressões, dedicado apenas à Matemática Comercial e Financeira. Em duas curtas seções há explanações muito bem feitas sobre pagamentos parcelados, mas são apenas dois exercícios relativos a isso.

Já no Volume 1 da coleção (2) temos, também, todo um capítulo para tal, seguinte às progressões. O autor aborda a questão atentando para a necessidade de se analisar a melhor opção de compra, aborda a equivalência de capitais, usando o eixo das setas já inicialmente, e apresenta oito exercícios sobre o tema. Foi o mais completo dentre os livros analisados.

A coleção (4), em seu Volume 2, tem um capítulo para Matemática Financeira, apesar das progressões estarem no volume 1, que aborda amortizações de forma breve, apenas dando fórmulas.

As demais não abordam questões relativas a pagamentos parcelados ou sequências de depósitos.

Apesar de todos esses livros apresentarem o avanço de ter questões históricas ou cotidianas espalhadas por seus capítulos, eles acabam que sendo apenas enfeite em sala de aula, visto que a Matemática ainda carrega, junto de seu título de ciência exata, o "carma" de ter se consolidado como uma resolvedora de problemas algoritmizáveis que dispençam reflexões, críticas e qualquer tipo de humanização. Os autores precisam estar sempre atentos para melhorar cada vez mais, assim como todos nós, mas já são muito mais atraentes e didáticos que há anos atrás. O acontecimento dessas constantes mudanças requer, acima de tudo, nossa atitude.

3.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS: UM PRÉ-REQUISITO BÁSICO

Na verdade, mais do que ter tais progressões como pré-requisito para o aprendizado de Matemática Financeira, podemos ver boa parte desta última como um campo de aplicação direta dos conhecimentos em Progressões Geométricas.

Progressões Aritméticas e Geométricas já fazem parte dos conhecimentos matemáticos desde povos muito antigos como os babilônios e egípcios, ou seja, séculos antes de Cristo. É pertinente citar, aqui, uma já conhecida história, contida em [18], por exemplo, sobre um grande gênio da Matemática: Johann Friederich Carl Gauss (1777-1855).

Aos sete anos de idade, durante uma aula seu professor pediu que os alunos obtivessem a soma dos números (inteiros) de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Aparentemente, ele se baseou no fato de que a soma dos números equidistantes dos extremos (1 e 100, neste caso) é sempre constante como mostra a Figura 3.1.

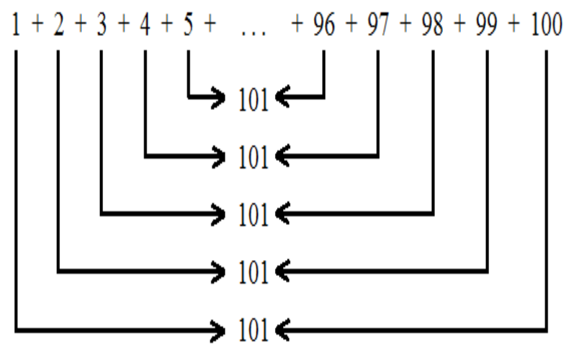

Figura 3.1: Uma possível "visão" de Gauss

E, de fato, sendo $(a_1, ..., a_{1+k}, ..., a_{n-k}, ..., a_n, ...)$ uma progressão aritmética de razão r, obviamente vendo que o termo a_{1+k} está a mesma "distância" de a_1 que a_{n-k} está de a_n, temos que

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= a_1 + (a_1 + (n-1)r) \\ &= 2a_1 + (n-1)r \\ &= 2a_1 + nr - r \\ &= 2a_1 + kr + nr - kr - r \\ &= (a_1 + kr) + (a_1 + (n-k-1)r) \\ &= a_{1+k} + a_{n-k} \end{aligned}$$

e, assim, a ideia de Gauss pode ser generalizada pois, pelo visto acima, a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética pode ser reduzida a $n/2$ vezes o valor de $a_1 + a_n$.

Percebamos que, mesmo sem saber sobre a existência de conhecimentos antigos sobre progressões, uma percepção puramente intuitiva concedeu a Gauss condições de resolver o problema proposto. Se, antes disso, ele tivesse tido contato com os conhecimentos já existentes, não teria a oportunidade de perceber este fato por si só. Muitas vezes o professor de Matemáica acaba por fazer isso com seu aluno: apresenta um raciocínio já pronto, estruturado. Ou faz pior: apresenta métodos, algoritmos prontos, tirando do aluno a oportunidade de percebê-los, de descobrí-los. Mas quanto mais descobertas pudermos deixar para o aluno, mais sólido será seu aprendizado.

É indispensável, ao estudante de Matemática Financeira, reconhecer uma Progressão Geométrica e saber calcular a soma dos seus termos, tanto com uma quantidade finita ou infinita (caso exista). Cabe aqui, a exemplo de MORGADO (et. al.) em [24], definirmos Progressões Geométricas como sequências que variam com taxa de crescimento constante, sendo tal taxa de crescimento a razão entre o aumento de uma grandeza e seu valor anterior a tal crescimento.

Podemos iniciar a questão da soma com casos bem intuitivos e cotidianos. Mas para simplificar esta explicação, nestes primeiros exemplos, usaremos casos bem diretos apenas para explorar a questão intuitiva.

Exemplo 1. *Determinar a soma dos 10 primeiros termos da sequência* $(a_n) = (1, 3, 9, 27, ...)$.

É cabível propor aos alunos que observem tal soma escrita como $S_{10} = 1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^9$ e perguntar a eles se conseguem fazer algum tipo de manipulação em tal igualdade que nos seja favorável na busca pelo valor de S_{10}. Como, geralmente, eles vêm as Progressões Aritméticas logo antes das Geométricas, devido a já terem efetuado algum tipo de manipulação em equações semelhantes, não é raro que algum aluno indique o que esperamos, ou seja, que se multiplique tal equação por 3 (a razão da progressão). E, quando isso ocorre, os alunos explicam corretamente o motivo para tal: fazer com que, a exceção do primeiro termo, todos os outros apareçam novamente, viabilizando uma eliminação. Quando isso não acontece, podemos levantar questões que permitam induzir este raciocínio.

Escrevendo $S_{10} = 1+3+9+27+...+3^9$ e também, esta mesma multiplicada por 3, ou seja, $3S_{10} = 1 \times 3 + 3 \times 3 + 9 \times 3 + 27 \times 3 + ... + 3^9 \times 3$, podemos subtrair, membro a membro, essas equações donde, eliminando os termos iguais, obtemos $3S_{10} - S_{10} = 3^9 \times 3 - 1$ e, daí, $2S_{10} = 59048$ e, por fim, $S_{10} = 29524$.

Exemplo 2. *Determinar o valor de* $1/8 + 1/2 + 2 + 8 + ... + 512$.

Tendo visto a resolução do exemplo anterior, os alunos, mesmo aqueles que não haviam visualizado antes, já conseguem proceder sem problemas com esta ideia. Obviamente é necessário perceber que, de fato, as parcelas formam uma Progressão Geométrica, o que podemos ver pelo fato de $512 = 2^9 = 2^{-3} \times 2^{12} = (1/8) \times 4^6$, já tendo visto que os quatro primeiro termos estão em uma Progressão Geométrica de razão 4.

Sendo $S = 1/8 + 1/2 + 2 + ... + 512$, temos que $4S = 1/2 + 2 + 8 + ... + 512 + 2048$. Subtraindo membro a membro obtemos $3S = 2048 - 1/8$ e, portanto, $S = 5461/8 = 682,625$. Notemos que, neste caso, sequer foi preciso calcular a quantidade de termos da soma, apesar disso ser evidente em $512 = (1/8) \times 4^6$.

Nesse momento, se o professor achar a turma matematicamente madura o suficiente, já é até cabível introduzir um exemplo de Matemática Financeira, mesmo sem anunciá-lo como tal. Ele pode ser deixado em aberto, como um desafio, para que os alunos tenham a oportunidade de refletir sobre o assunto durante um tempo e tentar aplicar o raciocínio recém visto num problema cotidiano, como vemos a seguir.

Exemplo 3. *Se eu fizer dez aplicações mensais de R$1000,00 cada, por dez meses consecutivos e sempre no início de cada mês, num fundo que rende 1% ao mês, quanto terei acumulado um mês após o último depósito?*

Um exemplo como este pode ser tratado apenas com o entendimento de que aumentar em 1% é equivalente a multiplicar por 1,01 e com o conhecimento de Progressões Geométricas, analisando o que acontece com a quantia neste fundo mês a mês:

No início do primeiro mês deposito os R$1000,00. Passado um mês, essa quantia terá sido acrescida de 1%, ou seja, se tornará 1000(1,01) reais. Além disso, será acrescido o ela o valor do segundo depósito e, assim, começamos o segundo mês com 1000(1,01)+1000 reais. Passado mais um mês esta quantia será, também, acrescida em 1%, ou seja, será multiplicada por 1,01 e virará $(1000(1,01) + 1000)1,01 = 1000(1,01)^2 + 1000(1,01)$. Já podemos perceber que, como a cada mês haverá um acréscimo de 1% ao montante do início do mês anterior mais um depósito de 1000, ao final do décimo mês o primeiro depósito de 1000 reais terá sido multiplicado por 1,01 dez vezes, o segundo 9 vezes, o terceiro 8 vezes e, assim, sucessivamente. Com isso, concluímos que o valor procurado será dado por

$$1000(1,01)^{10} + 1000(1,01)^9 + ... + 1000(1,01)^2 + 1000(1,01)$$

$$= 1000(1,01^{10} + 1,01^9 + ... + 1,01^2 + 1,01)$$

Assim, se fizermos $S = (1,01)^{10} + (1,01)^9 + ... + (1,01)^2 + 1,01$, então teremos $1,01S = (1,01)^{11} + (1,01)^{10} + (1,01)^9 + ... + (1,01)^3 + (1,01)^2$. Subtraindo membro a membro, obtemos $0,01S = (1,01)^{11} - 1,01$ e, daí, tem-se $S \approx 10,56683$ e o montante procurado é R$10566,83.

Tendo passado de forma intuitiva por estes exemplos, já faz sentido generalizar a soma de termos de uma Progressão Geométrica. Na verdade, já fazia sentido fazê-lo logo após o exemplo 2 e isto é o que passamos a fazer agora. Seja

$$S = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-2} + aq^{n-1}, \tag{3.1}$$

com $q \neq \pm 1$. Daí, multiplicando ambos os membros, obtemos

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + aq^n. \tag{3.2}$$

Subtraindo, membro a membro, (3.1) e (3.2), tem-se $(q-1)S = aq^n - a$ e, portanto

$$S = a\frac{q^n - 1}{(q-1)}.$$

Para mais sobre sequências de números reais, veja o Apêndice 2.

3.3 INTRODUZINDO EVENTOS FINANCEIROS NA ORDEM NATURAL DE SEUS ACONTECIMENTOS

Em acordo com o relato de NOVAES, em [26], uma grande dificuldade que os alunos encontram em problemas de Matemática Financeira é tratar quantias através do tempo. Erros como igualar quantias em tempos distintos, ao lidar com fluxos de caixa e afins, são muito comuns. E isso se dá quando o aluno não entende bem, não só o que deve ser feito, mas também o sentido do que se propõe. Neste caso, o estudante não tem pleno conhecimento dos mecanismos de investimentos e, principalmente, dos de cobranças. E é neste sentido que defendemos que, antes de tratar de capitais equivalentes em diferentes momentos, abordemos a evolução, período a período (dia a dia, mês a mês, ano a ano, etc), de investimentos, pagamentos de dívidas, compras, etc. Com este entendimento consolidado, o "transporte" de quantias através do tempo se dará de forma natural, fazendo sentido para o aluno.

Notemos que se adotarmos tais abordagens cronológicas, isto é, se vamos abordar tais problemas no sentido natural do correr do tempo, estaremos fazendo nada mais que obter capitais equivalentes apenas em momentos futuros, mas sem usar este termo com os alunos, até para que eles tenham a oportunidade de perceber sozinhos fatos como as conhecidas fórmulas de equivalência de capitais:

Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1 + i)^n$;

Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1 + i)^n$.

Apesar de serem fórmulas de simples compreensão, é sempre mais proveitoso que um aluno conclua algo ao invés de simplesmente receber e aceitar uma informação. Tais atividades podem ser efetuadas em de três a cinco aulas de 45 minutos cada, sendo de 30 a 45 minutos para os investimentos, 60 a 90 minutos para pagamentos de dívidas, 30 minutos para os sistema SAC e francês e o restante para exercícios. Caso o professor disponha de mais uma aula, é interessante abordar a capitalização contínua.

3.3.1 Investimentos

Dois são os casos básicos em investimentos que trataremos aqui. Primeiro, considerar um único depósito C que ficará rendendo, por n períodos, de acordo com uma taxa de juro conhecida. Neste caso temos que, a cada período, o valor depositado sofrerá um acréscimo de j%, ou seja, será multiplicado por $(1 + j/100)$ e, assim, após n períodos o montante M acumulado será dado por $M = C(1 + j/100)^n$. Como este caso é trivial, dedicaremos mais atenção ao seguinte.

Consideremos que, mensalmente, um investidor aplicará uma quantia c num fundo que rende uma taxa mensal i $(= j/100)$. Por simplicidade, consideremos tais aplicações sempre no início de cada mês. Nosso objetivo é saber quanto ele terá acumulado em tal fundo depois de n meses. Repare que ao invés de já começar com exemplos que trazem todos os pagamentos para a época zero, como o que é proposto nos livros didáticos pesquisados, iniciamos com uma questão que é mais natural a um investidor. Observemos o exemplo a seguir, onde usamos uma abordagem cronológica, ou seja, explicitando o que acontece com esta aplicação a cada mês.

Exemplo 4. *Se você depositar R\$500,00, todo início de mês, numa poupança que pague 0,5% ao mês, quanto terá acumulado ao final de dez meses (ou seja, um mês após o último depósito)?*

Tratemos da evolução do investimento como ele ocorre mês a mês, de modo análogo ao 3. Ao final de um mês o primeiro depósito terá rendido 0,5%, ou seja, terá se tornado 500(1,005) reais. Neste momento há um novo depósito de R\$500,00 e o montante acumulado passa a ser 500+500(1,005) reais. Mais um mês se passa e, com isso, mais uma multiplicação por 1,005, que faz o montante passar a ser de $500(1,005) + 500(1,005)^2$ e, com o novo depósito de 500, passa a $500 + 500(1,005) + 500(1,005)^2$. E assim sucessivamente até que tenhamos

$$500(1,005) + 500(1,005)^2 + ... + 500(1,005)^{10} = 500(1,005 + ... + 1,005^{10}).$$

Com o que vimos anteriormente sobre Progressões Geométricas, isto dá $500(1,005)(1,005^{10} - 1)/0,005 \approx 5139,58$ reais. Isto é mais facilmente apresentável por um esquema, montado mês a mês, como na Figura 3.2, onde explicitamos, em cada expressão, o que é o rendimento do mês anterior e o valor depositado naquele mês.

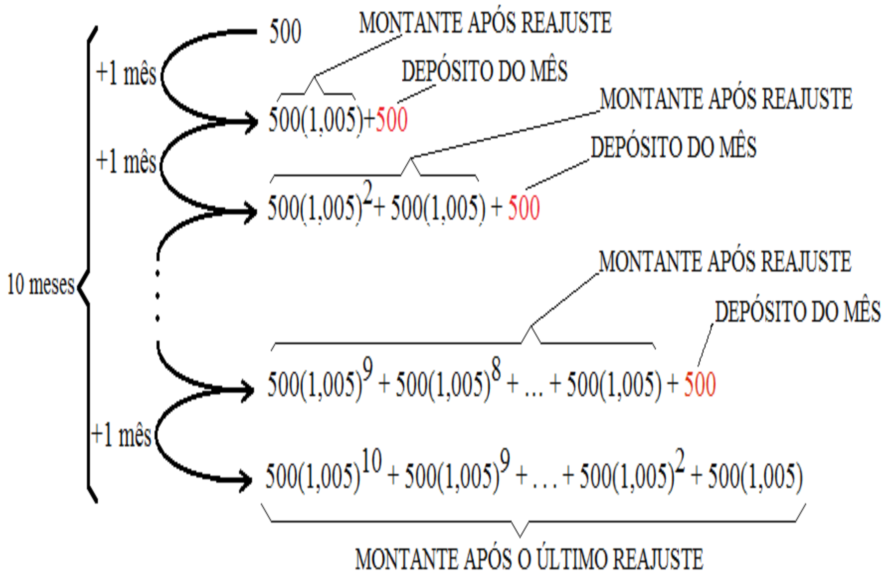

Figura 3.2: Esquema a ser montado período a período

Uma sugestão é que o texto descrito acima seja uma explicação verbal em sala de aula e o esquema seja montado (no quadro, em projetor, etc), etapa a etapa, conforme a explicação.

O próximo exemplo trata de um investimento visando uma renda futura e usaremos a mesma abordagem do anterior.

Exemplo 5. *Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir mensalmente, durante 30 anos, para obter, ao fim desse prazo, uma renda mensal de R\$1000,00?*

Primeiramente, como R\$1000 é 0,5% de R\$200000, então devemos encontrar o valor que aplicado mensalmente a 0,5% nos dê R\$200000 em 30 anos, ou seja, 360 meses. Seja P tal valor. O esquema da figura 3.3 nos mostra a evolução deste investimento de modo análogo ao anterior.

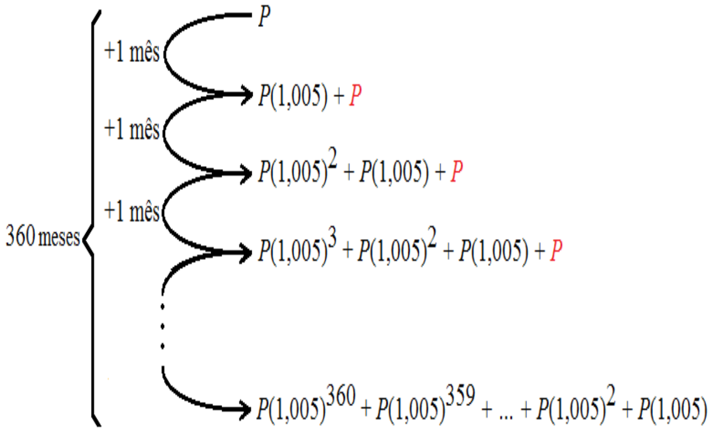

Figura 3.3: Esquema a ser montado período a período

Dele, devemos ter

$$P(1,005)^{360} + P(1,005)^{359} + ... + P(1,005)$$
$$= P(1,005)\frac{(1,005)^{360} - 1}{0,005} = 200000,$$

que implica

$$P = \frac{200000(0,005)}{1,005[(1,005)^{360} - 1]} \approx 198,11.$$

Apesar desta abordagem aparentar ser mais trabalhosa, já após alguns exemplos o próprio aluno vai percebendo as possibilidades de generalização, enquanto entende como são estes mecanismos de investimentos e cobranças.

3.3.2 Pagamentos de dívidas

Aqui abordamos o que, muito provavelmente, é o maior problema de muitos dos indivíduos que consomem. Como já citamos antes (seção 2.3), são muitos os brasileiros endividados e, dentre estes, muitos os que não conseguem honrar suas dívidas. Conhecer os mecanismos relativos aos produtos financeiros disponíveis é fundamental para evitar ser enganado, para aderir sempre à melhor opção acessível e, é claro, ser capaz de pagar o que se compra. No exemplo a seguir expomos uma abordagem cronológica para um problema sobre o pagamento de uma dívida.

Exemplo 6. *Pedro comprará uma moto que vale R\$3000,00 e pagará em cinco parcelas mensais iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra. Considerando uma taxa de juros de 1% ao mês, determinar o valor da parcela.*

Seja p o valor de tal parcela. Ao final do primeiro mês a dívida passará de 3000 para $3000(1,01)$. Neste momento será paga a primeira parcela e a dívida cairá para $3000(1,01) - p$. Passado mais um mês, tal dívida será multiplicada por $1,01$ e passará a ser $3000(1,01)^2 - p(1,01)$, bem quando se pagará mais uma parcela, reduzindo a dívida para $3000(1,01)^2 - p(1,01) - p$. Ao final do quinto mês, a dívida terá chegado a

$$3000(1,01)^5 - p(1,01)^4 - p(1,01)^3 - p(1,01)^2 - p(1,01)$$

e paga-se a última parcela, acabando com a dívida e a igualando a zero:

$$3000(1,01)^5 - p(1,01)^4 - p(1,01)^3 - p(1,01)^2 - p(1,01) - p = 0.$$

Daí, vem $3000(1,01)^5 = p(1,01^0 + ... + 1,01^4) = p(1,01^4 - 1)/0,01 = 4,060401p$ donde $p \approx 775,84$, o que também é mais facilmente apresentável pela montagem de um esquema como na Figura 3.4.

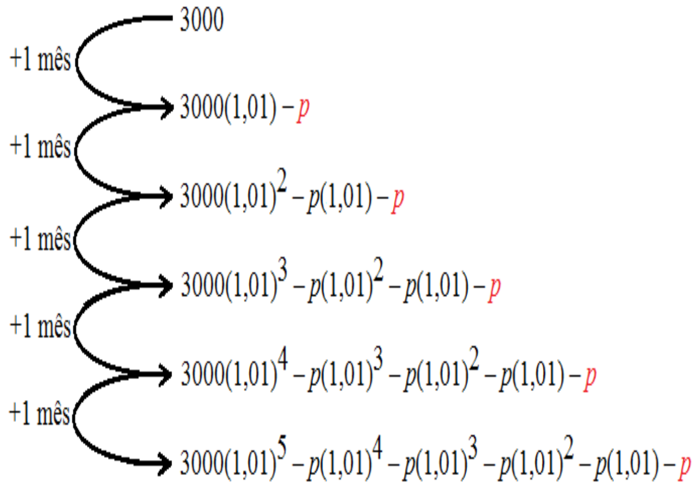

Figura 3.4: Esquema a ser montado período a período

Nela temos, em cada linha, a parcela paga naquele mês (último termo) e a dívida do mês anterior reajustada. Vemos que, além de calcular o valor da parcela, o estudante percebe como ocorre a evolução da sua dívida, tornando tal prática mais clara e justificada. É pertinente, ainda, aproveitar a situação para fazer o que chamamos de "prova real", usual no ensino fundamental, que é usar o valor obtido pra mostrar que, de fato, tal dívida terá se esgotado após o último pagamento. Isso será feito quando falarmos de tabela Price e SAC, na seção 3.3.3.

O exemplo a seguir expõe uma situação muito corrente no mercado, que pode acabar disfarçando a presença dos juros.

Exemplo 7. *Ao comprar uma geladeira de valor R\$900,00, um cliente tem as seguintes opções: Em três parcelas mensais sem juros (ou seja, de R\$300,00 cada), sendo a primeira paga no ato da compra, ou à vista com 10% de desconto. Determine a taxa mensal de juros embutida no preço anunciado.*

Se o preço à vista é, na verdade, R\$810,00, então é óbvio que há juros embutidos no anúncio. Se um cliente compra parcelado, ele sai da loja devendo os R\$810,00 menos o valor pago no ato (R\$300,00), ou seja, uma dívida de R\$510,00. Sendo i tal taxa, passado um mês sua dívida será de $510(1+i)$, quando será paga mais uma parcela de R\$300 reduzindo a divida a $510(1+i)-300$. Um mês após, a dívida passará para $510(1+i)^2-300(1+i)$ quando será paga a última parcela e, então, a dívida passará a $510(1+i)^2-300(1+i)-300$. Como nesse momento se encerra a dívida, tal expressão deve valer zero e, daí, substituindo $(1+i)$ por x, tem-se $510x^2 - 300x - 300 = 0$, que equivale a $51x^2 - 30x - 30 = 0$. Como $(1+i) = x$ tem que ser positivo, não convém a solução negativa para tal equação e ficamos com $x \approx 1,116$. Assim, $i \approx 0,116 = 11,6\%$. Um esquema semelhante aos anteriores também pode ser usado, como sugerimos a seguir.

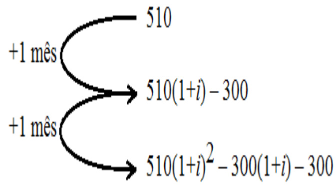

Figura 3.5: Esquema a ser montado período a período

Observemos que no caso de prazos maiores a equação polinomial teria grau maior que 2. Com isso precisaríamos de mais conhecimentos relativos a polinômios, o que o aluno só costuma adquirir ao final do ensino médio e que estão além dos objetivos deste trabalho. Porém, neste mesmo sentido podemos abordar um tipo interessante de problema que pode, com os conhecimentos do aluno já neste momento do Ensino Médio, ser trabalhado com uma quantidade qualquer de pagamentos, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 8. *Um produto é anunciado a R\$125,00. Tal valor pode ser pago em cinco parcelas iguais postecipadas (no valor de R\$25,00 cada) ou à vista com 20% de desconto. Se uma pessoa tem acesso a um investimento que rende 8% ao mês, qual é a opção mais vantajosa para efetuar tal compra?*

Podemos pensar que tal pessoa tenha disponível a quantia para pagamento à vista, mas vai pagar parcelado para investir o que sobra, mês a mês. Se, deste modo, sobrar dinheiro ao final dos pagamentos, então é melhor pagar parcelado. Se faltar, obviamente o valor para pagamento à vista sequer sustentará o parcelamento e se nem sobrar nem faltar, é indiferente o modo de pagamento escolhido. Analisemos, então, a evolução do que sobra, mês a mês, ao escolher o parcelamento, a exemplo do que já fizemos antes, observando que os 20% de desconto sobre R\$125,00 nos levam a R\$100,00 para o pagamento à vista.

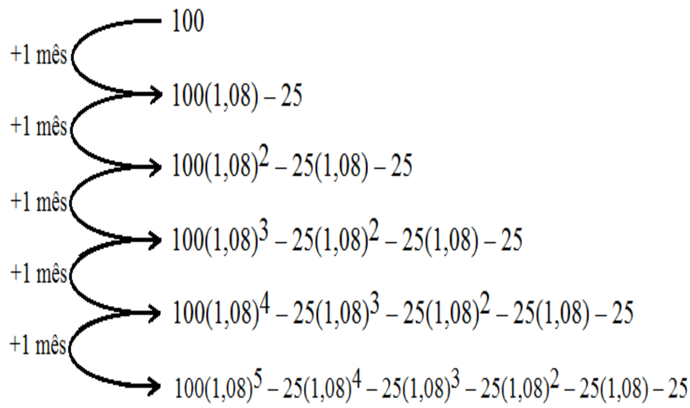

Figura 3.6: Esquema a ser montado período a período

Assim, o valor que resta após o último pagamento é dado por

$$100(1,08)^5 - 25[(1,08)^4 + (1,08)^3 + (1,08)^2 + (1,08)^1 + (1,08)^0]$$

$$= 100(1,08)^5 - 25\frac{(1,08)^5 - 1}{0,08} \approx 0,27.$$

Ou seja, ao usar a opção de parcelamento, além de os R\$100,00 serem suficientes para honrar todos os pagamentos, ainda geram uma pequena sobra (R\$0,27) ao final, mostrando que o parcelamento é ligeiramente mais vantajoso, neste caso.

O termo *amortização* é muito comum no mercado. Amortizar significa abater, descontar parte de uma dívida ou, até mesmo, toda ela. Cada amortização é um pagamento e, como vemos a seguir, podemos tratar problemas que envolvem esses abatimentos com a abordagem cronológica aqui sugerida.

Exemplo 9. *Pedro tomou um empréstimo de R\$100,00 a juros mensais 10%. Quitou-o em três meses, pagando a cada mês os juros devidos e amortizando 30% da dívida ao final do primeiro mês e 30% e 40% nos dois meses seguintes. Determinar o valor de cada parcela paga.*

Tais amortizações são de R\$30,00, R\$30,00 e R\$40,00 respectivamente, ou seja, ele pagará, a cada mês, estes valores e os juros acumulados ao longo do mês anterior. Assim, ao final do primeiro mês sua dívida será de R\$110,00, ele pagará os R\$10,00 de juros mais os R\$30,00 da amortização e sua dívida cairá para R\$70,00. Passado outro mês, esses R\$70,00 serão atualizados a R\$77,00 e ele pagará os R$7,00 de juros e os R$30,00 da amortização, reduzindo a dívida para R$40,00. Por fim, estes R$40,00 passarão à R$44,00, ele pagará os R$4,00 de juros e os R$40,00 da amortização e, com isso, acabará com sua dívida. Resumindo, as parcelas serão de R$40,00, R$37,00 e R$44,00, respectivamente. Esquematizando tudo isso, mês a mês, obtemos a Figura 3.7.

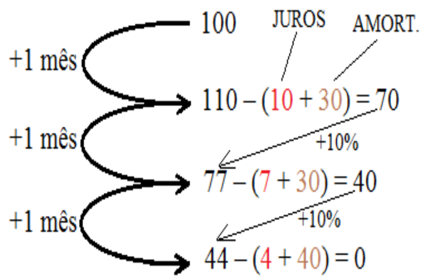

Figura 3.7: Esquema a ser montado período a período

Observe que dentro de cada par de parênteses temos o valor de uma prestação, isto é, a soma entre os juros a serem pagos e a amortização.

3.3.3 Tabela Price e SAC

São os modelos mais comuns no mercado, usados para financiamentos. O Sistema francês, também chamado Tabela Price (Richard Price foi um economista inglês) se caracteriza por prestações constantes e o Sistema de Amortização Constante(SAC) já expõe no nome sua principal característica. São muito cabíveis a nível médio por serem frequêntes no mercado, como citamos acima, e por decorrerem diretamente dos casos recém vistos. Fazem parte de uma matemática cotidiana que está esquecida nos livros didáticos e, principalmente, em sala de aula.

Nos dois exemplos a seguir tratamos os problemas de SAC e Tabela Price de modo cronológico, como estamos propondo ao longo deste trabalho, visando uma abordagem em sala de aula.

Exemplo 10. *Uma dívida de R$100,00 é paga, com juros de 15% ao mês, em 5 parcelas mensais postecipadas. Determinar cada prestação e fazer uma planílha de amortização pelo SAC.*

Se vamos considerar uma amortização constante, então a cada mês será abatido 1/5 da dívida, ou seja, R$20,00. Além deste valor também irão compor a parcela os juros do mês. Assim sendo, após um mês a dívida será de R$100,00, mais R$15,00 de juros. Com isso, serão pagos $20 + 15 = 35$ na primeira prestação, restanto $115 - 35 = 80$ de dívida. Passado mais um mês esses R$80,00 terão gerado R$12,00 de juros e, assim, a prestação seguinte será de $20 + 12 = 32$ e, após pagá-la, a dívida cai de 92 para $92 - 32 = 60$. Seguindo este procedimento, a próxima parcela será de R$29,00, a seguinte será de R$26,00 e a última, de R$23,00. Obviamente, a compreensão deste procedimento fica mais fácil com auxílio de um esquema, como já vimos, ou se formos construindo, mês a mês, uma planílha como a seguinte, onde Dívida (pré) é o valor devido imediatamente antes do pagamento da parcela e Dívida (pós) é o valor devido imediatamente após tal pagamento.

Mês	Dívida (pré)	Juros	Amortização	Parcela	Dívida (pós)
0 (compra)	100	-	-	-	-
1	115	15	20	35	80
2	92	12	20	32	60
3	69	9	20	29	40
4	46	6	20	26	20
5	23	3	20	23	0

Exemplo 11. *Refazer o exemplo anterior pelo sistema francês (Tabela Price).*

Neste caso, devemos considerar que a prestação seja constante e, consequentemente, a amortização não será. Além disso, precisamos saber, inicialmente, o valor da prestação para poder montar a planilha e para isso usaremos o mesmo raciocínio já visto anteriormente. Sendo p o valor de tal parcela, temos que, de acordo com o que já vimos, o valor final da dívida será

$$100(1,15)^5 - p(1,15)^4 - p(1,15)^3 - p(1,15)^2 - p(1,15) - p.$$

Mas como este deve ser igual a zero, temos

$$p = \frac{100(1,15)^5}{(1,15)^4 + (1,15)^3 + (1,15)^2 + (1,15) + 1} = \frac{100(1,15)^5(0,15)}{(1,15)^5 - 1} \approx 29,83.$$

Com o valor da parcela em mãos, podemos montar, mês a mês, a planilha abaixo.

Mês	Dívida (pré)	Juro	Parcela	Amortização	Dívida (pós)
0	100	-	-	-	-
1	115	15	29,83	14,83	85,17
2	97,95	12,78	29,83	17,05	68,12
3	78,34	10,22	29,83	19,61	48,51
4	55,77	7,26	29,83	22,57	25,94
5	29,83	3,89	29,83	25,94	0

Os gráficos na figura a seguir ilustram as duas situações.

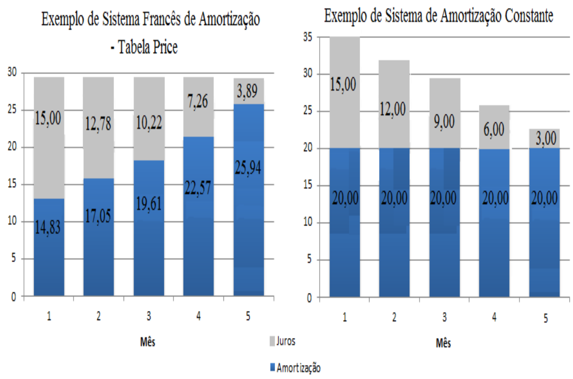

Figura 3.8: Gráficos dos exemplos anteriores

Notemos que, neste caso, o valor total pago usando o SAC é menor do que o total pago com o sistema francês. E supondo que eu disponha, a cada mês, dos valores necessários para se pagar esta dívida pelo SAC, se eu escolho o sistema francês terei uma "sobra" em cada um dos dois primeiros meses, mas que não serão sufucientes para compensar a "falta" nos três pagamentos seguintes. Ou seja, a não ser que eu consiga investir o que me sobra nestas duas primeiras parcelas em um fundo que renda o necessário para cobrir o que me faltar nos próximos pagamentos, a melhor opção para este pagamento é a amortização constante. Mas, sendo assim, qual será a taxa que proporciona um rendimento capaz de fazer com que esta "sobra" dos primeiros meses compense a "falta" dos últimos?

Verifica-se que esta taxa é, exatamente, a de 15% ao mês (faça-o!) e também dizemos que estes dois esquemas de pagamentos são *equivalentes*, pois se supomos que o dinheiro é reajustado em 15% ao mês, tanto um saldo devedor quanto um investimento, tanto faz escolher um modelo ou o outro. Este tipo de verificação é bem trabalhosa de acordo com a abordagem aqui proposta e, para tal, sugerimos que o leitor faça uso do modelo mais tradicional (vide [18]). Afinal, como já dissemos, a proposta é que a abordagem indicada neste trabalho seja introdutória e, assim, para problemas de pagamentos a prazos mais longos as fórmulas de equivalência de capitais serão bem úteis.

No sentido de generalizar estes procedimentos, consideremos uma dívida D a ser paga, com juros de i ao mês, em n parcelas mensais postecipadas. Se desejamos modelar tal situação pelo SAC, então cada amortização será de D/n e, procedendo de modo análogo ao Exemplo 10, obtemos a tabela a seguir.

Mês	Dívida (pré)	Juro	Amortização	Parcela	Dívida (pós)
0	D	-	-	-	-
1	$D(1+i)$	Di	D/n	$D\left(i+\frac{1}{n}\right)$	$D\frac{n-1}{n}$
2	$D(1+i)\frac{n-1}{n}$	$Di\frac{n-1}{n}$	D/n	$D\left(i\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)$	$D\frac{n-2}{n}$
3	$D(1+i)\frac{n-2}{n}$	$Di\frac{n-2}{n}$	D/n	$D\left(i\frac{n-2}{n}+\frac{1}{n}\right)$	$D\frac{n-3}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$D(1+i)\frac{1}{n}$	$Di\frac{1}{n}$	D/n	$D\frac{i+1}{n}$	0

Fica explícito, então, que os valores dos juros, das parcelas e da dívida sempre diminuem conforme progressões aritméticas, no caso do SAC.

Mas se desejamos fazer tal modelagem pelo sistema francês, procedemos como no Exemplo 11 e, inicialmente, obtemos o valor da parcela, vendo que ao final de todos os pagamentos o valor da dívida é dado por

$$D(1+i)^n - p(1+i)^{n-1} - p(1+i)^{n-2} - ... - p$$

$$= D(1+i)^n - p[(1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^0]$$

$$= D(1+i)^n - \frac{p}{i}[(1+i)^n - 1],$$

que, obviamente, deve ser igual a zero. Assim, encontramos

$$p = Di\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

e, daí, podemos montar a tabela, mês a mês, obtendo

Mês	Dívida (pré)	Juro	Parcela	Amortização	Dívida (pós)
0	D	-	-	-	-
1	$D(1+i)$	Di	$Di\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{1}{(1+i)^n-1}$	$D\frac{(1+i)^n-(1+i)}{(1+i)^n-1}$
2	$D(1+i)\frac{(1+i)^n-(1+i)}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^n-(1+i)}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{1+i}{(1+i)^n-1}$	$D\frac{(1+i)^n-(1+i)^2}{(1+i)^n-1}$
3	$D(1+i)\frac{(1+i)^n-(1+i)^2}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^n-(1+i)^2}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^2}{(1+i)^n-1}$	$D\frac{(1+i)^n-(1+i)^3}{(1+i)^n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$Di\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$Di^2\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	$Di\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n-1}$	0

donde percebemos, por exemplo, que os valores das amortizações crescem em Progressão Geométrica.

3.4 POSSIBILIDADE DE CONTINUAÇÃO: DO DISCRETO PARA O CONTÍNUO

Ao longo das seções anteriores tratamos da evolução de investimentos e dívidas com o passar do tempo, mas sempre considerando tal tempo de forma discreta, ou seja, limitando as partições ou aglutinações do mesmo a números inteiros. Assim, consideramos que entre dois momentos consecutivos no tempo o valor de um bem, de uma dívida ou de um investimento se mantém constante.

Apesar desse modelo ser bem comum e satisfatório a nível médio, pois atende à maior parte dos produtos financeiros disponíveis à população, é cabível questionar sobre a possibilidade de uma evolução contínua, ou seja, de modo que o capital seja atualizado a cada instante sem que haja este período estacionário seguido por um "salto". De fato, ao longo da seção 2.1.1, aumentamos algumas vezes o número de capitalizações ao longo de um mesmo período, do qual conhecíamos a taxa de juros. Uma pergunta natural que lá surgiu foi "o que acontecerá se eu aumentar sem limites a quantidade de capitalizações em cada período?". Aqui veremos duas reflexões sobre tal questão.

Primeiramente, suponhamos que haja uma função $C(t)$ que modele o que foi descrito acima. Consideremos uma quantia C_0, aplicada a uma taxa de juros (suposta constante). Seja $C(t)$ o capital gerado a partir de C_0 após decorrido um tempo t. Notemos que a diferença $C(t+h) - C(t)$ é o lucro obtido com o investimento da quantia $C(t)$ por um prazo h. Daí, se tal taxa é constante, tal lucro deve ser proporcional à quantia $C(t)$ e temos que $C(t+h) - C(t) = kC(t)$, donde $k = [C(t+h) - C(t)]/C(t)$ evidentemente depende do prazo h, mas não depende do tempo t.

Chamamos uma função f de *função exponencial* se sua lei puder ser expressa por $f(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$. Já uma função g que possa ser expressa por $g(x) = a \cdot b^x$ é dita *função de tipo exponencial* (com $a \neq 0$). Afirmamos que uma função da forma $C(t) = C_0 b^t$, com b real, positivo e tal que $b \neq 1$ atende às necessidades expostas acima. Com efeito, assim sendo tem-se

$$\frac{C(t+h) - C(t)}{C(t)} = \frac{C_0 b^{t+h} - C_0 b^t}{C_0 b^t} = b^h - 1,$$

que, de fato, independe de t. Isso mostra que as funções do tipo exponencial são uma possibilidade para tal modelagem. Além disso, tem-se que funções do tipo $C(t) = C_0 b^t$ são as únicas tais que $C(t+h)/C(t)$ não depende de t. Isto é, toda modelagem para tal problema tem que resultar numa função exponencial ou do tipo exponencial. Tratamos disso mais cuidadosamente no Apêndice 3.

Vejamos uma outra reflexão sobre isto. Tem-se que o mais comum entre matemáticos e outros estudiosos que necessitem de uma modelagem exponencial é o uso do e como base, ou seja, de funções do tipo $C(t) = C_0 e^{\alpha t}$. Com efeito, na seção 2.1.1 concluímos que o montante, obtido após n anos, da aplicação de um principal C_0 a uma taxa anual i de juros, capitalizada m vezes ao longo do ano, é dado por

$$M = C_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}.$$

Como i e m são números reais (mais precisamente, m é natural) não nulos, podemos escrever $m = ih$ para algum h em $\mathbb{R}$. Assim, tem-se

$$M = C_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} = C_0 \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{ihn} = C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}\right]^{in}.$$

E já vimos que

$$\lim_{h\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h} = e,$$

o que trataremos mais a fundo no Apêndice 2. Assim, se fizermos este número de períodos de capitalização (m) aumentar sem limites, então h também o fará (pois $h = m/i$ e i é fixo) e teremos

$$M = \lim_{h\to\infty} C_0 \left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}\right]^{in} = C_0 \left[\lim_{h\to\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}\right]^{in} = C_0 e^{in}.$$

A fim de ilustrar tais ideias, analisemos, então, duas situações:

(1) aplicar um principal de R\$1000,00 num fundo que rende 20% ao ano com capitalização anual;

(2) aplicar um principal de R\$1000,00 num fundo que rende 20% ao ano com capitalização contínua.

Chamemos de $h(t)$ o montante acumulado em t anos na situação (1). Temos que, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, podemos obter k inteiro tal que $k \le t < k + 1$ e, assim, façamos $h(t) = 1000(1,2)^k$. Observemos que na situação (1) a taxa é dada ao ano e com capitalização anual, ou seja, a taxa anunciada é, de fato, a efetiva. Já na situação (2) a taxa é anunciada ao ano mas a capitalização é contínua, isto é, nos foi dada uma taxa nominal. E, de fato, se quiséssemos uma taxa efetiva de 20% ao ano, bastaria considerar uma função

$g(t) = 1000(1,2)^t$, como veremos mais adiante. Neste caso, observamos que, com m capitalizações ao ano, o montante de (2) em t anos seria

$$M = 1000\left(1 + \frac{0,2}{m}\right)^{mt}.$$

Mas se desejamos uma capitalização contínua, que podemos entender como capitalizar a todo momento, devemos fazer este número m tender ao infinito. Assim, em t anos teremos

$$f(t) = \lim_{m\to\infty} 1000\left(1 + \frac{0,2}{m}\right)^{mt} = 1000 \lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^{0,2ht}$$
$$= 1000\left[\lim_{h\to\infty}\left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h}\right]^{0,2t} = 1000e^{0,2t}.$$

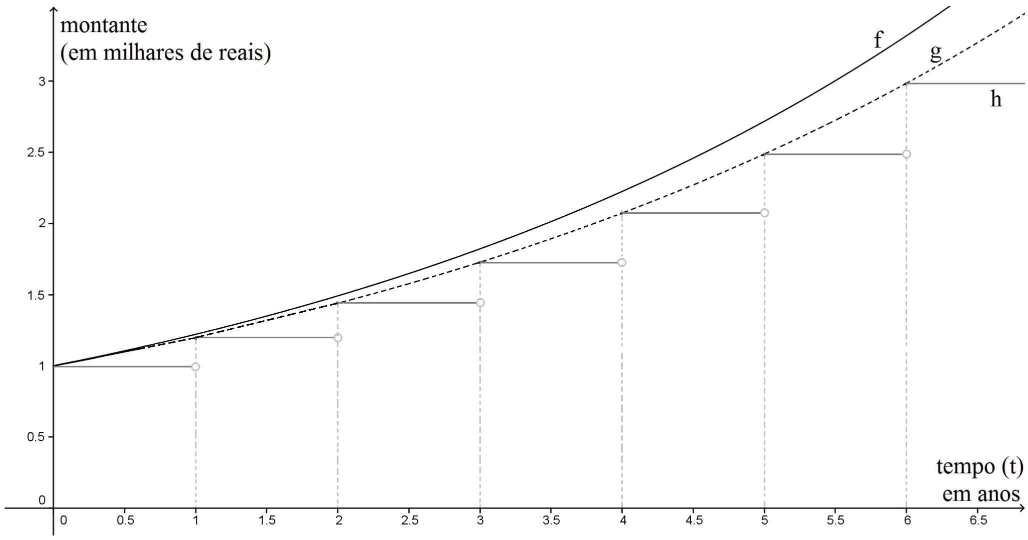

Figura 3.9: Capitalizações contínua e discreta

Os gráficos de tais funções são dados na figura 3.9, onde $g(t) = 1000(1,2)^t$. Notemos que estes gráficos indicam que a capitalização contínua faz realmente o montante crescer mais rápido. E esta taxa anunciada de 20% (nominal) na situação (2), resulta numa taxa efetiva de

$$\frac{f(t+1) - f(t)}{f(t)} = \frac{1000e^{0,2t+0,2} - 1000e^{0,2t}}{1000e^{0,2t}} = e^{0,2} - 1,$$

que é maior que 20% (aproximadamente 0,22).

Podemos, por exemplo, analisar quanto tempo leva para que tal capital dobre em cada caso.

Se fizermos $1000(1,2)^t = 2000$, temos que $t = \log_{1,2} 2 \approx 3,8$. Daí, como entre dois valores inteiros de t tal função se mantém constante, ela só dobrará ao final do quarto ano, como, de fato, aparenta no gráfico. Na verdade, ele acabará passando um pouco do dobro, visto que $1000(1,2)^4 = 2076,3$.

Mas se fizermos $1000e^{0,2t} = 2000$, obtemos $t = \ln 2/0,2 \approx 3,47$, que é menor até mesmo que os 3,8 achados inicialmente para a situação anterior. Ou seja, enquanto no caso discreto seriam 4 anos até que o capital dobrasse, no caso contínuo isso ocorreria em menos de 3 anos e meio.

Uma questão muito natural que surge é "e se quisermos um capital atualizado continuamente, porém com uma taxa efetiva de 20% ao ano?". Notemos que a função g, dada anteriormente, atende a isso. Com efeito, temos que

$$\frac{g(t+1)-g(t)}{g(t)} = \frac{1000(1,2)^{t+1} - 1000(1,2)^t}{1000(1,2)^t} = 0,2,$$

ou ainda,

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{g(t)} = \frac{1000(1,2)^{t+h} - 1000(1,2)^t}{1000(1,2)^t} = 1,2^h - 1.$$

E notemos que g também pode ser obtida se buscarmos uma função do tipo $g(t) = 1000e^{\alpha t}$ tal que $g(1) = 1000(1,2)$. Isso implica em $e^\alpha = 1,2$, ou seja, $\alpha = \ln 1,2$. Mas, substituindo α, tem-se

$$g(t) = 1000e^{\alpha t} = 1000e^{(\ln 1,2)t} = 1000(1,2)^t.$$

Uma outra pergunta que pode surgir é a seguinte: "sejam duas funções $m_1(t) = a \cdot e^{\alpha t}$ e $m_2(t) = b(1+i)^t$ que nos fornecem os montantes de duas aplicações, em t anos. Supondo que ambas sejam iguais em $t = 0$, ou seja, tenham uma mesma aplicação inicial, que relação deve existir entre as taxas i e α para que após 1 ano, por exemplo, tais montantes também sejam iguais?"

Obviamente temos que $a = b$ por elas serem iguais em $t = 0$. Mas se devemos ter $m_1(1) = m_2(1)$, então $a \cdot e^\alpha = b(1+i)$ e, como a e b são iguais e diferentes de zero, temos $e^\alpha = (1+i)$, uma relação entre i e α que ainda pode ser reescrita como $i = e^\alpha - 1$ ou $\alpha = \ln(1+i)$.

Mas isto pode ser pensado de forma mais geral. Dados um ponto de "partida" $(0, C_0)$ e um de "chegada" (t, C_t), que relação há entre duas funções $f(t) = a \cdot e^{\alpha t}$ e $g(t) = b(1+i)^t$ que os contenham? Ora, temos que $a = b = C_0$ e, assim, $C_t = f(t) = g(t)$ implica em $e^{\alpha t} = (1+i)^t$ e, ainda, em $\alpha = \ln(1+i)$

e $i = e^\alpha - 1$. Temos aí duas relações entre a taxa efetiva i e sua taxa nominal α relativa a uma capitalização infinitesimal, a exemplo do que já tínhamos feito ao final da seção 2.1.1. E uma simples substituição, por exemplo

$$f(t) = C_0 e^{\alpha t} = C_0 e^{[\ln(1+i)]t} = C_0(1+i)^t = g(t),$$

nos mostra que, na verdade, f e g representam uma mesma função.

Pensando de modo mais amplo ainda, dados dois pontos (t_1, y_1) e (t_2, y_2), com $(t_1 - t_2)(y_1 - y_2)y_1 y_2 \neq 0$, então há uma, e apenas uma, função de tipo exponencial que os contém. De fato, a função $f(x) = a \cdot b^x$, com

$$a = \frac{y_1 - y_2}{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{t_1}{t_1 - t_2}} - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{t_2}{t_1 - t_2}}} \text{ e } b = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\frac{1}{t_1 - t_2}}$$

é do tipo exponencial e contém tais pontos (verifique!). E sendo $f(t) = a_1 \cdot b_1^t$ e $g(t) = a_2 \cdot b_2^t$ duas funções do tipo exponencial que contém tais pontos, temos que $a_1 \cdot b_1^{t_1} = a_2 \cdot b_2^{t_1}$ e $a_1 \cdot b_1^{t_2} = a_2 \cdot b_2^{t_2}$. Mas como $0 \notin \{a_1, a_2\}$, podemos dividir, membro a membro, uma por outra, obter $b_1^{t_1 - t_2} = b_2^{t_1 - t_2}$ e, portanto, $b_1 = b_2$. Daí, substituindo este resultado, por exemplo, em $a_1 \cdot b_1^{t_1} = a_2 \cdot b_2^{t_1}$, tem-se $a_1 = a_2$, e tais funções são idênticas.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma grande oportunidade de aprendizado é o debate saudável de ideias sobre diferentes pontos de vista e métodos utilizados em sala de aula, e sobre os conhecimentos em si. Esperamos que nosso trabalho gere este tipo de reação, não só visando reflexão sobre o mesmo mas também podendo ter como desdobramento outros trabalhos que venham a nos aprimorar como profissionais do ensino e, mais ainda, como pensadores. É estranho ver uma ciência de origens e conceitos que surgem de formas tão naturais ser tão repudiada por tantos. E é possível que isto seja um reflexo de métodos usados em muitas das salas de aula, não só no Brasil, mas em muitos outros lugares.

Vale a pena chamar a atenção para a questão da valorização conhecimento por parte do professor. Até que ponto não é um problema este profissional menosprezar certos temas tidos como não necessários a nível de ensino básico? Existe mesmo tal ponto? Vimos ao longo dessa dissertação que alguns conceitos de Cálculo e Análise aparecem naturalmente na construção dos conhecimentos relativos à Matemática Financeira. Assim, não parece cabível que o professor despreze tais assuntos acreditando não ser necessário entendê-los, visto que o aluno de ensino médio não precisa saber Cálculo e Análise para entender de Finanças. Na verdade, muitos dos conceitos dessas disciplinas são pertinentes ao cidadão comum e, além disso, o aluno sequer precisa saber que está passando por estes campos da Matemática. Destacamos aqui, novamente, a importância dos conhecimentos colocados nos três primeiros apêndices e, com isso, nossa forte recomendação pela leitura deles.

Ao longo do Capítulo 2 passamos por certos temas que cercam o ensino de Matemática. Conhecer as obras dos autores aqui citados é de extrema relevância para quem leciona tal disciplina e precisa lidar constantemente com questões como "*pra que serve isso?*", "*de onde isso veio?*". Muitas vezes esquecemos que tais perguntas, por parte do aluno e também do professor, podem mostrar uma tentativa de realmente entender algum sentido para os conceitos, algo totalmente justificável.

Quando falamos em Matemática Financeira notamos uma forte curiosidade por conta dos estudantes, principalmente entre alunos jovens. Isto é natural pois esse tema é pertinente a uma das maiores vontades humanas: a de consumir. É, então, uma excelente oportunidade para cativar o aluno. Como já dissemos aqui, a Matemática ainda aparenta carecer de naturalidade ao ser tratada na escola e fazer o máximo possível para ligá-la ao dia a dia das pessoas é algo que deve ser buscado sempre.

Tais reflexões devem levar a ação para que ocorram mudanças. Se todos os nossos pensamentos morrerem em nossas cabeças e em trabalhos acadêmicos, não veremos avanços no aprendizado de nossos estudantes; eles continuarão, em grande parte, ou sucumbindo ou simplesmente "engolindo" o que lhes é imposto. O professor precisa persuadir o aluno ao invés de impor fatos a eles. Mas esse poder de persuasão depende do educador acreditar de fato no que prega. Se eu simplesmente aceitar que as coisas são como eu aprendi e ensino, ao invés de me convencer de tal, meu discurso se torna frágil e difícil de defender. Independente de ser num país que valorize ou não a educação, exercemos uma profissão de fé naquilo que se prega, mas tal fé não pode ser cega.

APÊNDICE 1: SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real a_n, chamado o n-ésimo termo da sequência. Cabe lembrar que, no ensino básico as sequências são definidas sem a necessidade de domínio em $\mathbb{N}$, mas em um subconjunto $\{1, 2, 3..., n\}$ de $\mathbb{N}$, ou seja, são consideradas algumas sequências finitas. Apesar disto fugir da definição correta, não é um problema para o aprendizado do aluno.

Escreve-se $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n), para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é (a_n).

Uma sequência (a_n) diz-se limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, uma sequência (a_n) diz-se limitada inferiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência limitada inferiormente e limitada superiormente é dita, simplesmente, limitada e, nesse caso, podemos dizer que existe $k > 0$ tal que $|a_n| \leq k$.

De diferentes formas o conceito de limite pode ser apresentado ainda no ensino médio. Ao vermos a soma da série geométrica infinita, por exemplo, passamos por esse importantíssimo conceito que, aqui, definiremos.

Diz-se que o número real a é limite de uma sequência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, arbitrário, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Ou seja, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se e se mantém tão próximos de a quanto se queira. Para ser mais preciso, se estipulamos uma margem de erro $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n da sequência, posteriores a x_{n_0}, ou seja, com índice $n > n_0$, são valores aproximados de a com erro menor do que ε.

Um fato interessante é o de podermos dizer que $a = \lim x_n$ significa que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, exceto um número finito deles: aqueles n termos tais que seus índices são menores ou iguais a n_0, onde de x_{n_0} em diante, todos os termo pertencem a tal intervalo.

Uma sequência que possui limite diz-se convergente enquanto uma que não possui diz-se divergente. Veremos a seguir que, quando existe, o limite é único.

Teorema 2. *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$ e seja $b \neq a$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos, ou seja, tenham interseção vazia. Como $a = \lim x_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Assim, para todo $n > n_0$, temos que $x_n \notin J$. Logo b não é limite de (x_n). □

Dizemos que uma sequência é *monótona* quando, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $x_{n+1} \geq x_n$ ou, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $x_{n+1} \leq x_n$. Se dado um conjunto $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que tal c é uma *cota superior* de X. De forma análoga definimos *cota inferior*. Chamamos de *supremo* de um conjunto X a menor das suas cotas superiores e de *ínfimo* de um conjunto X a maior de suas cotas inferiores. Escrevemos, respectivamente, $supX$ e $infX$ para representá-las.

O teorema a seguir nos dá uma condição que é suficiente para que uma sequência convirja e seu resultado será usado no Apêndice 2.

Teorema 3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) monótona limitada. Sem perda de generalidade, digamos que ela seja não decrescente. Escrevamos $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ e $a = supX$. Dado um número $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0$ implica $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. □

Semelhantemente, se (x_n) é não crescente e limitada, então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

Para mais sobre sequências de números reais, vide [16].

APÊNDICE 2: A FORMALIZAÇÃO DO e

Inicialmente, precisamos expor o teorema binomial para usá-lo em tal formalização. Sendo $n \in \mathbb{N}$, para obter o desenvolvimento de $(a+b)^n$, o Binômio de Newton[1], vamos multiplicar seus n fatores, ou seja, efetuar

$$(a+b)\cdot(a+b)\cdot ... \cdot(a+b).$$

Notemos que, ao aplicar sucessivamente a propriedade distributiva da multiplicação, vamos obter termos do tipo $a^p \cdot b^{n-p}$, com $p \leq n$. Para saber quantas vezes um termo desses aparecerá no desenvolvimento, basta ver de quantas formas é possível escolher p destes fatores para deles tomar o a, o que implica que nos outros tomaremos o b. E isto quer dizer que o número de vezes que tal termo aparecerá no desenvolvimento[2] é

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

E, com isso, concluímos que

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot a^p \cdot b^{n-p} \\ &= \frac{n!}{0!(n-0)!}a^0 \cdot b^{n-0} + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^1 \cdot b^{n-1} + ... + \frac{n!}{n!(n-n)!}a^n \cdot b^{n-n}.\end{aligned}$$

Agora observemos a sequência

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}, n = 1, 2, 3, ...$$

[1]Isaac Newton (1642-1727) foi um matemático e físico inglês.
[2]vide [18]

Como a cada termo é acrescido um valor positivo em relação ao anterior, ou seja, ela aumenta, temos $S_n < S_{n+1}$ para todo n; isto é, a sequência S_n é monótona crescente. Percebamos, também, que a partir de $n = 3$ temos $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{n-1}$ e, assim,

$$S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 1 + 2 = 3$$

pois $1 - 1/2^n$ é menor do que 1. Daí, temos que $S_n < 3$, ou seja, a sequência S_n é limitada superiormente por 3. Como já vimos no Apêndice 1, toda sequência monótona crescente e limitada converge, ou seja, tende para um limite quando $n \to \infty$. Com isso, S_n converge para um limite S que, pelo que acabamos de mostrar, encontra-se entre 2 e 3, visto que $S_n > S_2 = 2$.

Agora mostraremos uma sequência que converge para o mesmo limite de S_n. Consideremos a sequência $T_n = (1 + 1/n)^n$. Pelo teorema binomial,

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + ... + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Como em cada uma das parcelas dessa soma, a excessão das duas primeiras, aparece um produto −ou fator, no caso da terceira parcela− menor que 1, temos $T_n \leq S_n$ ($T_n < S_n$ a partir de $n = 2$). Portanto, o conjunto dos valores da sequência T_n também tem uma cota superior e, como T_n é monótona crescente pelo mesmo motivo que S_n, converge para um limite T à medida que $n \to \infty$. Por fim, como veremos a seguir, tem-se $T = S$.

Como $S_n \geq T_n$ para todo n, temos que $S \geq T$. Vamos demonstrar que, ao mesmo tempo, $S \leq T$. Tomemos um $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$. Chamemos de $W_{(m,n)}$ a soma formada com os $m + 1$ primeiros termos de T_n, isto é,

$$W_{(m,n)} = 1+1+\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + ... + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{m!}.$$

Como $m < n$, cada um dos parênteses tem um valor positivo e esta última soma é menor do que T_n. Notemos que se deixamos n aumentar sem limite enquanto mantemos m fixo, então $W_{(m,n)}$ tenderá para S_m, pois cada expressão nos parênteses tenderá a 1, enquanto T_n tenderá para T. Ou seja, temos que, qualquer que seja este m, $S_m \leq T$ e, consequentemente, $S \leq T$. Assim, concluímos que $S = T$, como queríamos demonstrar.

Este limite T, de T_n, acima, é o que chamamos de e, que também pode ser expresso pelo limite de S_n, como vimos. Vamos usar isto, e a redução a um absurdo, para provar que e é irracional. Suponhamos que e seja racional, ou seja, que tenhamos $e = p/q$, com p e q inteiros. Como já vimos que $2 < e < 3$, e não pode ser inteiro e, assim, o denominador q deve ser ao menos 2. Multiplicando ambos os lados da equação

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

por $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot q$, obtemos no lado esquerdo

$$e \cdot q! = \frac{p}{q} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot q = p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (q-1),$$

enquanto no lado direito temos

$$q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + ... + \frac{q!}{q!} + ... + \frac{q!}{n!} + ...$$

$$= [q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot q + ... + (q-1)q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ...$$

O lado esquerdo e a expressão nos colchetes do lado direito são nitidamente inteiros. Mas os termos remanescentes não o são pois cada fração tem numerador 1 e denominador maior que três. Quanto à sua soma, visto que $q \geq 2$, temos

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + ... \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + ...$$

$$< \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} + ... = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2},$$

onde usamos o fato de a série geométrica infinita $a + ar + ar^2 + ...$ ser igual a $a/(1-r)$, sempre que $|\mathrm{r}|<1$. Como a soma em questão é positiva e menor que $1/2$, claramente não representa um inteiro. Daí, a equação acima tratada implica em um número inteiro ser igual a um número não inteiro, o que é um absurdo. Com isso, e não pode ser a razão entre dois inteiros, como queriamos demonstrar.

Para mais sobre o número e, recomendamos fortemente [22].

APÊNDICE 3: A FUNÇÃO EXPONENCIAL E A CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

Na seção 3.4 vimos que as funções de tipo $C(t) = C_0 b^t$ são capazes de modelar problemas de capitalização contínua, como os propostos. Vamos, agora, caracterizar a função exponencial e, em seguida, a função de tipo exponencial. Notemos que as funções que buscávamos em tal seção deveriam ser crescentes ou decrescentes pois, sendo a taxa de juros constante, o capital ou só aumentaria ou só diminuiria a cada atualização. Começaremos esta parte do trabalho enunciando o *princípio de indução*, que já foi usado na seção 2.1.1 e será usado mais adiante: "Seja P uma propriedade válida para o número 1. Se o fato de P ser válida para um número natural n implicar em P ser válida também para $n+1$, então P vale para todos os números naturais". A seguir, demonstraremos um lema necessário à caracterização das funções desejadas.

Lema 1. *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em qualquer intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a^r \in [\alpha, \beta]$, ou seja, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Sem perda de generalidade, suponhamos a e α maiores que 1, pois os demais casos são tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem ilimitadamente, podemos obter M e n naturais tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \tfrac{\beta-\alpha}{a^M}\right)^n.$$

Ao extrairmos a raiz n-ésima, dos termos nesta última, e, em seguida, subtrair 1 e multiplicar por a^M, obtemos, respectivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \tfrac{\beta-\alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Daí,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{m/n}(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, ..., a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor que $\beta - \alpha$, comprimento do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, ao menos um desses extremos, digamos $a^{m/n}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. □

Teorema 4. *(Caracterização da função exponencial) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (ou seja, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalntes:*
(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ onde $a = f(1)$;
(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Precisamos mostrar que (1)⇒(2)⇒(3)⇒(1). Inicialmente, observemos que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (considerando $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. De fato, sendo $nr = m$, (1) nos permite escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

o que implica em $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Agora suponhamos, sem perda de generalidade, que f seja crescente (caso seja decrescente o raciocínio é análogo). Logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, também sem perda de generalidade, que seja $f(x) < a^x$ (o caso contrário é tratado de forma análoga). Então, como $f(x)$ e a^x são números reais, pelo Lema anterior, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, $f(x) < f(r)$ implica $x < r$. Ora, mas também temos que $a^r < a^x$, donde vem $r < x$, que é uma contradição. Com isso, não podemos ter x real tal que $f(x) \neq a^x$ e concluímos que (1)⇒(2).

Admitindo que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que, dados $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

mostrando que (2)⇒(3).

Por fim, mostremos que (3) implica que $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, o que faremos por indução sobre n. Se $n = 1$, temos $f(1 \cdot x) = x^1$.

Sendo $n = k$, consideremos que vale $f(kx) = f(x)^k$ e provaremos que vale o mesmo para $n = k+1$. Com efeito, tem-se

$$f[(k+1)x] = f(kx+x) = f(kx)\cdot f(x) = f(x)^k \cdot f(x) = f(x)^{k+1}$$

onde usamos a hipótese de indução. Para ver que isto também vale se $n \in \mathbb{Z}$, observemos que temos, para todo x real,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$$

ou seja, a função f só admite valores positivos e, assim, $f(0) = f(0+0) = f(0)\cdot f(0) = f(0)^2$ implica $f(0) = 1$. Daí, podemos escrever $f(0) = f[x + (-x)] = f(x)\cdot f(-x)$, donde vem

$$f(-x) = \frac{f(0)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}.$$

Finalmente, sendo p negativo, escrevamos $p = -n$. Assim,

$$f(px) = f(-nx) = f[n(-x)] = f(-x)^n = [f(x)^{-1}]^n = f(x)^{-n} = f(x)^p,$$

que conclui a demonstração de que (3)⇒(1) e a demonstração do teorema. □

Se uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial, ou seja, se $g(x) = b\cdot a^x$ para todo x real, com a e b contantes positivas, então para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$ os quocientes

$$\tfrac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \tfrac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema 5. *(Caracterização da função de tipo exponencial) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = b\cdot a^x$ para todo x real.*

Demonstração. Nitidamente, a hipótese feita equivale a supor que $i(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Como $g(x+h)/g(x) = [g(x+h)/b]/[g(x)/b]$, onde pomos $b = g(0) \neq 0$, podemos escrever $f(x) = g(x)/b$. Desse modo, f também é monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, ainda, com $f(0) = 1$. Observemos que vale a relação $i(h) = f(x+h)/f(x)$, que equivale a $i(h)\cdot f(x) = f(x+h)$, e que pondo $x = 0$ nesta, obtemos $i(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Daí, vemos que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x)\cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue do teorema anterior que $f(x) = f(1)^x = [g(1)/g(0)]^x = a^x$, logo $g(x) = b\cdot f(x) = b\cdot a^x$, como queríamos demonstrar. □

Apesar de já temos tratado da capitalização contínua na seção 3.4, vale a pena abordá-la novamente sob um novo ponto de vista. Seja $C(t)$ o capital no instante t, resultante da aplicação, a juros acumulados continuamente, de um capital inicial $C_0 = C(0)$. Seja, também, i a taxa nominal de juros por período (suposta constante). A variação desse capital, em um tempo h (em períodos), é dada por $C(t+h) - C(t)$ e a sua variação média por período é $[C(t+h) - C(t)]/h$. Assim, se desejamos calcular a taxa média de juros por período, fazemos

$$i = \frac{\frac{C(t+h)-C(t)}{h}}{C(t)}.$$

Mas, se estamos considerando uma taxa constante de juros, o que chamamos de taxa média pode ser visto, simplesmente, como taxa. Retomando o que vimos nas seções 2.1.1 e 3.4, se desejamos uma capitalização contínua, precisamos fazer com que o "tamanho" de cada um desses h períodos tenda a zero. Assim, a soma de qualquer quantidade desses períodos será uma soma de parcelas que tendem a zero e, com isso, tenderá a zero também. Ou seja, teremos h tendendo a zero e, daí, pelo fato de i ser constante, pode ser dada mesmo em um período infinitesimal, isto é

$$\begin{aligned} i &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{C(t+h)-C(t)}{h}}{C(t)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{C(t)} \cdot \frac{C(t+h) - C(t)}{h} \\ &= \frac{1}{C(t)} \lim_{h \to 0} \frac{C(t+h) - C(t)}{h} \\ &= \frac{1}{C(t)} \cdot C'(t). \end{aligned}$$

Notemos que $i = \frac{1}{C(t)} \cdot C'(t)$ é uma equação diferencial. Podemos integrar os dois membros de modo a descobrir uma função $C(t)$ que a satisfaça. Como consequência do teorema da regra da cadeia, sabemos que a derivada de $\ln C(t)$, com $C(t) > 0$, é $\frac{1}{C(t)} \cdot C'(t)$. Daí, concluímos que $\ln C(t) = it + k$, onde k é uma constante de integração tal que, fazendo $t = 0$, vem $k = \ln C(0)$. Com isso, $\ln C(t) - \ln C(0) = \ln C(t)/C(0) = it$. Tomando os dois lados como expoentes de uma mesma base, por exemplo e, que mais convém aqui, tem-se $e^{\ln \frac{C(t)}{C(0)}} = e^{it}$, que implica em $\frac{C(t)}{C(0)} = e^{it}$ e, finalmente, $C(t) = C(0) \cdot e^{it}$.

Para mais sobre função exponencial e capitalização contínua recomendamos [17] e [13].

APÊNDICE 4: QUESTÕES PARA REFLEXÃO SOBRE A DOCÊNCIA EM MATEMÁTICA E POSSIBILIDADES DE PESQUISAS FUTURAS

Como já citamos na introdução desta dissertação, alguns questionamentos que julgamos interessantes à reflexão por parte do professor de Matemática, mas não se relacionam diretamente com a parte central deste trabalho, foram deixadas para este apêndice. Mas já dissemos que é intenção nossa que tal leitura seja o mais simples e, também, rápida possível, para que possa atingir um maior número de leitores e, com isso, buscamos expor tais questões de forma breve e direta, deixando desdobramentos mais profundos a cargo das reflexões do leitor e de trabalhos futuros.

Colocando-se no lugar do aluno

Todo professor um dia já foi aluno. Além, é claro, de todo o estudo e experiência, é uma certa dose de tempo, esse tempo que permeia a parte central deste trabalho, que separa a fase discente da docente para os que escolhem tal carreira. É importantíssimo ao profissional do ensino ter atenção a isso para buscar o melhor equilíbrio entre "rigor e justiça", tentando, até mesmo, manter-se ligado aos questionamentos e atitudes que tinha quando aluno, de modo a entender o que cada aluno passa em seu período escolar. Pensando em Ensinos Fundamental e Médio, nos deparamos com desde crianças de apenas 6 anos, nos primeiros anos escolares, até jovens de 18 anos ou até mais, no caso de modalidades como EJA, sem contar outras peculiaridades além de idade. Uma boa educação/instrução depende de rigor, de cobrança, mas é impressindível o cuidado para que não ocorram excessos, que não se deixe de ser justo com o aluno, até para que possamos almejar que a escola seja um ambiente, de fato, democrático.

O que é Matemática e quem pode "ser um matemático"?

"Tem coragem para fazer uso da tua própria razão!"
Immanuel Kant

Tais perguntas são frequentemente efetuadas e deixadas sem resposta, ou respondidas de formas vagas, evasivas: uma fuga de algo que deve ser buscado, não ignorado. Mas neste trecho não expomos respostas para tais, mas ainda assim levantamos estes questionamentos por acreditarmos serem interessantes ao professor de Matemática e, até mesmo, para a indução de trabalhos futuros.

Em relação à primeira dessas questões, D'AMBROSIO, em [10], comenta o assunto:

> Já se disse que "matemática é aquilo que os matemáticos fazem, e matemáticos são aqueles que fazem matemática". A História da Matemática tem se apoiado nessa pseudo definição redundante.(...) No grego arcaico, a raiz *máthema* significa algo como aprender, estudar, explicar, conhecer. A palavra matemática, obviamente ligada a essa raiz, é usada na Antiguidade e na Idade Média, em sentidos muito variados. Como a entendemos hoje, ela apareceu na Europa pelo século XIV, e sua adoção é ampla a partir do século XVI. É comum dizer, e o conceituado *Dicionário Houaiss* adota essa generalidade vaga, que matemática é a "ciência que estuda objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles, procedendo por método dedutivo". Certo. Mas isso não é tudo. Prefiro examinar o fazer matemático como uma atividade **humana** mais geral (grifo nosso).

E, de fato, enxergar a Matemática escolar de forma mais humanística, aproximando-a da História e não desconectando da língua materna (vide seção 2.2.1), caracteriza um ótimo caminho na direção de dar algum sentido aos temas abordados, o que, ao menos, reduz a comum impressão entre seus estudantes de estar esta ciência num grau de abstração além de suas capacidades. Além disso, este ponto de vista permite quebrar o existente conformismo com o que já se sabe, tanto por parte do aluno quanto do professor, aguçando curiosidade e senso crítico e, ainda, aprimorando a capacidade de argumentação, fundamental para o método dedutivo antes citado. Mas cabe lembrar que, adimitindo que não haja tempo suficiente para que se aborde tudo que, aparentemente, propomos aqui, o professor tem a autonomia para julgar qual será a "razão" cabível entre motivação e desenvolvimento do conteúdo em suas aulas.

Em relação à segunda questão, ainda na mesma obra D'Ambrosio continua:

> No mundo acadêmico, principalmente a partir do século XVII, há uma forma de "profissionalização" de matemáticos. A produção desses matemáticos profissionais deve ser reconhecida por obedecer a critérios de rigor, de formalismo, e mesmo de métodos. Assim, fica muito bem estabelecido quem são os matemáticos, e qual a produção desses profissionais. (...) Mas há muita matemática que foi feita por indivíduos considerados "não-matemáticos", e essa situação continua. As idéias matemáticas são muito importantes e centrais no conhecimento humano para serem restritas a um grupo de profissionais reconhecidos como "matemáticos".

De fato, como o próprio D'Ambrósio cita, sujeitos tidos como "não matemáticos" já nos trouxeram importantes contribuições. Apesar de, pelo fato de D'Ambrósio ser um estudioso de etnomatemática, esta citação ser provavelmente sobre indivíduos de sociedades tidas como mais primitivas, cabe destacar aqui o Conde de Buffon que, segundo MACHADO, em [21], viveu no século XVIII, foi destacado naturalista francês e terá mais comentários adiante; e a "rivalidade" entre Descartes(1596-1650) e Fermat(1601-1665), visto que este último, de acordo com BOYER [3], "não era de modo algum um matemático profissinal", mas superou Descartes em suas empreitadas no que se entende por Geometria Analítica. Em seu livro *História da Matemática* ele conta:

> Fermat estudou direito em Toulouse, onde serviu no parlamento local, primeiro como advogado, mais tarde como conselheiro. Isso significava que era um homem ocupado (...). É uma pena que Fernat não tenha publicado quase nada em vida, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes.

Mais do que simplesmente alguém que, de alguma forma, "superou" o filósofo e matemático Descartes, um homem que aparentemente praticava a matemática por puro prazer em seu tempo livre foi um dos maiores nomes na história dessa ciência por suas diversas contribuições a Geometria Analítica, Aritmética e, até mesmo, alguns métodos que muito se aproximaram do Cálculo de Newton e Leibniz. Há relatos, inclusive, de reconhecimento, por parte de Newton, de influências das ideias de Fermat em seu trabalho. E cabe também a pergunta: não teriam a vivência jurídica e os conhecimentos mais humanísticos influenciado no sucesso de seu trabalho e, principalmente, na citada didática? Obviamente este tipo de questão é bem subjetiva e pode, até mesmo, ser tida como um tanto forçada, mas a intenção aqui é chamar atenção para o fato de termos em Fermat um sujeito que tratava constantemente com argumentações e dissertações fora da Matemática, em seu trabalho jurídico, o que pode tê-lo proporcionado, talvez, um maior sucesso que seu "oponente", apesar deste último também ser fortemente dotado de conhecimento humanístico.

Cronologia em Matemática

Podemos eleger a curiosidade humana como razão de tudo que conhecemos, hoje, como ciência. É essa inata vontade de saber, de descobrir, a maior motivadora pela busca do conhecimento. A Matemática vem, neste aspecto, como uma das formas mais primitivas de se representar eventos naturais, cotidianos. Mas o intelecto humano foi, ao longo da história, além de simplesmente observar e representar fatos naturais e se tornou, também, capaz de prever, de se antecipar aos mesmos, de se soltar do concreto, de abstrair. Assim, a capacidade humana foi expandindo cada vez mais seus limites. Mas observemos que o real precedeu o abstrato, o que é perfeitamente natural e, como educadores, precisamos ter cuidado para não tentar forçar esta abstração antes de termos bem fundamentada uma concepção do real, do "direto". Queremos, aqui, chamar atenção para a necessidade de se analisar cautelosamente a questão de ordenar os temas a serem abordados de forma a não introduzir conceitos de formas artificiais, ou seja, afastadas de suas origens e de reais significados, os quais achamos sempre ao analisar a história que cerca cada tema.

A plena compreensão de conceitos já estudados pelo aluno, mesmo que em tempos remotos, é necessária nessa construção, que deve ser gradativa. Para estar em acordo com a melhor velocidade dessa gradação o professor precisa ser muito atento aos seus alunos. Além disso, pode acabar sendo insensato, e até mesmo covarde, cobrar o entendimento do tópico "A", que depende do entendimento do tópico "B", se aluno não sabe nada sobre "B". São penosas certas "idas e vindas", que dependem de um acompanhamento muitas vezes individual, mas são necessárias se há a vontade, de aluno e professor, de seguir tal construção. Obviamente, trabalhar aspectos como este depende de um aparato escolar que vai além do professor e do aluno, mas ao enrijecer as grades escolares nesse sentido, a escola perde a oportunidade de chamar de volta ao conhecimento alguém que já esteja precocemente conforado com a sua perda.

A importância de uma postura auto crítica do docente

Muitos de nós, profissionais da educação, à época na qual escolhemos seguir este rumo, ouvimos conselhos contrários a tal escolha e até mesmo brados bem enfáticos e cheios de certeza quanto ao insucesso que viria com tal opção. E, de fato, ser professor no Brasil (assim como em tantos outros países) é sinônimo de algumas dificuldades. Mas não há profissão fácil de exercer quando a vontade é de não ser simplesmente mais um profissional da área mas, de alguma forma, ser um que faça diferença.

E se falamos de magistério, esbarramos em dois pontos cruciais: o conhecimento e a didática. É comum que professores sejam "rotulados" por seus alunos (ou, até mesmo, por outros professores) de acordo com o quanto sabem e quão bem sabem transmitir o que sabem. Há aqueles que não são considerados dos melhores por serem sábios, mas pouco didáticos, ou o oposto: levam muito jeito para transmitir mas pecam pelo conhecimento raso. Obviamente não há como mensurar tais características em busca de alguma classificação do profissional, mas não deveria o mesmo estar sempre atento em relação a estes dois pontos tão importantes? Será possível ensinar bem, discutir com certa profundidade e despertar interesse e senso crítico do estudante com muito traquejo, apesar de um conhecimento médio? Um conhecimento profundo de certa área, despreocupado com a questão do diálogo, da discussão de ideias, da valorização do conhecimento prévio do aluno é o suficiente para liderar uma sala de aula? Pois tais questionamentos devem estar sempre presentes entre as inquietações do professor para que ele não deixe nem de buscar aprofundar seus conhecimentos e nem de rever seus métodos e sua didática em sala de aula.

Existe Matemática inaplicável?

Num mundo globalizado e tão cientifíca e tecnologicamente amadurecido, é difícil enxergar até onde foram os avanços, as descobertas. Mas não saber exatamente o que já é conhecido, o que ainda se busca e o que está, digamos, num meio termo, pode servir de estímulo à uma mente curiosa. O intelecto, quando muito jovem, não se prende ao comodismo de não procurar algo que, por outro, já se encontrou: ele o busca novamente e goza o prazer da descoberta. E não há frustração quando o estudante descobre que sua recente empreitada de sucesso já fora percorrida anteriormente. Ainda assim ele vê em sua vitória um incentivo para outras investidas e, numa dessas, quem sabe uma inédita? Manter esta mentalidade ao longo da vida escolar do aluno até poderia substituir a pergunta que é título deste item (e, às vezes, alguns substituem), mas não o faremos aqui, apesar de já ser suficientemente válida esta simples disposição do ser humano quanto à possibilidade de descobertas.

Dentre os fascínios que pairam sobre a cabeça de um matemático estão os problemas em aberto, ou seja, aqueles que foram propostos ou conjecturados em algum momento, mas não houve quem encontrasse solução. Mas apesar da Matemática surgir de necessidades naturais humanas, tais problemas podem aparecer como puramente matemáticos, sem aplicações aparentes no cotidiano. Porém, em certos momentos esta impressão não se sustentou com o passar do tempo e, aquilo que parecia ser "Matemática pela Matemática" se mostrou ser matemática aplicável à vida.

Um formidável exemplo disto é o problema da agulha de Buffon, relatado por MACHADO em [21].

> Uma agulha de comprimento a é mantida horizontalmente a certa altura de uma folha de papel, também horizontal, onde se encontram riscadas retas paralelas, espaçadas por uma distância d(d não é menor do que a). Abandonando-se a agulha ao acaso, de certa altura, ao cair sobre o papel, é possível que ela corte alguma das retas riscadas ou que se situe completamente entre duas delas. Qual a probabilidade de que ela corte alguma das retas?

Tal probabilidade é dada por $\frac{2a}{\pi d}$ e, aparentemente, este problema não tem nenhuma utilidade prática. E, de fato, seus desdobramentos permaneceram por cerca de duzentos anos apenas na Matemática, até que, com uso de trabalhos do matemático alemão J. Radom(1887-1956), tais feitos culminaram no prêmio Nobel de Medicina, em 1979, por um físico e um engenheiro que aplicaram todo o conhecimento advindo desse problema na concepção de máquinas de tomografia comercializáveis: um grande avanço para a Medicina e, também, à Biologia Molecular e à Radioastronomia. Assim, certamente podemos dizer que existe Matemática inaplicada, mas inaplicável, só o tempo irá dizer, ou não.

É cabível, aqui, citar um projeto que vem acontecendo e tem nobres intenções relacionadas aos professores de Matemática. O Projeto Klein visa, entre outras coisas, "*produzir recursos para prover continuamente aos professores de Matemática, a estrutura, a profundidade, a conexão, a vitalidade, a aplicabilidade, a beleza e os valores da disciplina, de modo que sejam eles capazes de tanto satisfazer seu próprio gosto pela área como de transmitir a maravilha da disciplina a seus estudantes*"[3]. Como já dissemos nas Considerações Finais, é importante que a sala de aula se mantenha conectada ao meio acadêmico, tendo o professor como a mediação entre estas. Há muito

[3]http://klein.sbm.org.br/

material interessante, resultados de pesquisas e afins, que são muito enriquecedores quando chegam aos profissionais do ensino. Quanto mais próximos estiverem, de fato, os professores e as ciências, mais conhecimento ganharão os alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ATTALI, Jacques. **Os judeus, o dinheiro e o mundo**. 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2011.

[2] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da matemática**: tópicos para licenciatura e leitura em geral. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] BOYER, Carl B.; Merzbach, Uta C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

[4] BRASIL. **[Lei Darcy ribeiro (1996)]. LDB : Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional : lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.** 6. ed. Brasília : Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2011. Disponível em: <http://bd.camara.gov.br/bd/bitstream/handle/bdcamara/2762/ldb_6ed.pdf?sequence=7>. Acessado em fev/2013.

[5] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, MEC. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acessado em: 03 fev. 2013.

[6] CÁLCULO I: apostila do instituto de ciências exatas. [Juiz de Fora]. <http://www.ufjf.br/sandro_mazorche/files/2010/03/Cap%C3%ADtulo-5.pdf>. Acessado em: 04 jan. 2013.

[7] CARVALHO, José Murilo de. **Pontos e bordados: escritos de história e política.** Belo Horizonte: Ed. UFMG, 1998.

[8] CHOMSKY, Noam. **Linguagem e mente: pensamentos atuais sobre antigos problemas.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1998.

[9] COBRA, Marcos; RIBEIRO, Áurea. **Marketing: magia e sedução** São Paulo: Cobra, 2000. p. 83.

[10] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Uma história concisa da matemática no Brasil.** Petrópolis: Vozes, 2008.

[11] DANTAS, Wagner V. Custos bancários, modelo conceitual, sistemas e implementação. Dissertação (Mestrado em Controladoria e Contabilidade)−Departamento de Contabilidade Atuária, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994. p. 33-37

[12] DONATO, Veruska. Percentual de brasileiros inadimplentes é o maior em três anos. **Jornal Hoje**. São Paulo, jun. 2012. Disponível em: <http://g1.globo.com/jornal-hoje/noticia/2012/06/percentual-de-brasileiros-inadimplentes-e-o-maior-em-tres-anos.html>. Acessado em: 10 jan. 2013.

[13] FEIJÓ, Ricardo. **Matemática financeira com conceitos econômicos e cálcilo diferencial: utilização da HP-12C e planílha Excel.** São Paulo: Atlas, 2009.

[14] GRAHL, João Arthur Pugsley. Lógica de Port-Royal: Das oraçoes complexas relativas (traduçao e análise do capítulo VIII, parte I). Monografia (Graduação em Letras)−Universidade Federal do Paraná. Disponível em: <http://www.humanas.ufpr.br/portal/arquivos/Joao.pdf>. Acessado em: 01fev. 2013.

[15] JOZSEF, Robert. **A origem do dinheiro**. 2.ed. São Paulo: Global, 1989.

[16] LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**: Funções de uma variável. 9.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática Universitária)

[17] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio - volume 1**. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[18] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio - volume 2**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[19] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática** e outras histórias. Rio de Janeiro: 1991.

[20] LOPEZ, Robert Sabatino; RAYMOND, Irving Woodworth; CONSTABLE, Olivia Remie. In: Robert Sabatino. **Medieval trade in the Mediterranean world**: Illustrative documents. New York: Columbia University Press, 2001.

[21] MACHADO, Nílson José. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação Mútua. 5.ed. São Paulo: Cortez, 2001.

[22] MAOR, Eli. **e: a história de um número**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

[23] MORETTO, Vasco Pedro. **Construtivismo**: a produção do conhecimento em aula. 4.ed. Rio de Janeiro: DPA, 2006.

[24] MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo; ZANI, Scheila C. **Progressões e Matemática Financeira.** Rio de Janeiro: 1993.

[25] NAKAGAWA, Fernando. Brasileiros endividados são 60,9 milhões. **Estadão**, Economia&Negócios. São Paulo, set.2012. Disponível em: <http://economia.estadao.com.br/noticias/economia%20brasil,-brasileiros-endividados-sao-609-milhoes-,125138,0.htm>. Acessado em: 02 jan. 2013.

[26] NOVAES, Rosa Cordelia Novellino de. Uma abordagem visual para o ensino de matemática financeira no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)−Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: < http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/18%20Rosa%20Novellino.pdf>. Acessado em: 23 Jan. 2013.

[27] ORIGEM do dinheiro. Disponível em: <http://www.casadamoeda.gov.br/portalCMB/menu/cmb/sobreCMB /origem-dinheiro.jsp?sbMuseu=active>. Acessado em: 21 jan. 2013.

[28] ORIGEM e Evolução do Dinheiro. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/?origemoeda>. Acessado em: jan. 2013.

[29] REIFNER, Udo; SCHELHOWE, Anne. Article: Financial Education. **Journal of Social Science Education Volume 9, Number 2, 2010, pp. 3242**. Disponível em: <http://www.jsse.org/index.php/jsse/article/view/1121/1024>. Acessado em: 10 Jan. 2013.

[30] SERRA, Edgar Vieira Machado. Uma proposta para o ensino de capitais na abordagem de jogos de empresas. Dissertação (Mestrado)−Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

[31] SHAKESPEARE, William. **O Mercador de Veneza**, trad. de "The Merchant of Venice" por Quintanilha, F. E. G. - Lisboa: Presença, 1971. Uma versão on-line é disponível em <http://www.helenabarbas.net/traducoes/Mercador_Veneza_WShakesp_HBarbas.pdf>. Acessado em: 05 fev. 2013.

[32] SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica**: A questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.(Coleção Perspectivas em Educação Matemática)