



Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física

**Thiago Ferreira da Silva Soares**

**Modelo Cosmológico do Tipo Kantowski-Sachs com Gás de Chaplygin  
Generalizado**

Juiz de Fora

2022

Thiago Ferreira da Silva Soares

Modelo Cosmológico do Tipo Kantowski-Sachs com Gás de Chaplygin  
Generalizado

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Física da Universidade  
Federal de Juiz de Fora, como requisito  
parcial para obtenção do título de mestre

Orientador: Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ferreira da Silva Soares, Thiago.

Modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com gás de Chaplygin generalizado / Thiago Ferreira da Silva Soares. -- 2022.  
61 p. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2022.

1. Modelo Cosmológico Anisotrópico. 2. Kantowski-Sachs. 3. Gás de Chaplygin Generalizado. 4. Parâmetro de Anisotropia. 5. Parametrização de Misner. I. de Oliveira Neto, Gil, orient. II. Título.

**Thiago Ferreira da Silva Soares**

**"Modelo Cosmológico do Tipo Kantowski-Sachs com Gás de Chaplygin Generalizado"**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 19 de agosto de 2022.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof.ª Dr.ª Maria de Fátima Alves da Silva**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

**Prof. Dr. Ilia Chapiro**

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 04/08/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Professor(a)**, em 19/08/2022, às 16:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro, Professor(a)**, em 19/08/2022, às 19:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13](#)



[de novembro de 2020.](#)

---



Documento assinado eletronicamente por **Maria de Fátima Alves da Silva, Usuário Externo**, em 22/08/2022, às 15:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.](#)

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0894166** e o código CRC **84939841**.

---

## Agradecimentos

- A toda minha família, pela força, perseverança e apoio.
- Aos meus amigos e amigas que tive o privilégio de conhecer durante o curso de Física, Vivian, Taynara, Francisco, Zé, Jean, Chirico, Fernando, Robinho, Roberto, Igor e tantos outros que estiveram presentes durante esta longa caminhada.
- Aos meus amigos de longa data Maicon e Sávio, que sempre me apoiaram nos momentos bons e ruins.
- Ao meu professor Gil pela orientação, pela paciência, pela compreensão e pela amizade.
- Ao professor e amigo Thales Costa Soares, que tanto me incentivou e motivou a continuar na Física.
- A todos os professores do curso de Física do IF Sudeste JF, em especial aos professores Fabrício, Victor e José Antônio.
- A Universidade Federal de Juiz de Fora, ao Programa de Pós-Graduação em Física e ao órgão financiador CAPES pelo investimento confiado a mim.

## Resumo

Nesta dissertação estudamos a dinâmica de um universo descrito por um modelo cosmológico anisotrópico e homogêneo do tipo Kantowski-Sachs, onde o conteúdo material é constituído por um fluido de radiação e um gás de Chaplygin. Esse último representando a energia escura do universo, assim sendo responsável pelo processo de expansão acelerada. Foi utilizado a parametrização de Misner para reescrever a métrica em termos de um fator de escala  $a(t)$  e um parâmetro  $b(t)$ , a qual descreve a anisotropia. Resolvemos as equações de Einstein para o modelo e analisamos como as variações dos parâmetros relacionados ao conteúdo material e as condições iniciais do universo influenciam na dinâmica de  $a(t)$  e  $b(t)$ . Percebemos a existência de soluções do tipo *Big Crunch* em que o universo de mantém anisotrópico durante toda sua evolução e a existência de soluções expansivas em que o universo passa pelo processo de isotropização, assim se tornando isotrópico em algum momento de sua evolução. Por se tornarem isotrópicas, as soluções expansivas podem representar o Universo atual.

Palavras-chaves: Cosmologia. Métrica de Kantowski-Sachs. Gás de Chaplygin. Parâmetro de anisotropia. Parametrização de Misner

## Abstract

In this dissertation we study the dynamics of an Universe described by an anisotropic and homogeneous cosmological model of the Kantowski-Sachs type, where the material content is the radiation fluid and a Chaplygin gas. The latter representing the dark energy, which is the source of the accelerating expansion process. Using the Misner's parametrization we rewrote the metric in terms of the scale factor  $a(t)$  and a parameter  $b(t)$ , which is associated with the anisotropy. By resolving the Einstein's equations, we analyzed how the changes in the parameters associated with the material content and the initial conditions of the Universe affects the dynamics of  $a(t)$  and  $b(t)$ . We noticed the existence of Big Crunch type solutions in which the Universe stays anisotropic at any stage of evolution, we also noticed the existence of expansive solutions in which the process of isotropization occurs and the Universe become isotropic at some point. By become isotropic the expansive solutions can represent the current Universe.

Keywords: Cosmology. Kantowski-Sachs metric. Chaplygin gas. Anisotropy parameter. Misner's parametrization



## Lista de figuras

Figura 1 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $A$ . . . . .	34
Figura 2 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $A$ . . . . .	34
Figura 3 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $A$ . . . . .	35
Figura 4 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $A$ . . . . .	35
Figura 5 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $B$ . . . . .	37
Figura 6 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $B$ . . . . .	37
Figura 7 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $B$ . . . . .	38
Figura 8 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $B$ . . . . .	38
Figura 9 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $\alpha$ . . . . .	39
Figura 10 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $\alpha$ . . . . .	39
Figura 11 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $\alpha$ . . . . .	41
Figura 12 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $\alpha$ . . . . .	41
Figura 13 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $C_r$ . . . . .	42
Figura 14 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $C_r$ . . . . .	42
Figura 15 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $C_r$ . . . . .	44

Figura 16 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $C_r$ . . . . .	44
Figura 17 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $a_0$ . . . . .	45
Figura 18 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $a_0$ . . . . .	45
Figura 19 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $a_0$ . . . . .	46
Figura 20 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $a_0$ . . . . .	46
Figura 21 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $b_0$ . . . . .	48
Figura 22 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $b_0$ . . . . .	48
Figura 23 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $b_0$ . . . . .	49
Figura 24 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $b_0$ . . . . .	49
Figura 25 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $da_0$ . . . . .	51
Figura 26 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $da_0$ . . . . .	51
Figura 27 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $da_0$ . . . . .	52
Figura 28 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções expansivas com a variação de $da_0$ . . . . .	52
Figura 29 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $db_0$ . . . . .	54
Figura 30 – Evolução do fator de anisotropia $b(t)$ para soluções <i>Big Crunch</i> com a variação de $db_0$ . . . . .	54
Figura 31 – Evolução do fator de escala $a(t)$ para soluções expansivas com a variação de $db_0$ . . . . .	55

Figura 32 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a  
variação de  $db_0$  . . . . . 55

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação do parâmetro $A$ . . . . .	34
Tabela 2 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro $A$ . . . . .	35
Tabela 3 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação do parâmetro $B$ . . . . .	36
Tabela 4 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro $B$ . . . . .	38
Tabela 5 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação do parâmetro $\alpha$ . . . . .	40
Tabela 6 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro $\alpha$ . . . . .	40
Tabela 7 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação do parâmetro $C_r$ . . . . .	43
Tabela 8 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro $C_r$ . . . . .	43
Tabela 9 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação da condição inicial $a_0$ . . . . .	45
Tabela 10 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial $a_0$ . . . . .	47
Tabela 11 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação da condição inicial $b_0$ . . . . .	48
Tabela 12 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial $b_0$ . . . . .	49
Tabela 13 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação da condição inicial $da_0$ . . . . .	51
Tabela 14 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial $da_0$ . . . . .	52
Tabela 15 – Soluções <i>Big Crunch</i> para a variação da condição inicial $db_0$ . . . . .	53
Tabela 16 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial $db_0$ . . . . .	55

## Notações e Convenções

Ao longo do presente texto será convencionado que:

A derivada temporal de uma função  $g(t)$  será representada por  $\dot{g}(t)$ .

Dois índices repetidos, sendo um subscrito e o outro sobrescrito, denotam soma.

Índices gregos variam de 0 a 3.

Índices latinos variam de 1 a 3.

A métrica possui assinatura  $(-, +, +, +)$ .

O determinante do tensor métrico será denotado por  $g$ .

As constantes  $c$  e  $8\pi G$  serão iguais a 1.

A derivada parcial de uma quantidade  $T$  em relação a coordenada  $x^\beta$  será denotada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T.$$

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	15
<b>2</b>	<b>Elementos de Relatividade Geral</b>	17
2.1	<i>Tensor Métrico</i>	17
2.2	<i>Derivada Covariante</i>	18
2.3	<i>Tensor de Curvatura</i>	18
2.4	<i>Tensor de Einstein</i>	19
2.5	<i>Equações de Campo de Einstein a Partir do Princípio Variacional</i>	20
2.6	<i>Cosmologia Relativística</i>	21
2.7	<i>Gás de Chaplygin</i>	24
<b>3</b>	<b>Metrica de Kantowski-Sachs</b>	26
3.1	<i>Parametrização de Misner</i>	27
3.2	<i>Tensor de Energia-Momento</i>	28
3.3	<i>Curvatura</i>	29
3.4	<i>Equações de Campo</i>	30
<b>4</b>	<b>Soluções Para as Equações Dinâmicas do Modelo</b>	32
4.1	<i>Variação do Parâmetro <math>A</math></i>	33
4.1.1	<i>Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i></i>	33
4.1.2	<i>Soluções Expansivas</i>	34
4.2	<i>Variação do Parâmetro <math>B</math></i>	35
4.2.1	<i>Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i></i>	36
4.2.2	<i>Soluções Expansivas</i>	37
4.3	<i>Variação do Parâmetro <math>\alpha</math></i>	38
4.3.1	<i>Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i></i>	38
4.3.2	<i>Soluções Expansivas</i>	40
4.4	<i>Variação do Parâmetro <math>C_r</math></i>	41
4.4.1	<i>Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i></i>	41
4.4.2	<i>Soluções Expansivas</i>	43
4.5	<i>Variação da Condição Inicial <math>a_0</math></i>	44

4.5.1	Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i> . . . . .	44
4.5.2	Soluções Expansivas . . . . .	46
4.6	<i>Variação da Condição Inicial <math>b_0</math></i> . . . . .	47
4.6.1	Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i> . . . . .	47
4.6.2	Soluções Expansivas . . . . .	48
4.7	<i>Variação da Condição Inicial <math>da_0</math></i> . . . . .	50
4.7.1	Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i> . . . . .	50
4.7.2	Soluções Expansivas . . . . .	51
4.8	<i>Variação da Condição Inicial <math>db_0</math></i> . . . . .	52
4.8.1	Soluções do Tipo <i>Big Crunch</i> . . . . .	53
4.8.2	Soluções Expansivas . . . . .	54
5	<b>Conclusão</b> . . . . .	56
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	58

## 1 Introdução

A cosmologia relativística possui seu desenvolvimento a partir de três pilares que são: o princípio cosmológico, a relatividade geral e o postulado de Weyl [1]. O princípio cosmológico diz que modelos que descrevem o universo, devem ser baseados em seções espaciais tridimensionais homogêneas, que irão formar o pano de fundo para as formações cósmicas [2]. Impomos que as evidências observacionais de um fenômeno cosmológico, serão as mesmas para diferentes observadores em diferentes localidades no universo. A homogeneidade é uma característica central para a maneira que interpretamos a radiação cósmica de fundo em micro-ondas, que são os resquícios do *Big Bang* [3], e para o entendimento da distribuição espacial das galáxias. Evidências observacionais da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, indicam que o universo é isotrópico, porém esse poderia não ser o caso nos primórdios do Universo, quando as temperaturas eram tão altas que os átomos não conseguiam se formar de maneira estável. A métrica de Kantowski-Sachs (KS) [4] permite um modelo de universo que começa de forma anisotrópica, porém com o passar do tempo, passa a se comportar de maneira isotrópica devido ao processo de isotropização. O espaço-tempo de KS é muito estudado em cosmologia, como pode ser visto, por exemplo, nas seguintes referências [5–16].

A relatividade geral foi desenvolvida por Einstein em 1915 [17], essa teoria descreve o comportamento do espaço-tempo devido a presença de matéria e radiação. Einstein introduziu em suas equações de campo uma constante cosmológica  $\Lambda$ , com o propósito de contrabalançar os efeitos gravitacionais que são sempre atrativos, assim obtendo um universo estático. Em 1929 Hubble [18] analisando o desvio para o vermelho de algumas galáxias, descobriu que quanto mais distante é a localização de uma galáxia, maior será seu desvio para o vermelho, isso implica que objetos mais distantes estão se afastando com maior velocidade e como consequência o universo está se expandindo. Em 1998 dois grupos independentes, Supernova Cosmology Project [19] e High-Z Supernova Search Team [20], conseguiram medir a partir de análise de supernovas, que a expansão do Universo está ocorrendo de maneira acelerada. Para ocorrer uma aceleração no processo de expansão do universo, se faz necessário introduzir um componente na distribuição de matéria que possua grande pressão negativa, essa componente é conhecida como energia escura. Pesquisas recentes em cosmologia, apontam que o universo possui (em larga escala) uma forma plana



e é formado por até 70% de energia escura [21], que está relacionada com a constante cosmológica ou outras formas, como um campo escalar ou um gás de Chaplygin.

O postulado de Weyl afirma que as partículas que estão no substrato se propagam no espaço-tempo em geodésicas temporais, divergindo em um ponto no infinito passado ou futuro. O postulado de Weyl permite interpretar o universo como um fluido perfeito que permeia todo o espaço, com as galáxias se movimentando de maneira análoga a partículas que estão sobre esse fluido.

Neste trabalho, apresentamos um modelo de universo anisotrópico e homogêneo a partir da métrica de KS, que será constituído por um fluido de radiação, que descreve a matéria presente no universo primordial e um gás de Chaplygin generalizado, que será responsável pelo processo de expansão acelerada. O modelo apresenta duas formas de evolução: na primeira forma o fator de escala evolui até um ponto máximo e então retorna para zero, o que caracteriza uma evolução do tipo *Big Crunch*. Na segunda forma, o universo se expande indefinidamente e verificamos que para esse caso, o modelo passa pelo processo de isotropização, assim se tornando isotrópico e podendo representar o universo atual.

O presente texto está dividido da seguinte maneira: no segundo capítulo, apresentamos uma revisão de relatividade geral e cosmologia relativística, que irá auxiliar na determinação dos elementos necessários para se obter as equações dinâmicas. No terceiro capítulo, apresentamos um universo anisotrópico e homogêneo a partir da métrica de KS, introduzimos a parametrização de Misner que irá auxiliar na visualização do processo de isotropização e obtemos as equações dinâmicas do modelo estudado. No quarto capítulo, apresentamos as soluções para as equações dinâmicas e verificamos como as variações dos parâmetros e das condições iniciais, irão influenciar na evolução do universo, analisamos a possibilidade de ocorrer o processo de isotropização nas soluções obtidas.

## 2 Elementos de Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral é a principal ferramenta para o estudo dos efeitos gravitacionais. Desenvolvida em 1915 por Albert Einstein, essa teoria promove o casamento entre a geometria em espaços curvos e a Física. Neste capítulo iremos desenvolver os principais elementos da relatividade geral que serão utilizados ao longo do texto. Uma exposição mais completa sobre o tema pode ser encontrada nas referências [1, 22].

### 2.1 Tensor Métrico

A métrica é a forma como se mede a distância entre dois pontos que estão no espaço. De forma genérica, a determinação do comprimento elementar  $ds$  de um arco é encontrada a partir da expressão:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (1)$$

em que o tensor métrico é dado por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2)$$

Como exemplo, no espaço de Minkowski, a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é medida a partir de:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3)$$

e o seu tensor métrico é dado por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

As quantidades de um espaço que possuem índice podem se apresentar de três maneiras: quando possuem os índices em baixo  $T_{\mu\nu}$  são denominadas covariante, quando possuem índices em cima  $T^{\mu\nu}$  são denominadas de contravariante e quando possuem um índice em cima e o outro em baixo  $T^\mu_\nu$ , são chamadas de mista. O tensor métrico é o responsável por levantar ou abaixar os índices de um objeto. Assim as formas covariante e contravariante de um objeto  $u_\mu$  se relacionam como:

$$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu \quad u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu. \quad (5)$$

## 2.2 Derivada Covariante

Em espaços-tempos curvos precisamos generalizar o conceito de derivada, para levar em conta a variação dos vetores de base em cada ponto. Para um quadri vetor  $u_\mu$ , a derivada covariante será dada por:

$$\nabla_\nu u_\mu = \partial_\nu u_\mu - u_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \quad (6)$$

Em que  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é o símbolo de Christoffel definido como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (7)$$

Embora possua índices, o símbolo de Christoffel não deve ser confundido com um tensor, ele é uma função que descreve a conexão da métrica do espaço e é o responsável por monitorar possíveis mudanças nos vetores de base. Assim, para espaços cujos vetores de base sejam sempre constantes como o espaço de Minkowski (3), o símbolo de Christoffel será nulo.

É possível mostrar que o objeto  $\nabla_\nu u_\mu$  se transforma como um tensor, assim definindo:

$$T_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu u_\mu, \quad (8)$$

se observa que a derivada covariante desse tensor será dada por:

$$\nabla_\kappa T_{\mu\nu} = \partial_\kappa T_{\mu\nu} - T_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - T_{\mu\lambda} \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda, \quad (9)$$

que é a expressão para a derivada covariante do tensor covariante de ordem 2.

## 2.3 Tensor de Curvatura

O conceito de curvatura surge a partir da necessidade de definir um transporte paralelo de vetores no espaço. O transporte paralelo transmite a ideia de que, ao se transportar um vetor tangente paralelo a si mesmo ao longo de uma curva fechada, o vetor irá voltar a ser o mesmo em cada ponto da curva se o espaço for plano, porém o mesmo não acontece caso o espaço seja curvilíneo. Assim, surge a necessidade de procurar uma quantidade que irá indicar o quanto as componentes de um vetor mudaram durante o transporte paralelo, essa quantidade será o tensor de Riemann. A partir da seguinte expressão:

$$\nabla_\nu \nabla_\kappa u_\mu - \nabla_\kappa \nabla_\nu u_\mu = u_\lambda R_{\mu\nu\kappa}^\lambda, \quad (10)$$

o tensor de Riemann será definido como:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} - \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\kappa}^{\lambda}. \quad (11)$$

O tensor de Riemann pode ser expresso em sua forma covariante como:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho}R_{\mu\nu\kappa}^{\rho} = g_{\lambda\rho} \left[ \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\rho} - \partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\kappa}^{\rho} \right]. \quad (12)$$

Sendo  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$  anti-simétrico no primeiro par e no segundo par de índices e simétrico na troca de dois pares de índice. A contração do primeiro índice com o terceiro no tensor (12) irá gerar o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\nu\lambda}R_{\lambda\mu\nu\kappa}, \quad (13)$$

que mostra o quanto a forma do espaço se deforma quando algo se move ao longo de uma geodésica. E realizando a contração nos dois índices do tensor de Ricci, se encontra a curvatura escalar,

$$R = g^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa}. \quad (14)$$

#### 2.4 Tensor de Einstein

A identidade de Bianchi é uma combinação linear de primeira derivada covariante do tensor de Riemann e é expressa como:

$$\nabla_{\lambda}R_{\alpha\beta\eta\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\beta\lambda\eta} + \nabla_{\eta}R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0. \quad (15)$$

A partir da identidade de Bianchi se obtém:

$$\nabla_{\alpha}G^{\alpha\beta} = 0, \quad (16)$$

em que:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R, \quad (17)$$

é o tensor de Einstein.

A equação (16) diz que o tensor de Einstein possui divergência nula, essa característica é importante, pois irá permitir descrever a curvatura de um espaço-tempo compatível com a conservação de energia e momento.

### 2.5 Equações de Campo de Einstein a Partir do Princípio Variacional

Agora que introduzimos as ideias geométricas necessárias para o entendimento da relatividade geral, vamos obter as equações dinâmicas dessa teoria. A relatividade geral é baseada em um espaço-tempo pseudo riemaniano quadridimensional, que possui uma coordenada temporal e três coordenadas espaciais. As equações de campo são obtidas a partir da variação da ação de Einstein-Hilbert que é dada por:

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} R + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g}, \quad (18)$$

em que:  $\mathcal{L}_M$  descreve todos os campos de matéria que aparecem na teoria.

Definindo o tensor energia-momento como:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (19)$$

e variando a ação (18) se obtém as equações de campo de Einstein [23]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = T_{\mu\nu}. \quad (20)$$

A expressão acima forma um conjunto de 16 equações no total, porém devido a simetria dos tensores presentes em (20), apenas 10 dessas equações serão independentes. A equação (20) irá descrever como a geometria do espaço-tempo (lado esquerdo da equação) se comporta a partir da presença de matéria e energia (lado direito da equação).

A constante cosmológica  $\Lambda$  na equação (20), foi posta ad-hoc por Einstein, que procurava um termo para contrabalançar os efeitos gravitacionais, que são sempre atrativos. Com a descoberta de que o universo está em expansão acelerada, a constante cosmológica passa a ser uma candidata a explicar o motivo da aceleração no processo de expansão. A constante cosmológica pode ser interpretada como parte do tensor de energia-momento se fizermos:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (21)$$

esse tensor irá descrever um estado de vácuo que possui densidade de energia  $\rho_{vac}$  e uma pressão  $p_{vac}$ , que irão se relacionar a partir da seguinte equação de estado:

$$p_{vac} = -\rho_{vac}, \quad (22)$$

ou seja, a constante cosmológica é equivalente a existência de uma pressão negativa e isso permite uma aceleração do processo de expansão do universo.

## 2.6 Cosmologia Relativística

O advento da relatividade geral, permite o estudo da cosmologia relativística que irá descrever o comportamento do universo desde seus primórdios, passando pelos dias atuais até o seu "fim". A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) descreve um universo espacialmente homogêneo e isotrópico, com as distâncias entre seus pontos podendo se expandir ou se contrair como função da coordenada temporal. Assim a métrica FRW possui o princípio cosmológico incorporado em suas características. Essa métrica é dada por [1]:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (23)$$

em que:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (24)$$

é o diferencial de ângulo sólido. O termo  $k$  é o coeficiente de curvatura,  $k = 0$  representa um espaço plano,  $k = -1$  representa uma curvatura negativa e  $k = 1$  representa uma curvatura positiva. O termo  $a(t)$  é o fator de escala que irá permitir a expansão ou a contração dos pontos determinados pela parte espacial.

Quando analisado em larga escala, um universo homogêneo apresenta a mesma densidade média de matéria em todos os locais. Do ponto de vista observacional, não é possível fazer observações diretas da homogeneidade do universo, pois apenas conseguimos fazer observações a partir do interior do cone de luz e não em sua superfície. Assim o que se pode realizar são observações diretas da isotropia, isso é, uma evidência observacional deve ser a mesma em qualquer direção do espaço, e assim fazer a conexão entre homogeneidade e isotropia assumindo o princípio copernicano. Esse princípio diz que os seres humanos que estejam no planeta Terra ou em qualquer outro local do sistema solar, não possuem privilégios observacionais em relação ao universo, ou seja, esse princípio implica que se o universo parece isotrópico quando observado do planeta Terra, então se pode assumir que o universo será majoritariamente homogêneo.

Utilizando a expressão (7), podemos encontrar os símbolos de Christoffel para a métrica de FRW que serão dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \text{sen}^2\theta \\ \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2} \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2) \quad \Gamma_{33}^1 = -r \text{sen}^2\theta(1-kr^2) \\ \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta \cos\theta \\ \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \text{cotg}\theta. \end{array} \right. \quad (25)$$

Em posse dos símbolos de Christoffel, é possível encontrar a curvatura de Ricci do espaço descrito pela métrica (23), que será dado por:

$$R_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2k)r^2 \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A partir do tensor de Ricci é possível encontrar a curvatura escalar, que será dada por:

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (27)$$

Assim, encontramos as componentes geométricas necessárias para o estudo de um espaço homogêneo e isotrópico. Vamos agora discutir o postulado de Weyl, que anuncia que o espaço pode ser pensado como um fluido perfeito, com as galáxias se movimentando de forma análoga as partículas sobre esse fluido. Um fluido perfeito é um fluido que pode ser totalmente caracterizado pela sua densidade de repouso  $\rho$  e pela sua pressão isotrópica  $p$ . O fluido perfeito não apresenta viscosidade e não conduz calor. O tensor de energia-momento para um fluido perfeito relativístico é dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (28)$$

em que  $U^\mu$  é a quadrivelocidade do fluido. Utilizando  $g^{\mu\nu}$  como a métrica de FRW (23) e a quadrivelocidade no sistema de coordenadas do substrato  $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ , se encontra que o tensor de energia-momento para esse espaço-tempo será:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-kr^2}{a(t)^2}\right)p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{a(t)^2 r^2}\right)p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{a(t)^2 r^2 \text{sen}^2\theta}\right)p \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Para que o tensor de energia-momento seja conservado, é necessário que ele não sofra variações em nem uma de suas componentes, isso significa que sua derivada covariante deve ser nula:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (30)$$

Realizando a expressão acima, encontramos a equação de conservação do tensor energia-momento para o fluido:

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (31)$$

Para um fluido perfeito sua pressão e densidade estão relacionadas por:

$$p = \omega\rho, \quad (32)$$

assim substituindo (32) em (31) se encontra que:

$$\rho = C a^{-3(\omega+1)}, \quad (33)$$

em que  $C$  é uma constante associada a densidade de energia e o valor de  $\omega$  depende da natureza do fluido.

Para  $\omega = 0$  se têm um fluido de poeira, ou seja, matéria não-relativística que possui pressão nula, a matéria escura fria (CDM) e os bárions são exemplos de fluido de poeira. Para  $\omega = -1$  se têm a energia do vácuo, que corresponde a um fluido que possui pressão negativa e está associada a constante cosmológica  $\Lambda$  ou a possibilidade de uma energia do vácuo dinâmica que é a energia escura. Quando  $\omega = \frac{1}{3}$  se têm um fluido de radiação que é descrito por partículas relativísticas quentes como fótons, a radiação era a principal forma de energia nos primórdios do universo.

Utilizando os valores das curvaturas (26) e (27), em conjunto com o tensor momento energia (28), na equação de campo de Einstein (20), se obtém as seguintes expressões:

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = \rho, \quad (34a)$$

$$\frac{2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = -p. \quad (34b)$$

As equações acima são conhecidas como equações de Friedmann e descrevem a evolução de um universo homogêneo e isotrópico a partir do fator de escala  $a(t)$ . Essas equações apresentam uma singularidade quando o fator de escala é nulo  $a = 0$ , essa singularidade é interpretada como o *Big Bang* que deu origem ao universo. Essas equações também representam a conservação da energia térmica do sistema, se derivarmos ambos os lados da



expressão (34a) em relação ao tempo, multiplicarmos ambos os lados da expressão (34b) em relação a  $-\frac{3}{8\pi} \frac{\dot{a}}{a}$  e somarmos o resultado, se obtém:

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho) \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (35)$$

que é o mesmo resultado obtido a partir da conservação do tensor energia-momento (31). Multiplicando ambos os lados da expressão (35) por  $a^3$  e organizando os termos se obtém:

$$\frac{d}{dt} (\rho a^3) + p \frac{d}{dt} (a^3) = 0. \quad (36)$$

Se as partículas (galáxias) residem no substrato que possui volume  $V$ , a dinâmica nesse substrato ocorrerá em  $V \sim a^3(t)$ , e como a energia total nesse volume é descrita pela expressão  $E = \rho V$ , se tem que a equação acima pode ser escrita como:

$$dE + p dV = 0, \quad (37)$$

que é a primeira lei da termodinâmica para processos reversíveis e mostra como a energia das partículas do substrato é conservada.

Observações mostram que embora a pressão  $p$  inclua diversos movimentos de estrelas e galáxias, o valor de  $p$  é muito pequeno quando comparado ao valor da densidade  $\rho$ , devido a presença da matéria no universo, de fato, a proporção  $\frac{p}{\rho}$  possui ordem de grandeza em aproximadamente  $10^{-5}$  ou  $10^{-6}$  [1].

## 2.7 Gás de Chaplygin

Introduzido por Chaplygin [24], como aproximação para o cálculo da força de elevação na asa de um avião em aerodinâmica, o gás de Chaplygin é um fluido perfeito caracterizado por possuir uma pressão negativa. A utilização do gás de Chaplygin em cosmologia, surge a partir do conhecimento que nosso universo está em processo de expansão acelerada e uma das maneiras de explicar essa aceleração, é a partir da presença de uma substância que tenha como característica uma pressão negativa. Assim o gás de Chaplygin se torna um candidato para a descrição da energia escura do universo [25–33]. O gás de Chaplygin também aparece em teoria das cordas ao se estudar a estabilização de branas em buracos negros [34, 35]. Uma consequência dos modelos cosmológicos com a presença do gás de Chaplygin é a sua evolução cósmica, que permite passar de uma fase inicial em que o universo apresenta vastas quantidades de poeira, para uma fase em

que a matéria se condensa em corpos rígidos, formando galáxias com o surgimento de uma constante cosmológica, até passar para a fase final que é o universo De Sitter, que representa um espaço plano, cujos os efeitos da matéria ordinária podem ser ignorados de tal forma que toda a dinâmica do universo fica em razão da constante cosmológica.

A equação de estado do gás de Chaplygin é dada por:

$$p_c = -\frac{A}{\rho_c^\alpha}, \quad (38)$$

em que o índice  $c$  representa grandezas associadas ao gás de Chaplygin,  $p_c$  é a pressão,  $A$  é uma constante positiva,  $\rho_c$  é a densidade de energia do gás e  $\alpha$  é um parâmetro que assume um valor dentro do intervalo  $0 < \alpha \leq 1$ . Neste trabalho, estudaremos o caso em que o parâmetro  $\alpha$  pode assumir qualquer valor dentro do intervalo  $0 < \alpha \leq 1$ , esse caso é conhecido como gás de Chaplygin generalizado, sendo que para  $\alpha = 1$  se obtém o gás de Chaplygin usual.

Substituindo a equação de estado do gás de Chaplygin (38) na expressão da conservação de energia do fluido (35) e realizando as integrações, se obtém que:

$$\rho_c = \left( A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (39)$$

Assim, obtemos uma expressão que mostra de forma explícita a dependência da densidade  $\rho_c$  com o fator de escala  $a$ .

Vamos analisar os possíveis casos da expressão (39). Se fator de escala  $a$  for muito pequeno, se tem que  $A \ll \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} \rightarrow a^{3(\alpha+1)} \ll \frac{B}{A}$ , logo (39) pode ser aproximada como:

$$\rho_c \sim \frac{B^{\frac{1}{\alpha+1}}}{a^3}, \quad (40)$$

que corresponde aos primórdios do universo dominado por poeira de matéria. Agora para o fator de escala muito grande  $\frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} \ll A \rightarrow \frac{B}{A} \ll a^{3(\alpha+1)}$ , assim (39) fica aproximadamente:

$$\rho_c \sim A^{\frac{1}{\alpha+1}} \rightarrow p_c \sim -A^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (41)$$

que representa a parte final do universo, em que toda a dinâmica é devida a constante cosmológica  $A^{\frac{1}{\alpha+1}}$ . Para um fator de escala grande podemos utilizar a aproximação binomial, assim obtendo:

$$\rho_c \sim A^{\frac{1}{\alpha+1}} + \frac{1}{\alpha+1} \frac{B}{A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} a^{3(\alpha+1)}}, \quad (42)$$

que representa um universo misto de matéria e uma constante cosmológica.

### 3 Métrica de Kantowski-Sachs

Em relatividade geral, os grupos de Lie aparecem frequentemente quando se postula que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , seja invariante por transformações contínuas. O gerador dessas transformações contínuas são os vetores de Killing, que são os responsáveis por preservar a métrica de uma variedade Riemanniana e estão associados a conservação de grandezas físicas de um espaço. O conjunto de todas as transformações contínuas que deixam uma métrica invariante, formam um grupo de Lie que é conhecido como grupo de isometria.

A métrica de Kantowski-Sachs [4], surge ao se analisar espaços-tempo definidos localmente como aqueles que admitem um grupo de isotropia  $G_3$ , atuando em orbitas bidimensionais do tipo espaço, com curvatura positiva e que possuem vetores de Killing do tipo espaço que não estão nas orbitas. A métrica de Kantowski-Sachs é descrita por:

$$ds^2 = -dt^2 + a'^2(t)dr^2 + b'^2(t) \left( d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2 \right), \quad (43)$$

em que  $a'(t)$  é o fator de escala e  $b'(t)$  é o fator de anisotropia.  $a'(t)$  irá medir a distância do tipo espaço entre esferas bidimensionais enquanto  $b'(t)$  é a medida da superfície das esferas bidimensionais.

A métrica de Kantowski-Sachs combina simetria esférica com simetria translacional na direção radial e apresenta dois tipos de singularidades: singularidade do tipo disco quando  $a'(t) \rightarrow 0$  e singularidade do tipo cigarro quando  $b'(t) \rightarrow 0$ . Como nesta métrica a parte radial evolui de maneira diferente da parte angular, essa métrica irá descrever um universo anisotrópico, porém homogêneo.

Em seus primórdios, o universo não deve ter seguido o princípio cosmológico. Assim nesse período, o espaço deveria possuir grandes quantidades de anisotropia. Mas com o passar do tempo, o espaço se tornou isotrópico até atingir as características atuais. Dessa forma, o espaço-tempo de Kantowski-Sachs é um dos casos mais simples para estudarmos um universo que, inicialmente, seja homogêneo e anisotrópico e posteriormente passe pelo processo de isotropização, assim se tornando isotrópico.

Um dos pontos principais do nosso trabalho, será estudar como os parâmetros e condições iniciais influenciam no processo de isotropização do modelo. Para isso, iremos estudar a métrica de Kantowski-Sachs não na parametrização padrão (43), mas utilizando a parametrização de Misner que apresentamos a seguir.

### 3.1 Parametrização de Misner

Uma das maneiras de obter uma formulação quântica da relatividade geral é a partir do formalismo ADM [36], que consiste em fazer um split 3+1 no espaço-tempo, de tal forma que as componentes independentes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  sejam:  $N$  é a função lapso,  $N^i$  vetor deslocamento e  $h_{ij}$  que é a métrica de hipersuperfícies tridimensionais do tipo espaço, cuja evolução forma o espaço-tempo. A métrica  $h_{ij}$  é a componente dinâmica da teoria, sendo que suas classes de equivalência formam um espaço denominado de superespaço, que é à arena para a geometrodinâmica.

O superespaço é uma variedade muito grande possuindo, segundo Wheeler, dimensão  $(\infty^3)^{(\infty^3)}$  e não se sabe como realizar cálculos em uma variedade tão grande. Assim surgiu a necessidade de reduzir o superespaço para uma variedade de dimensão finita, que ficou conhecida como minisuperespaço. A redução para minisuperespaço envolve: fazer com que a função lapso seja homogênea  $N = N(t)$  e o vetor de deslocamento seja nulo  $N^i = 0$ , de tal maneira que podemos escrever a métrica do espaço-tempo como:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(x, t) dx^i dx^j, \quad (44)$$

em que a tri-métrica  $h_{ij}$  também deve ser restringida a ser homogênea, de tal maneira que suas componentes devem ser dadas pelo produto entre funções de coordenadas espaciais e um número finito de funções de  $t$ .

Vamos utilizar um minisuperespaço que seja gerado a partir de três parâmetros  $(\omega, \beta_+, \beta_-)$ , em que:  $\omega = \omega(t)$  é identificado como um parâmetro independente que representa a coordenada temporal no minisuperespaço e  $\beta_+ = \beta_+(t)$  e  $\beta_- = \beta_-(t)$  representam a amplitude de dois modos independentes. Nessas condições, a métrica do minisuperespaço [37] será descrita por:

$$ds^2 = -d\omega^2 + d\beta_+^2 + d\beta_-^2. \quad (45)$$

A parametrização de Misner constitui em restringir  $h_{ij}$ , para uma métrica de hipersuperfície do tipo espaço, homogênea e anisotrópica com topologia  $S^1 \times S^2$ , utilizando as coordenadas do minisuperespaço  $(\omega, \beta_+, \beta_-)$ . Assim, vamos analisar a seguinte métrica [38]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + R^2(t) \left( e^{2\beta'} \right)_{ij} dx^i dx^j, \quad (46)$$

em que  $\beta'_{ij}(t)$  é uma matriz diagonal que possui traço nulo e  $R^3(t)$  é proporcional ao volume do universo no tempo  $t$ , esse fator pode ser expresso como:

$$R \propto e^{-\omega}, \quad (47)$$

em que  $\omega$  representa a coordenada temporal do minisuperespaço. É possível expressar as componentes de matriz  $\beta'_{ij}$  como combinação linear dos parâmetros  $\beta'_+$ ,  $\beta'_-$  do minisuperespaço como:

$$\begin{cases} \beta'_{11} = -2\beta'_+ \\ \beta'_{22} = \beta'_+ + \sqrt{3}\beta'_- \\ \beta'_{33} = \beta'_+ - \sqrt{3}\beta'_-. \end{cases} \quad (48)$$

Como na métrica de Kantowski-Sachs a parte angular evolui da mesma maneira, vamos considerar  $\beta'_{22} = \beta'_{33}$ , logo  $\beta'_- = 0$ , e definindo  $-\beta'_+ = b$ , obtemos a seguinte métrica:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{-2\omega+4b} dr^2 + e^{-2\omega-2b} (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi). \quad (49)$$

Em que  $b = b(t)$  é o fator de anisotropia. Identificando o fator  $R$  com fator de escala  $a$ , se têm que  $a^2(t) \equiv e^{-2\omega}$ , então a métrica acima se torna:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 e^{4b} dr^2 + a^2 e^{-2b} (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi), \quad (50)$$

que é a métrica de Kantowski-Sachs na parametrização de Misner. Fazendo:

$$a = (a'b'^2)^{\frac{1}{3}} \quad b = \frac{1}{3} \ln \left[ \frac{a'}{b'} \right], \quad (51)$$

retornamos para a parametrização usual (43). Se o fator  $b$  for para zero ou constante, se obtém uma métrica do tipo FRW (23)

### 3.2 Tensor de Energia-Momento

Vamos encontrar as grandezas necessárias para obter as equações de campo. Utilizando as expressões (28) e (50) é possível encontrar o seguinte tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{N^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2}e^{-4b}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2}e^{2b}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-2}e^{2b}\text{sen}^{-2}\theta p \end{bmatrix}, \quad (52)$$

em que utilizamos o quadri vetor velocidade no sistema de coordenadas co-móvel com o fluido  $U^\alpha = (N^{-1}, 0, 0, 0)$ . Utilizando a expressão de conservação para o tensor energia-momento (30), se encontra que:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (53)$$

Em posse da equação de conservação do fluido, é possível encontrar as relações entre as densidades do fluido de radiação e do gás de Chaplygin em relação ao fator de escala  $a$ . Substituindo equação de estado para o fluido perfeito (32) na expressão de conservação do tensor energia-momento (53) se encontra:

$$\rho = C_r a^{-3(1+\omega)}. \quad (54)$$

Para o fluido de radiação  $\omega = \frac{1}{3}$ , assim a densidade e a pressão para o fluido de radiação serão descritas por:

$$\rho_r = C_r a^{-4} \quad p_r = \frac{1}{3} C_r a^{-4}. \quad (55)$$

Substituimos a expressão (38) na equação de estado (53), se encontra as seguintes relações para o gás de Chaplygin:

$$\rho_c = \left( A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} \right)^{\frac{1}{(\alpha+1)}} \quad p_c = -\frac{A}{\left( A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}. \quad (56)$$

### 3.3 Curvatura

Para encontrar o tensor de curvatura, é necessário encontrarmos os símbolos de Christoffel da métrica. Utilizando a expressão (7) se encontra:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{N}}{N} \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{N^2} (a\dot{a} + 2a^2\dot{b}) e^{4b} \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{1}{N^2} (a\dot{a} - a^2\dot{b}) e^{-2b} \\ \Gamma_{33}^0 = \frac{1}{N^2} (a\dot{a} - a^2\dot{b}) e^{-2b} \text{sen}^2\theta \\ \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{01}^1 = \frac{1}{a} (\dot{a} + 2a\dot{b}) \\ \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{02}^2 = \frac{1}{a} (\dot{a} - a\dot{b}) \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta \cos\theta \\ \Gamma_{30}^3 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{a} (\dot{a} - a\dot{b}) \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \text{cotg}\theta. \end{array} \right. \quad (57)$$

Em posse dos símbolos de Christoffel, se pode encontrar o tensor de Ricci cujas componentes irão possuir os seguintes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = \frac{\dot{N}}{N} \left( 3\frac{\dot{a}}{a} \right) - 3\frac{\ddot{a}}{a} - 6\dot{b}^2 \\ R_{11} = -\frac{\dot{N}}{N^3} \left( a\dot{a} + 2a^2\dot{b} \right) e^{4b} + \frac{1}{N^2} \left( 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 6a\dot{a}\dot{b} + 2a^2\ddot{b} \right) e^{4b} \\ R_{22} = -\frac{\dot{N}}{N^3} \left( a\dot{a} - a^2\dot{b} \right) e^{-2b} + \frac{1}{N^2} \left( a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 3a\dot{a}\dot{b} - a^2\ddot{b} \right) e^{-2b} + 1 \\ R_{33} = -\frac{\dot{N}}{N^3} \left( a\dot{a} - a^2\dot{b} \right) e^{-2b} \text{sen}^2\theta + \frac{1}{N^2} \left( a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 - 3a\dot{a}\dot{b} - a^2\ddot{b} \right) e^{-2b} \text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\theta. \end{array} \right. \quad (58)$$

A partir da contração do tensor de Ricci se encontra a curvatura escalar:

$$R = -6\frac{\dot{N}}{N^3} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{N^2} \left( 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\dot{b}^2 + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) + 2\frac{e^{2b}}{a^2}. \quad (59)$$

Então podemos obter os seguintes tensores de Einstein:

$$G_{00} = -3\dot{b}^2 + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + N^2\frac{e^{2b}}{a^2}, \quad (60)$$

$$G_{11} = \frac{\dot{N}}{N} \left( 2a^2\dot{b} - 2a\dot{a} \right) + \left( \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} - 6a\dot{a}\dot{b} + 3a^2\dot{b}^2 - 2a^2\ddot{b} \right) + N^2e^{2b}, \quad (61)$$

$$G_{22} = -\frac{\dot{N}}{N} \left( 2a\dot{a} + a^2\dot{b} \right) + \left( 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 3a\dot{a}\dot{b} + a^2\ddot{b} + 3a^2\dot{b}^2 \right), \quad (62)$$

$$G_{33} = -\frac{\dot{N}}{N} \left( 2a\dot{a} + a^2\dot{b} \right) + \left( 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 3a\dot{a}\dot{b} + a^2\ddot{b} + 3a^2\dot{b}^2 \right). \quad (63)$$

### 3.4 Equações de Campo

Com tensor de Einstein e o tensor de energia-momento, é possível encontrar as equações de campo. Embora existam ao todo quatro equações, as equações (62) e (63) são iguais, assim apenas três equações serão responsáveis pela evolução do fator de escala  $a(t)$  e o fator de anisotropia  $b(t)$ :

$$-3\dot{b}^2 + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + N^2\frac{e^{2b}}{a^2} = N^2\rho, \quad (64)$$

$$\frac{\dot{N}}{N} \left( 2a^2\dot{b} - 2a\dot{a} \right) + \left( \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} - 6a\dot{a}\dot{b} + 3a^2\dot{b}^2 - 2a^2\ddot{b} \right) + N^2e^{2b} = -a^2N^2p, \quad (65)$$

$$-\frac{\dot{N}}{N} \left( 2a\dot{a} + a^2\dot{b} \right) + \left( 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 3a\dot{a}\dot{b} + a^2\ddot{b} + 3a^2\dot{b}^2 \right) = -a^2N^2p. \quad (66)$$

Considerando um universo que possua apenas radiação e um gás de Chaplygin, a densidade total do sistema será dada por  $\rho_t = \rho_r + \rho_c$  e pela lei de Dalton para as pressões parciais é possível expressar a pressão total como soma das pressões parciais  $p_t = p_r + p_c$ . Considerando o gauge em que a função lapso assume o valor  $N = 1$ , as equações de campo irão assumir a seguinte forma:

$$-3\dot{b}^2 + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{e^{2b}}{a^2} = \left(A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + \frac{4}{3}C_r a^{-4}, \quad (67)$$

$$\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} - 6a\dot{a}\dot{b} + 3a^2\dot{b}^2 - 2a^2\ddot{b} + e^{2b} = -a^2 \left[ \frac{1}{3}C_r a^{-4} - \frac{A}{\left(A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \right], \quad (68)$$

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + 3a\dot{a}\dot{b} + a^2\dot{b}^2 + 3a^2\dot{b}^2 = -a^2 \left[ \frac{1}{3}C_r a^{-4} - \frac{A}{\left(A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} \right]. \quad (69)$$

Como existem três equações para duas incógnitas, é possível reduzir o número de equações se considerarmos a soma ou a subtração entre as equações (68) e (69). De fato, se obtém o mesmo resultado ao se resolver o sistema de equações com (67) e a soma ou a subtração entre (68) e (69). Por simplicidade escolhemos trabalhar com a subtração entre essas equações, de tal forma que o sistema de equações a ser resolvido será:

$$-3\dot{b}^2 + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{e^{2b}}{a^2} = \left(A + \frac{B}{a^{3(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + \frac{4}{3}C_r a^{-4}, \quad (70a)$$

$$-9a\dot{a}\dot{b} - 3a^2\ddot{b} + e^{2b} = 0. \quad (70b)$$

As equações (70a) e (70b) descrevem a dinâmica de um universo anisotrópico e homogêneo, que se inicia a partir de uma singularidade do tipo *Big Bang* e se expande de forma acelerada. Esse universo apresenta propriedades diferentes em diferentes épocas devido ao seu conteúdo material. No início dominará o fluido de radiação, devido às suas partículas com velocidades igual ou próximas a velocidade da luz, surgindo assim a pressão de radiação. Depois uma fase mista entre radiação e gás de Chaplygin; e por último uma fase dominada pelo gás de Chaplygin em que o universo se expande indefinidamente.



## 4 Soluções Para as Equações Dinâmicas do Modelo

Neste capítulo vamos apresentar as soluções para o sistema de equações diferenciais (70a) e (70b). Esse sistema não apresenta solução analítica, apenas soluções numéricas. Logo, ao variar os parâmetros e as condições iniciais, obtemos diversos conjuntos de soluções. O modelo possui ao todo quatro parâmetros que são:  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  e  $C_r$ , e as condições iniciais que são:  $a_0, b_0$  e suas derivadas  $da_0$  e  $db_0$ . Para determinar as condições iniciais apropriadas, utilizamos a equação (70a) e estudamos como a variação de cada parâmetro e condições iniciais, influenciam na dinâmica do fator de escala  $a(t)$  e o fator de anisotropia  $b(t)$ . Para realizar esse estudo, variamos um dos parâmetros ou condições iniciais enquanto deixamos os outros fixos, porém para se obter as condições iniciais a partir da expressão (70a), é necessário que alguma das condições iniciais ou parâmetros sempre sofra variação juntamente com o elemento que estamos estudando. Durante a maior parte do trabalho, escolhemos a condição inicial  $da_0$  para variar em conjunto com o elemento estudado, exceto quando estudamos a própria condição inicial  $da_0$  e nesse caso deixamos o parâmetro  $C_r$  variar.

As soluções numéricas para o sistema de equações diferenciais (70a) e (70b) foram implementados no software Maplesoft, em que foi utilizado o método de solução `r4k5`. Mais especificamente, utilizamos o Maple 2015 para encontrar as soluções. Após fazermos um estudo bem amplo das soluções numéricas, usando diversos valores dos parâmetros e das condições iniciais observamos que qualitativamente, as soluções se dividem em dois grupos. No primeiro grupo de soluções, o universo inicia em uma singularidade do tipo *Big Bang*, se expandindo até um valor máximo e finalmente se contrai até formar uma singularidade do tipo *Big Crunch*. No segundo grupo de soluções, o universo também se inicia a partir de uma singularidade do tipo *Big Bang*, depois expande indefinidamente até atingir um tamanho infinito em um tempo infinito. Nesse segundo grupo, temos que o fator de escala  $a(t)$  expande indefinidamente, quando o tempo vai para infinito. Mas o fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, quando  $t$  tende para infinito. Esse comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  garante que a métrica de Kantowski-Sachs irá tender a uma métrica do tipo FRW quando  $t$  tende para infinito.

Foram estudados as soluções para um grande número de valores dos parâmetros e condições iniciais, porém para observar de forma mais clara o comportamento dos fatores

$a(t)$  e  $b(t)$ , escolhemos seis valores fixos para o parâmetro  $\alpha$  que são: 0, 1; 0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9 e 1. Também escolhemos cinco valores para a quantidade cuja variação está sendo estudada e adequamos os valores dos outros parâmetros e condições iniciais, para a melhor descrição dos dois grupos de soluções.

#### 4.1 Variação do Parâmetro $A$

Para a variação do parâmetro  $A$  do gás de Chaplygin utilizamos:  $B = C_r = \alpha = 1$ ;  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $db_0 = 2$ . Após o estudo das soluções das equações (70a) e (70b) feitos para um grande número de valores do parâmetro  $A$ , mantendo fixados os demais parâmetros e condições iniciais, então escolhemos cinco valores de  $A$  para mostrar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

##### 4.1.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas Figuras 1 e 2.

A Figura 1 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação do parâmetro  $A$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero, o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para valores maiores do parâmetro  $A$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é maior e é alcançado em um tempo posterior aos valores anteriores.

A Figura 2 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação do parâmetro  $A$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente  $b(t)$  expande mais lentamente quanto maior for o valor do parâmetro  $A$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $A$ , não passa pelo processo de isotropização.

A partir da Tabela 1, que apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch*, é possível constatar as observações que fizemos a partir da análise dos gráficos. O ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  ocorre em um tempo maior quanto maior for o parâmetro  $A$  e como  $db(t_s)$  é muito grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  não tende a um

valor constante, logo o universo continua anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

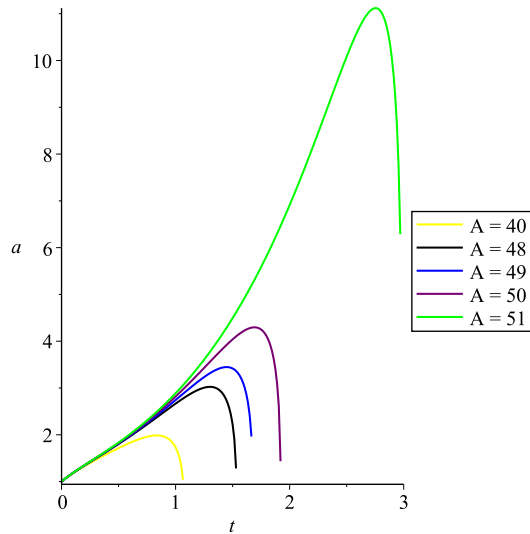


Figura 1 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $A$

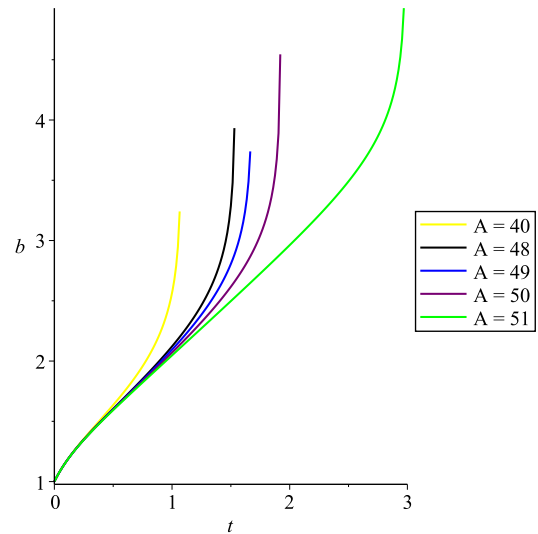


Figura 2 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $A$

$A$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
40	0.83	1,98650769	2,09034147	1,84273113	1,076163	$1,01807824 * 10^{(-2)}$	7,92193621	$3.61837521 * 10^{(7)}$
48	1.30	3,02500638	2,55265835	1,92182657	1,5354339	$3,25203781 * 10^{(-2)}$	7,64110792	$4.07537140 * 10^{(6)}$
59	1.45	3,44761365	2,69818692	1,9624532	1,6792085	$1,71195365 * 10^{(-2)}$	8,54922425	$4.15609094 * 10^{(7)}$
50	1.69	4,29708586	2,91453972	1,94438358	1,9225537	$4,88295379 * 10^{(-2)}$	7,94643818	$3.48460447 * 10^{(6)}$
51	2.75	11,1196500	3,86566834	1,93978847	2,9837508	$5,73127290 * 10^{(-2)}$	9,69275872	$3.75298121 * 10^{(7)}$

Tabela 1 – Soluções *Big Crunch* para a variação do parâmetro  $A$

#### 4.1.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas podem ser visualizadas a partir das Figuras 3 e 4. A Figura 3 mostra que quanto maior o valor da parâmetro  $A$ , mais rápida será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 4 mostra que quanto maior for o parâmetro  $A$ , menor será o valor para o qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir Figura 4, também é possível perceber que o fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 2 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $da_0$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  aumentam com o aumento

de  $A$ , o que nos diz que o universo se expande de forma mais acelerada quanto maior for o valor de  $A$ ,  $b(t_e)$  diminui com o aumento de  $A$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

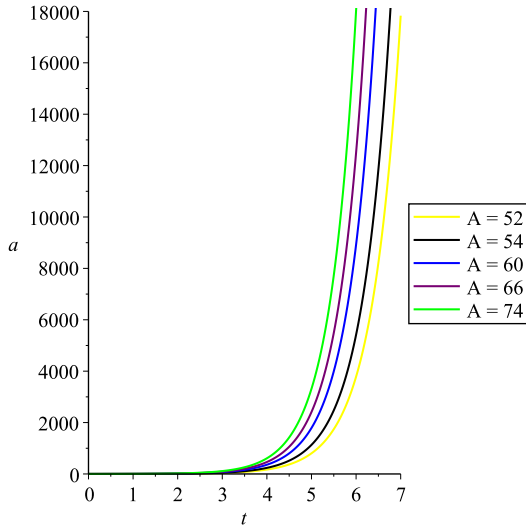


Figura 3 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $A$

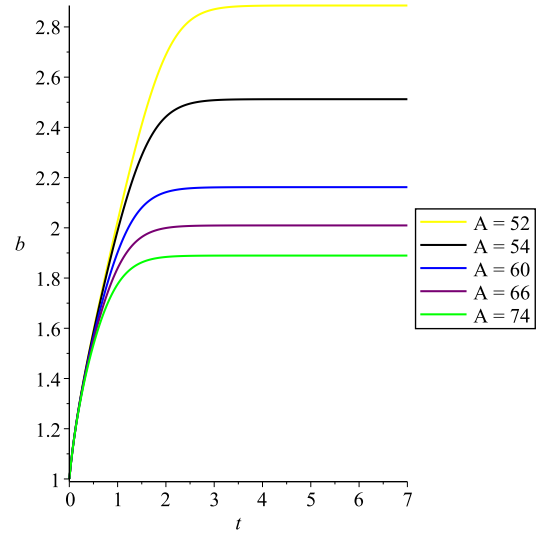


Figura 4 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $A$

$A$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
52	2.072924969	14	$9,215948678 * 10^{(8)}$	2,885264561	$1,428828999 * 10^{(9)}$	$-3,447991415 * 10^{(-9)}$
54	2.083837996	14	$1,483389716 * 10^{(9)}$	2,512202307	$2,321630371 * 10^{(9)}$	$2,536005501 * 10^{(-8)}$
60	2.115119663	14	$3,413279605 * 10^{(9)}$	2,161929522	$5,484651866 * 10^{(9)}$	$7,391605894 * 10^{(-9)}$
66	2.144473258	14	$6,519070906 * 10^{(9)}$	2,009555613	$1,072780912 * 10^{(10)}$	$1,119785885 * 10^{(-8)}$
74	2.181069916	14	$1,377644050 * 10^{(10)}$	1,889504587	$2,332836450 * 10^{(10)}$	$-1,749828287 * 10^{(-8)}$

Tabela 2 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro  $A$

#### 4.2 Variação do Parâmetro $B$

Para o estudo da variação do parâmetro  $B$  do gás de Chaplygin, utilizamos:  $A = C_r = 1$ ,  $\alpha = 0,9$ ;  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $db_0 = 2$ . Resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b) para um grande número de valores de  $B$ , enquanto os outros parâmetros e condições iniciais são mantidos fixo, então escolhemos cinco valores de  $B$  para mostrar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

4.2.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas Figuras 5 e 6.

A Figura 5 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação do parâmetro  $B$ . Para os valores apresentados, se observa que o fator de escala cresce até um ponto máximo e então decresce até zero, o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para os maiores valores do parâmetro  $B$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é maior e é alcançado em um tempo posterior em relação aos valores anteriores.

A Figura 6 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação do parâmetro  $B$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente  $b(t)$  expande mais lentamente quanto maior for o valor do parâmetro  $B$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $B$  não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 3 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch*, se observa que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é maior e alcançado em maior tempo quanto maior o valor do parâmetro  $B$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante, o que faz com que esse universo continue anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

B	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
3300	3.43	7,07551707	2,43956916	$7,30764886 * 10^{(-1)}$	4,042914	$4,39058492 * 10^{(-2)}$	8,06774509	$8,00555732 * 10^{(6)}$
3350	3.62	7,55963418	2,5010761	$7,26886205 * 10^{(-1)}$	4,238987	$2,39867289 * 10^{(-2)}$	8,80561559	$5,99514423 * 10^{(7)}$
3400	3.86	8,1992987	2,58131033	$7,27144362 * 10^{(-1)}$	4,480151	$6,64542254 * 10^{(-2)}$	7,95000802	$3,60141997 * 10^{(6)}$
3450	4.18	9,11349592	2,69099162	$7,33003255 * 10^{(-1)}$	4,794615	$4,26696562 * 10^{(-2)}$	8,60534581	$1,87013476 * 10^{(7)}$
3500	4.63	10,6162794	2,83990937	$7,29410883 * 10^{(-1)}$	5,249704	$6,61539051 * 10^{(-2)}$	8,47289366	$7,93993548 * 10^{(6)}$

Tabela 3 – Soluções *Big Crunch* para a variação do parâmetro  $B$

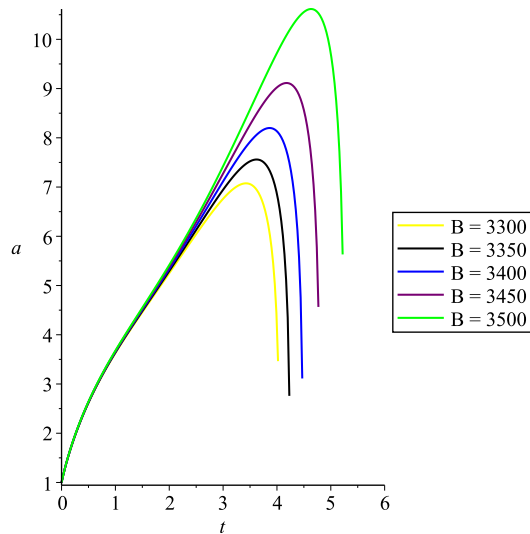


Figura 5 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $B$

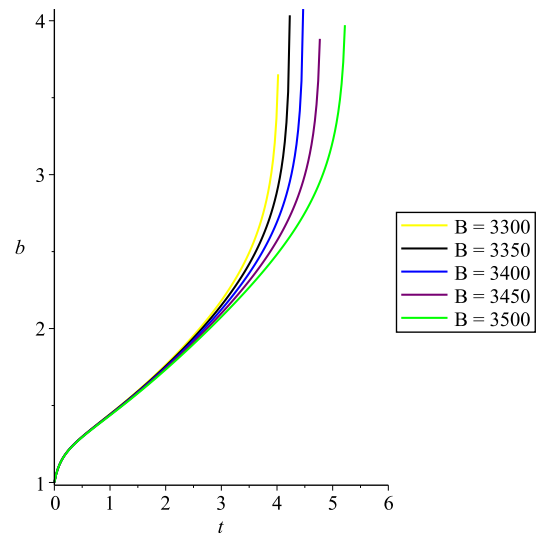


Figura 6 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $B$

#### 4.2.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas Figuras 7 e 8. A Figura 7 mostra que quanto maior o valor da parâmetro  $B$ , mais rápida será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 8 mostra que quanto maior for o parâmetro  $B$ , menor será o valor ao qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura, se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 4 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $da_0$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  aumentam com o aumento de  $B$ , o que nos diz que o universo se expande de forma mais acelerada quanto maior for o valor do parâmetro  $B$ ,  $b(t_e)$  diminui com o aumento de  $B$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

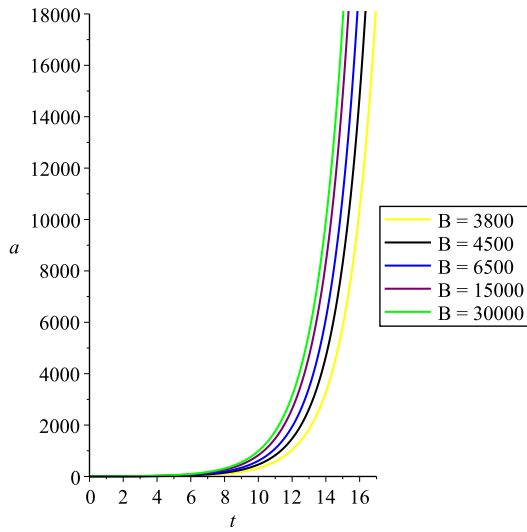


Figura 7 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $B$

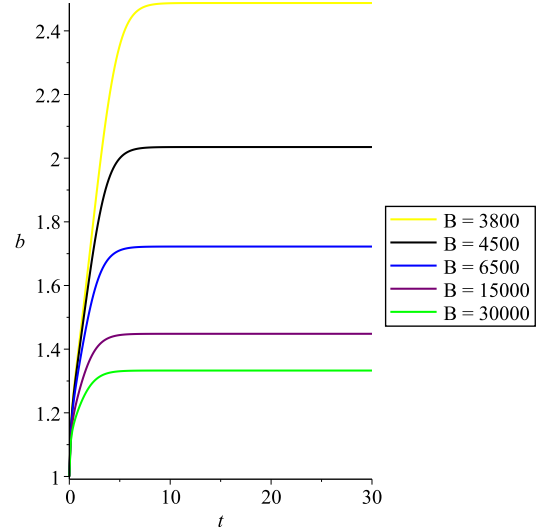


Figura 8 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $B$

$B$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
3800	5.234445097	35	$6,047588258 * 10^{(8)}$	2,487426415	$3,491576708 * 10^{(8)}$	$4,630089910 * 10^{(-9)}$
4500	5.456622787	35	$8,606905344 * 10^{(8)}$	2,034974616	$4,969199117 * 10^{(8)}$	$5,609191904 * 10^{(-11)}$
6500	5.977636958	35	$1,132091197 * 10^{(9)}$	1,722337745	$6,536131574 * 10^{(8)}$	$1,412741683 * 10^{(-10)}$
15000	7.379178294	35	$1,537033159 * 10^{(9)}$	1,448242879	$8,874065081 * 10^{(8)}$	$1,171994290 * 10^{(-8)}$
30000	8.809084434	35	$1,833529501 * 10^{(9)}$	1,332792145	$1,058588751 * 10^{(9)}$	$5,852508672 * 10^{(-9)}$

Tabela 4 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro  $B$

### 4.3 Variação do Parâmetro $\alpha$

Para melhor avaliar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$ , a partir da variação do parâmetro  $\alpha$  do gás de Chaplygin generalizado, utilizamos:  $A = C_r = 1$ ,  $B = 50$ ,  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $db_0 = 2$  para as soluções do tipo *Big Crunch* e  $A = C_r = 1$ ,  $B = 5705$ ,  $a_0 = b_0 = 1$ ,  $db_0 = 2$  para as soluções expansivas e resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b). Como o valor de  $\alpha$  está no intervalo  $0 < \alpha \leq 1$ , escolhemos seis valores para esse parâmetro, enquanto os demais parâmetros e condições iniciais são mantidos fixos.

#### 4.3.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas figuras 9 e 10.

A Figura 9 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação do parâmetro  $\alpha$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero, o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para valores menores do parâmetro  $\alpha$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é maior e alcançado em um tempo maior do que os valores anteriores.

A Figura 10 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação do parâmetro  $\alpha$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente o parâmetro  $b(t)$  expande mais lentamente quanto menor for o valor do parâmetro  $\alpha$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $\alpha$  não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 5 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch* e se pode concluir que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é maior e alcançado em maior tempo quanto menor for o valor do parâmetro  $\alpha$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante, o que faz com que esse universo continue anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

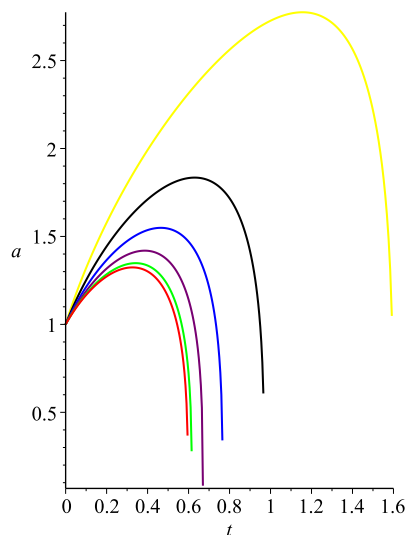


Figura 9 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $\alpha$

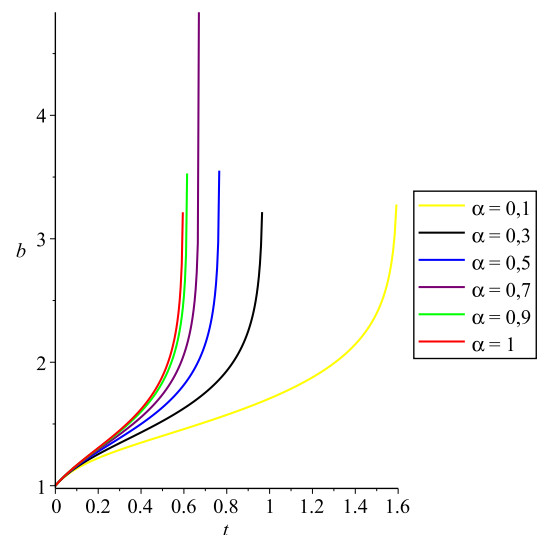


Figura 10 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $\alpha$



$\alpha$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
0.1	1.16	2,77459417	1,83868018	0,93688512	1,5996531	$6,43475784 * 10^{(-2)}$	8,39790347	$2,00928378 * 10^{(8)}$
0.3	0.63	1,83451800	1,66184158	1,20432660	0,9690764	$6,86952820 * 10^{(-2)}$	7,71793269	$5,93111089 * 10^{(7)}$
0.5	0.46	1,54886593	1,5769504	1,36617201	0,7660570	$5,36336773 * 10^{(-1)}$	7,71091151	$8,22971017 * 10^{(7)}$
0.7	0.39	1,41909840	1,54006955	1,50850961	0,6700185	$4,98037237 * 10^{(-2)}$	7,64625338	$8,26221043 * 10^{(7)}$
0.9	0.34	1,34812048	1,49865801	1,56421640	0,6158197	$5,39092586 * 10^{(-1)}$	7,48166234	$5,71841362 * 10^{(7)}$
1	0.33	1,3238900	1,49480787	1,61348618	0,5970009	$4,45939382 * 10^{(-2)}$	7,64032124	$9,64349254 * 10^{(7)}$

Tabela 5 – Soluções *Big Crunch* para a variação do parâmetro  $\alpha$

### 4.3.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas figuras 11 e 12. A Figura 11 mostra que a expansão do fator de escala  $a(t)$  ocorre em uma velocidade menor quanto maior o valor da parâmetro  $\alpha$ . Já a Figura 12, mostra que quanto maior for o parâmetro  $\alpha$  maior será o valor para o qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 6 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $da_0$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  diminuem com o aumento de  $\alpha$ , o que nos diz que o universo se expande de forma menos acelerada quanto maior for o valor do parâmetro  $\alpha$ ,  $b(t_e)$  aumenta com o aumento de  $\alpha$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

$\alpha$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
0.1	29.46667615	35	$5,006473205 * 10^{(9)}$	1,068420015	$2,890488706 * 10^{(9)}$	$-9,407242684 * 10^{(-10)}$
0.3	16.13422706	35	$3,158964681 * 10^{(9)}$	1,141132121	$1,823829031 * 10^{(9)}$	$-1,736518330 * 10^{(-9)}$
0.5	10.40716596	35	$2,206982838 * 10^{(9)}$	1,252795587	$1,274202111 * 10^{(9)}$	$-7,680190152 * 10^{(-9)}$
0.7	7.475409257	35	$1,595242718 * 10^{(9)}$	1,429426663	$9,210138130 * 10^{(8)}$	$-1,210663136 * 10^{(-8)}$
0.9	5.786664024	35	$1,051043982 * 10^{(9)}$	1,801960305	$6,068205261 * 10^{(8)}$	$1,243033782 * 10^{(-9)}$
1	5.200929846	35	$3,484465040 * 10^{(8)}$	3,222512509	$2,011756828 * 10^{(8)}$	$-1,327463280 * 10^{(-9)}$

Tabela 6 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro  $\alpha$

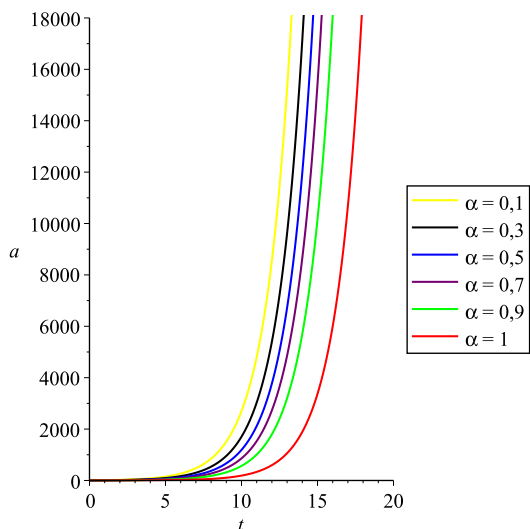


Figura 11 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $\alpha$

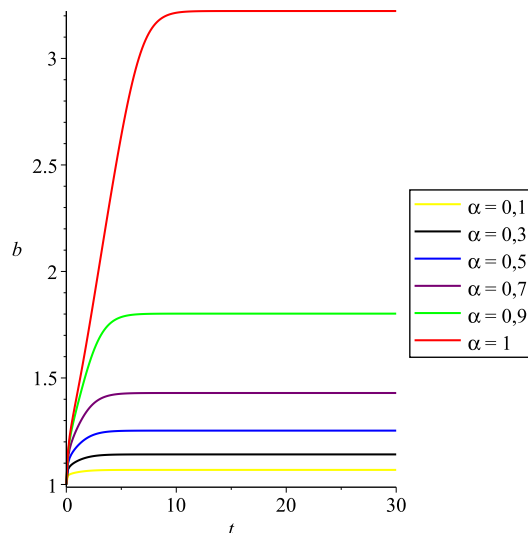


Figura 12 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $\alpha$

#### 4.4 Variação do Parâmetro $C_r$

Para o estudo da variação do parâmetro  $C_r$  do gás de radiação, utilizamos:  $A = B = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ;  $db_0 = b_0 = 1$ ,  $a_0 = 2$ . Resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b) para um grande número de valores de  $C_r$ , enquanto os demais parâmetros e condições iniciais são mantidos fixos, então escolhemos cinco valores de  $C_r$  para mostrar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

##### 4.4.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas figuras 13 e 14.

A Figura 13 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação do parâmetro  $C_r$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para maiores valores do parâmetro  $C_r$  se observa que o ponto máximo de expansão do

fator de escala  $a(t)$  é maior e alcançado em um tempo maior do que os valores posteriores de  $C_r$ .

A Figura 14 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação do parâmetro  $C_r$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente o parâmetro  $b(t)$  expande mais lentamente quanto maior for o valor do parâmetro  $C_r$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $C_r$  não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 7 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch* e se pode concluir que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é maior e alcançado em maior tempo quanto maior for o valor do parâmetro  $C_r$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante o que faz com que esse universo continue anisotrópico ao longo de sua evolução. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

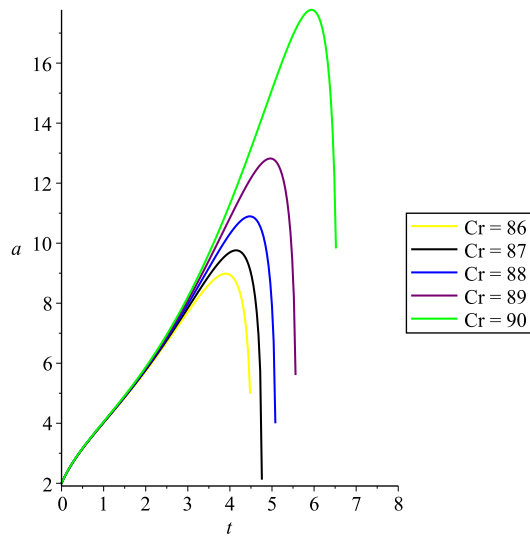


Figura 13 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $C_r$

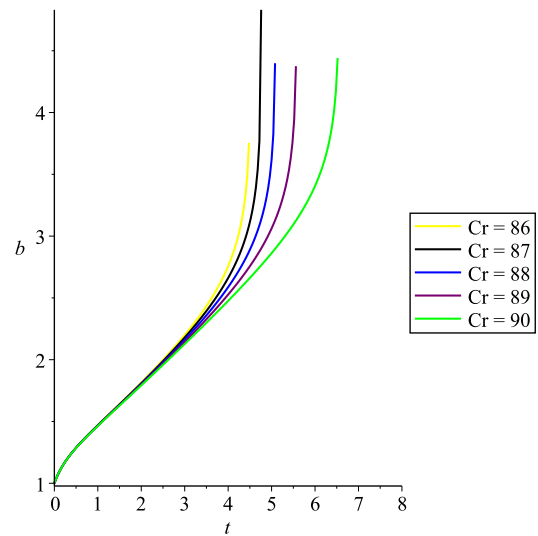


Figura 14 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $C_r$

$C_r$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
86	3.9	8,98356565	2,67823940	$7,33336963 * 10^{(-1)}$	4,51458	$6,24476406 * 10^{(-2)}$	8,19849386	$5,72922635 * 10^{(6)}$
87	4.1	9,7544696	2,72721878	$6,95397185 * 10^{(-1)}$	4,7618119	$6,42038821 * 10^{(-2)}$	8,33666809	$6,76324958 * 10^{(6)}$
88	4.5	10,8926117	2,88934384	$7,57195813 * 10^{(-1)}$	5,0891051	$6,68187193 * 10^{(-2)}$	8,51603170	$8,33870382 * 10^{(6)}$
89	5.0	12,8155803	3,06207332	$7,70411581 * 10^{(-1)}$	5,5758273	$9,056621685 * 10^{(-2)}$	8,5375006	$5,45846783 * 10^{(6)}$
90	5.9	17,7681938	3,33105982	$7,02135303 * 10^{(-1)}$	6,5540306	$1,00192205 * 10^{(-2)}$	9,08972391	$1,07419281 * 10^{(7)}$

Tabela 7 – Soluções *Big Crunch* para a variação do parâmetro  $C_r$ 

#### 4.4.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas figuras 15 e 16. A Figura 15 mostra que quanto maior o valor da parâmetro  $C_r$ , mais rápida será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 16 mostra que quanto maior for o parâmetro  $C_r$  menor será o valor ao qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 8 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $da_0$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  aumentam com o aumento de  $C_r$ , o que nos diz que o universo se expande de forma mais acelerada quanto maior for o valor do parâmetro  $C_r$ ,  $b(t_e)$  diminui com o aumento de  $C_r$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

$C_r$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
91	3,239235692	35	$3,472844981 * 10^{(8)}$	3,422173226	$2,005047984 * 10^{(8)}$	$-1,762552037 * 10^{(-9)}$
93	3,264860569	35	$5,390727644 * 10^{(8)}$	2,824158103	$3,112338056 * 10^{(8)}$	$-3,526121468 * 10^{(-9)}$
95	3,290285884	35	$6,251651407 * 10^{(8)}$	2,624356263	$3,6093926231 * 10^{(8)}$	$-1,151104077 * 10^{(-9)}$
99	3,340556022	35	$7,3217146928 * 10^{(8)}$	2,413621802	$4,227193948 * 10^{(8)}$	$1,804749300 * 10^{(-9)}$
105	3,414573844	35	$8,352587644 * 10^{(8)}$	2,241109877	$4,822368724 * 10^{(8)}$	$5,800369088 * 10^{(-12)}$

Tabela 8 – Soluções expansivas para a variação do parâmetro  $C_r$

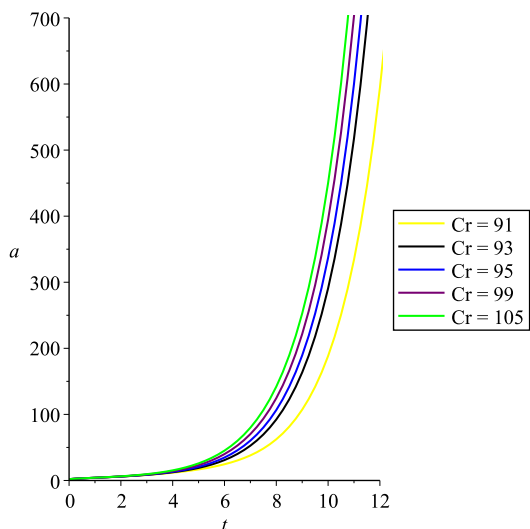


Figura 15 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $C_r$

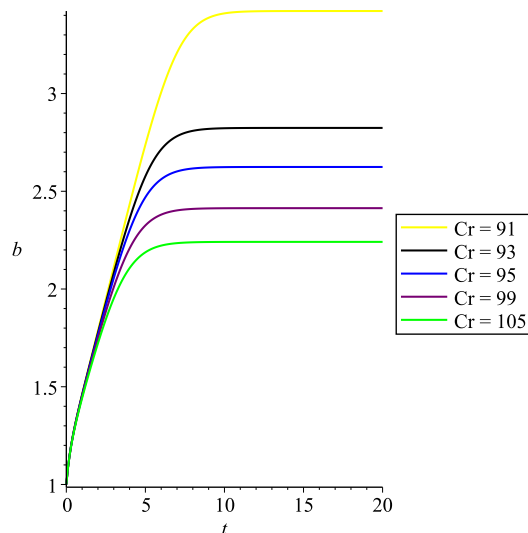


Figura 16 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $C_r$

#### 4.5 Variação da Condição Inicial $a_0$

Para o estudo da variação da condição inicial  $a_0$ , utilizamos:  $A = B = C_r = 1$ ,  $\alpha = 0, 1$ ;  $db_0 = 2$  e  $b_0 = 1$ . Resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b) para um grande número de valores de  $a_0$ , enquanto os demais parâmetros e condições iniciais são mantidos fixos, então escolhemos cinco valores de  $a_0$  para mostrar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

##### 4.5.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas figuras 17 e 18.

A Figura 17 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação do parâmetro  $a_0$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para maiores valores da condição inicial  $a_0$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é maior e é alcançado em um tempo posterior em relação aos valores anteriores de  $a_0$ .

A Figura 18 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação da condição inicial  $a_0$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente o parâmetro  $b(t)$  expande mais lentamente quanto maior for o valor da condição inicial  $a_0$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $a_0$ , não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 9 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch*, se pode concluir que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é maior e alcançado em maior tempo quanto maior for o valor da condição inicial  $a_0$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante, o que faz com que esse universo continue anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

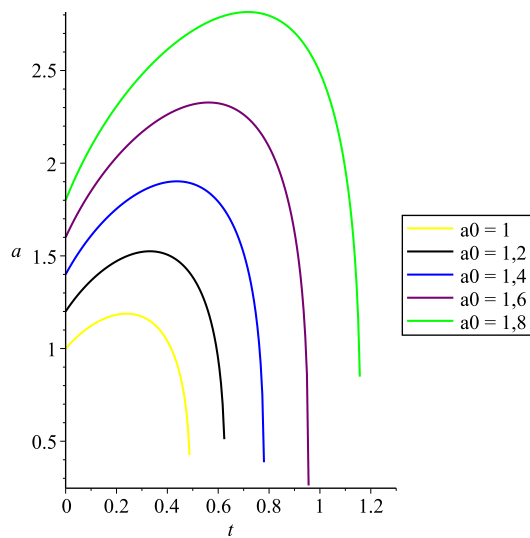


Figura 17 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $a_0$

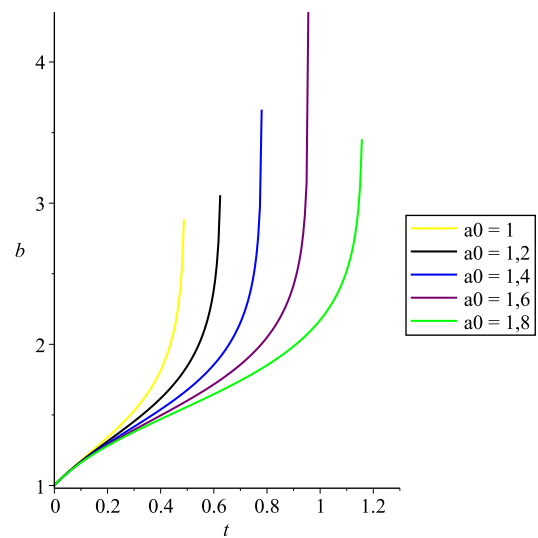


Figura 18 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $a_0$

$a_0$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
1	0.24	1,18805066	1,41111730	1,81724209	0.4916191	$5,17832366 * 10^{(-2)}$	7,31730060	$4.73828536 * 10^{(7)}$
1.2	0.33	1,5247924	1,49968701	1,55189100	0.6278906	$6,32500344 * 10^{(-2)}$	7,46724535	$4.73231250 * 10^{(7)}$
1.4	0.45	1,90160964	1,60433543	1,37405808	0.7809603	$6,65306029 * 10^{(-2)}$	7,73157406	$6.9245051 * 10^{(7)}$
1.6	0.56	2,32732235	1,66813607	1,16914777	0.9556793	$4,40380943 * 10^{(-2)}$	8,43946270	$3.90419539 * 10^{(8)}$
1.8	0.72	2,81550128	1,7632385	1,03987220	1,160949	$2,24101345 * 10^{(-2)}$	7,10227615	$4.75968020 * 10^{(6)}$

Tabela 9 – Soluções *Big Crunch* para a variação da condição inicial  $a_0$

## 4.5.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas figuras 19 e 20. A Figura 19 mostra que quanto maior o valor da condição inicial  $a_0$ , mais rápida será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 16 mostra que quanto maior for a condição inicial  $a_0$ , menor será o valor ao qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 10 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $da_0$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  aumentam com o aumento de  $a_0$ , o que nos diz que o universo se expande de forma mais acelerada quanto maior for o valor da condição inicial  $a_0$ ,  $b(t_e)$  diminui com o aumento de  $a_0$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

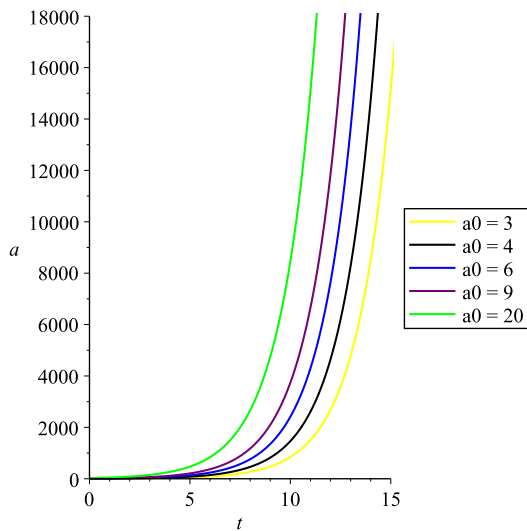


Figura 19 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $a_0$

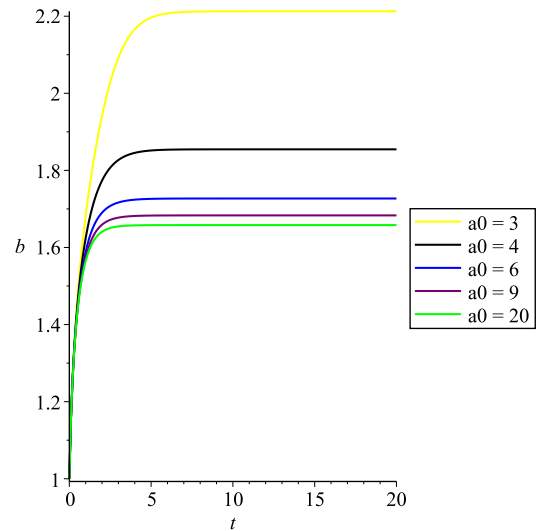


Figura 20 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $a_0$

$a_0$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
3	6.053641880	35	$1,568928914 * 10^{(9)}$	2,212695884	$9,058215310 * 10^{(8)}$	$1,19877106 * 10^{(-9)}$
4	8.181754457	35	$2,717195093 * 10^{(9)}$	1,854582372	$1,568773318 * 10^{(9)}$	$-6,248604078 * 10^{(-9)}$
6	12.39256800	35	$4,475061793 * 10^{(9)}$	1,727036872	$2,583678131 * 10^{(9)}$	$2,071878780 * 10^{(-8)}$
9	18.66972182	35	$6,932474509 * 10^{(9)}$	1,683197561	$4,002466024 * 10^{(9)}$	$-1,596895983 * 10^{(-8)}$
20	41.60381372	35	$1,569382161 * 10^{(10)}$	1,658029948	$9,0608321317 * 10^{(9)}$	$7,222212248 * 10^{(-9)}$

Tabela 10 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial  $a_0$ 

#### 4.6 Variação da Condição Inicial $b_0$

Para o estudo da variação da condição inicial  $b_0$ , utilizamos:  $A = B = C_r = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ;  $db_0 = 90$  e  $a_0 = 10$ . Resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b) para um grande número de valores de  $b_0$ , enquanto os demais parâmetros e condições iniciais são mantidos fixos, então escolhemos cinco valores de  $b_0$  para mostrar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

##### 4.6.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas figuras 21 e 22.

A Figura 21 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação da condição inicial  $b_0$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para maiores valores da condição inicial  $b_0$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é menor e é alcançado em um tempo menor do que os valores posteriores de  $b_0$ .

A Figura 22 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação do parâmetro  $b_0$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente o fator de anisotropia  $b(t)$  expande mais rapidamente quanto maior for o valor da condição inicial  $b_0$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $b_0$  não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 11 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch*, se pode concluir que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é maior e alcançado em maior



tempo quanto menor for o valor da condição inicial  $b_0$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante, o que faz com que esse universo continue anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

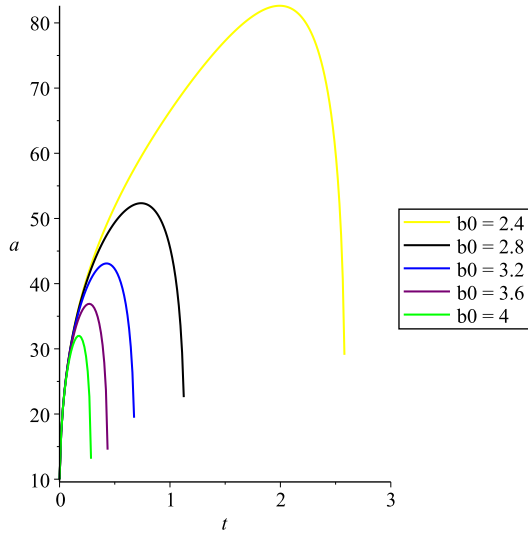


Figura 21 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $b_0$

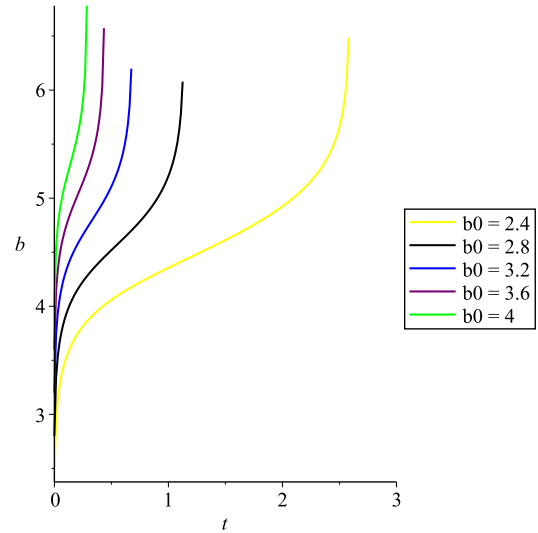


Figura 22 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $b_0$

$b_0$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
2.4	2.0	82,62992339	4,92369395	0,768010471	2,587828	2,587828	10,71320485	$1.35018179 * 10^{(7)}$
2.8	0.74	52,34127084	4,77246520	1,16913638	1,1360921	1,1360921	11,20977547	$1.42922260 * 10^{(8)}$
3.2	0.43	43,09947563	4,96643906	1,83394475	0.68371260	0.68371260	11,42039279	$2.38452344 * 10^{(8)}$
3.6	0.27	36,90655695	5,2011876	2,77985879	0.43882869	0.43882869	11,88262046	$7.09839979 * 10^{(8)}$
4	0.17	31,99809532	5,43329410	4,09271901	0.28792931	0.28792931	11,92306752	$5.61166295 * 10^{(8)}$

Tabela 11 – Soluções *Big Crunch* para a variação da condição inicial  $b_0$

#### 4.6.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas figuras 23 e 24. A Figura 23 mostra que quanto maior o valor da condição inicial  $b_0$ , mais lenta será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 24 mostra que quanto maior for a condição inicial  $b_0$ , maior será o valor ao qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 12 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $da_0$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  diminuem com o aumento de  $b_0$ , o que nos diz que o universo se expande de forma menos acelerada quanto maior for o valor da condição inicial  $b_0$ ,  $b(t_e)$  aumenta com o aumento de  $b_0$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

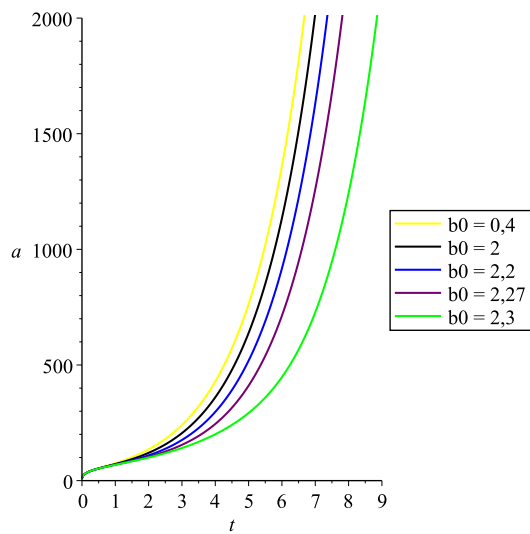


Figura 23 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $b_0$

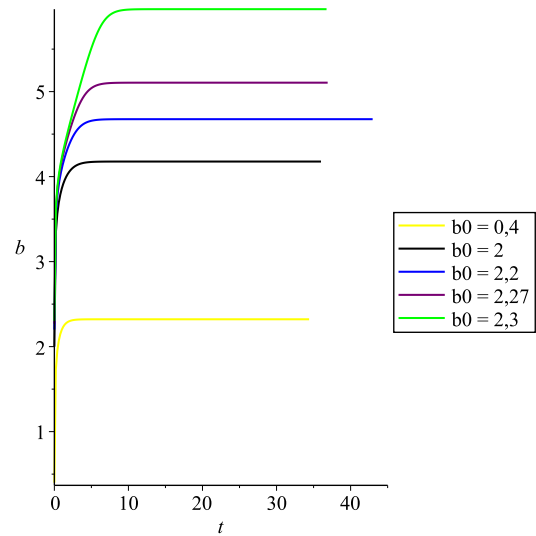


Figura 24 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $b_0$

$b_0$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
0.4	900.0181084	34	$1,426847526 * 10^{(10)}$	2,321593602	$8,237908033 * 10^{(9)}$	$4,139100255 * 10^{(-8)}$
2	900.0084100	34	$1,189277027 * 10^{(10)}$	4,177294569	$6,866294121 * 10^{(9)}$	$2,745846692 * 10^{(-8)}$
2.2	900.0034373	34	$9,590519880 * 10^{(9)}$	4,675668679	$5,537089234 * 10^{(9)}$	$3,697488199 * 10^{(-9)}$
2.27	900.0011706	34	$7,384792295 * 10^{(9)}$	5,105134574	$4,263611819 * 10^{(9)}$	$1,612699957 * 10^{(-9)}$
2.3	900.0000977	34	$4,012385366 * 10^{(9)}$	5,969804629	$2,316551771 * 10^{(9)}$	$1,221319131 * 10^{(-8)}$

Tabela 12 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial  $b_0$

#### 4.7 Variação da Condição Inicial $da_0$

Para o estudo da variação da condição inicial  $da_0$ , utilizamos:  $A = B = 1$ ,  $\alpha = 0, 3$ ;  $db_0 = 1$  e  $a_0 = 1$ . Resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b) para um grande número de valores de  $da_0$ , enquanto os outros parâmetros e condições iniciais são mantidos fixos, então escolhemos cinco valores de  $da_0$  para mostrar o comportamento dos  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

##### 4.7.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas figuras 25 e 26.

A Figura 25 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação da condição inicial  $da_0$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para maiores valores da condição inicial  $da_0$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é maior e é alcançado em um tempo posterior em relação aos valores menores de  $da_0$ .

A Figura 26 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação da condição inicial  $da_0$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente  $b(t)$  expande mais lentamente quanto maior for o valor da condição inicial  $da_0$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $da_0$  não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 13 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch* e se pode concluir que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é maior e alcançado em um tempo posterior quanto maior for o valor da condição inicial  $da_0$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante, o que faz com que esse universo continue anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

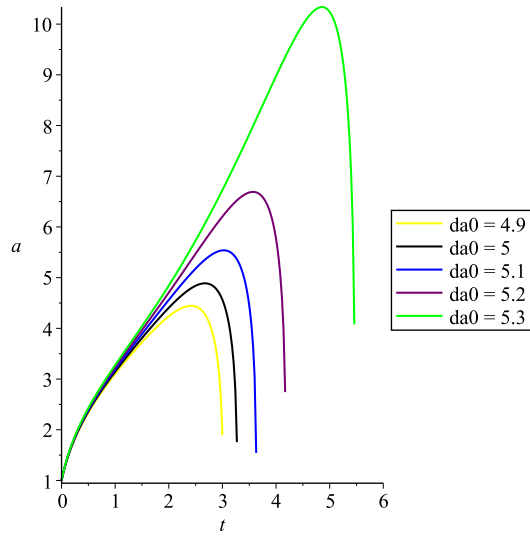


Figura 25 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $da_0$

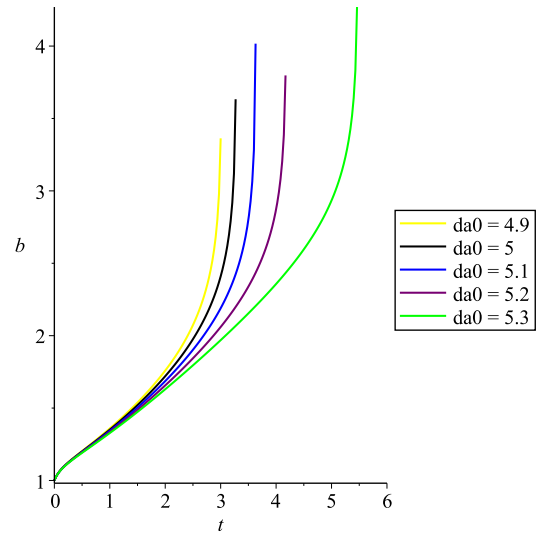


Figura 26 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $da_0$

$da_0$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
4.9	2.4	4,44477165	1,99625433	$7,18726307 * 10^{(-1)}$	3,0143706	$2,12486433 * 10^{(-2)}$	7,88809560	$1.78832599 * 10^{(7)}$
5	2.7	4,88708270	2,1110145	$7,56733292 * 10^{(-1)}$	3,2784396	$3,68063251 * 10^{(-2)}$	7,52240654	$4.55176613 * 10^{(6)}$
5.1	3.1	5,52622574	2,26498888	$8,08873234 * 10^{(-1)}$	3,6338568	$4,0433518026 * 10^{(-2)}$	7,60326070	$4.03518541 * 10^{(6)}$
5.2	3.6	6,68933807	2,41056695	$7,59998455 * 10^{(-1)}$	4,1828593	$4,67829859 * 10^{(-2)}$	7,90067176	$5.64124401 * 10^{(6)}$
5.3	4.9	10,3296052	2,85042090	$7,74427261 * 10^{(-1)}$	5,4714283	$5,02927414 * 10^{(-2)}$	8,69504592	$1.67020883 * 10^{(7)}$

Tabela 13 – Soluções *Big Crunch* para a variação da condição inicial  $da_0$

#### 4.7.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas figuras 27 e 28. A Figura 27 mostra que quanto maior o valor da condição inicial  $da_0$ , mais rápida será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 28 mostra que quanto maior for o condição inicial  $da_0$ , menor será o valor ao qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  tende a um valor constante, o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 14 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que tanto o valor de  $C_r$  quanto o fator de escala  $a(t_e)$  aumentam com o aumento de  $da_0$ , o que nos diz que o universo se expande de forma mais acelerada quanto maior for o valor da condição inicial  $da_0$ ,  $b(t_e)$  diminui com o aumento de  $da_0$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora

com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim estas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

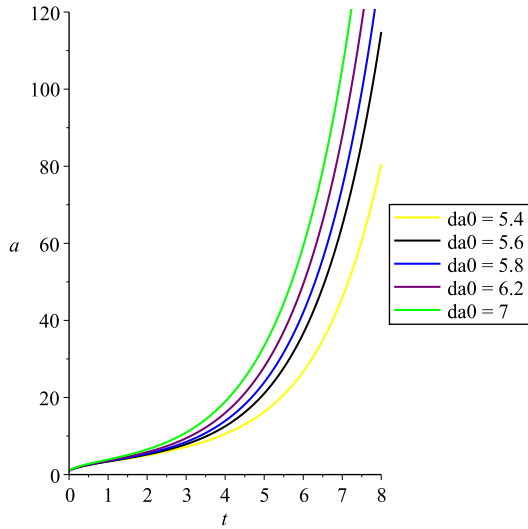


Figura 27 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $da_0$

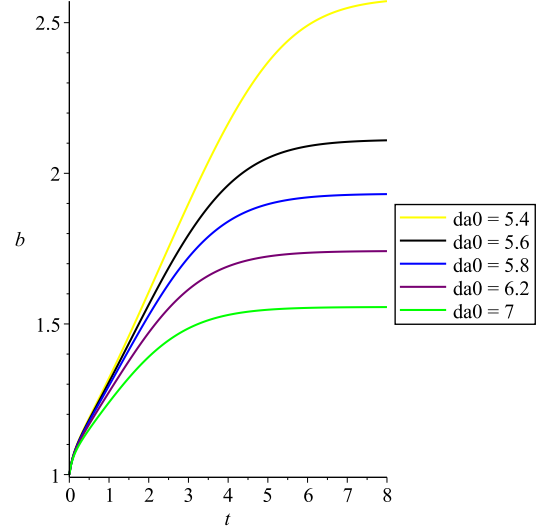


Figura 28 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $da_0$

$da_0$	$Cr$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
5.4	90.16469531	35	$4.716920445 * 10^{(8)}$	2,583646499	$2,723315289 * 10^{(8)}$	$-4,524472604 * 10^{(-9)}$
5.6	96.76469531	35	$6.753639906 * 10^{(8)}$	2,111999963	$3,899215818 * 10^{(8)}$	$-5,344578350 * 10^{(-9)}$
5.8	103.6046953	35	$7.805877949 * 10^{(8)}$	1,932288331	$4,506725735 * 10^{(8)}$	$-2,881434870 * 10^{(-9)}$
6.2	118.0046953	35	$9.201574406 * 10^{(8)}$	1,742306627	$5,312531460 * 10^{(8)}$	$-6,210172835 * 10^{(-9)}$
7	149.6846953	35	$1.105352233 * 10^{(9)}$	1,556308501	$6,381754096 * 10^{(8)}$	$-1,635857161 * 10^{(-9)}$

Tabela 14 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial  $da_0$

#### 4.8 Variação da Condição Inicial $db_0$

Para o estudo da variação da condição inicial  $db_0$ , utilizamos:  $A = C_r = 1$ ,  $B = 5$ ,  $\alpha = 0,7$ ;  $b_0 = 1$  e  $a_0 = 2,71$ . Resolvemos numericamente o sistema composto pelas equações (70a) e (70b) para um grande número de valores de  $db_0$ , enquanto os demais parâmetros e condições iniciais são mantidos fixos, então escolhemos cinco valores de  $db_0$  para mostrar o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  para as soluções *Big Crunch* e expansivas.

4.8.1 Soluções do Tipo *Big Crunch*

Para as soluções do tipo *Big Crunch* o comportamento dos fatores  $a(t)$  e  $b(t)$  serão descritos pelas figuras 29 e 30.

A Figura 29 apresenta o comportamento do fator de escala  $a(t)$  com a variação da condição inicial  $db_0$ . Para os valores apresentados, se observa que esse fator cresce até um ponto máximo e então decresce até zero o que configura uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Para maiores valores da condição inicial  $db_0$ , se observa que o ponto máximo de expansão do fator de escala é maior e é alcançado em um tempo menor do que os valores de  $db_0$ .

A Figura 30 apresenta o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$  com a variação do parâmetro  $db_0$ . Se observa que  $b(t)$  apresenta uma solução expansiva, que abruptamente para de expandir no instante em que  $a(t)$  retorna ao valor zero. Inicialmente o parâmetro  $b(t)$  expande mais lentamente quanto menor for o valor da condição inicial  $db_0$ . Como o fator de anisotropia não tende a um valor constante com a passar do tempo, se pode concluir que o universo descrito por esses valores de  $db_0$  não passa pelo processo de isotropização.

A Tabela 15 apresenta os valores obtidos para as soluções do tipo *Big Crunch*, se pode concluir que o ponto máximo do fator de escala  $a(t_m)$  é menor e alcançado em menor tempo quanto maior for o valor da condição inicial  $db_0$ . Como  $db(t_s)$  sempre possui valor grande, o fator de anisotropia  $b(t)$  nunca tende a um valor constante o que faz com que esse universo continue anisotrópico. Assim estas soluções não podem representar o universo atual que é isotrópico.

$db_0$	$t_m$	$a(t_m)$	$b(t_m)$	$db(t_m)$	$t_s$	$a(t_s)$	$b(t_s)$	$db(t_s)$
3	5.6	24,1671263	3,66693461	0.735267495	6,213745	0.19852428	9.01989691	$3.46854656 * 10^{(6)}$
5	5.5	27,1143212	3,80019195	0.757215465	6,08969	0.21950530	9,15005265	$3.62651484 * 10^{(6)}$
9	5.4	32,0484133	3,93659325	0.720430475	6,031192	0.21190558	9,51938320	$6.65337689 * 10^{(6)}$
15	5.4	37,5612768	4,11021293	0.738006682	6,010638	0.23468682	9,73453816	$7.88287397 * 10^{(6)}$
25	5.4	44,2752021	4,28108809	0.745714928	6,002052	0.34680123	9,67304338	$4.00162570 * 10^{(6)}$

Tabela 15 – Soluções *Big Crunch* para a variação da condição inicial  $db_0$

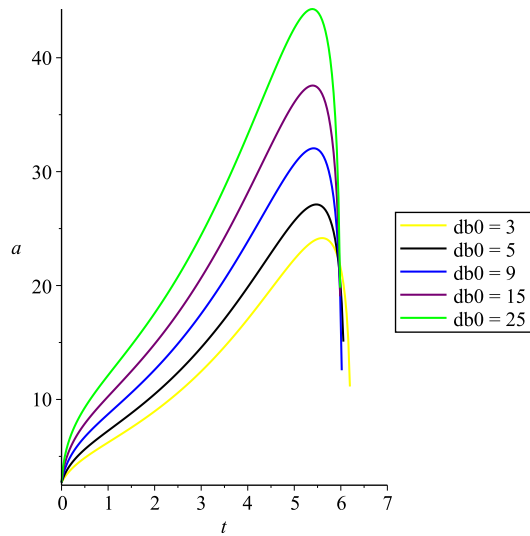


Figura 29 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $db_0$

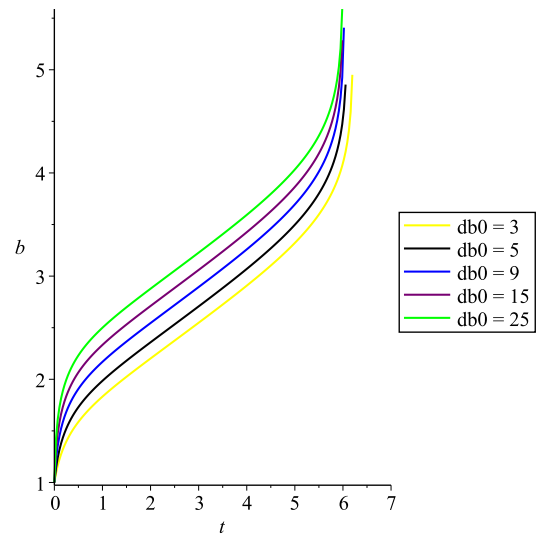


Figura 30 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções *Big Crunch* com a variação de  $db_0$

#### 4.8.2 Soluções Expansivas

As soluções expansivas são mostradas pelas figuras 31 e 32. A Figura 31 mostra que quanto menor o valor da condição inicial  $db_0$ , mais rápida será a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Já a Figura 32 mostra que quanto maior for a condição inicial  $db_0$ , maior será o valor ao qual o fator de anisotropia  $b(t)$  irá tender. A partir dessa figura se percebe que o comportamento do fator de anisotropia  $b(t)$ , tende a uma constante o que indica o processo de isotropização do espaço.

A Tabela 16 apresenta os valores obtidos para as soluções expansivas, é possível notar que o valor de  $da_0$  e  $b(t_e)$  aumentam quanto maior for o valor de  $db_0$ , o fator de escala  $a(t_e)$  diminui quanto maior for o valor de  $db_0$ . Também é possível constatar que a derivada do fator de anisotropia  $db(t_e)$  é muito pequena, o que colabora com a conclusão de que  $b(t)$  está tendendo a um valor constante e o espaço se tornando isotrópico. Assim essas soluções podem representar o universo atual que é isotrópico.

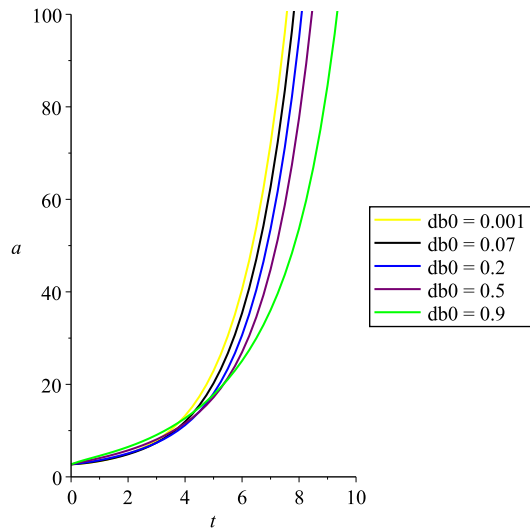


Figura 31 – Evolução do fator de escala  $a(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $db_0$

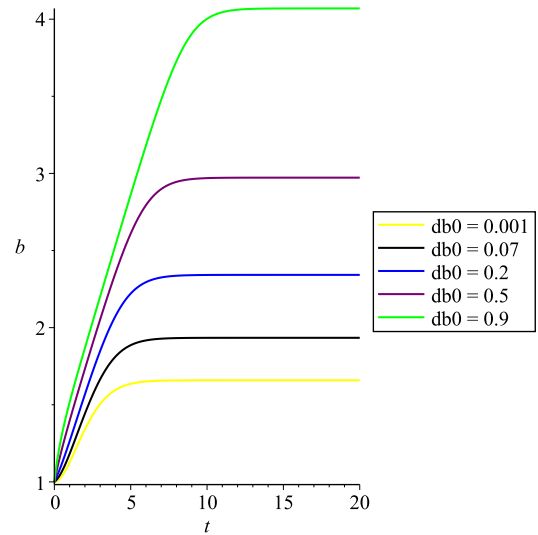


Figura 32 – Evolução do fator de anisotropia  $b(t)$  para soluções expansivas com a variação de  $db_0$

$db_0$	$da_0$	$t_e$	$a(t_e)$	$b(t_e)$	$da(t_e)$	$db(t_e)$
0.001	0.2733411462	35	$7,540812389 * 10^{(8)}$	1,658526269	$4,353690062 * 10^{(8)}$	$-8.819462806 * 10^{(-9)}$
0.07	0.3327072709	35	$6,551646676 * 10^{(8)}$	1,934054695	$3,782594972 * 10^{(8)}$	$1.318927485 * 10^{(-9)}$
0.2	0.6070189767	35	$5,567375475 * 10^{(8)}$	2,342089296	$3,214325729 * 10^{(8)}$	$8.855026042 * 10^{(-9)}$
0.5	1.382292674	35	$4,498064947 * 10^{(8)}$	2,972506639	$2,596959008 * 10^{(8)}$	$8.678563426 * 10^{(-9)}$
0.9	2.454267515	35	$2,521395891 * 10^{(8)}$	4,069819917	$1,455728596 * 10^{(8)}$	$-5.598674935 * 10^{(-9)}$

Tabela 16 – Soluções expansivas para a variação da condição inicial  $db_0$



## 5 Conclusão

O estudo do modelo cosmológico para a métrica do tipo Kantowski-Sachs, homogênea e anisotrópica, com o conteúdo material sendo formado pelo fluido de radiação e um gás de Chaplygin generalizado, mostrou a existência de dois tipos de soluções: um tipo de solução no qual o universo inicia a partir de um ponto singular *Big Bang* e evolui até um tamanho máximo e então começa a regredir até o fator de escala  $a(t)$  se tornar nulo, assim caracterizando um *Big Crunch*, e um tipo de solução que também descreve um universo que se inicia de uma singularidade inicial *Big Bang*, porém esse universo se expande indeterminadamente de maneira acelerada.

O modelo apresenta quatro parâmetros relativos ao gás de Chaplygin e ao fluido de radiação que são  $A, B, \alpha$  e  $C_r$ , respectivamente e quatro condições iniciais que são  $a_0, b_0, da_0$  e  $db_0$ . Foi estudado como a variação desses parâmetros e condições iniciais afetam a evolução dos fator de escala  $a(t)$  e o fator de anisotropia  $b(t)$ . Foi mostrado que dependendo dos valores introduzidos, as soluções irão resultar em uma evolução do tipo *Big Crunch* ou em soluções expansivas. A partir das figuras e tabelas, foi possível perceber que o fator de escala e o fator de anisotropia, apresentam um padrão de sempre aumentar (ou diminuir) quando aumentamos os valores de um dos parâmetros ou condições iniciais enquanto os outros se mantêm fixos, assim sendo possível verificar para quais configurações o universo se expande de maneira mais acelerada.

Para que o modelo estudado possa representar o universo atual que se encontra quase isotrópico [2], é necessário que o modelo que é inicialmente anisotrópico, apresente um comportamento isotrópico por um longo período de sua evolução. Para facilitar a visualização do processo de isotropização, reescrevemos a métrica de Kantowski-Sachs na parametrização de Misner (50) que mostra duas possibilidades para que essa métrica se torne isotrópica, que ocorrem quando o fator de anisotropia  $b(t)$  possuir valor nulo,  $b(t) = 0$  ou quando esse fator for constante,  $b(t) = \text{constante}$ . Ao analisar as soluções do modelo para diversos valores dos parâmetros e das condições iniciais, percebemos que existe um comportamento parecido em todas as soluções que é: nas soluções do tipo *Big Crunch* o fator de anisotropia  $b(t)$  evolui de forma expansiva até que abruptamente para de evoluir quando  $a(t)$  retorna a zero. Assim o universo descrito por essas soluções nunca passa pelo processo de isotropização se mantendo anisotrópico durante toda a sua evolução, de tal

forma que essas soluções não podem representar o universo atual. Já para as soluções expansivas, se percebe que o fator de anisotropia  $b(t)$  se torna constante após algum tempo de evolução, esse comportamento pode ser visualizado a partir dos gráficos e das tabelas de valores, aonde se percebe que  $db(t_e)$  irá possuir valores muito pequenos. Assim o universo representado por essas soluções passa pelo processo de isotropização, logo tornando-se isotrópico, o que mostra a possibilidade das soluções expansivas representarem o universo atual.

O estudo do modelo aqui apresentado possui como base teórica a relatividade geral, porém para se obter uma descrição mais fundamental da natureza, se faz necessário recorrer aos domínios da mecânica quântica. Existem diversos trabalhos na literatura que abordam o estudo quântico do universo primordial utilizando o gás de Chaplygin [27–33]. Assim uma proposta de continuação do presente trabalho é o estudo de sua quantização e a verificação de suas condições iniciais.

## Referências

- [1] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Claredon Press, (1992).
- [2] MAARTENS, R. *Is The Universe Homogeneous?*. Phil. Trans. R. Soc. A 2011 369, (2011)
- [3] PARTRIDGE, R.B. *3 K: The Cosmic Microwave Background Radiation*. Cambridge University Press, (1995)
- [4] KANTOWSKI, R.;SACHS, R.K. *Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models*. Journal of Mathematical Physics, v.7, n.443, (1966).
- [5] LORENZ, D. *Exact Bianchi-Kantowski-Sachs Solutions of Einstein's Field Equations*. J. Phys. A: Math. Gen. 16, 575–584 (1983)
- [6] WEBER, E. *Kantowski–Sachs Cosmological Models Approaching Isotropy*. J. Math. Phys. 25, 3279 (1984)
- [7] WEBER, E. *Kantowski–Sachs Cosmological Models as Big-Bang Models*. J. Math. Phys. 26, 1308 (1985)
- [8] GRØN, Ø; ERIKSEN, E. *A Dust-Filled Kantowski-Sachs Universe with  $\Lambda > 0$* . Phys. Lett. A 121, 217 (1987)
- [9] BURD, A.B; BARROW, J.D. *Inflationary Models with Exponential Potentials*. Nucl. Phys. B. 308, 929–945 (1988)
- [10] JENSEN, L.G; RUBACK, P.J. *Bubble Formation in Anisotropic Cosmologies*. Nucl. Phys. B. 325, 660–686 (1989)
- [11] KRORI, K.D. *An Exact Spinor Solution in Kantowski–Sachs Cosmology*. J. Math. Phys. 36, 1347 (1995)
- [12] BYLAND, S; SCIALOM, D. *Evolution of the Bianchi type I, Bianchi type III, and the Kantowski-Sachs Universe: Isotropization and Inflation*. Phys. Rev. D 57, 6065 (1998)
- [13] TIWARI, R.K; DWIVEDI, U.K. *Exact Kantowski–Sachs Cosmological Models in General Theory of Relativity*. Astrophys. Space Sci. 318, 249–253 (2008)

- 
- [14] ADHAV, K.S. *Binary Mixture of Anisotropic Dark Energy and Perfect Fluid in Kantowski-Sach Universe*. Eur. Phys. J. Plus 126, 103 (2011)
- [15] KERESZTES, Z; FORSBERG, M; BRADLEY, M; DUNSBY, P.K.S, GERGELY, L.Á. *Gravitational, Shear and Matter Waves in Kantowski-Sachs Cosmologies*. JCAP 11, 042 (2015)
- [16] OLIVEIRA-NETO, G; CANEDO, D.L; MONERAT, G.A. *An Anisotropic Kantowski-Sachs Universe with Radiation, Dust and a Phantom Fluid*. Brazilian Journal of Physics, (2022)
- [17] EINSTEIN, A. *Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik, 49 (7): 769–822, (1916)
- [18] HUBBLE, E. *A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae*. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p.168-173, (1929)
- [19] PERLMUTTER, S. *Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe and its Cosmological Implications*. Nature volume 391, pages 51–54 (1998)
- [20] SCHMIDT, BRIAN P. *The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae*. Astrophys J 507, 46–63 (1998).
- [21] PEEBLES, P.J.E; RATRA, B. *The Cosmological Constant and Dark Energy*. Rev.Mod.Phys.75:559-606, (2003)
- [22] WALD, R. M. *General Relativity*. 1 ed. [S.l.]: The University of Chicago Press, (1984).
- [23] MISNER, C. D.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. 1 ed. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, (1973).
- [24] CHAPLYGIN, S. *O Gazovykh Struiakh [On Gas Jets]* Em: Moscow-Leningrad: Hosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi literatury (in Russian) (1949)
- [25] KAMENSHCHIK, A; MOSCHELLA, U; PASQUIER, V. *An Alternative to Quintessence*. Phys. Lett. B 511, 265 (2001)

- [26] BILIC, N; TUPPER, G.B; VIOLLIER, R.D. *Unification of Dark Matter and Dark Energy: the Inhomogeneous Chaplygin Gas*. Phys. Lett. B 535, 17 (2002)
- [27] BENTO, M.C; BERTOLAMI, O; SEN, A.A. *Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion, and Dark-Energy-Matter Unification*. Phys. Rev. D 66, 043507 (2002)
- [28] BOUHMADI-LOPEZ, M; MONIZ, P.V. *FRW Quantum Cosmology with a Generalized Chaplygin Gas*. Phys. Rev. D 71, 063521 (2005)
- [29] MONERAT, G.A; OLIVEIRA-NETO, G; CORRÊA SILVA, E.V; FERREIRA FILHO, L.G; ROMILDO JR, P; FABRIS, J.C, FRACALOSSO, R; GONÇALVES, S.V.B; ALVARENGA, F.G. *Dynamics of the early universe and the initial conditions for inflation in a model with radiation and a Chaplygin gas*. Phys. Rev. D 76, 024017 (2007)
- [30] PEDRAM, P; JALALZADEH, S. *Quantum FRW Cosmological Solutions in the Presence of Chaplygin Gas and Perfect Fluid*. Phys. Lett. B 659, 6 (2008)
- [31] Majumder, B. *Quantum Scalar-metric Cosmology with Chaplygin gas*. Phys. Lett. B 697, 101 (2011)
- [32] SHABABI, H; PEDRAM, P. *Hořava–Lifshitz Quantum Cosmology in the Presence of Chaplygin Gas: Exact Solutions and the Late-Time Acceleration*. Int. J. Mod. Phys. D 26, 1750081 (2017)
- [33] MONERAT, G.A; SANTOS, C.G.M; OLIVEIRA-NETO, G; CORRÊA SILVA, E.V; FERREIRA FILHO, L.G. *The Dynamics of the Early Universe in a Model with Radiation and Generalized Chaplygin Gas*. Eur. Phys. J. Plus (2021)
- [34] RANDAL, L.; SUNDRUM, R. *An Alternative to Compactification*. Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999)
- [35] BORDEMANN, M.; HOPPE, J. *The Dynamics of Relativistic Membranes I: Reduction to 2-dimensional Fluid Dynamics*. Phys.Lett.B317:315-320, (1993)
- [36] ARNOWITT, R; DESER, S.; MISNER, C. *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*. Physical Review. 116 (5): 1322–1330. (1959)

- 
- [37] JACOBS, K.; MISNER, C.; ZAPOLSKY, H. *Quantum Cosmology II*. University of Maryland preprints (Unpublished)
- [38] MISNER, C. *Quantum Cosmology. I*. Phys. Rev. 186, 1319, (1969)