

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Marcony Meneguelli Alhadas

Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas no Plano

Juiz de Fora
2019

Marcony Meneguelli Alhadas

Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas no Plano

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Meneguelli Alhadas, Marcony.

Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas no Plano / Marcony Meneguelli Alhadas. – 2019.

80 f. : il.

Orientador: Laércio José dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Aplicações estáveis. 2. Superfícies. 3. Grafos. I. dos Santos, Laércio José, orient. II. Título.

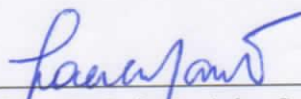
MARCONY MENEGUELLI ALHADAS

APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria e Topologia

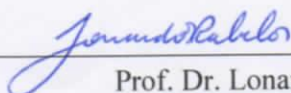
Aprovada em 10 de dezembro de 2019

BANCA EXAMINADORA




Prof. Dr. Laércio José dos Santos - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Lonardo Rabelo

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Catarina Mendes de Jesus Sánchez

Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

Agradecer é um gesto de humildade e reconhecimento, que não se restringe a palavras, pelo contrário, associa-se a uma emanção da alma para com o Universo e, de maneira específica, direciona-se a uma ou mais pessoas, de sorte que o agradecimento será sempre realizado quando a lembrança nos visitar novamente, pois é a conexão mental que nos situa perante a criação!

Nesse sentido, direciono as melhores e mais emocionadas vibrações...

Ao Senhor dos Mundos, que preside a criação desde sempre e o fará para toda a eternidade, e cujos mecanismos de justiça me conduziram até a realização deste trabalho.

Aos meus familiares, que ofereceram todo apoio e compreensão de que eu necessitava e que souberam gerenciar minhas ausências, entendendo a importância de que esse ciclo fosse concluído. Nesse sentido, não há como descrever a gratidão pela minha esposa, Giselle Barbosa Nunes Meneguelli, e pelo meu filho, Arthur Nunes Meneguelli, que representam o que de mais precioso eu conquistei na atual existência!

Ao meu orientador, Laércio José dos Santos, que rompeu muitos paradigmas que eu trazia com respeito à frieza dos professores de matemática, demonstrando-se um profissional extremamente competente, mas, acima de tudo, uma pessoa do bem, generosa e preocupada com aqueles que caminham ao seu lado.

Aos professores e servidores da UFJF, que contribuíram para minha formação acadêmica, nesses onze anos de instituição, desde o início da minha primeira graduação, em 2009.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, campus Santos Dumont, pela oportunidade de afastamento durante o ano de 2017, e aos companheiros de trabalho da mesma instituição, que sempre me apoiaram nessa trajetória.

Aos colegas de caminhada acadêmica, pelo apoio e companheirismo.

Obrigado!

“(...) Estou em mar alto, experimento amargas horas
A soledade é companheira inseparável
É tempo de provar o valor insofismável
De lançar as minhas redes e pescar, sem mais demoras (...)”
(Marcony Meneguelli Alhadas, trecho do poema “Mar Alto”)

RESUMO

Estudaremos, neste trabalho, aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano e veremos uma forma de diferenciar duas aplicações estáveis não equivalentes, através de um invariante global, os grafos. Veremos, também, quais grafos podem ser realizados por aplicações estáveis de superfícies no plano.

Palavras-chave: Aplicações estáveis. Superfícies. Grafos.

ABSTRACT

We will study, in this work, stable maps from closed surfaces to the plane and see a way to differentiate two non-equivalent stable maps through a global invariant, the graphs. We will also see which graphs can be realized by stable maps from surfaces to the plane.

Key-words: Stable maps. Surfaces. Graphs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Uma carta local e sua aplicação inversa	12
Figura 2 – Mudança de coordenadas	13
Figura 3 – Variedades com e sem bordo	15
Figura 4 – Aplicação diferenciável f entre as variedades X e Y	15
Figura 5 – Espaço tangente a uma variedade	17
Figura 6 – Derivada de uma aplicação diferenciável	18
Figura 7 – Exemplos de soma conexa	21
Figura 8 – Alça	22
Figura 9 – Superfícies com e sem alças	22
Figura 10 – n -células, $n = 0, 1, 2$	23
Figura 11 – A imagem da esquerda não representa uma célula, enquanto a imagem da direita representa uma 2-célula	23
Figura 12 – n -complexos, $n = 0, 1, 2$	24
Figura 13 – 2-complexo sobre a esfera	25
Figura 14 – $\chi(K) = 8 - 8 + 1 = 1$	26
Figura 15 –	26
Figura 16 – O espaço subjacente $ K $ é homeomorfo ao disco D^2	27
Figura 17 – Exemplos de 2-complexos associados à esfera e ao toro	28
Figura 18 – Exemplos de grafos	29
Figura 19 – Identificação do número de ciclos de um grafo	30
Figura 20 – Árvore G com a aresta $e = uv$	31
Figura 21 – Árvore G com a aresta $e = uv$ removida	31
Figura 22 – G_1 e G_2 são grafos não isomorfos	33
Figura 23 – $S_r(f) = (j^1 f)^{-1}(S_r)$	43
Figura 24 – Os conjuntos singulares referidos nos Exemplos 3.4 e 3.5 estão destacados em vermelho	45
Figura 25 – Conjunto singular e conjunto de ramificação de uma aplicação	47
Figura 26 – Forma local dos pontos de dobra	47
Figura 27 – Forma local dos pontos de cúspide	49
Figura 28 – Formas locais dos pontos de dobra e cúspide	50
Figura 29 – Separação local da superfície por uma curva do conjunto singular	51
Figura 30 – As duas extremidades abertas	52
Figura 31 – Uma extremidade aberta e a outra fechada	52
Figura 32 – As duas extremidades fechadas	52
Figura 33 – Pré-imagens dos pontos separados por uma curva do conjunto de rami- ficação	53
Figura 34 – Mudança de sinal na passagem de uma componente conexa para outra	54
Figura 35 – Projeções da esfera no plano	56

Figura 36 – Projeções da esfera no plano	59
Figura 37 – Aplicações estáveis da esfera no plano, com conjuntos de ramificação idênticos	60
Figura 38 – Grafos associados à esfera e ao toro, com os respectivos conjuntos de curvas destacados	61
Figura 39 – Grafo associado a um 2-toro com um conjunto de curvas	61
Figura 40 – Grafo associado a uma superfície com curvas	62
Figura 41 – Grafos associados a aplicações estáveis do toro no plano	65
Figura 42 – Grafos associados a aplicações estáveis da esfera no plano	65
Figura 43 – “Instante” em que o caminho F_t passa pelo complemento $C^\infty(X, \mathbb{R}^2) \setminus$ $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$	67
Figura 44 – Transições do tipo Lábios (L), Bicos (B) e Rabo de Andorinha (S) . .	67
Figura 45 – Transições do tipo Lábios (L) no conjunto de ramificação de uma aplicação da esfera no plano	68
Figura 46 – Transições no conjunto de ramificação de aplicações do toro no plano .	69
Figura 47 – Cirurgia horizontal	70
Figura 48 – Cirurgia horizontal sobre uma única aplicação	72
Figura 49 – Cirurgia vertical	73
Figura 50 – Cirurgia vertical sobre uma única aplicação	74
Figura 51 – Cirurgia horizontal entre as aplicações f e g	75
Figura 52 –	76
Figura 53 –	77
Figura 54 –	77
Figura 55 –	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	RESULTADOS PROPEDÊUTICOS	12
2.1	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS	12
2.1.1	Aplicações Diferenciáveis entre Variedades	15
2.2	SUPERFÍCIES	19
2.3	COMPLEXOS E CARACTERÍSTICA DE EULER	22
2.4	GRAFOS	28
3	APLICAÇÕES ESTÁVEIS	35
3.1	JATOS	35
3.2	A TOPOLOGIA DE WHITNEY	36
3.3	SINGULARIDADES	40
3.4	APLICAÇÕES UM-GENÉRICO	44
3.5	APLICAÇÕES ESTÁVEIS	54
4	GRAFOS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO	60
4.1	GRAFOS ASSOCIADOS A UMA COLEÇÃO DE CURVAS FECHADAS EM UMA SUPERFÍCIE	60
4.2	GRAFOS COMO INVARIANTES DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS	64
5	REALIZAÇÃO DE GRAFOS POR APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO	66
5.1	TRANSIÇÕES	66
5.2	REALIZAÇÃO DE ÁRVORES COM PESO ZERO	68
5.3	CIRURGIAS	70
5.4	REALIZAÇÃO DE GRAFOS COM PESO	73
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

A Teoria das Singularidades ocupa-se com o estudo e classificação de aplicações diferenciáveis, com respeito às singularidades (pontos em que a derivada não tem posto máximo) que contêm. O estudo de singularidades de um conjunto especial de aplicações, as aplicações estáveis, baseia-se nas teorias de Hassler Whitney ([1]) e Marston Morse ([2], [3]). Entretanto, foi René Thom quem notou (no final dos anos 50) que todos os resultados até então obtidos poderiam ser incorporados em uma única teoria, tendo publicado, junto com Harold Levine, notas (em 1960, reimpressas em [4]) que deram a primeira exposição geral do assunto. Outros matemáticos também se ocuparam do tema e deram importantes contribuições à área, como Bernard Malgrange ([5]), John Mather ([6]), Vladimir Arnold ([7]) e Charles Wall ([4]). Outras referências de destaque são Gibson ([8]), Golubitsky ([9]) e Young ([10]).

O objetivo geral do presente trabalho é o estudo das aplicações estáveis que, intuitivamente, podem ser entendidas como aplicações que não se alteram mediante pequenas perturbações. Em outras palavras, são aplicações com relação às quais existe uma vizinhança, numa determinada topologia, tal que todas as aplicações que pertencem à referida vizinhança são equivalentes à aplicação inicial considerada.

De maneira específica, ocupar-nos-emos com as aplicações estáveis $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$, em que X é uma superfície de classe C^∞ , fechada, conexa e orientável. Existem trabalhos sobre aplicações estáveis cujo contradomínio não é o plano, entre as quais destacamos as aplicações que têm a esfera como contradomínio (Mendes de Jesus em [11], [12], [13]). Existem também trabalhos sobre aplicações estáveis entre superfícies, em que uma delas é não orientável, como é o caso do plano projetivo (Mendes de Jesus em [14]).

Existem invariantes topológicos que nos permitem conhecer melhor as aplicações estáveis. Alguns desses invariantes são locais e, apesar de auxiliarem no estudo destas aplicações, não possibilitam a distinção das mesmas, em alguns contextos específicos. Para tal, utilizaremos os grafos, que se apresentarão como invariantes topológicos globais e, portanto, como ferramentas de classificação, mostrando como e quando as aplicações estáveis podem a eles se associar.

Tendo em vista o avançar das pesquisas sobre a associação entre as aplicações estáveis e os grafos, entendemos que a principal contribuição deste trabalho reside nos desenvolvimentos apresentados no capítulo 3, no qual pudemos apresentar, de maneira um pouco mais detalhada, se comparado aos demais trabalhos existentes, os resultados referentes às aplicações estáveis, contemplando uma possível trajetória de estudos necessária para um entendimento razoável destes objetos.

Faremos, agora, uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo.

No capítulo 2, apresentaremos alguns resultados preliminares, que visam conferir um embasamento mínimo para os assuntos subsequentes, sendo trabalhados conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis, superfícies, complexos e característica de Euler e grafos.

No capítulo 3, trataremos das aplicações estáveis e, para tal, serão desenvolvidos, nas quatro primeiras seções, temas relevantes e que compõem um caminho razoável para o entendimento deste tópico específico, trabalhado na última seção.

O capítulo 4 visa apresentar resultados que nos permitam distinguir duas aplicações estáveis não equivalentes, através de um invariante topológico global para tais aplicações, os grafos. Nesse sentido, veremos que a toda aplicação estável está associado um grafo.

Por fim, no capítulo 5, apresentaremos um resultado que mostra quais características um grafo deve ter para que exista uma aplicação estável à qual ele esteja associado (as aplicações estáveis aqui consideradas são aquelas mencionadas no terceiro parágrafo deste capítulo).

2 RESULTADOS PROPEDEÚTICOS

Desenvolveremos, neste capítulo, assuntos que antecedem e subsidiam os próximos tópicos de estudo, e que se configuram como bases necessárias para o entendimento mais amplo dos objetos que serão apresentados ao longo do texto.

Não temos a pretensão de dar um desenvolvimento extenso de cada um dos itens aqui inseridos, mas apenas situar o leitor quanto às principais definições e teoremas pertinentes a cada contexto.

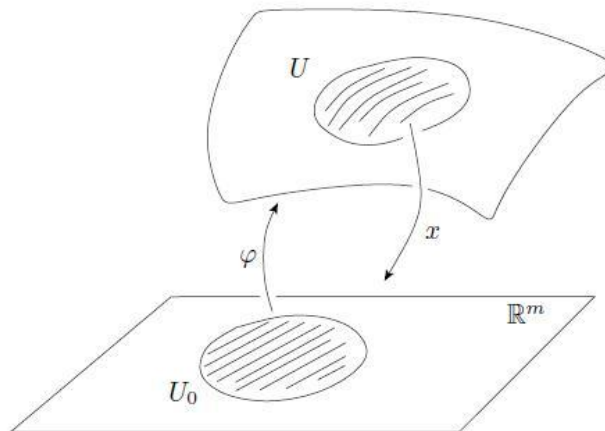
Importa ressaltar que as bibliografias indicadas representam um repositório mais fecundo sobre as matérias em pauta, de sorte que devem sempre ser consultadas em caso de não entendimento amplo dos conteúdos trabalhados.

2.1 VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Na presente seção, apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre variedades diferenciáveis. Tais definições e teoremas serão utilizados nos desdobramentos futuros deste texto e as referências principais são Lee ([15]) e Lima ([16] e [17]). Podem também ser consultadas Carmo ([18]), Guillemin ([19]) e Warner ([20]).

Definição 2.1. *Seja X um espaço topológico. Um **sistema de coordenadas locais** ou **carta local** em X é um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset X$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é a **dimensão** de $x : U \rightarrow x(U)$. Para cada $p \in U$, tem-se $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p), p = 1, \dots, m$ são chamados as **coordenadas** do ponto $p \in X$ no sistema x (veja figura 1).*

Figura 1 – Uma carta local e sua aplicação inversa



Fonte: Imagem adaptada de [17]

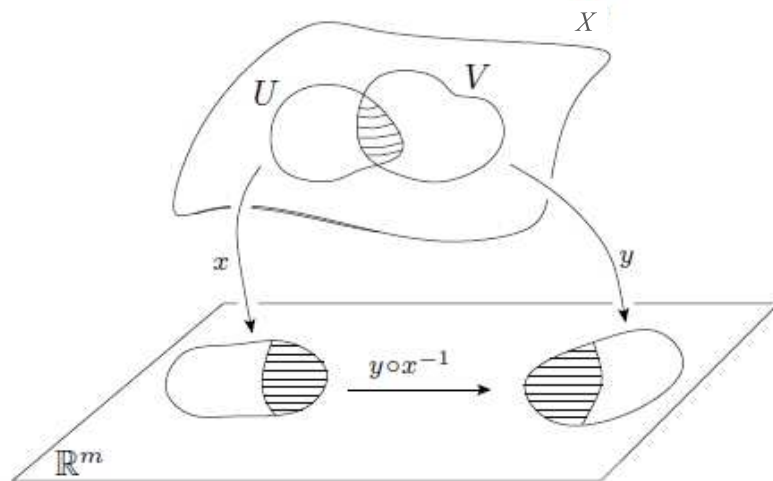
Dados os sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^j = y^j(p)$ relativamente ao sistema y .

Definição 2.2. *A correspondência*

$$(x^1(p), \dots, x^m(p)) \leftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$, que é chamado **mudança de coordenadas** (veja figura 2).

Figura 2 – Mudança de coordenadas



Fonte: Imagem adaptada de [17]

Definição 2.3. Um **atlas** de dimensão m sobre um espaço topológico X é uma coleção \mathfrak{A} de sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , cujos domínios U cobrem X . Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathfrak{A}$ são chamados as **vizinhanças coordenadas** de \mathfrak{A} .

Definição 2.4. Um espaço topológico X no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma **variedade topológica** de dimensão m . Em outras palavras, X é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de X tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^m .

Definição 2.5. Um atlas \mathfrak{A} sobre um espaço topológico X diz-se **diferenciável**, de classe C^k ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy} , $x, y \in \mathfrak{A}$ são aplicações de classe C^k . Escreve-se então $\mathfrak{A} \in C^k$.

Como $\varphi_{yx} = (\varphi_{xy})^{-1}$, segue-se que os φ_{xy} são, de fato, difeomorfismos de classe C^k . Em particular, se $y \circ x^{-1} : (x^1, \dots, x^m) \rightarrow (y^1, \dots, y^m)$, então o jacobiano (determinante da matriz jacobiana) $\det(\partial y^j / \partial x^i)$ é $\neq 0$ em todos os pontos onde é definido.

Definição 2.6. *Seja \mathfrak{A} um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico X . Um sistema de coordenadas locais $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X diz-se **admissível** relativamente ao atlas \mathfrak{A} se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a \mathfrak{A} , com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k . Em outras palavras, se $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em X .*

Definição 2.7. *Um atlas \mathfrak{A} , de dimensão m e classe C^k , sobre X , diz-se **maximal** quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a \mathfrak{A} . Todo atlas de classe C^k em X pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas maximal de classe C^k : basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas locais admissíveis.*

Definição 2.8. *Uma **variedade diferenciável**, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado (X, \mathfrak{A}) , onde X é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, e \mathfrak{A} é um atlas maximal de dimensão m e classe C^k sobre X .*

Caso façamos um pequeno ajuste na Definição 2.1 e consideremos um sistema de coordenadas locais como um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U)$, em que U é um subconjunto aberto de um espaço topológico X e $x(U)$ é um aberto de \mathbb{R}^m ou um aberto do semiespaço $\mathbb{R}_0^m = \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m; x^m \geq 0\}$, então os objetos introduzidos na Definição 2.8 terão um sentido mais amplo.

Nesse contexto, considerando uma tal variedade diferenciável, seja $A \subset X$ o subconjunto formado pelos pontos $p \in X$ tais que existe um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow x(U)$, com $p \in U$ e $x(U)$ um aberto de \mathbb{R}^m .

A partir daí, temos as Definições 2.9 e 2.10.

Definição 2.9. *O conjunto fechado $\partial X = X \setminus A$ é chamado **bordo** de X .*

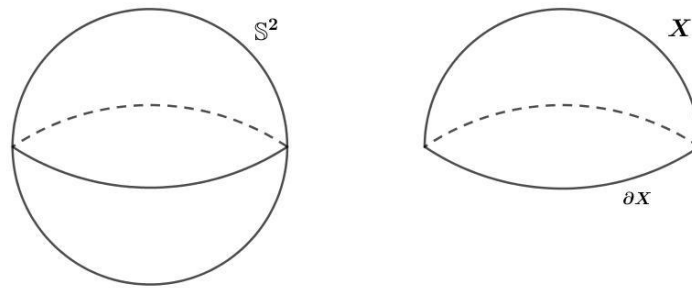
Definição 2.10. *Uma **variedade diferenciável com bordo** X é aquela que satisfaz $\partial X \neq \emptyset$.*

Definição 2.11. *Caso $\partial X = \emptyset$, X é uma **variedade diferenciável no sentido estrito**, conforme a Definição 2.8, chamada **variedade sem bordo**.*

A Figura 3 ilustra uma variedade sem bordo (esfera) e uma com bordo (hemisfério).

No presente trabalho, estamos interessados no estudo de variedades diferenciáveis sem bordo. Portanto, a menos que seja feita menção explícita, o termo “variedade” será usado para designar uma “variedade diferenciável sem bordo”.

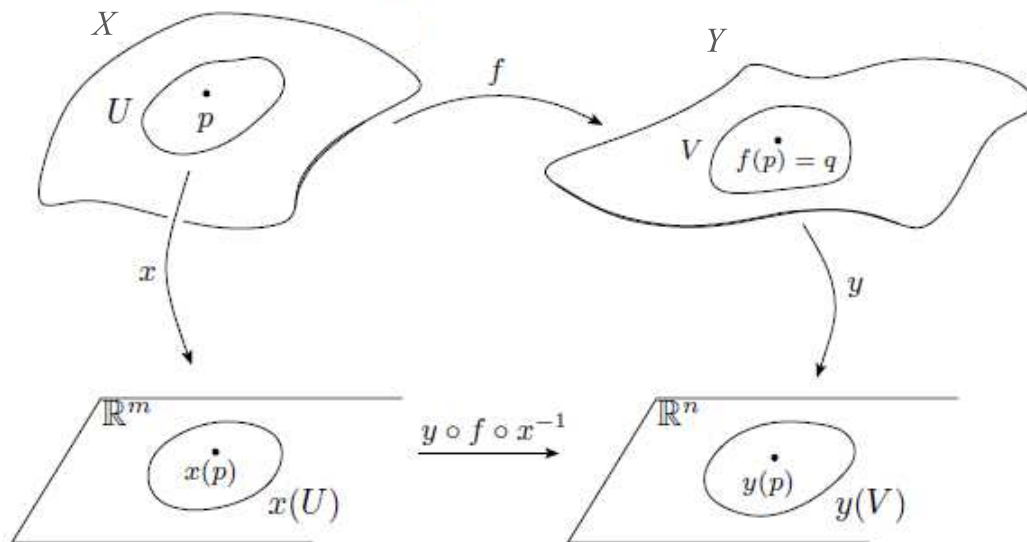
Figura 3 – Variedades com e sem bordo



Fonte: Imagem produzida pelo autor

2.1.1 Aplicações Diferenciáveis entre Variedades

Definição 2.12. *Sejam X, Y variedades de classe C^k ($k \geq 1$), com dimensões m e n , respectivamente. Diz-se que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **diferenciável no ponto** $p \in X$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em Y , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$ (veja Figura 4).*

Figura 4 – Aplicação diferenciável f entre as variedades X e Y 

Fonte: Imagem adaptada de [17]

Definição 2.13. *A aplicação $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ é denominada a **expressão** de f nas coordenadas locais x, y .*

Como as mudanças de coordenadas em X e Y são difeomorfismos de classe C^k , a definição de diferenciabilidade independe dos sistemas de coordenadas x, y .

Definição 2.14. Nas condições da Definição 2.12, dizemos que $f : X \rightarrow Y$ é **diferenciável** se f for diferenciável em todos os pontos de X .

Exemplo 2.1. Os **caminhos diferenciáveis** são aplicações diferenciáveis $\lambda : I \rightarrow X$, onde I é um intervalo aberto da reta real. A condição de diferenciabilidade de λ exige que λ seja contínua e que, dado um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , para todo subintervalo J tal que $\lambda(J) \subset U$, a composta $x \circ \lambda : J \rightarrow x(U)$ seja um caminho diferenciável em \mathbb{R}^m .

Seja X uma variedade de dimensão m e classe C^k e seja p um ponto de X . Indicamos por \mathcal{C}_p o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \rightarrow X$, definidos num intervalo aberto J , contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0. Se $\lambda \in \mathcal{C}_p$ e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas em X , com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em U . Em vista disso, toda vez que escrevemos $x \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de λ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto menor J' , contendo 0, tal que $\lambda(J') \subset U$.

Definição 2.15. Diremos que dois caminhos $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$ são **equivalentes**, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ têm o mesmo vetor-velocidade em $t = 0$, isto é, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

Vale a pena observar que, neste caso, a igualdade $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ será verdadeira para todo sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , $p \in U$. Resulta daí que a relação $\lambda \sim \mu$ é de fato uma relação de equivalência em \mathcal{C}_p .

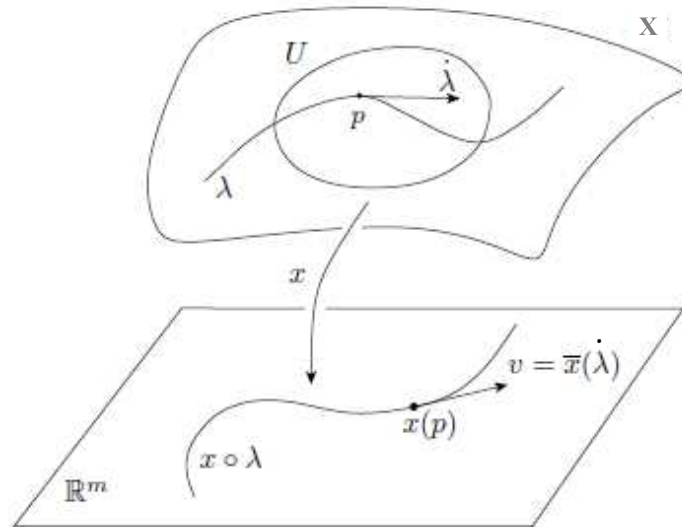
Definição 2.16. O **vetor-velocidade** $\dot{\lambda}$ de um caminho $\lambda \in \mathcal{C}_p$ é a classe de equivalência de λ . Ou seja, $\dot{\lambda} = \{\mu \in \mathcal{C}_p ; \mu \sim \lambda\}$. Portanto, dados $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$, tem-se $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ se, e somente se, $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$ para algum (logo para todo) sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , com $p \in U$.

Definição 2.17. O conjunto quociente \mathcal{C}_p / \sim será indicado por $T_p X$ e será chamado o **espaço tangente** à variedade X no ponto p (veja Figura 5).

Observação 2.1. Em [17], capítulo V, o autor mostra que cada sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X , com $p \in U$, dá origem a uma bijeção $\bar{x} = \bar{x}(p) : T_p X \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $\bar{x}(\dot{\lambda}) = (x \circ \lambda)'(0)$. Mais do que isso, ele mostra que $T_p X$ tem estrutura de espaço vetorial e que \bar{x} é, na realidade, um isomorfismo entre $T_p X$ e \mathbb{R}^m . Disso, segue que $\dim T_p X = \dim X$, $\forall p \in X$. Pode também ser consultada [16], capítulo I.

Dados um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em X e um ponto $p \in U$, indicamos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p) \right\}$ a base de $T_p X$ que é levada pelo isomorfismo $\bar{x} :$

Figura 5 – Espaço tangente a uma variedade



Fonte: Imagem adaptada de [17]

$T_p X \rightarrow \mathbb{R}^m$ sobre a base canônica $\{e_1, \dots, e_m\}$. Às vezes, escreveremos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ em vez de $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. O vetor básico $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p X$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\lambda \in \mathcal{C}_p$, tal que $(x \circ \lambda)'(0) = e_i$.

Definição 2.18. O conjunto $TX = \bigcup_{p \in X} T_p X$ (união disjunta) é chamado **o espaço fibrado tangente** a X .

Observação 2.2. Conforme [16], capítulo III, o conjunto TX tem estrutura de variedade diferenciável e sua dimensão é igual a $2 \cdot \dim X$.

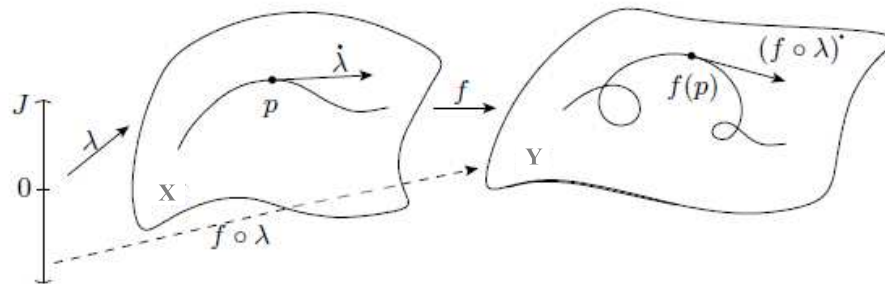
Mais detalhes sobre o conjunto TX podem ser encontrados na mesma referência citada na Observação 2.2.

Definição 2.19. Sejam X e Y variedades diferenciáveis de dimensão m e n , respectivamente, e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in X$. A **derivada** de f no ponto p é a transformação linear $df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ que associa a cada $v = \dot{\lambda} \in T_p X$ o elemento $df_p(v) = (f \circ \lambda)' \in T_{f(p)} Y$, vetor-velocidade do caminho $f \circ \lambda \in \mathcal{C}_{f(p)}$ (veja Figura 6).

Em [17], o autor mostra que, de fato, $df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ é uma transformação linear, cuja matriz em relação às bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ de $T_p X$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ de $T_{f(p)} Y$ é a matriz jacobiana $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$ da aplicação $f_{xy} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ no ponto $x(p)$.

Segundo [17], capítulo V, parágrafo 3, temos o Teorema 2.1.

Figura 6 – Derivada de uma aplicação diferenciável



Fonte: Imagem adaptada de [17]

Teorema 2.1. (Regra da Cadeia)

Sejam X, Y, Z variedades diferenciáveis, $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ aplicações diferenciáveis nos pontos $p \in X$ e $f(p) \in Y$, respectivamente. Então, $g \circ f : X \rightarrow Z$ é diferenciável no ponto $p \in X$ e $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p : T_p X \rightarrow T_{g(f(p))} Z$.

Seja E um espaço vetorial de dimensão m . Seja \mathcal{B} o conjunto das bases (sempre trabalharemos com bases ordenadas!) de E . Definiremos em \mathcal{B} uma relação de equivalência. Diremos que duas bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ e $\{f_1, \dots, f_m\}$ do espaço vetorial E são equivalentes (diremos, mais especificamente, que elas são coerentes) se $e_j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i f_i$ ($j = 1, \dots, m$), onde a matriz (α_j^i) de mudança de base tem determinante > 0 .

É claro que \mathcal{B} vai repartir-se em duas classes de equivalência, pois uma matriz de mudança de bases ou tem determinante > 0 , ou < 0 .

Definição 2.20. Uma **orientação** no espaço vetorial E é uma dessas classes de equivalência. Um **espaço vetorial orientado** é um par formado por um espaço vetorial E e uma orientação. As bases de E pertencentes a esta orientação serão chamadas **positivas** e as outras **negativas**.

Definição 2.21. Diremos que uma variedade diferenciável X é **orientável** quando for possível orientar cada espaço tangente $T_p X$, $p \in X$, de tal modo que a orientação dos $T_p X$ varie “continuamente” no sentido seguinte: se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas locais em X , com U conexo, então a base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)\} \subset T_p X$, associada ao sistema x , ou é positiva para todo $p \in U$, ou então é negativa para todo $p \in U$. No primeiro caso, diremos que o sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **positivo**, e escreveremos $x > 0$. No segundo caso, diremos que x é **negativo**, e poremos $x < 0$. Diremos que X está **orientada** quando se escolhe uma coleção de orientações nos espaços $T_p X$, do tipo acima. Esta coleção é a **orientação** de X .

As Definições 2.22, 2.23 e 2.24 estão baseadas em [15], capítulos 2, 4 e 15, respectivamente. Os Teoremas 2.2 e 2.3 estão baseados em [15], capítulos 4 e 15, respectivamente.

Definição 2.22. *Sejam X e Y variedades de classe C^∞ . Um **difeomorfismo** $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação bijetora de classe C^∞ , cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ é também de classe C^∞ .*

Definição 2.23. *Sejam X e Y variedades de classe C^∞ . Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um **difeomorfismo local** se todo ponto $p \in X$ tem uma vizinhança U tal que $f(U)$ é aberto em Y e $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo.*

Teorema 2.2. *(Teorema da Função Inversa)*

Sejam X e Y variedades de classe C^∞ e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de classe C^∞ . Seja $p \in X$ um ponto tal que df_p é um isomorfismo. Então, existem vizinhanças conexas U_0 de p e V_0 de $f(p)$, tais que $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ é um difeomorfismo.

Definição 2.24. *Sejam X e Y variedades orientáveis de classe C^∞ e $f : X \rightarrow Y$ um difeomorfismo local. Dizemos que f **preserva orientação** se, para cada ponto $p \in X$, o isomorfismo df_p leva bases positivas de T_pX em bases positivas de $T_{f(p)}Y$. Caso contrário, se, para cada ponto $p \in X$, o isomorfismo df_p leva bases positivas de T_pX em bases negativas de $T_{f(p)}Y$, dizemos que f **inverte orientação**.*

Teorema 2.3. *Sejam X e Y variedades orientáveis de classe C^∞ e $f : X \rightarrow Y$ um difeomorfismo local. Então, f preserva orientação se, e somente se, o determinante da matriz jacobiana de f é maior que zero para cada ponto $p \in X$.*

2.2 SUPERFÍCIES

Veremos, nesta seção, alguns resultados sobre superfícies, mais especificamente sobre a topologia das mesmas.

Esta seção não tem uma única referência principal. Os resultados estão baseados em várias referências, citadas ao longo do texto.

Definição 2.25. *Uma **superfície** de classe C^k é uma variedade de dimensão 2 e classe C^k .*

Definição 2.26. *Uma superfície compacta e sem bordo é chamada de **superfície fechada**.*

Considerando uma superfície X imersa no \mathbb{R}^3 temos, de acordo com Carmo ([21]), capítulo 2, parágrafo 6 (pode também ser consultada Araújo ([22]), capítulo 2, parágrafo 4) que, dado um sistema de coordenadas $x(x_1, x_2)$ em p , fica determinada a escolha de um vetor normal unitário N em p , a saber,

$$N = \frac{\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}}{\left\| \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \right\|}(p).$$

Escolhendo um outro sistema de coordenadas locais $y(y_1, y_2)$ em p , vemos que

$$\frac{\partial}{\partial y^1} \wedge \frac{\partial}{\partial y^2} = \det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \right),$$

onde $\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)$ é a matriz de mudança de coordenadas. Portanto, N se conserva ou muda de sinal conforme o jacobiano seja positivo ou negativo, respectivamente.

Definição 2.27. Um **campo diferenciável de vetores normais** em um aberto $U \subset X$ é uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in U$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a X em q .

Teorema 2.4. Uma superfície $X \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários em X .

Observação 2.3. Dada uma superfície orientável X , a cada orientação está associado um campo diferenciável de vetores normais unitários, e vice-versa. Além disso, para superfícies conexas, existem exatamente dois campos de vetores normais, a saber, os campos determinados por N e seu simétrico.

De acordo com Lima ([23]), temos o Teorema 2.5.

Teorema 2.5. Se $X \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície compacta, então X é orientável.

É possível “unir” duas superfícies de maneira a formar uma “nova”, através de um procedimento chamado soma conexa.

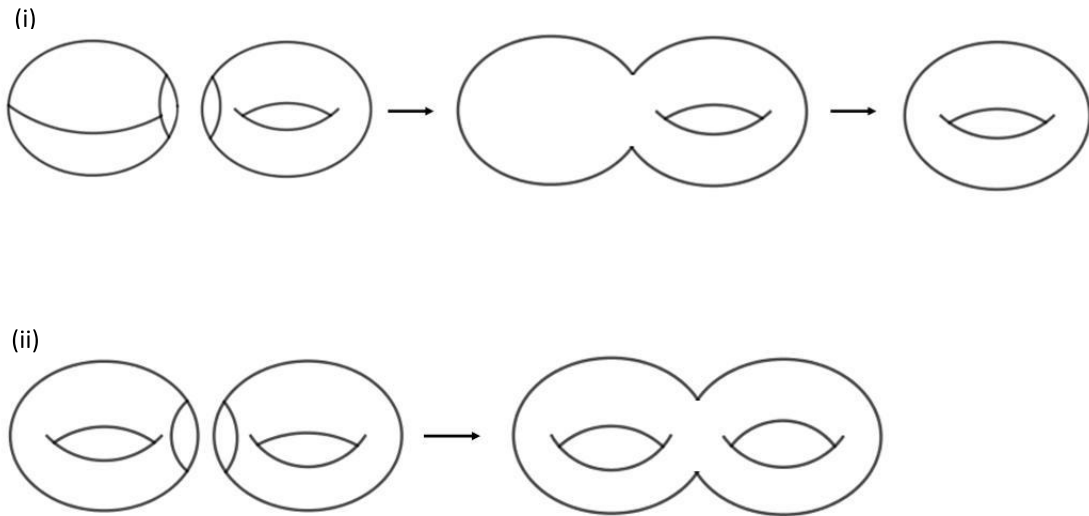
A soma conexa entre duas superfícies pode ser vista, de maneira intuitiva, conforme apresentado em Kinsey ([24]), capítulo 4, parágrafo 2, definição 4.8, que diz que, dadas duas superfícies X e Y , a soma conexa delas é obtida removendo-se um pequeno disco de cada uma e “colando” o bordo circular desses discos para formar uma nova superfície.

A Figura 7, (i), ilustra uma soma conexa entre a esfera e o toro, o que resulta no próprio toro, enquanto a Figura 7, (ii), ilustra uma soma conexa entre dois toros, produzindo um 2-toro (ou bi-toro).

De maneira um pouco mais formal, temos a Definição 2.28, que está baseada em [15], parágrafo 4.

Definição 2.28. Sejam X e Y duas superfícies conexas de classe C^∞ . A **soma conexa** entre elas, denotada por $X \# Y$, é obtida removendo-se os interiores de discos fechados,

Figura 7 – Exemplos de soma conexa



Fonte: Imagem produzida pelo autor

$B_1 \subset X$ e $B_2 \subset Y$, e identificando os respectivos bordos circulares ∂B_1 e ∂B_2 através de um difeomorfismo.

Observação 2.4. Com relação à soma conexa de superfícies, a esfera se comporta como elemento neutro. Isso significa que $X \# \mathbb{S}^2 = X$, para qualquer superfície X .

Este resultado será formalizado no Teorema 2.7.

Vamos descrever, agora, um processo para adicionar um “tubo” a uma superfície qualquer, processo esse associado à definição de soma conexa.

Dada uma superfície X , escolhamos sobre ela dois discos fechados $B_1, B_2 \subset X$ e removemos seus interiores. Na sequência, tomamos um tubo limitado, difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, e identificamos seus componentes de bordo a ∂B_1 e ∂B_2 através de difeomorfismos, realizando duas somas conexas. A partir daí, podemos estabelecer a Definição 2.29.

Definição 2.29. Dada uma superfície X , o tubo a ela adicionado pelo processo acima descrito é chamado uma **alça** da superfície (veja Figura 8).

Note que a esfera é uma superfície sem alça, o 1-toro é uma superfície com uma alça e, de forma geral, um n -toro é uma superfície com n alças, como ilustra a Figura 9.

Para adicionar uma alça numa superfície X , basta realizar a soma conexa entre X e o toro \mathbb{T}^2 .

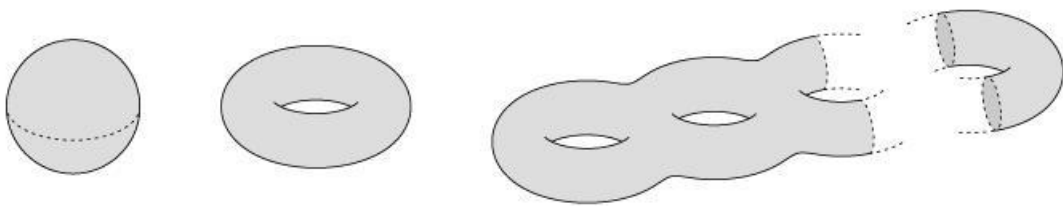
Definição 2.30. O número de alças de uma superfície X é chamado de **gênero** de X e denotado por $g(X)$.

Figura 8 – Alça



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Figura 9 – Superfícies com e sem alças



Fonte: <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/2-manifolds>

A partir da Definição 2.30, temos que a esfera tem gênero zero e o n -toro tem gênero n .

Para finalizar esta seção, apresentaremos um resultado que trata das superfícies de interesse nesse trabalho.

O Teorema 2.6 está baseado em Fulton ([25]), capítulo 17, segundo parágrafo, Teorema 17.4.

Teorema 2.6. *Seja X uma superfície fechada, conexa e orientável. Se $g(X) = g$, então X é difeomorfa ao g -toro.*

Corolário 2.1. *Sejam X e Y superfícies fechadas, conexas e orientáveis. X e Y são difeomorfas se, e somente se, $g(X) = g(Y)$.*

2.3 COMPLEXOS E CARACTERÍSTICA DE EULER

No sentido de desenvolver uma visão global sobre as superfícies, definiremos os objetos chamados complexos e, a partir deles, introduziremos o conceito de característica de Euler, que é um invariante topológico para superfícies, no sentido de que superfícies topologicamente equivalentes têm a mesma característica de Euler.

A referência principal para esta seção é [24]. Podem também ser consultadas as referências [25], Hatcher ([26]), White ([27]) e Wilson ([28]).

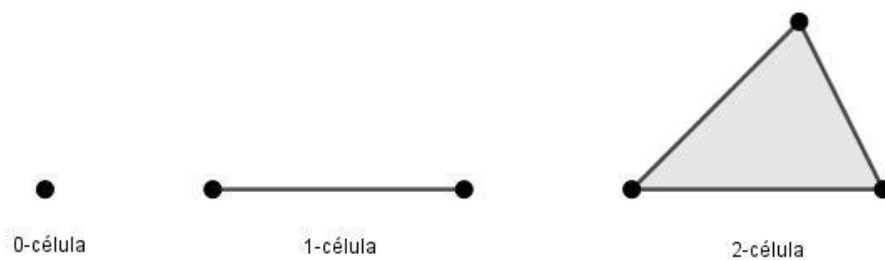
As Definições 2.31, 2.32 e 2.33 abaixo estão baseadas em [24], capítulo 4, primeiro parágrafo.

Definição 2.31. *Uma **célula n -dimensional** ou **n -célula** é um conjunto cujo interior é difeomorfo ao disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, de dimensão n , com a propriedade adicional de que a fronteira deve ser dividida em um número finito de células de dimensões inferiores.*

1. Uma 0-célula é um ponto e é chamada de **vértice**.
2. Uma 1-célula é um segmento ou linha que liga vértices e é chamada de **aresta**.
3. Uma 2-célula é uma região delimitada por arestas e é chamada de **face**.

Na Figura 10, vemos uma representação de alguns dos elementos da Definição 2.31.

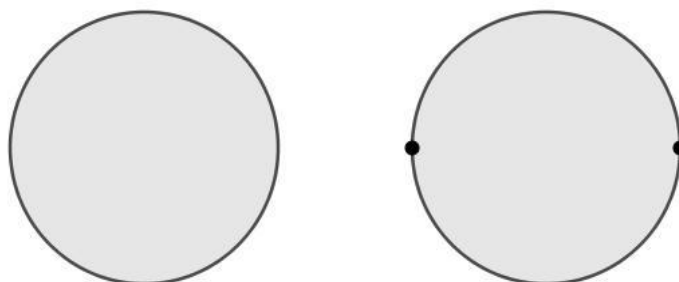
Figura 10 – n -células, $n = 0, 1, 2$



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Na Figura 11, vemos que a imagem da esquerda não representa uma célula, uma vez que a fronteira não é formada por 1-células ou 0-células, enquanto a imagem da direita representa uma 2-célula.

Figura 11 – A imagem da esquerda não representa uma célula, enquanto a imagem da direita representa uma 2-célula



Fonte: Imagem produzida pelo autor

As células podem ser “agrupadas”, formando o que chamamos de complexos. Pode-se dizer que, na formação de um complexo, as células são “coladas”, vértice a vértice, aresta a aresta, face a face, e assim sucessivamente. Nesse caso, deve-se ter cuidado para não “colar” uma face triangular com uma retangular, por exemplo.

Formalmente, temos a Definição 2.32.

Definição 2.32. Um *complexo n -dimensional* ou *n -complexo* é um conjunto finito de células,

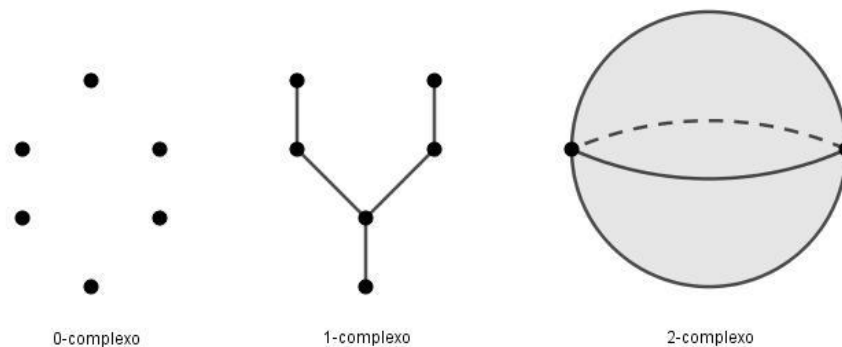
$$K = \bigcup \{ \sigma : \sigma \text{ é uma célula} \},$$

tal que:

1. Se $\sigma \in K$, então todas as células que compõem σ também pertencem a K .
2. Se σ e τ são elementos de K , então $\text{int}(\sigma) \cap \text{int}(\tau) = \emptyset$.
3. A dimensão do n -complexo K , que é igual a n , representa a dimensão da célula de maior dimensão que pertence a K .

A Figura 12 traz exemplos de n -complexos.

Figura 12 – n -complexos, $n = 0, 1, 2$



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Definição 2.33. Seja K um n -complexo. O conjunto de todos os pontos das células de K ,

$$|K| = \{ x : x \in \sigma, \text{ e } \sigma \text{ é uma célula de } K \},$$

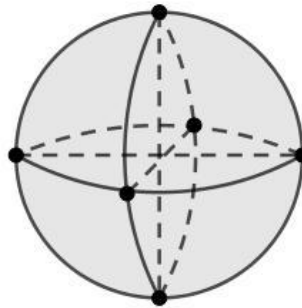
é chamado o *espaço subjacente* de K .

Observação 2.5. Note que o n -complexo K se distingue de seu espaço subjacente $|K|$, uma vez que o primeiro é um conjunto de células, enquanto o segundo é um conjunto de pontos.

De acordo com [24], a uma superfície é possível associar um complexo. Na verdade, espaços topológicos podem ser representados por vários complexos diferentes, associando a eles vértices, arestas, faces, etc.

A Figura 13 ilustra um 2-complexo sobre a esfera, diferente, por exemplo, do 2-complexo representado na Figura 12.

Figura 13 – 2-complexo sobre a esfera



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Definição 2.34. Seja K um n -complexo. A **característica de Euler** de K é o número

$$\chi(K) = \#(0\text{-células}) - \#(1\text{-células}) + \#(2\text{-células}) - \#(3\text{-células}) + \dots,$$

em que $\#(r\text{-células})$ representa o número de r -células de K .

Para ilustrar a Definição 2.34, consideremos um 2-complexo K tal que $f = \#\{\text{faces}\}$, $a = \#\{\text{arestas}\}$ e $v = \#\{\text{vértices}\}$. Assim,

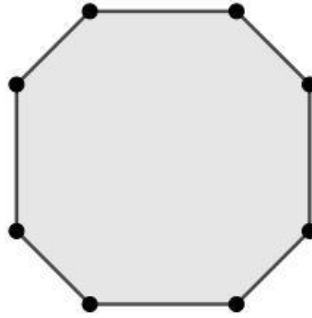
$$\chi(K) = v - a + f.$$

Para um polígono de n lados K , considerado como um 2-complexo, temos:

$$\chi(K) = n - n + 1 = 1,$$

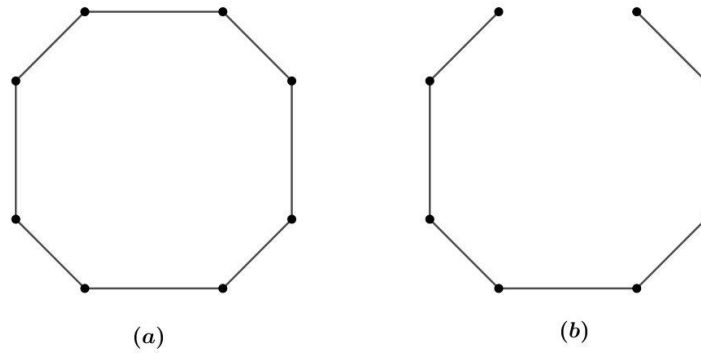
como ilustra o exemplo da Figura 14.

Exemplo 2.2. Consideremos os complexos K_1 e K_2 representados na Figura 15, (a) e (b), respectivamente. Temos que $\chi(K_1) = 8 - 8 = 0$ e $\chi(K_2) = 8 - 7 = 1$.

Figura 14 – $\chi(K) = 8 - 8 + 1 = 1$ 

Fonte: Imagem produzida pelo autor

Figura 15 –



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Observação 2.6. De acordo com [24], capítulo 5, quarto parágrafo, pode-se provar que, dada uma superfície X compacta e conexa, todo 2-complexo K tal que $|K|$ é homeomorfo a X , possui a mesma característica de Euler. Isso mostra que, em particular, a característica de Euler é um invariante topológico para os 2-complexos. Além disso, a partir desse resultado, estabelecemos a Definição 2.35.

Definição 2.35. Seja X uma superfície compacta e conexa. A característica de Euler de X , denotada por $\chi(X)$ é o número “ c ” tal que $\chi(K) = c$, para algum 2-complexo K tal que $|K|$ é homeomorfo a X .

O Teorema 2.7 está baseado em Massey ([29]), capítulo 1, parágrafo 8, Proposição 8.1. O Teorema 2.8 está baseado em [29], capítulo 1, parágrafo 8 e [24], capítulo 5, parágrafo 4.

Teorema 2.7. Sejam X e Y duas superfícies. Então:

$$\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

Teorema 2.8. *Seja X uma superfície compacta e orientável. Então:*

$$\chi(X) = 2 - 2g(X).$$

Com respeito à mesma referência citada na Observação 2.6, temos o Teorema 2.9, que garante que a característica de Euler como invariante topológico não se restringe aos 2-complexos.

Teorema 2.9. *A característica de Euler é um invariante topológico para superfícies compactas, conexas e orientáveis.*

Isso significa que se X e Y são superfícies compactas, conexas, orientáveis e difeomorfas, então $\chi(X) = \chi(Y)$. Se, além disso, as superfícies forem sem bordo, então vale o Corolário 2.2.

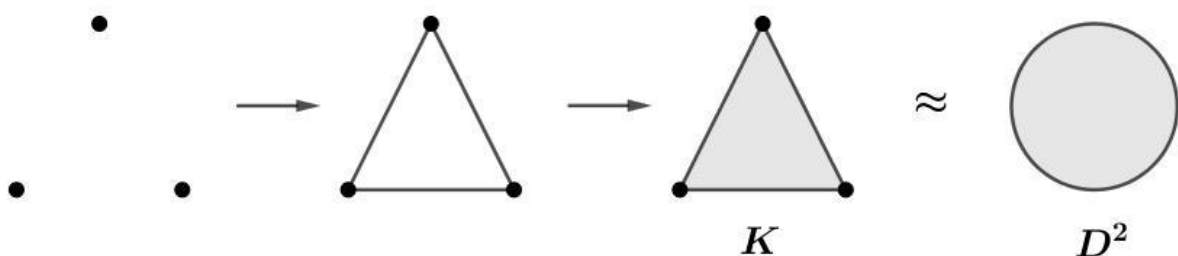
Corolário 2.2. *Sejam X e Y superfícies fechadas, conexas e orientáveis. X e Y são difeomorfas se, e somente se, $\chi(X) = \chi(Y)$.*

Demonstração. Basta usar o Corolário 2.1 e o Teorema 2.8. □

Encerraremos esse seção com alguns exemplos de cálculo da característica de Euler de algumas superfícies.

Exemplo 2.3. *Para calcular a característica de Euler do disco fechado D^2 , criamos um 2-complexo K cujo espaço subjacente $|K|$ é homeomorfo ao disco, conforme Figura 16. Assim, temos $\chi(D^2) = \chi(K) = v - a + f = 3 - 3 + 1 = 1$.*

Figura 16 – O espaço subjacente $|K|$ é homeomorfo ao disco D^2



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Exemplo 2.4. *Para calcular a característica de Euler da esfera \mathbb{S}^2 e do toro \mathbb{T}^2 , vamos associar a cada uma dessas superfícies um 2-complexo, conforme Figura 17.*

Na Figura 17, (i), temos $v = 2$, $a = 2$ e $f = 2$, de modo que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2 - 2 + 2 = 2$. Já em (ii), temos $v = 4$, $a = 8$ e $f = 4$, o que nos fornece $\chi(\mathbb{T}^2) = 4 - 8 + 4 = 0$.

Figura 17 – Exemplos de 2-complexos associados à esfera e ao toro



Fonte: Imagem retirada de Machado ([30])

Observação 2.7. 1. É possível comparar o valor de $\chi(\mathbb{S}^2)$ obtido no Exemplo 2.4 com os resultados que obtemos se utilizarmos os 2-complexos apresentados nas Figuras 12 e 13.

No caso da Figura 12, temos $v = 2$, $a = 4$ e $f = 4$, de modo que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2 - 4 + 4 = 2$. Na Figura 13, temos $v = 6$, $a = 12$ e $f = 8$, fornecendo $\chi(\mathbb{S}^2) = 6 - 12 + 8 = 2$. A igualdade dos resultados já era esperada, em função do Teorema 2.9.

2. Para calcular a característica de Euler do toro, podemos usar a Definição 2.30 e o Teorema 2.8, obtendo $\chi(\mathbb{T}^2) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$.

2.4 GRAFOS

Serão apresentados, nesta seção, alguns conceitos e resultados básicos relativos à Teoria dos Grafos, necessários ao desenvolvimento dos próximos capítulos. As principais referências aqui utilizadas para esse tema são [24], [27] e [28].

Definição 2.36. Um **grafo**, G , é um 1-complexo conexo. Denotaremos por $V(G)$ e $E(G)$ os conjuntos de vértices e arestas de G , respectivamente. Uma aresta em $E(G)$ que conecta os vértices v_1 e v_2 será denotada por $\{v_1, v_2\}$ ou simplesmente por v_1v_2 . Neste caso, v_1 e v_2 serão chamados **vértices adjacentes** e o vértice v_1 e a aresta v_1v_2 são chamados **incidentes** um com o outro (bem como o vértice v_2 e a aresta v_1v_2). Dizemos também que as arestas v_1v_2 e v_1v_3 , com $v_2 \neq v_3$, são **arestas adjacentes**. O **grau** de um vértice v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas com as quais v é incidente. Quando $d(v) = 1$, dizemos que v é um **vértice extremo**. Neste caso, a aresta com a qual v é incidente é chamada **aresta extrema**. Um **laço** em G é uma “aresta” da forma vv .

Definição 2.37. Um **caminho** de um grafo G é uma sequência alternada de vértices e arestas

$$v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, \dots, v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_n$$

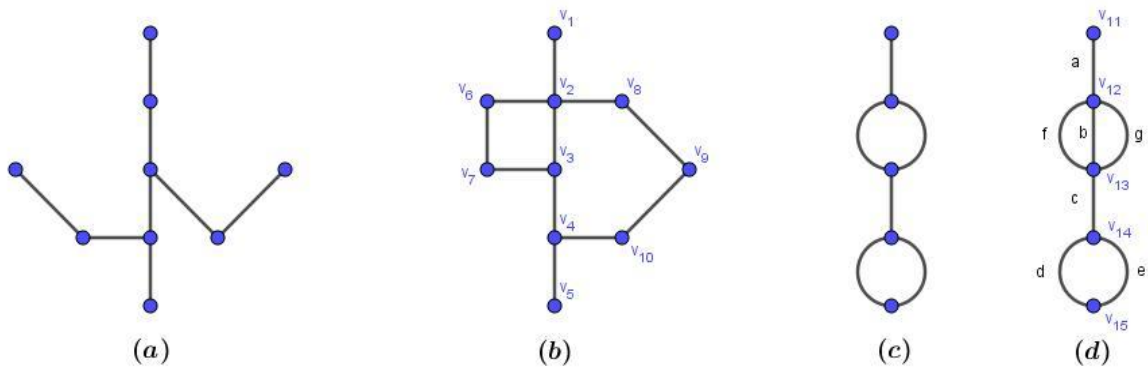
em que os vértices são dois a dois distintos. O número natural n é chamado **tamanho** do caminho. Na hipótese de ocorrer $v_0 = v_n$, o caminho é chamado de **ciclo**. Um grafo G que não possui ciclos é chamado de **árvore**.

Pode-se representar um caminho apenas pela sequência dos vértices que o compõe, entendendo que as arestas presentes no caminho são aquelas definidas pelos respectivos vértices, na ordem em que aparecem. Assim, o caminho acima ficaria representado por

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n.$$

Podemos ver alguns exemplos de grafos na Figura 18.

Figura 18 – Exemplos de grafos



Fonte: Imagem produzida pelo autor

O grafo da Figura 18, (a), representa uma árvore, uma vez que não tem ciclos. Já as imagens de (b), (c) e (d) representam grafos que contêm ciclos. Em (c), não é difícil perceber que o grafo contém dois ciclos. Porém, em (b) e (d), essa análise não é tão simples. Para resolver essa questão, apresentamos a Observação 2.8, baseada em [24], capítulo 5, parágrafo 2.

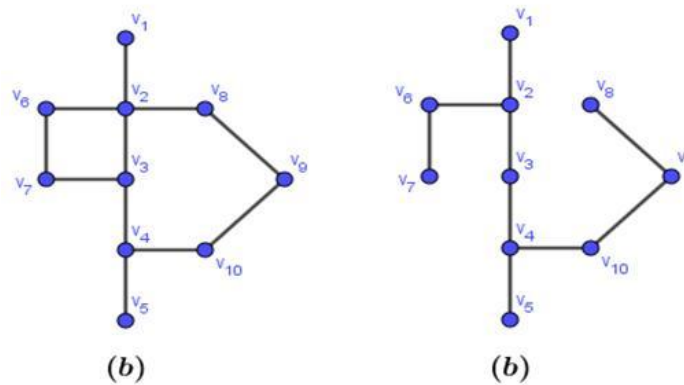
Observação 2.8. Ao analisar a Figura 18, (b), poderíamos, de maneira precipitada, identificar três ciclos:

1. $v_2v_3v_7v_6v_2$
2. $v_2v_3v_4v_{10}v_9v_8v_2$
3. $v_2v_8v_9v_{10}v_4v_3v_7v_6v_2$

Entretanto, o ciclo (3) nada mais é do que a “junção” dos ciclos (1) e (2), de maneira que ele não deve ser contado. Assim, o grafo representado na figura em questão tem apenas dois ciclos.

Um modo prático de realizar esta análise é o seguinte: retira-se do grafo o número mínimo de arestas para que ele se transforme numa árvore; as arestas serão retiradas dos ciclos e o número de vértices não mudará; é claro que isso pode ser feito de mais de uma maneira; no fim, a quantidade de arestas retiradas representa o número de ciclos do grafo. Isso pode ser observado na Figura 19, que ilustra que o grafo tem, na realidade, apenas dois ciclos.

Figura 19 – Identificação do número de ciclos de um grafo



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Portanto, seguindo a Observação 2.8, podemos concluir que o grafo da Figura 18, (d), tem três ciclos.

Definição 2.38. Dado um grafo G qualquer, o grafo H obtido de G pela retirada do número mínimo de arestas para que ele se transforme numa árvore é chamado **árvore de abrangência** de G .

Observação 2.9. A característica de Euler de um grafo G é dada por

$$\chi(G) = v - a,$$

em que v é o número de vértices e a é o número de arestas.

Isso se deve ao fato de G ser um 1-complexo.

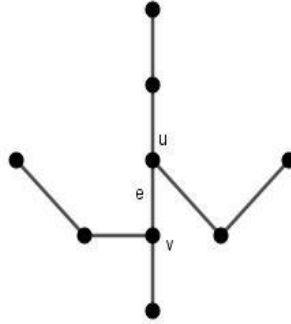
Os Teoremas 2.10, 2.11 e 2.12 são baseados em [24], capítulo 5, parágrafo 2, Teoremas 5.5, 5.6 e 5.7, respectivamente.

Teorema 2.10. Se um grafo G é uma árvore, então $\chi(G) = 1$.

Demonstração. Esta demonstração será feita por indução no número “ a ” de arestas. Considerando uma árvore G composta por zero arestas e um vértice, temos $\chi(G) = 1 - 0 = 1$.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para qualquer árvore que tenha menos de n arestas e seja G uma árvore tal que $a = n$. Escolhamos uma aresta $e = uv$ qualquer de G , conforme Figura 20.

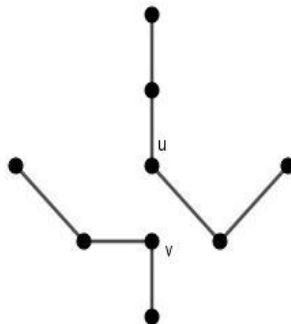
Figura 20 – Árvore G com a aresta $e = uv$



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Removendo de G a aresta e , obtemos duas “subárvores” desconectadas, G_1 contendo u e G_2 contendo v , conforme Figura 21.

Figura 21 – Árvore G com a aresta $e = uv$ removida



Fonte: Imagem produzida pelo autor

G_1 e G_2 devem, de fato, ser desconectadas, pois, caso contrário, existiria um caminho contendo os vértices u e v e não contendo a aresta e , o que configuraria a existência de um ciclo em G , o que é uma contradição.

As “subárvores” G_1 e G_2 têm menos de n arestas cada e, pela hipótese de indução, vale:

$$\chi(G_1) = v_1 - a_1 = 1$$

$$\chi(G_2) = v_2 - a_2 = 1,$$

onde v_1 e a_1 , e v_2 e a_2 representam as quantidades de vértices e arestas de G_1 e G_2 , respectivamente.

Note que os vértices de G pertencem a G_1 ou a G_2 , mas nunca a ambas, de modo que $v = v_1 + v_2$. Além disso, as arestas de G são compostas pelas arestas de G_1 , as arestas de G_2 e a aresta e , fornecendo $a = a_1 + a_2 + 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}\chi(G) = v - a &= (v_1 + v_2) - (a_1 + a_2 + 1) \\ &= (v_1 - a_1) + (v_2 - a_2) - 1 \\ &= 1 + 1 - 1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.11. *Seja G um grafo com n ciclos distintos. Então:*

$$\chi(G) = 1 - n$$

Demonstração. Seja G um grafo com n ciclos distintos. Para cada um dos n ciclos, removamos uma aresta do referido ciclo, sem que o grafo seja desconectado em “subgrafos”, de modo a obter uma árvore de abrangência de G , G_1 (Definição 2.38). Logo, pelo Teorema 2.10, temos que $\chi(G_1) = 1$. Como o número de vértices de G e G_1 é o mesmo, segue que:

$$1 = \chi(G_1) = v - (a - n) = (v - a) + n = \chi(G) + n$$

Portanto, $\chi(G) = 1 - n$.

□

Se considerarmos um grafo como um subespaço do \mathbb{R}^2 , com a topologia induzida pelo espaço em questão, temos o Teorema 2.12.

Teorema 2.12. *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

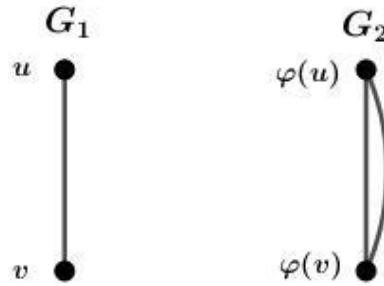
Isso significa que se G_1 e G_2 são dois grafos topologicamente equivalentes, então $\chi(G_1) = \chi(G_2)$.

Definição 2.39. *Dois grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** quando existem bijeções $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ e $\psi : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$, com φ preservando adjacências, isto é, $uv \in E(G_1)$ se, e somente se, $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2)$.*

A Figura 22 ilustra dois grafos não isomorfos. Apesar de existir uma bijeção entre os conjuntos de vértices, preservando adjacências, não existe bijeção entre os conjuntos de arestas. Enquanto G_1 possui uma única aresta, G_2 possui duas.

Note que “isomorfismo” é uma relação de equivalência no conjunto de todos os grafos. Em particular, se φ preserva adjacência, então φ^{-1} também preserva adjacência.

Figura 22 – G_1 e G_2 são grafos não isomorfos



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Teorema 2.13. *Sejam G_1 e G_2 dois grafos isomorfos. Se $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ é uma bijeção que preserva adjacência, então para todo $v \in V(G_1)$ temos que o grau de $\varphi(v)$ é igual ao grau de v , isto é, $d(\varphi(v)) = d(v)$ para todo $v \in V(G_1)$.*

Demonstração. Sejam $v \in V(G_1)$, $d = d(v)$ e $v_1, \dots, v_d \in V(G_1)$ tal que $vv_i \in E(G_1)$ para todo $i = 1, \dots, d$. Como φ preserva adjacência temos que $\varphi(v)\varphi(v_i) \in E(G_2)$ para todo $i = 1, \dots, d$. Logo, $d(v) \leq d(\varphi(v))$. Usando que a bijeção φ^{-1} também preserva adjacência temos que $d(\varphi(v)) \leq d(v)$. Como v é arbitrário, temos que $d(\varphi(v)) = d(v)$ para todo $v \in V(G_1)$. \square

Definição 2.40. *Um grafo G é dito **bipartido** se for possível particionar o conjunto de vértices $V(G)$ em dois subconjuntos não vazios V' e V'' tais que toda aresta de G tem um vértice em V' e o outro em V'' .*

Atribuindo um sinal “+” aos vértices de V' e um sinal “-” aos vértices de V'' , esta definição é equivalente a dizer que um grafo é bipartido quando for possível atribuir sinais \pm a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos.

Segundo [27], capítulo 2, parágrafo 4, Teorema 2.19, temos o Teorema 2.14.

Teorema 2.14. *Um grafo é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos têm tamanho par.*

Corolário 2.3. *Toda árvore é um grafo bipartido.*

Exemplo 2.5. *Na Figura 18, o grafo apresentado em (b) é bipartido, uma vez que ele contém dois ciclos, um com tamanho quatro e o outro com tamanho seis.*

Definição 2.41. *Um **grafo com peso** é um grafo em que a cada um dos seus vértices v está associado um número natural $g(v)$, chamado **peso do vértice**.*

No presente trabalho, os grafos de interesse são os grafos com peso, de modo que, a partir de agora, por simplicidade de escrita, sempre que escrevermos a palavra “grafo”, estaremos tratando de “grafos com peso”.

3 APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Neste capítulo, trataremos de um dos assuntos centrais do presente texto, as aplicações estáveis. Objetivamos fazer uma construção gradativa dos resultados, estabelecendo uma base razoável que permita uma compreensão mais clara desse tema. Percorrendo as quatro primeiras seções, apresentaremos definições e teoremas que servirão de suporte para a última seção, quando, enfim, as aplicações mencionadas serão definidas, conectando-se com tudo o que tiver sido anteriormente trabalhado.

Algumas discussões serão feitas de maneira mais intuitiva que formal, mas buscaremos, na maioria dos casos, oferecer uma justificativa que possa convencê-lo, mesmo que não tenha a força de uma demonstração. As exceções serão os resultados demasiadamente complexos e/ou que fujam dos propósitos específicos deste trabalho.

A referência principal que será utilizada no capítulo é [9], que trata com detalhes desse assunto. Podem ser consultadas também as referências [7], [8] e [10].

A menos que seja feita menção contrária, consideraremos X e Y como variedades de classe C^∞ , com $\dim X = m$ e $\dim Y = n$, e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de classe C^∞ . O conjunto das aplicações, de X em Y , de classe C^∞ será denotado por $C^\infty(X, Y)$.

3.1 JATOS

Nesta seção, vamos definir estes objetos chamados jatos e alguns outros a eles relacionados, que serão utilizados na definição das singularidades de uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis.

Definição 3.1. *Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações tais que $f(p) = g(p) = q$.*

1. Dizemos que f e g têm **contato de ordem 1** em p quando $df_p = dg_p$, como aplicações de $T_pX \rightarrow T_qY$.
2. Dizemos que f e g têm **contato de ordem k** em p , $k \geq 1$, quando $df : TX \rightarrow TY$ tem contato de ordem $(k - 1)$ com dg em todo ponto de T_pX . Isso é denotado por $f \sim_k g$ em p .
3. $C^\infty(X, Y)_{p,q}$ é o conjunto das aplicações $f : X \rightarrow Y$, de classe C^∞ , tais que $f(p) = q$.
4. $J^k(X, Y)_{p,q} = C^\infty(X, Y)_{p,q} / \sim_k$ é o conjunto quociente definido a partir da relação de equivalência “contato de ordem k ”. Note que cada classe de equivalência $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$ é o conjunto formado pelas aplicações de X em Y , de classe C^∞ , que levam o p no q e que têm contato de ordem k entre si.

5. Seja $J^k(X, Y) = \bigcup_{(p,q) \in X \times Y} J^k(X, Y)_{p,q}$ (união disjunta). Cada elemento $\sigma \in J^k(X, Y)$ é chamado um **k-jato** de aplicações de X em Y , ou simplesmente um **k-jato** de X em Y .
6. Dado $\sigma \in J^k(X, Y)$ um k -jato, devem existir $p \in X$ e $q \in Y$ tais que $\sigma \in J^k(X, Y)_{p,q}$. Neste caso, p é chamado a **fonte** de σ e q é chamado a **meta** de σ . A aplicação $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$ dada por $\sigma \mapsto (\text{fonte de } \sigma)$ é chamada **aplicação fonte** e a aplicação $\beta : J^k(X, Y) \rightarrow Y$ dada por $\sigma \mapsto (\text{meta de } \sigma)$ é chamada **aplicação meta**.
7. Seja $j^k f : X \rightarrow J^k(X, Y)$ definida por $j^k f(p) =$ classe de equivalência de f em $J^k(X, Y)_{p, f(p)}$ para todo p em X . Neste caso, $j^k f$ é chamado um **k-jato** de f .

É possível provar, conforme consta em [9], capítulo II, segundo parágrafo, que $j^k f$ é uma aplicação C^∞ e que $j^k f(p)$ é formado pelas aplicações que têm a mesma expansão de Taylor até o grau k , ressignificando o conceito de “contato de ordem k ”.

Observação 3.1. Seja A_j^k o espaço vetorial dos polinômios em j variáveis, de grau menor ou igual a k , com coeficientes reais e que se anulam na origem. Usando um argumento de análise combinatória, mais especificamente as combinações completas ou combinações com repetição (vide Morgado ([31]), capítulo 2, parágrafo 6), temos que A_j^k é isomorfo a \mathbb{R}^N , em que

$$N = d(j, k) + d(j, k - 1) + \dots + d(j, 1), \text{ em que } d(j, k) = \frac{(j + k - 1)!}{(j - 1)! k!}$$

Assim, A_j^k é uma variedade de classe C^∞ , e, dessa maneira, o conjunto $B_{j,l}^k = A_j^k \times A_j^k \times \dots \times A_j^k$ (l fatores) também o é. Além disso, $\dim(B_{j,l}^k) = l \cdot \dim(A_j^k) = l \cdot N$.

Destacamos ainda que, conforme [9], capítulo II, segundo parágrafo, Teorema 2.7, $J^k(X, Y)$ é uma variedade de classe C^∞ com $\dim(J^k(X, Y)) = m + n + \dim(B_{m,n}^k)$. E, de acordo com a mesma referência, capítulo I, parágrafo 5, Lema 5.9, $J^k(X, Y)$ é metrizável, de modo que pode-se considerar sempre a topologia proveniente da métrica existente.

3.2 A TOPOLOGIA DE WHITNEY

O principal objetivo desta seção é definir uma topologia no conjunto $C^\infty(X, Y)$, a fim de que tenhamos uma ideia mais precisa do que seja uma vizinhança de uma aplicação f do referido conjunto, o que será utilizado nas seções seguintes.

Apresentamos, além da definição formal de tal topologia, um desenvolvimento mais intuitivo dos abertos que a compõem, para facilitar o entendimento.

Conforme [9], capítulo II, parágrafo 3, temos as definições e resultados seguintes:

Definição 3.2. *Seja k um inteiro não negativo fixado e U um subconjunto de $J^k(X, Y)$. Definimos:*

$$M(U) = \{f \in C^\infty(X, Y); j^k f(X) \subset U\}.$$

Proposição 3.1. *Nas condições da Definição 3.2, vale a igualdade $M(U) \cap M(V) = M(U \cap V)$.*

Demonstração. $f \in M(U) \cap M(V) \Leftrightarrow f \in M(U)$ e $f \in M(V) \Leftrightarrow j^k f(X) \subset U$ e $j^k f(X) \subset V \Leftrightarrow j^k f(X) \subset U \cap V \Leftrightarrow f \in M(U \cap V)$. \square

Teorema 3.1. *A família de conjuntos $\mathfrak{B} = \{M(U)\}$, em que U é um conjunto aberto de $J^k(X, Y)$ (para um determinado k fixado), forma uma base para uma topologia em $C^\infty(X, Y)$.*

Demonstração. Utilizaremos aqui a definição contida em Munkres ([32]), capítulo 2, parágrafo 13, que coincide com a Proposição 10 do capítulo 3 de Lima ([33]).

1. Dada $f \in C^\infty(X, Y)$, queremos exibir um $U_f \subset J^k(X, Y)$ aberto tal que $f \in M(U_f)$, ou seja, tal que $j^k f(X) \subset U_f$. Tomando $U_f = J^k(X, Y)$, temos $M(U_f) = C^\infty(X, Y)$ e, de maneira óbvia, vale $j^k f(X) \subset U_f = J^k(X, Y)$.
2. Dados U e V abertos de $J^k(X, Y)$, $U \cap V$ também é um aberto de $J^k(X, Y)$. Assim, $M(U)$, $M(V)$ e $M(U \cap V)$ são elementos de \mathfrak{B} . Dada $f \in M(U) \cap M(V)$ temos, pela Proposição 3.1, que $f \in M(U \cap V) \subset M(U) \cap M(V)$.

\square

Definição 3.3. *A topologia apresentada no Teorema 3.1, gerada por \mathfrak{B} , é chamada a Topologia C^k de Whitney.*

Denotaremos por W_k o conjunto formado pelos subconjuntos abertos de $C^\infty(X, Y)$ na topologia C^k de Whitney, ou seja, W_k é a própria topologia.

Teorema 3.2. *O conjunto $W = \{W_k\}$, $k \geq 1$, forma uma base para uma topologia em $C^\infty(X, Y)$.*

Demonstração. Faremos o mesmo caminho da demonstração anterior e utilizaremos as mesmas referências anteriormente citadas.

1. Vale a mesma argumentação da demonstração anterior, uma vez que o conjunto $M(U_f)$ exibido é um elemento de \mathfrak{B} e, portanto, pertence a W_k que, por sua vez, está contido em W .

2. Considerando que vale $W_k \subset W_l$ sempre que $k \leq l$, e tomando W_k e W_l com $k \leq l$, temos: $f \in W_k \cap W_l = W_k \subset W_k \cap W_l$.

Resta-nos, portanto, demonstrar a condição citada para W_k e W_l . Para isso, consideremos a função $\pi_k^l : J^l(X, Y) \rightarrow J^k(X, Y)$, que associa a cada classe de equivalência $\sigma \in J^l(X, Y)$ cujo representante é f a classe $\bar{\sigma} \in J^k(X, Y)$ com o mesmo representante.

Reparemos que a função π_k^l está bem definida, pelo fato de termos $k \leq l$. De fato, dadas f e g representantes de uma mesma classe $\sigma \in J^l(X, Y)$, temos que f e g são funções com a mesma fonte, a mesma meta, e que têm contato de ordem l entre si e com todas as funções pertencentes a σ . Nessas condições, f e g definirão a mesma classe $\bar{\sigma} \in J^k(X, Y)$, uma vez que:

1. permanecerão com a mesma fonte e a mesma meta.
2. ter contato de ordem l implica em ter contato de ordem k , já que $k \leq l$.
3. a relação “contato de ordem k ” é uma relação de equivalência.

Pela definição de π_k^l , temos que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j^l f} & J^l(X, Y) \\ & \searrow j^k f & \downarrow \pi_k^l \\ & & J^k(X, Y) \end{array}$$

Assim, dado $U \subset J^k(X, Y)$ aberto, segue que:

$$\begin{aligned} f \in M(U) &\Leftrightarrow j^k f(p) \in U, \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow \pi_k^l \circ j^l f(p) \in U, \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow \pi_k^l(j^l f(p)) \in U, \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow j^l f(p) \in (\pi_k^l)^{-1}(U), \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow f \in M((\pi_k^l)^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Portanto, $M(U) = M((\pi_k^l)^{-1}(U))$.

Sendo π_k^l uma função contínua e U um aberto de $J^k(X, Y)$, então $(\pi_k^l)^{-1}(U)$ é um aberto de $J^l(X, Y)$, de modo que $M((\pi_k^l)^{-1}(U)) = M(U)$ é um aberto básico da topologia W_l .

Portanto, cada um dos abertos básicos da topologia W_k é também um aberto básico da topologia W_l , comprovando a inclusão desejada. \square

Definição 3.4. *A topologia apresentada no Teorema 3.2, gerada por W , é chamada a Topologia C^∞ de Whitney.*

A fim de que possamos ter uma ideia um pouco mais clara sobre a topologia da Definição 3.4, vamos descrever um conjunto de vizinhanças básicas da topologia C^k de Whitney para uma função $f \in C^\infty(X, Y)$.

Escolhamos, inicialmente, uma métrica d em $J^k(X, Y)$ compatível com sua topologia, cuja existência é assegurada pelo Lema 5.9 do parágrafo 5 do capítulo I de [9]. A partir disso, temos:

Definição 3.5. *Nas condições já expressas para cada um dos objetos abaixo, definimos:*

$$B_\delta(f) = \{g \in C^\infty(X, Y) \mid \forall p \in X, d(j^k f(p), j^k g(p)) < \delta(p)\},$$

onde $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua.

Proposição 3.2. $B_\delta(f)$ é um conjunto aberto de $C^\infty(X, Y)$, para toda função δ .

Demonstração. Consideremos a função contínua $\Delta : J^k(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma \mapsto \delta(\alpha(\sigma)) - d(j^k f(\alpha(\sigma)), \sigma), \text{ onde } \alpha \text{ representa a aplicação fonte.}$$

Seja $U = \Delta^{-1}(0, +\infty)$. Sendo Δ contínua e $(0, +\infty)$ aberto em \mathbb{R} , U é aberto em $J^k(X, Y)$. Temos que:

$$\begin{aligned} g \in B_\delta(f) &\Leftrightarrow d(j^k f(p), j^k g(p)) < \delta(p), \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow \Delta(j^k g(p)) = \delta(\alpha(j^k g(p))) - d(j^k f(\alpha(j^k g(p))), j^k g(p)) \\ &= \delta(p) - d(j^k f(p), j^k g(p)) > 0, \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow j^k g(p) \in U, \forall p \in X \\ &\Leftrightarrow g \in M(U). \end{aligned}$$

Portanto, $B_\delta(f) = M(U)$, donde concluímos que $B_\delta(f)$ é um conjunto aberto de $C^\infty(X, Y)$. \square

Teorema 3.3. *A coleção $\mathfrak{B}_1 = \{B_\delta(f)\}$ forma uma base de vizinhanças para a topologia C^k de Whitney em $C^\infty(X, Y)$.*

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso em que X é uma variedade compacta.

Sejam N uma vizinhança aberta de f em $C^\infty(X, Y)$, V um conjunto aberto de $J^k(X, Y)$ tal que $f \in M(V) \subset N$ e $m(p) = \inf\{d(\sigma, j^k f(p)) \mid \sigma \in \alpha^{-1}(p) \cap (J^k(X, Y) \setminus V)\}$. Note que $m(p) = \infty$ se $\alpha^{-1}(p) \subset V$.

Seja $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que $\delta(p) < m(p)$ para todo $p \in X$. Esta escolha de δ é possível, uma vez que m é limitada inferiormente por uma constante positiva em X , pois X é compacto.

Dada $g \in B_\delta(f)$, temos que $j^k g(p) \in \alpha^{-1}(p)$. A partir daí, temos duas possibilidades: $j^k g(p) \in (\alpha^{-1}(p) \cap (J^k(X, Y) \setminus V))$ ou $j^k g(p) \in (\alpha^{-1}(p) \cap V)$. Como $\delta(p) < m(p)$, a primeira dessas opções não pode ocorrer, sob pena de contrariarmos a minimalidade de $m(p)$. Assim, $j^k g(p) \in V$ e, como isso é válido para todo p , devemos ter $g \in M(V) \subset N$. Portanto, $B_\delta(f) \subset N$.

Por fim, tomando δ e γ funções contínuas de X em \mathbb{R}^+ , definimos $\eta(p) = \min\{\delta(p), \gamma(p)\}$. Note que $\eta : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é ainda uma aplicação contínua e que $B_\eta(f) = B_\delta(f) \cap B_\gamma(f)$, o que conclui nossa demonstração. \square

Após esse resultado, podemos desenvolver uma noção mais intuitiva sobre a topologia C^k de Whitney e, conseqüentemente, sobre a topologia C^∞ de Whitney, entendendo que, dada uma aplicação $f \in C^\infty(X, Y)$, uma vizinhança básica de f é o conjunto $B_\delta(f)$, formado pelas aplicações de X em Y , de classe C^∞ , cujas primeiras k derivadas parciais estão δ -próximas de f .

Alternativamente, podemos usar a definição de topologia C^∞ de Whitney presente em Hirsh ([34]), capítulo 2, primeiro parágrafo, que traz a mesma ideia intuitiva apresentada no parágrafo anterior, porém associada às expressões locais das funções envolvidas.

Definição 3.6. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um conjunto $S \subset X$ é dito ser **de primeira categoria** ou **magro** se puder ser escrito como união enumerável de conjuntos nunca densos. Um conjunto que não é de primeira categoria é chamado **conjunto de segunda categoria**.*

Definição 3.7. *Um espaço topológico é dito **espaço de Baire** se for de segunda categoria em si mesmo.*

Para finalizar esta seção, apresentamos a Proposição 3.3, cuja demonstração pode ser encontrada em [9], capítulo 2, Proposição 3.3.

Proposição 3.3. *Se X e Y são variedades de classe C^∞ , então $C^\infty(X, Y)$ é um espaço de Baire na topologia C^∞ de Whitney.*

3.3 SINGULARIDADES

Nesta seção, trabalharemos o conceito de singularidades, bem como resultados a ele relacionados e pertinentes às discussões do presente texto. Utilizaremos os jatos como ferramentas para as discussões que seguem.

Seja $\sigma \in J^k(X, Y)$ um k -jato de X em Y . Reparemos que σ define uma única aplicação linear de $T_p X$ em $T_q Y$, onde p e q são a fonte e a meta de σ , respectivamente. Se f é um representante de σ , então df_p é a aplicação linear acima referida.

Definição 3.8. *Sejam $\sigma \in J^k(X, Y)$ um k -jato de X em Y e f um representante de σ . Definimos:*

1. *posto (σ) = posto df_p .*
2. *coposto (σ) = $c - \text{posto}(\sigma)$, onde $c = \min \{\dim X, \dim Y\}$.*
3. *$S_r = \{\sigma \in J^1(X, Y) ; \text{coposto}(\sigma) = r\}$.*
4. *$[f]_{(p, f(p))} = \sigma_p \in J^k(X, Y)_{p, f(p)} \subset J^k(X, Y)$. Neste caso, f é um representante da classe de equivalência σ_p .*

De acordo com [9], capítulo II, parágrafo 5, Teorema 5.4, temos o Teorema 3.4:

Teorema 3.4. *S_r é uma subvariedade de $J^1(X, Y)$, com $\text{codim } S_r = (m - c + r)(n - c + r)$, onde $c = \min \{m, n\}$.*

Temos a Definição 3.9, segundo [34], capítulo 1, terceiro parágrafo.

Definição 3.9. 1. *Uma aplicação diferenciável $f : X \rightarrow Y$ diz-se uma **imersão** se a derivada $df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ é injetiva para cada $p \in X$.*

2. *Uma aplicação diferenciável $f : X \rightarrow Y$ diz-se uma **submersão** se a derivada $df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ é sobrejetiva para cada $p \in X$.*

Teorema 3.5. 1. *Se $\dim X \leq \dim Y$, então $[f]_{(p, f(p))} = \sigma_p \in S_0$ para todo p se, e somente se, f é uma imersão.*

2. *Se $\dim Y \leq \dim X$, então $[f]_{(p, f(p))} = \sigma_p \in S_0$ para todo p se, e somente se, f é uma submersão.*

3. *Se $\dim X = \dim Y$, então $[f]_{(p, f(p))} = \sigma_p \in S_0$ para todo p se, e somente se, f é um difeomorfismo local.*

Demonstração.

1. *$\dim X \leq \dim Y$*

$\sigma_p \in S_0, \forall p \Leftrightarrow \text{coposto}(\sigma_p) = 0, \forall p \Leftrightarrow \text{posto } df_p = \dim X, \forall p \Leftrightarrow \dim \text{Im } df_p = \dim X, \forall p \Leftrightarrow \dim \text{Im } df_p = \dim T_p X, \forall p \Leftrightarrow \dim \ker df_p = 0, \forall p \Leftrightarrow \ker df_p = \{0\}, \forall p \Leftrightarrow df_p \text{ é injetiva}, \forall p \Leftrightarrow f \text{ é uma imersão.}$

2. *$\dim Y \leq \dim X$*

$\sigma_p \in S_0, \forall p \Leftrightarrow \text{coposto}(\sigma_p) = 0, \forall p \Leftrightarrow \text{posto } df_p = \dim Y, \forall p \Leftrightarrow \dim \text{Im } df_p = \dim Y, \forall p \Leftrightarrow \dim \text{Im } df_p = \dim T_{f(p)} Y \Leftrightarrow \text{Im } df_p = T_{f(p)} Y, \forall p \Leftrightarrow df_p \text{ é sobrejetiva}, \forall p \Leftrightarrow f \text{ é uma submersão.}$

3. $\dim Y = \dim X$

$\sigma_p \in S_0, \forall p \Leftrightarrow \text{coposto}(\sigma_p) = 0, \forall p \Leftrightarrow \text{posto } df_p = \dim X = \dim Y, \forall p \Leftrightarrow df_p$
é um isomorfismo, $\forall p$. Pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 2.2), existe
 $U \subset X, U$ aberto, com $p \in U$, tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo.

□

Conforme [9], capítulo II, primeiro parágrafo e [7], capítulo 1, temos a Definição 3.10:

Definição 3.10. 1. Um ponto $p \in X$ diz-se um **ponto singular** de f quando a derivada $df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ não tem posto máximo.

2. O conjunto dos pontos singulares de f , denotado por Σf , é chamado **conjunto singular** de f . A imagem do conjunto singular, $f(\Sigma f)$, é chamado **conjunto de ramificação, conjunto de bifurcação ou conjunto de contorno aparente** de f e é denotado por Bf .

3. Um ponto $p \in X$ diz-se um **ponto regular** de f quando $p \notin \Sigma f$.

4. Um ponto $q \in Y$ diz-se um **valor regular** de f se $f^{-1}(q)$ contém apenas pontos regulares.

Definição 3.11. Dizemos que $f : X \rightarrow Y$ tem uma **singularidade do tipo S_r** em $p \in X$ se $\text{posto } df_p = \min \{ \dim X, \dim Y \} - r$. Denotamos por $S_r(f)$ o conjunto dos pontos $p \in X$ tais que f tem uma singularidade do tipo S_r em p .

Observação 3.2. De acordo com o Teorema 3.5, no caso em que $\dim X = \dim Y = n$, temos:

$$\begin{aligned} S_0(f) &= \{p \in X : f \text{ tem singularidade do tipo } S_0 \text{ em } p\} \\ &= \{p \in X : \text{posto } df_p = n\} \\ &= \{p \in X : df_p \text{ tem posto máximo}\} \\ &= \{p \in X : p \text{ é ponto regular de } f\}. \end{aligned}$$

Logo, neste caso, f não tem singularidades do tipo S_0 .

Proposição 3.4. $S_r(f) = (j^1 f)^{-1}(S_r)$.

Demonstração. Seja $c = \min \{ \dim X, \dim Y \}$. Então:

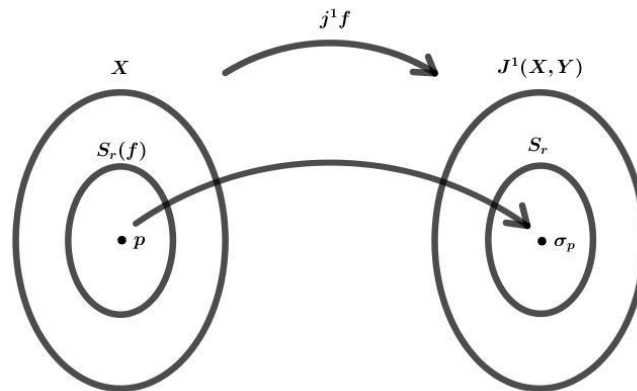
$$p \in S_r(f) \Leftrightarrow \text{posto } df_p = c - r \Leftrightarrow \text{posto } \sigma_p = c - r \Leftrightarrow c - \text{posto } \sigma_p = r \Leftrightarrow \text{coposto } \sigma_p = r \Leftrightarrow \sigma_p \in S_r \Leftrightarrow (j^1 f)(p) \in S_r \Leftrightarrow p \in (j^1 f)^{-1}(S_r).$$

Assim, $S_r(f) \subset (j^1 f)^{-1}(S_r)$ e $(j^1 f)^{-1}(S_r) \subset S_r(f)$.

Portanto, das duas inclusões segue a igualdade. □

A Figura 23 ilustra a Proposição 3.4.

Figura 23 – $S_r(f) = (j^1 f)^{-1}(S_r)$



Fonte: Imagem produzida pelo autor

As justificativas para o Teorema 3.6 podem ser encontradas em [9], capítulo VI, primeiro parágrafo.

Teorema 3.6. $S_r(f)$ é uma subvariedade de X e $\text{codim } S_r(f) = \text{codim } S_r = r^2 + er$, onde $e = |\dim X - \dim Y|$.

Observação 3.3. A codimensão de S_r apresentada no Teorema 3.6, apesar de expressa de outra maneira, coincide com a codimensão apresentada no Teorema 3.4.

As aplicações dadas nos exemplos a seguir apresentam singularidades, no máximo, do tipo S_1 , já que o conjunto singular ou é vazio ou é formado por curvas, isto é, por subvariedade de codimensão (e dimensão) 1. Lembremos que se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função dada por $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, então, em cada ponto $p = (x_1, x_2)$, a matriz jacobiana de f é dada por

$$Jf(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.1. Consideremos a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. A matriz jacobiana de f , em cada ponto $p = (x_1, x_2)$, é dada por

$$Jf(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que tem posto máximo. Assim, f não tem ponto singular.

Exemplo 3.2. Consideremos a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$. Para cada $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a matriz jacobiana de f é dada por

$$Jf(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, segue que:

$p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é ponto singular de $f \Leftrightarrow df_p$ não tem posto máximo \Leftrightarrow posto $df_p \neq 2 \Leftrightarrow x_2 = 0 \Leftrightarrow p$ é da forma $(x_1, 0) \Leftrightarrow p$ pertence ao eixo x .

Portanto, $\Sigma f = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3.3. Consideremos a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1x_2 + x_2^3)$. Para cada $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a matriz jacobiana de f é dada por

$$Jf(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 + 3x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Assim, segue que:

$p \in \mathbb{R}^2$ é ponto singular de $f \Leftrightarrow df_p$ não tem posto máximo \Leftrightarrow posto $df_p \neq 2 \Leftrightarrow 3x_2^2 + x_1 = 0 \Leftrightarrow p$ é da forma $(-3x_2^2, x_2) \Leftrightarrow p$ pertence à parábola indicada na Figura 27.

Portanto, $\Sigma f = \{(-3x_2^2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 3.4. Sejam $p_0 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$, $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ o plano que contém a origem e é ortogonal a p_0 e $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção sobre o plano Π . Consideremos a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f = \pi|_{\mathbb{S}^2}$. Para cada $p \in \mathbb{S}^2$, o plano tangente a \mathbb{S}^2 em p é dado por

$$T_p\mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p \rangle = 0\},$$

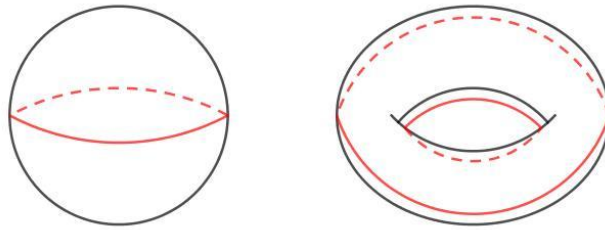
isto é, $T_p\mathbb{S}^2$ é o plano ortogonal a p . A derivada de f em $p \in \mathbb{S}^2$, df_p , é a restrição de π ao plano $T_p\mathbb{S}^2$. Assim, um ponto $p \in T_p\mathbb{S}^2$ é singular se, e somente se, $T_p\mathbb{S}^2$ é ortogonal ao plano Π , isto é, se, e somente se, p está no equador de \mathbb{S}^2 . Portanto, nesse caso, Σf é o equador da esfera (veja Figura 24).

Exemplo 3.5. Consideremos, agora, o toro \mathbb{T}^2 e $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a restrição da projeção a \mathbb{T}^2 (como no Exemplo 3.4). Análogo ao Exemplo 3.4, um ponto $p \in \mathbb{T}^2$ é singular se, e somente se, o plano tangente é ortogonal ao plano Π , isto é, o conjunto singular é o conjunto indicado na Figura 24.

3.4 APLICAÇÕES UM-GENÉRICO

Nesta seção, definiremos as aplicações um-genérico, que ganharão centralidade nas discussões que seguem. A partir daí, faremos uma análise das possíveis singularidades

Figura 24 – Os conjuntos singulares referidos nos Exemplos 3.4 e 3.5 estão destacados em vermelho



Fonte: Imagem produzida pelo autor

que tais aplicações podem conter, obtendo um resultado de extrema relevância para este trabalho, contido no Teorema 3.9, que caracteriza os pontos singulares que poderão se apresentar em nosso contexto.

Passaremos, na sequência, a um estudo da expressão local das aplicações, nos referidos pontos singulares, o que trará embasamento para uma série de outros resultados fundamentais na construção deste texto.

Definição 3.12. *Sejam $f : X \rightarrow Y$, W uma subvariedade de Y e $p \in X$. Dizemos que f **intersecta W transversalmente em p** (e denotamos por $f \pitchfork W$ em p) se, ou*

- a) $f(p) \notin W$ ou
- b) $f(p) \in W$ e $T_{f(p)}Y = T_{f(p)}W + df_p(T_pX)$.

*Se A é um subconjunto de X , então f **intersecta W transversalmente em A** (e denotamos por $f \pitchfork W$ em A) se $f \pitchfork W$ em p , para todo $p \in A$. Finalmente, f **intersecta W transversalmente** (e denotamos por $f \pitchfork W$) se $f \pitchfork W$ em X .*

Definição 3.13. *Um **conjunto residual** é o complemento de um conjunto magro num espaço métrico completo.*

O próximo resultado, devido a Thom, será usado na demonstração do Teorema 3.8. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [9], Teorema 4.9 do capítulo 2.

Teorema 3.7. *(Teorema de Transversalidade de Thom)*

Dado $k \in \mathbb{N}$, se W é uma subvariedade de $J^k(X, Y)$, então o conjunto T_W definido por

$$T_W = \{f \in C^\infty(X, Y) : j^k f \pitchfork W\}$$

é um subconjunto residual de $C^\infty(X, Y)$, na topologia C^∞ de Whitney.

Definição 3.14. *Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **um-genérico** se $j^1 f \pitchfork S_r, \forall r$.*

Teorema 3.8. *O conjunto das aplicações um-genérico de X em Y é um subconjunto denso de $C^\infty(X, Y)$, na topologia C^∞ de Whitney.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.4, temos que, para todo r , S_r é uma subvariedade de $J^1(X, Y)$. Pelo Teorema 3.7, o conjunto das aplicações um-genérico é um subconjunto residual de $C^\infty(X, Y)$. Portanto, como $C^\infty(X, Y)$ é um espaço de Baire (pela Proposição 3.3), temos que o conjunto das aplicações um-genérico é denso, na topologia C^∞ de Whitney. \square

Estamos interessados, de maneira específica, no estudo de aplicações um-genérico $f : X \rightarrow Y$, de classe C^∞ , em que X e Y são variedades de classe C^∞ , com $\dim X = \dim Y = 2$. Portanto, daqui até o final da seção, X e Y denotarão superfícies de classe C^∞ . Neste caso, mediante o Teorema 3.6, temos $\text{codim } S_r(f) = \text{codim } S_r = r^2$, uma vez que $e = 0$. Assim, investigando as singularidades do tipo S_r que f pode conter, temos:

Observação 3.4. 1. *f não possui singularidades do tipo S_0 , em virtude da Observação 3.2;*

2. *$\text{codim } S_1(f) = 1^2 = 1 \Rightarrow \dim S_1(f) = 1 \Rightarrow S_1(f)$ é formado por curvas \Rightarrow para cada $p \in S_1(f)$, $T_p S_1(f)$ é uma reta;*

3. *$\text{codim } S_2(f) = 2^2 = 4 \Rightarrow$ este caso não pode ocorrer, tendo em vista que $S_2(f)$ é uma subvariedade de X e $\dim X = 2$.*

Dessa maneira, as únicas singularidades de f são do tipo S_1 , donde segue que $\Sigma f = S_1(f)$. Além disso, por definição, temos que:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \{p \in X : f \text{ tem singularidade do tipo } S_1 \text{ em } p\} \\ &= \{p \in X : \text{posto } df_p = 1\} \\ &= \{p \in X : \dim \ker df_p = 1\}. \end{aligned}$$

Isso mostra que, para cada $p \in \Sigma f$, $\ker df_p$ é uma reta. Assim, dado $p \in \Sigma f$, ou o núcleo de df_p coincide com o espaço tangente a Σf em p , ou a soma direta desses dois espaços gera o espaço tangente a X em p .

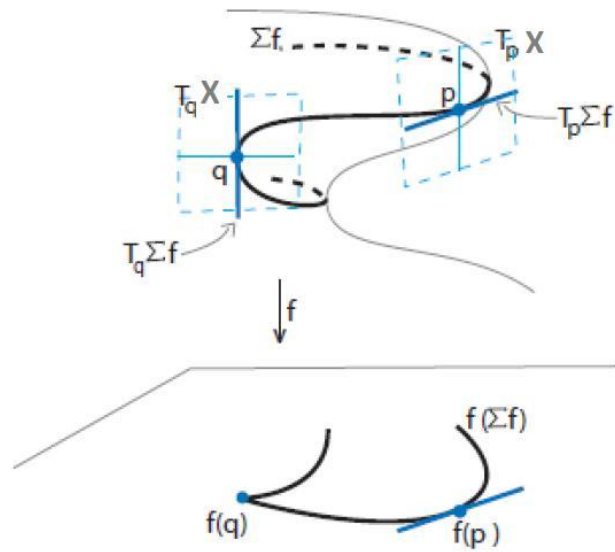
A Figura 25 ilustra uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que X é uma superfície, e destaca dois pontos distintos do conjunto singular Σf , p e q , com características diferentes: em q , vale a primeira situação descrita no parágrafo anterior, enquanto em p vale a segunda.

Portanto, vale o seguinte resultado:

Teorema 3.9. *Para cada $p \in \Sigma f$ uma, e apenas uma, das seguintes situações deve ocorrer:*

- a) $T_p \Sigma f \oplus \ker df_p = T_p X$.
- b) $T_p \Sigma f = \ker df_p$.

Figura 25 – Conjunto singular e conjunto de ramificação de uma aplicação



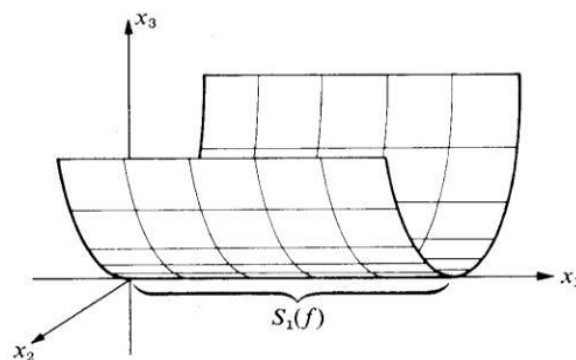
Fonte: Imagem adaptada de Bretas ([35])

Definição 3.15. Dizemos que p é um **ponto de dobra** quando a) ocorre e dizemos que p é um **ponto de cúspide** quando b) ocorre.

Faremos agora uma análise dos Exemplos 3.2 e 3.3 da seção 3.3, a fim de situá-los quanto ao Teorema 3.9 e à Definição 3.15.

Com respeito à aplicação do Exemplo 3.2, podemos entender que estamos mapeando o plano (x_1, x_2) através de uma aplicação auxiliar $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_2^2)$, que tem como gráfico um parabolóide cilíndrico (repare que, para cada x_1 fixado, temos, no plano $x = x_1$, a parábola $x_3 = x_2^2$). E, em seguida, estamos fazendo a projeção do parabolóide no plano (x_1, x_3) . (Figura 26)

Figura 26 – Forma local dos pontos de dobra



Fonte: Imagem retirada de [9]

Conforme já calculado no exemplo, $\Sigma f = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$.

Portanto, para $p \in \Sigma f$ fixado, temos:

1. $T_p \Sigma f = \text{eixo } x_1$.

De fato, usando para a curva do conjunto singular a parametrização $\rho(x) = (x, 0)$, temos:

$\rho'(x) = (1, 0) =$ vetor diretor da reta tangente a Σf em p .

$$2. Jf(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [Jf(p)](x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Para encontrarmos $\ker df_p$, devemos buscar os vetores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $[Jf(p)](x_1, x_2) = (0, 0)$, ou seja, tais que $(x_1, 0) = (0, 0)$. Por conseguinte, $\ker df_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = 0\} = \text{eixo } x_2$.

Isso mostra que os pontos singulares da aplicação do Exemplo 3.2 cumprem a condição estabelecida no Teorema 3.9, item a), e são, portanto, pontos de dobra.

Por outro lado, com respeito à aplicação do Exemplo 3.3, usando um raciocínio semelhante, podemos entender que estamos mapeando o plano (x_1, x_2) através de uma aplicação auxiliar $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1x_2 + x_2^3)$. E, em seguida, estamos fazendo a projeção do gráfico no plano (x_1, x_3) .

Repare que, para cada x_1 fixado, temos, no plano $x = x_1$, a cúbica $x_3 = x_1x_2 + x_2^3$. Assim, $\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 3x_2^2 + x_1$. Para $x_1 > 0$, a cúbica não tem pontos críticos. Para $x_1 = 0$, existe um ponto crítico que representa a inflexão da curva. Para $x_1 < 0$, existirão dois pontos críticos, um máximo e um mínimo local. (Figura 27)

Conforme já calculado no Exemplo 3.3, $\Sigma f = \{(-3x_2^2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Portanto, para $p = (0, 0) \in \Sigma f$, temos:

1. $T_p \Sigma f = \text{eixo } x_2$.

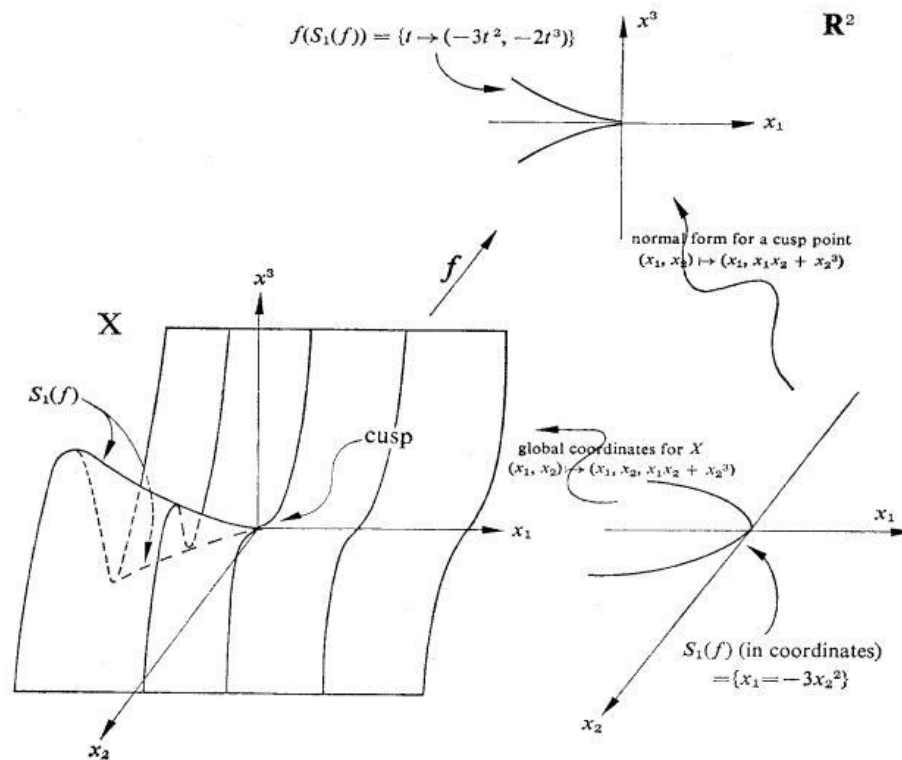
De fato, usando para a curva do conjunto singular a parametrização $\rho(y) = (-3y^2, y)$, temos:

$\rho'(y) = (-6y, 1) \Rightarrow \rho'(0) = (0, 1) =$ vetor diretor da reta tangente a Σf em p .

$$2. Jf(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [Jf(p)](x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Para encontrarmos $\ker df_p$, devemos buscar os vetores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $[Jf(p)](x_1, x_2) = (0, 0)$, ou seja, tais que $(x_1, 0) = (0, 0)$. Por conseguinte, $\ker df_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = 0\} = \text{eixo } x_2$.

Figura 27 – Forma local dos pontos de cúspide



Fonte: Imagem retirada de [9]

Isso mostra que a aplicação do Exemplo 3.3 tem um ponto que cumpre a condição estabelecida no Teorema 3.9, item b), sendo, portanto, um ponto de cúspide.

Fazendo uma análise semelhante para os pontos $p \neq (0, 0) \in \Sigma f$, obtemos como espaço tangente a Σf em p uma reta concorrente com o eixo x_2 , mostrando que o ponto de cúspide é apenas o vértice da parábola e os demais pontos desta curva são pontos de dobra.

Fica claro, portanto, que os pontos de dobra surgem quando, de fato, a superfície “dobra sobre si mesma” e que os pontos de cúspide aparecem na “interseção” de duas curvas de dobra, de maneira que estes últimos serão sempre pontos isolados (com relação a outros pontos de cúspide).

O próximo resultado estabelece algumas expressões em coordenadas locais especiais para cada ponto (regular, dobra e cúspide), chamadas **formas normais**. As formas normais se configuram como referências importantes no presente estudo e serão utilizadas para justificarmos alguns dos resultados futuros. Para detalhes sobre essas formas, consultar [9], capítulo VI, segundo parágrafo. De acordo com esta referência, temos o Teorema 3.10:

Teorema 3.10. *Dados $f \in C^\infty(X, Y)$ uma aplicação um-genérico e $p \in X$, é possível escolhermos sistemas de coordenadas locais (x_1, x_2) e (y_1, y_2) , centrados em p e $q = f(p)$, respectivamente, tais que a expressão de f em coordenadas locais tem uma das seguintes*

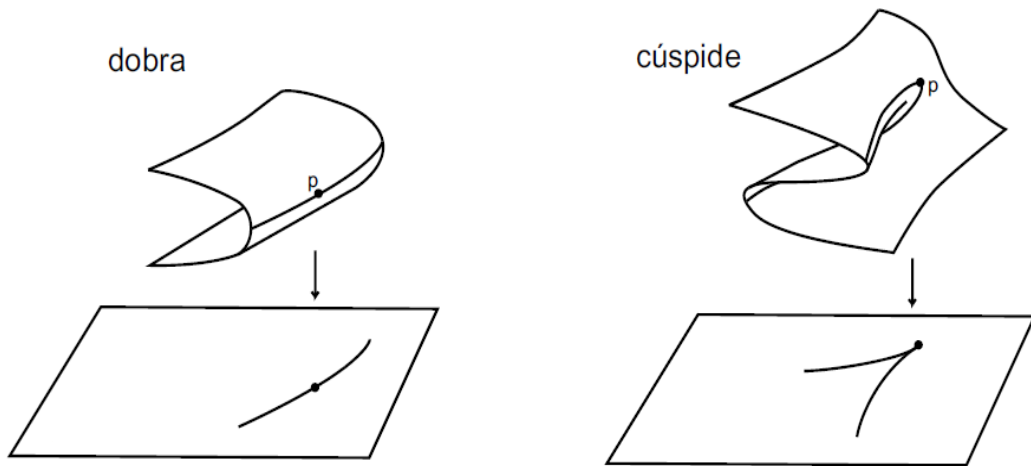
representações:

1. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ — ponto regular
2. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_2^2)$ — ponto de dobra
3. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_1x_2 + x_2^3)$ — ponto de cúspide

Observação 3.5. Uma aplicação $f \in C^\infty(X, Y)$, em geral, pode ter uma cúspide que não tem expressão local como descrita no Teorema 3.10. As cúspides de f que tem expressão local como a do item 3. do Teorema 3.10 são chamadas, em geral, de **cúspide simples** (veja, por exemplo, [9], parágrafo 2 do capítulo VI e Sadykov ([36]), seção 1.4). No que segue, cúspide significará cúspide simples.

A partir de agora, no que seguirá, sempre que tratarmos de pontos (ou curvas) de dobra e pontos de cúspide, teremos em mente as formas normais apresentadas, cujas estruturas aparecem simplificadas na Figura 28, com vistas a facilitar o entendimento.

Figura 28 – Formas locais dos pontos de dobra e cúspide



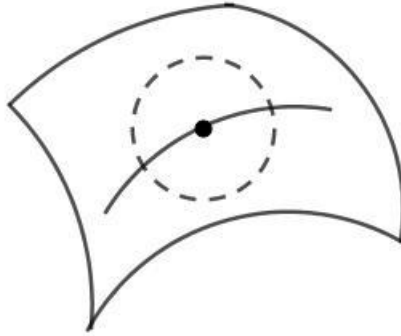
Fonte: Imagem adaptada de [30]

Observação 3.6. Reparemos que, na Figura 28, as superfícies que representam as formas normais aparecem rotacionadas, com relação às Figuras 26 e 27, e que estão sendo representadas não as formas normais das aplicações f em si, mas as projeções anteriormente mencionadas, que serão denotadas por π_f . Tais projeções têm, em cada caso, o mesmo conjunto singular associado à forma normal de f e, em alguns momentos seguintes, serão elas que estudaremos.

Veremos alguns resultados que nos auxiliarão a caracterizar o conjunto singular de uma aplicação.

Observação 3.7. *Notemos, inicialmente, a partir das formas normais, que uma curva singular separa, localmente, a superfície em duas regiões, conforme Figura 29.*

Figura 29 – Separação local da superfície por uma curva do conjunto singular



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Além disso, as curvas do conjunto singular não terão interseções, nem entre duas curvas distintas, nem autointerseções. Essa percepção é importante para a construção do raciocínio que segue.

Teorema 3.11. *Dada $f \in C^\infty(X, Y)$, um-genérico, o conjunto singular de f , Σf , é um conjunto fechado.*

Demonstração. Consideremos uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ e tomemos $p \in (X \setminus \Sigma f)$, um ponto regular de f . Logo, por definição, $df_p : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ é uma aplicação de posto máximo entre espaços vetoriais de mesma dimensão. Assim, df_p é um isomorfismo e, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 2.2), existe $U \subset X$, U aberto, com $p \in U$, tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo. Dessa maneira, para cada $q \in U$, df_q é um isomorfismo, o que mostra que $q \in U$ é um ponto regular de f ($q \in (X \setminus \Sigma f)$). Portanto, $U \subset (X \setminus \Sigma f)$, o que implica que $(X \setminus \Sigma f)$ é aberto, mostrando que Σf é um conjunto fechado. \square

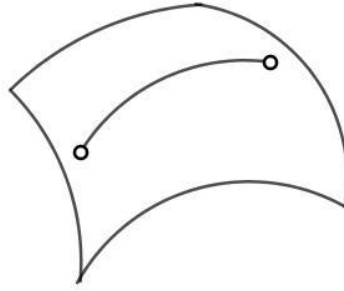
A partir da Observação 3.7 e do Teorema 3.11, analisemos algumas possibilidades para as curvas que compõem o conjunto singular.

As possibilidades apresentadas nas Figuras 30 e 31 não podem ocorrer, uma vez que o conjunto singular é fechado.

A situação apresentada na Figura 32 não pode ocorrer, sob pena de não se efetivar a separação local da superfície em duas regiões, conforme previsto na Observação 3.7 e ilustrado na Figura 29.

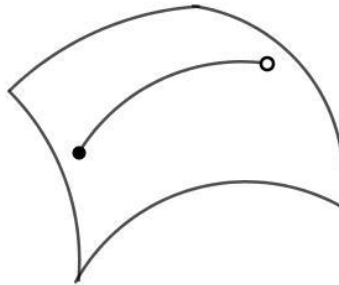
Proposição 3.5. *Se X é compacto e $f \in C^\infty(X, Y)$ é um-genérico, então Σf tem uma quantidade finita de componentes conexas.*

Figura 30 – As duas extremidades abertas



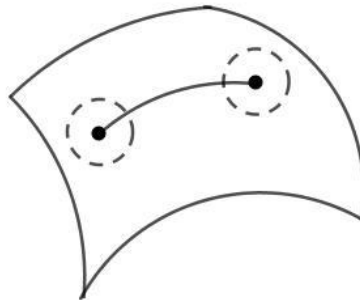
Fonte: Imagem produzida pelo autor

Figura 31 – Uma extremidade aberta e a outra fechada



Fonte: Imagem produzida pelo autor

Figura 32 – As duas extremidades fechadas



Fonte: Imagem produzida pelo autor

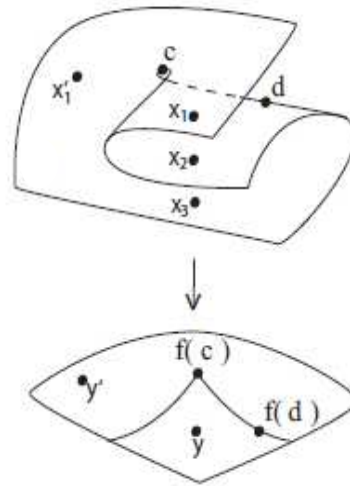
Demonstração. Pelo Teorema 3.11, Σf é fechado e, assim, é compacto, já que X é compacto. Portanto, Σf tem uma quantidade finita de componentes conexas, como qualquer espaço compacto. \square

Portanto, vale o Teorema 3.12.

Teorema 3.12. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação um-genérico, de classe C^∞ , em que X e Y são superfícies de classe C^∞ . Então, o conjunto singular de f , Σf , é formado por uma quantidade finita de curvas fechadas, simples e disjuntas em X .*

Observação 3.8. *Existe uma diferença no número de pré-imagens associadas aos pontos que se encontram em regiões distintas do plano, separados por uma curva do conjunto de ramificação. Isso pode ser observado na Figura 33. Reparemos que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y$.*

Figura 33 – Pré-imagens dos pontos separados por uma curva do conjunto de ramificação



Fonte: Imagem adaptada de Souza ([37])

Além das condições para f expressas no Teorema 3.12, consideremos agora que as superfícies são fechadas, orientadas e conexas.

Pode acontecer de $X \setminus \Sigma f$ não ser um conjunto conexo. Mesmo assim, as curvas do conjunto singular de f irão separar a superfície em componentes conexas de $X \setminus \Sigma f$.

Tomemos $C \subset X \setminus \Sigma f$ uma componente conexa e $p \in C$. Logo:

df_p é um isomorfismo $\Rightarrow \det df_p \neq 0$.

Assim, devemos ter ou $\det df_p > 0, \forall p \in C$, ou $\det df_p < 0, \forall p \in C$, pois, caso contrário, se existissem pontos $p_1, p_2 \in C$ tais que $\det df_{p_1} > 0$ e $\det df_{p_2} < 0$ teríamos, pelo Teorema do Valor Intermediário, $\det df_p = 0$ para algum ponto p da componente conexa, o que seria uma contradição.

Além disso, como f é um difeomorfismo local numa vizinhança de um ponto regular p , com base em [22], capítulo 2, proposições 2.3.4 e 2.4.4, $\det df_p > 0$ significa que f preserva a orientação, enquanto $\det df_p < 0$ significa que f inverte a orientação.

Observação 3.9. *Importante observar, a partir das formas normais, que, quando “passamos de uma componente conexa para outra”, se, na primeira componente, a orientação era preservada por π_f , então, na segunda, a orientação será invertida e vice-versa. Veja Figura 34.*

Figura 34 – Mudança de sinal na passagem de uma componente conexa para outra



Fonte: Imagem adaptada de [30]

Vamos atribuir um sinal “+” às regiões que têm sua orientação preservada por f e um sinal “-” às demais regiões, cuja orientação é invertida. Além disso, iremos denotar por X^+ (X^-) a união de todas as regiões positivas (negativas) do complemento $X \setminus \Sigma f$.

3.5 APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Apresentaremos, nesta seção, a definição de aplicação estável, bem como a relação destas aplicações com as aplicações um-genérico.

Além disso, indicaremos um critério para decidir se uma aplicação é ou não estável observando o seu conjunto singular e o seu conjunto de ramificação.

Denotemos por $\text{Dif}(X)$ o conjunto de todos os difeomorfismos de classe C^∞ de uma variedade X , de classe C^∞ .

Definição 3.16. *Sejam X e Y variedades de classe C^∞ . Dadas $f, g \in C^\infty(X, Y)$, dizemos que f e g são **equivalentes**, e denotamos por $f \sim g$ se existirem $\phi \in \text{Dif}(X)$ e $\psi \in \text{Dif}(Y)$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, tais que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Proposição 3.6. *A relação \sim , na Definição 3.16, é uma relação de equivalência.*

Teorema 3.13. *Sejam $f, g \in C^\infty(X, Y)$ duas aplicações equivalentes. Se $\phi \in \text{Dif}(X)$ e $\psi \in \text{Dif}(Y)$ são tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, então $\phi(\Sigma f) = \Sigma g$, $\phi(X \setminus \Sigma f) = X \setminus \Sigma g$, $\psi(Bf) = Bg$ e $\psi(Y \setminus Bf) = Y \setminus Bg$.*

Demonstração. Dado $p \in X$ temos, pela regra da cadeia, que

$$dg_{\phi(p)} = d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\phi_{\phi(p)}^{-1}.$$

Como ψ e ϕ^{-1} são difeomorfismos temos que $d\psi_{f(p)}$ e $d\phi_{\phi(p)}^{-1}$ são isomorfismos e, assim, $dg_{\phi(p)}$ e df_p têm o mesmo posto, já que composição com isomorfismo não altera o posto. Logo, $p \in \Sigma f$ se, e somente se, $\phi(p) \in \Sigma g$. Portanto, $\phi(\Sigma f) = \Sigma g$ e $\phi(X \setminus \Sigma f) = X \setminus \Sigma g$.

Além disso,

$$\psi(Bf) = \psi(f(\Sigma f)) = \psi \circ f(\Sigma f) = g \circ \phi(\Sigma f) = g(\phi(\Sigma f)) = g(\Sigma g) = Bg$$

e

$$\psi(Y \setminus Bf) = \psi(Y) \setminus \psi(Bf) = Y \setminus Bg,$$

concluindo a demonstração. \square

Exemplo 3.6. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos as funções $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definidas por

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^3 + \varepsilon x \quad \text{e} \quad h(x) = x^3 - \varepsilon x.$$

Notemos que $\Sigma f = \{0\}$, $\Sigma g = \emptyset$ e $\Sigma h = \{-\sqrt{\varepsilon/3}, \sqrt{\varepsilon/3}\}$. Portanto, pelo Teorema 3.13, f não é equivalente a g e nem a h .

Como consequência do Teorema 3.13 temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1. Se X é compacto e $f, g \in C^\infty(X, Y)$ são duas aplicações equivalentes, então os seguintes pares de conjuntos têm o mesmo número de componentes conexas:

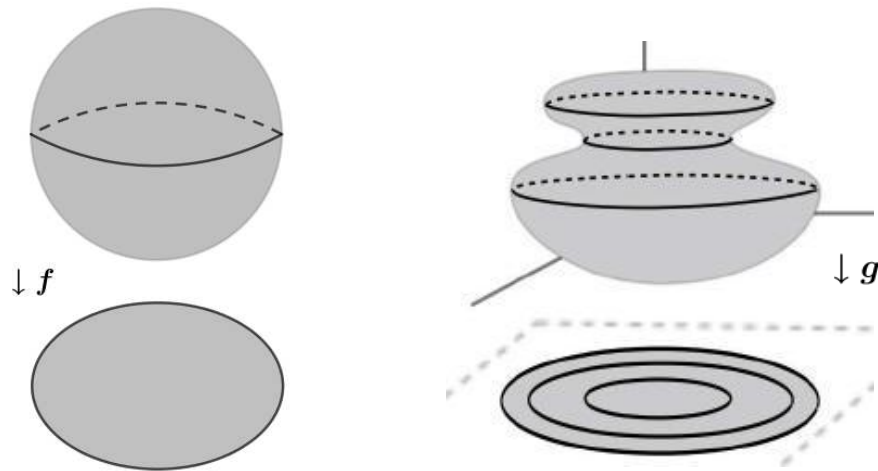
1. Σf e Σg .
2. Bf e Bg .
3. $X \setminus \Sigma f$ e $X \setminus \Sigma g$.
4. $Y \setminus Bf$ e $Y \setminus Bg$.

Exemplo 3.7. As projeções f e g , apresentadas na Figura 35, não são equivalentes. De fato, Σf tem uma componente conexa e Σg tem três componentes conexas. Poderiam ser analisados também os conjuntos de ramificação, que apresentam quantidades diferentes de componentes conexas.

Corolário 3.2. Sejam X e Y superfícies e $f, g \in C^\infty(X, Y)$ aplicações um-genérico equivalentes. Se $\phi \in \text{Dif}(X)$ e $\psi \in \text{Dif}(Y)$ são tais que $g \circ \phi = \psi \circ f$ e $p \in \Sigma f$, então

1. p é ponto de dobra de f se, e somente se, $\phi(p)$ é ponto de dobra de g .

Figura 35 – Projeções da esfera no plano



Fonte: Imagem adaptada de Mendes de Jeus ([38])

2. p é ponto de cúspide de f se, e somente se, $\phi(p)$ é ponto de cúspide de g .

Demonstração. Seja $p \in \Sigma f$. Dado $v \in T_{\phi(p)}X$, existe $u \in T_pX$ tal que $v = d\phi_p(u)$, pois $d\phi_p$ é sobrejetora. Daí, e pela regra da cadeia,

$$dg_{\phi(p)}(v) = dg_{\phi(p)}(d\phi_p(u)) = d(g \circ \phi)_p(u) = d(\psi \circ f)_p(u) = d\psi_{f(p)}(df_p(u)) = d\psi_{f(p)} \circ df_p(u).$$

Assim, $u \in \ker(df_p)$ se, e somente se, $v = d\phi_p(u) \in \ker(dg_{\phi(p)})$, pois $d\psi_{f(p)}$ é injetora. Logo, $d\phi_p(\ker df_p) = \ker dg_{\phi(p)}$.

Seja, agora, $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \Sigma f$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) \neq 0$. Temos, pelo Teorema 3.13, que $\phi \circ \gamma$ é uma curva em Σg . Além disso, $\phi \circ \gamma(0) = \phi(p)$ e $(\phi \circ \gamma)'(0) = d\phi_p(\gamma'(0)) \neq 0$. Como $\gamma'(0)$ gera $T_p\Sigma f$ temos que $d\phi_p(\gamma'(0))$ gera $T_{\phi(p)}\Sigma g$ e assim $d\phi_p(T_p\Sigma f) = T_{\phi(p)}\Sigma g$.

Para concluir a demonstração basta notar, pela linearidade de $d\phi_p$, que

$$d\phi_p(T_p\Sigma f + \ker df_p) = T_{\phi(p)}\Sigma g + \ker dg_{\phi(p)}$$

e usar que isomorfismo preserva a dimensão de subespaços. \square

Exemplo 3.8. Pelo Corolário 3.2, nenhum par tomado entre as funções f , g e h , sendo $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2) \quad e \quad h(x_1, x_2) = (x_1, x_1x_2 + x_2^3)$$

é composto por funções equivalentes (veja o Teorema 3.10, os Exemplos 3.1, 3.2 e 3.3, e a discussão feita após o Teorema 3.9). De fato, $\Sigma f = \emptyset$, Σg só tem pontos de dobra e Σh além de pontos de dobra tem um ponto de cúspide.

Definição 3.17. Dizemos que $f \in C^\infty(X, Y)$ é **estável** se existir uma vizinhança W de f na topologia C^∞ de Whitney tal que, para toda $g \in W$, vale a relação $f \sim g$.

Exemplo 3.9. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por, $f(x) = x^3$ não é estável. De fato, para $\varepsilon > 0$ pequeno, a função g apresentada no Exemplo 3.6 é uma perturbação de f e não é equivalente a f .

Denotemos por $\mathcal{E}(X, Y)$ o subconjunto de $C^\infty(X, Y)$ formado por todas as aplicações estáveis. O conjunto $\mathcal{E}(X, Y)$ é sempre aberto, independente de X e Y . Além disso, dependendo de X e de Y pode acontecer que $\mathcal{E}(X, Y) = \emptyset$ (veja a discussão feita em [9], seção 6 do capítulo VI). No entanto, para superfícies, temos Teorema 3.14.

Teorema 3.14. Se X e Y são superfícies, então $\mathcal{E}(X, Y)$ é um subconjunto aberto e denso de $C^\infty(X, Y)$, na topologia de Whitney.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}(X, Y)$. Por definição existe um aberto $W \subset C^\infty(X, Y)$, com $f \in W$, tal que para todo $g \in W$ tem-se $f \sim g$ (veja as Definições 3.16 e 3.17). Pela transitividade da relação \sim , temos que W está contido em $\mathcal{E}(X, Y)$. Logo, $\mathcal{E}(X, Y)$ é aberto.

Além disso, que $\mathcal{E}(X, Y)$ é denso segue do fato que $\dim X = \dim Y = 2$ e da discussão feita em [9], seção 6 do capítulo VI. \square

Teorema 3.15. Sejam X e Y superfícies. Se $f \in \mathcal{E}(X, Y)$ e $W \subset C^\infty(X, Y)$ é aberto tal que $f \in W$, então existe $g \in W$ um-genérico tal que $g \sim f$.

Demonstração. Segue dos seguintes fatos: a classe de f é um conjunto aberto; interseção de dois abertos é um aberto; e o conjunto das aplicações um-genérico é denso (Teorema 3.8). \square

Pelo Teorema 3.15, para cada aplicação estável $f : X \rightarrow Y$, entre superfícies, é possível tomar uma aplicação um-genérico $g : X \rightarrow Y$, suficientemente próxima de f , tal que f e g são equivalentes. Assim, podemos considerar g , em vez de f , e usar os resultados da Seção 3.4.

Para concluir este capítulo apresentaremos um resultado que estabelece um critério prático para decidir se uma aplicação $f \in C^\infty(X, Y)$, onde X e Y são superfícies, é estável. Para isso precisaremos da seguinte definição.

Definição 3.18. Sejam X e Y superfícies, $f \in C^\infty(X, Y)$, $q \in Bf$ e $p_1, p_2 \in \Sigma f$. Dizemos que

1. q é um **ponto simples** quando $f^{-1}(q) \cap \Sigma f$ é um conjunto unitário.

2. q é um **ponto duplo** quando $f^{-1}(q) \cap \Sigma f$ tem exatamente 2 elementos.
3. p_1 e p_2 são **transversais** quando $f(p_1) = f(p_2) = q_0$ e

$$T_{q_0}Y = df_{p_1}(T_{p_1}\Sigma f) \oplus df_{p_2}(T_{p_2}\Sigma f).$$

A condição de p_1 e p_2 serem transversais significa que, no caso em que p_1 e p_2 são pontos de dobra, o conjunto de ramificação se autointersecta transversalmente no ponto $q = f(p_1) = f(p_2)$, no seguinte sentido: sejam γ_1 e γ_2 curvas em Σf tais que $\gamma_1(0) = p_1$, $\gamma_2(0) = p_2$ e os traços de γ_1 e de γ_2 , denotados por C_1 e C_2 , sejam vizinhanças locais, em Σf , de p_1 e p_2 , respectivamente. Nesse caso, as retas tangentes a $f(C_i)$ em q , $T_q f(C_i)$, $i = 1, 2$, se intersectam transversalmente, isto é, $T_q Y = T_q f(C_1) \oplus T_q f(C_2)$. Isso é consequência da definição de pontos transversais e da seguinte proposição.

Proposição 3.7. *Se $p \in \Sigma f$ é ponto de dobra, então $df_p(T_p \Sigma f) = T_{f(p)} Bf$.*

Demonstração. Sejam $v \in T_p \Sigma f$ e $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \Sigma f$ curva em Σf tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Temos $f \circ \gamma$ é uma curva em Bf e

$$df_p(v) = df_p(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)} Bf.$$

Logo, $df_p(T_p \Sigma f) \subset T_{f(p)} Bf$.

Reciprocamente, sejam $v \in T_{f(p)} Bf$ e $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow Bf$ curva em Bf tal que $\gamma(0) = f(p)$ e $\gamma'(0) = v$. Temos que $C = f^{-1}(\gamma(-\delta, \delta)) \cap \Sigma f$ é tal que $f(C) = \gamma(-\delta, \delta)$. Sejam $\tilde{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow C$ tal que $\gamma(t) = f(\tilde{\gamma}(t))$. Assim, $\tilde{\gamma}'(0) \in T_p \Sigma f$ e

$$v = \gamma'(0) = (f \circ \tilde{\gamma})'(0) = df_p(\tilde{\gamma}'(0)) \in df_p(T_p \Sigma f).$$

Logo, $T_{f(p)} Bf \subset df_p(T_p \Sigma f)$, o que conclui a demonstração. \square

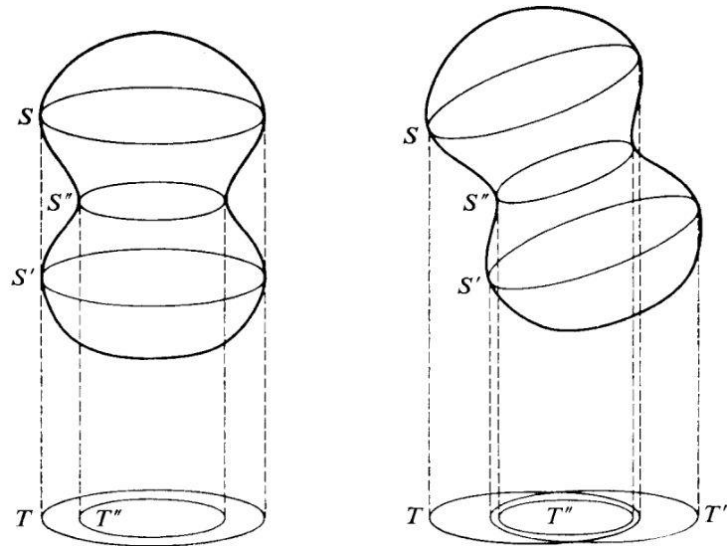
Finalmente, podemos enunciar um critério para uma aplicação ser estável. Para uma discussão mais aprofundada do assunto veja, por exemplo, as referências: [9], parágrafo 6 do capítulo VII; [10], Teorema 5.3 do capítulo 1 e [36], seção 1.4.

Teorema 3.16. *Sejam X e Y superfícies. Uma aplicação $f \in C^\infty(X, Y)$ é estável se, e somente se, as três condições seguintes são satisfeitas:*

1. Σf é composto por pontos de dobra e pontos de cúspide.
2. Os pontos de Bf são pontos simples ou são pontos duplos.
3. Se $q \in Bf$ é um ponto duplo e $f^{-1}(q) \cap \Sigma f = \{p_1, p_2\}$, então p_1 e p_2 são pontos de dobra transversais.

A Figura 36 ilustra duas projeções da esfera no plano. A imagem da esquerda representa uma aplicação não estável, por não atender ao item 3 do Teorema 3.16, uma vez que as curvas T e T' do conjunto de ramificação, imagens de S e S' , respectivamente, coincidem, de modo que os pontos duplos não são transversais. A imagem da direita, por outro lado, representa uma aplicação estável.

Figura 36 – Projeções da esfera no plano



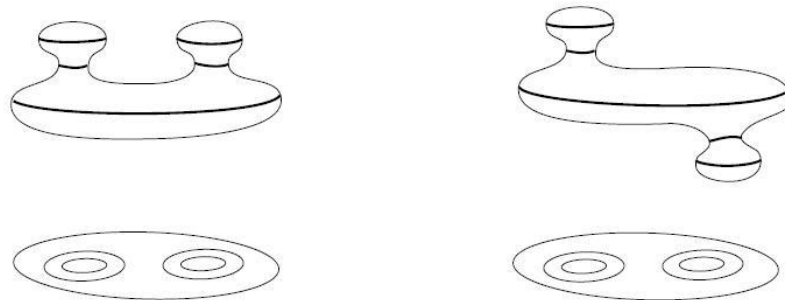
Fonte: Imagem retirada de [9]

4 GRAFOS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO

Neste capítulo, estamos interessados em identificar um invariante topológico, do ponto de vista global, para as aplicações estáveis $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$, em que X é uma superfície fechada, de classe C^∞ , orientada e conexa (condições que consideraremos neste capítulo). Neste caso, tal invariante nos permitirá dizer quando duas aplicações estáveis não são equivalentes entre si, conforme a Definição 3.16.

A identificação deste invariante nos possibilitará, por exemplo, distinguir duas aplicações estáveis f e g , não equivalentes entre si, cujos conjuntos de ramificação $f(\Sigma f)$ e $g(\Sigma g)$ são idênticos. Um exemplo pode ser observado na Figura 37. As curvas na superfície são o conjunto singular da projeção da superfície no plano. Apesar de terem os conjuntos de ramificação idênticos, essas projeções não são equivalentes, como veremos no exemplo ilustrado pela Figura 42, no final do capítulo.

Figura 37 – Aplicações estáveis da esfera no plano, com conjuntos de ramificação idênticos



Fonte: Imagem retirada de [30]

As referências principais para este capítulo são [30], [38] e Mendes de Jesus ([39]).

4.1 GRAFOS ASSOCIADOS A UMA COLEÇÃO DE CURVAS FECHADAS EM UMA SUPERFÍCIE

No intuito de obtermos o invariante desejado, apresentaremos uma técnica para associar grafos (com peso) a coleções de curvas fechadas em uma superfície, o que nos dará um método para associar um grafo a uma aplicação estável.

Seja X uma superfície e \mathcal{C} uma coleção finita de curvas fechadas, simples e disjuntas em X . O complemento $X \setminus \mathcal{C}$ é a união disjunta de regiões conexas, cujas fronteiras são formadas por curvas do conjunto \mathcal{C} .

Definição 4.1. Dado um par (X, \mathcal{C}) , o **grafo associado** G é definido da seguinte forma:

1. a cada região U de $X \setminus \mathcal{C}$ fazemos corresponder um vértice v de G .

2. a cada curva α de \mathcal{C} fazemos corresponder uma aresta a de G .
3. um vértice v recebe o peso $g(v) = t$ se a região U de $X \setminus \mathcal{C}$, correspondente a v , tem gênero $g(U) = t$.
4. uma aresta “ a ” é incidente com um vértice v se, e somente se, a curva α correspondente a “ a ” está na fronteira da região U correspondente a v .

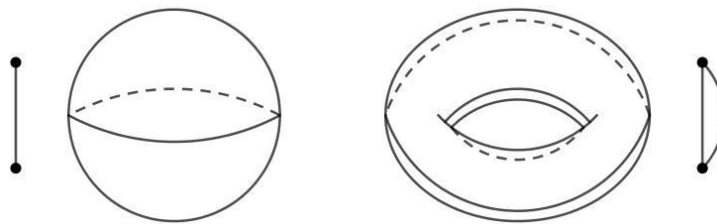
A partir das regras de associação estabelecidas, segue que:

1. a relação de adjacência entre os vértices de G é dada em função da relação de adjacência entre as regiões de $X \setminus \mathcal{C}$.
2. o número de arestas conectando dois vértices é estabelecido pelo número de curvas de \mathcal{C} que separam as duas regiões correspondentes.
3. um laço ocorre quando uma curva é componente de bordo de uma única região.

A soma total dos pesos dos vértices de um grafo G , $\Sigma g(v)$, será denotada por $W(G)$.

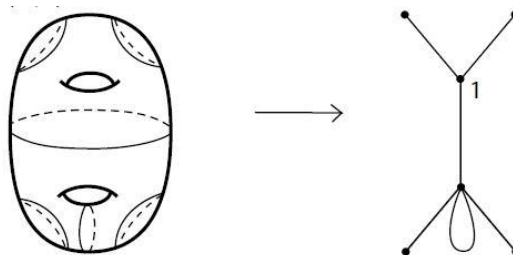
As Figuras 38, 39 e 40 ilustram exemplos de grafos associados a superfícies com curvas.

Figura 38 – Grafos associados à esfera e ao toro, com os respectivos conjuntos de curvas destacados



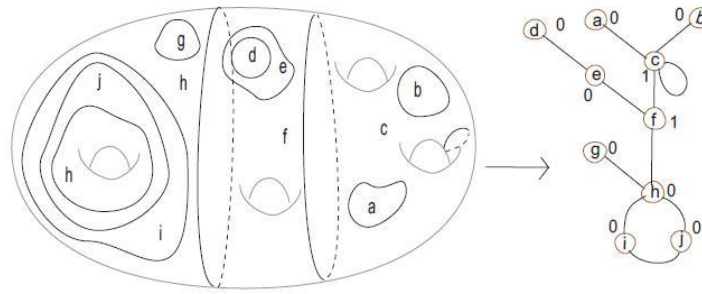
Fonte: Imagem produzida pelo autor

Figura 39 – Grafo associado a um 2-toro com um conjunto de curvas



Fonte: Imagem retirada de [30]

Figura 40 – Grafo associado a uma superfície com curvas



Fonte: Imagem retirada de [39]

Definição 4.2. Dadas \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 duas coleções de curvas fechadas, simples e disjuntas sobre X e Y , respectivamente, dizemos que os pares (X, \mathcal{C}_1) e (Y, \mathcal{C}_2) são **equivalentes** quando existe um difeomorfismo de X em Y que leva \mathcal{C}_1 em \mathcal{C}_2 .

Teorema 4.1. Se (X, \mathcal{C}_1) e (Y, \mathcal{C}_2) são equivalentes, então os grafos associados aos respectivos pares são isomorfos.

Demonstração. Sejam (X, \mathcal{C}_1) e (Y, \mathcal{C}_2) pares equivalentes, e G_1 e G_2 os respectivos grafos associados. Logo, deve existir um difeomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que $\varphi(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$. Assim, as componentes conexas de \mathcal{C}_1 são levadas, de maneira biunívoca, nas componentes conexas de \mathcal{C}_2 , mostrando que \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 têm o mesmo número de curvas e, portanto, G_1 e G_2 têm o mesmo número de arestas.

Para mostrar que G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, precisaremos da igualdade $\varphi(X \setminus \mathcal{C}_1) = \varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{C}_1)$. De fato,

$$y \in \varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{C}_1) \Rightarrow y \in \varphi(X) \text{ e } y \notin \varphi(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \exists x \in X \setminus \mathcal{C}_1 ; y = \varphi(x) \Rightarrow y \in \varphi(X \setminus \mathcal{C}_1).$$

Portanto, $\varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{C}_1) \subset \varphi(X \setminus \mathcal{C}_1)$.

Por outro lado,

$y \in \varphi(X \setminus \mathcal{C}_1) \Rightarrow \exists x \in X \setminus \mathcal{C}_1 ; y = \varphi(x)$. Suponhamos, por absurdo, que $y = \varphi(x) \in \varphi(\mathcal{C}_1)$. Como $x \notin \mathcal{C}_1$, deve existir $c \neq x \in \mathcal{C}_1 ; \varphi(c) = y = \varphi(x)$, o que contradiz o fato de φ ser injetora. Assim, $y \in \varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{C}_1)$.

Portanto, $\varphi(X \setminus \mathcal{C}_1) \subset \varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{C}_1)$.

Retomando a igualdade demonstrada, temos

$$\varphi(X \setminus \mathcal{C}_1) = \varphi(X) \setminus \varphi(\mathcal{C}_1) = Y \setminus \mathcal{C}_2.$$

Isso mostra que as componentes conexas de $X \setminus \mathcal{C}_1$ são levadas, de maneira biunívoca, nas componentes conexas de $Y \setminus \mathcal{C}_2$, mostrando que $X \setminus \mathcal{C}_1$ e $Y \setminus \mathcal{C}_2$ têm o mesmo número

de regiões e, portanto, G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices.

Para finalizar, tomemos duas regiões adjacentes $R_1, R_2 \subset X \setminus \mathcal{C}_1$, separadas por uma curva $\alpha \subset \mathcal{C}_1$. Temos que $R_1 \cup \alpha \cup R_2$ é conexo por caminhos, de maneira que $\varphi(R_1) \cup \varphi(\alpha) \cup \varphi(R_2) = \varphi(R_1 \cup \alpha \cup R_2)$ também o é, mostrando que φ preserva as adjacências das regiões e, conseqüentemente, G_1 e G_2 têm a mesma estrutura de adjacências.

Portanto, G_1 e G_2 têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e a mesma estrutura de adjacências sendo, dessa maneira, isomorfos. \square

Teorema 4.2. *Se G é o grafo associado ao par (X, \mathcal{C}) , então vale a seguinte relação:*

$$g(X) = 1 - \chi(G) + W(G).$$

Demonstração. O gênero de uma superfície está, por definição, associado ao número de alças da mesma. Dessa maneira, nossa análise deve se basear em como as alças de uma superfície são representadas no seu grafo associado.

Se uma alça se encontra livre de curvas do conjunto \mathcal{C} , ela será representada no grafo por um peso adicionado ao vértice correspondente à região em que se encontra. Caso contrário, será observada a ocorrência de ciclos no grafo, tal que o número de vértices presentes no ciclo corresponde ao número de componentes de \mathcal{C} presentes na alça. Assim, uma alça em X será representada ora por um peso num vértice, ora por um ciclo.

Por outro lado, pela definição de G , os pesos nos vértices representam alças nas regiões de X correspondentes. Além disso, os ciclos de G também representarão alças de X . De fato, seja $G_0 = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$ um ciclo em G . Assim, existem n regiões de G associadas ao ciclo G_0 e, como de cada um dos vértices saem exatamente duas arestas, cada região conexa correspondente a um vértice tem exatamente duas componentes de bordo, de sorte que sua topologia é equivalente à de uma região cilíndrica limitada. Podemos, desse modo, entender que, à região correspondente ao vértice v_0 , estamos adicionando, através de uma soma conexa, uma alça, representada pela região correspondente ao caminho v_1, \dots, v_{n-1} .

Portanto, o gênero de X será dado pela soma do número de ciclos de G com seu peso total e, utilizando o Teorema 2.11, temos o resultado proposto. \square

O Corolário 4.1 é baseado em [39], parágrafo 3, Corolário 1.

Corolário 4.1. *Para qualquer par (X, \mathcal{C}) , a superfície X é uma esfera se, e somente se, o grafo associado é uma árvore com os pesos de todos os vértices iguais a zero.*

Demonstração. Seja X uma esfera e G um grafo associado a (X, \mathcal{C}) . Logo, $g(X) = 0$ e, pelo Teorema 4.1, $1 - \chi(G) + W(G) = 0$. Como $1 - \chi(G)$ representa o número de ciclos

do grafo e $W(G)$ representa a soma dos pesos dos vértices, ambas expressões são não negativas, de modo que a soma é zero se, e somente se, cada uma das parcelas é zero. Portanto,

$$1 - \chi(G) = 0 \text{ e } W(G) = 0,$$

mostrando que G é uma árvore com todos os pesos iguais a zero.

Por outro lado, consideremos uma árvore G com todos os pesos iguais a zero associada a um par (X, \mathcal{C}) . Logo, por G não possuir ciclos, $1 - \chi(G) = 0$, e pelo fato de todos os pesos serem iguais a zero, $W(G) = 0$, de maneira que $g(X) = 1 - \chi(G) + W(G) = 0 + 0 = 0$. Portanto, X é uma esfera. \square

Corolário 4.2. *Seja X uma superfície. Então,*

$$\chi(X) = 2(\chi(G) - W(G)).$$

Demonstração. Basta usar as expressões apresentadas nos Teoremas 2.8 e 4.2. \square

4.2 GRAFOS COMO INVARIANTES DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Nesta seção, apresentaremos uma maneira de associar um grafo, que denotaremos por G_f , a uma aplicação estável $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ e mostraremos que G_f é um invariante topológico para tais aplicações.

Dada uma aplicação estável $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$, o conjunto singular de f , Σf , é constituído por um número finito de curvas fechadas, simples e disjuntas, conforme Teorema 3.12. Nesse contexto, temos a Definição 4.3.

Definição 4.3. *O grafo associado à aplicação estável $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$, G_f , é o grafo associado ao par $(X, \Sigma f)$.*

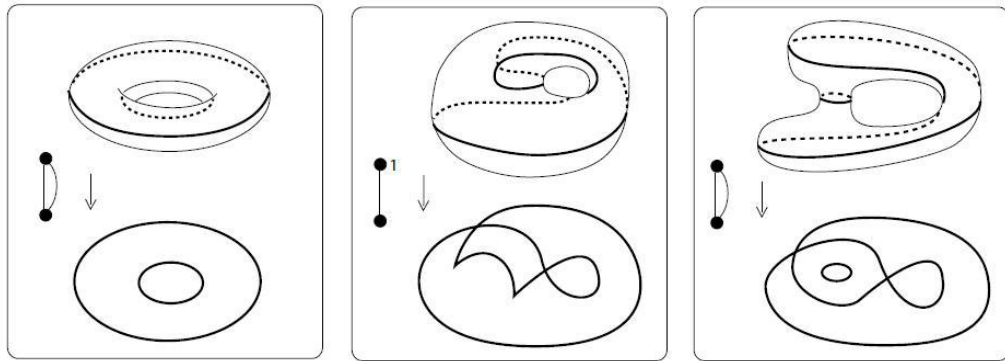
A Figura 41 ilustra a Definição 4.3.

Os Teoremas 4.3 e 4.4 estão baseados em [30].

Teorema 4.3. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação estável e G_f o grafo a ela associado. Então, G_f é bipartido.*

Demonstração. De acordo com a Observação 3.9, existe uma forma de atribuímos um sinal \pm às componentes conexas de $X \setminus \Sigma f$. Isso nos fornece uma maneira natural de atribuímos sinais aos vértices de G_f . Uma vez que cada curva do conjunto singular separa regiões de sinais opostos, cada aresta de G_f irá conectar vértices de sinais opostos, mostrando que G_f é bipartido. \square

Figura 41 – Grafos associados a aplicações estáveis do toro no plano



Fonte: Imagem retirada de [30]

Teorema 4.4. *O grafo de uma aplicação estável é invariante por equivalência.*

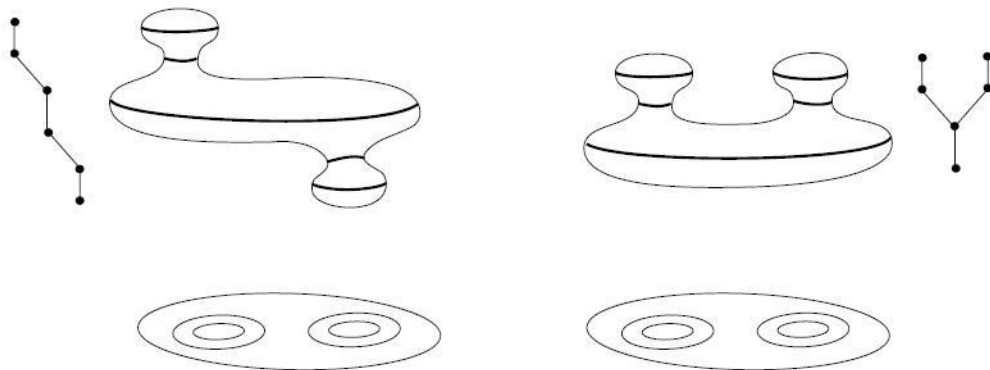
Demonstração. Sejam $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$ duas aplicações equivalentes e $\phi : X \rightarrow X$, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ difeomorfismos tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

Pelo Teorema 3.13, $\phi : X \rightarrow X$ é um difeomorfismo que leva Σf em Σg , mostrando que os pares $(X, \Sigma f)$ e $(X, \Sigma g)$ são equivalentes, de sorte que G_f e G_g são isomorfos (Teorema 4.1). \square

A Figura 42 ilustra os grafos das aplicações apresentadas anteriormente na Figura 37. Como um grafo tem um vértice de grau 3 e no outro todos os vértices tem grau menor ou igual a 2 temos, pelo Teorema 2.13, que eles não são isomorfos, de maneira que as aplicações não podem ser equivalentes.

A diferenciação entre as aplicações, que não era conseguida observando o conjunto de ramificação, agora se estabelece por meio da análise dos respectivos grafos associados.

Figura 42 – Grafos associados a aplicações estáveis da esfera no plano



Fonte: Imagem retirada de [30]

5 REALIZAÇÃO DE GRAFOS POR APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES FECHADAS NO PLANO

Neste capítulo, estamos interessados em saber quais condições um grafo G deve atender para que esteja associado a uma aplicação estável $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$, em que X é uma superfície de classe C^∞ , fechada, conexa e orientada.

Vamos dividir esta análise em dois casos: o primeiro é quando o grafo é uma árvore com peso zero e o segundo é quando o grafo é um grafo bipartido com pesos nos vértices. Para as discussões do primeiro caso, precisaremos do conceito de “transição” no conjunto de ramificação de uma aplicação estável, e para o segundo caso, precisaremos do conceito de “cirurgia” entre aplicações estáveis.

As referências principais para este capítulo são [30], [39] e Mendes de Jesus ([40]). Utilizaremos também as referências Chínaro ([41]) e Ohmoto e Aicardi ([42]).

5.1 TRANSIÇÕES

Para introduzir as discussões desta seção, consideremos um caminho genérico F_t , no espaço das aplicações que pertencem a $C^\infty(X, \mathbb{R}^2)$, entre duas aplicações estáveis $f, g \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$. Com a variação de t no intervalo $[0, 1]$, ocorrem deformações em Bf , conjunto de ramificação de $F_0 = f$, até que ele se “transforme” em Bg , conjunto de ramificação de $F_1 = g$. Como \sim é uma relação de equivalência (Proposição 3.6), se tivermos $f \approx g$, f e g estarão em classes de equivalência diferentes. Neste caso, existirá um $t_0 \in [0, 1]$ que representará o “instante” em que o caminho F_t passa pelo complemento $C^\infty(X, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$, de tal maneira que a aplicação F_{t_0} não será estável.

Definição 5.1. *Uma **transição local**, ou simplesmente **transição**, no conjunto de ramificação Bf de uma aplicação estável $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$ é uma deformação do referido conjunto, que ocorre quando um caminho genérico F_t , entre f e uma outra aplicação estável $g \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$, com $f \approx g$, “atravessa” o complemento $C^\infty(X, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$ (veja Figura 43).*

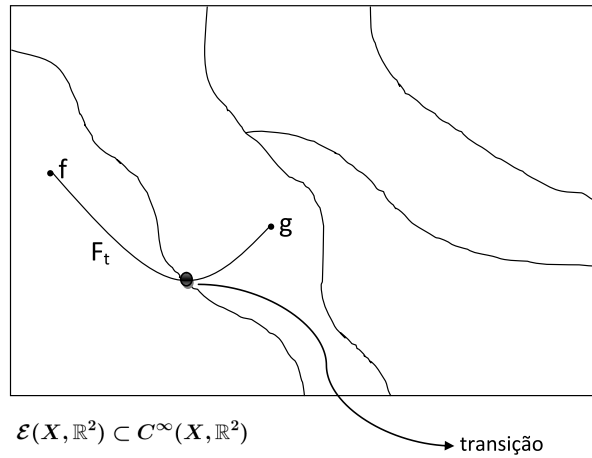
Para detalhes sobre as transições locais, consultar [41] e [42].

Estamos particularmente interessados nas transições locais que alteram o número de cúspides do conjunto de ramificação de uma aplicação estável. Serão elas que apresentaremos agora.

Vale destacar que, segundo [42], o número I_C de cúspides do conjunto de ramificação de uma aplicação estável representa um invariante local para tais aplicações.

A Figura 44 descreve as três transições que serão consideradas neste trabalho: Lábios (L), Bicos (B) e Rabo de Andorinha (S). Cada transição é representada por uma

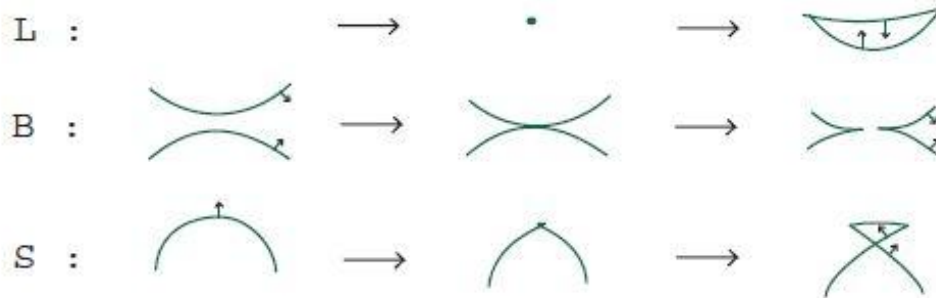
Figura 43 – “Instante” em que o caminho F_t passa pelo complemento $C^\infty(X, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$



Fonte: Imagem produzida pelo autor

sequência de três figuras ordenadas da esquerda para a direita (orientação positiva). As flechas nos arcos de curvas indicam a direção normal em que o número de pré-imagens aumenta (por dois). A figura do centro, em cada transição, representa o “instante” em que o caminho F_t passa pelo complemento $C^\infty(X, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$.

Figura 44 – Transições do tipo Lábios (L), Bicos (B) e Rabo de Andorinha (S)



Fonte: Imagem retirada de [39]

O Teorema 5.1 está baseado em [42], parágrafo 5, Teorema 5.1.

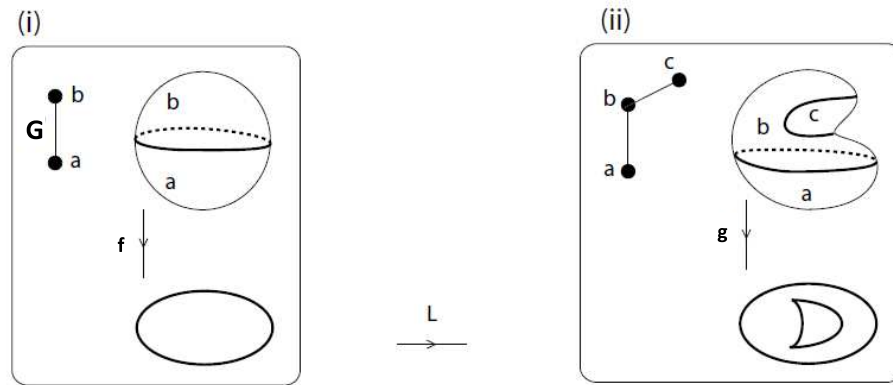
Teorema 5.1. *Se ΔL , ΔB e ΔS denotam, respectivamente, o número de transições do tipo lábios, bicos e rabo de andorinha, com orientação positiva, sofridas ao longo de um caminho genérico F_t entre f e g , então*

$$\Delta I_C = I_C(g) - I_C(f) = 2(\Delta L + \Delta B + \Delta S).$$

Corolário 5.1. *As transições L , B e S alteram I_C por ± 2 , com o sinal dependendo da orientação da transição.*

A Figura 45 ilustra uma transição do tipo lábios no conjunto de ramificação de uma aplicação $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pode-se observar também a alteração que ocorre no grafo associado a f .

Figura 45 – Transições do tipo Lábios (L) no conjunto de ramificação de uma aplicação da esfera no plano



Fonte: Imagem adaptada de [30]

A Figura 46, (i), ilustra uma transição do tipo bicos no conjunto de ramificação de uma aplicação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Os números I_D e I_E representam, respectivamente, o número de pontos duplos e componentes conexas do conjunto de ramificação. Estes números também são invariantes locais para as aplicações estáveis. Tal fato foi demonstrado em [42], no caso dos pontos duplos e em [39], no caso das componentes conexas.

A Figura 46, (ii), ilustra uma transição do tipo rabo de andorinha e uma do tipo bicos no conjunto de ramificação de uma aplicação $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

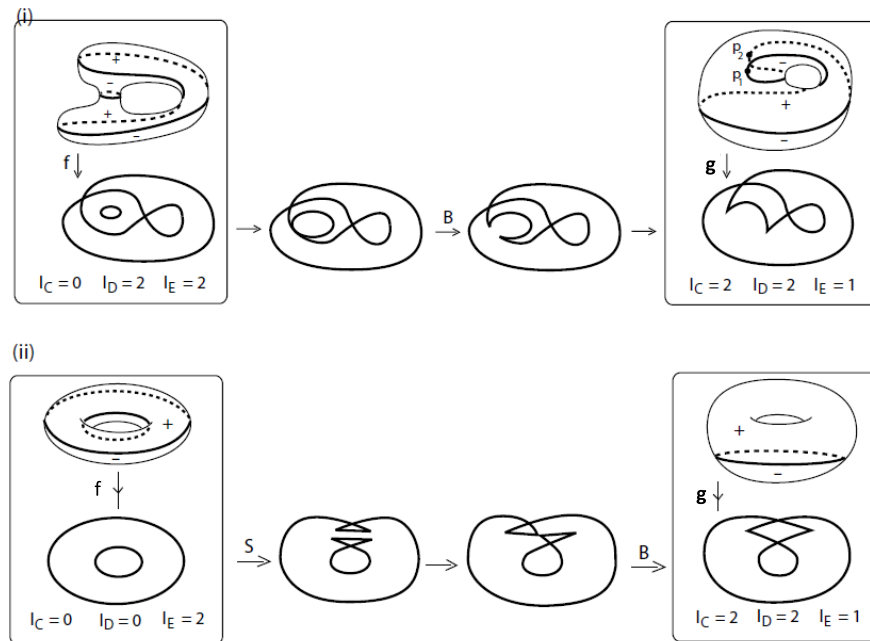
5.2 REALIZAÇÃO DE ÁRVORES COM PESO ZERO

Apresentaremos, nesta seção, um teorema (Teorema 5.2) que garante que toda árvore com peso zero pode ser vista como o grafo de uma aplicação estável $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$. Este resultado está baseado em [39], parágrafo 4, Teorema 2.

Definição 5.2. Dizemos que um grafo G é **realizável** por uma aplicação estável f quando existe uma superfície fechada, conexa e orientada X e $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$, tal que $G_f = G$. Equivalentemente, dizemos que a superfície X e a aplicação estável $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}^2)$ **realizam** o grafo G .

Teorema 5.2. Qualquer árvore, com pesos nos vértices iguais a zero, pode ser realizada como grafo de uma aplicação estável da esfera no plano.

Figura 46 – Transições no conjunto de ramificação de aplicações do toro no plano



Fonte: Imagem adaptada de [30]

Demonstração. Seja G uma árvore com pesos nos vértices iguais a zero. Utilizaremos o princípio de indução sobre o número de arestas.

Se G possui apenas uma aresta, então G pode ser realizada por uma projeção trivial da esfera no plano, $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, conforme ilustrado na Figura 45, (i).

Observemos que é possível acrescentar uma aresta extrema em G e realizar essa nova árvore. De fato, a partir de uma pequena deformação na esfera, criamos uma nova curva singular, obtendo a aplicação g , conforme Figura 45, (ii). Repare que g pode ser obtida de f através de uma transição do tipo lábios no conjunto de ramificação.

Suponhamos, por hipótese de indução, que toda árvore com pesos nos vértices iguais a zero e com k arestas, $k \geq 1$, pode ser realizada por uma aplicação estável da esfera no plano e consideremos uma árvore G com pesos nos vértices iguais a zero e com $k + 1$ arestas.

Se eliminarmos de G uma aresta extrema uv , sendo v um vértice extremo, obtemos uma árvore H com k arestas e que tem u como vértice. Pela hipótese de indução, existe uma aplicação estável f que realiza a árvore H . Conforme o processo acima descrito, efetuando uma transição do tipo lábios no conjunto de ramificação de f , obtemos a aplicação estável g , da esfera (com uma pequena deformação) no plano e que realiza o grafo G . Com efeito, a nova curva singular criada associar-se-á à aresta extrema acrescentada e a região por ela (curva singular) delimitada estará vinculada ao vértice extremo acrescentado. \square

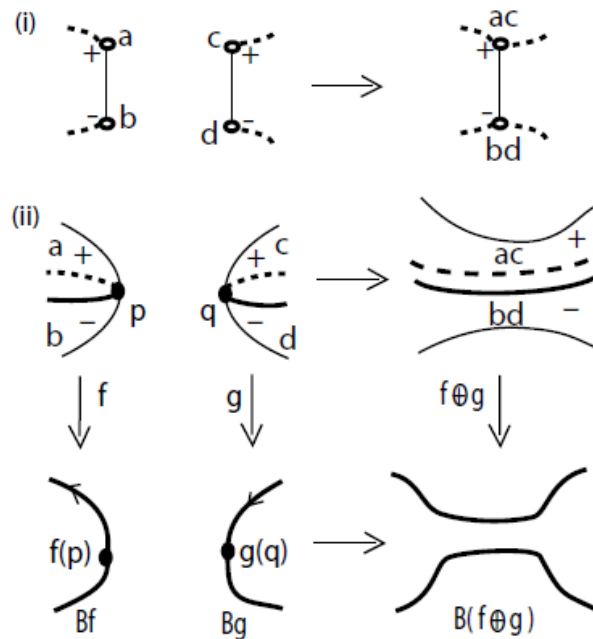
5.3 CIRURGIAS

Nesta seção, vamos definir as cirurgias horizontais e verticais entre aplicações estáveis

Consideremos $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas aplicações estáveis. Fixados dois pontos $p \in \Sigma f$ e $q \in \Sigma g$, escolhemos dois discos fechados, $D_1 \subset X$ e $D_2 \subset Y$, cujos interiores contenham os pontos p e q , respectivamente. Na sequência, tomemos um tubo limitado, difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, e identifiquemos seus componentes de bordo a ∂D_1 e ∂D_2 através de difeomorfismos, realizando duas somas conexas. A nova superfície obtida é difeomorfa a $X \# Y$. As aplicações f e g podem ser estendidas sobre o tubo, obtendo-se uma nova aplicação $f \oplus_h g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$, cujas restrições a X e Y correspondem às aplicações f e g , respectivamente.

Definição 5.3. A aplicação $f \oplus_h g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$, obtida pelo processo acima descrito é chamada **cirurgia horizontal** entre f e g .

Figura 47 – Cirurgia horizontal



Fonte: Imagem retirada de [30]

Utilizando o fato de f e g serem aplicações estáveis e observando os efeitos da cirurgia sobre os respectivos conjuntos de ramificação (Figura 47, (ii)) temos, pelo Teorema 3.16, que a aplicação $f \oplus_h g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ é estável.

Como podemos observar na Figura 47, (ii), com a cirurgia horizontal, regiões de mesmo sinal conectam-se, dando origem a uma única região, com sinal igual ao das regiões envolvidas na cirurgia. A Figura 47, (i), ilustra o efeito da cirurgia horizontal sobre os grafos das aplicações f e g . Os vértices correspondentes às regiões de mesmo sinal, envolvidas na cirurgia, juntam-se, formando um único vértice, correspondente à nova região. Portanto, vale a Proposição 5.1.

Proposição 5.1. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas aplicações estáveis, $f \oplus_h g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ a cirurgia horizontal entre elas e G_f , G_g e $G_{f \oplus_h g}$ os respectivos grafos associados. Então,*

1. $V(G_{f \oplus_h g}) = V(G_f) + V(G_g) - 2.$
2. $E(G_{f \oplus_h g}) = E(G_f) + E(G_g) - 1.$
3. $\beta(G_{f \oplus_h g}) = \beta(G_f) + \beta(G_g),$

onde $\beta(G)$ representa o número de ciclos de um grafo G .

Observação 5.1. 1. *Importante observar que, após a cirurgia horizontal, os pesos nos vértices correspondentes às regiões ac e bd são dados pela soma dos pesos dos vértices a e c , e b e d , respectivamente.*

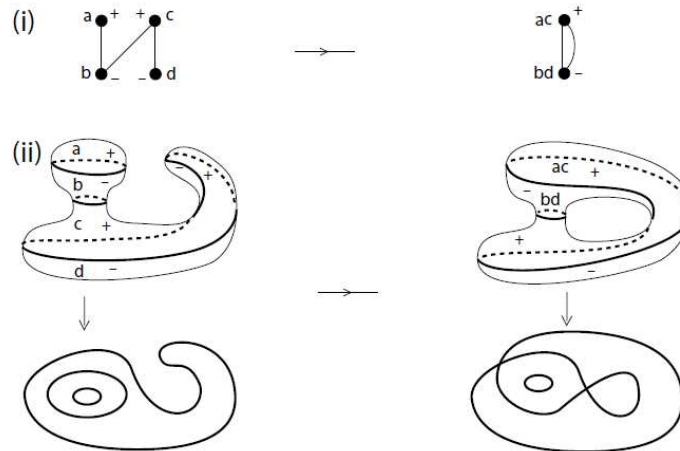
2. *É possível realizar uma “cirurgia horizontal” sobre uma única aplicação, seguindo o mesmo princípio de conectar regiões de mesmo sinal. Neste caso, o número de vértices diminui por 2, o número de arestas diminui por 1 e, quanto ao número de ciclos, o novo grafo terá um ciclo a mais. Veja Figura 48.*

Consideremos, agora, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas aplicações estáveis. Escolhamos duas regiões de sinais opostos, uma em X e outra em Y e tomemos dois discos fechados, D_1 e D_2 , nas respectivas regiões, de maneira que $f(D_1) = g(D_2)$. Na sequência, tomemos um tubo limitado, difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, e identifiquemos seus componentes de bordo a ∂D_1 e ∂D_2 através de difeomorfismos, realizando duas somas conexas. A nova superfície obtida é difeomorfa a $X \# Y$. As aplicações f e g podem ser estendidas sobre o tubo, obtendo-se uma nova aplicação $f \oplus_v g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$, cujas restrições a X e Y correspondem às aplicações f e g , respectivamente.

Definição 5.4. *A aplicação $f \oplus_v g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$, obtida pelo processo acima descrito é chamada **cirurgia vertical** entre f e g .*

Utilizando o fato de f e g serem aplicações estáveis e observando os efeitos da cirurgia sobre os respectivos conjuntos de ramificação (Figura 49, (ii)) temos, pelo Teorema 3.16, que a aplicação $f \oplus_v g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ é estável.

Figura 48 – Cirurgia horizontal sobre uma única aplicação



Fonte: Imagem retirada de [30]

Como podemos observar na Figura 49, (ii), com a cirurgia vertical, surge uma nova curva singular na superfície, a partir do tubo adicionado. Essa nova curva gera uma nova componente conexa no conjunto de ramificação de $f \oplus_v g$, se comparada às aplicações f e g , tomadas separadamente. A Figura 49, (i), ilustra o efeito da cirurgia vertical sobre os grafos das aplicações f e g . Os vértices correspondentes às regiões de sinais opostos, envolvidas na cirurgia, conectam-se, dando origem a uma nova aresta. Portanto, vale a Proposição 5.2.

Proposição 5.2. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas aplicações estáveis, $f \oplus_v g : X \# Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ a cirurgia vertical entre elas e G_f , G_g e $G_{f \oplus_v g}$ os respectivos grafos associados. Então,*

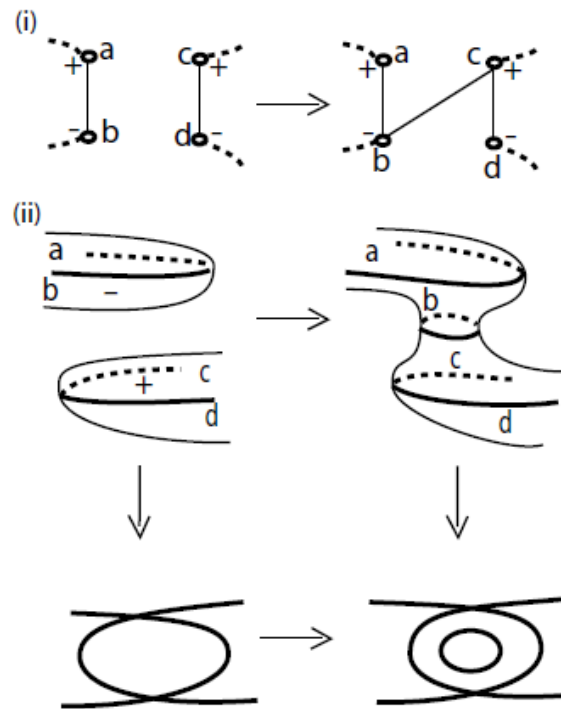
1. $V(G_{f \oplus_v g}) = V(G_f) + V(G_g)$.
2. $E(G_{f \oplus_v g}) = E(G_f) + E(G_g) + 1$.
3. $\beta(G_{f \oplus_v g}) = \beta(G_f) + \beta(G_g)$,

onde $\beta(G)$ representa o número de ciclos de um grafo G .

Observação 5.2. *É possível realizar uma “cirurgia vertical” sobre uma única aplicação, seguindo o mesmo princípio de conectar regiões de sinais opostos. Neste caso, o número de vértices permanece o mesmo, o número de arestas aumenta por 1 e, quanto ao número de ciclos, o novo grafo terá um ciclo a mais. Veja Figura 50.*

A partir de um dado grafo, podemos obter um outro, conectando dois de seus vértices de sinais opostos.

Figura 49 – Cirurgia vertical



Fonte: Imagem retirada de [30]

Definição 5.5. Quando um grafo H é obtido de um grafo bipartido G , pela conexão de dois vértices de sinais opostos, dizemos que H foi obtido de **forma consistente**.

Note que todo grafo obtido de forma consistente é, também, um grafo bipartido.

5.4 REALIZAÇÃO DE GRAFOS COM PESO

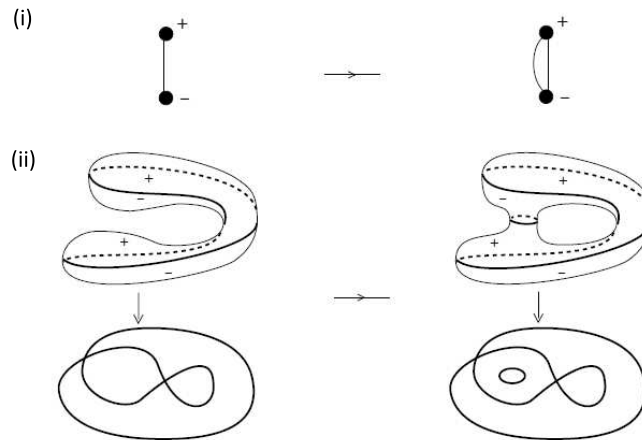
Para encerrar este capítulo, mostraremos, nesta seção, quais grafos, em geral, podem ser realizados por aplicações estáveis de superfícies no plano.

O próximo resultado garante que o aumento no peso dos vértices de um grafo realizável gera um novo grafo também realizável (por aplicações estáveis de superfícies no plano).

Teorema 5.3. Seja G um grafo realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano. Aumentando o peso de seus vértices, obtemos um novo grafo realizável.

Demonstração. Seja G um grafo realizável por uma aplicação estável $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, de sorte que $G = G_f$. Seja H o novo grafo obtido de G pelo aumento de uma unidade no peso de um de seus vértices (vértice v fixado). Queremos encontrar uma aplicação estável que

Figura 50 – Cirurgia vertical sobre uma única aplicação



Fonte: Imagem retirada de [30]

realize H . Tal aplicação será obtida por meio de uma cirurgia horizontal conveniente, que passaremos a descrever agora.

Consideremos a aplicação g da Figura 46, (i), e realizemos uma cirurgia horizontal entre f e g , obtendo uma nova aplicação estável $\xi : X \# \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, conforme Figura 51, (ii). Note que a nova superfície sofrerá um aumento de uma unidade no gênero da nova região ac , permanecendo as demais regiões com gênero inalterado. Não haverá mudança na estrutura de adjacências entre as regiões da superfície inicial.

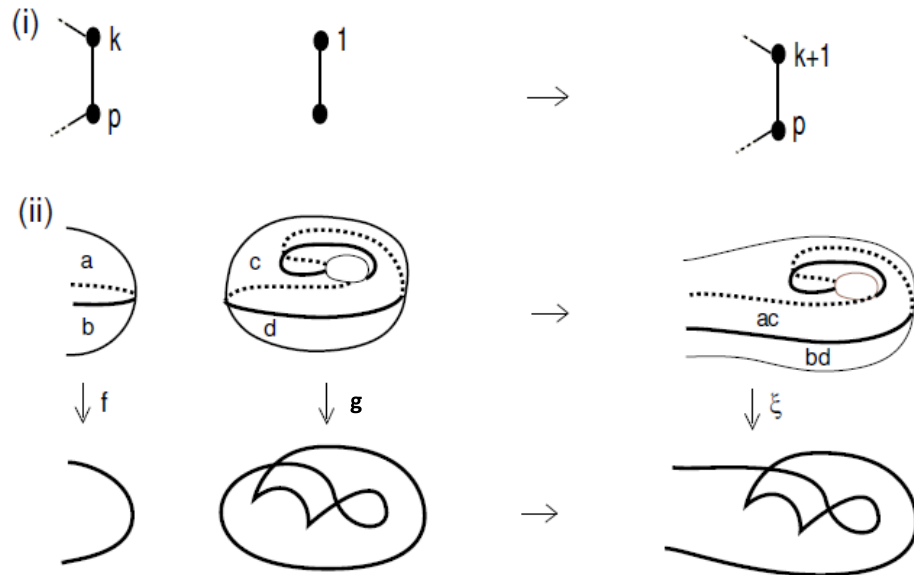
Pelos efeitos já mencionados da cirurgia horizontal no grafo associado à aplicação (Figura 51, (i)) vemos que, de fato, a nova aplicação ξ realiza o grafo H .

Suponhamos, por hipótese de indução, que todo grafo H , obtido de G pelo aumento de l unidades no peso de um de seus vértices (vértice v fixado) seja realizável por uma aplicação estável $o : Y \rightarrow \mathbb{R}^2$. Consideremos o grafo \tilde{H} , obtido de H pelo aumento de uma unidade no peso do vértice v que foi fixado. Em outras palavras, o grafo \tilde{H} foi obtido de G pelo aumento de $l + 1$ unidades no peso do vértice v . De maneira análoga à argumentação anterior, se realizarmos uma cirurgia horizontal entre o e g , obteremos uma aplicação que realiza o grafo \tilde{H} .

Portanto, qualquer grafo obtido de G pelo aumento arbitrário no peso de um de seus vértices é realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano.

Além disso, esse processo pode ser realizado em todos os vértices de G , um de cada vez, o que conclui a demonstração, uma vez que G possui um número finito de vértices. \square

Teorema 5.4. *Toda árvore com pesos arbitrários nos vértices é realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano.*

Figura 51 – Cirurgia horizontal entre as aplicações f e g 

Fonte: Imagem adaptada de [30]

Demonstração. Basta usar os Teoremas 5.2 e 5.3. \square

Teorema 5.5. *Seja G um grafo bipartido realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano. Então, todo grafo obtido de G de forma consistente é também realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano.*

Demonstração. Seja G um grafo realizável por uma aplicação estável $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, de sorte que $G = G_f$. Seja H o grafo obtido de G de forma consistente, conectando-se os vértices u e v de sinais opostos. Para obter a aplicação estável que realiza H , basta efetuar uma cirurgia vertical sobre f , conforme descrito na Observação 5.2. \square

O Teorema 5.6 é o resultado principal deste capítulo e está baseado em [40], parágrafo 4, Teorema 4.1.

Teorema 5.6. *Um grafo com peso arbitrário nos vértices é realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano se, e somente se, é um grafo bipartido.*

Demonstração. Se um grafo com pesos é realizável, então, pelo Teorema 4.3, ele é bipartido.

Reciprocamente, consideremos G um grafo bipartido com peso arbitrário nos vértices. Seja H a árvore de abrangência de G (Definição 2.38). Temos que H é realizável em função do Teorema 5.4.

Na seqüência, devolvemos as arestas retiradas de G , uma a uma, o que ocorrerá de forma consistente. Como este processo será realizado um número finito de vezes, o Teorema 5.5 garante que G é realizável por uma aplicação estável de uma superfície no plano. \square

Para encerrar o capítulo, apresentamos um exemplo de realização de um grafo bipartido, com base no Teorema 5.6.

Exemplo 5.1. *Consideremos o grafo G da Figura 52, (i). Reparemos que é um grafo bipartido, uma vez que seu único ciclo tem tamanho par (Teorema 2.14). Retirando uma aresta do ciclo de G , obtemos a árvore de abrangência H e, eliminando os pesos de seus vértices, obtemos a árvore H_0 , conforme Figura 52, (ii).*

Figura 52 –



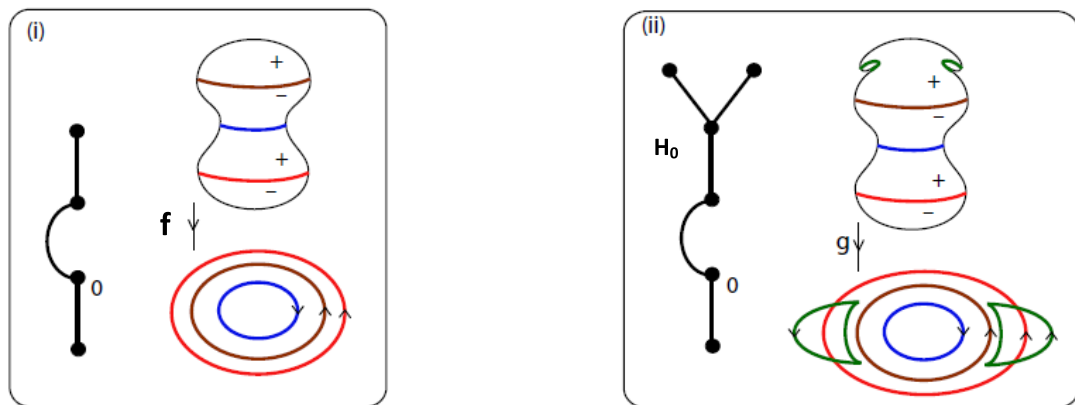
Fonte: Imagem adaptada de [30]

Eliminando duas arestas extremas de H_0 , realizamos a árvore resultante pela aplicação f ilustrada na Figura 53, (i). Na seqüência, realizando duas transições do tipo lábios no conjunto de ramificação de f , à semelhança do que foi ilustrado na Figura 45, obtemos a aplicação g da Figura 53, (ii), que realiza H_0 .

Efetuada uma cirurgia vertical em g , obtemos a aplicação \bar{g} , que realiza H , conforme ilustrado na Figura 54.

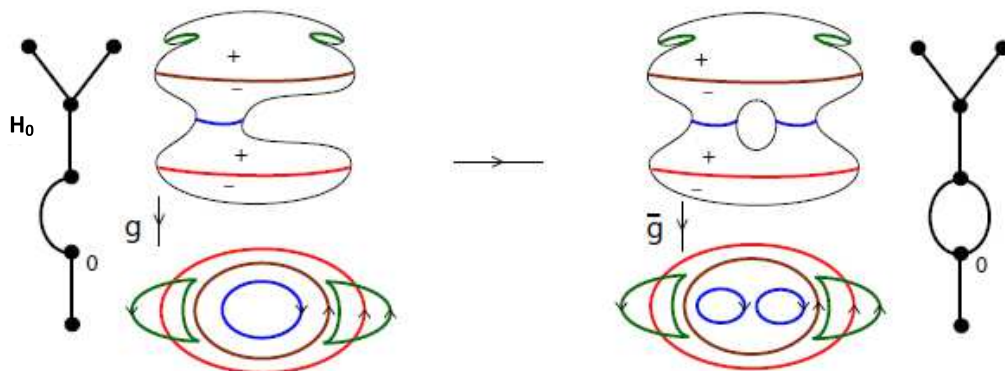
Por fim, para devolver o peso retirado ao respectivo vértice, efetuamos uma cirurgia horizontal entre \bar{g} e \bar{f} , obtendo a aplicação $\bar{g} \oplus_h \bar{f}$, que realiza o grafo inicial G , como ilustra a Figura 55.

Figura 53 –



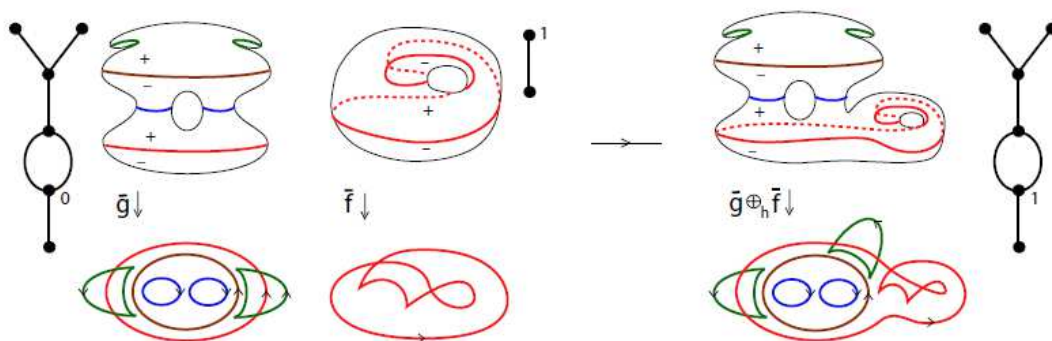
Fonte: Imagem adaptada de [30]

Figura 54 –



Fonte: Imagem adaptada de [30]

Figura 55 –



Fonte: Imagem adaptada de [30]

REFERÊNCIAS

- [1] WHITNEY, H. *On singularities of Mappings of Euclidean Spaces I, Mappings of the Plane into the Plane*. Ann. of Math., vol. 62, 374-410, 1955.
- [2] MORSE, M. *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*. Trans. A.M.S., vol. 27, 345-396, 1925.
- [3] MORSE, M. *The critical points of a function of n variables* Trans. A.M.S., vol. 33, 72-91, 1931.
- [4] WALL, C. *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I*. Lecture Notes in Mathematics 192, Springer-Verlag, New York 1970.
- [5] MALGRANGE, B. *Le Théorème de Préparation en Géométrie Différentiable*, Sémin. H. Cartan 15, exps. 11, 12, 13, 22, 1962.
- [6] MATHER, J. N. *Notes on Topological Stability*. Universidade Harvard, Cambridge, 1970.
- [7] ARNOLD, V. I.; GUSEIN-ZADE, S. M.; VARCHENKO, A. N. *Singularities of Differentiable Maps: The classification of critical points, caustics and wave fronts*. Boston: Birkhäuser, 1985. v.1.
- [8] GIBSON, C. G. *Singular Points of Smooth Mapings*. Londres: Pitman, 1979.
- [9] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [10] YUNG, C. L. *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [11] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Graphs of Stable Maps from Closed Orientable Surfaces to the 2-Sphere*, in: Singularities in Aarhus, in: Journal of Singularities, vol. 2, 67-80, 2010.
- [12] MENDES DE JESUS, C.; Sanabria-Codesal, E. *Realization of graphs by fold Gauss maps*, Topology and its Applications, vol. 234, 248-258, 2018.
- [13] MENDES DE JESUS, C.; MORAES, S. M.; ROMERO FUSTER, M. C. *Stable Gauss maps from a global viewpoint*, Bull Braz Math Soc, New Series 42(1), 87-103, 2011.
- [14] MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Graphs of stable maps from closed surfaces to the projective plane*, Topology and its Applications, vol. 234, 298-310, 2018.
- [15] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.ed. New York: Springer, 2013.
- [16] LIMA, E. L. *Introdução à Topologia Diferencial*. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1961.
- [17] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [18] CARMO, M. P. *Differential Forms and Applications*. Berlim: Springer-Verlag, 1994.

- [19] GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1974.
- [20] WARNER, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [21] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [22] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998.
- [23] LIMA, E. L. *Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan-Brouwer no caso diferenciável*, Matemática Universitária, vol. 4, 89-105, Rio de Janeiro: SBM, 1986.
- [24] KINSEY, L. C. *Topology of Surfaces*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [25] FULTON, W. *Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [26] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [27] WHITE, A. T. *Graphs of Groups on Surfaces: Interactions and Models*. Amsterdã: Elsevier, 2001.
- [28] WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*. 5.ed. Harlow: Pearson, 2010.
- [29] MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [30] MACHADO, D. S. *Invariante Global de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada no Plano*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Brasil, 2010.
- [31] MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P., CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [32] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- [33] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [34] HIRSCH, M. W. *Differential Topology*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [35] BRETAS, J. L. *Singularidades de Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas e Orientadas em S^2* , Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Brasil, 2011.
- [36] SADYKOV, R. *Singularities of Smooth Maps*, Tese de Doutorado, University of Florida, Estados Unidos, 2005.
- [37] SOUZA, I. V. *Singularidades de Aplicações de Gauss Estáveis*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Brasil, 2012.
- [38] MENDES DE JESUS, C. *Grafos de Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas*, in: Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.

- [39] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Topological Invariants of Stable Maps from a Surface to the Plane from a Global Viewpoint*, in: Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities, in: Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 232, Marcel and Dekker, 227-235, 2003.
- [40] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data*, Topology and its Applications, vol. 154, 166-175, 2007.
- [41] CHINCARO EGUSQUIZA, E. A. *Bifurcações de aplicações de Whitney*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Brasil, 1978.
- [42] OHMOTO, T.; AICARDI, F. *First order local invariants of apparent contours*, Topology, vol. 45, 27-45, 2006.