UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

PRÁTICAS MATEMÁTICAS PARA PROFESSORES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO

Bertrand Luiz Corrêa Lima
Reginaldo Fernando Carneiro

Colaboradores
Cristimara Rodrigues de Castilho
Leonardo José da Silva
Margareth Conceição Pereira
Paulo Ricardo Ramos Pereira

Juiz de Fora
2022

Carta ao professor(a) iniciante de Matemática

Caro(a) colega de profissão,

Acredito que, como eu e grande parte dos professores iniciantes de Matemática, você deva ter vivenciado ou ainda está vivenciando, no seu processo formativo e profissional, o que denominamos de descoberta, de sobrevivência e/ou de choque de realidade, termos desenvolvidos em referência às diferenças encontradas entre a formação inicial e as situações, os desafios, os impactos, os medos, as fragilidades, o desamparo e as inseguranças que constituem a realidade do sistema educativo e que muitos docentes iniciantes, com até três anos de inserção profissional, precisam enfrentar para descobrir e sobreviver aos primeiros anos da profissão. Diante disso, e por acreditarmos que professores em início de carreira merecem e precisam de atenção, já que reconhecemos os desafios e as características específicas da fase de iniciação na carreira docente, da influência na constituição da identidade profissional e, ainda, na permanência na carreira, buscando evitar o seu abandono precoce, planejamos, especialmente para você, quatro atividades que poderão auxiliar no desenvolvimento de alguns conceitos e conteúdos em diferentes áreas da Matemática.

Aaah! Vale ressaltar que essas atividades matemáticas foram elaboradas por residentes e professores do Colégio de Aplicação João XXIII que fizeram parte do Programa de Residência Docente da Universidade Federal de Juiz de Fora. Em parceria com eles, nós, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, elaboramos este Produto Educacional, que é um dos requisitos para a obtenção de título no mestrado profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e que está relacionado à pesquisa intitulada “A iniciação à docência de professores de Matemática em um Programa de Residência Docente”.

Tivemos a ideia de construir este produto coletivamente entre os autores da dissertação e alguns dos profissionais que participaram da Residência Docente (Paulo Ricardo Ramos Pereira, Leonardo José da Silva, Cristimara Rodrigues de Castilho e Margareth Conceição Pereira), com o intuito de articularmos a teoria e a prática e propormos atividades que poderão ser utilizadas em sua sala de aula.

Esperamos que você faça bom uso deste material.

Um abraço e até mais!

Os autores

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

QUADROS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Como evidenciado anteriormente na Carta destinada ao professor em início de carreira, este produto educacional pretende divulgar práticas construídas e vivenciadas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio pelos professores residentes e orientadores da área de Matemática que participaram do Programa de Residência Docente da Universidade de Juiz de Fora, em parceria com o Colégio de Aplicação João XXIII e os autores desta investigação. A ideia é apresentar quatro atividades e/ou planos de aula que foram desenvolvidos ao longo da residência docente e da minha trajetória profissional que tenham um significado tanto para os residentes quanto para os professores orientadores e que possam auxiliar outros professores de matemática, em especial, em início de carreira.

Vale salientar que estes planejamentos de aulas foram escolhidos com o intuito de auxiliar os professores em início de carreira a planejar, executar e modificar atividades matemáticas. Entendemos que cada escola, cada professor e cada aluno possuem suas especificidades físicas, motoras, psicológicas, neurológicas, dentre outras. Portanto, as atividades propostas aqui não só precisam como devem ser adaptadas à realidade e às condições dos envolvidos e de seus contextos.

Convidamos você, leitor, iniciante ou experiente, que se interessar pela temática de iniciação à docência, a ler a dissertação e a conhecer quais são as ações formativas e como ocorre a indução profissional docente de professores de Matemática em início de carreira participantes do Programa de Residência Docente do Colégio de Aplicação João XXIII da Universidade Federal de Juiz de Fora e compreender, também, um pouco sobre os sentimentos, as vivências e as características desse professorado. Diante disso, na dissertação apresentaremos discussões sobre a formação de professores, o início de carreira docente; o que são os programas internacionais e nacionais de acompanhamento de professores em início de carreira, dentre outros.

Além disso, lhe convidamos a ler os dois Trabalhos Finais Docentes (TDF) disponíveis no site do Programa de Residência Docente[1] dos residentes que fizeram parte desta pesquisa. Neles constam diversos relatos de experiências obtidos por estes professores que poderão lhe apoiar na superação de certos desafios pedagógicos.

---

[1]https://repositorio.ufjf.br/jspui/simple-search?filterquery=Trabalho+de+Forma%C3%A7%C3%A3o+Docente&filtername=type&filtertype=equals.

ATIVIDADES

1. RECONHECENDO O TRIÂNGULO E OS SEUS LADOS

Conteúdo: Triângulos e suas classificações quanto aos seus lados

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada

Ano: 7º ano

Área: Geometria Plana

Habilidade BNCC: EF5MA17 - Reconhecer, nomear, representar e comparar polígonos, considerando seus lados,vértices e ângulos

Colaboradores: Bertrand Luiz Corrêa Lima e Reginaldo Fernando Carneiro

JUSTIFICATIVA

O estudo da geometria leva o aluno a desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo matemático por meio de atividades de abstração dos conceitos geométricos e, também, através de indução e dedução de resultados.

O desenho e a manipulação geométrica são de fundamental importância para reforçar o aprendizado de resultados fundamentais da geometria plana e para construir a representação dos objetos geométricos que são trabalhados nessa área da matemática, além de despertar a criatividade dos alunos. Com base em Piaget (1964), pode-se afirmar que o conhecimento é construído por meio de ações, sejam elas físicas ou coordenadas mentalmente. Essa perspectiva teórica implica em uma aprendizagem das classificações de triângulos quanto ao lado a partir da manipulação de materiais manipuláveis e de generalizações advindas dessas ações.

OBJETIVO GERAL

Reconhecer, nomear, comparar e representar os triângulos de acordo com a medida dos seus lados.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reconhecer o triângulo como um polígono que possui 3 lados, cujas medidas implicam classificações diferentes sinalizando seus elementos principais;
- Nomear os tipos de triângulos, quanto às medidas de seus lados (equilátero, isósceles e escaleno), por meio da medição dos lados de diferentes triângulos;
- Estudar as principais propriedades dos triângulos e compará-los.

RECURSOS DIDÁTICOS

Lousa ou quadro, pincel ou giz, folhas das atividades impressas, régua, folha de papel, cola, caderno e lápis ou caneta. O professor poderá aplicar esta atividade tanto no ensino presencial (como proposto neste produto educacional, ou utilizando o laboratório de informática) ou no ensino remoto, por meio do software *Geogebra*[2].

ETAPAS PREVISTAS

Explorando a temática

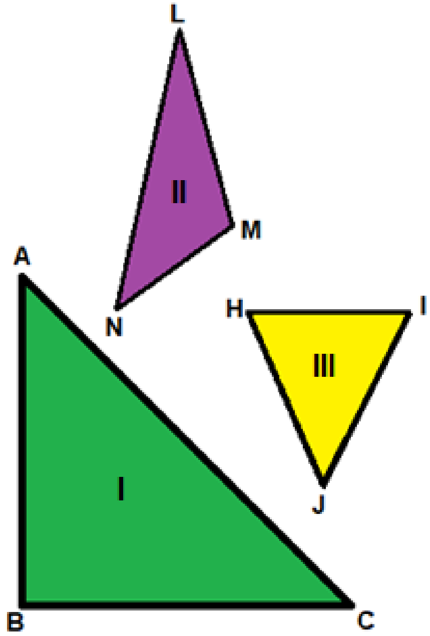
- Verificar os conhecimentos prévios dos alunos quanto à temática.

No início da aula, o professor fará aos alunos questionamentos com o intuito de verificar quais são os conhecimentos prévios dos alunos quanto à área e à temática a ser trabalha, tais como:

- Para você, o que é Geometria?
- O que caracteriza um triângulo? Em nosso dia a dia, você reconheceria um triângulo? Em que situação?
- Você já parou para imaginar como seria a nossa vida sem as formas triangulares?
- Já se perguntou sobre as utilidades delas para o mundo do trabalho ou já observou, nos espaços que você frequenta, onde estas formas estão presentes?
- O que é o vértice de um triângulo? Você seria capaz de identificar este elemento?

[2] https://www.geogebra.org/?lang=pt.

Figura 1 - Representação dos triângulos propostos pelos autores desse produto



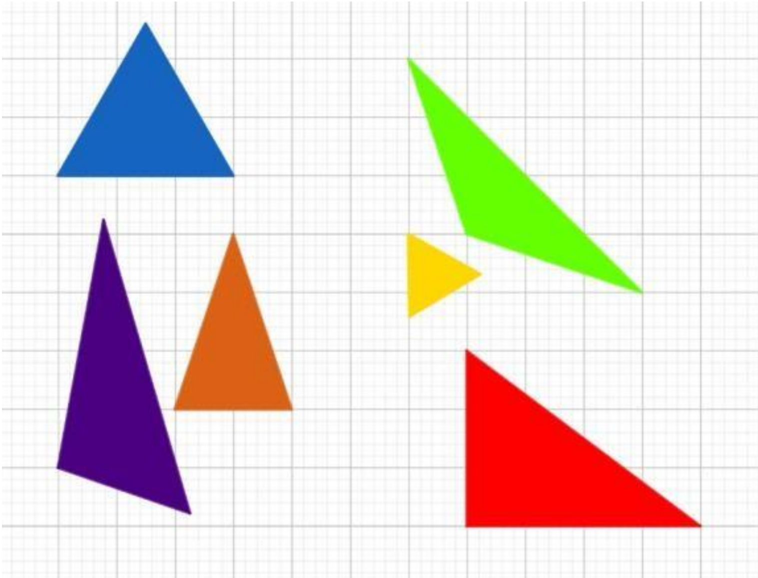
Fonte: Elaborado pelos autores.

Para isso, o professor desenhará o triângulo I e indagará os alunos na tentativa de chegar à conclusão que o triângulo I possui 3 lados e três vértices: sendo eles A, B e C. Diante disso, o triangulo I pode ser chamado de triângulo ABC que possui três lados (AB, AC e CB). Em seguida, o professor desenhará os triângulos II e III e perguntará quais são os vértices e os respectivos lados. Percebe-se que nesta etapa será necessário que o professor busque reconhecer, com sua turma, os vértices a partir dos seus nomes e como deve se chamar os triângulos com os vértices identificados. Além disso, nesta etapa o docente poderá desenhar diferentes triângulos no quadro, fazendo questionamentos de modo que os estudantes percebam que essas alterações de medidas dos lados e o formato do triângulo não comprometem as propriedades estudadas deste polígono: ter 3 lados e 3 vértices.

Atividade principal

- Nomear triângulos, medir seus lados e classificá-los quanto à medida dos lados;
- Apresentar e discutir sobre os 3 tipos de triângulos: (a) triângulos de 3 lados de medidas iguais; (b) triângulos de 2 lados de medidas iguais; e (c) triângulos de 3 lados de medidas diferentes.

Figura 2 - Triângulos construídos no Geogebra pelos autores



Fonte: Elaborado pelos autores.

Após receber seis triângulos do professor, os alunos deverão:

I. Colar os seis triângulos na folha de papel que o professor distribuirá no início da aula;

II. Nomear os vértices;

III. Com a régua, medir os lados dos seus triângulos e escrever os valores encontrados do lado correspondente;

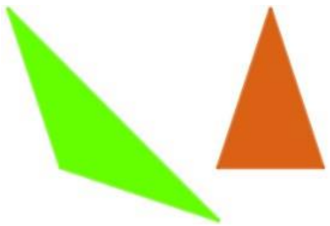
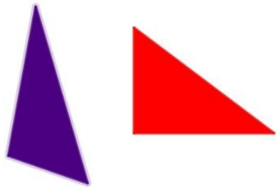
IV. Escrever, no final da folha, quais as semelhanças e diferenças observadas em relação aos seis triângulos dados e separá-los em três grupos distintos.

O professor deverá organizar a sala em duplas e solicitar que todos peguem os materiais solicitados: cola, régua, lápis e borracha. Em seguida, deverá instruir os alunos para que o nome do vértice seja escrito na parte externa do triângulo, na folha em branco. É preciso que o professor se atente quanto ao uso da régua, garantindo que todos iniciem a medida a partir do zero. O professor precisará ir a cada grupo e verificar se todos nomearam os vértices com letras maiúsculas, escolhidas por eles mesmos. Nesse momento, se aproximará dos que apresentam dificuldade para realizar a atividade, fazendo questionamentos sobre nomeação dos vértices e dos triângulos, de modo que eles mesmos escolham como devem nomear os vértices dos seus triângulos e concluam como chamará os seus triângulos, a partir da nomeação dos vértices.

Discussão e resultados

Nesta etapa, os alunos apresentarão ao professor as ideias destacadas no item IV. É esperado que os alunos identifiquem que os 6 triângulos podem ser divididos em três classes. Conforme quadro a seguir.

Quadro 1 - Representação das três classes de triângulos

TRÊS LADOS IGUAIS	DOIS LADOS IGUAIS	TRÊS LADOS DIFERENTES
		

Fonte: Elaborado pelos autores.

Caso os alunos não consigam chegar a essa conclusão, indagações podem ser feitas com o intuito de que os alunos percebam que há uma relação entre os triângulos apresentados, tais como: (a) quantos lados com as mesmas medidas têm esse triângulo?; (b) todos os triângulos do seu grupo são do mesmo tamanho?; (c) o que diferencia um triângulo do outro?; (d) o que o triângulo azul e amarelo têm em comum? E o triângulo verde e marrom?

É importante que o professor valorize as estratégias escolhidas pelos estudantes para classificarem os triângulos e explicarem as classificações e busque garantir que todos tenham aprendido os conceitos de triângulo equilátero, isósceles e escaleno. Após as discussões, o professor formalizará as definições e classificará os triângulos, destacando que, em relação aos lados, podemos classificá-los em três tipos: equilátero, isósceles e escaleno. Os equiláteros são os triângulos que possuem os três lados iguais, os isósceles são os triângulos em que pelo menos dois de seus lados tenham medidas iguais e os escalenos são os triângulos em que todos os lados possuem medidas diferentes.

AVALIAÇÃO

A avaliação ocorrerá por meio da participação dos alunos e das discussões das atividades e dos exercícios propostos. Durante todo o processo, o professor utilizará a avaliação formativa.

Quadro 2 - Avaliação formativa

	PARTICIPAÇÃO DA AULA	CONSTRUÇÃO DO CONCEITO	EXERCÍCIOS EM SALA	CAPACIDADE DE ARGUMENTAÇÃO
ALUNO A				
ALUNO B				
ALUNO C				
ALUNO D				
ALUNO E				
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Fonte: Elaborado pelos autores.

RECUPERAÇÃO

Rever os pontos de fragilidade dos alunos por meio de uma lista de atividades sugerida pelo professor.

2. CONCEITUANDO FUNÇÃO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Conteúdo: Funções

Duração: 3 aulas de 50 minutos cada

Ano: 9º ano do Ensino Fundamental / 1º ano do Ensino Médio

Área: Geometria Plana e Álgebra

Habilidade BNCC: 13.9 - Resolver problemas que envolvam funções de primeiro e segundo grau apresentadas em diferentes linguagens (textos, tabelas, gráficos)

Colaboradores: Bertrand Luiz Corrêa Lima, Reginaldo Fernando Carneiro e Leonardo José da Silva

Nesta atividade, utilizaremos os seguintes recursos didáticos: Planilha de *Excel*/*GeoGebra*/lousa/pincel.

Como objetivo geral, pretende-se conceituar função por meio da resolução de problemas e abordar as representações geométrica e algébrica de uma função.

Primeira aula: Inicialmente, o professor deverá apresentar para os alunos o seguinte problema:

No último domingo, Aristóteles resolveu levar sua esposa a um restaurante, para comemorar o aniversário da bela Hipátia. Chegando a uma movimentada rua da cidade do Rio de Janeiro, avistou os seguintes anúncios:

Sabendo que o foco do Aristóteles é economizar, Hipátia e ele só tomarão, juntos, um litro de suco. Sua fome é do tamanho da dúvida sobre a escolha do melhor restaurante.

Auxilie-os na escolha, explicando qual será o restaurante mais econômico. Lembre-se que ele ficará chateado se sua escolha não for o melhor para o seu bolso.

Após a leitura individual e em grupo, o professor perguntará aos estudantes qual dos dois restaurantes Aristóteles escolheu e o porquê. Vale destacar: é importante que os alunos cheguem às suas próprias conclusões e/ou aos seus próprios argumentos de forma individual. Para o início da aula até esse momento, estipula-se um prazo de 15 minutos.

Em seguida, o professor questionará os alunos quanto à resolução deste problema, instigando-os numa discussão conjunta sobre as possíveis soluções, baseados nas mediações a seguir:

a) É possível definir qual restaurante mais vantajoso? Como?

b) O valor que Aristóteles vai pagar em seu jantar está dependendo de alguma coisa? De que?

c) Suponha que o casal consumirá s 400 g de comida. Qual dos restaurantes será mais econômico para Aristóteles?

d) Com base no questionamento anterior, sua resposta no item “a” continuará a mesma?

Para discutirem esses itens, o professor dará um tempo de aproximadamente 15 minutos.

No primeiro tópico, espera-se encontrar as estratégias desenvolvidas pelos estudantes, independentemente se a resposta está ou não correta.

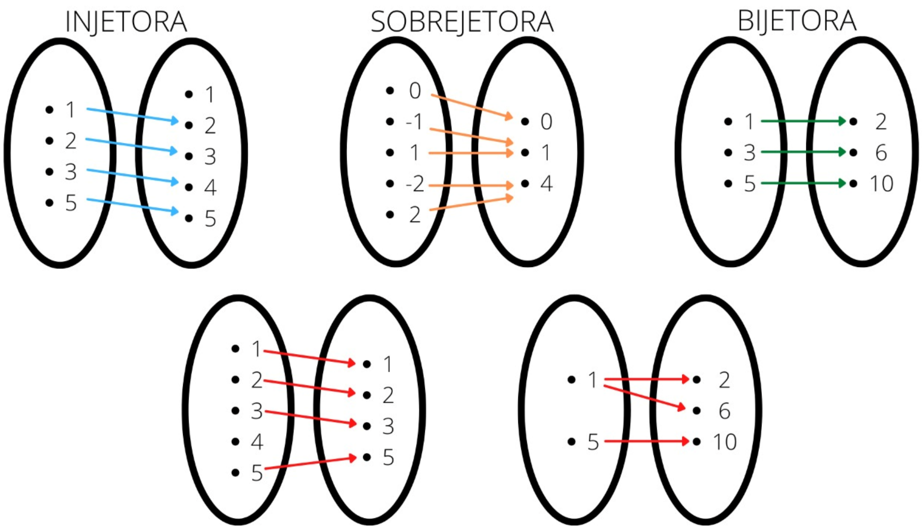
No segundo tópico, acredita-se que os alunos perceberão que o preço pago pelo jantar está em função do consumido. Já no tópico três, o restaurante mais em conta será restaurante *Queen*, com uma diferença de R$ 0,96 do restaurante *King*. No último tópico, o professor tentará enfatizar as respostas dos alunos, principalmente dos que tiverem opinião divergente à do primeiro item.

Após todo o debate sobre os itens, o professor deverá conceituar o que vem a ser função, apresentando a definição no *Power Point* ou na lousa de preferência da seguinte maneira: *Função é um tipo especial de relação entre os elementos de dois conjuntos, conjunto x e conjunto y, por exemplo. Assim sendo, cada elemento do conjunto x é levado a um único elemento do conjunto y. Podemos representá-las utilizando uma lei de formação, por relações entre diagramas, por uma tabela ou gráfico.*

Vale destacar que o professor poderá conceituar Função a partir de diversas abordagens. Escolheremos aqui a abordagem de conjunto.

Seguindo a definição, poderão exploradas algumas representações possíveis de funções, como lei de formação, tabela, diagramas e gráfico, por meio da exposição pela lousa e experimentação pelo GeoGebra. Uma dessas representações é evidenciada na Figura a seguir, ao ilustrar diagramas que representam ou não uma função, e sendo uma função, que classificação esta poderia receber e o porquê.

Figura 3 - Diagramas que representam ou não uma função



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Para iniciar o terceiro momento, o professor deverá perguntar aos alunos se a situação representada pelo problema do restaurante pode ser considerada uma função, pois o preço final a ser pago depende da quantidade consumida no restaurante, não sendo possível comer uma determinada quantidade e pagar dois valores distintos.

Após essa discussão, o professor deverá indagar aos alunos se é possível estipular uma fórmula matemática (lei de formação) para calcular uma quantidade qualquer de comida, uma para cada restaurante, e dar um tempo de até 10 minutos para que os alunos criem as fórmulas. Caso os mesmos percebam que os alunos tenham dificuldade, perguntarão quanto o casal pagará se comer em cada restaurante: 100 g, 200 g, 800 g, 1 kg, e assim por diante, para facilitar na construção das fórmulas, encontrando para o restaurante *King*: $\boldsymbol{3 + 29,90 \cdot x}$ e o restaurante *Queen*: $\boldsymbol{35 \cdot x}$.

Os professores deverão ressaltar que essas fórmulas representam a lei de formação de duas funções, respectivamente, que são escritas usualmente como:

$$\boldsymbol{f(x) = 29,90 \cdot x + 3}$$

$$\boldsymbol{g(x) = 35 \cdot x}$$

Em continuidade, o professor poderá levar os alunos à sala de computadores ou abrir o *Excel (caso só ele tenha acesso ao computador)* e deverá explicar brevemente as finalidades do programa. Assim, os alunos deverão construir juntamente com os professores uma tabela que calcule o preço que deverá ser pago em função da quantidade consumida, da seguinte maneira:

Figura 4 - Representação do peso em relação aos restaurantes King e Queen

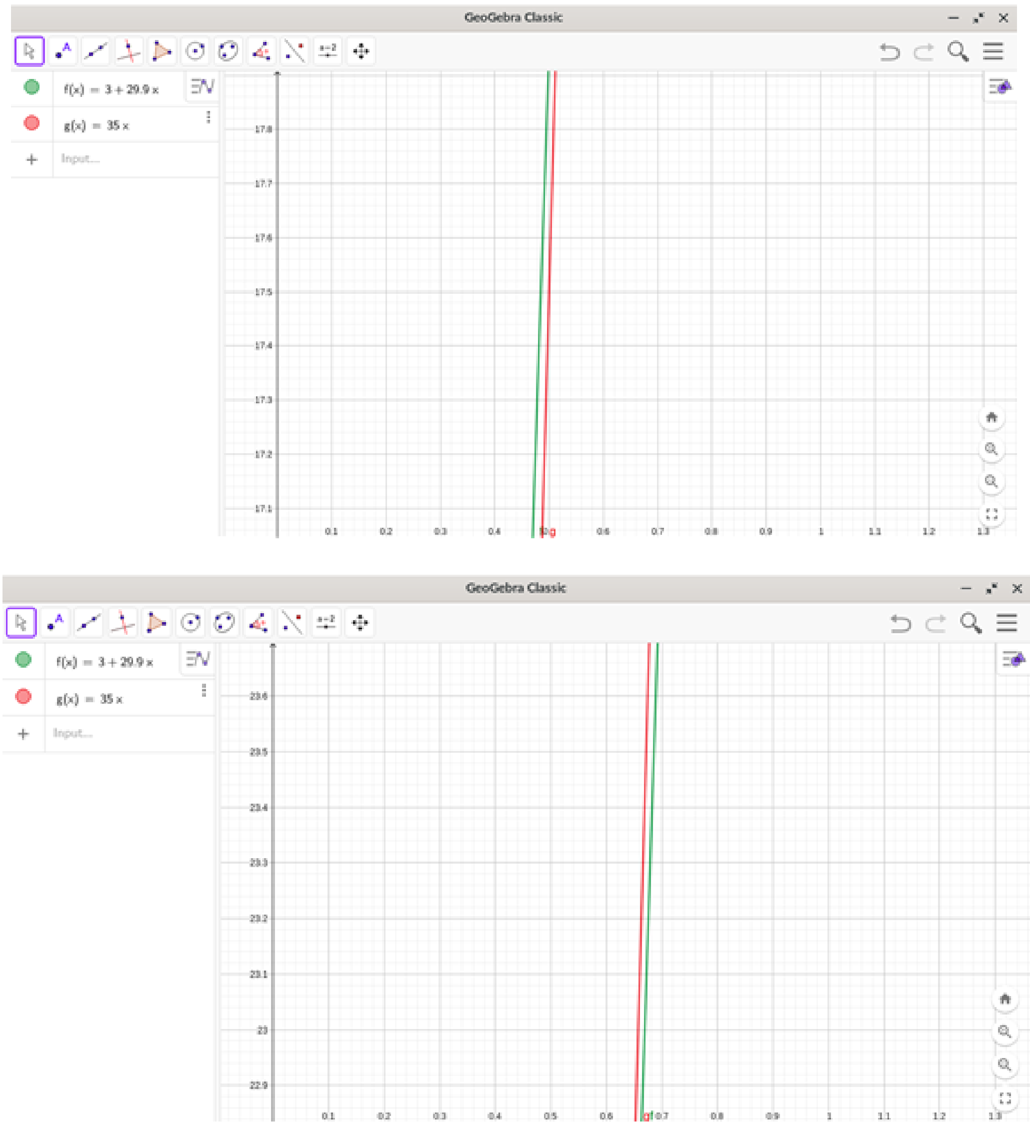
Peso	King	Queen
100	5,99	3,5
200	8,98	7
300	11,97	10,5
400	14,96	14
500	17,95	17,5
600	20,94	21
700	23,93	24,5
800	26,92	28
900	29,91	31,5
1000	32,9	35
1100	35,89	38,5
1200	38,88	42
1300	41,87	45,5
1400	44,86	49
1500	47,85	52,5

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Para a construção da tabela, serão utilizados os recursos do software Excel, em relação à f(x) e g(x). Assim, o professor terá que ressaltar que a tabela também é uma representação para a função, com lei definida anteriormente, discutindo com os alunos sobre em qual restaurante Aristóteles, deverá levar sua esposa.

Em continuidade, o professor poderá utilizar o *GeoGebra* para trabalhar os gráficos das funções acima, os quais seriam representados da seguite maneira:

Figura 5 - Representações da função f(x) e g(x)



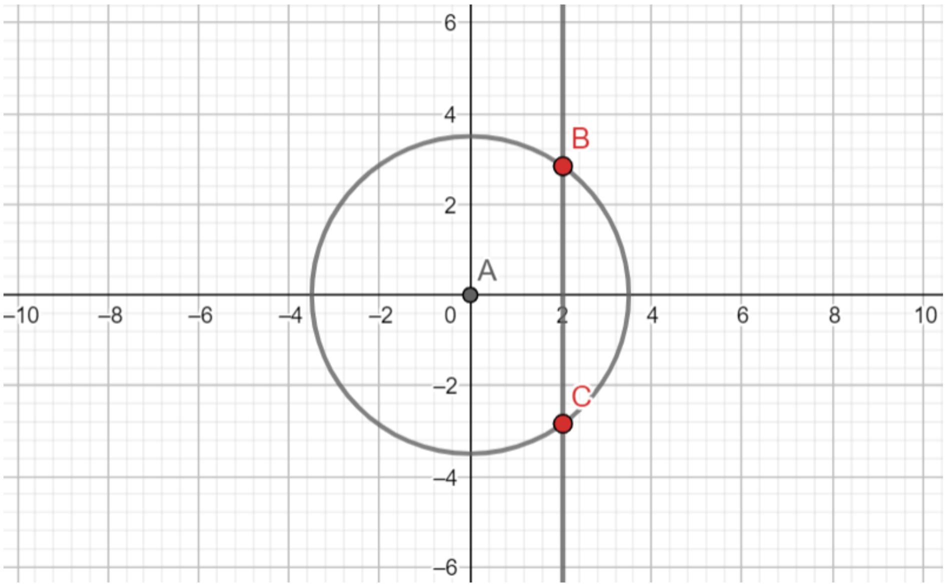
Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Apesar dos gráficos estarem próximos, o professor deverá ressaltar que cada peso possui um único valor a ser pago, analisando o ponto de intersecção dos gráficos e o crescimento para verificar até qual valor cada um dos restaurantes é mais viável.

Outra estratégia que o professor poderá realizar é mostrar, por meio do GeoGebra, como identificar se um dado gráfico é ou não uma representação de função, como apresentado na Figura a seguir.

PPG EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA | UFJF Universidade Federal de Juiz de Fora — Colégio de Aplicação João XXIII

Figura 6 - Circunferência no Geogebra



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Por fim, antes de finalizar a última aula, o professor poderá fazer o diagrama que represente essa função, com alguns dos valores encontrados na tabela. Para essa aula, o professor deverá avaliar a participação dos alunos, anotando em seu registro diário.

3. ENSINO DE ESTATÍSTICA

Conteúdo: Estatística
Duração: 3 aulas de 50 minutos cada
Ano: 9º ano e Ensino Médio
Área: Estatística
Habilidade BNCC: EF09MA20 - Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação
Colaboradores: Leonardo José da Silva e Paulo Ricardo Ramos Pereira.

De acordo com Pereira (2020), é difícil estabelecer uma relação direta entre determinados conteúdos relacionados à Matemática e situações do nosso cotidiano. Esse não é o caso da Estatística, visto que sua presença está em várias situações de nossa vida em que usamos porcentagem, gráficos, médias etc. Por esse motivo, torna-se fundamental uma análise mais aprofundada dos conteúdos, e consequentemente, do ensino dessa disciplina, uma vez que os alunos são *bombardeados* de informações que moldam a maneira de pensar e analisar os dados.

As orientações da BNCC indicam que, ao trabalhar com estatísticas, devemos fazer a "análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação" (BRASIL, 2018, p. 318). Assim, nesta proposta, nosso objetivo é abordar com os alunos diferentes formas de apresentação e análise de dados e elaborar uma pesquisa construindo gráficos com as informações coletadas por eles.

Ao iniciar o conteúdo de probabilidade e estatística, o professor poderá apresentar os gráficos tendenciosos. Com o auxílio do projetor multimídia, o docente projetará alguns gráficos que pareciam representar a informação de maneira tendenciosa ou errada. Em seguida, o professor discutirá com os alunos como a montagem incorreta ou desproporcional pode influenciar o leitor a interpretar a informação de diferentes maneiras.

Um exemplo dos gráficos apresentados pode ser visualizado na figura a seguir.

PPG EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA | ufjf Universidade Federal de Juiz de Fora | Colégio de Aplicação João XXIII

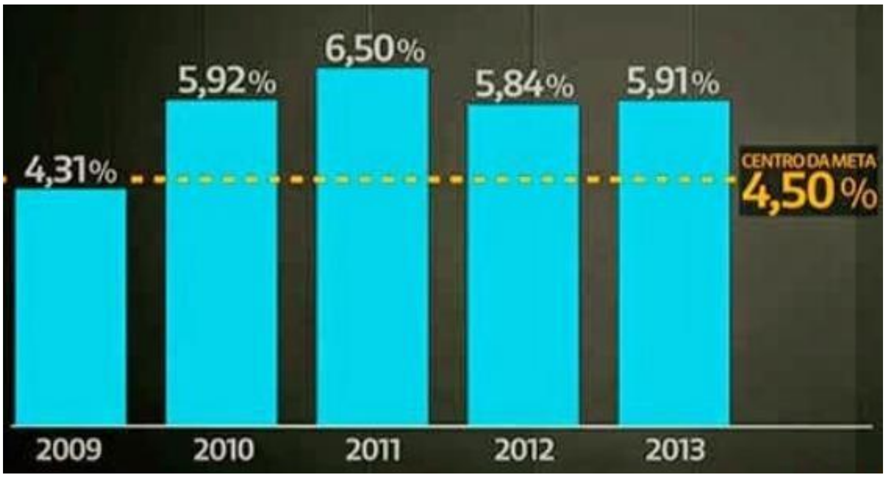
Figura 7 - Gráfico tendencioso e errado

Fonte: Jornal Globo News (2014).

Trata-se de uma reportagem da Globo News acerca da inflação do Brasil entre os anos de 2009 e 2013. Ao fazer a discussão desse gráfico com os alunos, eles podem observar o erro referente à inflação de 2013. No gráfico, a barra referente a 5,91% está superior à de 6,50% e 5,92%. Além do erro demonstrado da imagem, as barras apresentadas estão de forma a indicar que a inflação de 2009, de 4,31%, é muito inferior à de 2010, por exemplo, que é de 5,92%. Esse fato tendencioso ocorre, pois não há proporções corretas entre as barras.

Em seguida, podemos pedir aos alunos que criem novamente este gráfico, entretanto, com as proporções corretas, como apresentado na figura a seguir. Ao analisarmos esse novo gráfico, poderemos ter outra percepção em relação à inflação do Brasil no período mencionado. Sendo assim, o professor indagará aos alunos sobre quais são essas percepções.

Figura 8 - Gráfico de maneira correta



Fonte: Colaboradores Leonardo José da Silva e Paulo Ricardo Ramos Pereira.

Poderemos, ainda, destacar outros exemplos para os estudantes, especialmente oriundos de campanha_política. Neste período, é comum os candidatos manipularem as informações, apresentando gráficos que tendem a causar uma interpretação errada dos dados, tais como o exemplo a seguir na figura que segue.

Figura 9 - Gráfico de campanha política

Fonte: Uol (2018).

Como destacado, os dados do Gráfico constante na Figura 9 foram apresentados incorretamente. A primeira torre, que representa os 22% de intenção de votos no candidato, está superior às demais, e ainda não corresponde ao valor próximo de 90, como indicado no eixo da escala. A torre de "Brancos e Nulos", correspondente a 40% dos eleitores, e está abaixo da primeira torre, mesmo sendo quase o dobro da porcentagem.

A comparação da porcentagem dos candidatos é também outra informação tendenciosa. A segunda torre correspondente a 15% é quase quatro vezes mais alta que a terceira torre, que corresponde a 4%, ou seja, ela deveria estar quase quatro vezes mais alta que a terceira, cinco vezes mais alta que a quarta, mais de sete vezes maior que a quinta. Isso demonstra uma tentativa de menosprezar a porcentagem de votos do segundo colocado, tentando igualá-los aos outros candidatos.

O professor ainda poderá apresentar diversos gráficos de diferentes maneiras e épocas aos alunos. Nessa perspectiva, consideramos que essa atividade proporciona o cumprimento da habilidade especificada na BNCC. Ela destaca que professores de Matemática devem orientar os alunos a “analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros” (BRASIL, 2018, p. 319).

Após a análise dos gráficos e o estudo das diferentes formas de apresentá-los, indicamos uma proposta de trabalho na qual os alunos poderão fazer uma pesquisa e montar um gráfico que represente os dados coletados. Os alunos poderão, em seguida, apresentar a pesquisa e os respectivos gráficos com o auxílio do projetor multimídia na sala de aula.

Poderíamos destacar diversas outras informações decorrentes das apresentações, tais como: o número de assassinatos de mulheres por minuto no Brasil, o número de suicídios entre adolescentes, a maior causa de acidentes no trânsito. Desse modo, ressaltamos a potencialidade que uma atividade dessa magnitude proporciona para o desenvolvimento dos conteúdos, e principalmente para a formação dos alunos.

De acordo com a BNCC, outra habilidade esperada é que os alunos consigam “planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.” (BRASIL, 2018, p. 319).

Para uma aplicação dessa sequência de atividade, temos algumas considerações. Em relação aos gráficos tendenciosos ou errados, aconselhamos que, caso haja a imagem de algum político ou menção, ela seja apagada. Destacamos isso, pois a orientação política tende a fazer uma interpretação mais tendenciosa para os que defendemos. Em relação à elaboração da pesquisa, sugerimos que os temas abordados sejam propostos pelos alunos, pois, já que estes realizarão a pesquisa e elaborarão os gráficos, poderemos considerar que os temas vivenciados por eles ou outros, de maior interesse, poderão aparecer.

PPG EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA | ufjf UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Colégio de Aplicação João XXIII

4. PARAMÊTROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Conteúdo: Funções

Duração: 5 aulas de 50 minutos cada

Ano: 2º ano do Ensino Médio

Área: Geometria

Habilidade BNCC: EM13MAT306 - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Colaboradores: Cristimara Rodrigues de Castilho e Margareth Conceição Pereira.

Função seno

Definimos a **função trigonométrica seno** como a função real de variáveis reais que associa a cada número real *x* o valor real **sen** $\boldsymbol{x}$, ou seja,

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen\, x}$$

O domínio desta função são todos os reais, e a imagem vai de -1 até 1, uma vez que no ciclo trigonométrico de raio unitário, o valor máximo do seno é 1 e o valor mínimo do seno é -1.

O período da função seno é dado por 2π.

Função seno

Definimos a **função trigonométrica seno** como a função real de variáveis reais que associa a cada número real *x* o valor real **sen** $\boldsymbol{x}$, ou seja,

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen\, x}$$

O domínio desta função são todos os reais, e a imagem vai de -1 até 1, uma vez que no ciclo trigonométrico de raio unitário, o valor máximo do seno é 1 e o valor mínimo do seno é -1.

O período da função seno é dado por 2π.

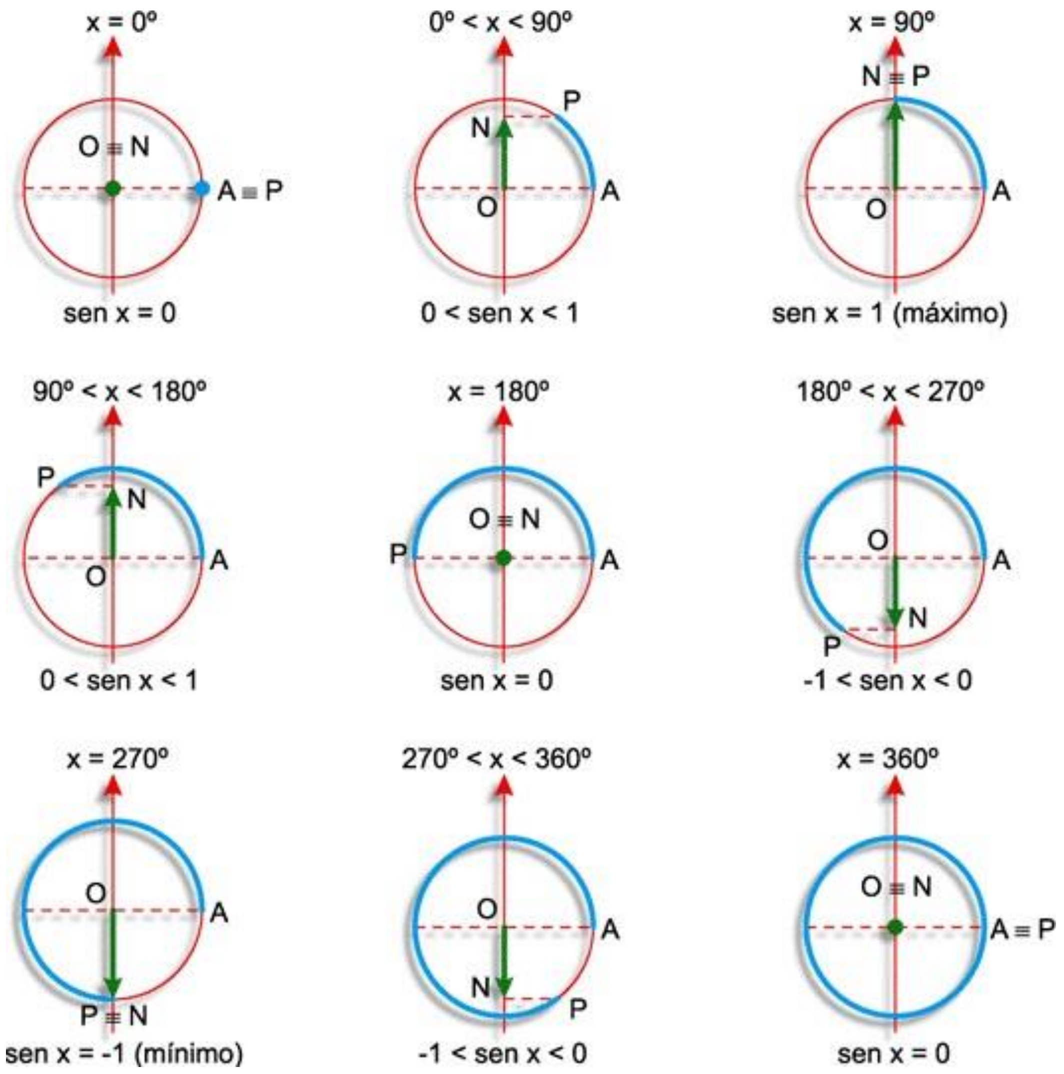
A função seno é ímpar, pois **sen (-x) = - sen x,** com isso, o gráfico de f(x) = sen x ésimétrico em relação à origem.

Essa função começa na origem do plano cartesiano (0,0), é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e chega no ponto máximo y = 1 (referente ao primeiro quadrante no ciclo trigonométrico).

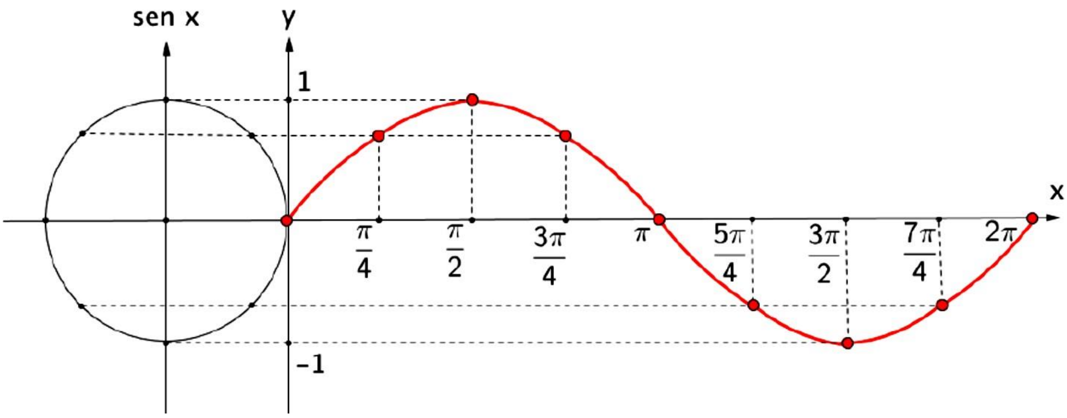
Quando $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, a função é decrescente, indo de y=1 a y=0 (referente ao segundo quadrante no ciclo trigonométrico).

Quando $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, a função é decrescente, indo de y = 0 a y = -1, chegando ao ponto mínimo da função seno (referente ao terceiro quadrante no ciclo trigonométrico).

Quando $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, a função é crescente, indo de y = -1 a y = 0, completando um período da função seno (referente ao quarto quadrante no ciclo trigonométrico).



A seguir, colocamos uma imagem que representa essas variações da função seno, já trabalhada no atendimento.



Você pode acessar a animação a partir do seguinte link:

https://www.geogebra.org/m/jqrycby5#material/pk4qqmfd

Função Cosseno

Definimos a função trigonométrica cosseno como a função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real **cos x**, ou seja:

$$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{\cos x}$$

O domínio desta função são todos os reais, e a imagem vai de -1 até 1, uma vez que no ciclo trigonométrico de raio unitário, o valor máximo do cosseno é 1 e o valor mínimo do cosseno é -1.

O período da função cosseno é dado por 2π.

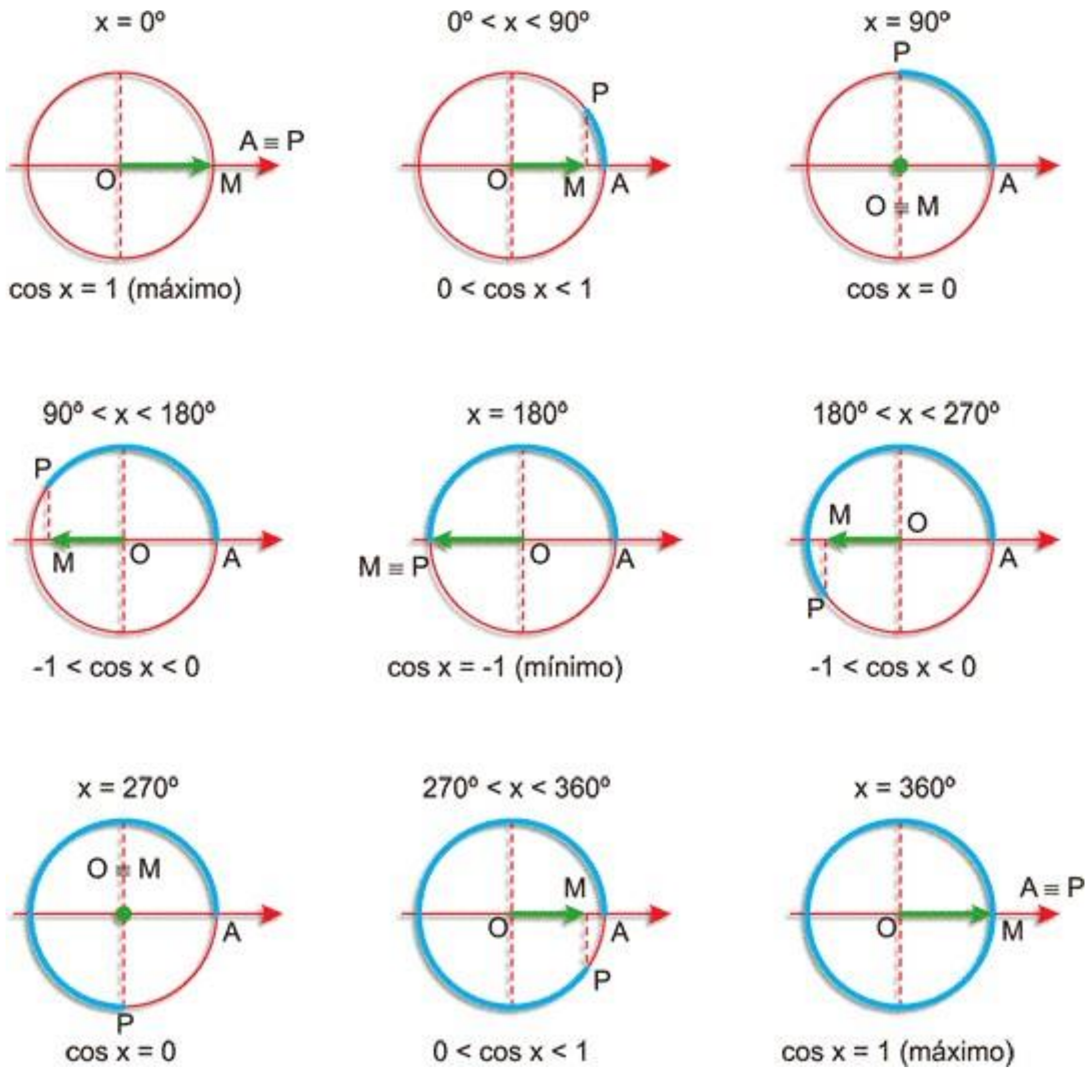
A função cosseno é par, pois cos (-x) = cos x. Com isso, o gráfico de f(x) = cos x é simétrico em relação ao eixo y.

Esta função começa no ponto (1,0) do plano cartesiano, é decrescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ indo de y = 1 a y = 0 (referente ao primeiro quadrante no ciclo trigonométrico).

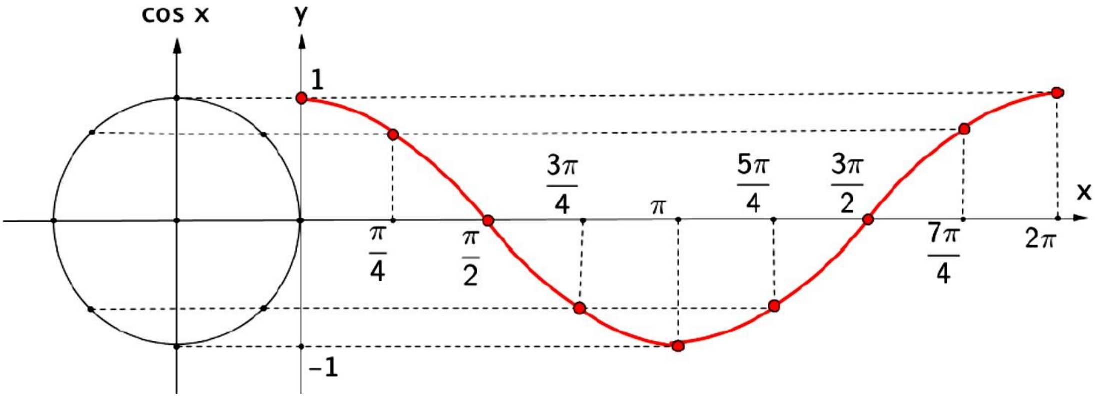
Quando $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, a função é decrescente, indo de y = 0 a y = -1, chegando ao ponto mínimo da função cosseno (referente ao segundo quadrante no ciclo trigonométrico).

Quando $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, a função é crescente, indo de y = -1 a y = 0 (referente ao terceiro quadrante no ciclo trigonométrico).

Quando $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, a função é crescente, indo de y = 0 a y = 1, chegando no ponto máximo da função cosseno, completando um período da função cosseno (referente ao quarto quadrante no ciclo trigonométrico).



A seguir, apresentamos uma imagem que representa essas variações da função cosseno, já trabalhada no atendimento.



Você pode acessar a animação a partir do seguinte link:

https://www.geogebra.org/m/jqrycby5#material/sgdm2fde

Essas questões já tinham sido vistas por nós nos atendimentos e no material anterior.

Para refletir: *o cossenoide não é uma nova curva, e sim uma senoide transladada* $\frac{\pi}{2}$ *unidade para a direita.*

PARÂMETROS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Agora, vamos considerar as funções trigonométricas do tipo:

$$f(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\ .\ sen\ (\boldsymbol{c}x + \boldsymbol{d}) \quad ou \quad y = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\ .\ sen\ (\boldsymbol{c}x + \boldsymbol{d})$$

$$g(x) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\ .\ cos\ (\boldsymbol{c}x + \boldsymbol{d}) \quad ou \quad y = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\ .\ cos\ (\boldsymbol{c}x + \boldsymbol{d})$$

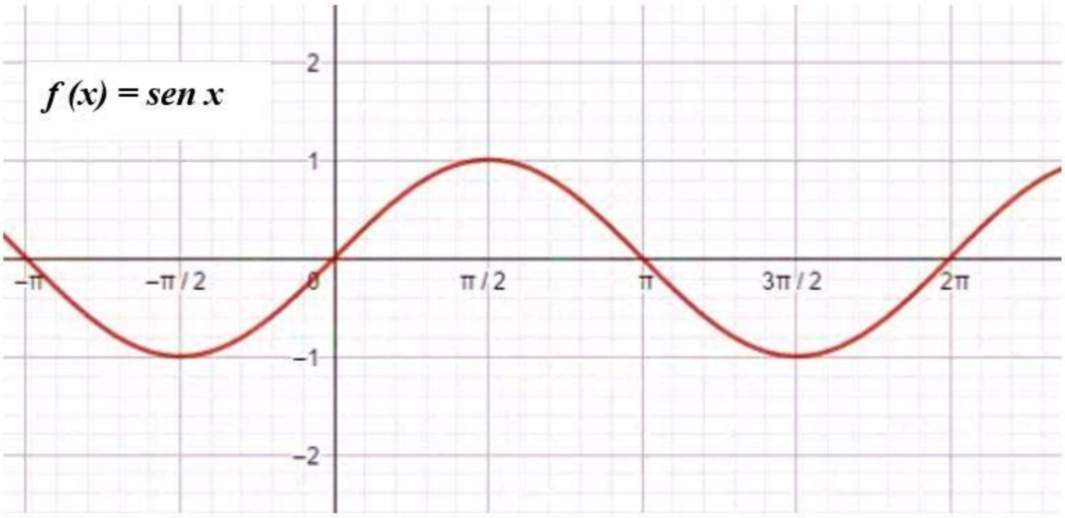
Esses valores dados para **a, b, c** e **d** são chamados de PARÂMETROS, e eles modificam a função seno e a função cosseno, podendo mudar a imagem, o período, a amplitude e o deslocamento destas funções. Vamos verificar quais modificações eles podem fazer.

É condição ***a, b, c*** e ***d*** reais, sendo ***b*** *e* ***c*** não nulos, ou seja, ***b*** e ***c*** diferentes de zero. Observe que se $a = d = 0$ e $b = c = 1$, ficamos com a função f(x) = 0 + 1. sen 1. x + 0 e g(x) = 0 + 1. cos 1. x + 0 => ***f(x) = sen x*** e ***g(x) = cos x***.

A seguir, colocaremos uma sequência de imagens. Optamos por colocar as construções e como os parâmetros alteram a função seno, pois, para a função cosseno, eles secomportam da mesma forma, com a única diferença de que o gráfico da função cosseno não passa pela origem (0,0).

Vamos usar a função em que $a = d = 0$, e $b = c = 1$ e compará-la com as outras.

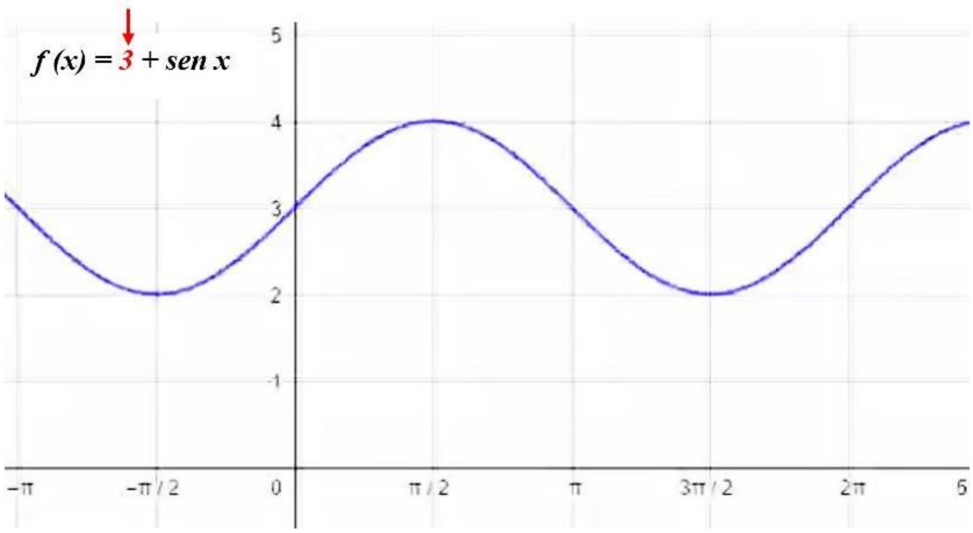
Note que a imagem é $[-1\ ;\ 1]$ e o período é 2π. A função passa pela origem (0,0) e aamplitude é 2 (distância do menor valor ao maior valor no eixo y).



Parâmetro a, com a $\in \Re$**:**

$$f(x) = \color{red}{\mathbf{a}} + b.\ \text{sen}\ (cx + d)$$

O parâmetro **a** faz com que o gráfico "suba" ou "desça" o valor de **a**, deslocando o gráfico em relação ao **eixo y**. Isso faz com que a **imagem** da função seja **alterada**.



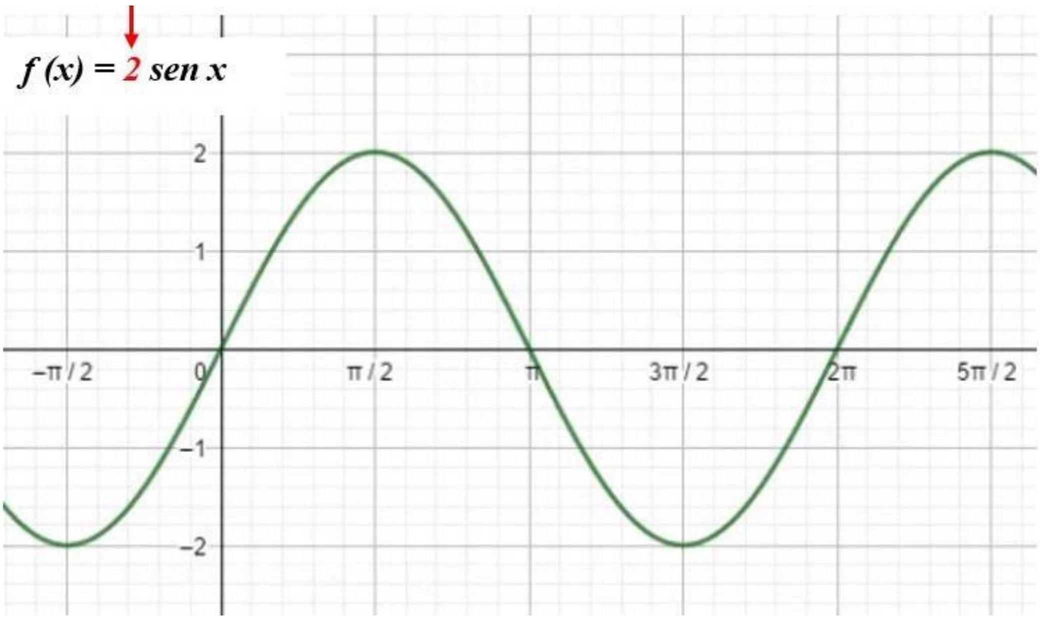
Para exemplificar, escolhemos o valor de **a = 3,** e como queremos observar a variação deste parâmetro vamos usar **b = c = 1** e **d = 0**. Perceba que o gráfico que antes passava por (0,0), agora passa por (3,0), ou seja, o gráfico de sen x deslocou 3 unidades para cima.

A imagem que antes era [−1,1], agora é [−1 **+ 3**; 1 **+ 3**] = [2 ; 4]. O período e a amplitude continuam iguais.

Parâmetro *b*, com *b* ∈ ℜ e b ≠ 0:

$$f(x) = a + \mathbf{b} \,.\, \text{sen}\,(cx + d)$$

O parâmetro **b** multiplica todos os valores do gráfico pelo seu valor em relação ao eixo y. Nesse caso, além da **imagem ser alterada**, a **amplitude** do gráfico também **muda**.



Para exemplificar, escolhemos o valor de ***b* = 2,** e como queremos observar somente a variação deste parâmetro, admitiremos ***a = d = 0 e c = 1***. Perceba que o gráfico continua passando pelo ponto (0,0), mas a imagem mudou.

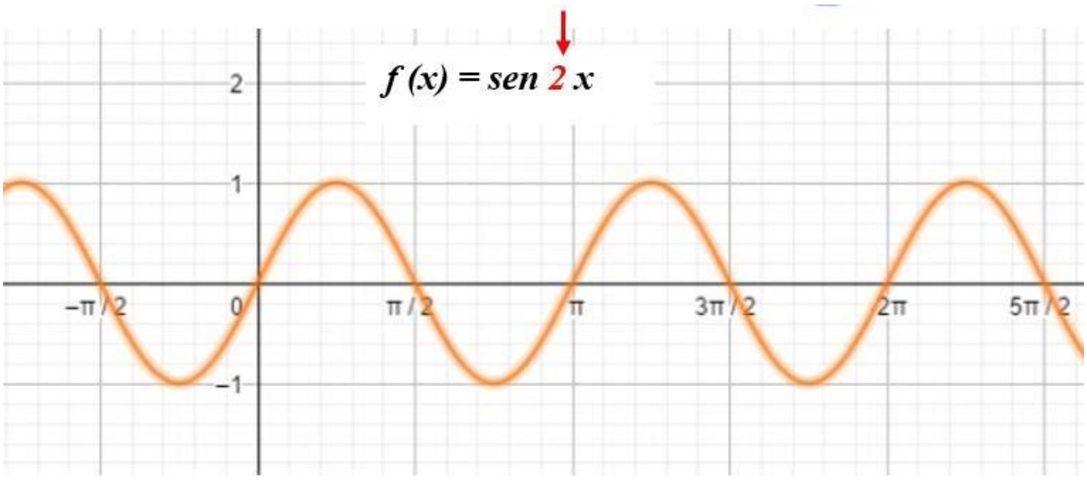
A imagem que antes era [−1; 1], agora é [-1. 2 ; 1. 2] = [- 2; 2]. O período continua iguala 2π, mas a amplitude, que antes era 2, agora é 4 (distância do menor valor ao maiorvalor no eixo y).

Parâmetro c, com c ∈ ℜ e c ≠ 0:

$f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(c\,x + d)$

O parâmetro **c** altera o período da função trigonométrica. Quando ele é igual a 1 (comoé o caso da figura que representa apenas a função f(x)= sen x), o valor do períodoé P=2π. Para determinar o novo valor do período com base no valor de c, basta utilizar afórmula a seguir:

$$p = \frac{2\pi}{|c|}$$



Escolhemos ***c*** = ***2***. Observe que a imagem continua igual, [−1;1], a amplitude continua igual a 2, e o gráfico continua passando pela origem (0,0). O que mudou foi o período, que antes era 2π, e agora é π. Isso porque, pela fórmula do período, temos:

$$p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Observe pelo gráfico que o senoide se forma até π.

Parâmetro d, com d $\in \Re$**:**

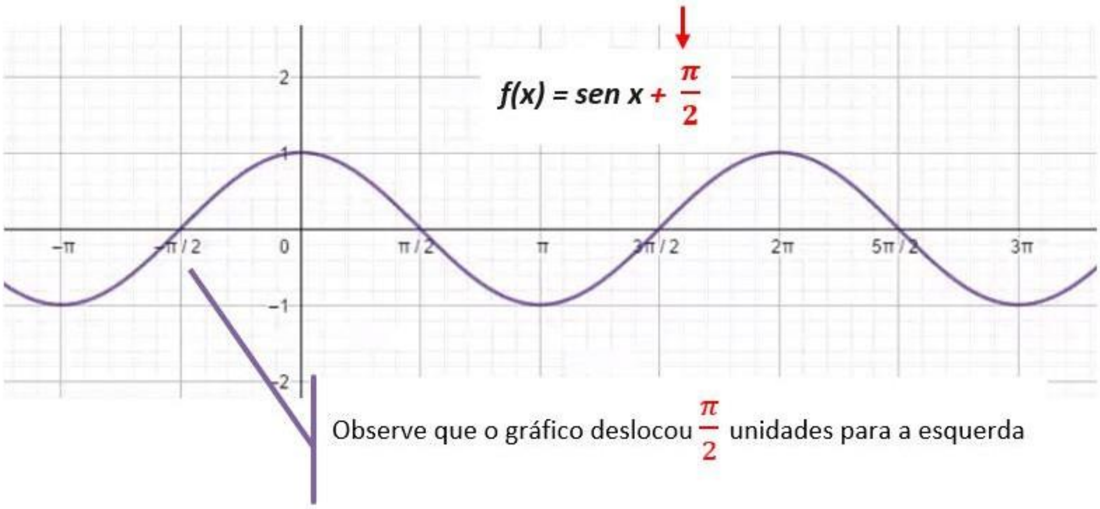
$f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$

O parâmetro ***d*** faz com que ocorra um deslocamento para a direita ou esquerda em relação ao eixo x. Quando o valor de ***d*** é positivo, o gráfico se desloca para a esquerdae, quando ***d*** é negativo, ele se desloca para a direita. Não confunda!

Para d positivo:

$$\boldsymbol{f(x) = senx + \frac{\pi}{2}}$$

Neste gráfico, temos $d = \frac{\pi}{2}$. Observe que a imagem continua igual, [-1,1], a amplitude continua igual a 2, o período continua igual a 2π, mas o gráfico não passa pela origem (0,0) ele passa dor $(-\frac{\pi}{2},0)$. Ou seja, $d = \frac{\pi}{2}$ no gráfico **desloca $\frac{\pi}{2}$ para a ESQUERDA.**

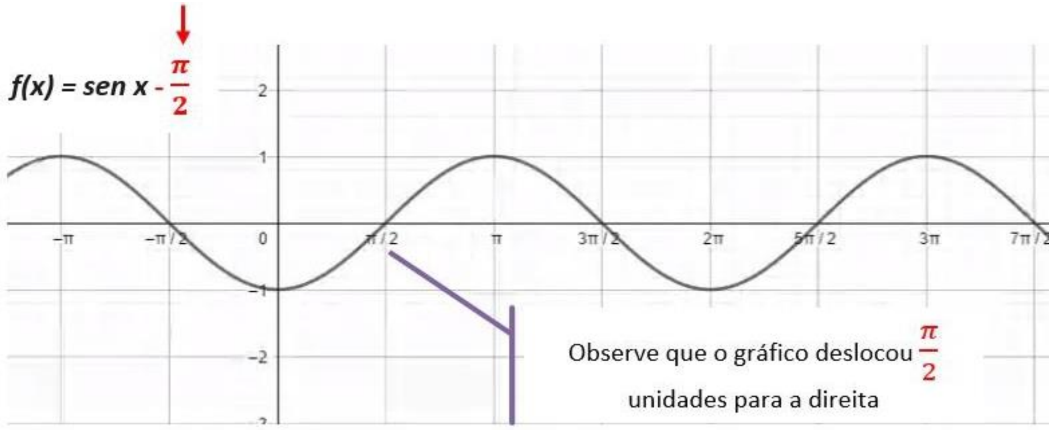


Para refletir: observe que este gráfico é igual ao gráfico de f(x) = cos x

Para d negativo:

Quando $d = -\frac{\pi}{2}$. o gráfico não passa pela origem (0,0) ele passa dor $(-\frac{\pi}{2},0)$. Ou seja, $d = -\frac{\pi}{2}$ no gráfico **desloca $\frac{\pi}{2}$ para a DIREITA.**

É importante ressaltar também que nem sempre o gráfico vai "andar" o valor de d. Quando o parâmetro ***c*** possuir algum valor que não seja 1, o deslocamento é dado por: Deslocamento: $-\frac{d}{c}$



Vimos como os parâmetros alteram as funções separadamente. Porém, eles podem servistos de forma conjunta, por meio da animação no exercício proposto a seguir:

Na animação, você poderá observar significados importantes para os coeficientes a, b, ce d. Para isso, clique na bolinha do controle deslizante de “a” e altere o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da senoide. Repita a operação para os controles deslizantes de b, c e d (utilize um controle deslizante por vez).

Link da animação: https://www.geogebra.org/m/Z5NRazWS

Use as informações sobre os parâmetros e o link da animação para responder asperguntas abaixo:

a) Qual é o efeito do parâmetro *a* no gráfico da função?

b) Qual é o efeito do parâmetro *b* no gráfico da função?

c) Qual é o efeito do parâmetro *c* no gráfico da função?

d) Qual é o efeito do parâmetro *d* no gráfico da função?

e) Utilizando o controle deslizante e fazendo $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 16$, você terá aproximadamente o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Esta última função é equivalente a uma função conhecida. Qual é essa função?

Neste exercício, usaremos a forma geral f(x) = a.sen(bx+c) + d, como aparece no geogebra. Em nosso material, usamos f(x) = a + b sen(cx+d).

ATÉ A PRÓXIMA!

Gostaríamos de agradecê-lo por ter nos dado a oportunidade de ajudá-lo a (re)pensar sua prática e formação docente. A troca de experiências vivenciadas e compartilhadas pelos autores e colaboradores deste produto educacional representam um avanço para as discussões acerca dos limites existentes entre a Universidade, os muros da escola e os desafios do cotidiano e da comunidade escolar. Juntos, estes personagens são capazes de efetivar um trabalho conjunto, numa relação dialógica e orientada que enriquece todas as partes seja no âmbito da identidade pessoal, profissional e acadêmica.

Ah! Gostaríamos de pontuar que estes planos de aulas podem ser utilizados por professores iniciantes e experientes em todo o Brasil, já que está de acordo com propostas presentes na Base Nacional Comum Curricular. Torcemos para que estas atividades possam auxiliar você e seus alunos nas aulas de Matemática. Desse modo, estas quatro atividades têm o objetivo de ser uma possibilidade de ferramenta de auxílio em suas atividades curriculares durante o processo de ensino e aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Esperamos também que este produto educacional ajude você a refletir sobre sua prática docente de alguma forma e que possa contribuir com seu trabalho diário.

Além disso, estas atividades foram pensadas com a tentativa de estimular seu aluno e desenvolver a capacidade intelectual, a estruturação do pensamento, o raciocínio lógico, a aplicação na resolução de problemas, na formação do cidadão e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas além da matemática.

Portanto, esperaremos que estas atividades possam, de alguma forma, priorizar um papel ativo do aluno, estimulando a leitura de textos matemáticos, o trabalho em grupo, a utilização de jogos, de exposições, de murais de problemas e de curiosidades matemáticas para promover o desenvolvimento pessoal e cognitivo.

Bom trabalho e até a próxima!

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Curricular Comum:** educação é a base. Ensino Médio. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília, 2018. Disponível em: ttp://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 25 set. 2018.

CASTILHO, C. R.. **A Vivência da Residência Docente em Matemática:** Indução Profissional e Codocência. 2021, 90 f. Especialização (Residência Docente) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2021.

PEREIRA, P. R. R. **Práticas docentes: uma abordagem na perspectiva de situações vivenciadas por um professor em início de carreira.** 2020, 83 f. Especialização (Residência Docente) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2020.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia.** Tradução de Maria Alice Magalhães, D'Amorim, PauloSérgio Lima Silva. Rio de Janeiro: Forense. Original: Six Études de Psychologie, Éditions Gonthier S.A.Genève, 1964.