

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jessica Yvonne Santa Cruz Cárdenas

Solução do problema de Riemann para escoamento de água-óleo na presença  
de solvente em meio poroso.

Juiz de Fora  
2021



Jessica Yvonne Santa Cruz Cárdenas

**Solução do problema de Riemann para escoamento de água-óleo na presença de solvente em meio poroso.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Coorientador: Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero

Juiz de Fora

2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Santa Cruz Cárdenas, Jessica Yvonne.

Solução do problema de Riemann para escoamento de água-óleo na presença de solvente em meio poroso. / Jessica Yvonne Santa Cruz Cárdenas. – 2021.

84 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Luis Fernando Lozano Guerrero

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

1. Leis de conservação. 2. Ondas Viajantes. 3. Problema de Riemann. 4. Injeção de solvente em meios porosos. 5. Recuperação avançada de petróleo. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Lozano Guerrero, Luis Fernando, coorient. III. Título.

Jessica Yvonne Santa Cruz Cárdenas

**Solução do problema de Riemann para escoamento de água-óleo na presença de solvente em meio poroso.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática aplicada.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2021

BANCA EXAMINADORA



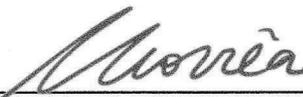
Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



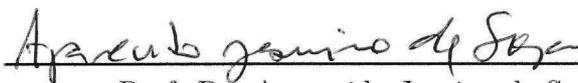
Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Dan Marchesin  
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada



Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa  
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza  
Universidade Federal de Campina Grande



Dr. Thiago Quinelato  
Universidade Federal de Juiz de Fora



Dedico este trabalho às pessoas mais importantes na minha vida: meus pais, Rosa e Wilmer, e meus irmãos, Sergio, Alexis e Ivan.



## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me guiar e colocar as pessoas certas no meu caminho. Deus é minha força e Ele me permitiu alcançar este objetivo.

Dentre as pessoas mais importantes na minha vida, agradeço principalmente: à minha mãe Rosa, quem acreditou que eu poderia atingir este objetivo antes do que eu, agradeço-lhe por suas palavras de consolo, por suas orações e a fortaleza que dia a dia me transmite; a meu pai Wilmer por seus conselhos e por confiar em sua única filha, deixando-a viajar sozinha para um país desconhecido na procura de um futuro melhor; a meus irmãos Sergio, Alexis e Ivan, pelos ânimos, risadas e por acreditarem em sua irmã mais velha.

A meu orientador, Prof. Dr. Grigori Chapiro, por me aceitar em trabalhar na dissertação sob sua orientação, por sua paciência, conselhos e conhecimentos ensinados no desenvolvimento desta pesquisa. Também pelas oportunidades oferecidas nesta etapa acadêmica e por me ensinar a ser perseverante e humilde.

A meu coorientador, Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero, por todas as discussões que contribuíram a acrescentar meus conhecimentos, pela rigorosidade, críticas e conselhos que me ajudaram a melhorar como estudante, também agradeço a paciência que teve comigo e por me motivar a continuar estudando com esforço.

A minha tia, Flor Susana Rodriguez Villacorta, por sua compreensão, paciência, palavras de ânimo e conforto que me ajudaram a concluir este trabalho.

A meus amigos: Karen, Manuel, Rosmery, Anita, Lito e Noemi pelas conversas, momentos de alegria que fizeram mais fácil a conclusão desta etapa acadêmica. Entre eles agradeço principalmente a Noemi por sua gentil ajuda nas correções do português e suas sugestões para melhorar a dissertação. Aos colegas de mestrado pelos momentos compartilhados.

Aos meus pais brasileiros Regina e Néstor, que em tempos difíceis me ajudaram e me acolheram na sua família. Com seu apoio e de seus filhos (Eduardo, Pablo, Rodolfo e Lino), que considero como irmãos, minha estadia no Brasil foi muito alegre.

À equipe do Laboratório de matemática aplicada, LAMAP. Especialmente a Jhuan por me ajudar com as simulações em RCD, Thiago e Wesley por sua disposição de me ajudar com o português e compartilhar seus conhecimentos comigo.

Aos membros da banca pelos pertinentes apontamentos e sugestões para melhorar este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).



-¿Todavía le quedan esperanzas?-exclamé yo irritado.

-Sí-replicó con firmeza el profesor.

-¡Cómo!, ¿Todavía cree que existe alguna posibilidad de salvación?

-Sí, desde luego; mientras el corazón late, mientras la carne palpita, no admito que un ser dotado de voluntad permita que la desesperación anide en él.

JULES VERNE, Viaje al centro de la tierra.



## RESUMO

Na Engenharia do Petróleo, um dos primeiros métodos de recuperação avançada de petróleo foi o uso de solventes. Porém, este método tornou-se economicamente menos atraente à medida que o valor do solvente aumentava. No final dos anos 70, o interesse pelos métodos de recuperação usando solventes ressurgiu, devido ao aumento do preço do petróleo e à maior confiança na capacidade de estimar a recuperação. Isso motivou mais estudos sobre este tópico. Por exemplo, Walsh e Lake 1989 modelam o deslocamento de óleo por um solvente miscível na presença de uma fase aquosa imiscível. Eles apresentam uma solução geométrica do problema de Riemann correspondente baseada na teoria de fluxo fracionário sem especificar o sistema de equações diferenciais.

O objetivo deste trabalho é estudar o sistema de leis de conservação descrevendo o mesmo modelo do trabalho Walsh e Lake 1989. Foi resolvido o problema de Riemann correspondente classificando as possíveis soluções de acordo com a saturação de água no ponto de injeção. Foram encontradas três possibilidades: (1) onda de choque, (2) onda de rarefação, (3) ondas compostas. Foi demonstrado que a onda de choque é entrópica. Para isso foi provado que a existência da solução na forma de ondas viajantes do problema viscoso associado conectando os equilíbrios correspondentes aos estados do problema de Riemann na forma de  $\alpha$ - e  $\omega$ -limites. Todos os resultados teóricos foram validados através de simulações numéricas.

Palavras-chave: Leis de conservação. Ondas viajantes. Problema de Riemann. Injeção de solventes em meios porosos. Recuperação avançada de petróleo.



## ABSTRACT

Solvent waterflooding was one of the first enhanced oil recovery methods in Petroleum Engineering. However, this method became economically less attractive as the solvent value increased. In the late 1970s, interest in recovery methods using solvents re-emerged due to rising oil prices and greater confidence in the recovery predictions. This prompted further studies on this topic. For example, Walsh and Lake 1989 modeled the displacement of oil by a miscible solvent in the presence of an immiscible aqueous phase. They presented a geometric solution of the corresponding Riemann problem based on the fractional flow theory without specifying the system of differential equations.

The present work aims to study the system of conservation laws describing the same model as Walsh and Lake 1989. The Riemann problem was solved by classifying possible solutions according to the water saturation at the injection point. Three possibilities were found: (1) shock wave, (2) rarefaction wave, (3) composite waves. The shock wave was shown to be entropic. For this, it was proved the existence of the traveling-wave solution of the associated viscous problem connecting equilibria, corresponding to Riemann problem states, in the form of  $\alpha$ - and  $\omega$ -limits. All theoretical results were validated through numerical simulations.

Keywords: Conservation laws. Traveling waves. Riemann problem. Solvent injection in porous media. Enhanced oil recovery.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Curvas características do Problema de Riemann (2.1),(2.4) para $n = 1$ e $F$ uniformemente convexa de classe $C^2$ . . . . .	29
Construção do ponto tangencial (Caso 4). . . . .	39
Envoltória convexa mostrando choque e rarefação com $u^+ < u^-$ . . . . .	40
Gráfico semi-log das curvas representativas das permeabilidades relativas, ver [1].	45
Múltiplas curvas de fluxo fracionário (amarelo) variando entre a curva de fluxo fracionário de água na presença de uma quantidade mínima de solvente (vermelha) e da água na presença de uma quantidade máxima de solvente (azul). . . . .	45
Deslocamento terciário miscível usando uma proporção de água-solvente ( $W_R$ ) de unidade e incluindo uma saturação de óleo retido e solubilidade de solvente nas fases de água e óleo retido. . . . .	50
Deslocamento miscível terciário com água livre do solvente. . . . .	51
Gráfico semi-log das curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo, conforme Eqs. (4.3) e (4.4). . . . .	56
Os equilíbrios do Sistema (4.12), com $S_w^+ = 0.75$ . O ponto $(S_w^T, f_w(S_w^T))$ é a interseção entre $f_w$ e a linha tangente a $f_w$ que passa por $(S_w^+, f_w^+)$ . O ponto $(S_w^m, f_w(S_w^m))$ indica a interseção entre $f_w$ e a linha que conecta os pontos $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$ e $(S_w^+, f_w^+)$ . . . . .	58
Classificação dos pontos de equilíbrio considerando $S_w^+ = 0.75$ . . . . .	62
Possíveis estados $S_w^-$ indicando as regiões onde existe solução (cor azul) e não existe solução (cor vermelha) do tipo de ondas viajantes. . . . .	63
Gráfico de $F_1(S_w, C_{so})$ considerando $(S_w^-, C_{so}^-) = (0.39, 1)$ . . . . .	64
Espaço de Fase de (4.10). As retas vermelha e amarela indicam as variedades invariantes de $L$ e $R$ , respectivamente. Estamos supondo que a variedade instável de $L$ (cor verde) explode na direção positiva de $C_{so}$ . Os pontos asteriscos indicam pontos do conjunto $S_1$ . . . . .	65
Nas Figuras a) e b) foi usado MATLAB e na Figura c) foi usado RCD. Em todas as figuras foi considerado $\epsilon = 1$ e $U^- = (0.39, 1)$ . . . . .	70
Nas Figuras a) e b) foi usado MATLAB e na Figura c) foi usado RCD. Em todas as figuras foi considerado $\epsilon = 0.1$ e $U^- = (0.39, 1)$ . . . . .	71
Nas Figuras a) e b) foi usado MATLAB e na Figura c) foi usado RCD. Em todas as figuras foi considerado $\epsilon = 0.01$ e $U^- = (0.39, 1)$ . . . . .	72
Validação da solução de rarefação para $U^+ = (0.75, 1)$ e $U^- = (0.83, 1)$ . . . . .	76
Validação da solução de um choque característico para $U^+ = (0.75, 1)$ e $U^- = (S_w^T, 1)$ . . . . .	77
O perfil de solução do Sistema de EDPs (5.2) obtido usando RCD. . . . .	78



## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Classificação dos pontos de equilíbrio segundo os autovalores, considerando a matriz $J_f(x_0)$ como em (2.28) invertível. . . . .	35
Tabela 3.1 – Valores constantes para os parâmetros. . . . .	52
Tabela 4.1 – Valores constantes para os parâmetros. . . . .	55



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EOR	Enhanced Oil Recovery.
RCD	Reaction-Convection-Diffusion Equations' Solver.
MATLAB	Abreviatura de Matrix Laboratory.
EDPs	Equações Diferenciais Parciais.
EDOs	Equações Diferenciais Ordinárias.
PV	Pore Volume.



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$	Espaço dos estados.
$L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$	Espaço das funções localmente integráveis.
$U^-$	Estado à esquerda.
$U^+$	Estado à direita.
$S_w$	Saturação de água.
$S_{wc}$	Saturação de água conata.
$S_o$	Saturação de óleo.
$v$	Velocidade da onda viajante.
$f_w$	Fluxo fracionário de água.
$f_o$	Fluxo fracionário de óleo.
$\phi$	Porosidade.
$k$	Permeabilidade absoluta.
$K_{rw}$	Permeabilidade relativa da água.
$K_{ro}$	Permeabilidade relativa do óleo.
$\mu_w$	Viscosidade da água.
$\mu_o$	Viscosidade do óleo.
$C_{so}$	Volume fracionário de solvente na fase oleica.
$S_{or}$	Saturação de óleo residual.
$\det(A)$	Determinante de uma matriz $A$ .
$\text{tr}(A)$	Traço de uma matriz $A$ .
$I_{m \times n}$	Matriz identidade de dimensão $m \times n$ .



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>27</b>
2.1	LEIS DE CONSERVAÇÃO . . . . .	27
2.1.1	Ondas de rarefação . . . . .	28
2.1.2	Ondas de choque, Condição de Rankine-Hugoniot . . . . .	30
2.1.3	Condição de entropia de Lax . . . . .	31
2.1.4	Condição de entropia de viscosidade . . . . .	32
2.2	ONDAS VIAJANTES . . . . .	33
2.3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS . . . . .	34
2.4	ESCOAMENTO BIFÁSICO . . . . .	37
2.5	CONSTRUÇÃO DE OLEINIK . . . . .	39
2.6	MÉTODOS DE RECUPERAÇÃO . . . . .	41
2.6.1	Solventes . . . . .	41
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO DA TEORIA DO FLUXO FRACIONÁRIO PARA INJEÇÃO DE SOLVENTES E FLUIDOS DE PERSEGUIÇÃO</b>	<b>43</b>
3.1	HIPÓTESES . . . . .	43
3.2	TEORIA . . . . .	44
3.2.1	Relações do fluxo fracionário . . . . .	45
3.2.2	Condições iniciais e de fronteira . . . . .	45
3.2.3	Método de solução . . . . .	46
3.3	RESULTADOS . . . . .	49
3.3.1	Representações gráficas . . . . .	50
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO NA FORMA DE ONDAS VIAJANTES . . . . .</b>	<b>55</b>
4.1	LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO . . . . .	57
4.2	NÚMERO DE PONTOS DE EQUILÍBRIO . . . . .	58
4.2.1	Considerando $S_w^+, C_{so}^+$ fixo . . . . .	59
4.3	CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO . . . . .	60
4.3.1	Considerando $(S_w^+, C_{so}^+)$ fixo . . . . .	61
4.4	COMPARAÇÃO NUMÉRICA . . . . .	67
<b>5</b>	<b>ONDAS DE RAREFAÇÃO . . . . .</b>	<b>73</b>
5.1	ONDAS COMPOSTAS . . . . .	76
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>81</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Apenas 30% do petróleo de um reservatório podem ser extraídos com os métodos tradicionais [2]. Ficam significativas quantidades de petróleo a recuperar nos poços de extração em operação e inclusive nos poços abandonados. Entre outros fatores, isto se deve às diferenças de tensão superficial entre as fases água, óleo e rocha [2]. Extrair mais petróleo de um poço prejudica menos o meio ambiente e pode gerar mais lucros. Isso justifica outros métodos de produzir petróleo.

Na Engenharia do Petróleo os métodos de recuperação dividem-se em: primários, secundários e terciários [2]. A recuperação primária usa a própria pressão do reservatório. A recuperação secundária utiliza a injeção de água para incrementar a pressão do reservatório e, dessa maneira aumentar o fator de recuperação. Na recuperação terciária ou avançada de petróleo (EOR, sigla em inglês para “Enhanced Oil Recovery”) usam-se outras técnicas de recuperação.

Dentre dos métodos de EOR temos os chamados métodos térmicos (combustão in-situ [3, 4, 5, 6], injeção de vapor [7], aquecimento eletromagnético [8]), métodos químicos (injeção de solventes [1], injeção de surfactantes [9], injeção de ácidos [10]) entre outros. Nesta dissertação o foco é estudar o deslocamento miscível no contexto de injeção de solvente seguindo a formulação feita em [1]. O deslocamento miscível é modelado usando a Teoria de Fluxo Fracionário. As equações diferenciais que descrevem o modelo são, tipicamente, resolvidas usando o método das características. A história da Teoria de Fluxo Fracionário começa com os trabalhos de Buckley e Leverett [11] e Welge [12] para o escoamento de água-óleo e teve diversas outras contribuições.

Em [1] é mostrado um sistema de leis de conservação que estuda o deslocamento de óleo por um solvente miscível na presença de uma fase aquosa imiscível. O fluxo fracionário de água é considerado como uma função dependendo da saturação de água e do volume fracionário de solvente na fase oleica, entre outras considerações. Os autores mostram um procedimento gráfico para determinar a solução. Além disso encontram uma taxa ótima de água com solvente.

Essencialmente todo o petróleo poderia ser recuperado usando injeção de solvente, mas isso não seria economicamente viável uma vez que o valor do solvente, provavelmente, ultrapassaria o valor do óleo [13]. Escolher um método químico que tenha viabilidade econômica é um problema que deve ser tomado em conta. Em [14] é estudada a viabilidade econômica da injeção de solvente num meio poroso unidirecional cheio de óleo.

Neste trabalho estudamos um sistema de leis de conservação mostrado em [1], considerando o fluxo fracionário de água só como função da saturação de água. Provamos, de forma analítica, a existência da solução na forma de ondas viajantes. Resolvemos o problema de Riemann fixando o estado à direita (ou condição inicial) e variando o estado à

esquerda (condição de injeção). Verificamos os resultados numericamente usando MATLAB e RCD (Reaction-Convection-Diffusion Equations' Solver), ver [15] para detalhes.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Capítulo 2 contém uma pequena introdução à leis de conservação, ondas viajantes, escoamento bifásico, métodos de recuperação e, em particular, solventes. No Capítulo 3 é mostrado um resumo do artigo [1]. Neste artigo são estudados os efeitos da injeção simultânea de água-solvente (solvent flooding), que é o foco deste trabalho. No Capítulo 4 demonstra-se que existe solução na forma de ondas viajantes para o sistema de leis de conservação similar à mostrada em [1]. Corroboramos este resultado com simulações numéricas. Para isto utilizamos o algoritmo ode45 de MATLAB e o código RCD. A solução na forma de ondas viajantes só é garantida fixando o estado à direita e variando o estado à esquerda. No Capítulo 5 encontramos uma solução para o problema de Riemann correspondente. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas algumas conclusões.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo faremos uma breve introdução às leis de conservação (para maiores informações ver [16, 17]), ondas viajantes (para maiores informações ver [18]), escoamento bifásico (para maiores informações ver [19]), métodos de recuperação e em particular solventes (para maiores informações ver [2]).

### 2.1 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Uma lei de conservação é um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) que tem uma estrutura particular. Matematicamente um sistema de  $n$  leis de conservação unidimensional em  $n$  variáveis pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}F(U(x, t)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

onde  $U \in \Delta \subset \mathbb{R}^n$  representa as variáveis de estado e  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamada de função fluxo para o Sistema (2.1) de leis de conservação. Normalmente,  $F$  é considerada de classe  $C^2(\Delta)$ . Em dinâmica dos fluidos o conjunto  $\Delta$  é o espaço de estados. O espaço  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  é referido como espaço físico- $xt$ .

Neste trabalho lidamos apenas com sistemas hiperbólicos, que definiremos da seguinte maneira.

**Definição 2.1.** *O Sistema (2.1) é dito hiperbólico (hip.) em  $\Delta$  quando a matriz jacobiana de  $F$ , denotada por  $J_F(U) = A(U)$ , tem autovalores reais  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , para todo  $U \in \Delta$ . Se todas as desigualdades forem estritas então o sistema é dito estritamente hiperbólico (estr.hip.).*

Muitos problemas práticos na ciência e na engenharia envolvem quantidades conservadas e são representadas por EDPs deste tipo [16]. O Sistema (2.1) é estudado com uma condição inicial sobre um domínio espacial:

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.2)$$

O Sistema (2.1), junto com a Condição (2.2), é chamado de problema de valor inicial (PVI) ou problema de Cauchy.

**Definição 2.2.** *Uma solução clássica do problema de Cauchy é uma função  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  que satisfaça o Sistema (2.1) e a Condição (2.2).*

**Definição 2.3.** *Uma solução fraca do problema de Cauchy (2.1), (2.2) é uma função  $U \in L^1_{Loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  tal que*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [U(x, t)\varphi_t + F(U(x, t))\varphi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty U_0(x)\varphi_0 dx = 0, \quad (2.3)$$

para toda função teste  $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^\infty$  e de suporte compacto em  $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ .

O problema de Riemann centrado em  $x = 0$  é um caso particular do problema de Cauchy, onde as condições iniciais possuem um salto na origem:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U^-, & \text{se } x < 0, \\ U^+, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $U^-$  e  $U^+$  são valores constantes. A constante  $U^-$  é chamada de estado à esquerda (ou condição de injeção) e a constante  $U^+$  é chamada de estado à direita (ou condição inicial).

A independência de escala é uma propriedade própria ao problema de Riemann (2.1), (2.4). Quer dizer que uma mudança de coordenadas  $(x, t) \rightarrow (cx, ct)$ , para  $c > 0$ , não altera nem o sistema de equações, nem as condições iniciais. Consequentemente é esperado que a solução do problema de Riemann dependa apenas da razão  $\xi = x/t$ . Embora os problemas de Riemann sejam apenas problemas de valor inicial, eles podem ser vistos como uma superposição não linear de soluções invariantes de escala [20].

Uma solução invariante de escala pode ser dividida em vários grupos de ondas; as ondas em cada grupo movem-se juntos como uma única entidade. Mais precisamente, definimos um grupo de ondas como uma solução invariante de escala que não contém estados constantes intermediários. Assim, uma solução de um problema de Riemann compreende uma sequência de grupos de ondas se afastando uns dos outros. Os grupos de ondas consistem em dois tipos de soluções fundamentais: rarefações (suaves em quase todo ponto) e choques (descontinuidades) [21], ver Figura 2.1.

### 2.1.1 Ondas de rarefação

Admitindo que o Sistema (2.1) com Condição Inicial (2.4) possui uma solução clássica, abusando da notação, substituímos  $U = U(\xi)$  ( $\xi = x/t$ ) e obtemos:

$$(A(U(\xi)) - \xi I)U'(\xi) = 0, \quad (2.5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade do  $\mathbb{R}^n$  e  $U'(\xi)$  denota a derivada de  $U(\xi)$ . Uma possível solução para a Equação (2.5) é considerar  $U'(\xi) \equiv 0$ , i.e.,  $U$  é constante. Como é esperado que a função  $U$  seja suave e conecte os dois extremos do salto, assume-se  $U'(\xi) \neq 0$  na Equação (2.5). Segue que  $U'(\xi)$  deve ser um vetor característico (à direita) de  $A(U) \equiv DF(U)$  associado à velocidade característica  $\lambda(U) = \xi$ . Isto implica que as soluções suaves do Sistema (2.1) devem estar sobre as curvas integrais dos campos de autovetores de  $A(U)$ . Logo, satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs),

$$U'(\xi) = e^i(U(\xi)), \quad (2.6)$$

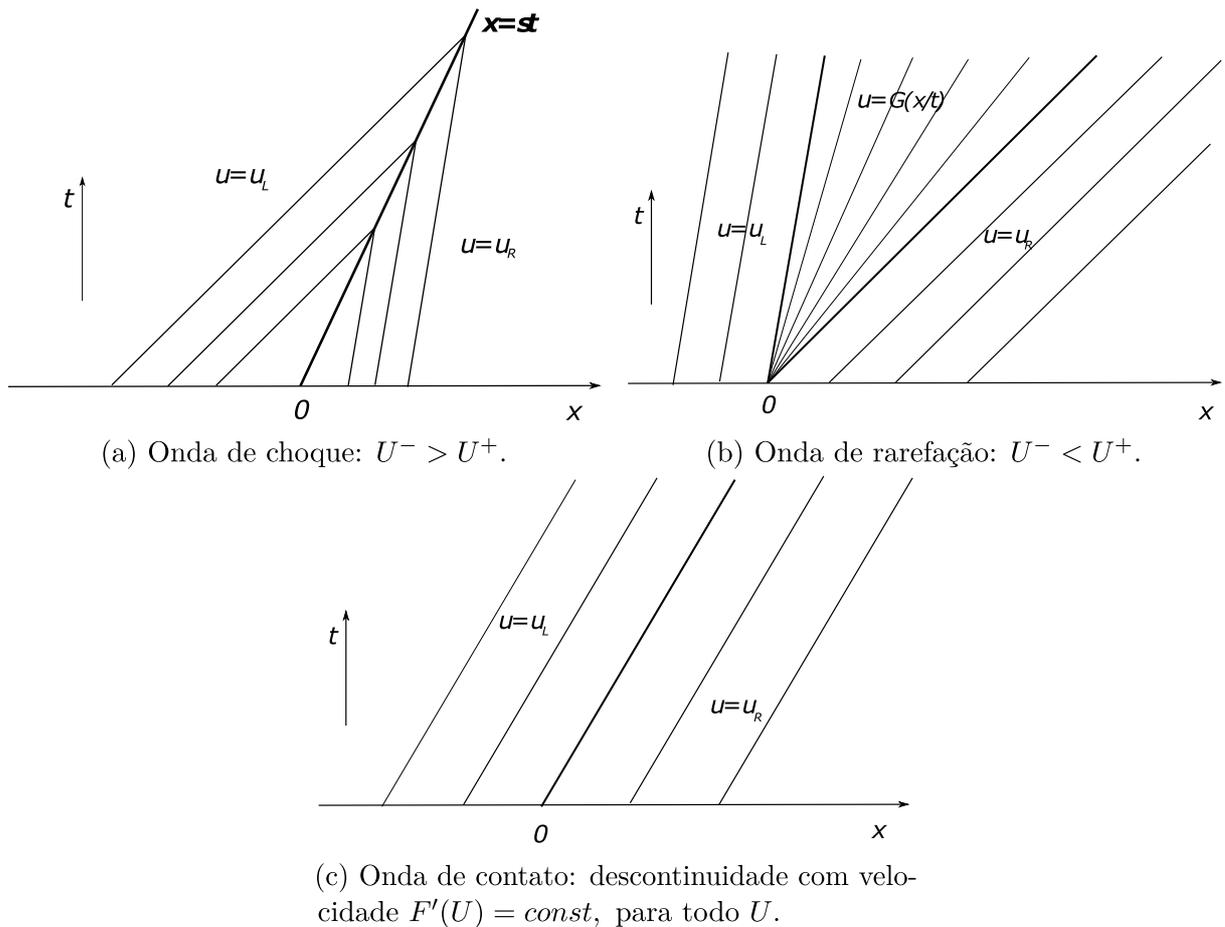


Figura 2.1 – Curvas características do Problema de Riemann (2.1),(2.4) para  $n = 1$  e  $F$  uniformemente convexa de classe  $C^2$ .

junto com a condição

$$\xi = \lambda_i(U(\xi)), \quad (2.7)$$

onde  $e^i$  denota um vetor característico (à direita) da matriz jacobiana  $A(U)$ , associado à velocidade característica  $\lambda_i$ .

**Definição 2.4.** *Sejam  $U^-$  e  $U^+$  os dados iniciais à esquerda e à direita como em (2.4). Dizemos que o estado  $U^+$  é conectável ao estado  $U^-$  por uma onda de rarefação associada à  $i$ -ésima família característica ou simplesmente por uma rarefação- $i$ , se  $U^-$  e  $U^+$  estão na mesma curva integral do  $i$ -ésimo campo característico definido por (2.6) e  $\lambda_i(U(\xi))$  cresce como o parâmetro  $\xi$  ao longo de tal curva integral no sentido de  $U^-$  para  $U^+$ , [16, pág. 83].*

Na Definição 2.4 acima, impor que  $\lambda_i(U(\xi))$  seja crescente de  $U^-$  para  $U^+$  quer dizer que no espaço físico- $xt$  a inclinação  $\xi = x/t$  deve ser estritamente crescente de  $\xi^- = \lambda_i(U^-)$  para  $\xi^+ = \lambda_i(U^+)$  de tal forma que as retas características de inclinação  $\lambda_i(U(\xi))$  cubram toda a região entre as retas de inclinação  $\lambda_i(U^-)$  e  $\lambda_i(U^+)$ . Sendo  $\xi = \lambda_i(U(\xi))$  estritamente crescente e cobrindo toda a esta região, podemos invertê-la

e obter a expressão de  $U(\xi)$  como função inversa de  $\lambda^i(U(\xi))$  na Equação (2.7), isto é, podemos escrever  $U(\xi) = (\lambda_i)^{-1}(\xi)$ , para todo  $\xi \in [\xi_L, \xi_R]$ .

**Definição 2.5.** *Uma curva de rarefação- $i$  que passa por um estado inicial  $U^-$  é o conjunto dos estados  $U \in \Delta$  que podem ser conectados ao estado  $U^-$  por uma onda de rarefação- $i$ , [16, pág. 86].*

**Definição 2.6.** *O  $i$ -ésimo campo característico de  $DF(U)$  é dito genuinamente não linear num subconjunto  $\Delta' \subset \Delta$ , se  $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) \neq 0$ , para todo  $U \in \Delta'$ . Por outro lado, se  $\nabla \lambda_i(U) \cdot e^i(U) \equiv 0$ , dizemos que o campo é linearmente degenerado, [16, pág. 76, 78].*

Essa teoria será aplicada no Capítulo 5 no contexto de escoamento água-solvente.

### 2.1.2 Ondas de choque, Condição de Rankine-Hugoniot

Agora vamos caracterizar as soluções descontínuas para o problema de Riemann (2.1), (2.4). Começaremos pela definição da palavra choque. Choques são funções com descontinuidades do tipo salto, que são soluções de leis de conservação. Soluções na forma de choques aparecem devido à condição inicial ou por causa de interseção de curvas características no espaço físico- $xt$  e que se propagam com uma velocidade  $v_0$ .

Admitindo uma solução fraca do problema de Riemann na forma de um choque temos, como consequência do Teorema de Green, que os estados à esquerda  $U^-$ , à direita  $U^+$  e a velocidade de propagação  $v_0$  satisfazem a chamada condição de Rankine-Hugoniot dada pela expressão

$$F(U^+) - F(U^-) - v_0(U^+ - U^-) = 0. \quad (2.8)$$

A reta  $x = v_0 t$  no espaço físico- $xt$  é dita uma reta de descontinuidade da solução.

Consideremos  $U^+$  fixo na Equação (2.8) com  $v_0$  e  $U^-$  variáveis. Com isto, substituímos  $v_0$  por  $v \in \mathbb{R}$  arbitrário e  $U^+$  por  $U$  arbitrário em  $\Delta$  e teremos um sistema de  $n$  equações algébricas nas  $n + 1$  incógnitas  $v$  e  $U$ :

$$\mathcal{H}(U^+, v, U) \equiv F(U^+) - F(U) - v(U^+ - U) = 0. \quad (2.9)$$

Da mesma forma, podemos fixar  $U^-$  em (2.8) e variar  $v_0$  e  $U^+$  obtendo o sistema

$$\mathcal{H}(U^-, v, U) \equiv F(U) - F(U^-) - v(U - U^-) = 0. \quad (2.10)$$

**Definição 2.7.** *Fixado  $U_0 \in \Delta$ , a Curva de Hugoniot que passa por  $U_0$ , denotada por  $\mathcal{H}(U_0)$ , é o conjunto dos estados  $U \in \Delta$  tais que existe  $v \in \mathbb{R}$  satisfazendo a Equação (2.9) ou (2.10), com  $U^- = U_0$  ou com  $U^+ = U_0$ , respectivamente, [16, pág. 70].*

**Definição 2.8.** *Considere  $U^-$  e  $U^+$  no espaço de estados  $\Delta$ . Dizemos que o estado  $U^+$  é conectável ao estado  $U^-$  por uma onda de choque, ou simplesmente por um choque, se  $U^-$  e  $U^+$  estão na mesma Curva de Hugoniot e existe um número real  $v_0$  tal que  $\mathcal{H}(U^-, v, U^+) = 0$ , [16, pág. 71].*

Uma solução do problema de Riemann (2.1), (2.4) por uma onda de choque propagando com velocidade  $v_0 \in \mathbb{R}$  tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & \text{se } x < v_0 t, \\ U^+, & \text{se } x > v_0 t. \end{cases} \quad (2.11)$$

**Observação 2.1.** *As ondas de rarefação e ondas de choque são chamadas de ondas elementares.*

**Definição 2.9.** *Uma curva composta que passa por um estado inicial  $U^-$ , associado ao  $i$ -ésimo campo característico, ou composta- $i$ , é o conjunto dos estados  $U$  de  $\Delta$  tais que exista um estado  $M \in \Delta$  de maneira que  $M$  seja conectável a  $U^-$  por uma rarefação- $i$ , e que  $U$  seja conectável a  $M$  por um choque de velocidade  $v = \lambda_i(M)$ , [16, pág. 86].*

Assim, uma solução do problema de Riemann (2.1), (2.4) por uma composta- $i$  tem a forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & \text{se } x \leq \lambda_i(U^-)t, \\ (\lambda_i)^{-1}(x/t), & \text{se } \lambda_i(U^-)t \leq x \leq \lambda_i(M)t, \\ U^+, & \text{se } \lambda_i(M)t \leq x. \end{cases} \quad (2.12)$$

A velocidade inicial de onda composta- $i$  é dada por  $x/t = \lambda_i(U^-)$  e a velocidade final por  $x/t = \lambda_i(M) = v(M, U^+)$ . Agora temos as condições necessárias para a construção de soluções  $U(x, t)$  do problema de Riemann com descontinuidades, porém esta construção resulta em infinitas soluções. A seguir tratamos a questão da unicidade da solução impondo um critério adicional chamado de condição de entropia.

### 2.1.3 Condição de entropia de Lax

A condição de entropia de Lax estabelece critérios para a admissibilidade de choques para sistemas de leis de conservação estritamente hiperbólicos e com campos característicos genuinamente não lineares, ver [22].

**Definição 2.10 (Condição de entropia de Lax).** *Uma solução descontínua do problema de Riemann (2.1), (2.4) com salto entre os estados  $U^-$  e  $U^+$ , que se propaga com velocidade  $v$  é dita um choque admissível segundo a condição de entropia de Lax, ou apenas um choque- $i$  de Lax, se satisfaz as seguintes desigualdades:*

$$\lambda_{i-1}(U^-) < v < \lambda_i(U^-), \quad \lambda_i(U^+) < v < \lambda_{i+1}(U^+), \quad (2.13)$$

[16, pág. 76].

Observe que um choque- $i$  de Lax está associado à  $i$ -ésima família característica, no sentido que as retas características associadas à  $i$ -ésima família característica se encontram

ao longo da reta de descontinuidade  $x = vt$  quando provenientes de lados distintos desta reta.

Para um caso particular, de lei de conservação com duas equações, são admitidos somente dois tipos de choque (Choque-1 e Choque-2) definidos a seguir:

Choque-1

$$\lambda_1(U^+) < v < \lambda_2(U^+), \quad v < \lambda_1(U^-). \quad (2.14)$$

Choque-2

$$\lambda_1(U^-) < v < \lambda_2(U^-), \quad \lambda_2(U^+) < v. \quad (2.15)$$

Para sistemas que não são estritamente hiperbólicos o critério de Lax é insuficiente para garantir até mesmo a existência da solução quanto mais a unicidade, ver [23]. Por isso é necessário introduzir outras condições de entropia.

#### 2.1.4 Condição de entropia de viscosidade

Adicionando um termo viscoso, o Sistema (2.1) com regularização parabólica é

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} F(U(x, t)) = \epsilon (B(U)U_x)_x, \quad \epsilon > 0, \quad (2.16)$$

onde a matriz  $B(U)$  é conhecida como matriz de viscosidade e a constante  $\epsilon > 0$  como fator multiplicador. Uma forma de determinar se a solução em choque do problema de Riemann (2.1), (2.4) é admissível consiste em verificar se a solução de (2.16) com as mesmas Condições Iniciais (2.4) tende para essa solução descontínua quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Agora procuramos por soluções do problema de Riemann (2.1), (2.4) da forma (2.11), onde  $v_0$  satisfaz a condição de Rankine Hugoniot (2.8) na forma de ondas viajantes, que serão explicadas em detalhe na Seção 2.2. Substituindo a solução na forma

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \text{com } \xi = x - v_0 t, \quad (2.17)$$

em (2.16) obtemos:

$$-v_0 U(\xi)' + (F(U(\xi)))' = (B(U(\xi))U(\xi)')'. \quad (2.18)$$

O símbolo  $'$  denota a derivada em relação a  $\xi$ . Integrando (2.18) em relação a  $\xi$  obtém-se

$$B(U(\xi))U(\xi)' = F(U(\xi)) - v_0 U(\xi) + C, \quad (2.19)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Esta solução precisa satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U^- \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U^+. \quad (2.20)$$

Para (2.20),  $U^-$  é uma singularidade de (2.19) e

$$C = v_0 U^- - F(U^-). \quad (2.21)$$

De (2.19) e (2.21) obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$B(U(\xi))U'(\xi) = F(U(\xi)) - F(U^-) - v_0(U(\xi) - U^-). \quad (2.22)$$

Note que os pontos de equilíbrio do Sistema Autônomo (2.22) coincidem com a curva de Hugoniot  $\mathcal{H}(U^-)$ .

**Observação 2.2.** *Neste trabalho, na Equação (2.22), consideramos  $B(U(\xi)) = I_{2 \times 2}$ , onde  $I_{2 \times 2}$  é a matriz identidade.*

**Definição 2.11 (Condição de entropia de viscosidade).** *Uma solução descontínua do problema de Riemann (2.1), (2.4) com velocidade de propagação  $v_0$  conectando os estados  $U^-$  e  $U^+$  é admissível, segundo a condição de entropia de viscosidade [24, pág. 221], se existir uma órbita do Sistema (2.22) tal que*

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U^+. \quad (2.23)$$

Observe que a condição de entropia não está relacionada com uma família de característica específica e, portanto, a condição de viscosidade é conveniente para sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos.

Outros choques que são de nosso interesse são os choques onde a velocidade característica coincide com a velocidade de choque. Eles aparecem como limites de choques de Lax, i.e., nos casos onde uma ou as duas desigualdades (2.14), (2.15) tornam-se uma igualdade. Eles são admissíveis, desde que satisfaçam a condição de entropia de viscosidade.

Tipicamente o Problema de Riemann (2.1), (2.4) possui infinitas soluções fracas quando estas são descontínuas. A condição de entropia de Lax é um critério de admissibilidade para escolher a solução única e fisicamente relevante no caso do fluxo genuinamente não linear. A vantagem deste critério é simplicidade de sua verificação, ver Definição 2.10.

Por outro lado, a condição de entropia de viscosidade é válida para qualquer solução descontínua do problema de Riemann (2.1), (2.4). Ela é mais complexa de aplicar pois envolve estudo de ondas viajantes de um sistema análogo a Equação (2.19) no sentido de órbitas que conetam os equilíbrios como  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite, ver Definição 2.11.

## 2.2 ONDAS VIAJANTES

Estudar uma solução do problema de Riemann (2.1), (2.4) na forma de ondas viajantes tem-se convertido em parte essencial da análise matemática nos processos não lineares de difusão-convecção e reação. Este estudo proporciona um meio de encontrar uma solução explícita para o problema [25]. As ondas viajantes são soluções caracterizadas geometricamente como funções que não mudam de forma ao longo do tempo e movem-se com velocidade constante  $v$ . Estas soluções somente dependem da *variável viajante*

$\xi = x - vt$ , o que significa que o sistema original de equações diferenciais parciais pode ser reescrito como um sistema de equações diferenciais ordinárias. Alguns autores aplicam esta teoria em problemas específicos [4, 26, 27].

**Definição 2.12 (Solução na forma de ondas viajantes [28, pág.39]).** *Primeiro é considerada uma equação diferencial parcial parabólica que envolve duas variáveis  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Uma solução da forma*

$$u(x, t) = w(\xi), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi = x - vt \quad (2.24)$$

*é chamada uma onda viajante,  $v$  é uma constante (velocidade da onda) e  $w$  é a frente de onda que satisfaz as seguintes condições:*

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w(\xi) = w_{\pm}, \quad \text{onde } w_- \neq w_+, \quad (2.25)$$

*e os limites para as derivadas de  $w$  satisfazem:*

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w_{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} w_{\xi\xi}(\xi) = 0. \quad (2.26)$$

A seguir são mostrados alguns resultados da teoria de equações diferenciais ordinárias, que permitiram garantir a existência da solução na forma de ondas viajantes para o problema de Riemann estudado no Capítulo 4.

## 2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

As EDOs têm muitas aplicações, por exemplo, elas podem expressar de forma natural leis da Física, Biologia e Economia [29]. Nesta seção vamos mostrar alguns resultados da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias que nos permitirá mostrar uma relação entre sistemas lineares e não lineares.

Consideremos uma EDO autônoma de primeira ordem, que denotamos como:

$$x' = f(x), \quad (2.27)$$

com campo vetorial  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $E$  subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.13.** *Uma aplicação diferencial  $\mathcal{X} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que:*

- *A imagem de  $I$  por  $\mathcal{X}$  está contido em  $E$ , isto é,  $\{\mathcal{X}(t); t \in I\} \subset E$ .*
- *$\frac{d}{dt} \mathcal{X}(t) = f(\mathcal{X}(t))$ , para todo  $t \in I$ .*

*é uma solução para a Equação (2.27) no intervalo  $I$ , [29, pág.208].*

**Definição 2.14.** Considerando a Equação (2.27), dizemos que  $x_0 \in E$  é um ponto singular (ou equilíbrio) do campo  $f$  se  $f(x_0) = 0$ . Se  $f(x_0) \neq 0$ ,  $x$  é chamado de ponto não singular (ou ponto regular), [29, pág.208].

**Definição 2.15.** O conjunto  $\gamma_p = \{\mathcal{X}(t, p); t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral de  $f(x)$  pelo ponto  $p$ , chama-se órbita de  $f(x)$  que passa pelo ponto  $p$ , onde  $I_p$  é um intervalo aberto, [29, pág.217].

**Observação 2.3.** As soluções da Equação (2.27) também são chamadas de trajetórias ou curvas integrais de  $f(x)$ .

Consideramos o sistema linearizado da Equação (2.27)

$$x' = J_f(x_0)x, \quad (2.28)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $J_f(x_0) = J_f$  é a matriz jacobiana do campo  $f$  em  $x_0$ . Se  $x \in \mathbb{R}^2$ , então  $J_f(x_0)$  é uma matriz de  $2 \times 2$ . O comportamento das órbitas de  $x' = J_f(x_0)x$  depende dos seus autovalores, os quais podem ser obtidos com a seguinte formulação:

$$\lambda_{1,2} = (1/2)(tr(J_f) \pm \sqrt{tr(J_f)^2 - 4det(J_f)}). \quad (2.29)$$

É possível classificar os autovalores para os pontos de equilíbrio [29, pág.65-69], como mostrado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Classificação dos pontos de equilíbrio segundo os autovalores, considerando a matriz  $J_f(x_0)$  como em (2.28) invertível.

Autovalores reais e distintos ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ )	Autovalores complexos conjugados ( $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$ , com $b \neq 0$ )	Autovalores reais iguais ( $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ )
Atrator estr. hip. ( $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ )	Centro ( $a = 0$ )	Repulsor hip. ( $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ )
Repulsor estr. hip. ( $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ )	Atrator complexo ( $a < 0$ )	Atrator hip. ( $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ )
Sela estr. hip. ( $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ )	Repulsor complexo ( $a > 0$ )	

**Definição 2.16.** Sejam  $E$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Para cada  $p \in E$ , seja  $\phi(t, p)$  a solução da Equação (2.27), onde  $x(0) = p$ . Para  $t$  no domínio de  $\phi(t, p)$ , a aplicação  $\phi_t(p) = \phi(t, p)$  é dita fluxo da Equação Diferencial (2.27), [16, pág. 210].

**Teorema 2.1 (Teorema de Hartman-Grobman).** Seja  $x_0 \in E \subset \mathbb{R}^m$  um ponto de equilíbrio do campo de vetores  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  e  $\phi_t$  o fluxo do Sistema (2.27). Suponha que a matriz  $J_f(x_0)$  (matriz jacobiana de  $f$  calculada em  $x_0$ ) não tenha autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo  $H$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , contendo 0, em um conjunto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , contendo  $x_0$ , tal que, para cada  $x \in U$  existe um intervalo aberto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  contendo 0, tal que para todo  $x \in U$  e  $t \in I_0$ ,  $H \circ \phi_t(x) = e^{At}H(x)$ . Ou seja,  $H$  mapeia trajetórias do Sistema (2.27) próximas a  $x_0$  em trajetórias do Sistema Linear (2.28) próximas a 0 e preserva a parametrização.

**Demonstração.** A demonstração deste teorema encontra-se em [29, pág.291].  $\square$

Um conjunto  $S \subset E$  chama-se conjunto invariante pelo campo  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  se para cada  $x \in S$  tem-se que  $\phi(t, x) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\phi(t, x)$  denota o fluxo de  $f$ . Seja o conjunto  $E_S^s = E_S^s(f) = \{x \in E; \phi(t, x) \rightarrow S \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$ , ou seja  $d(\phi(t, x), S) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  ( $d$  métrica em  $\mathbb{R}^n$ ).  $E_S^s$  chama-se conjunto estável de  $S$ . Analogamente, define-se  $E_S^u = E_S^u(f)$  o conjunto instável de  $S$ , tomando  $t \rightarrow -\infty$ .

**Teorema 2.2 (Teorema da Variedade Estável).** *Sejam  $E \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto contendo a origem,  $f : E \rightarrow E$  de classe  $C^1$  e  $\phi_t$  o fluxo do Sistema Não Linear (2.27). Suponha que  $f(0) = 0$  e que a matriz  $J_f(0)$ , matriz jacobiana de  $f$  calculada na origem, tenha  $k$  autovalores com parte real negativa e  $n - k$  autovalores com parte real positiva. Então existe uma variedade diferenciável  $k$ -dimensional  $S$  tangente ao subespaço estável  $E^s$  do Sistema Linear (2.28) na origem, tal que, para todo  $t \geq 0$ ,  $\phi_t(S) \subset S$  e para todo  $x_0 \in S$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$ . Também existe uma variedade diferenciável  $(n - k)$ -dimensional  $U$  tangente ao subespaço instável  $E^u$  do Sistema Linear (2.28) na origem, tal que, para todo  $t \leq 0$ ,  $\phi_t(U) \subset U$  e para todo  $x_0 \in U$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0$ .*

**Demonstração.** A Demonstração deste teorema é encontrada em [29, pág.296].  $\square$

**Observação 2.4.** *O Teorema da Variedade Estável garante a existência e unicidade das superfícies  $S$  (estável) e  $U$  (instável) numa vizinhança da origem. Também pode-se derivar uma classificação topológica das singularidades hiperbólicas de um campo a partir da classificação topológica dos campos lineares hiperbólicos [30].*

**Definição 2.17.** *Uma órbita heteroclínica para um sistema dinâmico suave é uma trajetória  $\beta(t)$  que conecta dois equilíbrios diferentes do sistema,  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , isto é,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \beta(t) = \beta_0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \beta_1$ . Se  $\beta_0 = \beta_1$ ,  $\beta(t)$  é uma órbita homoclínica, [18, pág. 4].*

**Teorema 2.3 (As órbitas formam uma partição do espaço de fase).** *Seja uma equação diferencial autônoma de primeira ordem  $x' = f(x)$ , que satisfaz a propriedade de existência e unicidade de solução para qualquer dado inicial. Então, dadas duas órbitas do espaço de fase ou ambas coincidem (são uma mesma órbita) ou são disjuntas (não se intersectam).*

**Demonstração.** Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  duas órbitas. Neste caso  $\gamma_1$  é a imagem de uma trajetória  $x_1(t)$  e  $\gamma_2$  é a imagem da trajetória  $x_2(t)$ ,

$$\gamma_1 = \text{Imagem}(x_1(t)), \quad \gamma_2 = \text{Imagem}(x_2(t)). \quad (2.30)$$

Suponhamos que existe um ponto  $\hat{x}$  que pertence a  $\gamma_1 \cap \gamma_2$  (as duas órbitas se intersectam). Então

$$\hat{x} = x_1(t_1), \quad (2.31)$$

para certo instante  $t_1 \in \mathbb{R}$  (porque  $\hat{x} \in \gamma_1 = \text{Imagem}(x_1(t))$ ), e analogamente

$$\hat{x} = x_2(t_2) \quad (2.32)$$

para certo instante  $t_2 \in \mathbb{R}$  (porque  $\hat{x} \in \gamma_2 = \text{Imagem}(x_2(t))$ ).

A função  $x_3(t) := x_2(t - (t_1 - t_2))$  transladada a solução  $x_2$  no tempo, ela também é uma solução da mesma equação diferencial. Como o gráfico no plano  $tx$  da solução  $x_3(t)$  é uma translação horizontal da solução  $x_2(t)$ , a projeção sobre o eixo vertical das  $x$  coincide com a solução  $x_2(t)$ . Logo,

$$\text{Imagem}(x_3(t)) = \text{Imagem}(x_2(t)). \quad (2.33)$$

Além disso,  $x_3(t_1) = x_2(t_2) = \hat{x} = x_1(t_1)$ . Então  $x_3(t)$  e  $x_1(t)$  são soluções da equação diferencial e ambas verificam o dado inicial  $x(t_1) = \hat{x}$ . Como a equação diferencial satisfaz a propriedade de unicidade da solução com dado inicial, então as soluções  $x_3(t)$  e  $x_1(t)$  são iguais. Logo, suas imagens são iguais:

$$\text{Imagem}(x_3(t)) = \text{Imagem}(x_1(t)). \quad (2.34)$$

Reunindo as igualdades (2.33) e (2.34) deduzimos que

$$\text{Imagem}(x_1(t)) = \text{Imagem}(x_2(t)). \quad (2.35)$$

Reunindo as igualdades (2.33) e (2.35) concluímos que

$$\gamma_1 = \gamma_2. \quad (2.36)$$

Assim, provamos que duas órbitas que se intersectam coincidem. Equivalentemente, duas órbitas quaisquer, ou coincidem (são uma mesma órbita) ou são disjuntas (não se intersectam).  $\square$

## 2.4 ESCOAMENTO BIFÁSICO

Em diversos ramos da atividade industrial pode ser encontrado o escoamento multifásico. Ocorre quando uma mistura de duas ou mais fases, que não se encontram totalmente diluídas, escoam simultaneamente numa geometria dada [31]. O escoamento bifásico (two-phase flow em inglês) é um caso particular do escoamento multifásico. Este pode ser usado para descrever o fluxo simultâneo de água e óleo, que é o foco deste trabalho [19]. Por exemplo, na Indústria de Extração de Petróleo (nos métodos de recuperação secundária ou terciária) é comum ter pelo menos duas fases escoando simultaneamente.

Para prever a eficácia das técnicas de EOR, o desempenho do reservatório e a produção de hidrocarbonetos, os modelos matemáticos e computacionais são ferramentas essenciais. Isto motiva a estudar modelos de escoamento bifásico para meios porosos, ver [32, 33].

A equação de Buckley-Leverett é uma lei de conservação escalar unidimensional que modela o escoamento bifásico. Ela pode ser usada na modelagem de escoamento água-óleo [16]. Em particular a equação de Buckley-Leverett para o modelo de Corey quadrático para funções de permeabilidade se expressa matematicamente como:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x, t)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.37)$$

onde

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1 - u)^2}, \quad (2.38)$$

em que  $u$  é a saturação da fase aquosa e a constante  $\alpha$  é a razão da viscosidade do óleo pela viscosidade da água.

O valor onde a derivada do fluxo fracionário é máximo chama-se de ponto de inflexão e o denotamos como  $u_*$ , observe a Figura 2.2. Para a Equação (2.37), consideramos a seguinte condição inicial típica do chamado Problema de Riemann:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

A solução do problema de Riemann (2.37), (2.39) considerando (2.38) pode ser resolvido nos seguintes casos:

1.  $u^- < u^+ \leq u_*$ : Nesta faixa temos  $f'(u^-) > f'(u^+)$ , e obtemos uma solução por choque:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x \leq v_0 t, \\ u^+, & x > v_0 t. \end{cases}$$

Com velocidade de choque  $v_0$  dada pela condição de Rankine Hugoniot

$$v_0 = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+}.$$

2.  $u_* \leq u^+ < u^-$ : Neste caso temos  $f'(u^-) < f'(u^+)$ , e obtemos uma solução por rarefação:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x/t \leq f'(u^-), \\ (f')^{-1}(x/t), & f'(u^-) < x/t < f'(u^+), \\ u^+, & x/t > f'(u^+). \end{cases}$$

Para os dois casos restantes, definimos o ponto tangencial  $u^T$ , tal que

$$f'(u^T) = \frac{f(u^T) - f(u^+)}{u^T - u^+}. \quad (2.40)$$

3.  $u^+ < u^* < u^- \leq u^T$ : Este caso é uma extensão do Caso 1. (solução por onda de choque) dado que temos  $f'(u^-) > f'(u^+)$ .

4.  $u^+ < u_* < u^T < u^-$ : Obtemos uma onda de rarefação desde o ponto tangencial até o estado esquerdo, e uma queda de choque desde o estado direito até o ponto tangencial, dado como segue:

$$u(x, t) = \begin{cases} u^-, & x/t \leq f'(u^-), \\ (f')^{-1}(x/t), & f'(u^-) < x/t < f'(u^T), \\ u^+, & x/t > f'(u^T). \end{cases} \quad (2.41)$$

Note que a velocidade de choque  $v_0 = f'(u^T)$ , onde  $f'(u^T)$  é dado como em (2.40) e cumpre a condição de Rankine-Hugoniot. A construção do ponto tangencial pode ser observada na Figura 2.2.

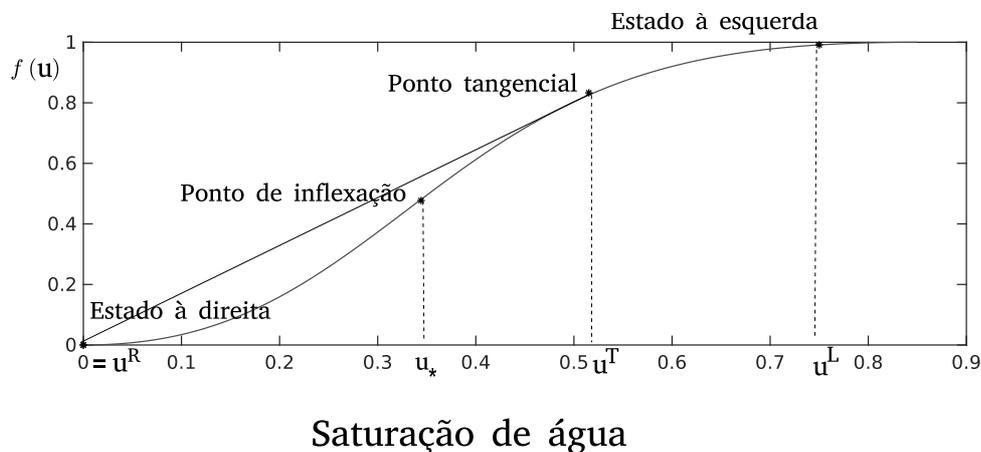


Figura 2.2 – Construção do ponto tangencial (Caso 4.).

## 2.5 CONSTRUÇÃO DE OLEINIK

Olga Oleinik (1925 – 2001) foi uma matemática ucraniana que fez muitas contribuições à geometria algébrica, à topologia de superfícies e à teoria de equações hiperbólicas não lineares, entre outros temas. Ela demonstrou a existência e unicidade da solução para leis de conservação escalares com regularização parabólica [34].

Consideremos o seguinte problema de Riemann

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.42)$$

onde a função fluxo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ , e está bem definida num intervalo  $I$  com extremos  $u^-$  e  $u^+$ . Quando a derivada da função de fluxo  $f'(u)$  é monótona o estudo da solução pode ser simplificado em três casos:

1. Com  $u^- = u^+$ , a solução é constante.

2. Quando  $f'(u^-) < f'(u^+)$  é usado um invariante escalar ( $\xi = x/t$ ) e serão construídos leques de ondas de rarefação (Subseção 2.1.1).
3. Para  $f'(u^-) \geq f'(u^+)$ , a relação de Rankine-Hugoniot mostrara as ondas de choque e as descontinuidades de contato (Subseção 2.1.2).

Quando  $f'(u)$  não é monótona é possível construir a solução do Problema de Riemann (2.42) usando a construção geométrica de Oleinik.

Segundo [35], uma equação parabólica tem soluções suaves. Isto pode ser generalizado para o caso escalar e podemos considerar a equação viscosa

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}, \quad (2.43)$$

associada ao problema original (2.42). A solução de (2.42) é fisicamente correta se a solução  $u(x, t, \epsilon)$  de (2.43) com a mesma condição inicial do problema de Riemann aproxima-se no limite ( $\epsilon \rightarrow 0^+$ ) da primeira. Oleinik demonstrou a existência da solução do Problema de Riemann (2.42) usando a equação viscosa. Ela também introduziu uma condição que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{f(u) - f(u^-)}{u - u^-} \geq v \geq \frac{f(u) - f(u^+)}{u - u^+}, \quad (2.44)$$

para todo  $u$  entre  $u^-$  e  $u^+$  e  $v$  é a velocidade de propagação ( $f(u^-) - f(u^+) = v(u^- - u^+)$ ) obtida da relação de Rankine-Hugoniot.

A construção da solução do Problema de Riemann (2.42) é determinada pelo gráfico de  $f$ . Procuramos a envoltória convexa do gráfico da função de fluxo  $f$ . As rarefações serão determinadas quando a função de fluxo e sua envoltória convexa coincidirem, enquanto, os choques serão determinados quando a função fluxo e sua envoltória convexa diferirem.

Quando  $u^+ < u^-$   $u^L$   $u^R$ , então construímos a envoltória convexa da função de fluxo:  $conv(f) = \{(u, y) : u^+ \leq u \leq u^- \text{ e } y \leq f(u)\}$ , veja Figura 2.3. O limite superior

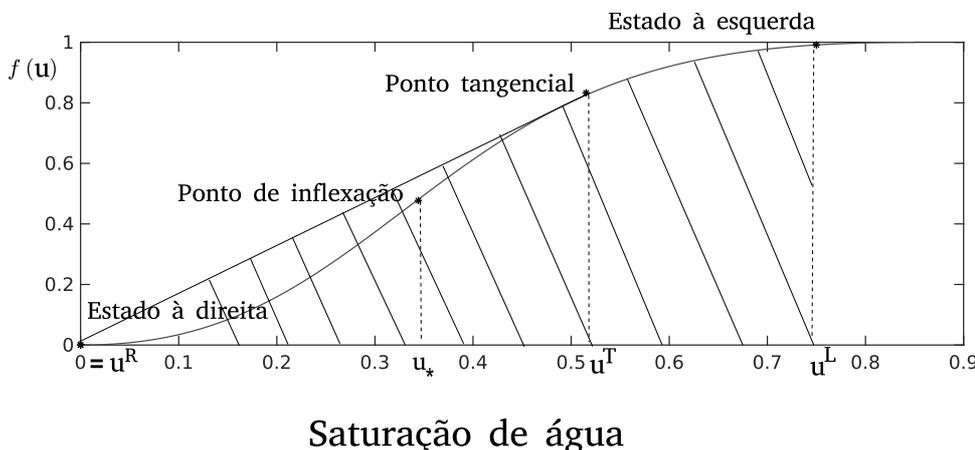


Figura 2.3 – Envoltória convexa mostrando choque e rarefação com  $u^+ < u^-$ .

de  $conv(f)$ , está composto pela reta que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(u^T, f(u^T))$  e segue  $y = f(u)$  até o ponto  $(u^-, f(u^-))$ . O ponto de tangência  $(u^T, f(u^T))$  é o valor pós-choque. A linha reta representa o salto de choque desde  $u = u^T$  até  $u = 0$ , e o segmento que segue  $f(u)$  é a onda de rarefação.

## 2.6 MÉTODOS DE RECUPERAÇÃO

Um reservatório de petróleo é um meio poroso que contém hidrocarbonetos (petróleo). Técnicas de simulação numérica ajudam no processo de modelagem da recuperação de petróleo. O principal objetivo dessa simulação é prever o comportamento futuro do reservatório e encontrar maneiras e meios de otimizar a recuperação dos hidrocarbonetos em certas condições operacionais [36].

Como foi dito na Introdução deste trabalho, os métodos tradicionalmente são classificados em três tipos. Na recuperação secundária, a injeção de água ou gás não é muito eficaz e, após esse estágio, 50% ou mais dos hidrocarbonetos geralmente permanecem no reservatório [36]. Devido à forte tensão superficial, uma grande quantidade de óleo é aprisionada em pequenos poros e não pode ser recuperada com esta técnica. Esse fenômeno é conectado a densidade e viscosidade do óleo. Nestes casos a água tem mobilidade maior que petróleo, ajuda na formação de dedos (fingering) resultando na maior recuperação de água nos poços de produção [36]. Um dos primeiros métodos de recuperação terciária ou avançada de petróleo é o uso de solventes [2]. A seguir falamos, com mais detalhe, sobre este método.

### 2.6.1 Solventes

Trata-se da situação em que no processo de extração de petróleo um determinado solvente é adicionado na água injetada para aumentar o fator de recuperação. No entanto, o uso de tais espécies químicas no processo de injeção aumenta o custo total [14]. Isto motiva o estudo mais aprofundado dessa técnica.

Dois fluidos que se misturam totalmente dentro de uma fase são chamados miscíveis. A maioria dos agentes usados na Indústria do Petróleo mostram miscibilidade parcial em relação ao óleo cru. Neste contexto a extração de petróleo usando solventes recebe o nome de inundação de solvente (solvent flooding) [2].

A menos de certas condições muitos solventes tornam-se miscíveis com o óleo, no entanto todos os solventes de uso comercial são imiscíveis na fase aquosa [2]. Um exemplo, onde a miscibilidade dos solventes é uma vantagem para o deslocamento efetivo do óleo é mostrado em [37]. Em [1] é estudado o deslocamento de óleo por solvente miscível na presença de uma fase aquosa imiscível e é mostrado um procedimento gráfico para obter uma proporção ótima de água-solvente. No capítulo seguinte é dado um breve resumo deste artigo.



### 3 APLICAÇÃO DA TEORIA DO FLUXO FRACIONÁRIO PARA INJEÇÃO DE SOLVENTES E FLUIDOS DE PERSEGUIÇÃO

Este capítulo é um resumo do artigo “Applying fractional flow theory to solvent flooding and chase fluids” escrito por Mark P. Walsh e Larry W. Lake, publicado em 1989. No mencionado trabalho os autores enfatizam que o estudo do deslocamento miscível é baseado na Teoria do Fluxo Fracionário. A teoria é aplicada no estudo do deslocamento de óleo por um solvente miscível na presença de uma fase aquosa imiscível e utilizam a condição de coerência, da qual resulta que todas as velocidades de concentração devem ser iguais. O artigo mostra os seguintes resultados: (1) procedimentos gráficos que são válidos para diferentes proporções de água-solvente e condições iniciais arbitrárias; (2) estudo de uma proporção água-solvente ótima para recuperação; (3) um procedimento para a adimensionalização de uma quantidade de solvente injetado; (4) procedimento para a seleção do melhor fluido de perseguição (chase fluid); (5) o conceito e os métodos para calcular uma proporção de água-solvente no fluido de perseguição que minimiza o uso do solvente. Neste capítulo focamos no primeiro item.

#### 3.1 HIPÓTESES

A Teoria de Fluxo Fracionário usada em [1] e também neste trabalho é baseada nas seguintes hipóteses físicas:

1. O fluxo é unidimensional.
2. O meio poroso é isotérmico. Os fluidos estão em equilíbrio termodinâmico local. Esta condição significa que precisamos tratar apenas com equações de conservação de massa.
3. As propriedades da matriz porosa e dos fluidos envolvidos são independentes da pressão.
4. Não há reações químicas e os fluidos se misturam idealmente.
5. A dissipação dos fluidos é desprezível significando que não são consideradas a pressão capilar e difusão do solvente da fase oleica.
6. Temos 3 componentes (água ( $w$ ), óleo ( $o$ ) e solvente ( $s$ )) e 2 fases (fase oleica ( $o$ ) e fase aquosa ( $w$ )). O meio poroso é considerado uniformemente saturado ( $S_o + S_w = 1$ ).
7. Condição de fronteira à esquerda corresponde à injeção simultânea de água e solvente. Condição de fronteira à direita corresponde à situação inicial do reservatório.

### 3.2 TEORIA

Nesta seção são discutidas algumas equações e propriedades físicas, além do esboço de uma técnica para resolver estas equações e determinar uma quantidade de solvente injetado.

Antes de apresentar o sistema de leis de conservação vamos introduzir as variáveis adimensionais  $t_{ad}$  e  $x_{ad}$ . O tempo adimensional define-se como a razão entre o volume cumulativo do fluido injetado e o volume do meio poroso ( $PV$ ),

$$t_{ad} = \frac{\int_0^t A u dt}{\phi L \bar{A}}, \quad (3.1)$$

onde  $\phi$  é a porosidade,  $L$  é o comprimento total do meio permeável,  $A$  é a área da seção transversal com valor médio  $\bar{A}$  e  $u$  é a velocidade de Darcy. Ou seja,  $t_{ad} = 1$  corresponde ao tempo que leva para injetar um PV.

A posição adimensional é definida na seguinte equação:

$$x_{ad} = \frac{\int_0^x A dx}{L \bar{A}}. \quad (3.2)$$

Esta definição é muito usada na literatura [2], pois permite levar em conta casos onde o meio poroso é heterogêneo.

Considerando as hipóteses vistas na Seção 3.1, a equação de conservação unidimensional para a  $i$ -ésima componente é dada por

$$\frac{\partial C_i}{\partial t_{ad}} + \frac{\partial F_i}{\partial x_{ad}} = 0, \quad i = w, o, s, \quad (3.3)$$

onde  $C_i$  e  $F_i$  são a concentração total e o fluxo fracionário total da  $i$ -ésima componente respectivamente. Estas variáveis, por sua vez, são definidas como:

$$C_i = S_o C_{io} + S_w C_{iw}, \quad F_i = f_o C_{io} + f_w C_{iw}, \quad i = w, o, s, \quad (3.4)$$

onde  $S_j$  é a saturação da fase  $j = o, w$ ,  $C_{ij}$  representa o volume fracionário da componente  $i$  na fase  $j$  e  $f_j$  denota o fluxo fracionário da fase  $j$ .

**Observação 3.1.** *Neste trabalho usamos apenas meio poroso homogêneo e, portanto, usaremos notação  $x$  e  $t$ , que a menos de constantes coincidem com espaço e tempo usuais.*

**Observação 3.2.** *Neste trabalho serão considerados  $C_{ww} = 1$ ,  $C_{sw} = C_{ow} = C_{wo} = 0$  e  $C_{so} + C_{oo} = 0$ . Com estes valores será escrito o sistema de EDPs que descreve um modelo mais simples pelo proposto por Walsh e Lake. Isto pode ser observado na Seção 3.2.3.*

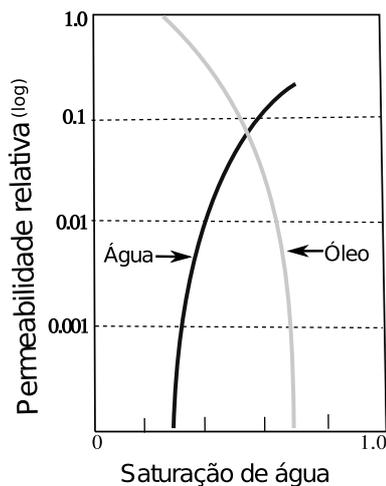


Figura 3.1 – Gráfico semi-log das curvas representativas das permeabilidades relativas, ver [1].

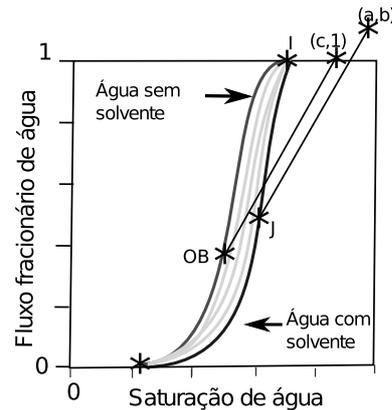


Figura 3.2 – Múltiplas curvas de fluxo fracionário (amarelo) variando entre a curva de fluxo fracionário de água na presença de uma quantidade mínima de solvente (vermelha) e da água na presença de uma quantidade máxima de solvente (azul).

### 3.2.1 Relações do fluxo fracionário

O fluxo fracionário da fase  $j$ ,  $f_j(S_w, C_{so})$ , é considerado como uma função que depende da saturação de água ( $S_w$ ) e do volume fracionário de solvente na fase oleica ( $C_{so}$ ).

No artigo [1] a análise geométrica foi feita para qualquer fluxo fracionário em forma da letra “S”, englobando modelos Corey-Brooks, de Van Genuchten etc. A hipótese geométrica usada pelos autores é que o fluxo fracionário de água depende da quantidade de solvente. Em outras palavras, a curva do fluxo fracionário de água com uma quantidade máxima de solvente é construída desde a curva do fluxo fracionário de água sem solvente (Figura 3.2). A Figura 3.1 mostra as permeabilidades relativas de água e óleo. Ela é baseada em dados experimentais e representa geometricamente os modelos usados na literatura.

Em [1], os autores não explicitam quais são as funções de fluxo fracionário, afirmando que, a partir de dados experimentais para qualquer modelo, as curvas fracionárias são na forma da letra “S” (Figura 3.2). No presente trabalho, estendemos este artigo analiticamente analisando as possíveis soluções na forma de ondas viajantes, considerando o modelo Corey-Brooks quadrático, ver Capítulo 4.

### 3.2.2 Condições iniciais e de fronteira

De acordo com a hipótese 7, temos as seguintes condições inicial e de fronteira

$$\begin{cases} S_w(x, 0) = S_{wI}, & x \geq 0, \\ S_w(0, t) = S_{wJ}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Daqui em diante  $I$  denota a condição inicial e encontra-se sobre a curva de fluxo fracionário de água sem solvente, enquanto  $J$  denota a condição de injeção e localiza-se sobre a curva de fluxo fracionário de água com solvente, ver Figura 3.2. Em outras palavras, inicialmente não tem presença de solvente e a condição de injeção é uma mistura bifásica de água e solvente especificada pelo fluxo fracionário de água com solvente no extremo da injeção ( $f_{wJ} = f_{wJ}(S_{wJ})$ ).

### 3.2.3 Método de solução

O método de solução é geométrico, e utiliza a condição de coerência, a qual envolve uma caracterização para a velocidade da característica da saturação de água ( $v_{c_w}$ ) e a velocidade da característica da concentração de solvente na fase oleica ( $v_{c_s}$ ). Estas velocidades são obtidas da seguinte forma. Primeiro, combinamos as equações (3.3) e (3.4) junto com a Observação 3.2, resultando

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(C_{so}S_o)}{\partial t} + \frac{\partial(C_{so}f_o)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Supondo soluções suaves e usando a regra da cadeia, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(C_{so}S_o)}{\partial t} + \frac{\partial(C_{so}f_o)}{\partial(C_{so}S_o)} \frac{\partial(C_{so}S_o)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Agora, usa-se o método das curvas características no Sistema (3.7), isto é, buscamos curvas  $x(t)$  ao longo das quais  $S_w$  e  $C_{so}S_o$  são constantes.

Derivando  $S_w$  e  $C_{so}S_o$  com respeito a  $t$  ao longo das características, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{S_w} = 0, \\ \frac{\partial(C_{so}S_o)}{\partial t} + \frac{\partial(C_{so}S_o)}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{C_{so}S_o} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Assim, temos as seguintes inclinações das curvas características:

$$\begin{cases} \left( \frac{dx}{dt} \right)_{S_w} = - \frac{(\partial S_w / \partial t)}{(\partial S_w / \partial x)}, \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_{C_{so}S_o} = - \frac{(\partial(C_{so}S_o) / \partial t)}{(\partial(C_{so}S_o) / \partial x)}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Comparando (3.7) e (3.8), temos que a velocidade da característica da saturação de água e a velocidade da característica da concentração de solvente na fase oleica são:

$$v_{c_w} = \left( \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right)_x, \quad v_{c_s} = \left[ \frac{\partial(C_{so}f_o)}{\partial(C_{so}S_o)} \right]_x. \quad (3.10)$$

**Observação 3.3.** As equações (3.9) e (3.10) representam as velocidades das características. Porém, (3.9) tem o enfoque matemático enquanto (3.10) tem o enfoque físico.

As equações dadas em (3.10) são as velocidades das soluções numa região longe do choque. Quando a mudança de concentração ou saturação é abrupta, ou um choque, estas ondas viajam com velocidade dada pela condição de Rankine-Hugoniot introduzida na Seção 2.1.2:

$$v = \frac{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-} \text{ ou } v = \frac{(C_{so}f_o)(C_{so}S_o)^+ - (C_{so}f_o)(C_{so}S_o)^-}{(C_{so}S_o)^+ - (C_{so}S_o)^-}, \quad (3.11)$$

onde  $U = (S_w, C_{so})$ ,  $-$  e  $+$  representam os estados à esquerda (upstream) e à direita (downstream), respectivamente.

Daqui em diante supomos que o fluxo fracionário da água só depende de  $S_w$ . O método pode ser aplicado ao Sistema (3.6), desde que satisfaça a condição de coerência, a qual diz que a velocidade da característica da saturação de água e a velocidade da característica da concentração de solvente na fase oleica devem ser iguais, ver Apêndice A em [1]. Então tem-se:

$$\frac{df_w}{dS_w} = \frac{d(C_{so}f_o)}{d(C_{so}S_o)} = v_c. \quad (3.12)$$

Daqui em diante chamaremos  $v_c$  - velocidade de concentração. A Equação (3.12) é satisfeita sob as seguintes condições:

- Quando  $C_{so} \neq 0$  é constante, lembrando que  $f_o = 1 - f_w$ . De fato:

$$\frac{d(C_{so}f_o)}{d(C_{so}S_o)} = \frac{df_o}{dS_o} = \frac{df_o}{dS_w} \underbrace{\frac{dS_w}{dS_o}}_{-1} = -\frac{df_o}{dS_w} = -\frac{d(1 - f_w)}{dS_w} = \frac{df_w}{dS_w}. \quad (3.13)$$

Observando os extremos destas igualdades, fica demonstrada a afirmação. A Equação (3.12) é uma forma adimensional da velocidade associada à Equação de Buckley-Leverett, correspondente a um deslocamento imiscível (mais detalhes na Seção 2.4). A velocidade de concentração é o coeficiente angular da curva do fluxo fracionário correspondente para cada valor de  $C_{so}$ .

A Equação (3.12) pode ser substituída por sua versão discreta:

$$v_{\Delta c} = \frac{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^-)}{S_w^+ - S_w^-}, \quad (3.14)$$

que representa o coeficiente angular de uma reta secante à curva do fluxo fracionário para saturação de água entre os estados  $-$  e  $+$ .

- Se  $v_c$  é uma constante, o fluxo

$$f_o = v_c S_o \quad (3.15)$$

satisfaz a Equação (3.12). De fato:

$$\frac{d(C_{so}f_o)}{d(C_{so}S_o)} = \frac{d(C_{so}v_cS_o)}{d(C_{so}S_o)} = v_c \underbrace{\frac{d(C_{so}S_o)}{d(C_{so}S_o)}}_1 = v_c = \frac{df_w}{dS_w}. \quad (3.16)$$

Note que a Equação (3.15) pode ser generalizada mostrando o fluxo em relação ao óleo móvel. Esta generalização é feita incluindo a saturação do óleo residual ( $S_{or}$ ), a quantidade de solvente no óleo residual ( $C_{sT}$ ) e a quantidade de solvente na fase oleica ( $C_{sw}$ ), obtendo:

$$v_c = \frac{f_w - [1/(1 - C_{sw})]}{S_w - \{[1 - S_{or}(1 - C_{sT})]/(1 - C_{sw})\}}. \quad (3.17)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma:

$$v_c = \frac{f_w - b}{S_w - a}, \quad (3.18)$$

onde

$$a = \frac{1 - S_{or}(1 - C_{sT})}{1 - C_{sw}}, \quad (3.19)$$

e

$$b = \frac{1}{1 - C_{sw}}. \quad (3.20)$$

A Equação (3.18) pode ser obtida ao fazer um balanço material do solvente e pode ser interpretada geometricamente como uma linha reta de inclinação  $v_c$ , partindo de  $(S_w, f_w) = (a, b)$  e intersectando a curva de fluxo fracionário de água com solvente.

Também é feito um balanço material do óleo, obtendo

$$v_c = \frac{f_w - 1}{S_w - [1 - S_{or}(1 - C_{sT})]}. \quad (3.21)$$

Esta equação é escrita de uma forma mais compacta:

$$v_c = \frac{f_w - 1}{S_w - c}, \quad (3.22)$$

onde

$$c = 1 - S_{or}(1 - C_{sT}). \quad (3.23)$$

Geometricamente, esta equação representa uma linha reta com inclinação  $v_c$ , que começa no ponto  $(S_w, f_w) = (c, 1)$  e intersecta a curva de fluxo fracionário de água sem solvente.

A construção de soluções do Sistema (3.6) usa o método gráfico baseado na teoria do fluxo fracionário e é semelhante à construção de Oleinik [34]. Este método permite encontrar a solução fraca única e fisicamente coerente (equivalente a solução entrópica, como na Seção 2.1). A construção pode ser acompanhada nas Figuras 3.3 e 3.4, sendo que os detalhes e legendas destas figuras estão detalhadas mais na frente (Seção 3.3.1) no decorrer do texto.

Considerando as velocidades de concentração (3.18) e (3.22), vindas das leis de balanço material o Método do Fluxo Fracionário é aplicado considerando as seguintes regras [38]:

1. Primeiro, identificamos a condição de injeção (o ponto  $J$ ) e a condição inicial do reservatório (ponto  $I$ ) sobre as respectivas curvas de fluxo fracionário, para exemplos veja Figuras 3.3(a) e 3.4(a). Também identificamos os dados do reservatório  $S_{or}$ ,  $C_{sw}$  e  $C_{sT}$ , os quais ao ser substituídos nas equações (3.19), (3.20) e (3.23) permitem calcular  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente.
2. Observar o valor de  $C_{sw}$ .
  - Se  $C_{sw} \neq 0$ , construa a reta que passa pelo ponto  $(a, b)$  com inclinação  $v_{c_w}$  como na Equação (3.18). Para exemplo, veja Figura 3.3(a). Esta reta passa pelos pontos  $(a, b)$  e  $J$ . Após este processo, construa outra reta que passa pelo ponto  $(c, 1)$  com inclinação  $v_{c_o}$  como na Equação (3.22). Esta segunda reta passa pelos pontos  $(c, 1)$  e  $OB$  (Oil Bank). Mas pela condição de coerência tem-se  $v_{c_o} = v_{c_w} = v_c$ . Finalmente, construa-se a reta que passa pelos pontos  $OB$  e  $I$ .
  - Se  $C_{sw} = 0$ , note que as equações (3.18) e (3.22) são iguais. Construa uma reta que passa pelo ponto  $P = (a, b) = (c, 1)$  com inclinação  $v_c$ . Para exemplo veja Figura 3.4(a). Esta reta estende-se considerando a construção da envoltória convexa proposta por Oleinik, [34], ver Seção 2.5.

### 3.3 RESULTADOS

Nesta seção é mostrada a aplicação do Método do Fluxo Fracionário para dois casos: deslocamento terciário miscível usando uma proporção de água-solvente (Figura 3.3) e injeção contínua de solvente (Figura 3.4). As soluções são apresentadas usando o diagrama de Walsh, onde geralmente é mostrado, [39]:

1. Um gráfico de saturação versus  $x$ , com  $t$  fixo. Ele é chamado de perfil de saturação. Os perfis mostram a distribuição da saturação ao longo do comprimento do meio. Por exemplo ver Figuras 3.3(b) e 3.4(b).
2. Um gráfico de fluxo versus  $t$ , com  $x$  fixo. Ele é chamado histórico de concentração. O histórico do fluxo é aquele que considera  $x = 1$ , estes representam o que sai do meio, se o fim da produção estiver em  $x = 1$ . Por exemplo ver Figuras 3.3(c) e 3.4(c).
3. Um gráfico de  $x$  versus  $t$ , com concentração fixa. Ele é chamado de diagrama de tempo-distância. Por exemplo, ver Figuras 3.3(d) e 3.4(d).

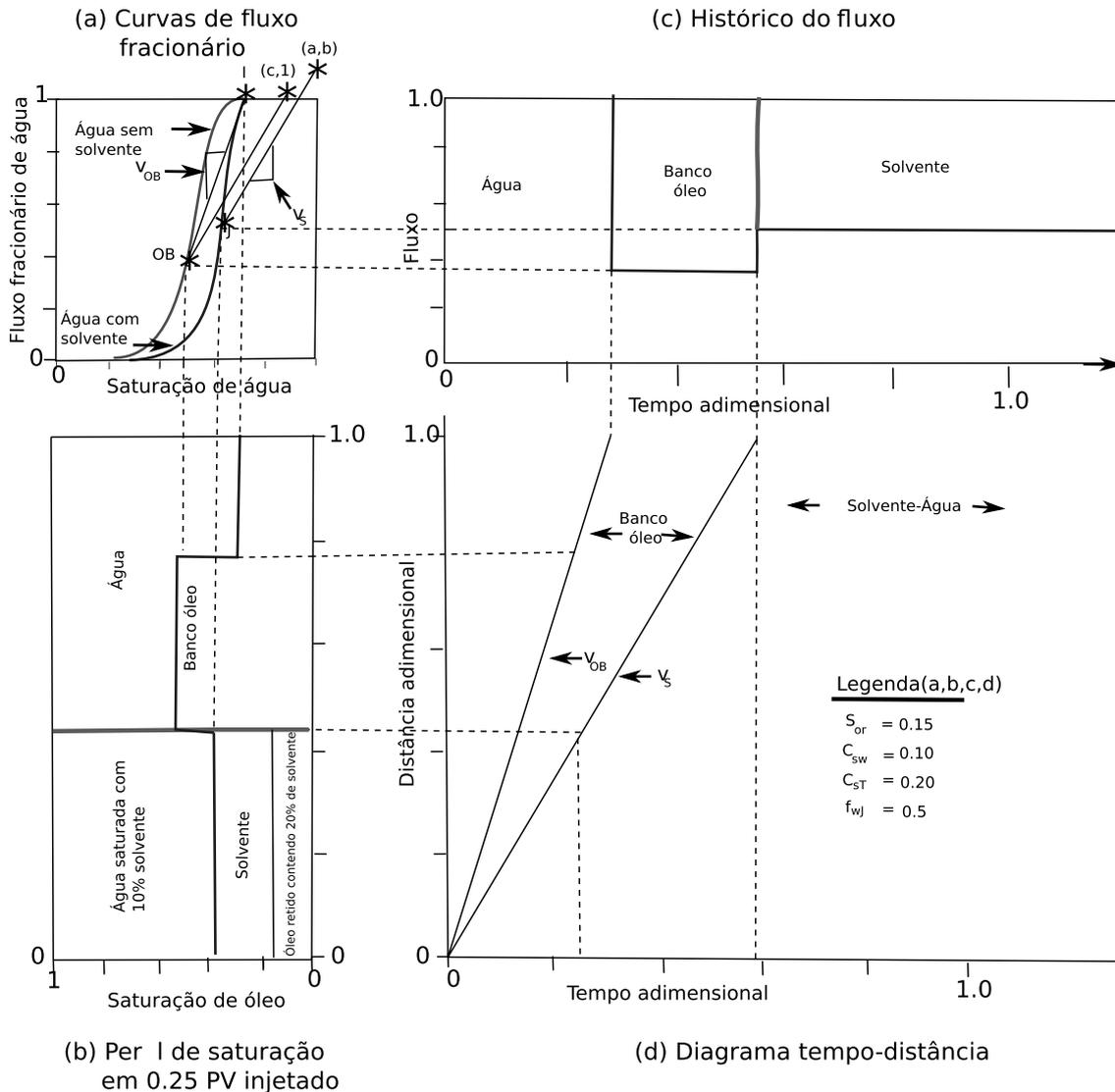


Figura 3.3 – Deslocamento terciário miscível usando uma proporção de água-solvente ( $W_R$ ) de unidade e incluindo uma saturação de óleo retido e solubilidade de solvente nas fases de água e óleo retido.

### 3.3.1 Representações gráficas

Considerando os valores de parâmetros dados na Tabela 3.1, a Figura 3.3 está composta por quatro sub-figuras. A seguir descreve-se cada uma delas.

Figura 3.3(a) ilustra as curvas do fluxo fracionário, sobre as quais é construído o método de solução gráfica. Debaixo desta figura encontra-se Figura 3.3(b) a qual mostra o perfil rotacionado de  $90^\circ$  para que coincida com as curvas de fluxo fracionário acima. Neste diagrama, as ondas imiscíveis são representadas por linhas sólidas de cor azul e as ondas miscíveis por linhas sólidas de cor roxa.

Figura 3.3(c) mostra o histórico do fluxo. Isto é uma plotagem do fluxo fracionário (na concentração final do fluxo no meio,  $x = 1$ ) versus o tempo  $t$ . O histórico do fluxo também fornece um meio para calcular a recuperação acumulada de óleo através da área

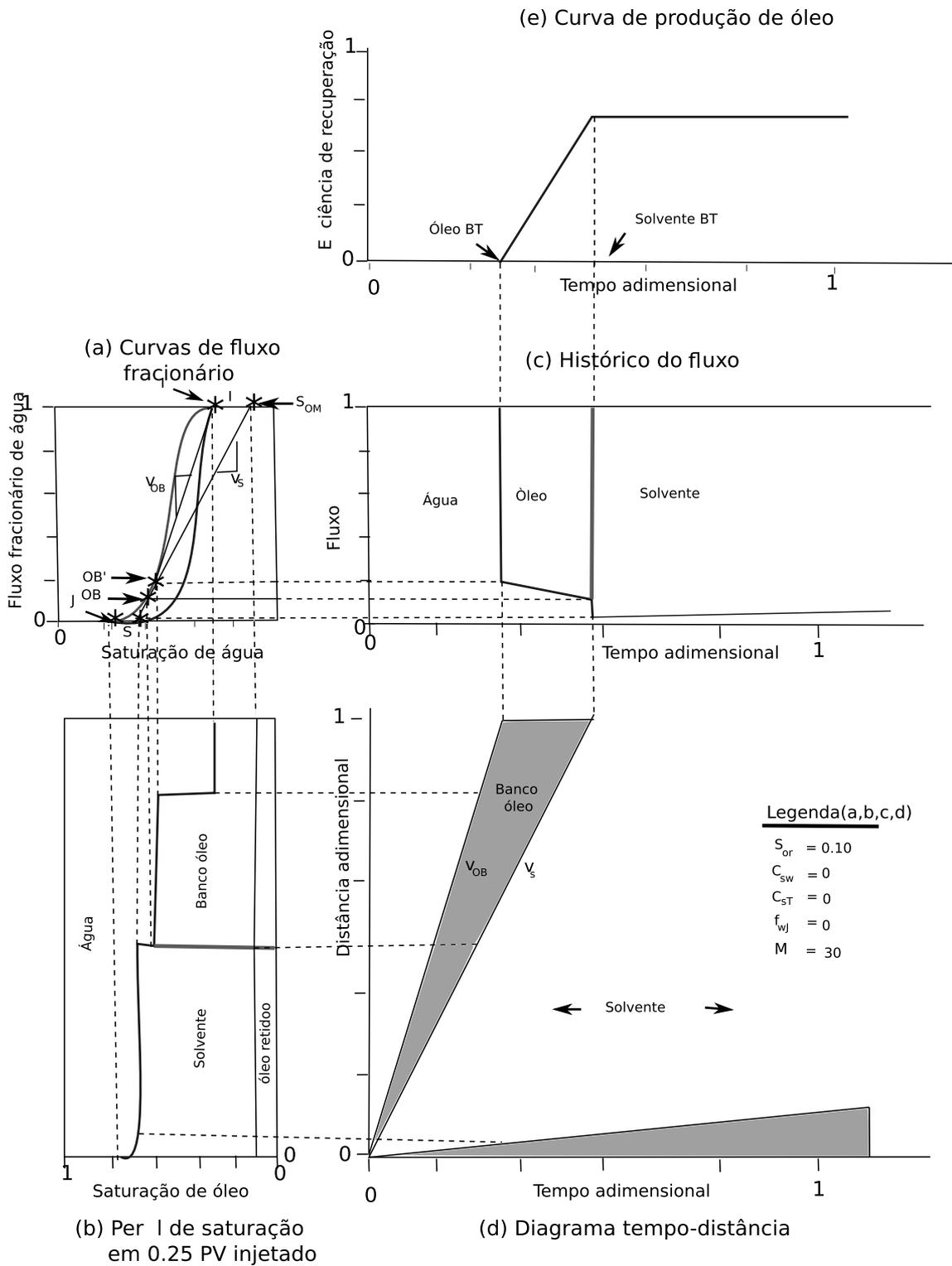


Figura 3.4 – Deslocamento miscível terciário com água livre do solvente.

Tabela 3.1 – Valores constantes para os parâmetros.

Símbolo	Descrição	Valor	
$f_{wJ}$	Proporção específica de água e solvente	0.5	(Figura 3.3)
$f_{wJ}$	Proporção específica de água e solvente	0	(Figura 3.4)
$S_{or}$	Saturação de óleo retido	0.15	(Figura 3.3)
$S_{or}$	Saturação de óleo retido	0.10	(Figura 3.4)
$C_{sw}$	Solubilidade do solvente na fase aquosa	0.10	(Figura 3.3)
$C_{sw}$	Solubilidade do solvente na fase aquosa	0	(Figura 3.4)
$C_{sT}$	Solubilidade particionada	0.20	(Figura 3.3)
$C_{sT}$	Solubilidade particionada	0	(Figura 3.4)
$\mu_o$	Viscosidade do óleo	2	
$\mu_w$	Viscosidade da água	1	
$\mu_s$	Viscosidade do solvente	0.1	

sob a curva, dada pela equação:

$$N_{pD} = \int_0^t F_o|_{x_{ad}=1} dt, \quad (3.24)$$

onde  $N_{pD}$  é a quantidade do óleo recuperado expressado como uma fração do volume do meio poroso e  $F_o$  é o fluxo fracionário total do óleo com solvente.

Finalmente, Figura 3.3(d) é o diagrama distância-tempo, o qual mostra linhas de saturação constante sobre um plano  $(x,t)$ . Este diagrama foi organizado para que coincida com Figura 3.3(b) à esquerda e Figura 3.3(c) acima.

Figura 3.4 se subdivide em 5 sub-figuras. As Sub-figuras 3.4(a), 3.4(b), 3.4(c) e 3.4(d) mostram as curvas de fluxo fracionário, o perfil da saturação, o histórico do fluxo e o diagrama distância-tempo, respectivamente. Estas sub-figuras são organizadas analogamente ao caso anterior. Finalmente Figura 3.4(e) mostra a curva de produção de óleo com solvente.

### Caso I: Deslocamento terciário miscível usando uma proporção de água-solvente

Para este caso, o método gráfico encontra-se na Figura 3.3(a). Esta figura ilustra uma aplicação das equações (3.17) e (3.21) para o deslocamento terciário<sup>1</sup> miscível usando uma proporção de água-solvente, com os valores na Tabela 3.1. Também, aplicando os valores da tabela para as equações (3.18), (3.19) e (3.23) produzem os valores  $a = 0.98$ ,  $b = 1.11$  e  $c = 0.88$ , respectivamente.

O fluxo fracionário injetado localiza-se no ponto  $J$  sobre o gráfico  $f_w$  com solvente, veja Figura 3.3(a). Equação (3.17) mostra que o solvente se propaga através do meio com uma onda miscível de velocidade  $v_s$  ( $v_c = v_s$ ), que é a inclinação da linha reta que passa através do ponto  $J$  e do ponto  $(S_w, f_w) = (a, b)$ , ver Figura 3.3(a). Por outro lado, a condição de coerência (ver Equação (3.12)) requer que esta velocidade  $v_s$  seja a mesma

<sup>1</sup> A designação “terciário” denota que o deslocamento começa na saturação de óleo residual  $S_{wI} = 1 - S_{or}$ .

que a velocidade da frente posterior do banco de óleo. De modo que na Equação (3.21) mostra-se que a linha através do ponto  $(S_w, f_w) = (c, 1)$  com inclinação  $v_c$  intersecta o gráfico de  $f_w$ , sem solvente, no ponto  $OB$ .

A linha traçada desde  $(c, 1)$  até o ponto  $OB$  passa através de várias curvas do fluxo fracionário (estas curvas são representadas em cor amarela na Figura 3.2) entre os limites das curvas de fluxo fracionário da água sem solvente (cor vermelha) e da água com solvente (cor azul). Todas estas curvas colapsam em uma única saturação de água, uma vez que a onda de deslocamento miscível não muda de forma na propagação, [39, pág.37]. Todas as curvas coincidem no ponto  $I$ .

A curva do fluxo fracionário da água sem solvente tem um deslocamento imiscível desde o ponto  $OB$  até a condição  $I$ . Usa-se Equação (3.12) se a velocidade é monotonicamente crescente ao se deslocar sobre o gráfico do ponto  $I$  para o ponto  $OB$  (onda de rarefação) ou Equação (3.14) caso a velocidade não seja monotonicamente decrescente de  $I$  para  $OB$  (onda de choque). Para o caso mostrado na Figura 3.3(a) a velocidade diminui e existe um choque na saturação entre  $I$  e  $OB$  com velocidade  $v_c = v_{OB}$ . Com isso terminamos o método gráfico para o Caso I.

**Observação 3.4.** *Quando estudamos o caso especial, onde não há solubilidade do solvente na fase aquosa ( $C_{sw} = 0$ ), os pontos  $(a, b)$  e  $(c, 1)$  coincidem e as equações (3.17) e (3.21) são claramente idênticas. Portanto, uma única linha é desenhada a partir do ponto  $(S_w, f_w) = (c, 1)$  e intersecta as curvas de fluxo fracionário da água com solvente e da água sem solvente. Isto implica que a velocidade do solvente e a velocidade do banco de óleo são iguais,  $v_s = v_{OB}$ . Este caso pode ser visto na Figura 3.4.*

## Caso II: Injeção contínua de solvente

Figura 3.4 mostra os resultados para o caso de deslocamento terciário usando injeção contínua de solvente, onde é considerado  $f_{wJ} = 0$ . Sobre as curvas de fluxo fracionário a condição inicial e condição de injeção são denotadas pelos pontos  $I$  e  $J$ , respectivamente.

A construção de uma curva miscível como feito na Figura 3.3(a) não é possível, dado que a reta que passa por  $J$  teria uma interseção dupla com a curva de fluxo fracionário da água sem solvente. Como alternativa a onda imiscível se propaga desde o ponto  $J$  (na curva do fluxo fracionário da água com solvente) até o ponto  $S$ , de acordo com Equação (3.12). Para encontrar a terminação desta onda imiscível é construída uma reta tangente à curva de fluxo fracionário da água sem solvente no ponto  $OB$ , como sugerido pelas equações (3.17) e (3.21). Esta reta estende-se em direção à curva de fluxo fracionário da água com solvente e passa pelo ponto  $S_{or} = (a, b) = (c, 1)$ . Neste caso, a onda imiscível (tipo rarefação) conecta os pontos  $OB$  e  $OB'$ , logo é construída uma reta de  $OB'$  até  $I$ , onde tem-se um choque. Com isso terminamos o método gráfico para o Caso II.

Na Figura 3.4(d), os diagramas exibem duas ondas imiscíveis (tipo rarefação): uma porção da propagação imiscível à frente da onda miscível e um pequeno deslocamento imiscível lento na região com concentração alta de solvente. Estas duas ondas são as regiões sombreadas. As pequenas velocidades da onda mais lenta indicam que é muito difícil remover completamente a água móvel desde o meio por injeção de solvente imiscível.

Figura 3.4(e) mostra a curva de produção de óleo versus o tempo adimensional, onde a recuperação normalizada  $N_{pD}$  é definida em volumes porosos levando em conta a saturação inicial  $S_{oI}$ . A curva de produção na Figura 3.4(e) satisfaz a Equação (3.24) [12]:

$$N_{pD} = S_{oI} - S_o|_{x=1} + F_o|_{x=1}t, \quad (3.25)$$

onde  $F_o|_{x=1}$  representa o fluxo fracionário de óleo de efluente em  $t$  volumes porosos injetados, e  $S_o|_{x=1}$  é a saturação de óleo correspondente a  $F_o|_{x=1}$ . Equação (3.25) aplica-se para inundação secundária e terciária. Deslocamentos secundários usando injeção contínua de solvente e tendo  $S_{wI} = S_{wr}$ , como condição inicial, resultam em um deslocamento de óleo em forma de pistão.

#### 4 SOLUÇÃO NA FORMA DE ONDAS VIAJANTES

Neste capítulo procura-se a solução do Sistema de Leis de Conservação (3.6) na forma de ondas viajantes. Optamos por estudar os choques que têm perfil viscoso (Ver Subseção 2.1.4), portanto, adicionamos termos de viscosidade ao Sistema (3.6):

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{\epsilon \partial^2 S_w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(C_{so}S_o) + \frac{\partial}{\partial x}(C_{so}f_o) = \frac{\epsilon \partial^2 C_{so}}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante positiva,  $S_w$  representa a saturação de água,  $S_o$  representa saturação de óleo,  $C_{so}$  representa volume fracionário de solvente na fase oleica,  $f_w$  é o fluxo fracionário da água e  $f_o$  é o fluxo fracionário do óleo. Estes fluxos são definidos por:

$$f_w + f_o = 1, \quad f_w(S_w) = \frac{\frac{K_{rw}}{\mu_w}}{\frac{K_{rw}}{\mu_w} + \frac{K_{ro}}{\mu_o}}, \quad (4.2)$$

onde  $\mu_w$  e  $\mu_o$  são viscosidades constantes, dadas na Tabela 4.1. As permeabilidades relativas da fase aquosa  $K_{rw}$  e da fase oleica  $K_{ro}$  são funções de  $S_w$ , veja Figura 4.1:

$$K_{rw}(S_w) = \begin{cases} 0, & S_w < S_{wc}, \\ \left( \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^2, & S_{wc} < S_w \leq 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$K_{ro}(S_w) = \begin{cases} 0, & S_w \geq 1 - S_{or}, \\ \left( \frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right)^2, & 0 \leq S_w \leq 1 - S_{or}, \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $S_{wc}$  e  $S_{or}$  são constantes que representam a saturação de água conata e a saturação do óleo residual respectivamente. Estas constantes são dadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores constantes para os parâmetros.

Símbolo	Descrição	Valor	Fonte
$S_{wc}$	Saturação de água conata	0.0	[1]
$S_{or}$	Saturação de óleo residual	0.15	[1]
$\mu_w$	Viscosidade da fase água	1	[1]
$\mu_o$	Viscosidade da fase óleo	2	[1]
$S_w^+$	Saturação de água no ponto inicial	0.75	
$f_w(S_w^+)$	Fluxo fracionário avaliado em $S_w^+$	0.9911894273	Eq.(4.2)

Consideramos o Sistema (4.1) com a seguinte condição inicial

$$S_w(x, 0) = \begin{cases} S_w^-, & x < 0, \\ S_w^+, & x > 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad C_{so}(x, 0) = \begin{cases} C_{so}^-, & x < 0, \\ C_{so}^+, & x > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

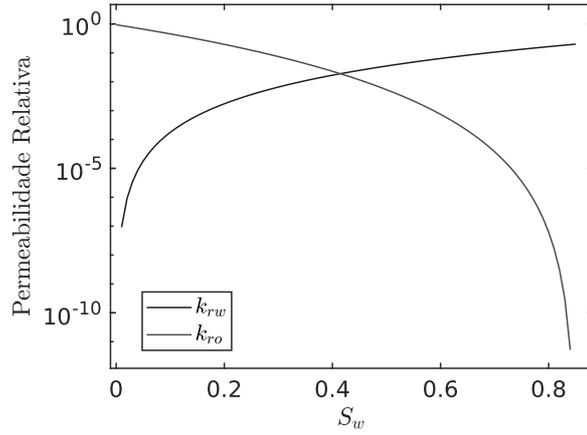


Figura 4.1 – Gráfico semi-log das curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo, conforme Eqs. (4.3) e (4.4).

onde  $U^- = (S_w^-, C_{so}^-)$  é o estado menos e  $U^+ = (S_w^+, C_{so}^+)$  é o estado mais.

O Sistema (4.1) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{\epsilon \partial^2 S_w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(C_{so}(1 - S_w)) + \frac{\partial}{\partial x}(C_{so}(1 - f_w)) = \frac{\epsilon \partial^2 C_{so}}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Em seguida é feita uma mudança de variáveis  $(x, t)$  para coordenadas viajantes  $(\xi = x - vt, t)$ , onde  $v$  representa a velocidade da onda viajante, ver Seção 2.2. Logo o Sistema (4.6) fica:

$$\begin{cases} -v \frac{dS_w}{d\xi} + \frac{df_w}{d\xi} = \epsilon \frac{d^2 S_w}{d\xi^2}, \\ -v \frac{d}{d\xi}(C_{so}(1 - S_w)) + \frac{d}{d\xi}(C_{so}(1 - f_w)) = \epsilon \frac{d^2 C_{so}}{d\xi^2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Os estados menos e mais correspondem aos seguintes equilíbrios esquerdo e direito:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U^-, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U^+. \quad (4.8)$$

Finalmente, integrando cada equação do Sistema (4.7) com respeito a  $\xi$ , obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon}(-vS_w + f_w + c_1) = \frac{dS_w}{d\xi}, \\ \frac{1}{\epsilon}(-vC_{so}(1 - S_w) + C_{so}(1 - f_w) + c_2) = \frac{dC_{so}}{d\xi}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Neste trabalho supomos conhecido o equilíbrio direito  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , então podemos escrever as constantes  $c_1$  e  $c_2$  em função desse equilíbrio. Aplicamos o limite à primeira equação do Sistema (4.9) e obtemos:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty^+} (-vS_w + f_w + c_1) = \lim_{\xi \rightarrow \infty^+} \left( \frac{dS_w}{d\xi} \right) \implies c_1 = vS_w^+ - f_w^+, \text{ uma vez que } \lim_{\xi \rightarrow \infty^+} \left( \frac{dS_w}{d\xi} \right) = 0.$$

De forma análoga aplicamos o limite à segunda equação do Sistema (4.9):

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty^+} (-vC_{so}(1-S_w) + C_{so}(1-f_w) + c_2) = \lim_{\xi \rightarrow \infty^+} \left( \frac{dC_{so}}{d\xi} \right) \implies c_2 = vC_{so}^+(1-S_w^+) - C_{so}^+(1-f_w^+).$$

**Observação 4.1.** A notação  $f_w^+$  indica: fluxo fracionário de água avaliado em  $S_w^+$ ,  $f_w(S_w^+)$ . Mais adiante usaremos similar notação para representar  $f_w(S_w^-)$  como  $f_w^-$ .

Substituindo os valores  $c_1$  e  $c_2$  no Sistema (4.9) obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\xi} = (f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)) / \epsilon, \\ \frac{dC_{so}}{d\xi} = ((1 - f_w)C_{so} - (1 - f_w^+)C_{so}^+ - v((1 - S_w)C_{so} - (1 - S_w^+)C_{so}^+)) / \epsilon. \end{cases} \quad (4.10)$$

Na seção seguinte localizamos os pontos de equilíbrio de (4.10), considerando o equilíbrio direito conhecido.

#### 4.1 LOCALIZAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

Para localizar os pontos de equilíbrio do Sistema (4.10) estudaremos os zeros do campo vetorial associado:

$$\frac{dS_w}{d\xi} = 0, \quad \frac{dC_{so}}{d\xi} = 0, \quad (4.11)$$

Substituímos (4.11) em (4.10), obtemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{\epsilon} (f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)) = 0, \\ \frac{1}{\epsilon} ((1 - f_w)C_{so} - (1 - f_w^+)C_{so}^+ - v((1 - S_w)C_{so} - (1 - S_w^+)C_{so}^+)) = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

onde  $v$  representa a velocidade da onda viajante

$$v = \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-}. \quad (4.13)$$

Observe que a primeira equação do Sistema (4.12) só depende de  $S_w$ , enquanto na segunda equação as incógnitas são  $S_w$  e  $C_{so}$ . Podemos denotar a primeira e segunda função de (4.12) como:

$$F_1(U) = \frac{1}{\epsilon} (f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)), \quad (4.14)$$

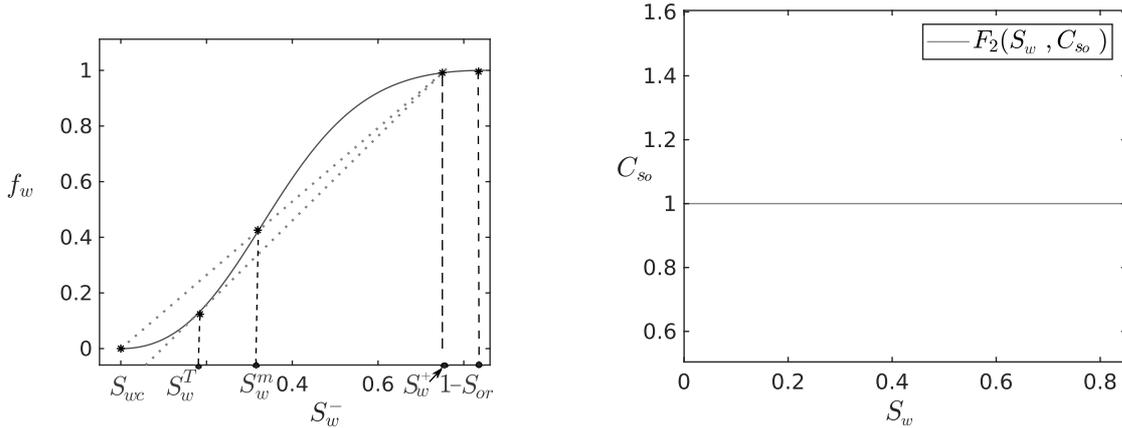
$$F_2(U) = \frac{1}{\epsilon} ((1 - f_w)C_{so} - (1 - f_w^+)C_{so}^+ - v((1 - S_w)C_{so} - (1 - S_w^+)C_{so}^+)), \quad (4.15)$$

com  $U = (S_w, C_{so})$ . Observa-se que para cada  $S_w^-$  tem-se um valor diferente para  $v$ . Logo, substituindo  $v$  na segunda equação de (4.12) obtém-se:

$$(1 - f_w)C_{so} - (1 - f_w^+)C_{so}^+ - \left( \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-} \right) ((1 - S_w)C_{so} - (1 - S_w^+)C_{so}^+) = 0. \quad (4.16)$$

Usando os valores dados na Tabela 4.1, pode ser obtido a curva de nível de  $F_2(S_w, C_{so}) = 0$ , como é visto na Figura 4.2b. Daqui podemos obter as seguintes conclusões:

- Os pontos de equilíbrio  $(S_w, C_{so})$  encontram-se sobre a reta mostrada na Figura 4.2b.
- As segundas componentes dos pontos de equilíbrio devem ser iguais a 1.



(a) Fluxo fracionário da água (cor vermelha) intersectado por duas retas pontilhadas (cor laranja).

(b) Curva de nível  $F_2(S_w, C_{so}) = 0$ , com  $v$  dado por (4.13), ao longo da qual estão os equilíbrios do Sistema (4.12).

Figura 4.2 – Os equilíbrios do Sistema (4.12), com  $S_w^+ = 0.75$ . O ponto  $(S_w^T, f_w(S_w^T))$  é a interseção entre  $f_w$  e a linha tangente a  $f_w$  que passa por  $(S_w^+, f_w^+)$ . O ponto  $(S_w^m, f_w(S_w^m))$  indica a interseção entre  $f_w$  e a linha que conecta os pontos  $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$  e  $(S_w^+, f_w^+)$ .

Até agora temos informação sobre a segunda componente do ponto de equilíbrio,  $C_{so}$ . Para ter informação sobre  $S_w$ , olhamos para a primeira equação do Sistema (4.12). Como  $\epsilon \neq 0$  podemos reescrever esta equação como

$$f_w = vS_w + (f_w^+ - vS_w^+). \quad (4.17)$$

Esta equação representa os pontos de interseção de uma reta de inclinação  $v$  com a curva de fluxo fracionário da água nos pontos  $(S_w^+, f_w^+)$  e  $(S_w, f_w)$ , veja Figura 4.2a. Nesta figura mostra-se, que dependendo do valor de  $S_w$ , a reta (4.17) pode intersectar a curva do fluxo fracionário de água até em três pontos.

## 4.2 NÚMERO DE PONTOS DE EQUILÍBRIO

Já sabemos que se  $(S_w, C_{so})$  é equilíbrio de (4.12), logo  $C_{so} = 1$ . Para identificar os possíveis equilíbrios estudaremos a primeira componente do campo (4.12).

Na Equação (4.17), a reta  $y = vS_w + (f_w^+ - vS_w^+)$  tem uma inclinação  $v$  que depende de  $S_w^-$ , veja Equação (4.13). A variação de  $v$  cria um leque de retas que intersectam a função do fluxo fracionário da água. Por exemplo, na Figura 4.2a tem-se duas retas pontilhadas

(cor laranja) que intersecta  $f_w$ . Uma das retas tem inclinação  $(f_w(S_w^+) - f_w(S_w^T))/(S_w^+ - S_w^T)$  e é tangente à curva de fluxo fracionário da água no ponto  $S_w^T$ . Enquanto a outra reta passa pela origem e o ponto  $(S_w^+, f_w(S_w^+))$  intersectando a curva  $f_w$  em 3 pontos:  $(S_{wc}, f_w(S_{wc}))$ ,  $(S_w^m, f_w(S_w^m))$ ,  $(S_w^+, f_w(S_w^+))$ .

O valor de  $S_w^T$  pode ser calculado numericamente com a seguinte equação:

$$\frac{\partial f_w(S_w^T)}{\partial S_w} = \frac{f_w(S_w^+) - f_w(S_w^T)}{S_w^+ - S_w^T}. \quad (4.18)$$

Entretanto, o valor de  $S_w^m$  obtém-se calculando:

$$f_w(S_w^m) = \theta_2 S_w^m, \quad (4.19)$$

onde  $\theta_2$  é a inclinação da reta que passa pela origem e pelo ponto  $(S_w^+, f_w^+)$ , veja Figura 4.2a. Com isso demonstramos a seguinte proposição.

**Proposição 4.1.** *A reta  $y = vS_w + (f_w^+ - vS_w^+)$  da Equação (4.17) pode intersectar a curva do fluxo fracionário da água em dois ou três pontos de equilíbrio.*

- I Se  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}]$ , existem dois pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  e  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .*
- II Se  $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+]$ , existem dois pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  e  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .*
- III Se  $S_w^- \in [S_w^T, S_w^m]$  existem três pontos de equilíbrio:  $(S_w^e, C_{so}^e)$ ,  $(S_w^-, C_{so}^-)$ ,  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , tal que  $S_w^e < S_w^- < S_w^+$  e  $S_w^e \in [S_{wc}, S_w^T[$ .*
- IV Se  $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^T[$  existem três pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$ ,  $(S_w^e, C_{so}^e)$ ,  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , tal que  $S_w^- < S_w^e < S_w^+$  e  $S_w^e \in ]S_w^T, S_w^m]$ .*

**Observação 4.2.** *Note que a Proposição 4.1 funciona para qualquer função de fluxo fracionário em forma da letra S, como na Figura 4.2a.*

Daqui em diante chamamos aos pontos:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  ponto de equilíbrio esquerdo,  $(S_w^+, C_{so}^+)$  ponto de equilíbrio direito e  $(S_w^e, C_{so}^e)$  ponto de equilíbrio extra.

#### 4.2.1 Considerando $S_w^+, C_{so}^+$ fixo

Neste trabalho apenas consideramos as permeabilidades relativas quadráticas (veja equações (4.3) e (4.4)) e  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ . Usando os valores dados na Tabela 4.1 obtemos o conjunto solução da Equação (4.18):

$$S_1 = \left\{ S_w^+, \frac{51}{52} + \frac{17}{780} \sqrt{1362}, \frac{51}{52} - \frac{17}{780} \sqrt{1362} \right\}. \quad (4.20)$$

Como  $S_w^T \in [0, 1]$  e queremos  $S_w^T \neq S_w^+$  então:

$$S_w^T = \frac{51}{52} - \frac{17}{780} \sqrt{1362} \approx 0.1764. \quad (4.21)$$

De forma análoga, usando (4.19) obtemos :

$$S_2 = \left\{ 0, \frac{289}{900}, S_w^+ \right\}. \quad (4.22)$$

Como o valor da abscissa do ponto de equilíbrio direito é  $S_w^+$  e  $S_{wc} = 0$ , podemos concluir que

$$S_w^m = \frac{289}{900} \approx 0.3211. \quad (4.23)$$

Agora que conhecemos os valores aproximados para  $S_w^m$  e  $S_w^T$ , podemos reescrever a Proposição 4.1 de forma particular.

**Observação 4.3.** *Seja o Sistema (4.10) com  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ , tem-se:*

*I Se  $S_w^- \in ]0.75, 0.85]$ , existem dois pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  e  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .*

*II Se  $S_w^- \in ]0.32, 0.75]$ , existem dois pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$  e  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .*

*III Se  $S_w^- \in ]0.17, 0.32]$  existem três pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$ ,  $(S_w^+, C_{so}^+)$  e  $(S_w^e, C_{so}^e)$ .  
Tal que  $S_w^e < S_w^- < S_w^+$  e  $S_w^m$  e tem-se  $S_w^e \in [0, 0.17]$ .*

*IV Se  $S_w^- \in [0, 0.17]$  existem três pontos de equilíbrio:  $(S_w^-, C_{so}^-)$ ,  $(S_w^+, C_{so}^+)$  e  $(S_w^e, C_{so}^e)$ .  
Eles satisfazem  $S_w^- < S_w^e < S_w^+$ , e, além disso,  $S_w^e \in ]0.17, 0.32]$ .*

### 4.3 CLASSIFICAÇÃO DOS PONTOS DE EQUILÍBRIO

Na seção anterior determinamos o número de pontos de equilíbrio que tem o Sistema (4.10) dependendo da posição de  $S_w^-$ . Nesta seção os classificamos nas vizinhanças correspondentes com base no Teorema (de Hartman-Grobman) 2.1.

Considere o Sistema (4.10) linearizado:

$$U' = J(U_0)U, \quad (4.24)$$

onde  $U = (S_w, C_{so})^T$  e  $J(U_0)$  é a matriz jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio  $U_0 = (S_{w_0}, C_{so_0})$ . A matriz Jacobiana avaliada em  $U = (S_w, C_{so})^T$  é:

$$J(U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v \right) & 0 \\ \frac{1}{\epsilon} \left( -C_{so} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} + v C_{so} \right) & \frac{1}{\epsilon} (-v(1 - S_w) + 1 - f_w) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Os autovalores de (4.25) são obtidos calculando as raízes de  $\det(J(U) - \lambda I) = 0$ . Dado que  $J(U)$  é uma matriz triangular inferior, as raízes são:

$$\lambda_p = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v \right) \quad \text{e} \quad \lambda_q = \frac{1}{\epsilon} (-v(1 - S_w) + 1 - f_w), \quad (4.26)$$

e os autovetores correspondentes:

$$\omega_p = [a \ 1], \quad \omega_q = [0 \ 1], \quad \text{onde, } a = \epsilon(\lambda_q - \lambda_p)/(-C_{so}\lambda_p). \quad (4.27)$$

No que segue os super-índices  $(-)$  e  $(+)$  denotam as autofunções associadas aos pontos de equilíbrio esquerdo e direito respectivamente. As autofunções são definidas como:

$$\begin{cases} \lambda_p^\mp = \lambda_p(S_w^\mp, C_{so}^\mp) = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial f_w(S_w^\mp)}{\partial S_w} - v \right), \\ \lambda_q^\mp = \lambda_q(S_w^\mp, C_{so}^\mp) = \frac{1}{\epsilon} (1 - f_w(S_w^\mp) - v(1 - S_w^\mp)). \end{cases} \quad (4.28)$$

#### 4.3.1 Considerando $(S_w^+, C_{so}^+)$ fixo

Seja  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$  e substituindo os valores dados na Tabela 4.1, as funções dadas em (4.28) são definidas como:

$$\lambda_p^- = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1700 (15600(S_w^-)^2 - 30600S_w^- + 4913)(4S_w^- - 3)}{227 (1200(S_w^-)^2 - 680S_w^- + 289)^2} \right), \quad (4.29)$$

$$\lambda_q^- = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{2400(S_w^-)^2 + 20740S_w^- - 21097}{227(1200(S_w^-)^2 - 680S_w^- + 289)} \right), \quad (4.30)$$

$$\lambda_p^+ = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1700 (1800S_w^- - 3281)(4S_w^- - 3)}{51529 (1200(S_w^-)^2 - 680S_w^- + 289)} \right), \quad (4.31)$$

$$\lambda_q^+ = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{2 (1200(S_w^-)^2 + 4520S_w^- - 4811)}{227 (1200(S_w^-)^2 - 680S_w^- + 289)} \right), \quad (4.32)$$

onde os gráficos das mesmas estão dados nas Figuras 4.3a e 4.3b. Usando  $C.S_p^\mp$  para denotar os conjuntos solução de  $\lambda_p^\mp = 0$  e usando  $C.S_q^\mp$  como notação para os conjuntos solução de  $\lambda_q^\mp = 0$ , os zeros das equações (4.29), (4.30), (4.31) e (4.32) são:

$$C.S_p^- = \left\{ \frac{3}{4}, \quad \frac{51}{52} + \frac{17}{780}\sqrt{1362}, \quad \frac{51}{52} - \frac{17}{780}\sqrt{1362} = S_w^T \right\}, \quad (4.33)$$

$$C.S_q^- = \left\{ \frac{-1037}{240} + \frac{17}{240}\sqrt{5473}, \quad -1037240 - \frac{17}{240}\sqrt{5473} \right\}, \quad (4.34)$$

$$C.S_q^+ = \left\{ \frac{-113}{60} + \frac{1}{60}\sqrt{27202}, \quad \frac{-113}{60} - \frac{1}{60}\sqrt{27202} \right\}, \quad (4.35)$$

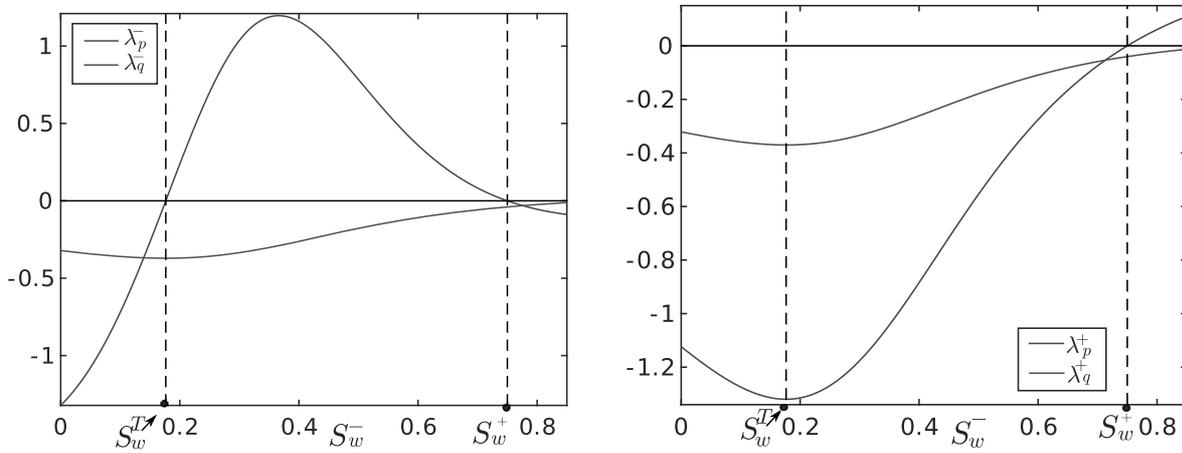
$$C.S_p^+ = \left\{ -\frac{3281}{1800}, \quad \frac{3}{4} \right\}. \quad (4.36)$$

Com as raízes obtidas podemos determinar os intervalos onde estas funções mudam de sinal e com isso determinaremos o comportamento dos pontos de equilíbrio.

**Observação 4.4.** *Note que ao calcular  $\lambda_p^\mp = 0$  e  $\lambda_q^\mp = 0$ , o valor de  $\epsilon$  não influencia no sinal das autofunções.*

Na Figura 4.3a é possível classificar o ponto de equilíbrio esquerdo observando a mudança de sinal das autofunções associadas ao mesmo  $(\lambda_{p,q}^-)$ , veja Seção 2.3. Da análise feita pode ser concluído que:

- Se  $S_w^- \in ]S_{wc}, S_w^T[$  e  $S_w^+ = 0.75$  então  $\lambda_p^- < 0$  e  $\lambda_q^- < 0$ , com isto concluímos que o equilíbrio esquerdo é um atrator hiperbólico. Não há possibilidade de haver conexão de  $U^-$  para  $U^+$ .
- Se  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$  e  $S_w^+ = 0.75$  então  $\lambda_p^- > 0$  e  $\lambda_q^- < 0$ , com isto concluímos que o equilíbrio esquerdo é uma sela hiperbólica. Há possibilidade de haver conexão de  $U^-$  para  $U^+$ .
- Se  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}[$  e  $S_w^+ = 0.75$  então  $\lambda_p^- < 0$  e  $\lambda_q^- < 0$ , com isto concluímos que o equilíbrio esquerdo é um atrator hiperbólico. Não há possibilidade de haver conexão de  $U^-$  para  $U^+$ .



(a) Autofunções dos autovalores associados ao equilíbrio esquerdo ( $S_w^-, C_{so}^-$ ).

(b) Autofunções dos autovalores associados ao equilíbrio direito ( $S_w^+, C_{so}^+$ ).

Figura 4.3 – Classificação dos pontos de equilíbrio considerando  $S_w^+ = 0.75$ .

Analogamente pode ser feita a classificação do ponto de equilíbrio direito, ver Figura 4.3b. Para fazer esta classificação é observada a mudança de sinal das autofunções  $\lambda_{p,q}^+$ , concluindo:

- Se  $S_w^- \in ]S_{wc}, S_w^T[$  e  $S_w^+ = 0.75$  então  $\lambda_p^+ < 0$  e  $\lambda_q^+ < 0$ , com isto concluímos que o equilíbrio direito é um atrator hiperbólico.
- Se  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$  e  $S_w^+ = 0.75$  então  $\lambda_p^+ < 0$  e  $\lambda_q^+ < 0$ , com isto concluímos que o equilíbrio direito é um atrator hiperbólico.
- Se  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}[$  e  $S_w^+ = 0.75$  então  $\lambda_p^+ > 0$  e  $\lambda_q^+ < 0$ , com isto concluímos que o equilíbrio direito é uma sela hiperbólica.

Em todos os três casos de  $U^+$  acima, há pelo menos uma direção atratora, dando possibilidade de conexão de órbita heteroclínica de  $U^-$  para  $U^+$ , para o segundo caso de  $U^-$ .

A análise feita anteriormente junto com o Teorema de Hartman-Grobman prova o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.** *Seja o Sistema de EDOs (4.10) com  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$  e considerando as autofunções  $(\lambda_p^\mp, \lambda_q^\mp)$  descritas nas equações (4.29), (4.30), (4.31) e (4.32). Considerando  $S_w^T$  dado pela Equação (4.18), os pontos de equilíbrio deste sistema podem classificar-se como segue:*

- Se  $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^T[$ , têm-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio esquerdo e o equilíbrio direito são dois atratores hiperbólicos, enquanto o equilíbrio extra é uma sela hiperbólica (não há possibilidade de conexão).
- $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^m]$ , têm-se três pontos de equilíbrio: o equilíbrio esquerdo é uma sela hiperbólica, o equilíbrio direito é um atrator hiperbólico e o equilíbrio extra é um atrator hiperbólico.
- $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+[$ , têm-se dois pontos de equilíbrio: o equilíbrio esquerdo é uma sela hiperbólica e o equilíbrio direito é um atrator hiperbólico.
- Se  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}[$ , têm-se dois pontos de equilíbrio: o equilíbrio esquerdo é um atrator hiperbólico e o equilíbrio direito é uma sela hiperbólica (não há possibilidade de conexão).

**Observação 4.5.** *As equações (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) estão bem definidas pois  $\epsilon \neq 0$  e discriminante de  $(1200S_w^2 - 680S_w + 289)$  é negativo para  $S_{wc} < S_w < 1 - S_{or}$ .*

O intervalo de  $S_w^-$  com regiões *I*, *II* e *III*, na Figura 4.4 mostra onde pode existir solução (cor azul) ou não existe solução (cor vermelha) na forma de ondas viajantes para o Sistema EDPs (4.1) considerando  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ .



Figura 4.4 – Possíveis estados  $S_w^-$  indicando as regiões onde existe solução (cor azul) e não existe solução (cor vermelha) do tipo de ondas viajantes.

**Observação 4.6.** *Considerando fluxo fracionário da água como em (4.2),  $v$  como em (4.13) e escolhendo um valor para  $S_w^- = S_{w0}^-$ . Escreve-se a primeira equação do Sistema (4.12) como:*

$$F_1(S_w, C_{so}) = \frac{\overbrace{1700(4S_w - 3)}^{(A)} \overbrace{(15600S_w S_{w0}^- - 15300S_w - 15300S_{w0}^- + 4913)}^{(B)} \overbrace{(S_w - S_{w0}^-)}^{(C)}}{(272400S_{w0}^{-2} - 154360S_{w0}^- + 65603)(1200S_w^2 - 680S_w + 289)}. \quad (4.37)$$

A função  $F_1(S_w, C_{so})$  é uma função racional onde o denominador é positivo  $\forall S_w, S_{w0}^-$ . Logo o sinal de  $F_1(S_w, C_{so})$  dependerá do sinal de seu numerador. Esta análise será feita considerando  $S_w, S_{w0}^- \in ]S_w^T, S_w^+[$ .

- Se  $S_w < S_{w0}^-$  então  $F_1(S_w, C_{so}) < 0$ . Pois neste caso os termos da Equação (4.37) eles satisfazem:  $(A) < 0$ ,  $(B) < 0$  e  $(C) < 0$ .
- $S_w > S_{w0}^-$  então  $F_1(S_w, C_{so}) > 0$ . Pois neste caso os termos da Equação (4.37) eles satisfazem:  $(A) < 0$ ,  $(B) < 0$  e  $(C) > 0$ .
- Portanto, se  $S_w = S_{w0}^-$  tem-se  $F_1(S_w, C_{so}) = 0$  e  $S_{w0}^-$  é uma raiz de  $F_1(S_w, C_{so})$ . Então a reta vertical que passa pelo ponto  $(S_w^-, C_{so}^-)$  é uma variedade invariante. De forma análoga  $S_w = S_{w0}^+$  tem-se  $F_1(S_w, C_{so}) = 0$  e  $S_{w0}^+$  também é uma raiz de  $F_1(S_w, C_{so})$ , logo a reta vertical que passa pelo ponto  $(S_w^+, C_{so}^+)$  é uma variedade invariante.

Veja Figura 4.5 para um exemplo com  $S_w^- = 0.39$ .

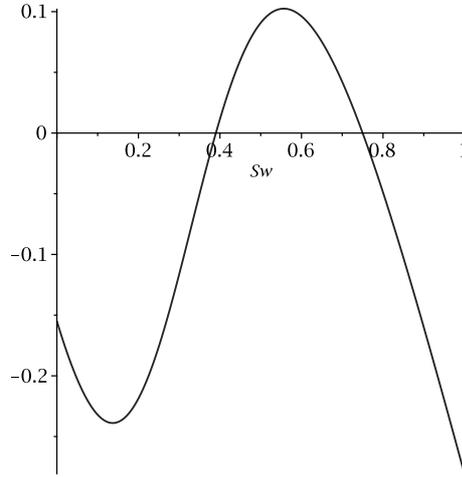


Figura 4.5 – Gráfico de  $F_1(S_w, C_{so})$  considerando  $(S_w^-, C_{so}^-) = (0.39, 1)$ .

As autofunções  $\lambda_q^\mp$  têm sinal negativo quando  $S_{wc} < S_w^- < 1 - S_{or}$ , veja Figuras 4.3a e 4.3b. Em (4.27),  $(0, 1)$  é o autovetor correspondente a ambos  $\lambda_q^\mp$ . Pelo Teorema (da Variedade Estável) 2.2, para um ponto fixo perto dos pontos de equilíbrio existe uma variedade estável local  $U_{loc}^s(L)$  tangente a  $E^s = \text{gen}\{(0, 1)\}$  com  $\dim U_{loc}^s(L) = \dim E^s$ . Como  $E^s$  sai tangencialmente na direção  $(0, 1)$  e dado que a reta  $(0, 1)$  é invariante então  $U_{loc}^s(L)$  é a uma reta vertical que passa pelo ponto  $(S_w^-, C_{so}^-)$ .

**Teorema 4.2.** Seja o Sistema (4.10) com  $v$  definido em (4.13),  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ ,  $C_{so}^- = 1$  e  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$ , onde  $S_w^T$  é como em (4.18). Com os valores de parâmetros dados na Tabela 4.1, existe a solução deste sistema  $(S_w(t), C_{so}(t))$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (S_w(t), C_{so}(t)) = (S_w^-, 1)$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_w(t), C_{so}(t)) = (0.75, 1)$ .

**Demonstração.** Se  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$  tem-se duas possibilidades: ou  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^m]$ , ou  $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+[$ , ver Figura 4.4.

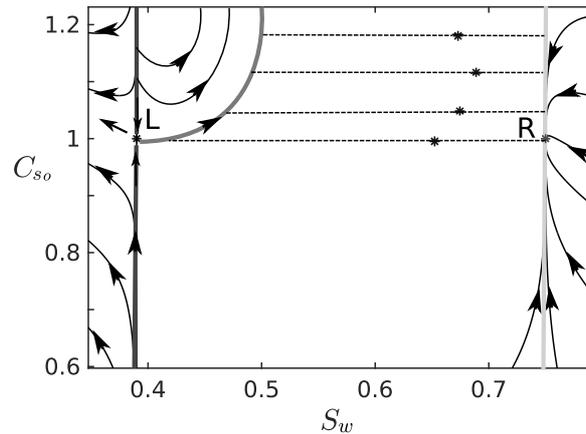


Figura 4.6 – Espaço de Fase de (4.10). As retas vermelha e amarela indicam as variedades invariantes de  $L$  e  $R$ , respectivamente. Estamos supondo que a variedade instável de  $L$  (cor verde) explode na direção positiva de  $C_{so}$ . Os pontos asteriscos indicam pontos do conjunto  $S_1$ .

a) Se  $S_w^- \in ]S_w^m, S_w^+[$ , pelo Teorema 4.1 existem dois pontos de equilíbrio, sendo o equilíbrio esquerdo ( $L$ ) uma sela hiperbólica e o equilíbrio direito ( $R$ ) um atrator hiperbólico.

Como  $L$  é uma sela hiperbólica,  $L$  tem duas variedades invariantes. Pela Observação 4.6 a variedade estável de  $L$  é uma reta vermelha como indicado na Figura 4.6. A reta vertical que passa pelo equilíbrio  $R$  é uma variedade invariante, veja a reta amarela na Figura 4.6 junto com a Observação 4.6. Portanto, as retas verticais passando pelos pontos  $L$  e  $R$  são variedades invariantes. Isto implica que a região entre elas  $\Omega = \{(S_w, C_{so}), \text{t.q. } S_w^- < S_w < S_w^+\}$  é um conjunto invariante pelo Sistema (4.10). Além disso, pelo Teorema 4.1, não há outros equilíbrios nessa região.

Suponhamos, por absurdo, que não exista uma órbita que ligue  $L$  a  $R$  como no enunciado do teorema. Parte da variedade instável de  $L$  fica à direita de  $L$  como indicado em verde na Figura 4.6. Esta variedade, que chamamos  $U^u(L)$ , é uma órbita do Sistema (4.10). Sem perda de generalidade suponhamos que esta órbita cresce na direção positiva de  $C_{so}$  quando varia  $\xi$ , veja Figura 4.6.

Para todos os pontos  $(S_w^+, C_{so})$  com  $C_{so}$  positivo, podemos traçar o menor segmento de reta horizontal que junta  $U^u(L)$  à reta  $S_w = S_w^+$ . Note que o campo vertical no extremo esquerdo deste segmento é positivo, enquanto que no extremo direito é negativo. Pelo Teorema de Valor Médio, existe ao menos um ponto neste segmento horizontal tal que o campo vertical nele é nulo. Com isso mostramos que o conjunto de todos os pontos da região  $\Omega$  com o campo vertical nulo não é limitado na direção positiva de  $C_{so}$ .

Por outro lado, o conjunto de todos os pontos da região  $\Omega$  com o campo vertical nulo coincide com o conjunto de todos os zeros da Equação (4.15). Substituindo (4.2)

(considerando (4.3) e (4.4)) em (4.15), com os valores dados na Tabela 4.1 tem-se:

$$F_2(S_w, C_{so}) = \frac{a_1 C_{so} S_w^2 + a_2 C_{so} S_w + a_3 C_{so} + a_4 C_{so} S_w^3 + a_5 S_w^2 + a_6 S_w + a_7}{a_8 S_w^2 + a_9 S_w + a_{10}}, \quad (4.38)$$

onde  $a_1 = -19616/9251$ ,  $a_2 = 9123/18223$ ,  $a_3 = -6097/146669$ ,  $a_4 = 36503/21824$ ,  $a_5 = 13831/34156$ ,  $a_6 = -4070/17737$ ,  $a_7 = 6919/70948$ ,  $a_8 = 3/2$ ,  $a_9 = -17/20$  e  $a_{10} = 289/800$ .

A função  $F_2(S_w, C_{so})$  é uma função racional com denominador

$$a_8 S_w^2 + a_9 S_w + a_{10} \neq 0 \quad (4.39)$$

para  $S_w \in [S_{wc}, 1 - S_{or}]$ , em particular (4.39) se satisfaz para  $S_w \in ]S_w^m, S_w^+[$ . O numerador e o denominador de  $F_2(S_w, C_{so})$  são diferenciáveis, logo  $F_2(S_w, C_{so})$  é diferenciável em  $\Omega$ . Conclui-se que o campo  $F(S_w, C_{so})$  é diferenciável em  $\Omega$ , pois a  $F_1(S_w, C_{so})$  também é diferenciável em  $\Omega$ , veja Equação (4.14).

Da Equação (4.38) tem-se  $C_{so}$  como função explícita de  $S_w$ :

$$C_{so}(S_w) = -\frac{b_1 S_w^2 - b_2 S_w + b_3}{b_4 S_w^3 - b_5 S_w^2 + b_6 S_w - b_7}, \quad (4.40)$$

onde

$$b_1 = 3008585173248393358720144,$$

$$b_2 = 1704864931916219535059840,$$

$$b_3 = 724567596064393302400432,$$

$$b_4 = 12427104201525073933721143,$$

$$b_5 = 15754241782155668177557504,$$

$$b_6 = 3719576833609197132078144,$$

$$b_7 = 308854261883395969412672,$$

e  $b_4 S_w^3 - b_5 S_w^2 + b_6 S_w - b_7 \neq 0$  para  $S_w \in \Omega$ .

A função  $C_{so}(S_w)$  representa a curva de nível  $c_2$  de  $F_2(S_w, C_{so}) = 0$ . O gráfico  $c_2$  é uma curva limitada, dado que  $c_2$  é contínua definida num intervalo compacto. Isto é uma contradição, pois tínhamos construído um subconjunto ilimitado de  $c_2$ . Portanto, existe a órbita que liga  $L$  a  $R$ .

b) Se  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^m]$ , pelo Teorema 4.1 tem-se três pontos de equilíbrios: o equilíbrio esquerdo ( $L$ ) é uma sela hiperbólica, o equilíbrio direito ( $R$ ) é um atrator hiperbólico e o equilíbrio extra ( $E$ ) é um atrator hiperbólico. Também sabemos que se satisfaz a seguinte relação de ordem para as abscissas dos pontos de equilíbrio,  $S_w^e < S_w^T < S_w^- < S_w^+$ .

Dado que a variedade estável de  $L$  é uma reta vertical (veja reta vermelha na Figura 4.6 junto com a Observação 4.6) que divide o retrato de fase em duas regiões: à esquerda

e à direita dessa reta. O equilíbrio extra fica na região à esquerda da reta. Como esta reta é uma variedade estável logo, pelo Teorema 2.3, nenhuma órbita passa pelas duas regiões. Portanto o ponto de equilíbrio extra não influencia no estudo da existência de órbita conectando  $L$  a  $R$ . Logo pela parte a) garantimos a existência da órbita heteroclínica conectando  $L$  a  $R$ .  $\square$

Com os Teoremas 4.1 e 4.2 é demonstrado o seguinte corolário:

**Corolário 4.1.** *Seja o Sistema (4.10) com  $v$  definido em (4.13),  $(S_w^+, C_{so}^+) = (0.75, 1)$ ,  $C_{so}^- = 1$  e  $S_w^- \notin ]S_w^T, S_w^+[$ , onde  $S_w^T$  é como em (4.18). Com os valores de parâmetros dados na Tabela 4.1, não existe a solução  $(S_w(t), C_{so}(t))$  do Sistema (4.10), tal que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (S_w(t), C_{so}(t)) = (S_w^-, 1)$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_w(t), C_{so}(t)) = (0.75, 1)$ .*

**Teorema 4.3.** *Seja o Sistema de EDPs (4.1) com condições iniciais*

$$\begin{cases} U^- = (S_w^-, 1), & x < 0, \\ U^+ = (0.75, 1), & x > 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

*Com os valores de parâmetros dados na Tabela 4.1, existe solução na forma de ondas viajantes para o Problema de Riemann (4.1), (4.41), se e somente se,  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$  e  $S_w^T$  é como (4.18).*

**Demonstração.**  $\Leftarrow$ ) Ao transformar o Sistema de EDPs (4.1) no Sistema de EDOs (4.10) (como feito no início deste capítulo), pelo Teorema 4.2 existe uma órbita que liga o equilíbrio esquerdo ao equilíbrio direito, concluindo que para o Problema de Riemann (4.1), (4.41) existe uma solução na forma de ondas viajantes.

$\Rightarrow$ ) Provar a ida equivale a provar que o Problema de Riemann (4.1), (4.41), com  $S_w^- \notin ]S_w^T, 0.75[$  não tem solução na forma de ondas viajantes com velocidade  $v$ . Isto segue diretamente do Corolário 4.1.  $\square$

Do teorema acima segue que as ondas de choque do Sistema (4.1) sem termos difusivos satisfazem a condição de entropia de viscosidade, veja Seções 2.1.2 e 2.1.4.

#### 4.4 COMPARAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção verificamos se os resultados obtidos nas seções 4.1, 4.2 e 4.3 são válidos para o Exemplo 4.1. Nele os pontos de equilíbrio esquerdo e direito são conhecidos e serão usados o algoritmo ode45 (método do MATLAB para resolver EDO's) e o código RCD [15].

As simulações que são obtidas usando ode45 representam a solução de uma EDO da forma  $x' = f(t, x)$ . Estas soluções serão consideradas como “soluções verdadeiras”.

Entende-se este termo como as soluções que têm uma precisão suficientemente boa e podem ser consideradas como uma solução obtida analiticamente. Este algoritmo é de um passo: ao calcular  $x(t_n)$  só se precisa da solução no ponto de tempo imediatamente anterior,  $x(t_{n-1})$  [40],[41].

Os resultados obtidos com ode45 serão comparados com os resultados obtidos com RCD. O RCD é um pacote de rotinas estruturado em  $C++$ , que fornece meios de resolver numericamente sistemas de equações de balanço não lineares via o Método Crank- Nicolson de diferenças finitas. No arquivo de entrada do RCD, são especificados os parâmetros, o número de pontos usados, tempo final, entre outros dados. O próprio RCD determina os passos de tempo de forma adaptativa, para mais detalhes, veja [15].

**Exemplo 4.1.** *Seja o Sistema de EDPs (4.1) com condições iniciais*

$$\begin{cases} U^- = (0.39, 1), & x < 0, \\ U^+ = (0.75, 1), & x > 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

*Vamos mostrar que este problema de Riemann possui solução na forma de ondas viajantes.*

Define-se a variável  $\xi = (x - vt)$ , chamada de variável viajante, para transformar o Sistema EDPs (4.1) no Sistema EDOs (4.10). Obtemos os pontos de equilíbrio de (4.10) e os classificamos. Em seguida, deve ser provado que existe uma órbita que liga os pontos de equilíbrio, veja seções 2.2, 4.1, 4.2 e 4.3.

Na Condição Inicial (4.42), os estados  $U^-$  e  $U^+$  se relacionam com os pontos de equilíbrio correspondentes ao Sistema (4.12). Ao classificar estes pontos de equilíbrio usando o Teorema 4.1 se conclui que o ponto de equilíbrio esquerdo é uma sela hiperbólica e o ponto de equilíbrio direito é um atrator hiperbólico. Esta classificação é independente do valor de  $\epsilon$ , veja Observação 4.4. Porém o valor de  $\epsilon$  pode influenciar no comportamento da trajetória do Sistema (4.10).

Também pode ser determinada a natureza dos pontos de equilíbrio fazendo o seguinte cálculo: avalia-se  $U^-$  na matriz Jacobiana (4.25) (com  $\epsilon = 1$ )

$$J(U^-) = \begin{bmatrix} 11.775827 & 0 \\ -11.775827 & -2.699574 \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

onde as raízes de  $\det(J(U^-) - \lambda I) = 0$  são  $\lambda_1^- = 11.775827$  e  $\lambda_2^- = -2.699574$ , sendo  $v_1^- = [0 \ 1]^T$  e  $v_2^- = [0.775731 \ -0.631062]^T$  seus correspondentes autovetores. Logo, o ponto de equilíbrio esquerdo ( $L$ ) é uma sela hiperbólica, veja Tabela 2.1.

De forma análoga ao avaliar  $U^+$  em (4.25) obtém-se os autovalores  $\lambda_1^+ = -9.171253$  e  $\lambda_2^+ = -2.699574$ , sendo  $v_1^+ = [0.576555 \ -0.817057]^T$  e  $v_2^+ = [0 \ 1]^T$  seus autovetores correspondentes. Assim, o ponto de equilíbrio direito ( $R$ ) é um atrator, veja Tabela 2.1.

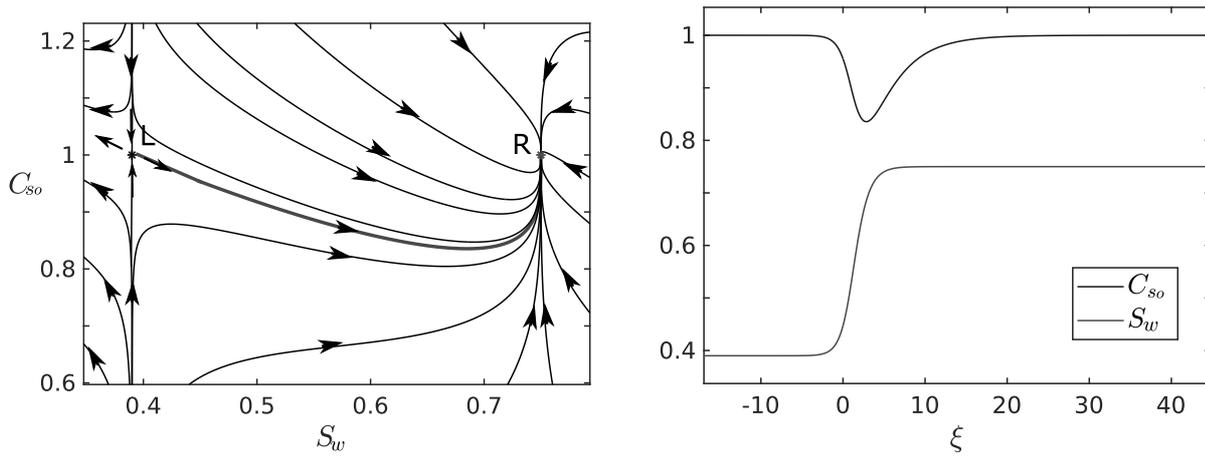
Dado que  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$  o Problema de Riemann (4.1), (4.42) tem solução por ondas viajantes.

Usando ode45 com  $\epsilon = 1$  em (4.1), foram obtidas as Figuras 4.7a e 4.7b. Elas mostram: a órbita que liga o equilíbrio esquerdo ao equilíbrio direito (Figura 4.7a) e os perfis do Sistema de EDOs (4.10) (Figura 4.7b). Por outro lado, considerando  $\epsilon = 0.1$  obtém-se as Figuras 4.8a e 4.8b. De forma similar estas figuras mostram a órbita que liga o equilíbrio esquerdo ao equilíbrio direito e os perfis do Sistema de EDOs (4.10), respetivamente. Note que os perfis das Figuras 4.7b e 4.8b são similares, mas há uma diferença no eixo  $\xi$ .

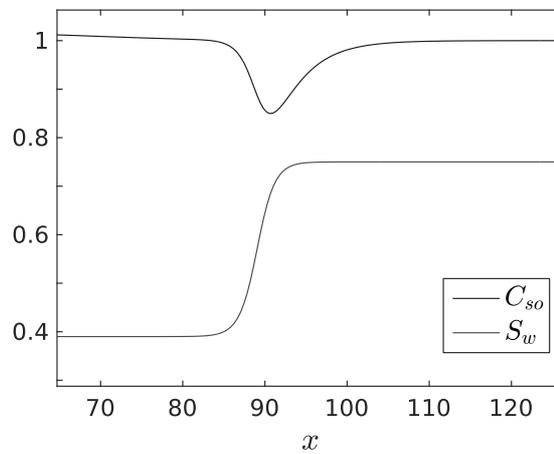
Finalmente usando ode45 com  $\epsilon = 0.01$  em (4.10), são obtidas as Figuras 4.9a e 4.9b. Na Figura 4.9a também observa-se que existe uma órbita que liga  $L$  com  $R$  enquanto na Figura 4.9b mostram-se os perfis do Sistema (4.10). Conclui-se que as Figuras 4.7b, 4.8b e 4.9b são muito semelhantes e conforme  $\epsilon$  varia à uma razão de  $10^{-1}$ , o eixo horizontal ( $\xi$ ) varia da mesma forma.

**Observação 4.7.** *Tanto o algoritmo ode45 tanto quanto o RCD desconsideram as unidades nas quais estão trabalhando. Dessa forma, as unidades onde estarão os resultados serão as mesmas unidades das entradas. Em nosso caso, consideramos as unidades dos valores do arquivo de entrada como no SI, então  $x$  está em metros e  $t$  está em segundos. Também é importante mencionar que os valores dos parâmetros como viscosidades, permeabilidades, entre outros, foram tomados como dados na Tabela 4.1.*

As figuras 4.7c (com  $\epsilon = 1$ ), 4.8c (com  $\epsilon = 0.1$ ) e 4.9c (com  $\epsilon = 0.01$ ) mostram as soluções numéricas do Sistema (4.1) obtidas usando o RCD. Como podemos ver as figuras 4.7b, 4.8b e 4.9b são semelhantes com as figuras 4.7c, 4.8c e 4.9c, respetivamente. Para maiores valores de  $\epsilon$  as soluções são mais próximas. Isso se deve ao fato que o algoritmo RCD usa o tamanho de passo adaptativo. E para menores valores de  $\epsilon$ , com difusão menor ele usa mais passos aumentando a difusão numérica.

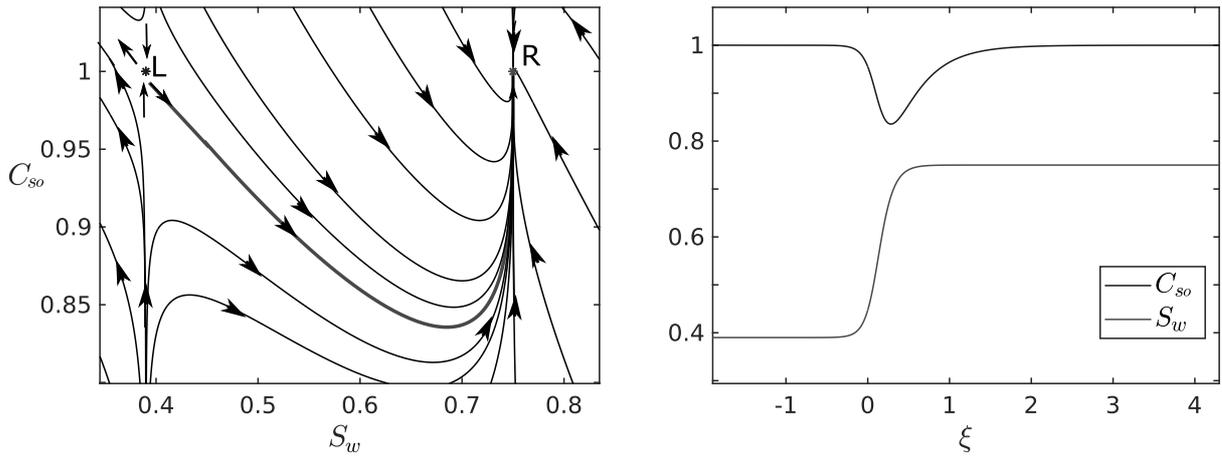


(a) Espaço de fase do Sistema de EDOs (4.10). (b) Perfis da solução do Sistema de EDOs (4.10).



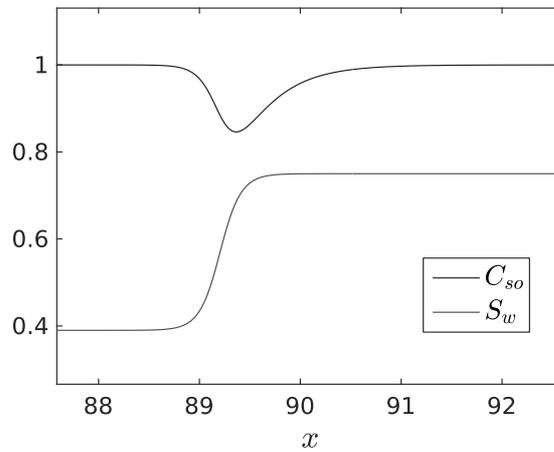
(c) Perfis da solução do Sistema de EDPs (4.1).

Figura 4.7 – Nas Figuras a) e b) foi usado MATLAB e na Figura c) foi usado RCD. Em todas as figuras foi considerado  $\epsilon = 1$  e  $U^- = (0.39, 1)$ .



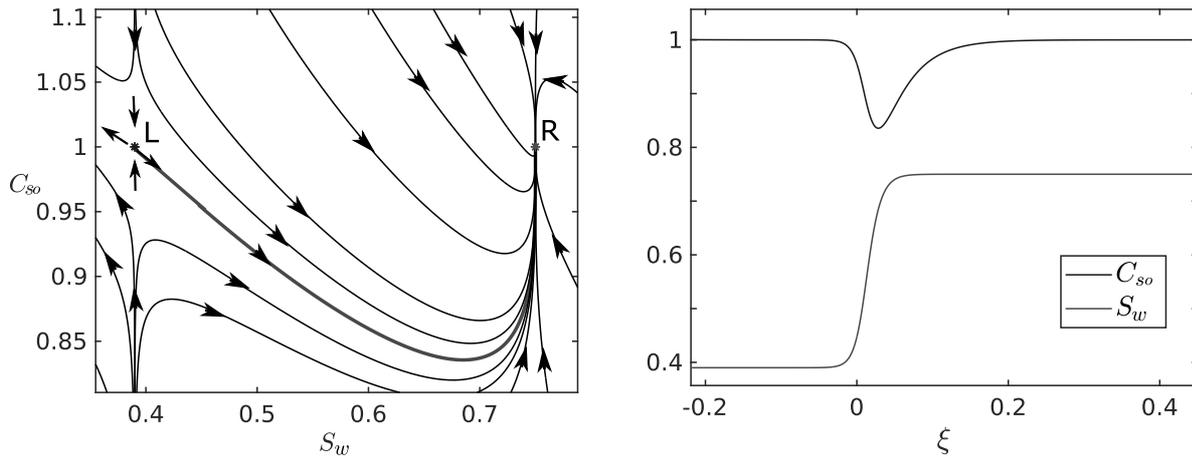
(a) Espaço de fase do Sistema de EDOs (4.10).

(b) Perfis do Sistema de EDOs (4.10).

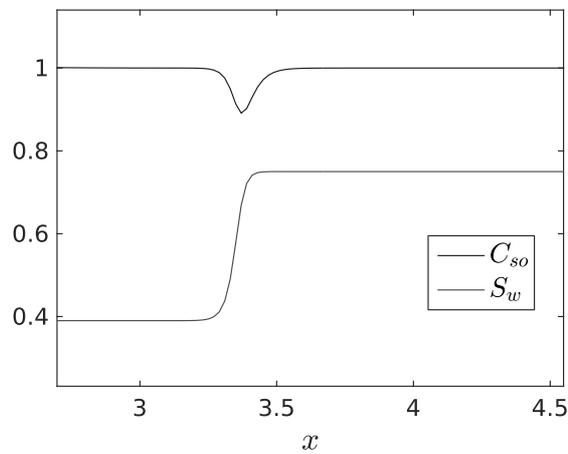


(c) Perfis do Sistema de EDPs (4.1).

Figura 4.8 – Nas Figuras a) e b) foi usado MATLAB e na Figura c) foi usado RCD. Em todas as figuras foi considerado  $\epsilon = 0.1$  e  $U^- = (0.39, 1)$ .



(a) Espaço de fase do Sistema de EDOs (4.10). (b) Perfil da solução do Sistema de EDOs (4.10).



(c) Perfil do Sistema de EDOs (4.10).

Figura 4.9 – Nas Figuras a) e b) foi usado MATLAB e na Figura c) foi usado RCD. Em todas as figuras foi considerado  $\epsilon = 0.01$  e  $U^- = (0.39, 1)$ .

## 5 ONDAS DE RAREFAÇÃO

Sabemos que o Sistema (4.1), sem termos de viscosidade, tem solução na forma de choque quando  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$ , onde  $(S_w^-, C_{so}^-)$  é o estado à esquerda do Problema de Riemann (4.1), (4.5). Neste capítulo estudamos as soluções do Sistema (4.1) sem termos de viscosidade, para  $S_w^- \notin ]S_w^T, S_w^+[$ . Uma possível solução para este sistema de leis de conservação é uma onda de rarefação, uma função contínua da forma:

$$U(x, t) = \begin{cases} U^-, & \text{se } x \leq \xi_1 t, \\ V(x/t), & \text{se } \xi_1 t \leq x \leq \xi_2 t, \\ U^+, & \text{se } x \geq \xi_2 t, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

onde  $V(x/t)$  é uma função suave com  $V(\xi_1) = U^-$  e  $V(\xi_2) = U^+$  [16]. Para mais detalhes veja Subseção 2.1.1.

Usando que  $S_w + S_o = 1$  e  $f_w + f_o = 1$  reescrevemos o Sistema (4.1) obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(C_{so}(1 - S_w)) + \frac{\partial}{\partial x}(C_{so}(1 - f_w)) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Considerando

$$G(U) = \begin{bmatrix} S_w \\ C_{so}(1 - S_w) \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} f_w \\ C_{so}(1 - f_w) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

podemos reescrever o Sistema (5.2) de maneira mais sucinta como:

$$G(U)_t + F(U)_x = 0. \quad (5.4)$$

Supondo que  $F(U)$  e  $G(U)$  são suficientemente suaves obtemos:

$$J_G(U)\partial_t(U) + J_F(U)\partial_x(U) = 0, \quad (5.5)$$

onde

$$J_G(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C_{so} & (1 - S_w) \end{bmatrix}, \quad J_F(U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} & 0 \\ -C_{so} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} & (1 - f_w) \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

O fato de termos considerado que o fluxo fracionário da água não depende de  $C_{so}$  simplifica o Sistema (5.2) tornando as matrizes jacobianas  $J_G(U)$  e  $J_F(U)$  triangulares inferiores. De (5.6), obtemos que  $\det(J_G(U)) = (1 - S_w)$  e como  $S_w \in ]S_{wc}, 1 - S_{or}[$  concluímos que  $\det(J_G(U)) \neq 0$ . Logo, afirmamos que  $J_G(U)$  é uma matriz inversível e pode-se denotar

$$A(U) = J_G^{-1}(U)J_F(U). \quad (5.7)$$

Podemos reescrever a Equação (5.5) como:

$$\partial_t(U) + A(U)\partial_x(U) = 0. \quad (5.8)$$

Buscamos uma solução do problema de Riemann (5.2), (4.41) na forma de rarefação fazendo a mudança de variável de  $U(x, t)$  para  $V(x/t)$ , obtendo:

$$-\frac{x}{t^2}V' \left( \frac{x}{t} \right) + \frac{1}{t}A \left( V \left( \frac{x}{t} \right) \right) V' \left( \frac{x}{t} \right) = 0. \quad (5.9)$$

Reorganizando os termos e denotando  $\xi = x/t$ , obtém-se

$$A(V(\xi))V'(\xi) = \xi V'(\xi). \quad (5.10)$$

Como espera-se que a função  $V(\xi)$  seja suave e conecte os dois estados,  $U^-$  e  $U^+$ , assume-se que  $V'(\xi) \neq 0$ , ou seja,  $V'(\xi)$  é proporcional a algum autovetor  $r_p(V(\xi))$  da matriz  $A(V(\xi))$ ,

$$V'(\xi) = \alpha(\xi)r_p(V(\xi)). \quad (5.11)$$

Como os autovetores são linearmente independentes,  $V'(\xi)$  deve ser proporcional a apenas um dos autovetores, de modo que  $V(\xi)$  reside na curva integral de  $r_p$  para uma única  $p$ -família. Seguindo o roteiro apresentado em [16], para ter onda de rarefação entre os estados  $U^-$  e  $U^+$  em uma mesma curva integral da  $p$ -família, é necessário que  $\xi$  seja monotonamente crescente a partir do ponto  $U^-$  para o ponto  $U^+$  ao longo da curva integral. Note que a relação

$$\xi = \lambda_p(V(\xi)) \quad (5.12)$$

é válida por (5.10), de modo que a monotonicidade de  $\lambda_p$  sobre a curva integral é equivalente à monotonicidade do parâmetro  $\xi$ . Para os casos de não linearidade genuína do  $p$ -campo de autovalores,  $V(\xi)$  é uma parametrização da respectiva curva integral do autovetor  $r_p$ . Para este tipo de onda as velocidades das curvas características satisfazem:

$$\lambda_p(U^-) < \lambda_p(U^+). \quad (5.13)$$

Calculando a matriz  $A(V(\xi))$  obtém-se

$$A(V(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} & 0 \\ 0 & \frac{(1-f_w)}{(1-S_w)} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Como a matriz  $A(V(\xi))$  é diagonal, então seus autovalores são:

$$\lambda_1(V(\xi)) = \frac{\partial f_w}{\partial S_w}, \quad \lambda_2(V(\xi)) = \frac{(1-f_w)}{(1-S_w)}, \quad (5.15)$$

com seus correspondentes autovetores

$$r_1(V(\xi)) = [1 \quad 0], \quad r_2(V(\xi)) = [0 \quad 1]. \quad (5.16)$$

Para determinar de forma explícita  $V(\xi)$  dado em (5.11), é preciso determinar  $\alpha(\xi)$ . Para isso, diferenciamos (5.12) com respeito a  $\xi$ , usamos a Equação (5.11) e finalmente reorganizamos para obter

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\nabla\lambda_p(V(\xi)) \cdot r_p(V(\xi))}. \quad (5.17)$$

Substituindo  $\alpha(\xi)$  em (5.11) obtém-se

$$V'(\xi) = \frac{r_p(V(\xi))}{\nabla\lambda_p(V(\xi)) \cdot r_p(V(\xi))}, \quad (5.18)$$

com dado inicial  $V(\xi) = U^-$  onde  $\xi_1 = \lambda_p(U^-)$  e  $\xi_2 = \lambda_p(U^+)$ .

Pela Equação (5.15), temos que

$$\nabla\lambda_1(V(\xi)) = \left[ \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2} \quad \frac{\partial^2 f_w}{\partial C_{so} \partial S_w} \right], \quad \nabla\lambda_2(V(\xi)) = \left[ \frac{-(1 - S_w) \frac{\partial f_w}{\partial S_w} + (1 - f_w)}{(1 - S_w)^2} \quad 0 \right]. \quad (5.19)$$

Usando as equações (5.16) e (5.19) obtemos

$$\nabla\lambda_1(V(\xi))r_1(V(\xi)) = \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2}, \quad \nabla\lambda_2(V(\xi))r_2(V(\xi)) = 0, \quad (5.20)$$

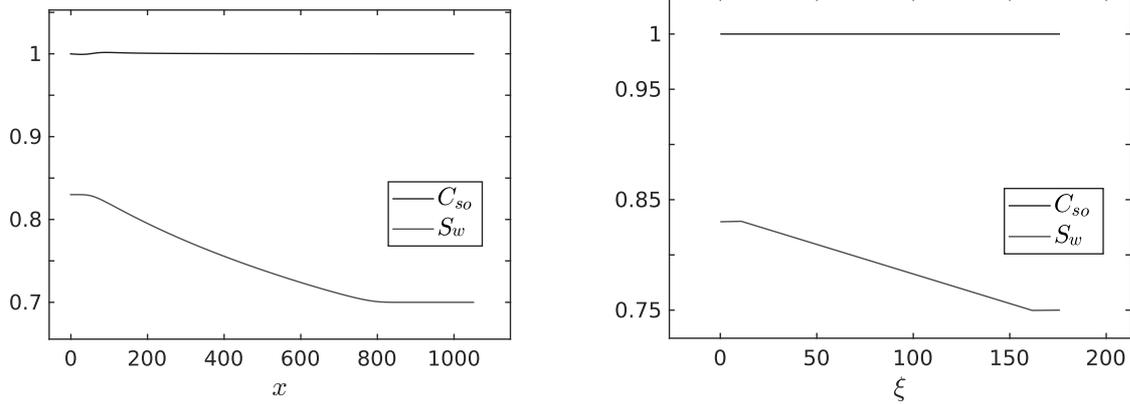
de onde podemos concluir que uma das famílias é genuinamente não linear e a outra família é linearmente degenerada que da origem às ondas de contato. As ondas de contato são um tipo de solução descontínua para um problema de Riemann não linear, onde a condição de Rankine-Hugoniot é satisfeita e as curvas características são paralelas de ambos os lados da descontinuidade. Um exemplo de descontinuidade de contato é fornecido pelo sistema de Euler da dinâmica dos gases quando a velocidade e a pressão são identicamente constantes, enquanto a densidade realiza um salto ao longo da linha  $x = vt$ . Neste caso  $v$  é constante exceto sobre a linha  $x = vt$  [16]. Fixando na família genuinamente não linear ( $p = 1$ ) as curvas integrais associadas devem satisfazer o sistema de EDOs

$$V'(\xi) = B, \quad (5.21)$$

com

$$V'(\xi) = \begin{bmatrix} S_w \\ C_{so} \end{bmatrix}', \quad B = \begin{bmatrix} 1 / \left( \frac{\partial^2 f_w}{\partial S_w^2} \right) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Verificamos numericamente que para  $S_w^- \in ]S^+, 1 - S_{or}]$  o Problema de Riemann (5.2), (4.41) tem solução por onda de rarefação. Por exemplo, nas figuras 5.1a e 5.1b mostramos as soluções do Sistema (5.2) com estados  $U^- = (0.83, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ . Também observamos nas figuras que temos uma onda de rarefação conectando  $(S_w^-, C_{so}^-)$  com  $(S_w^+, C_{so}^+)$ .



(a) Perfis de (5.2) obtido usando RCD.

(b) Perfis de (5.21) obtidos usando MATLAB.

Figura 5.1 – Validação da solução de rarefação para  $U^+ = (0.75, 1)$  e  $U^- = (0.83, 1)$ .

## 5.1 ONDAS COMPOSTAS

Segundo [42], as soluções descontínuas (choques) podem ser classificadas em termos da natureza dos pontos de equilíbrio  $U^-$  e  $U^+$  do Sistema de EDOs (4.10). Na Subseção 2.1.3, para uma lei de conservação com duas equações foram definidos dois tipos de choques (Choque-1 e Choque-2) em função da condição de entropia de Lax.

**Definição 5.1.** *Os choques característicos são soluções descontínuas com velocidade de choque igual à velocidade característica. Estas soluções podem ser classificadas como:*

(1) *Choque característico a esquerda, se satisfaz quando tem-se:*

(a) *Choque-1 com  $\lambda_1(U^-) = v$ ,*

(b) *Choque-2 com  $\lambda_2(U^-) = v$ .*

(2) *Choque característico a direita, se satisfaz quando tem-se:*

(a) *Choque-1 com  $\lambda_1(U^+) = v$ ,*

(b) *Choque-2 com  $\lambda_2(U^+) = v$ .*

**Definição 5.2.** *Uma curva composta por um estado inicial  $U^-$ , associada ao  $i$ -ésimo campo característico, ou  $i$ -composta, é o conjunto dos estados  $U$  tais que exista um estado intermediário  $U^m$  de maneira que  $U^m$  seja conectável a  $U^-$  por uma  $i$ -rarefação, e  $U$  seja conectável a  $U^m$  por um choque de velocidade  $v = \lambda_i(U^m)$  para  $i = 1, 2$ .*

Ao considerar o estado fixo  $U^+ = (0.75, 1)$  foi verificado que para  $S_w^- = S_w^T$ ,  $C_{so}^- = 1$  o estado  $U^-$  satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot e satisfaz que a velocidade da característica  $\lambda_1(U^-)$  coincide com a velocidade de choque, veja Equação (4.18). Neste caso dizemos que o choque é característico à esquerda e a solução do problema de Riemann

consiste de um grupo de duas ondas sem estado intermediário constante entre elas. Tal grupo de ondas é chamada na literatura de “ondas compostas”, que serão definidas a seguir [43]. Utilizando o código RCD ilustramos esta situação na Figura 5.2. Observe que  $S_w^- = S_w^T$  é o único ponto que satisfaz esta condição, veja Figura 4.2a.

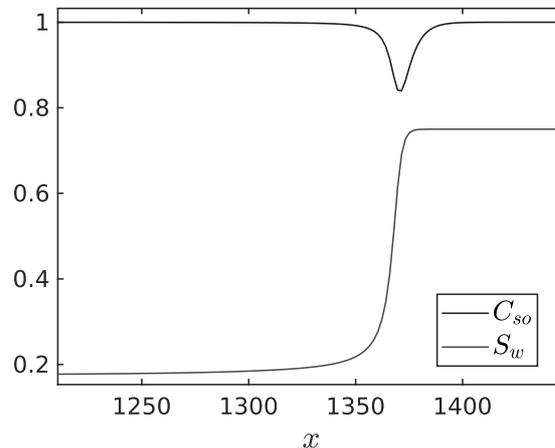


Figura 5.2 – Validação da solução de um choque característico para  $U^+ = (0.75, 1)$  e  $U^- = (S_w^T, 1)$ .

**Observação 5.1.** Sabemos que numa vizinhança dos pontos de equilíbrio, os retratos de fase de (4.10) variam se  $S_w^-$  varia, conclui-se que se  $S_w^- = S_w^T$ , então existe uma bifurcação na topologia da solução do Sistema (4.10). Analisando a Figura 4.4, a translação contínua de  $S_w^-$  saindo da região II em direção à região III,  $S_w^-$  se aproxima de  $S_w^T$ , o autovalor  $\lambda_p^-$  se aproxima de zero e  $S_w^e$  se aproxima de  $S_w^T$  desde a região III em direção à região II. Para cada ponto  $S_w^-$  da região II, temos uma onda de choque conectando os estados  $U^-$  e  $U^+$ . Essa conexão persiste até que  $S_w^- = S_w^T$ . Ao cruzar para a região III, perdemos a conexão, pois o estado  $S_w^e$  o impede. Similar análise geométrica pode ser observado em [44].

Vamos verificar numericamente que para  $S_w^- \in [S_{wc}, S_w^T[$ , temos uma solução composta. Como exemplo, consideramos os estados  $U^- = (0.12, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ . A solução do Problema de Riemann (5.2), (4.41) consiste de um grupo de duas ondas com um estado intermediário entre elas: primeiro tem-se uma onda de rarefação conectando  $(S_w^-, C_{so}^-)$  com  $(S_w^T, 1)$  seguido de um choque característico à esquerda que conecta  $(S_w^T, 1)$  a  $(S_w^+, C_{so}^+)$ , ver Figura 5.3a. Resultado numérico similar foi mostrado na Figura 5.3b, considerados os estados  $U^- = (0.15, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ . Na ampliação das figuras 5.3a e 5.3b, observa-se que  $S_w^T$  é o estado intermediário conectando a onda de rarefação com a onda de choque característico a esquerda.

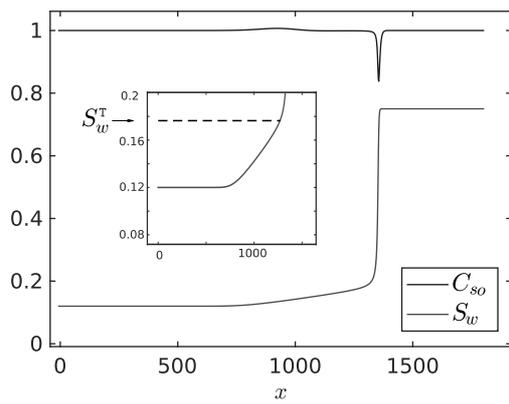
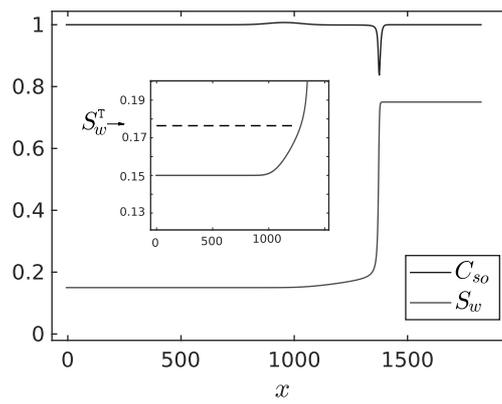
(a)  $U^- = (0.12, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ .(b)  $U^- = (0.15, 1)$  e  $U^+ = (0.75, 1)$ .

Figura 5.3 – O perfil de solução do Sistema de EDPs (5.2) obtido usando RCD.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Consideramos o modelo que descreve o deslocamento de óleo por um solvente miscível na presença de uma fase aquosa imiscível. O principal objetivo do trabalho foi determinar a existência da solução do problema de Riemann para este modelo na forma de ondas viajantes. Para isso usamos as permeabilidades relativas como no modelo Corey-Brooks quadrático, considerando o estado inicial do reservatório fixo  $U^+ = (0.75, 1)$  e variando o estado de injeção  $U^- = (S_w^-, 1)$ , onde  $S_w^- \in [S_{wc}, 1 - S_{or}]$ .

Classificamos os possíveis estados de injeção  $S_w^-$  em três regiões, veja Figura 4.4. Na região *II*, correspondente a  $S_w^- \in ]S_w^T, S_w^+[$ , provamos a existência da solução da versão viscosa do problema de Riemann na forma de ondas viajantes. Com isso também provamos existência da solução na forma de choque entropico para o problema de Riemann. Toda análise teórica foi verificada através de simulações numéricas, onde o sistema de equações diferenciais parciais foi resolvido usando o código RCD e o sistema de equações diferenciais ordinárias descrevendo ondas viajantes foi resolvido usando o algoritmo ode45 de MATLAB. Na região *I*, correspondente a  $S_w^- \in ]S_w^+, 1 - S_{or}[$ , construímos a solução do problema de Riemann na forma de ondas de rarefação. Esta construção foi verificada através de simulações numéricas, onde o sistema de equações diferenciais parciais foi resolvido usando o código RCD e o sistema de equações diferenciais ordinárias descrevendo ondas de rarefação foi resolvido usando o algoritmo ode45 de MATLAB.

Na região *III*, correspondente a  $S_w^- \in ]S_{wc}, S_w^T[$ , construímos a solução do problema de Riemann na forma de ondas compostas: tem-se uma onda de rarefação que vai até um estado intermediário seguido de um choque característico a esquerda. Esta construção foi verificada através de simulações numéricas, onde o sistema de equações diferenciais parciais foi resolvido usando o código RCD.

Para futuros trabalhos, podemos estudar o problema de Riemann considerando o estado de injeção fixo e analisar a solução deste problema variando o estado inicial do reservatório. Também podemos considerar o fluxo fracionário da água dependendo da saturação da água ( $S_w$ ) e da concentração do solvente na fase de óleo ( $C_{so}$ ).



## REFERÊNCIAS

- [1] WALSH, M. P.; LAKE, L. W. Applying fractional flow theory to solvent flooding and chase fluids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 281–303, 1989.
- [2] LAKE, L. W. *Enhanced oil recovery*. Old Tappan, NJ: Prentice Hall Inc., 1989.
- [3] AKKUTLU, I. Y.; YORTSOS, Y. C. The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. *Combustion and Flame*, Elsevier, v. 134, n. 3, p. 229–247, 2003.
- [4] CHAPIRO, G.; MAILYBAEV, A. A.; SOUZA, A. J. D.; MARCHESIN, D.; BRUINING, J. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational geosciences*, Springer, v. 16, n. 3, p. 799–808, 2012.
- [5] ASSIS, T. D. de; BISPO, M. dos S.; CÁRDENAS, J. Y. S. C.; FRITIS, G. C.; GUTIÉRREZ, A. E. R.; CHAPIRO, G. Traveling waves for in-situ combustion in porous media. *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão (ISSN: 2525-4782)*, v. 5, n. 6, 2020.
- [6] CHAPIRO, G.; MARCHESIN, D. The effect of thermal losses on traveling waves for in-situ combustion in porous medium. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 633, n. 1, 2015.
- [7] WILLMAN, B.; VALLEROY, V.; RUNBERG, G.; CORNELIUS, A.; POWERS, L. Laboratory studies of oil recovery by steam injection. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 13, n. 07, p. 681–690, 1961.
- [8] PAZ, P. Z.; HOLLMANN, T. H.; KERMEN, E.; CHAPIRO, G.; SLOB, E.; ZITHA, P. L. Em heating-stimulated water flooding for medium-heavy oil recovery. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 119, n. 1, p. 57–75, 2017.
- [9] SPILDO, K.; SUN, L.; DJURHUUS, K.; SKAUGE, A. A strategy for low cost, effective surfactant injection. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 117, p. 8–14, 2014.
- [10] NOUREDDINI, H.; REMPE, M. Pelargonic acid in enhanced oil recovery. *Journal of the American Oil Chemists' Society*, Wiley Online Library, v. 73, n. 7, p. 939–941, 1996.
- [11] BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, Society of Petroleum Engineers, v. 146, n. 01, p. 107–116, 1942.

- [12] WELGE, H. J. A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 4, n. 04, p. 91–98, 1952.
- [13] HALL, H.; GEFFEN, T. M. A laboratory study of solvent flooding. *Transactions of the AIME*, Society of Petroleum Engineers, v. 210, n. 01, p. 48–57, 1957.
- [14] LAMBERT, W.; LOURES, M. C. A mathematical study on the viability of the geochemical flow for an enhanced oil recovery: A simplified model. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 75, p. 678–691, 2019.
- [15] LAMBERT, W.; ALVAREZ, A.; LEDOINO, I.; TADEU, D.; MARCHESIN, D.; BRUINING, J. Mathematics and numerics for balance partial differential-algebraic equations (PDAEs). *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 84, n. 2, p. 1–56, 2020.
- [16] LEVEQUE, R. J. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser: Springer, 1992.
- [17] DUIJN, C. V. An introduction to conservation laws: theory and applications to multi-phase flow. Lecture Notes, Eindhoven University of Technology, The Netherlands. 2003.
- [18] HOMBURG, A. J.; SANDSTEDDE, B. Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields. *Handbook of dynamical systems*, North-Holland Amsterdam, v. 3, p. 379–524, 2010.
- [19] KIM, J. Y.; GHAJAR, A. J. A general heat transfer correlation for non-boiling gas-liquid flow with different flow patterns in horizontal pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 32, n. 4, p. 447–465, 2006.
- [20] GLIMM, J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Communications on pure and applied mathematics*, Wiley Online Library, v. 18, n. 4, p. 697–715, 1965.
- [21] LINDQUIST, W. B. (Ed.). *Current Progress in Hyperbolic Systems: Riemann Problems and Computations*, v. 100. EUA: American Mathematical Soc., 1989. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Conference, 1988.
- [22] LAX, P. D. Hyperbolic systems of conservation laws ii. *Communications on pure and applied mathematics*, Wiley Online Library, v. 10, n. 4, p. 537–566, 1957.
- [23] GOMES, M. *Problema de Riemann singular para um modelo de quarta ordem em escoamento multifásico*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1987.

- [24] SERRE, D. *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves*. United Kingdom: Cambridge University Press, 1999.
- [25] GILDING, B. H.; KERSNER, R. *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*. Hungary: Birkhäuser, 2012.
- [26] CHAPIRO, G.; FURTADO, L.; MARCHESIN, D.; SCHECTER, S. Stability of interacting traveling waves in reaction-convection-diffusion systems. *Conference Publications*, v. 2015, n. (special), p. 258, 2015.
- [27] CHAPIRO, G.; BRUINING, J. Combustion enhance recovery of shale gas. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 127, p. 179–189, 2015.
- [28] VOLPERT, A. I.; VOLPERT, V. A.; VOLPERT, V. A. Traveling wave solutions of parabolic systems. *Bull. Amer. Math. Soc*, v. 32, p. 446–452, 1995.
- [29] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [30] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [31] CROWE, C. T.; MICHAELIDES, E. E. Basic concepts and definitions. *Multiphase flow handbook*, Boca Raton, FL, CRC Press of Taylor and Francis Group, p. 24–25, 2006.
- [32] VALDEZ, A. R.; ROCHA, B. M.; CHAPIRO, G.; SANTOS, R. W. dos. Uncertainty quantification and sensitivity analysis for relative permeability models of two-phase flow in porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, p. 107297, 2020.
- [33] PAULA, F. F. de; QUINELATO, T.; IGREJA, I.; CHAPIRO, G. A numerical algorithm to solve the two-phase flow in porous media including foam displacement. *Springer*, p. 18–31, 2020.
- [34] OLEINIK, O. A. On the uniqueness of the generalized solution of the cauchy problem for a non-linear system of equations occurring in mechanics. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian, v. 12, n. 6, p. 169–176, 1957.
- [35] SMOLLER, J. *Shock waves and reaction—diffusion equations*. Springer, 1994.
- [36] CHEN, Z. *Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery*. Canada: SIAM, 2007.

- [37] ALKINDI, A.; AL-AZRI, N.; SAID, D.; ALSHUAILI, K.; RIELE, P. T. et al. Persistence in eor-design of a field trial in a carbonate reservoir using solvent-based water-flood process. *SPE EOR Conference at Oil and Gas West Asia*, 2016.
- [38] ASHOORI, E.; HEIJDEN, T. van der; ROSSEN, W. et al. Fractional-flow theory of foam displacements with oil. *SPE journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 15, n. 02, p. 260–273, 2010.
- [39] LAKE, L. W.; BRYANT, S. L.; BRYANT, S. L.; ARAQUE-MARTINEZ, A. N. *Geochemistry and fluid flow*. New York: Gulf Professional Publishing, 2002.
- [40] DORMAND, J. R.; PRINCE, P. J. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 19–26, 1980.
- [41] SHAMPINE, L. F.; REICHEL, M. W. The matlab ode suite. *SIAM journal on scientific computing*, SIAM, v. 18, n. 1, p. 1–22, 1997.
- [42] SCHECTER, S.; MARCHESIN, D.; PLOHR, B. J. Structurally stable riemann solutions. *journal of differential equations*, Elsevier, v. 126, n. 2, p. 303–354, 1996.
- [43] MATOS, V.; AZEVEDO, A.; MOTA, J. D.; MARCHESIN, D. Bifurcation under parameter change of riemann solutions for nonstrictly hyperbolic systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Springer, v. 66, n. 4, p. 1413–1452, 2015.
- [44] LOZANO, L. F.; ZAVALA, R. Q.; CHAPIRO, G. Mathematical properties of the foam flow in porous media. *Computational Geosciences*, Springer, p. 1–13, 2021.