

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
CURSO DE BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

ALAN DE PAIVA LOURES

**Abordagens Paramétricas e Não Paramétricas para
Monitoramento de Parâmetro de Localização – Caso
Univariado**

Juiz de Fora
2015

ALAN DE PAIVA LOURES

Abordagens Paramétricas e Não Paramétricas para Monitoramento de Parâmetro de Localização – Caso Univariado

Monografia apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador: Lupércio França Bessegato

Juiz de Fora

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
CURSO DE BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

**Abordagens Paramétricas e Não Paramétricas para
Monitoramento de Parâmetro de Localização – Caso
Univariado**

Alan de Paiva Loures

Aprovado em: _____ de _____ de _____

Banca Examinadora:

Lupércio França Bessegato (orientador)
Doutor em Estatística – Universidade Federal de Minas Gerais

Camila Borelli Zeller
Doutora em Estatística - Universidade Estadual de Campinas

Márcio de Oliveira
Mestre em Ecologia – Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora
2015

“Não há problema que não possa ser solucionado pela paciência”.

Chico Xavier

AGRADECIMENTOS

A todos que direta e indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

O gráfico de controle de Shewhart é uma poderosa ferramenta em controle estatístico de processos. A operação desses gráficos de controle consiste na coleta periódica de itens produzidos, analisando-os de acordo com alguma característica de interesse. A característica de qualidade pode ser um atributo ou uma variável. O gráfico contém duas linhas horizontais, denominadas limites superior e inferior de controle. A amplitude do intervalo entre esses limites é escolhida de maneira que, quando o ponto amostral estiver dentro dos limites de controle, considera-se que o processo esteja operando sob controle. Entretanto, quando um ponto ocorrer fora desses limites, considera-se que o processo está fora de controle, exigindo intervenção gerencial para que o processo opere novamente em condições de controle estatístico. No presente trabalho são estudadas as consequências das várias estimativas paramétricas efetuadas para a construção de gráficos de controle de média e de medidas individuais. Em particular, são verificados os efeitos dessas estimativas no comprimento médio de sequência (CMS), que é bastante utilizado para medir o desempenho desses gráficos. São apresentadas também duas abordagens não paramétricas para determinação dos limites de gráficos de controle de média amostral e de medidas individuais: reamostragem por *bootstrap* e núcleo estimador. É analisado o desempenho de gráficos de controle por média, cujos limites são construídos por intermédio de metodologia de reamostragem por *bootstrap* e o desempenho de gráficos de controle de medidas individuais, construído por intermédio das metodologias de núcleos estimadores da função de distribuição. A determinação dos limites de controle baseia-se em observações obtidas na denominada Fase I, na qual são coletados os dados da característica de qualidade de interesse. São apresentados resultados de análise de sensibilidade de um conjunto de misturas de normais que simulam situações de não normalidade, em especial quanto à assimetria e a curtose da função de densidade de probabilidade da característica de qualidade de interesse.

Palavras-Chave: Gráfico de controle por variável, Controle estatístico de processos, Comprimento médio de sequência, Estimação de limites de controle, Reamostragem por *bootstrap*, Núcleo estimador.

ABSTRACT

The Shewhart control chart is a powerful statistical tool in process control. The operation of these control charts is the periodic sampling off items produced. They are analyzed according to some characteristic of interest. The quality characteristic can be an attribute or a variable. The chart contains two horizontal lines, called upper and lower control limits. The width of the range between these limits is chosen so that, when the sampling point is within the control limits, it is considered that the process is operating under control. However, when a point occurs outside these limits, it is considered that the process is out of control, requiring management intervention for the process to operating again in statistical control conditions.

The in-control performance of non-parametric individuals control charts based on kernel estimators are studied by simulation. Three different procedures are adopted for kernel estimator bandwidth selection. It turns out that the alternative control charts are robust against deviations from symmetry and perform reasonably well under normality of the observations.

Keywords: control charts for variable, statistical process control, average run length, control limits estimation, *bootstrap* resampling, kernel estimator.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de um gráfico de controle Shewhart com os limites de controle.....	20
Figura 2: Probabilidade da amostra i cair fora dos limites de controle	32
Figura 3: Gráficos dos $EQM's$ – Distribuição normal e t de student.....	58
Figura 4: Gráficos dos $EQM's$ – Distribuição assimétrica unimodal e fortemente assimétrica.....	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Comparação de eficiência relativa	28
Tabela 2 - Parâmetros para as densidades das misturas de normais.....	55
Tabela 3: Estimativas do erro quadrático médio dos limites de controle – Distribuições simétricas	56
Tabela 4: Estimativas do erro quadrático médio dos limites de controle – Distribuições assimétricas.....	57
Tabela 5: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições simétricas	57
Tabela 6: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições assimétricas.....	57
Tabela 7: Estimativas dos limites de controle – Distribuições simétricas.....	64
Tabela 8: Estimativas dos limites de controle – Distribuições assimétricas	64
Tabela 9: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições simétricas	65
Tabela 10: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições assimétricas.....	66
Tabela 11: Fatores para construção de gráficos de controle	86

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO	12
2- A HISTÓRIA DA QUALIDADE	16
3- GRÁFICOS DE CONTROLE: ABORDAGEM PARAMÉTRICA	19
3.1- Gráfico de controle de \bar{X}	22
3.1.1- Estimativa dos parâmetros do processo	23
3.1.2- Efeito da estimação dos limites de controle.....	29
3.1.3- Medidas de desempenho.....	34
3.1.4- Efeito de não normalidade	36
3.2- Gráficos de controle de medidas individuais	37
4- GRÁFICOS DE CONTROLE NÃO PARAMÉTRICO	43
4.1- Gráfico de controle por núcleo estimador	43
4.1.1- Núcleo estimador	43
4.1.2- Construção dos limites de controle	53
4.1.3- Simulações e resultados	54
4.2- Gráficos de controle por <i>Bootstrap</i>.....	59
4.2.1- <i>Bootstrap</i> não paramétrico	59
4.2.2- Construção dos limites de controle	60
4.2.3- Simulações e resultados	63
5- CONCLUSÕES.....	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS	69
APÊNDICE A – Propriedades dos principais estimadores.	77
APÊNDICE B – Propriedades do núcleo estimador	82
APÊNDICE C – Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis	86

1- INTRODUÇÃO

O desenvolvimento e utilização das técnicas e métodos estatísticos para a análise e solução de problemas passaram a ganhar importância na área industrial. Em geral, espera-se que um processo de produção seja estável ou replicável, ou seja, que ele tenha capacidade de operar com pequena variabilidade em torno de dimensões-alvo das características de qualidade do produto. O controle estatístico do processo (*CEP*) é descrito como um conjunto de ferramentas de monitoramento *on-line* da qualidade que auxilia na resolução de problemas que são importantes para se alcançar a estabilidade do processo e a melhoria de sua capacidade, através da redução da variabilidade (Costa et al., 2005). Com tais ferramentas consegue-se uma descrição detalhada do comportamento do processo, construindo um ambiente de implementação da melhoria contínua na qualidade e na produtividade de um sistema de produção. Assim, a aplicação rotineira das ferramentas do *CEP* ao longo do tempo, através da coleta contínua de dados e da análise e bloqueio de possíveis causas especiais, responsáveis pelas instabilidades do processo, direciona a organização para a obtenção de seus objetivos de melhoria da qualidade (Juran, 1992).

As ferramentas do *CEP* contemplam o uso de histogramas, listas de verificação, gráfico de Pareto, diagrama de causa e efeito, estratificação, diagrama de dispersão e gráficos de controle (Montgomery, 2009). Dessas ferramentas, o gráfico de controle de Shewhart é, provavelmente, a mais utilizada. Sua operação consiste na coleta periódica de itens produzidos, analisando-os de acordo com alguma característica de interesse. Eles podem ser classificados em dois tipos. Se a característica da qualidade pode ser expressa numericamente em alguma escala contínua de medida, eles são chamados de gráficos de controle para variáveis. Os gráficos de controle para variáveis mais usuais são aqueles para a média amostral e para amplitude amostral. Muitas características de qualidade não são medidas em uma escala contínua ou mesmo em uma escala quantitativa. Nesses casos, se ela possuir ou não certos atributos, julga-se cada unidade do produto como conforme ou não conforme. Os gráficos de controle para tais características de qualidade são denominados gráficos de controle para atributos.

Há muitas situações em que a amostra consiste de uma única amostra individual, como, por exemplo, quando medidas repetidas do processo diferem unicamente devido a erros de medida. Em tais situações, é útil o gráfico de controle para unidades individuais.

De acordo com Montgomery (2009), em geral, a precisão dos cálculos pode ser significativamente afetada quando as amostragens são feitas de população não normal. Dentre outros efeitos na integridade dos resultados, certos desvios da normalidade podem afetar as probabilidades associadas com os limites de controle calculados através da teoria normal. Em situações de não normalidade fraca, a aproximação normal pode ser uma escolha útil (como em gráficos de controle de Shewhart). Entretanto, assimetrias de moderadas a fortes exigem abordagens alternativas. Shore (2004) discute as propriedades necessárias a tais abordagens. Por outro lado, quando o gráfico não é robusto a erros de especificação do modelo, usam-se ou um modelo paramétrico mais flexível ou técnicas não paramétricas para estimar a região de controle.

No presente estudo é considerada a situação não paramétrica para medidas individuais em que a função de distribuição subjacente, denotada por F , embora desconhecida, é unimodal. Verifica-se em Ion e Klaasen (2005) que qualquer gráfico de controle de Shewhart para medidas individuais é inadequado para densidades com mais de uma moda. É analisado o desempenho de gráficos de controle por medidas individuais construídas por intermédio de núcleos estimadores da função de distribuição. São utilizadas três diferentes metodologias para obtenção do parâmetro de suavidade das estimativas por núcleo. A determinação dos limites de controle baseia-se em observações obtidas na denominada Fase I, na qual são coletados os dados da característica de qualidade de interesse, para a estimação dos parâmetros do processo de produção. Veermat et al. (2003) observam que o gráfico de controle baseado em amplitude móvel média é sub ótimo comparado com o gráfico de controle alternativo baseado em núcleo estimador, exceto para variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas. Entretanto, esses autores salientam que, mesmo em condições de normalidade, os gráficos de controle não paramétricos têm bom desempenho, especialmente quando há uma grande quantidade de dados disponíveis.

A construção do gráfico de controle de \bar{X} considerou a abordagem não paramétrica, utilizando a reamostragem, que consiste em sortear, com reposição, os dados pertencentes a uma amostra, de modo a formar uma nova amostra. Dentre as diversas técnicas de reamostragem, a técnica *bootstrap*, introduzida por Efron (1979), não necessita de muitas suposições para estimação de parâmetros das distribuições de interesse, possuindo amplas possibilidades de aplicação. Por exemplo, Efron e Tibshirani (1994) a utilizam como uma abordagem para o cálculo de intervalos de confiança de parâmetros, em circunstâncias em que outras técnicas não eram aplicáveis, em particular no caso em que o tamanho da amostra era reduzido e a população seguia uma distribuição qualquer. No geral, pode-se utilizar a metodologia *bootstrap* para estimar a distribuição amostral de uma estatística de interesse do parâmetro do processo de produção, sempre assumindo que a amostra seja representativa da população e que as observações são independente e identicamente distribuídas.

Este trabalho de conclusão de curso visa proceder a uma revisão bibliográfica dos gráficos de \bar{X} com característica de qualidade assumidamente normal e as consequências em seu desempenho nas situações em que há desvios a essa hipótese. São estudadas e comparadas algumas alternativas não paramétricas, no sentido de serem delimitadas algumas situações que justificariam sua utilização. Assim, a estrutura deste trabalho está organizada em quatro seções principais distribuídas da seguinte forma: a seção 2 aborda a história da qualidade e suas ferramentas gerenciais, na seção 3, procedeu-se uma revisão bibliográfica paramétrica de gráficos de controle \bar{X} e de medidas individuais, de modo a fornecer as bases teóricas para a condução da pesquisa, na seção 4 são apresentadas revisões de algumas metodologias alternativas, referentes às abordagens não paramétricas de núcleo estimador e *bootstrap*, para obtenção dos gráficos de controle. São apresentados os resultados de um estudo Monte Carlo extensivo baseado em 10.000 simulações para vários tamanhos de amostra (Fase I), com a finalidade de construir os limites de gráficos de controle \bar{X} e de medidas individuais. As simulações são repetidas para um conjunto de distribuições representativas, de situações de não normalidade, incluindo duas misturas de normais propostas

por Marron e Wand (1992). Na seção 5, finalmente, apresentam-se nossas conclusões e sugestões para a continuidade dessa pesquisa.

2- A HISTÓRIA DA QUALIDADE

Atualmente está bem estabelecido que a qualidade de um produto, processo ou serviço desempenha um papel chave na indústria. A palavra/termo qualidade possui extrema diversidade de interpretações dada por vários estudiosos e organizações. Cada um desses procura definir a qualidade de modo coeso, assimilável e, principalmente, aplicável a todos os ramos de atividade e portes empresariais. Segundo Joram (1992), "Qualidade é a ausência de deficiências". Uma vez que este conceito é relativo, tem que ser traduzido em quantidades mensuráveis. A qualidade varia de produtos e processos, bem como para os serviços. Isto dá origem ao conceito de variação. Montgomery (1996) resumiu a relação entre a "qualidade" e "variação" da seguinte forma: "A qualidade é inversamente proporcional à variabilidade".

Segundo Campos (1992), a gestão da qualidade total (*TQM*) desempenha um papel fundamental nos processos de produção. A ideia central do *TQM* é que a qualidade esteja presente na função de gerenciamento organizacional, em uma tentativa de ampliar seu foco, não se limitando às atividades inerentes ao controle.

A preocupação com a qualidade surgiu na década de 20, nos EUA com o estatístico norte americano Dr. Walter A. Shewhart nas empresas Bell Telephone Laboratories. Shewhart desenvolveu os conceitos básicos da qualidade e os apresentou na obra *Economic Control of Quality of Manufactured Products*, de 1931. Este livro pode ser considerado como sendo o início de estatísticas industriais. Shewhart trabalhou por 18 meses na Western Electric, a divisão de fabricação da Bell, em Chicago. Western Electric era uma empresa que se tornou especializada no mercado de telefonia (Montgomery, 2009).

Shewhart (1924) descobriu que o problema central era a variação e, que havia dois tipos, que de acordo com Nolan e Provost (1990) são:

Causas comuns: Causas inerentes ao processo que pode ocorrer de hora em hora, dia em dia. São consideradas aleatórias no processo, por isso relativamente difíceis de serem identificadas.

Causas especiais: Causas que não são continuamente presentes no processo representam um descontrole temporário do processo, são possíveis

de serem identificadas e corrigidas, as causas e os efeitos são facilmente observáveis, então a intervenção é necessária.

Deming (1990) salienta que é necessário um questionamento com a qualidade e com a variabilidade encontrada na produção de bens e serviços, entendendo que os operários eram perfeitamente capazes de compreender, observar e controlar a produção. Foi desenvolvido um sistema de mensuração dessas variabilidades, que ficou conhecido como *CEP* e de ciclo de melhoria contínua *PDCA* (Plan, Do, Check e Action), método essencial da gestão da qualidade, que ficou conhecido como Ciclo Deming da Qualidade.

Shewhart (1924) propõe a análise dos resultados para que se passe a ter uma visão de prevenção das ações no lugar das ações corretivas. A operação dos gráficos de controle consiste na coleta periódica de itens produzidos, analisando-os de acordo com alguma característica de interesse.

A aceitação do *CEP* teve seus altos e baixos. Durante a Segunda Guerra Mundial o *CEP* foi implementado em larga escala nos Estados Unidos na indústria da arma. Ishikawa (1985), um dos gurus da qualidade mais proeminentes do Japão, afirmou que é possível especular que a Segunda Guerra Mundial foi vencida pelos aliados por causa de suas armas de alta qualidade (Montgomery, 2009).

A maior disseminação do controle de qualidade ocorreu logo após a Segunda Guerra Mundial, mas não foi imediatamente aplicada à indústria de consumo. O único país capaz de produzir bens naquela época era os EUA no qual o Japão se apresentava ao mundo literalmente destruído e precisando iniciar seu processo de reconstrução.

Em 1946 foi criada a União Japonesa de Cientistas e Engenheiros (JUSE), que em 1949 formou o grupo de Pesquisa do Controle de Qualidade, composto por membros de universidades, indústrias e órgãos governamentais.

Em 1950 a JUSE convidou o estatístico William Edwards Deming dos EUA para proferir palestras e treinar empresários e industriais sobre controle estatístico de processo e sobre gestão da qualidade. Essa mudança de postura gerencial proporcionou ao Japão o sucesso de que desfruta até hoje como potência econômica mundial.

Em 1951, o Dr. A.V. Feigenbaum publicou a primeira edição do seu livro *Total Quality Control* (Controle da Qualidade Total – *CQT*), que teve como

característica: (i) a participação de todos os setores e todos os empregados da empresa na prática do controle da qualidade; (ii) educação e treinamento; (iii) utilização de técnicas estatísticas, iniciando a disseminação das ferramentas da qualidade. O *CQT* consiste que cada etapa do processo atenda as necessidades de execução para que o produto/serviço atenda as necessidades do cliente.

A década de 1950 a 1960 ficou marcada pelo surgimento da confiabilidade, da edição de livros textos de Eugene Grant e A. J. Duncan e o ponto de vista de que a qualidade é um dos caminhos para gerenciar uma organização.

No decorrer das décadas de 1970 a 1980, surgem associações, revistas, prêmios de qualidade, que estão até os dias de hoje. Essas décadas ficaram marcadas pelo trabalho de G.Taguchi sobre planejamento de experimento.

Na década de 1990, em meio à expansão da globalização, surgiu o modelo normativo da ISO (*International Organization for Standardization*) para a área da gestão da qualidade, a série 9000, sistemas de garantia da qualidade. Mais tarde um pouco, começou a iniciativa do mais atual modelo de gestão de qualidade que foi trazido pela Motorola, o chamado Seis Sigma. O programa traz características apresentadas nos programas passados, porém existe uma preocupação com o uso sistemático das ferramentas estatísticas (Montgomery, 2009).

3- GRÁFICOS DE CONTROLE: ABORDAGEM PARAMÉTRICA

Segundo Costa et al. (2005), a estruturação e a organização das etapas que compõe a realização de uma tarefa, incluindo o seu fluxo, insumos, atividades realizadas e produtos gerados, é possível obter muitas informações sistematizadas e perceber pontos críticos, oportunidades de melhoria e, principalmente, as variações devidas a causas comuns e especiais. Os gráficos de controle são os instrumentos mais simples para documentar e analisar a ocorrência destes eventos. Em um processo de produção controlada com o *CEP* cada etapa é avaliada continuamente e, deste modo, não há necessidade de um controle final. Um dos principais objetivos do *CEP* é detectar se uma etapa do processo não funciona normalmente, e tomar rapidamente medidas para trazer de volta o processo no controle.

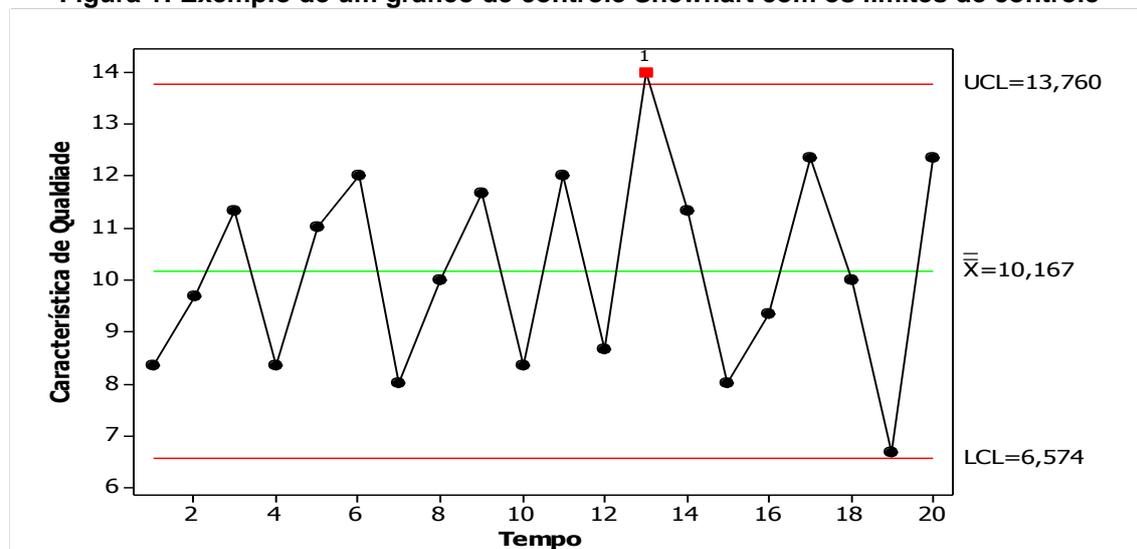
Um gráfico de controle típico é uma representação gráfica de uma característica de qualidade, medida ou calculada a partir de uma amostra (denominada subgrupo) versus o número da amostra ou o tempo. A característica de qualidade pode ser um atributo ou uma variável. O gráfico contém uma linha Média (*LM*), representando o valor médio da característica de qualidade, e duas outras linhas horizontais, chamadas limite superior de controle (*LSC*) e limite inferior de controle (*LIC*). Escolhe-se a amplitude do intervalo entre *LSC* e *LIC* de maneira que, quando o processo estiver operando sob controle, praticamente todos os pontos amostrais estejam em seu interior. Enquanto os pontos amostrais estiverem dentro dos limites de controle considera-se, que o processo esteja sob controle, não sendo necessária nenhuma ação. Entretanto, a ocorrência de um ponto fora desses limites é interpretada como evidência de que o processo está fora de controle, exigindo a descoberta e a eliminação da causa ou causas especiais responsáveis por essa ocorrência. Em essência, o gráfico de controle pode ser entendido como um teste da hipótese de que o processo está sob controle estatístico (Montgomery, 2009).

Os gráficos de controle podem ser classificados em dois tipos: gráficos de controle por atributos e gráficos de controle por variáveis. Os gráficos de controle por atributos são utilizados nos casos em que características da qualidade não podem ser expressas em termos de valores numéricos, tendo

sido criados para o monitoramento de processos produtivos, onde “ser ou não ser defeituoso” e a quantidade de não conformidades presentes em um produto é considerada um atributo. Os gráficos de controle por variáveis são utilizados para o monitoramento de características de qualidade representadas por variáveis aleatórias contínuas. Uma vantagem das cartas por atributos é permitir o controle de mais de uma característica de qualidade em um único gráfico, pois a medição consiste em identificar se o item está conforme ou não conforme em relação às especificações de determinadas características de qualidade. Por outro lado, um gráfico variável exige geralmente uma medição mais complexa. Basicamente, para cada característica selecionada são necessários dois gráficos de controle: um para controle da média e outro para o controle da dispersão do processo. Logo, sob o ponto de vista prático, os gráficos por atributos são mais fáceis de serem manuseadas e apresentam, em geral, um menor custo de medição. Entretanto, os gráficos por variáveis apresentam muito mais informações (por exemplo, sobre a média, a variabilidade e a capacidade do processo) do que aquelas obtidas por meio de gráficos de atributos. Esse fato facilita a identificação do motivo das causas especiais que ocorrem no processo (Costa et al., 2005).

Os limites de controle fornecem as primeiras verificações fáceis sobre a estabilidade do processo, ou seja, se há ou não causas especiais presentes. A Figura 1 ilustra um exemplo de um gráfico de controle \bar{X} .

Figura 1: Exemplo de um gráfico de controle Shewhart com os limites de controle



Fonte: Autor

O gráfico representa as sucessivas amostras do processo produtivo (pontos e linhas) conjuntamente com o nível desejado/especificado de qualidade e os limites superior e inferior de controle. Enquanto a informação extraída das amostras se encontrar entre os limites, pode-se considerar que o processo está controlado.

Montgomery (2009) define subgrupo racional como amostras que devem ser selecionadas de modo que, se estiverem presentes causas atribuíveis, a chance de diferenças entre os subgrupos será maximizada, enquanto a chance de diferenças devidas a essas causas atribuíveis dentro de um subgrupo será minimizada. Existem duas abordagens na literatura para construção de subgrupos racionais: (i) cada amostra consiste em unidades que foram produzidas ao mesmo tempo, essa abordagem é utilizada quando o objetivo principal é detectar mudanças do processo. Ela minimiza a chance de variabilidade dentro de uma amostra e maximiza a chance de variabilidade entre amostras, quando houver causas atribuíveis. Ela também fornece a melhor estimativa σ do processo; (ii) o subgrupo é uma amostra aleatória de toda saída do processo durante o intervalo de amostragem, essa abordagem é utilizada para tomar decisões sobre a aceitação de todas as unidades do lote.

Questiona-se às vezes, que a primeira abordagem será ineficaz quando o processo mudar para um estado fora de controle e voltar a um estado de controle entre amostras, ou seja, a primeira abordagem não percebe essas mudanças no processo, de modo que a segunda abordagem deverá ser considerada.

As estimativas dos limites de controle baseiam-se nas observações obtidas na chamada Fase I, na qual os dados são recolhidos a partir do processo de produção e os parâmetros são estimados para obter os limites de controle (Woodall e Montgomery, 2000). Na Fase I, os gráficos são usados para estabelecer o estado de controle do processo e avaliar a sua estabilidade para assegurar que a amostra de referência é representativa ao processo. A partir de dados históricos verifica-se, se o processo está sob controle estatístico através da análise de suas características. As informações que foram coletadas na Fase I são utilizadas na construção dos gráficos de controle que são usados para monitoramento de processos em tempo real, cujo,

principal objetivo é detectar mudanças no processo tão logo elas ocorram. Denomina-se Fase II o estágio de monitoramento do processo.

Existem diferentes tipos de gráficos de controle por variável os quais têm sido bastante definidos na literatura, como o gráfico de \bar{X} e o gráfico de medidas individuais são os mais utilizados, será focado em nosso estudo esses tipos de gráficos de controle.

3.1- Gráfico de controle de \bar{X}

De acordo com Ion (2001), as cartas de controle de Shewhart têm por objetivo: (i) mostrar evidências de que um processo está operando sob controle estatístico; (ii) detectar a presença de causas especiais de variação e (iii) monitorar e aprimorar o desempenho do processo de medição.

Se a função de distribuição F , é assumida como normal, então os limites do gráfico de Shewhart clássico são definidos como:

$$LSC = \mu + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\bar{X}}$$

e

$$LSC = \mu + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_{\bar{X}},$$

onde Φ^{-1} é a função quantil normal padrão, α é a taxa de falso alarme, μ é a média do processo e $\sigma_{\bar{X}}$ é o erro padrão da média amostral. Na prática, μ e σ são desconhecidos, portanto devemos estimá-los através de amostras ou subgrupos preliminares quando o processo supostamente estiver sob controle (Fase I). Estas estimativas são baseadas em k amostras independentes e para cada amostra terá n observações da característica de qualidade de interesse do processo.

Se X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra de tamanho n , então a média dessa amostra é dada por:

$$\bar{X}_i = \frac{x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Assim, o melhor estimador de μ é a média global, definida como:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_k}{k},$$

que é utilizada para estimar a linha média (*LM*) do gráfico.

É comum utilizar o valor 3 no lugar de $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$, empregando dessa maneira limites 3σ .

Para construir os limites de controle é necessária também uma estimativa do desvio padrão σ . Abordaremos quatro tipos de estimadores que serão apresentados a seguir: dois estimadores baseados na amplitude amostral e desvio padrão amostral médio, um terceiro que considera uma combinação de desvios padrões amostrais e finalmente um estimador não viciado do desvio padrão combinado.

Os erros possíveis ao se utilizar gráficos de controle são: interpretar que o processo está fora de controle quando na verdade ele está controlado (tipo I ou alarme falso, α) e interpretar que o processo está em controle, quando na verdade ele está fora de controle (erro tipo II).

Segundo Costa et al. (2005), a probabilidade de alarme falso (α) se refere a um ponto localizado fora dos limites de controle, considerando-se que o processo esta controlado. Assim, temos que:

$$\alpha = Pr(\text{alarme falso})$$

e

$$\alpha = Pr(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0).$$

No caso de gráficos de controle \bar{X} com os limites 3σ , verifica-se que:

$$\alpha = Pr(|Z| > 3) = 0,0027. \quad (1)$$

3.1.1- Estimativa dos parâmetros do processo

Na Fase I, trabalha-se com amostras preliminares que são usadas para construir os gráficos \bar{X} , usualmente deve-se tratar os limites de controle obtidos como limites de controle tentativos. Estes limites permitem determinar se o processo esta sob controle ou fora de controle quando as k amostras preliminares forem selecionadas. Para determinar se o processo encontra se sob controle deve-se plotar os valores da média e amplitude amostrais. Se

todos os pontos desses gráficos estão dentro dos limites de controle e se nenhum comportamento sistemático for evidenciado, então podemos concluir que o processo estava sob controle no passado e que os limites de controle tentativos são adequados para monitorar a produção atual ou futura (Montgomery, 2009). Muitos autores como Montgomery (2009), Costa et al. (2005), Ion (2001) e Quesenberry (1993) recomendam em geral, que o número de subgrupos (k) deva ser de 20 a 25 para cada subgrupo, analisando o resultado individual de cada gráfico. Por sua vez, é recomendado que o tamanho do subgrupo para estimação dos limites de controle tentativos seja de 4 a 5 amostras. Estas recomendações são baseadas na experiência empírica. É claro que pode-se trabalhar com menos dados, porém os limites de controle não são tão confiáveis quanto os tipicamente utilizados.

Quesenberry (1993) estudou os valores de k e n e observou que os resultados indicam que as recomendações usuais não são suficientes para garantir que os limites de controle estimados são suficientemente próximos dos verdadeiros limites, e que, por vezes, pode levar a resultados enganosos durante o monitoramento do processo.

Como a média amostral é o melhor estimador de μ então, $\mu = \bar{X}$. (Ver Apêndice A).

Estimadores robustos para a estimativa de σ são recomendados para uso em situações em que estão presentes valores extremos. A escolha do estimador tem um impacto sobre as propriedades do gráfico de controle durante a Fase II, (discussão detalhada na seção 3.1.1). Salienta-se que o estimador de σ utilizado na Fase I não tem de ser necessariamente o mesmo da Fase II quando se deseja monitorar a variabilidade do processo (gráficos de controle de R ou de S ou de S^2 , dentre outros).

Os estimadores mais frequentes de σ utilizados são apresentados a seguir. Suas propriedades estão detalhadas no Apêndice A.

(i) Amplitude amostral média

Sejam $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ as observações de um subgrupo. A amplitude dessa amostra é definida como sendo a diferença entre a maior e a menor das observações, assim:

$$R_i = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n}$$

A amplitude média dos k subgrupos é:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_k}{k}$$

A estimativa não enviesada de σ obtida por \bar{R} é dada por:

$$\hat{\sigma}_A = \frac{\bar{R}}{d_2(n)}$$

onde os valores de $d_2(n)$ são apresentados na tabela 11, no Apêndice C (Shewhart, 1924).

(ii) Desvio amostral médio

Adotando a notação acima, o desvio padrão amostral de cada subgrupo é:

$$S_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{(n-1)}}$$

Salienta-se que S_i é viciado para estimar σ , pois $E(S_i) = c_4(n)\sigma$. (Apêndice A, eq. A.2).

Assim, pode-se definir um estimador não enviesado para estimar σ , utilizando-se das informações de todos os k subgrupos por meio da expressão a seguir:

$$\hat{\sigma}_B = \frac{\bar{S}}{c_4(n)}$$

onde $\bar{S} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k S_i$ e $c_4(n)$ é o fator de correção de vício do desvio padrão amostral, cujo valores dependem do tamanho da amostra. Ver tabela 11, no Apêndice C (Quesenberry, 1993).

(iii) Desvio padrão global combinado

Outro estimador possível para σ é o desvio padrão global combinado definido por:

$$S_{\text{combinado}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)}}$$

onde S_i e n_i são respectivamente, o desvio padrão amostral e o tamanho do subgrupo i . Quando $n_1 = n_2 = \dots = n_k = n$, então:

$$S_{\text{combinado}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{k}}$$

ou seja, é a raiz quadrada da variância amostral média dos subgrupos.

Por outro lado, se $k = 1$, $S_{\text{combinado}}$ é o desvio padrão amostral, logo $S_{\text{combinado}}$ é um estimador enviesado de σ . Entretanto, utiliza-se este estimador para estimar σ , denotando-o por $\hat{\sigma}_c$ (Derman e Ross, 1995).

(iv) Desvio padrão combinado com correção de viés

Vardeman (1999) mostrou que $E(S_{\text{combinado}}) = c_4(\nu + 1)\sigma$, em que $\nu = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$. Quando todos os subgrupos são do mesmo tamanho $\nu = k(n - 1)$. Assim, outro estimador não enviesado de σ é dado por:

$$\hat{\sigma}_D = \frac{S_{\text{combinado}}}{c_4(\nu + 1)}$$

O erro quadrático médio é uma medida importante para comparar o desempenho desses quatro estimadores na estimação de σ do processo, no decorrer da Fase I. Ele é definido como:

$$EQM(\hat{\sigma}_j) = E(\hat{\sigma}_j - \sigma)^2 = Var(\hat{\sigma}_j) + [B(\hat{\sigma}_j)]^2, \quad j = A, B, C, D$$

onde o termo $B(\hat{\sigma}) = E(\hat{\sigma}) - \sigma$ é o vício ou viés do estimador.

Costa et al. (2005) prova que o erro padrão de $\frac{R_i}{d_2(n)}$ e $\frac{S_i}{c_4(n)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, que são $\frac{d_3(n)}{d_2(n)}\sigma$ e $\frac{\sqrt{1-c_4^2(n)}}{c_4(n)}\sigma$, respectivamente como $\hat{\sigma}_A$ e $\hat{\sigma}_B$ são obtidas por meio de valores médios, tem-se que:

$$EQM(\hat{\sigma}_A) = EQM\left(\frac{\bar{R}}{d_2(n)}\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{d_3(n)}{d_2(n)}\sigma\right)^2$$

e

$$EQM(\hat{\sigma}_B) = EQM\left(\frac{\bar{S}}{c_4(n)}\right) = \frac{1 - c_4^2(n)}{k}\left(\frac{\sigma}{c_4(n)}\right)^2$$

Em Vardeman (1999), verificam-se os EQM 's de $\hat{\sigma}_C$ e $\hat{\sigma}_D$, que são dados por:

$$EQM(\hat{\sigma}_C) = EQM(S_{combinado}) = 2[1 - c_4(\nu + 1)]\sigma^2$$

e

$$EQM(\hat{\sigma}_D) = EQM\left(\frac{S_{combinado}}{c_4(\nu + 1)}\right) = \left(\frac{1 - c_4^2(\nu + 1)}{c_4^2(\nu + 1)}\right)\sigma^2$$

A medida de eficiência relativa é utilizada para comparar dois estimadores, sendo definida pela expressão:

$$ER(\hat{\sigma}_I, \hat{\sigma}_J) = \frac{EQM(\hat{\sigma}_J)}{EQM(\hat{\sigma}_I)}$$

Compararemos as eficiências de $\hat{\sigma}_A$, $\hat{\sigma}_B$ e $\hat{\sigma}_D$ em relação à $\hat{\sigma}_C$, já que $\hat{\sigma}_C$, embora enviesado, é uma alternativa importante e bastante utilizada na prática, conforme sugerido por Derman e Ross (1995).

$$ER(\hat{\sigma}_A, \hat{\sigma}_C) = \frac{EQM(\hat{\sigma}_C)}{EQM(\hat{\sigma}_A)} = \frac{2kd_2^2(n)[1 - c_4(\nu + 1)]}{d_3^2(n)}$$

$$ER(\hat{\sigma}_B, \hat{\sigma}_C) = \frac{EQM(\hat{\sigma}_C)}{EQM(\hat{\sigma}_B)} = \frac{2kc_4^2(n)[1 - c_4(\nu + 1)]}{(1 - c_4^2(n))}$$

$$ER(\hat{\sigma}_D, \hat{\sigma}_C) = \frac{EQM(\hat{\sigma}_C)}{EQM(\hat{\sigma}_D)} = \frac{2c_4^2(\nu + 1)[1 - c_4(\nu + 1)]}{(1 - c_4^2(\nu + 1))}$$

Os resultados das eficiências relativas encontram-se na Tabela 1.

Da Tabela 1, pode-se notar que mesmo para valores moderados de k e n , $\hat{\sigma}_C$ é mais eficiente que $\hat{\sigma}_D$ embora a $ER(\hat{\sigma}_D, \hat{\sigma}_C)$ seja próxima de 1. É possível notar, que quanto menor o tamanho do subgrupo (n), maior a vantagem de $\hat{\sigma}_C$ sobre $\hat{\sigma}_D$. Confirmando o que foi observado por Derman e Ross (1995). Verifica-se que $\hat{\sigma}_C$ é também preferível a $\hat{\sigma}_B$ e $\hat{\sigma}_A$ na maioria dos casos.

Mahmoud et al. (2010) salientam que ($\hat{\sigma}_C$ e $\hat{\sigma}_D$) são preferíveis a $\hat{\sigma}_B$ e Vardeman(1999) mostrou previamente que métodos baseados em amplitudes são muitos ineficientes. Por outro lado, Derman e Ross (1995) salientam que se a distribuição subjacente da característica de qualidade não for normal (situação frequente na pratica) $\hat{\sigma}_C$ converge para σ^2 quando $k \rightarrow \infty$, já que

$E(S_i^2) = \sigma^2$. Por outro lado, se os dados da distribuição não forem normais, $\hat{\sigma}_B$ não será um estimador não viciado de σ e $\hat{\sigma}_B$ não converge para σ .

Tabela 1: Comparação de eficiência relativa

n	k	v+1	d2(n)	d3(n)	c4(n)	c4(v+1)	ER(A,C)	ER(B,C)	ER(D,C)
2	20	21	1,1284	0,8525	0,7979	0,9876	0,8690	0,8691	0,9814
2	25	26	1,1284	0,8525	0,7979	0,9901	0,8672	0,8673	0,9852
2	30	31	1,1284	0,8525	0,7979	0,9917	0,8725	0,8726	0,9876
2	50	51	1,1284	0,8525	0,7979	0,9950	0,8760	0,8761	0,9925
3	20	41	1,6926	0,8884	0,8862	0,9938	0,9003	0,9074	0,9907
3	25	51	1,6926	0,8884	0,8862	0,9950	0,9075	0,9147	0,9925
3	30	61	1,6926	0,8884	0,8862	0,9958	0,9148	0,9220	0,9937
3	50	101	1,6926	0,8884	0,8862	0,9975	0,9075	0,9147	0,9963
4	20	61	2,0588	0,8798	0,9213	0,9958	0,9199	0,9431	0,9937
4	25	76	2,0588	0,8798	0,9213	0,9967	0,9035	0,9262	0,9951
4	30	91	2,0588	0,8798	0,9213	0,9972	0,9199	0,9431	0,9958
4	50	151	2,0588	0,8798	0,9213	0,9983	0,9309	0,9543	0,9975
5	20	81	2,3259	0,8641	0,9400	0,9969	0,8985	0,9413	0,9954
5	25	101	2,3259	0,8641	0,9400	0,9975	0,9057	0,9489	0,9963
5	30	121	2,3259	0,8641	0,9400	0,9979	0,9129	0,9565	0,9969
5	50	201	2,3259	0,8641	0,9400	0,9988	0,8695	0,9109	0,9982

Fonte: Autor

O efeito da quantidade de amostra (k) no desempenho dos gráficos de controle é um importante tema de pesquisa. Vários autores como Quesenberry (1993), Hillier (1967) e Proschan e Savage (1960) estudaram essa questão: quantas amostras de um processo estável são necessárias para estimar os limites de controle onde os parâmetros são desconhecidos.

Quesenberry (1993) supôs que no decorrer da fase de coleta de amostras para estimação dos parâmetros do processo, podem ocorrer pequenas mudanças nas médias do processo para um novo valor de $\mu + \delta\sigma$. Para estudar os efeitos da quantidade de amostras usadas na estimação dos parâmetros (k) no CMS e no desvio padrão, ele utilizou varias quantidades de k e $|\delta|$ com amostras de tamanho $n = 5$.

Ao estudar resultados de simulações efetuados, Quesenberry (1993) apontou que o uso de $k = 30$ amostras de tamanho $n = 5$ aumenta significativamente a taxa de alarme falso, e sendo isso um importante motivo de preocupação. Observando os resultados, ele recomenda que para o gráfico

de Shewhart de \bar{X} , com média e desvio padrão conhecidos, sejam necessários $k = 100$ amostras de tamanho $n = 5$ cada.

Novamente baseado nos resultados obtidos, Quesenberry (1993) estabeleceu que fosse necessário $k = 100$ subgrupos de tamanho $n = 5$ para que os gráficos de controle cujos limites estimados tenham um desempenho próximo àquelas com limites calculados com os verdadeiros parâmetros do processo. Embora esse estudo tenha sido efetuado apenas para $n = 5$, o autor também especula que k deva ser igual a $\frac{400}{n-1}$ para estimação de σ para determinação dos limites do gráfico de controle de \bar{X} . A seguir, na seção 3.1.2 serão discutidas detalhadamente o efeito da utilização de limites de controle estimados na quantidade de subgrupos necessários para a estimação eficiente de σ .

Mahmoud et al. (2010) apresentam uma ampla revisão sobre estimação do desvio padrão no contexto de aplicações em controle estatístico de qualidade comparando o desempenho de estimadores propostos na literatura.

3.1.2- Efeito da estimação dos limites de controle

Woodall e Montgomery (1999) identificaram a importância dos efeitos da estimação dos parâmetros nas propriedades dos gráficos de controle. As consequências da estimação dos limites de controle são apresentadas amplamente por Quesenberry (1993) no caso em que é utilizado $\hat{\sigma}_B$ para estimar σ . As formulas habituais para estimar esses limites de controle são:

$$L\widehat{SC}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4(n)\sqrt{n}}$$

e

$$L\widehat{IC}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4(n)\sqrt{n}}$$

onde o erro padrão de S_i é $\sigma\sqrt{1 - c_4^2(n)}$. (Veja eq. A.3, no Apêndice A).

Seja a estimativa do limite superior de controle $L\widehat{SC}_{\bar{X}}$, $\bar{\bar{X}}$ é uma variável aleatória normal e \bar{S} é aproximadamente normal uma vez que ele é uma média de k variáveis aleatórias independentes. Dessa maneira, uma combinação

linear de \bar{X} e \bar{S} também será aproximadamente normal. Então, tem-se que a média do $\widehat{LSC}_{\bar{X}}$ é dada por:

$$E(\widehat{LSC}_{\bar{X}}) = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} = LSC$$

Logo, o erro padrão do $\widehat{LSC}_{\bar{X}}$ é:

$$\begin{aligned} Var(\widehat{LSC}_{\bar{X}}) &= Var\left(\bar{X} + 3\frac{\bar{S}}{c_4(n)\sqrt{n}}\right) \\ &= Var(\bar{X}) + Var3\left(\frac{\bar{S}}{c_4(n)\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{kn} + \frac{3^2}{n c_4(n)} Var(\bar{S}) \\ &= \frac{\sigma^2}{kn} + \frac{9\sigma^2(1 - c_4^2(n))}{knc_4^2(n)} \\ &= \frac{\sigma^2}{kn} + \left(1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Seja B_i o evento em que a média amostral excede os limites de controle estimados. Então, a probabilidade de um alarme falso na i -ésima amostra é:

$$\begin{aligned} Pr(B_i) &= Pr(\{\bar{X}_i > \widehat{LSC}_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X}_i < \widehat{LIC}_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0) \\ &= Pr(\{\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}} > 0\} \cup \{\bar{X}_i < \widehat{LIC}_{\bar{X}} < 0\} | \mu = \mu_0) \end{aligned}$$

Por sua vez \bar{X}_i e $\widehat{LSC}_{\bar{X}}$ são aproximadamente normais, assim a diferença $\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}$ é também aproximadamente normal, com média e variância dadas, respectivamente pelas expressões:

$$E(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) = \mu - \mu - \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} = -\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$$

e

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{k} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)}\right)\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Padronizando $\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}$, obtém-se:

$$Pr(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}} > 0) = 1 - \Phi \left(\frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{k} \left[1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)} \right]}} \right)$$

onde Φ é a função distribuição normal padrão.

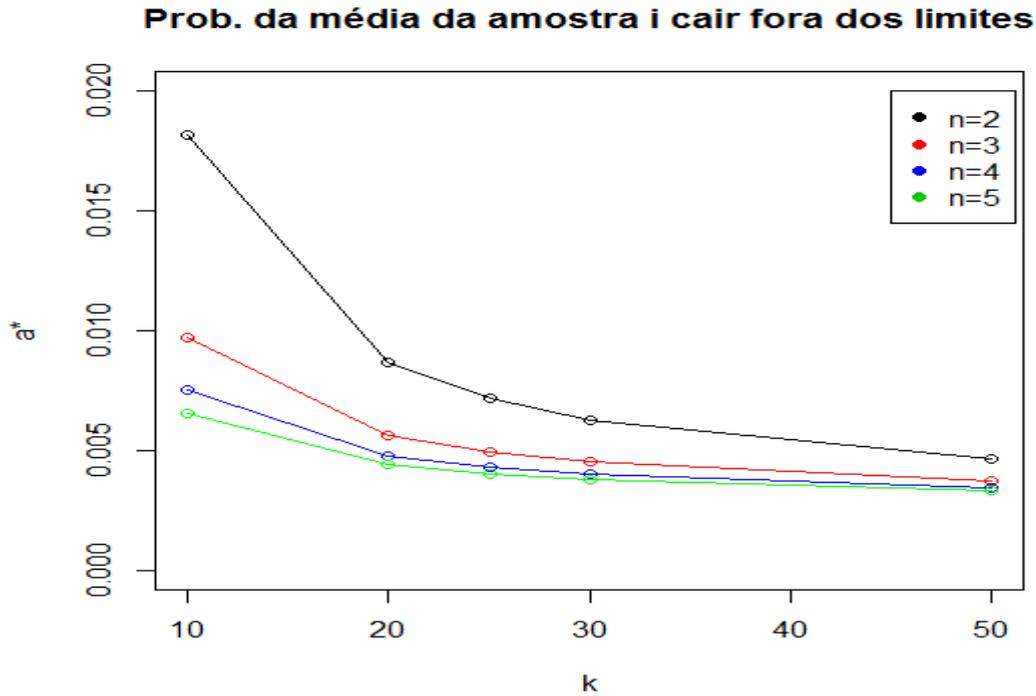
A probabilidade da média da amostra i cair fora dos limites de controle estimados é:

$$\alpha^* = Pr(B_i) = 2 \left[1 - \Phi \left(\frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{k} \left[1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)} \right]}} \right) \right]$$

já que os eventos $\{\bar{X}_i - \widehat{LIC}_{\bar{X}} < 0\}$ e $\{\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}} > 0\}$ são mutuamente exclusivos e têm mesma probabilidade de ocorrência.

Quesenberry (1993) verificou o efeito geral das estimativas dos limites de controle, onde ocorre uma tendência de acréscimo no valor do *CMS* e do desvio padrão, aumentando-se a quantidade de amostras (k). Pode-se notar que os valores aumentados no *CMS* e no desvio padrão são o oposto do que seria esperado a partir da avaliação das probabilidades para o caso estável ($\delta = 0$), se os eventos $\{B_i\}$ fossem independentes. Em particular, para $k = 30$ e $n = 5$ (valores frequentemente utilizados) obtém $Pr(\alpha^*) = 0,00378$, com essa suposição, tem-se um *CMS* = $1 / 0,00378 = 264,6$ e com um desvio padrão de 264,0. No entanto, os valores estimados do *CMS* e do desvio padrão são 403 e 563, respectivamente. Este efeito ocorre devido à dependência dos eventos $\{B_i\}$, que é devido por sua vez, a utilização dos limites estimados.

Da figura 2, percebe-se que a probabilidade de um alarme falso para os limites estimados (α^*) excede sempre os usuais 0,0027.

Figura 2: Probabilidade da amostra i cair fora dos limites de controle

Fonte: Autor

Quesenberry (1993) salienta ainda, que embora as variáveis aleatórias \bar{X}_i e \bar{X}_j sejam independentes, tem-se que as variáveis aleatórias $(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}})$ e $(\bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}})$ não são independentes, os eventos B_i e B_j também não são independentes. Para verificar esta afirmação, note que a covariância destas diferenças pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} Cov(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}, \bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) &= Cov(\bar{X}_i, \bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) - Cov(\widehat{LSC}_{\bar{X}}, \bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) \\ &= Cov(\bar{X}_i, \bar{X}_j) - Cov(\bar{X}_i, \widehat{LSC}_{\bar{X}}) - Cov(\widehat{LSC}_{\bar{X}}, \bar{X}_j) + Cov(\widehat{LSC}_{\bar{X}}, \widehat{LSC}_{\bar{X}}) \end{aligned}$$

\bar{X}_i e \bar{X}_j são independentes entre si e de $\widehat{LSC}_{\bar{X}}$

$$\begin{aligned} Cov(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}, \bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) &= Var(\widehat{LSC}_{\bar{X}}) \\ &= \frac{\sigma^2}{kn} \left(1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)} \right) \end{aligned}$$

Das expressões (2) e (3), pode-se calcular a correlação entre as diferenças $(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}})$ e $(\bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}})$ como segue:

$$\begin{aligned}
\text{Corr}(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}, \bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}}) &= \frac{\text{Cov}(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}}, \bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}})}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}})\text{Var}(\bar{X}_j - \widehat{LSC}_{\bar{X}})}} \\
&= \frac{\text{Var}(\widehat{LSC}_{\bar{X}})}{\text{Var}(\bar{X}_i - \widehat{LSC}_{\bar{X}})} \\
&= \left[1 + k \left(1 + \frac{9(1 - c_4^2(n))}{c_4^2(n)} \right)^{-1} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Nota-se que essa correlação é função apenas de k e n , sendo sempre positiva.

Salienta-se que para valores fixos de k e n a probabilidade B_i é constante para todo i . Entretanto, como B_i e B_j não são independentes, as variáveis aleatórias indicadoras de alarme falso em cada amostra i , $i = 1, 2, \dots$, não compõem uma sequência de ensaios Bernoulli, já que B_i e B_j não são independentes, para todo ij .

Dessa maneira, a distribuição do comprimento entre ocorrências consecutivas dos eventos B_i não tem distribuição geométrica. Assim, o CMS para o gráfico de \bar{X} com limites de controle estimados não pode ser avaliado por meio da média de uma distribuição geométrica.

Inicialmente, muitos estudos reconheciam que, a probabilidade de um sinal acontecer é diferente quando se utiliza parâmetros estimados daquela obtida conhecendo-se os parâmetros. A estratégia adotada então era ajustar os limites de controle de maneira que a probabilidade incondicional de alarme falso fosse mantida, podendo-se assim determinar o tamanho amostral adequado. Esta abordagem foi adotada por King (1954), Proschan e Savage (1960), Hillier (1964,1967,1969) e Yang e Hillier (1970) para vários tipos de gráficos de Shewhart. Salienta-se que esta abordagem tem valor prático limitado.

Hillier (1969) deu origem a um método para avaliar a probabilidade de alarme falso utilizando os limites de controle para o caso em que a amplitude amostral média (\bar{R}) é utilizada para estimar o valor de σ . No entanto, ele não considerou a questão da dependência então seu método tem utilidade limitada na avaliação do desempenho global dos gráficos de controle. Proschan e Savage (1960) também consideraram os efeitos dos valores de k e n sobre a

probabilidade de alarme falso. Eles apresentaram algumas tabelas de valores máximos de k para controlar este erro a um nível $\alpha = 0,01$ para um dado valor de n , para os casos de \bar{R} . No entanto, esses autores também não abordaram a questão da dependência, e os resultados apresentados também são de utilidade limitada. Ghosh et al. (1981) consideraram a distribuição marginal do comprimento de sequência quando $\hat{\sigma}_c$ é usado para estimar σ .

Quesemberry (1993) em um importante estudo de simulação mostrou que, para $n = 5$, os gráficos de \bar{X} cujos limites de controle foram estimados por $\hat{\sigma}_B$, com $k \geq 100$, apresentam um comportamento quase equivalente ao gráfico de \bar{X} com parâmetros conhecidos. Observou também que a distribuição do comprimento de sequência com parâmetros estimados tem caudas mais pesadas que a distribuição do comprimento de sequência com parâmetros conhecidos (distribuição geométrica). Saleh et al. (2015) mostraram que nenhuma quantidade realista de subgrupos (k) na Fase I é suficiente para se ter confiança que o *CMS* obtido pelo gráfico construído esteja próximo do valor desejado. Jones-Farmer et al. (2014) fornecem uma visão geral dos problemas relacionados a Fase I.

Geralmente, muitos autores têm alertado sobre o desempenho dos gráficos de controle na Fase II devido aos efeitos do erro de estimação. Por exemplo, Ghosh et al. (1981), Quesemberry (1993), Chen(1997), Jones et al. (2001), Chakraborti (2006), Bischak e Trietsch (2007) e Castagliola et al. (2012). Para uma perspectiva histórica e revisões extensivas da literatura sobre desempenho de gráficos de controle com parâmetros estimados, Jensen et al. (2006) e Psarakis et al. (2014).

3.1.3- Medidas de desempenho

Aroian e Levene (1950) consideraram várias medidas de desempenho no caso de parâmetros conhecidos e recomendaram a utilização de comprimento de sequência (*CS*) para avaliar o desempenho dos gráficos de controle. Nesse caso, o *CS* é uma variável aleatória geométrica que representa o número de amostras entre alarmes. Verifica-se na seção 3.1.2, que quando os parâmetros são estimados a distribuição do *CS* não é geométrica, e, assim,

a probabilidade de um sinal por si só não tem nenhuma interpretação significativa. Uma medida intuitivamente atraente e amplamente mais aplicável a desempenho de gráfico de controle é o comprimento médio da sequência (*CMS*). O *CMS* é uma média do número de amostras antes de um ponto, indicar uma condição de processo fora de controle. Se a probabilidade do ponto estiver fora dos limites é α , então ao retirarem as amostras tem-se uma sequência de Bernoulli com probabilidade α de sucesso. Assim, o número de amostras aleatórias necessárias até a ocorrência do primeiro sucesso (ponto fora dos limites) tem distribuição geométrica, cujo valor esperado é $1/\alpha$. Para qualquer processo onde as observações são não correlacionadas o *CMS* do gráfico de controle Shewhart é definido da seguinte forma:

$$CMS_0 = 1/\alpha$$

e o desvio padrão do comprimento de sequência (*DPCS*) é dado:

$$DPCS = \frac{\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} = \sqrt{CMS(CMS - 1)}$$

Nota-se que $DPCS \approx CMS$ quando seu valor é grande em relação a 1 (Montgomery, 2009).

Para cada gráfico \bar{X} conhecido com os usuais limites 3σ , tem-se que $\alpha = 0,0027$, assim, o valor do $CMS = 370,4$ e um $DPCS = 369,9$.

O uso do *CMS* como medidas de desempenho tem recebido algumas críticas na literatura, e isso se deve ao fato de sua distribuição geométrica. Montgomery (2009) demonstra que há duas preocupações com o *CMS*. Primeiro em relação ao desvio padrão do *CS* que é muito grande; e o segundo relacionados a distribuição geométrica que é muito assimétrica à direita, de modo que alguns resultados na prática variarão bastante.

Um problema prático importante é que, em geral, o *CMS* de um gráfico de controle tem seus limites baseados em estimativas dos parâmetros do processo, resultando em valores inflados para o *CMS*. Percebe-se assim que, quando os parâmetros do processo são desconhecidos e as estimativas de Fase I são usadas para construir os gráficos de controle, as propriedades do *CS*, incluindo o *CMS*, devem ser interpretados com bastante cautela (Quesenberry, 1993).

Montgomery (2009) apresenta um exemplo ilustrativo dessa questão. Supondo que a linha média do gráfico esteja perfeitamente estimada, mas que o desvio padrão do processo esteja superestimado em 10%. Isso resultaria em uma $CMS = 517$, consideravelmente maior que o valor teórico de 370. Em um processo normalmente distribuído, o CMS resultaria em um valor de 268, que é consideravelmente menos que 370. A média é de 392 o que sugere que erros na estimação do desvio padrão do processo resultam em CMS superestimados.

Seja a variável aleatória do CS quando os parâmetros do processo são desconhecidos. Sejam V e W os estimadores de μ e σ , respectivamente. Verifica-se anteriormente que a variável aleatória T não é independente de V e W . Para obtenção do CMS deve-se considerar a função de probabilidade condicional $f_{T|v,w}(t|v,w) = Pr(\{T = t|V = v, W = w\})$. Isso implica que o CS tem distribuição diferente para cada valor possível de V e W . Salieta-se assim que $CMS = E(T|V, W)$ é uma variável aleatória. O mesmo se aplica para obtenção de seus demais momentos e percentis.

3.1.4- Efeito de não normalidade

De acordo com Montgomery (2009), uma das suposições na área industrial para a utilização dos gráficos de controle \bar{X} é de que a distribuição subjacente da característica de qualidade seja normal. E esta é justificada pelo teorema do limite central. O teorema afirma, essencialmente, que, em condições gerais, a distribuição das médias amostrais vai abordar normalidade para grandes tamanhos de amostra. Assim, surgem as perguntas "Qual o tamanho?" e "Para que a aproximação?". Segundo Montgomery (2009) quando é conhecida a forma da distribuição subjacente dos dados, podem-se deduzir as distribuições de probabilidade exata para os gráficos de controle \bar{X} . O autor ressalta que em muitas situações podem-se duvidar da suposição da normalidade. Se for realizada uma coleta extensiva de dados, que indicam que a suposição de normalidade não é atendida, necessitam-se conhecer a distribuição subjacente da característica e qualidade para obter os limites de controle exatos para o gráfico. Na prática, contudo é difícil determinar a forma da distribuição subjacente. Assim, uma alternativa seria usar os resultados da

teoria normal, conhecendo-se de antemão os efeitos do afastamento da normalidade no desempenho do gráfico. Existem na literatura vários estudos sobre o efeito do afastamento da normalidade. Chan, Hapuarachchi e Macpherson (1988), Yourstone e Zimmer (1992) estudaram o efeito da não normalidade do gráfico \bar{X} . Burr (1967) afirma que os limites de controle baseados na teoria normal são bem robustos com relação à hipótese de normalidade e podem ser utilizados a não ser que a população seja extremamente não normal. Schilling e Nelson (1976) estudaram algumas distribuições assimétricas. Seu estudo indicou que, na maioria dos casos, os tamanhos de amostras 4 ou 5 são suficientes para garantir a hipótese de normalidade. Os casos que tiveram os piores resultados foram para distribuições em que a curtose era maior que 6. Por exemplo, os autores relatam que o risco $\alpha^* \leq 0,014$ se $n \geq 4$ para distribuição gama quando $r = \frac{1}{2}$, em contraste com o valor teórico de 0,0027 quando a distribuição é normal.

3.2- Gráficos de controle de medidas individuais

Em algumas situações de monitoramento de processos industriais, algumas medições consecutivas são muito espaçadas no tempo. Por exemplo, um processo químico pode permitir apenas uma medição por dia. Por outro lado, em alguns casos, é produzida uma série de itens individuais de tal maneira que nenhum subgrupo natural é possível. Montgomery (2009) cita alguns exemplos dessa situação: (i) tecnologia de inspeção e medição automática é usada e toda unidade fabricada é inspecionada, de modo que não há razão para formar subgrupos racionais; (ii) a taxa de produção é muito lenta e é inconveniente acumular tamanhos de amostra $n > 1$. O longo intervalo entre observações pode causar problema na formação dos subgrupos; (iii) medidas repetidas do processo diferem apenas por causa de erro de laboratório ou análise, como em muitos processos químicos; (iv) várias medidas são tomadas em uma mesma unidade do produto, como espessura do óxido em uma placa na manufatura de semicondutores; (v) em maquinaria de processos, tais como o de fabricação de papel, medidas sobre algum parâmetro, como a espessura do revestimento ao longo do rolo, diferem muito

pouco e produzem um desvio padrão muito pequeno, caso objetivo seja controlar a espessura do revestimento ao longo do rolo.

Montgomery (2009) aponta que há muitos problemas de monitoramento quando a aplicação principal implica em amostra de tamanho $n = 1$, o método tradicional de lidar com este caso é a utilização do gráfico X . É um gráfico de controle de fácil implantação que ajuda na identificação de desvios padrões no processo ao longo do tempo, mas tem duas importantes desvantagens: (i) o gráfico não é sensível a pequenas mudanças na média do processo. (ii) o desempenho do gráfico pode ser severamente afetado se as observações não são normalmente distribuídas.

Em face dessas desvantagens, alguns autores, como Montgomery (1996) e Sutherland, Devor e Chang (1992), recomendam que a suposição de normalidade seja verificada por construção de um gráfico de probabilidade normal dos dados.

De acordo com Braun e Park (2008) quando os subgrupos são de tamanho 1, os gráficos de Shewhart, tais como o gráfico de X e amplitude móvel (AM), têm sido bastante utilizados. Porém Montgomery (2009) afirma que o $EWMA$ (média móvel exponencialmente ponderada) e $CUSUM$ (soma cumulativa) pode detectar pequenas mudanças na média mais rapidamente do que um gráfico de \bar{X} .

Por sua vez, Borrer et al. (1999) mostram em seu trabalho que o desempenho do CMS para o gráfico X quando o processo está sob controle é muito sensível à suposição de normalidade. Salienta-se que a ocorrência de alarmes falsos em excesso pode levar a ajustes desnecessários do processo, à perda de confiança no gráfico de controle como instrumento de acompanhamento. E, finalmente, poderá acarretar a perda de produtividade. Ele sugere a utilização do gráfico de controle da média móvel exponencialmente ponderada ($EWMA$) como uma alternativa para o gráfico de medidas individuais para dados não normais. O autor aponta ainda que, no caso não normal, uma carta de controle $EWMA$ devidamente projetada terá um CMS_0 aproximadamente igual a 370,4 quando $n = 1$. Além disso, o gráfico $EWMA$ será bastante eficaz na detecção de pequenas mudanças no processo.

Roes, Does e Schurink (1993) e Reynolds e Stoumbos (2001a, 2001b) estudaram os aspectos estatísticos dos gráficos de controle para observações individuais. Em geral, para avaliação do desempenho estatístico desse tipo de gráfico, assume-se que a função de distribuição subjacente é normal, embora haja sempre alguma preocupação com essa hipótese. Ela é sempre arriscada, especialmente no caso em que são usadas medidas individuais. Assim, há situações práticas que requerem procedimentos alternativos para construção desse tipo de gráficos de controle, tendo esse problema recebido uma atenção extensiva na literatura. Reynolds e Stoumbos (2000) estudam os efeitos da não normalidade e da autocorrelação no desempenho de vários gráficos de controle de medidas individuais. Por outro lado, Woodall e Montgomery (1999) apontam que o aumento da disponibilidade de dados levaria a um papel cada vez maior de métodos não paramétricos na construção de gráficos de controle. Vermaat et. al (2003) promovem uma ampla comparação de metodologias para planejamento de gráficos de controle para observações individuais, incluindo abordagem por núcleos estimadores. Polansky (2005) propõe gráfico de controle não paramétrico que utiliza núcleo estimador e *bootstrap* para estimar a densidade da estatística amostral, tanto no contexto univariado quanto no multivariado. Albers e Kallenberg (2004a) estudam o comportamento de gráficos de controle não paramétricos e analisam quando e como eles podem ser usados de uma maneira apropriada. Dentre outros, Chakraborti, Laan e Wiel (2004), Qiu (2008), Balakrishnan, Triantafyllou e Koutras (2010), Mercado, Conerly e Perry (2011) propõem e analisam modelos não paramétricos de gráfico de controle de Shewhart de variável para uso sob condições em que a característica monitorada do processo é marcadamente não normal. Salienta-se que a capacidade computacional crescente leva à utilização cada vez mais frequente de técnicas não paramétricas, em geral, computacionalmente.

Embora μ e σ sejam geralmente desconhecidos, eles podem ser estimados a partir de uma amostra Fase I, X_1, X_2, \dots, X_k , de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. O estimador clássico de μ é:

$$\bar{X}_k = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k}$$

A abordagem habitual para obtenção dos limites de controle para um gráfico X é estimar o desvio padrão do processo utilizando amplitude móvel (AM) a partir de uma amostra contendo k medidas individuais da característica de qualidade de interesse do processo. Sabemos que o desvio padrão dessa amostra S_k é muito eficiente quando as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas, mas tem a desvantagem de ser sensível a tendências e oscilações. Por conseguinte, em tais situações, são necessários estimadores de σ , que sejam menos sensíveis a esses desvios (Mittag, 1993).

Duncan (1965) propôs o uso da amplitude móvel média (AM) para estimação do desvio padrão do processo. Ela é definida como:

$$\overline{AM}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=2}^k |X_i - X_{i-1}|$$

A \overline{AM}_k é, a média das amplitudes móveis das k observações amostrais. Esse gráfico de controle tende a ter um desempenho razoável para tamanhos moderados de amostra Fase I (Wheeler, 1995).

Considerando uma amostra x_1, x_2, \dots, x_k de medidas individuais independentes e com mesma distribuição normal, Kamat (1953) demonstrou que as expressões da esperança e variância de \overline{AM}_k são respectivamente:

$$E(\overline{AM}_k) = \frac{2}{\pi} \sigma$$

e

$$\begin{aligned} Var(\overline{AM}_k) &= \left(\left(\frac{8}{3} + \frac{4\sqrt{3} - 12}{\pi} \right) \frac{1}{k} - \left(\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3} - 8}{\pi} \right) \frac{1}{k^2} \right) \sigma^2 \\ &= (1,052264m^{-1} - 0,325504m^{-2}) \sigma^2 \end{aligned}$$

O autor verificou também que \overline{AM}_k é pouco influenciado por pequenas variações na média do processo, sendo que o viés na estimação de σ é menor que aquele obtido por S_k . Esse fato foi verificado em simulações realizadas por Harding, Lee e Mullins (1992).

Os limites de controle do gráfico de medidas individuais baseados na (AM) estão definidos em Duncan (1965), sendo dados por:

$$LSC_{AM} = \bar{X}_k + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \overline{AM}_k$$

e

$$LIC_{AM} = \bar{X}_k - \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \overline{AM}_k$$

onde, $2/\sqrt{\pi} = d_2(2) \approx 1.128$ é uma constante, $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \overline{AM}_k$ é um estimador não viciado de σ sob normalidade e independência. Dependendo das circunstâncias em que as medidas individuais são obtidas, uma combinação de gráficos de controle de medidas individuais e de amplitude móvel pode ser usada para monitorar simultaneamente a média e o desvio padrão do processo. Duncan (1965) descreve este procedimento.

Em Quesenberry (1993) também é encontrado estudos sobre tamanho amostral (k) no caso dos gráficos de medidas individuais. Seguindo a mesma ideia do estudo efetuado para gráfico \bar{X} , suponha que em algum momento ocorrerá uma pequena mudança na média do processo, surgindo um novo valor $\mu + \delta\sigma$. O autor apontou também que se pode esperar a ocorrência de uma maior quantidade de sequências curtas entre alarmes e uma quantidade bastante pequena de sequências longas. A fim de proteger-se contra esta dependência entre os valores de x_i com os limites estimados, ele recomenda $k > 300$ para estabelecer os limites de controle para o gráfico de medidas individuais. Se forem utilizados limites tentativos para gráficos de medidas individuais, então eles devem estar baseados em no mínimo 100 medidas ($k = 100$). Rigdon et al. (1994) realizou um estudo semelhante, verificando que, com o aumento do tamanho k da amostra, a distribuição do CS aproxima-se daquela do caso em que os parâmetros do processo são conhecidos. Os autores concordam com as conclusões de Quesenberry (1993) recomendando também o uso de pelo menos 100 observações individuais na Fase I.

Albers e Kallenberg (2004b) estudaram os gráficos de medidas individuais usando probabilidades excedidas e CMS como medidas de desempenho. A probabilidade excedida mede a proporção entre a probabilidade de um sinal quando com limites estimados de controle com relação à probabilidade de sinal quando se assume que os parâmetros são

conhecidos. A probabilidade excedida é então usada para estudar o desempenho dos gráficos e para recomendar ajustes aos limites de controle. Uma limitação é que essa medida é útil apenas para gráficos de Shewhart baseadas em observações independentes. Essas correções dos limites de controle são úteis para manter o desempenho do processo sob controle, mas eles também resultam em um impacto negativo no desempenho fora de controle que não foi estudado adequadamente. Por outro lado, Maravelakis et al. (2002) estudaram gráficos de medidas individuais para monitorar mudanças na variabilidade. O uso desses gráficos para monitorar a variabilidade é consistente com a recomendação de Rigdon et al. (1994) e outros autores a usar um único gráfico para monitorar tanto a média como a variabilidade.

A discussão de não normalidade é uma questão estudada por vários autores. Borrór, Montgomery e Runger (1999) estudaram o comportamento de gráficos de medidas individuais quando os dados não eram normais, utilizando diversas distribuições de dados assimétricos. Descobriram que o CMS_0 sob controle do processo é bastante afetado por dados não normais. Como exemplo de ilustração, se um gráfico de medidas individuais tem limites 3σ de modo que o $CMS_0 = 370,4$, o CMS , para uma distribuição Gama está entre 45 e 97, dependendo do parâmetro de forma da distribuição, verificando que quanto mais assimétrica é a distribuição pior o seu desempenho. Com relação a desvio de normalidade quanto à curtose foi estudado o comportamento do gráfico e medidas individuais, considerando-se a distribuição t para características de qualidade. Verificou-se que CMS_0 variou entre 76 e 283 à medida que seus graus de liberdade variam de 4 a 50, ou seja, o desempenho do gráfico melhora quando a t se aproxima da distribuição normal, embora tenha concluído que, mesmo quando o processo apresenta evidências de desvios moderados de normalidade os limites de controle podem ser totalmente inapropriados (Montgomery, 2009). Uma alternativa para lidar com esses problemas seria utilizar os percentis da distribuição subjacente correta.

4- GRÁFICOS DE CONTROLE NÃO PARAMÉTRICO

Salienta-se que, é importante verificar a hipótese de normalidade ao usar gráficos de medidas individuais, já que esses gráficos são bastante sensíveis a não normalidade. Uma abordagem possível é transformar a variável original em uma nova variável, em uma tentativa de que ela seja aproximadamente normal.

Por outro lado, os modelos paramétricos para a estimação de percentis da função de distribuição da variável aleatória da característica de qualidade oferecem a possibilidade de se obter ganhos muito grandes em eficiência, mas somente se o modelo assumido for próximo do verdadeiro. Willemain e Runger (1996) apresentam gráficos de controle a partir de distribuições de referência empíricas, baseado em valores históricos do processo.

4.1- Gráfico de controle por núcleo estimador

4.1.1- Núcleo estimador

Dentre as várias abordagens para estimar a função de distribuição de uma variável aleatória, a metodologia de suavização por núcleo estimador tem sido uma alternativa bastante utilizada devido a suas propriedades assintóticas. Silverman (1986) salienta uma questão crucial na aplicação desta metodologia é a determinação da janela h , que controla o grau de suavização dos dados. Se h é muito pequeno, admite-se demasiado ruído amostral e se h é muito grande, perdem-se características da curva devido à supersuavização. A taxa de convergência e a suavidade do estimador dependem da escolha da largura desta janela.

Alguns autores como Silverman (1986), Chiu (1991), Bowman (1984), Park e Marron (1990) e Bowman, Hall e Prvan (1998) propõem procedimentos para escolher a janela ótima h_0 . Embora, na prática, seja possível escolher o parâmetro de suavização de maneira subjetiva, há uma grande demanda por procedimentos automáticos para seleção da janela. Um seletor automático bastante estudado por Silverman (1986) é o da função escore de validação cruzada de mínimos quadrados. Embora o minimizador da função escore de validação cruzada seja uma estimativa consistente da janela ótima e possua

normalidade assintótica, verifica-se que as estimativas da janela proveniente dos procedimentos de validação cruzada apresentam uma grande variabilidade, impactando assim a estimativa funcional desejada. Estudos de simulação indicaram que o seletor tende a escolher valores de janela menores, com mais frequência que o predito pelos teoremas assintóticos. Chiu (1991) apresenta outra abordagem possível na escolha da janela ótima é através do método *'plug-in'* que estima o valor da única quantidade desconhecida na expressão que define o valor ótimo de h , ou seja, a parcela dependente da função que se quer estimar ($\int [f'']^2$, para a estimação da função densidade ou $\int [F'']^2$ para a estimação da função distribuição). Salienta-se que o método *'plug-in'*, quando aplicável, tem a vantagem de, em seu cálculo, não necessitar de uma rotina de otimização. Polansky e Baker (2000) propõe um estimador *plug-in* multi-estágio que tem o melhor desempenho assintótico na estimação da função de distribuição. Bessegato (2001) apresenta uma revisão da literatura sobre procedimentos de estimação de suavidade na estimativa da função de distribuição.

Seja uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n de uma variável aleatória com função de distribuição F . Um estimador comum da função de distribuição é a função de distribuição empírica \hat{F}_n , que é definida por:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x; [X_i, \infty)) \quad (4)$$

onde $I(x, A)$ é uma função indicadora de A , que é definida por:

$$I(x, A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

que é uma função degrau, logo descontínua, com um passo de altura n^{-1} em cada ponto amostral observado X_i . Quando considerado como um estimador pontual de F , $\hat{F}_n(x)$ é um estimador não viciado e consistente de $F(x)$ e sua variância é dada por:

$$\text{Var} [\hat{F}_n(x)] = \frac{F(x)[1 - F(x)]}{n}$$

para mais detalhes, veja Casella e Berger, (2010). A partir deste ponto, para simplificação, quando não houver indicação dos limites de integração, assume-se que a integral é sobre toda reta.

Um método de suavização não paramétrico para estimar a função distribuição utiliza um núcleo estimador da densidade. Seja k uma função contínua tal que. $\mu_0(k) = 1$, $\mu_1(k) = 0$ e $0 < \mu_2(k) < \infty$, onde $\mu_l(k) = \int_{-\infty}^{\infty} t^l k(t) dt$.

Com essas hipóteses, k é uma função de densidade de probabilidade contínua, simétrica em torno de zero, com variância $\mu_2(k)$ e será denominado núcleo da densidade. O núcleo estimador da densidade f é dado por:

$$\hat{f}_{n,h}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

Assume-se que $h \rightarrow 0$ e $nh \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

O parâmetro h é um parâmetro de suavização, ou janela e controla a suavidade de $\hat{f}_{n,h}$. A janela h tem sido estudada extensivamente e é escolhido para minimizar alguma medida de desempenho global de $\hat{f}_{n,h}$. Uma estimativa da função da função de distribuição F é obtida simplesmente integrando $\hat{f}_{n,h}(x)$ para obter,

$$\hat{F}_{n,h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

onde,

$$K(x) = \int_{-\infty}^x k(t) dt$$

é uma função distribuição contínua e será denominada núcleo da distribuição. Salienta-se que, dessa maneira, $\hat{F}_{n,h}(x)$ é contínua e diferenciável.

Este estimador foi proposto pela primeira vez por Nadaraya (1964) que demonstrou que o parâmetro h controla a suavidade de F . Infelizmente os valores de h que otimizam medidas globais de precisão de $\hat{F}_{n,h}$ são diferentes daqueles que otimizam $\hat{f}_{n,h}$. Portanto, as várias técnicas usadas em estimação da função de densidade não são aplicadas diretamente no contexto da estimação da função de distribuição.

Escolha da janela ótima h

A escolha do parâmetro de suavidade é uma questão fundamental no uso da metodologia de estimação por núcleo estimador, tendo sido exaustivamente estudado na literatura. Salienta-se que, diversos autores apontam que a escolha do núcleo K não é muito crucial no uso dessa abordagem. Quando o parâmetro de suavidade for muito pequeno, o resultado da estimativa da função de distribuição tende a produzir estruturas que apresentam curvas muito irregulares. Já quando é escolhido um valor grande para h , o resultado da estimativa da função de distribuição tende a suavizar F em excesso.

Neste trabalho é utilizado o núcleo Gaussiano, ou seja, K é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Azzalini (1981) estabelece que a escolha da janela ótima do núcleo estimador da função de distribuição é da forma $h_0 = Ck^{-1/3}$, em que C é uma constante que depende de S , o desvio-padrão de F .

A medida mais usada de desempenho global das estimativas de $\hat{F}_{n,h}$ é o erro quadrático médio integrado (*MISE – Mean Integrated Square Error*), que é definido como:

$$MISE(\hat{F}_{n,h}) = E \left(\int [\hat{F}_{n,h}(x) - F(x)]^2 dx \right)$$

Swanepoel (1988) derivou a expressão do erro quadrático médio integrado (MISE) estudando um parâmetro de suavidade ótima de maneira a minimizar o MISE e indicou que, assim, o núcleo estimador $\hat{F}_{n,h}(x)$ é assintoticamente mais eficiente que a função de distribuição empírica $\hat{F}_n(x)$. Outros resultados assintóticos foram obtidos por Abdous (1993), Azzalini (1981), Hill (1975), Jones (1990), Singh, Gasser e Prasad (1983).

Uma forma alternativa para o erro quadrático médio integrado é dado por:

$$MISE(\hat{F}_{n,h}) = \int \{ \text{Var}[\hat{F}_{n,h}(x)] + \text{Vício}^2[\hat{F}_{n,h}(x)] dx \}$$

A variância e o vício de $\hat{F}_{n,h}(x)$ são dados pelas expressões (B.1) e (B.2) do Apêndice B. Assim o erro quadrático médio integrado assintótico pode ser expresso por:

$$MISE(\hat{F}_{n,h}) = n^{-1} \int F(x)[1 - F(x)]dx - n^{-1}h\rho(k) + \frac{h^4}{4}\mu_2^2(k)R(F'') \quad (5)$$

onde,

$$\rho(k) = 2 \int xK(x)k(x)dx = \int K(t)[1 - K(t)]dt$$

e

$$R(F'') = \int [F''(x)]^2 dx$$

$|F''(x)|$ é uma medida da curvatura de $F(x)$, o funcional $R(F'')$ mede a curvatura total de F . Se a curvatura de F for pequena, $R(F'')$ será pequena e será necessária uma janela grande para estimá-la. Por outro lado, quando $R(F'')$ é grande, será ótima uma suavização pequena.

Da eq. (5) verifica-se que assintoticamente pequenos valores de h levam a um acréscimo na variância assintótica e, desta maneira, a estimativa $\hat{F}_{n,h}$ resultante terá uma aparência muito irregular. Por outro lado, como o vício na estimação de $F(x)$ depende diretamente da amplitude da janela h , valores grandes de h reduzem a variância assintótica de $\hat{F}_{n,h}$, mas aumentam seu vício assintótico. Salienta-se que o vício na estimação de $F(x)$ não depende diretamente do tamanho da amostra, mas da amplitude da janela h .

A janela ótima, h_0 , será dada por $\frac{d}{dh}MISE(\hat{F}_{n,h}) = 0$ para $h = h_0$. Assim, derivando (4) com relação à h , obtem-se,

$$\frac{d}{dh}MISE(\hat{F}_{n,h}) = -\rho(k)n^{-1} + 4\mu_2^2(k)R(F'')h^3$$

os pontos críticos serão dados por h_{crit} , tal que

$$h_{crit} = \left[\frac{\rho(k)}{\mu_2^2(k)R(F'')} \right]^{\frac{1}{n}} n^{-\frac{1}{3}}$$

mas, $\frac{d^2}{dh^2} MISE(\hat{F}_{n,h}) = 3\mu_2^2(k)R(F'')h^2 > 0$, para todo h , já que $\mu_2^2(k)R(F'') > 0$ logo h_{crit} é ponto de mínimo global do erro quadrático médio integrado e a expressão da janela ótima, h_0 , é dada por:

$$h_0 = \left\{ \frac{\rho(k)}{\mu_2^2(k)R(F'')} \right\}^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \quad (6)$$

Percebe-se que a janela não é disponível na prática, pois, ela depende da função de distribuição desconhecida F , logo não se pode determinar $R(F'')$.

O valor do $MISE(\hat{F}_{n,h})$ quando usamos $h = h_0$ é

$$MISE_0(\hat{F}_{n,h}) = n^{-1} \int F(n)[1 - F(x)]dx - n^{-1} \left[\frac{\rho(k)}{\mu_2^2(k)R(F'')} \right]^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \rho(k) \quad (7)$$

que é a mesma taxa assintótica alcançada pela função de distribuição empírica. Dessa eq. (7), percebe-se também que a suavização tem apenas um efeito de 2ª ordem no $MISE$ da função de distribuição.

Enfatiza-se, entretanto que ao usar esses métodos teremos uma estimativa contínua de F ao invés de uma estimativa discreta, como a oferecida pela função de distribuição empírica.

(i) *Janela de referência normal*

Há vários métodos propostos para estimar a janela ótima a partir de uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n . Talvez o método mais simples para estimar h_0 é assumir que f segue uma forma paramétrica, usando-se assim sua janela correspondente. Isto é, conhecido como uma janela de referência. Por exemplo, se f é uma densidade normal com média μ e variância σ^2 então:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}}$$

assim,

$$R(F'') = \int \{f'(x)\}^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}} \left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \right]^2 dx \\
&= \int \frac{(x-\mu)^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\
&= \frac{1}{2\sigma^5\sqrt{\pi}} \int \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\right)^2} dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}\sigma^5} \\
&= \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R(F'') = \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}}$$

A janela de referência correspondente é:

$$\begin{aligned}
h_n &= \left\{ \frac{\rho(k)}{\mu_2^2(k) \frac{1}{4\sigma^3\sqrt{\pi}}} \right\}^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \\
h_n &= \left\{ \frac{4\sqrt{\pi}\rho(k)}{\mu_2^2(k)} \right\}^{\frac{1}{3}} \sigma n^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

No caso especial em que o núcleo estimador é uma função distribuição normal padrão, tem-se que $\mu_2^2(k) = 1$ e temos que o valor de ρ é dado pela expressão abaixo:

$$\rho(k) = \int \Phi(x)[1 - \Phi(x)]dx = 0,5641896$$

logo,

$$h_n = 4\sqrt{\pi} 0,56418996 \sigma n^{-\frac{1}{3}}$$

$$h_n = 1,587\sigma n^{-\frac{1}{3}}$$

Estima-se σ^2 por meio do estimador da variância, $\hat{\sigma}^2$ para obter um estimador de h_n , ou seja, $\hat{h}_n = 1,587\hat{\sigma}n^{-\frac{1}{3}}$, para um núcleo normal.

Pode-se adotar o desvio padrão amostral, S , como $\hat{\sigma}$. Por outro lado, se f é uma função de densidade de probabilidade normal seu desvio padrão pode ser dado por:

$$\sigma = \frac{F^{-1}(q) - F^{-1}(p)}{\Phi^{-1}(q) - \Phi^{-1}(p)}, 0 < p < 1 \quad (8)$$

A expressão (8) é uma razão de amplitudes de quantis. Note que $F^{-1}(q) = xq$ então $\Phi(q) = \frac{xq - \mu}{\sigma}$. Em particular, quando $p = 0,25$ e $q = 0,75$, $F^{-1}(p)$ e $F^{-1}(q)$ são respectivamente, 1º e o 3º quartis e a eq. (8) é a distância interquartílica padronizado, ou seja

$$\hat{\sigma} = \left\{ \frac{DIQ}{1,34898} \right\}$$

Silverman (1986) propôs estimar σ pelo seguinte estimador:

$$\hat{\sigma} = \min \left\{ S, \frac{DIQ}{1,349} \right\}$$

sugerindo que ele é mais apropriada para uso como janela de referência para aplicação em população não-normais

Polansky e Baker (2000) salientam que as estimativas de \hat{h}_n serão em geral bem maiores que as verdadeiras nos casos em que não sejam aproximadamente normais.

(ii) *Janela robusta de referência normal*

No caso da estimação da função de densidade, Zhang e Wang (2009) propõem uma janela de referência normal, robusta a *outliers* e que se adapta a diferentes tipos de distribuição. No caso do núcleo Gaussiano, o estimador de referência normal robusto da janela h é dado por:

$$\hat{h}_{RN}(p) = (\sqrt[3]{4}Q_p)k^{-1/3}$$

\hat{Q}_p é o p -ésimo quantil de:

$$\widehat{RQR}_i = \frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\Phi^{-1}(q_i) - \Phi^{-1}(p_i)}, i = 1, 2, \dots, k,$$

onde $q_i = \frac{i+m-0,5}{k}$, $p_i = \frac{i-m-0,5}{k}$ e $m = [n^{1/2}]$, com $[x]$ sendo o maior inteiro menor ou igual a x . Além disso, define-se $\underline{x} = x$ se $1 \leq x \leq k$ ou 1 , se $x < 1$ ou k , se $x > k$.

$h_{NR}(p)$ torna-se a janela ótima h_0 se F é normal, mas, se F não é normal, ela é muito mais próxima de h_0 do que a h_{NR} clássica.

(iii) *Método “Plug-in”*

Polansky e Baker (2000) propõem outra abordagem possível na escolha da janela ótima que é através da utilização de método “*plug-in*”, que estima o valor da única quantidade desconhecida na expressão do erro quadrático médio integrado assintótico, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} [F''(x)]^2 dx$, parcela dependente da função de densidade que se quer estimar. Esta estimativa será utilizada na eq. (5) para obter h_0 . Salienta-se que o método “*plug-in*” tem a aparente vantagem de, em seu cálculo, não necessitar de uma rotina de otimização.

Assim, temos que:

$$R(F'') = \int [f']^2 dx = f'(x)f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f''(x)f(x) dx$$

Sob condições suficientes de suavidade $f'(x)f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Podemos então escrever que:

$$R(f') = -\Psi_2$$

com

$$\Psi_2 = \int f''(x)f(x) dx = E[f''(x)] \quad (9)$$

Hall e Marron (1987) e Jones e Sheather (1991) discutem estimadores por núcleo para eq. (9). Polansky e Baker (2000) usaram estimativa “*diagonals-in*” para a eq. (9), ou seja,

$$\hat{\Psi}_2(g) = n^{-2}g^{-3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L'' \left\{ \frac{X_i - X_j}{g} \right\}$$

onde L é um núcleo estimador que não é necessariamente igual a k e g é um parâmetro positivo, usualmente denominado como um parâmetro de suavização ou janela. Sob as hipóteses de que $g \rightarrow 0$ e $ng^5 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, Jones e Sheather (1991) mostram que o valor de g que minimiza $E \left[\{ \hat{\Psi}_2(g) - \Psi_2 \}^2 \right]$ é dado por:

$$g_2 = \left[\frac{2L''(0)}{-n\mu_2(L)\Psi_4} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (10)$$

Estes resultados podem ser usados para se obter um estimador da eq. (6), dado por:

$$\hat{h}_0 = \left[\frac{C_3}{-n\mu_2^2(k)\hat{\Psi}_2(g_2)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Da eq. (9), nota-se que g_2 depende de f por meio de Ψ_4 , devendo também ser estimado. Isto pode ser feito estimado Ψ_4 com $\hat{\Psi}_4(g_4)$, na qual o parâmetro de suavidade g_4 depende de Ψ_6 , e assim por diante. Jones e Sheather (1991) sugerem que em algum estágio devia-se estimar Ψ_r usando uma distribuição de referência usualmente a normal.

Se f é uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 , pode-se mostrar que

$$\Psi_r = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{(2\sigma)^{r+1} \left(\frac{r}{2}\right)! r^{\frac{1}{2}}}$$

Portanto uma estimativa normal de φ_r é dada por

$$\hat{\Psi}_r^N = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}} r!}{(2\hat{\sigma})^{r+1} \left(\frac{r}{2}\right)! r^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

onde $\hat{\sigma}$ é o desvio padrão amostral ou a quantidade dada na eq. (8). Polansky e Baker (2000) sugerem então um estimador multi-estágio de h_0 conforme o procedimento abaixo.

Passo 1: Calcular $\hat{\Psi}_{2b+2}^N$ usando (11)

Passo 2: Iniciar com $j = b$ e iterando até $j = 1$, calcular $\hat{\Psi}_{2j}(\hat{g}_{2j})$

onde

$$\hat{g}_{2j} = \left[\frac{2L^{(2j)}(0)}{-n\mu_2(L)\hat{\Psi}_{2j+2}} \right]^{\frac{1}{(2j+3)}}$$

onde

$$\hat{\Psi}_{2j+2} = \begin{cases} \hat{\Psi}_{2b+2}^N & \text{quando } j = b \\ \hat{\Psi}_{2j+2}(\hat{g}_{2j+2}) & \text{quando } j < b \end{cases}$$

Passo 3: Calcular

$$\hat{h}_b = \left[\frac{C_3}{-n\mu_2^2(k)\hat{\Psi}_2(g_2)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

como o estimador de b – estágio.

Este tipo de procedimento é bastante usado em estimação de densidades (Wand e Jones, 1995; Wand, 1997). Polansky e Baker (2000) provam um importante teorema que estabelece que o ganho em desempenho ao escolher b maior que dois é provavelmente baixo, implicando que um estimador de dois estágios seria suficiente para a maioria das aplicações.

4.1.2- Construção dos limites de controle

Uma alternativa para a função quantil amostral convencional é definida por:

$$\hat{F}_{n,h}^{-1}(q) = \inf \left\{ x ; \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k K \left(\frac{x - X_i}{h} \right) \geq q \right\}, 0 \leq q \leq 1$$

Assim, os limites de controle do gráfico de medidas individuais, baseados em núcleo estimador são:

$$LSC_{NG} = \inf \left\{ x ; \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k K \left(\frac{x - X_i}{h} \right) \geq 1 - \alpha/2 \right\}$$

e

$$LIC_{NG} = \sup \left\{ x ; \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k K \left(\frac{x - X_i}{h} \right) \leq \alpha/2 \right\}$$

4.1.3- Simulações e resultados

É estudado por meio de simulações o desempenho do núcleo estimador na determinação dos limites de controle de gráficos de medidas individuais. É discutido três metodologias para a escolha do parâmetro de suavização. O comportamento desses gráficos de controle alternativos é comparado com aquele obtido pela carta de controle paramétrica clássica, cujos limites de controle baseiam-se na amplitude móvel média das medidas individuais (seção 3.2). São simuladas amostras na Fase I das seguintes distribuições: normal padrão, t de *student* com quatro graus de liberdade e algumas misturas de normais. A classe de mistura de densidades normais é bastante ampla, permitindo um estudo facilitado de muitos tipos diferentes de problemas referentes à estimação. Além disso, as propriedades de convolução do núcleo estimador são mantidas quando a densidade subjacente é uma mistura de normais. Marron e Wand (1992) propuseram várias misturas finitas de normais, que oferecem um conjunto de teste interessante para estudos de estimação funcional. São considerados duas dessas misturas unimodais. São elas: a “assimétrica unimodal” e a “fortemente assimétrica”. A densidade assimétrica unimodal está próxima da forma da normal, sendo ligeiramente inclinada. Ela foi escolhida por apresentar uma de suas caldas mais pesada que a normal. A densidade fortemente assimétrica diverge da normal por sua assimetria e foi escolhida por se assemelhar a uma lognormal (parâmetros das densidades na Tabela 2). Para cada uma dessas distribuições foi estudado o desempenho dos gráficos de controle na situação em que o processo de produção opera sob controle (Fase I). A taxa de alarmes falsos considerada foi $\alpha = 0.027$, correspondendo a um número esperado de amostras até um alarme falso (*CMS*) de 370,4. Para essa condição, a cobertura do gráfico de controle é:

$$CBT = P\{LIC \leq X \leq LSC\} = 1 - \alpha = 0,9973.$$

Tabela 2 - Parâmetros para as densidades das misturas de normais

Densidade	$w_1N(\mu_1, \sigma_1^2) + \dots + w_mN(\mu_m, \sigma_m^2)$
Assimétrica unimodal	$\frac{1}{5}N(0, 1) + \frac{1}{5}N\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{3}{5}N\left(\frac{13}{2}, \left(\frac{5}{9}\right)^2\right)$
Fortemente assimétrica	$\sum_{j=0}^7 \frac{1}{8}N\left(3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^j - 1\right\}, \left(\frac{2}{3}\right)^{2j}\right)$

Fonte: Autor

É utilizado a versão 3.1.1 do programa estatístico [R Core Team, (2014)] para o estudo de Monte Carlo. Essa análise baseou-se em 10.000 simulações das distribuições supracitadas, com tamanhos amostrais $k = 25, 50, 300$ e 500 . Em cada caso, foram calculados o limite superior de controle médio (LSC_m), limite inferior de controle médio (LIC_m) e a taxa média de cobertura (CBT_m), por meio das expressões $LSC_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} LSC_{NG_i}$, $LIC_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} LIC_{NG_i}$ e $CBT_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} CBT_i$, respectivamente. A estimativa correta do comprimento médio da sequência, com o processo sob controle, foi obtida por: $CMS_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{1-CBT_i}$. O procedimento foi repetido para os três critérios de seleção da janela discutidos na seção 4.1. É utilizado a biblioteca *kerdiest* (Del Rio e Perez, 2012) para a estimação 'plug-in' da janela ótima por meio do procedimento em dois estágios, proposto por Polansky e Baker (2000). Foram desenvolvidas funções no R para a determinação da estimativa do quantil por núcleo estimador.

Os resultados das estimativas encontradas do erro quadrático médio (EQM), relacionados com os limites de controle das distribuições simétricas e assimétricas estão apresentados respectivamente na Tabela 3 e Tabela 4. Verifica-se que as estimativas do EQM diminuem quando o tamanho da amostra aumenta. A figura 3 ilustra o comportamento no caso das distribuições simétricas, como era de se esperar a estimação pelo método paramétrico é notavelmente melhor que qualquer um dos três procedimentos não paramétricos utilizados. A distribuição t_5 , com o dobro de curtose da normal padrão apresentou EQM 's bastantes elevados em comparação com as demais distribuições, embora estejam bastante próximos entre si. E dos métodos não paramétricos, o núcleo estimador por 'plug in' em 2 estágios é o de melhor desempenho. Para as distribuições assimétricas, os EQM relacionados com as maiores amostras aproximam-se daqueles obtidas com a distribuição normal.

Na figura 4, percebe-se que os menores EQM referentes ao limite superior de controle são atingidos pelas estimativas por núcleo com janela de referência robusta. Por outro lado, verifica-se também que, quando considerado o limite inferior de controle, os menores EQM 's são obtidos pelas estimativas por núcleo com janela de referência normal.

Tabela 3: Estimativas do erro quadrático médio dos limites de controle – Distribuições simétricas

Distribuição		N(0, 1)				t_4			
k		25	50	300	500	25	50	300	500
LSC_m	h_{PB}	0,330	0,212	0,123	0,107	8,718	7,737	8,584	11,296
	h_{RN}	0,372	0,255	0,129	0,111	9,201	7,952	8,585	11,293
	$h_{RN}(p)$	0,323	0,219	0,125	0,108	9,072	7,850	8,583	11,293
LIC_m	h_{PB}	0,340	0,218	0,122	0,106	8,642	7,532	7,081	10,651
	h_{RN}	0,381	0,260	0,128	0,110	9,134	7,742	7,083	10,649
	$h_{RN}(p)$	0,332	0,224	0,124	0,107	8,988	7,648	7,081	10,648

Fonte: Autor

Na maioria dos casos os gráficos de controle para medidas individuais baseados em núcleo estimador têm valores de CMS comparáveis aos valores desejados quando os limites de controle são estimados a partir de amostras distribuídas normalmente (Tabela 5). Quando a amostra provém das outras distribuições, o CMS_m mostra-se sensível ao tamanho amostral, embora seus valores estejam mais próximos do valor desejado no caso das distribuições assimétricas (Tabela 6). Para todas as distribuições estudadas, verifica-se que, quando o tamanho amostral aumenta, resultados amostrais se aproximam entre si (Figura 4). Os gráficos de controle por núcleo estimador construídos com a janela de referência normal robusta têm um desempenho bastante razoável.

Tabela 4: Estimativas do erro quadrático médio dos limites de controle – Distribuições assimétricas

Distribuição		Assimétrica unimodal				Fortemente assimétrica			
k		25	50	300	500	25	50	300	500
LSC_m	h_{PB}	0,161	0,092	0,064	0,063	1,531	0,927	0,255	0,201
	h_{RN}	0,157	0,102	0,066	0,064	1,867	1,058	0,255	0,200
	$h_{RN(p)}$	0,144	0,088	0,063	0,062	1,259	0,689	0,223	0,178

LIC_m	h_{PB}	0,750	0,527	0,197	0,161	0,512	0,204	0,025	0,021
	h_{RN}	0,874	0,591	0,201	0,163	0,214	0,105	0,025	0,023
	$h_{RN(p)}$	0,805	0,543	0,196	0,160	1,120	0,685	0,164	0,107

Fonte: Autor

Tabela 5: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições simétricas

Distribuição		N(0, 1)				t_4			
k		25	50	300	500	25	50	300	500
CBT_m (0,9973)	h_{PB}	0,9972	0,9968	0,9974	0,9977	0,9863	0,9897	0,9971	0,9981
	h_{RN}	0,9952	0,9954	0,9972	0,9976	0,9855	0,9895	0,9971	0,9981
	$h_{RN(p)}$	0,9964	0,9964	0,9973	0,9977	0,9855	0,9896	0,9971	0,9981

CMS_m (370,4)	h_{PB}	360,5	313,3	380,7	430,3	72,7	97,5	347,8	536,6
	h_{RN}	210,1	219,5	356,9	418,4	68,8	95,0	347,8	536,5
	$h_{RN(p)}$	279,3	275,4	375,3	427,9	68,9	95,9	347,9	536,5

Fonte: Autor

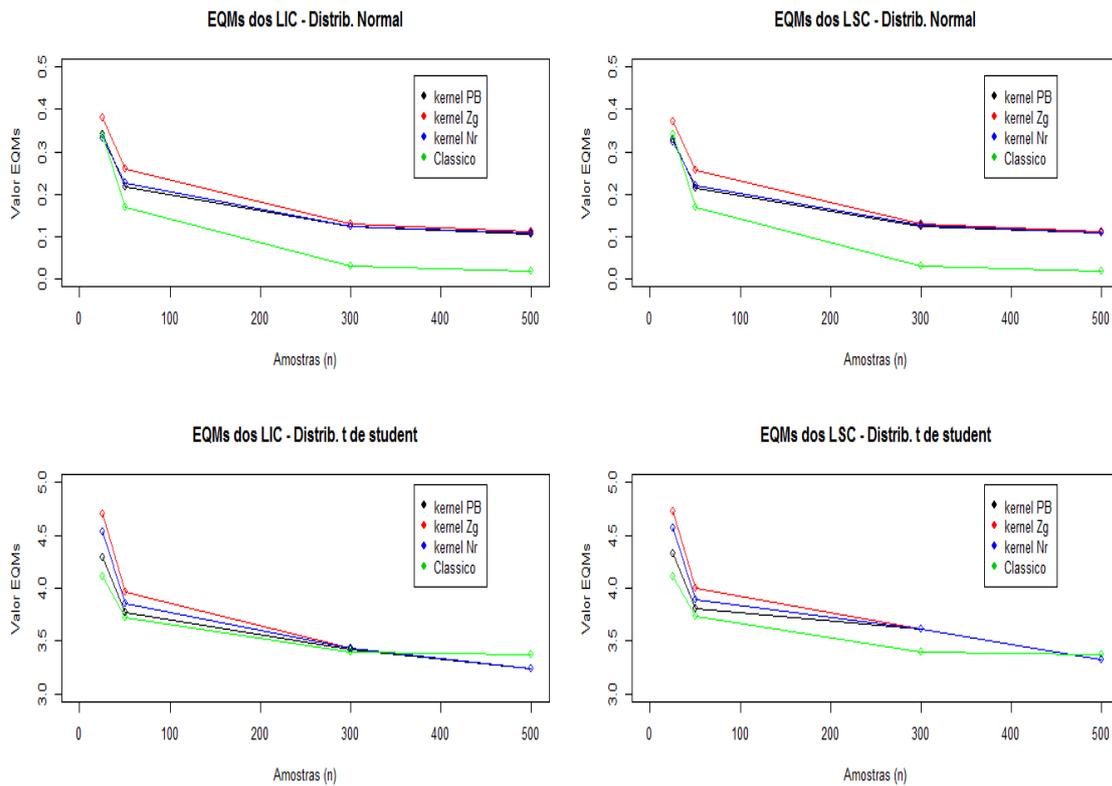
Tabela 6: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições assimétricas

Distribuição		Assimétrica unimodal				Fortemente assimétrica			
K		25	50	300	500	25	50	300	500
CBT_m (0,9973)	h_{PB}	0,9938	0,9947	0,9972	0,9977	0,9905	0,9934	0,9977	0,9983
	h_{RN}	0,9918	0,9936	0,9971	0,9976	0,9863	0,9920	0,9977	0,9983
	$h_{RN(p)}$	0,9932	0,9946	0,9972	0,9977	0,9941	0,9960	0,9983	0,9986

CMS_m (370,4)	h_{PB}	160,4	189,2	352,8	426,1	104,9	151,5	443,6	584,3
	h_{RN}	121,5	156,0	339,2	419,5	73,1	124,7	442,6	592,7
	$h_{RN(p)}$	146,6	186,2	358,1	429,3	170,0	253,1	590,0	721,1

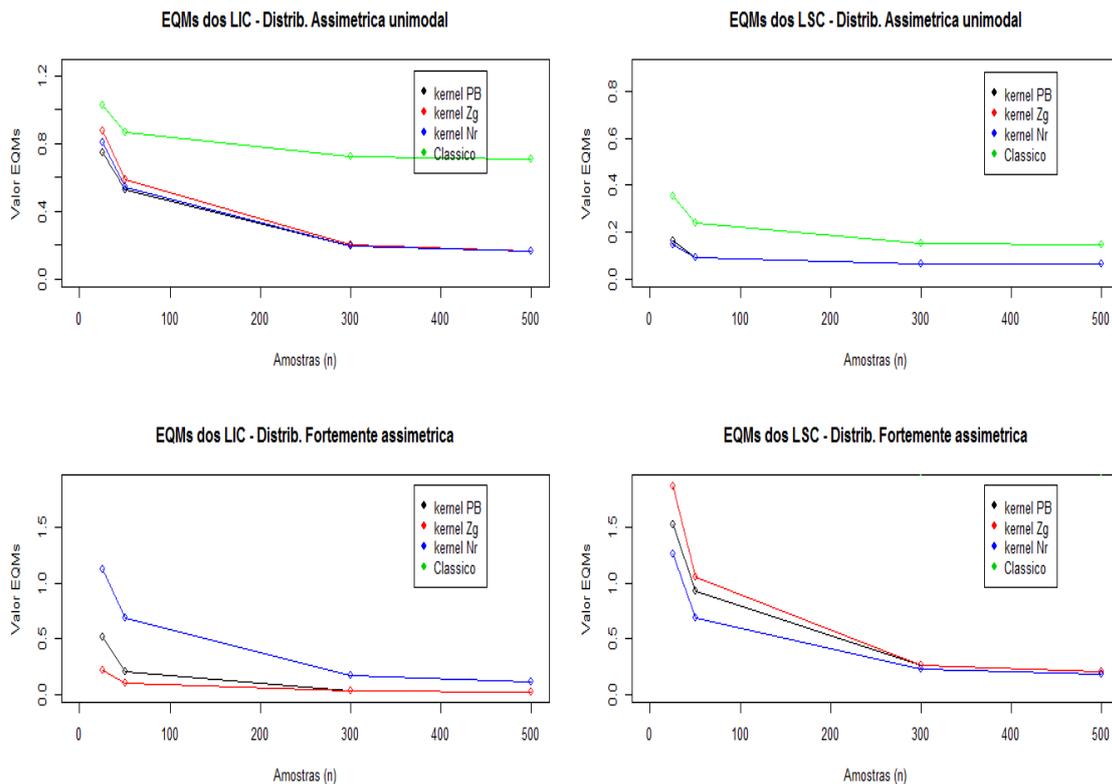
Fonte: Autor

Figura 3: Gráficos dos EQM's – Distribuição normal e t de student



Fonte: Autor

Figura 4: Gráficos dos EQM's – Distribuição assimétrica unimodal e fortemente assimétrica



Fonte: Autor

Os resultados apresentados são aqueles obtidos por Bessegato, Loures e Oliveira (2014 a, b).

4.2- Gráficos de controle por *Bootstrap*

4.2.1- *Bootstrap* não paramétrico

Algumas abordagens não paramétricas utilizam reamostragem que consiste em sortear, com reposição dados pertencentes a uma amostra, de modo a formar uma nova amostra. Dentre as diversas técnicas de reamostragem, destaca-se a técnica *bootstrap*. Ela foi proposta por Efron (1979) e, é uma técnica que não necessita de muitas suposições para estimação dos parâmetros das distribuições de interesse, possuindo amplas possibilidades de aplicação. Por exemplo, Efron e Tibshirani (1994) a utilizam como uma abordagem para o cálculo de intervalos de confiança de parâmetros, em circunstâncias em que outras técnicas não eram aplicáveis, em particular no caso em que o tamanho da amostra era reduzido e a população seguia uma distribuição qualquer.

Suponha a variável aleatória X utilizada para avaliar o desempenho de um processo, sobre a qual não haja nenhuma informação referente à forma ou aos parâmetros de sua distribuição de probabilidade. Deseja-se estimar algum parâmetro θ que caracterize o desempenho do processo. Por exemplo, θ , pode ser a média, mediana ou o desvio padrão da população. Coleta-se uma amostra com n observações da população, x_1, x_2, \dots, x_n . A partir dos dados amostrais, pode-se calcular uma estimativa do parâmetro de interesse $\hat{\theta}$. É de interesse também determinar sua distribuição amostral porque, em nosso caso, deseja-se usar valores futuros de $\hat{\theta}$ para construir um gráfico de controle para monitorar o comportamento do processo. Para aplicação da metodologia *bootstrap* não paramétrica, pode-se usar a função de distribuição empírica (*FDE*) (eq.4) para estimar a função de distribuição acumulada subjacente da população. Pode-se selecionar da *FDE* de uma amostra aleatória, denotada por $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Essa amostra é denominada amostra *bootstrap*. A amostra *bootstrap* é equivalente a reamostrar, com reposição, n observações a partir das n observações originais. Obtém-se então uma estimativa $\hat{\theta}$ da amostra *bootstrap* a qual é denominada estimativa *bootstrap* e denotada por $\hat{\theta}^*$. Este

procedimento é repetido, por exemplo, B vezes. São calculadas as B estimativas *bootstrap*. Um histograma fornece uma estimativa da distribuição amostral de $\hat{\theta}$ (Ion, 2001). Maiores detalhes sobre métodos *bootstrap* podem ser encontrados em Efron e Gong (1983), Gunter (1991, 1992), Mooney e Duval (1993), Young (1994) e Davison e Hinkley (1997).

De acordo com Chakraborti (2004) pode-se usar a metodologia *bootstrap* para estimar a distribuição amostral de uma estatística de parâmetro de processo de produção, bastando assumir que a amostra é representativa da população e que as observações são independente e identicamente distribuídas. Há várias propostas de uso da abordagem *bootstrap* na construção de gráficos de controle. Dentre elas, destacam-se Bajgier (1992), Seppala et al. (1995), Liu e Tang (1996), Qiu e Hawkins (2003), Lio e Park (2008), Park (2009), Edopka e Ogbeide (2013). Em importante artigo, Jones e Woodall (1998) traçam um roteiro eficiente para comparar o desempenho de três métodos *bootstrap* na determinação dos limites de controle de gráficos de \bar{X} em situações de não normalidade.

Utilizam-se alguns dos métodos *bootstrap* para estimação dos limites de controle de gráficos de \bar{X} , analisando e comparando seu desempenho com aquele oferecido pela metodologia paramétrica usual (seção 3.1). Na seção 4.2.2 são detalhadas técnicas *bootstrap* utilizadas na determinação dos limites de controle de alguns gráficos de \bar{X} .

4.2.2- Construção dos limites de controle

A filosofia da abordagem *bootstrap* nos problemas estatísticos é trocar a função de distribuição desconhecida F de uma variável aleatória por uma função de distribuição empírica. Por esse motivo, procede-se à seleção aleatória, com reposição, de amostras adicionais de \hat{F}_n (eq.4). A amostra obtida é denominada amostra *bootstrap*. O número de reamostragens necessárias depende da distribuição da população e da estatística que está sendo avaliada. Em geral, para estimativas de quantis, são usadas de 1.000 a 2.000 reamostragens (Seppala et al., 1995). Para amostras grandes, Efron (1979) sugere o uso de simulação Monte Carlo para aproximar a distribuição

bootstrap.

O algoritmo geral de reamostragem *bootstrap* (Efron, 1979) é o seguinte:

1. Iniciar a contagem em $i = 1$ e defina B , um número grande (1.000 a 2.000).
2. Selecionar uma amostra aleatória $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$, da amostra inicial X_1, X_2, \dots, X_n , com reposição e calcule o valor *bootstrap* da estatística de interesse $T_i^* = T(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$.
3. Se $i = B$ pare, caso contrário incremente de i para $i + 1$ e repita o passo 2.

Usando esta simulação Monte Carlo, são obtidas B estimativas amostrais para $T, T_1^*, T_2^*, \dots, T_B^*$. Estes B valores formam uma distribuição amostral pseudo-empírica F_T^* que é a versão *bootstrap* de $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$. O quantil p de $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é então estimado pelo quantil p da distribuição *bootstrap* F_T^* . Apenas uma simulação infinita pode remover inteiramente a variabilidade Monte Carlo na estimação da função de distribuição *bootstrap*. Isso é impossível e desnecessário na prática. A estatística *bootstrap* é consistente e sua variabilidade relaciona-se com a verdadeira variância dos dados e com a curtose da distribuição subjacente e desconhecida F . As estimativas dos quantis das caudas da distribuição requerem valores de B maiores que aquelas adotadas para estimar quantis no centro da distribuição.

Dessa maneira, um gráfico de controle *bootstrap* para monitorar a média do processo, como uma alternativa ao gráfico de controle de Shewhart para \bar{X} , é aquela em que a estatística de interesse T_i^* (passo 2 do procedimento) é a média amostral da i -ésima amostra *bootstrap*, \bar{X}_i^* . O limite superior de controle *bootstrap* é determinado pelo menor valor ordenado \bar{x}_i^* , tal que haja $(1 - a/2)B$ valores abaixo dele. Por outro lado, pelo menor valor ordenado \bar{x}_i^* , tal que haja $(a/2)B$ valores abaixo dele é o limite inferior de controle *bootstrap*. Esse procedimento foi proposto por Bajgier (1992).

Bootstrap por subgrupos

Seppala et al. (1995) apontaram uma limitação ao gráfico de controle *bootstrap* descrito acima, é que a aquela abordagem assume implicitamente a estabilidade do processo por ocasião do cálculo dos limites. Se esta hipótese for violada e o processo estiver fora de controle, o uso do procedimento de

Bajgier (1992) implicará limites de controle muito amplos. O *bootstrap* por subgrupos, proposto por Seppala et al. (1995), busca evitar a necessidade de que o processo esteja sob controle quando da determinação dos limites de controle. O *bootstrap* por subgrupo assume que as observações estão descritas por

$$X_{ij} = \mu_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

onde μ_i é a média verdadeira do i -ésimo subgrupo e e_{ij} é o termo do erro aleatório da observação. O algoritmo *bootstrap* por subgrupos é o seguinte:

1. Observe k grupos de tamanho n (nk observações).
2. Calcule $e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i, i = 1, 2, \dots, k \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$, onde \bar{x}_i é a média do i -ésimo subgrupo observado.
3. Colete uma amostra aleatória de tamanho n , com reposição, da amostra combinada dos nk resíduos calculados no passo 2. Esta amostra $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ é uma amostra *bootstrap*.
4. Calcule $x_j = \bar{x} + ae_j^*$, para $j = 1, 2, \dots, n$, em que $a = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ é um fator de correção usado para ajustar a variância dos subgrupos reamostrados.
5. Calcule a média amostral, \bar{x}^* , de $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$.
6. Repita os passos de 3 a 5, B vezes (B é um valor grande).
7. Ordene as B estimativas *bootstrap* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_B$.
8. Encontre o menor valor ordenado \bar{x}^* tal que haja $(a/2)B$ valores abaixo dele. Este é o limite inferior de controle *bootstrap* (LIC_{SG}).
9. Encontre o menor valor ordenado tal que $(1 - a/2)B$ valores estejam abaixo dele. Este é o limite superior do gráfico de controle *bootstrap* (LSC_{SG}).

Para aprimorar a estimativa dos limites de controle, os quantis são interpolados. Esse procedimento tem pequeno efeito nos limites de controle se B é grande e nenhum efeito se $(a/2)B$ e $(1 - a/2)B$ são valores inteiros. Dentre outros autores, Liu e Tang (1996), Wu e Zhang (1996), Wood, Kaye e Capon (1999) e Lio e Park (2008) estudaram alternativas de gráficos de controle *bootstrap* para a média.

4.2.3- Simulações e resultados

Foram efetuadas simulações extensivas para avaliar o desempenho de gráficos de controle *bootstrap*, construídos pelo método dos subgrupos descrito na Seção 4.2.2. Utilizaram-se amostras da distribuição normal padrão, distribuição de Laplace com parâmetro $\lambda = 1$, distribuição exponencial com média 1 e a mistura de normais “assimétrica unimodal”, estabelecida por Marron e Wand (1992) [parâmetros das densidades Tabela 2]. Para cada uma dessas distribuições foi estudado o desempenho dos gráficos de controle, na situação em que o processo de produção opera sob controle (Fase I). A taxa de alarmes falsos considerada foi $a = 0.10$, correspondendo a um número esperado de 10 amostras até um alarme falso (*CMS*). Para esta condição, a cobertura do gráfico de controle é:

$$CBT = P\{LIC \leq X \leq LSC\} = 1 - a = 0,90.$$

É realizado um estudo Monte Carlo, baseando-se em 10.000 simulações de nk observações, $n = 5, 10$ e $k = 5, 20$, das distribuições supracitadas. Cada conjunto de nk observações foi reamostrado $B = 2.000$ vezes para a determinação dos limites de controle *bootstrap*. Em cada caso, foram determinados o limite superior de controle médio (LSC_m), limite inferior de controle médio (LIC_m) e a taxa média de cobertura (CBT_m), por meio das expressões $LSC_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} LSC_{SG}$, $LIC_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} LIC_{SG}$ e $CBT_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} CBT_i$, respectivamente. A estimativa correta do comprimento médio da sequência, com o processo estável, foi obtida por: $CMS_m = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{1-CBT_i}$. Salienta-se que o desvio padrão dos comprimentos da sequência é definido como:

$$DCS_m = \sqrt{\frac{1}{10000-1} \sum_{i=1}^{10000} \left(\frac{1}{1-CBT_i} - CMS_m \right)^2}.$$

Tabela 7: Estimativas dos limites de controle – Distribuições simétricas

Distribuição		N(0, 1)				Laplace			
<i>n</i>		5	5	10	10	5	5	10	10
<i>k</i>		5	20	5	20	5	20	5	20
<i>LSC_m</i>	<i>clássico</i>	0,750 (0,018)	0,737 (0,006)	0,518 (0,008)	0,520 (0,003)	1,034 (0,023)	1,031 (0,011)	0,750 (0,011)	0,732 (0,006)
	<i>bootstrap</i>	0,753 (0,028)	0,738 (0,022)	0,518 (0,017)	0,520 (0,015)	1,028 (0,042)	1,026 (0,039)	0,749 (0,024)	0,730 (0,023)
	<i>exato</i>	0,736	0,736	0,520	0,520	1,048	1,048	0,743	0,743
<i>LIC_m</i>	<i>clássico</i>	-0,731 (0,018)	-0,737 (0,006)	-0,526 (0,007)	-0,530 (0,007)	-1,065 (0,036)	-1,054 (0,017)	-0,724 (0,011)	-0,735 (0,007)
	<i>bootstrap</i>	-0,731 (0,027)	-0,738 (0,021)	-0,527 (0,017)	-0,531 (0,016)	-1,061 (0,052)	-1,053 (0,040)	-0,724 (0,026)	-0,735 (0,024)
	<i>exato</i>	-0,736	-0,736	-0,520	-0,520	-1,048	-1,048	-0,743	-0,743

Fonte: Autor

Os limites de controle teóricos e a taxa de cobertura da distribuição de Laplace foram calculados de acordo com o método proposto por Nguyen e Chen (2009). No caso da mistura de normais, essas quantidades foram aproximadas por meio de simulação Monte Carlo. Para comparar os resultados da simulação com o desempenho do gráfico de controle de Shewhart de \bar{X} , foram calculados os limites de controle do gráfico clássico para cada conjunto de *k* subgrupos de tamanho *n*. Nesse caso, o desvio padrão do processo foi calculado através da média das amplitudes dos subgrupos. Nas tabelas de 7 a 10, os erros padrão das estimativas estão relacionados entre parênteses.

Tabela 8: Estimativas dos limites de controle – Distribuições assimétricas

Distribuição		Exponencial				Assimétrica unimodal			
<i>N</i>		5	5	10	10	5	5	10	10
<i>K</i>		5	20	5	20	5	20	5	20
<i>LSC_m</i>	<i>clássico</i>	1,740 (0,025)	1,739 (0,027)	1,528 (0,018)	1,528 (0,011)	1,352 (0,010)	1,360 (0,014)	1,179 (0,008)	1,176 (0,006)
	<i>bootstrap</i>	1,807 (0,040)	1,803 (0,039)	1,572 (0,028)	1,572 (0,022)	1,328 (0,019)	1,335 (0,020)	1,165 (0,013)	1,162 (0,013)
	<i>Exato</i>	1,831	1,831	1,571	1,571	1,318	1,318	1,154	1,154
<i>LIC_m</i>	<i>clássico</i>	0,266 (0,007)	0,268 (0,005)	0,484 (0,002)	0,481 (0,022)	0,157 (0,022)	0,162 (0,010)	0,332 (0,010)	0,328 (0,008)
	<i>bootstrap</i>	0,349 (0,016)	0,349 (0,016)	0,535 (0,013)	0,534 (0,011)	0,135 (0,030)	0,139 (0,022)	0,318 (0,017)	0,315 (0,016)
	<i>Exato</i>	0,394	0,394	0,543	0,543	0,126	0,126	0,310	0,310

Fonte: Autor

Tabela 9: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições simétricas

Distribuição		N(0, 1)				Laplace			
N		5	5	10	10	5	5	10	10
K		5	20	5	20	5	20	5	20
CBT_m (0,90)	<i>clássico</i>	0,9019	0,9006	0,9011	0,9030	0,9000	0,9066	0,9012	0,8984
	<i>bootstrap</i>	0,9021	0,9007	0,9009	0,9030	0,8978	0,9052	0,9005	0,8979
CMS_m (10)	<i>clássico</i>	10,2 (0,285)	10,1 (0,184)	10,1 (0,234)	10,3 (0,233)	10,0 (0,382)	10,8 (0,205)	10,1 (0,355)	9,8 (0,159)
	<i>bootstrap</i>	10,3 (0,771)	10,1 (0,707)	10,1 (0,744)	10,4 (0,750)	9,8 (0,757)	10,6 (0,792)	10,1 (0,763)	9,8 (0,720)

Fonte: Autor

Os valores estimados dos limites médios superiores e inferiores construídos tanto pelo método clássico quanto pelo bootstrap por subgrupos são próximos entre si no caso das distribuições simétricas estudadas (ver Tabela 7). Percebe-se também que as estimativas médias se aproximam do valor exato à medida que a quantidade de observações aumenta. Salienta-se, entretanto que os erros padrão das estimativas *bootstrap* são de duas a três vezes maiores que a variabilidade alcançada pelas estimativas através do método clássico. No caso das distribuições assimétricas (Tabela 8), percebe-se que as estimativas *bootstrap* estão consistentemente mais próximas do valor exato, embora não muito distantes das estimativas obtidas pelo método clássico. Aparentemente o método bootstrap oferece melhores estimativas dos limites inferiores. Novamente, percebe-se que os erros padrão das estimativas bootstrap são largamente maiores que aqueles obtidos através do método clássico.

Na maioria dos casos, os gráficos de controle de Shewhart para \bar{X} e o de *bootstrap* por subgrupos têm valores de comprimento médio da sequência (CMS_m) que são próximos aos valores exatos quando os limites de controle são estimados a partir de amostras simétricas (ver Tabela 9). Entretanto quando a amostra é proveniente de distribuições assimétricas o CMS_m 's obtidos pelo procedimento de *bootstrap* é sensível ao tamanho amostral (ver Tabela 10).

Tabela 10: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições assimétricas

Distribuição		Exponencial				Assimétrica Unimodal			
n		5	5	10	10	5	5	10	10
k		5	20	5	20	5	20	5	20
CBT_m (0,90)	<i>clássico</i>	0,9221	0,9217	0,9123	0,9133	0,8963	0,8954	0,9027	0,9064
	<i>bootstrap</i>	0,9130	0,9124	0,9034	0,9043	0,8947	0,8956	0,9024	0,9048
CMS_m (10)	<i>clássico</i>	12,9 (1,066)	12,8 (0,941)	11,4 (0,578)	11,6 (0,464)	9,7 (0,421)	9,6 (0,201)	10,3 (0,593)	10,7 (0,208)
	<i>bootstrap</i>	11,6 (1,129)	11,6 (1,100)	10,4 (0,799)	10,5 (0,769)	9,6 (0,772)	9,6 (0,677)	10,3 (0,926)	10,6 (0,691)

Fonte: Autor

Os valores obtidos consideraram uma taxa de falso alarme $\alpha = 0,10$. Na prática, é improvável, no entanto, que limites de controle com taxas de alarme falso dessa magnitude sejam úteis. É importante salientar que as estimativas não paramétricas da função de distribuição convergem muito mais lentamente que as estimativas de médias e, portanto as estimativas de quantis requerem reamostragens *bootstrap* muito maiores que aquelas utilizadas na estimação de erros padrão ou na construção de intervalos de confiança (Davison e Hinkley, 1997). Jones e Woodall (1998) apontam que, para amostras de distribuição exponencial o CMS obtido pelo *bootstrap* por subgrupo é sensível aos tamanhos amostrais menores que 5 e às taxas de falso alarme menores que 0,01.

Os resultados apresentados são aqueles obtidos por Bessegato, Loures e Oliveira (2014 a).

5- CONCLUSÕES

Em Woodall e Montgomery (1999), os autores anteciparam uma necessidade crescente de métodos não paramétricos de monitoramento.

Entretanto, Woodall e Montgomery (2014) salientam que os métodos não paramétricos ainda não ampliaram sua utilização na prática devido a falta de pacotes estatísticos para implementação dos métodos e uma falta de familiaridade, além de livros textos, sobre o tema. Mesmo assim essa área permanece bastante ativa. Por exemplo, Qiu e Liu (2011) e Zou e Tsung (2008).

Procedeu-se uma ampla revisão da literatura sobre desvios de normalidade sobre as consequências no desempenho do método paramétrico para construção dos limites de controle. São estudadas algumas questões relacionadas com o problema da estimação da função de distribuição, por meio da técnica de estimação por núcleo estimador e reamostragem *bootstrap*. Os desempenhos das estimações por núcleo são fortemente afetados pela escolha da janela ou parâmetro de suavidade. Salienta-se que há várias bibliotecas desenvolvidas em R com essa finalidade. É comparado os métodos de escolha da janela proposto por Polansky e Baker (2000), a janela de referência normal e a janela robusta de referência normal, proposto por Zhang e Wang (2009). Os resultados desse estudo por simulação indicam que os gráficos de controle para medidas individuais não paramétricos discutidos têm bom desempenho ao estimar as caudas de distribuições assimétricas. As estimativas obtidas são próximas, em média, dos verdadeiros valores dos quantis. Em ambos os métodos não paramétricos, percebe-se também a dificuldade na estimação de quantis localizados nas caudas das distribuições com desvios de normalidade relacionados com a curtose ou assimetria das distribuições. Esses estudos comparativos geraram trabalhos apresentados em congressos da área de Estatística e Engenharia de Produção (Bessegato, Loures e Oliveira, 2014)

Assim, em continuidade a essa pesquisa, recomendamos a verificação da variabilidade dessas estimativas, com a finalidade de avaliar o desempenho quanto à precisão do *CMS* do processo de produção sob controle (Fase I). É importante também avaliar o desempenho desses gráficos no monitoramento de processos de produção fora de controle (Fase II).

Em geral, as estimativas por núcleo estimador são bastante sensíveis ao se estimar quantis localizados nas extremidades das distribuições. Por esse motivo, ao invés dos critérios globais para seleção do parâmetro de suavidade, utilizados neste trabalho, pode-se mostrar mais eficiente a adoção de um critério local para escolha da janela, em direção ao proposto por Mercado, Cornely e Perry (2011). Além disso, acreditam-se que essas metodologias poderão ser úteis em aplicações de controle estatístico e econômico de processos.

Por outro lado, em geral, são pequenas as taxas de falsos alarmes desejadas para os gráficos de controle de \bar{X} . Sendo assim, a variabilidade no desempenho do *bootstrap* por subgrupos na estimação dos limites de controle com uma probabilidade pequena de falso alarme pode ser um grave impedimento para sua aplicabilidade, pois, o quantil empírico estimado pode coincidir com extremos amostrais situando-se muito distantes dos quantis verdadeiro. Entretanto, em muitas aplicações podem-se não estar confiantes em um particular modelo paramétrico e na análise baseada nele. Mesmo assim, pode ser útil verificar o que pode ser inferido sem assumir este particular modelo paramétrico. Além disso, um método não paramétrico é mais útil quando a população segue uma distribuição assimétrica.

Por outro lado, Capizzi e Masarotto (2013) salientam que os procedimentos não paramétricos são capazes de garantir uma probabilidade prescrita de falsos alarmes sem qualquer conhecimento sobre a distribuição subjacente ao processo sob controle estatístico. Esta característica é particularmente relevante para a Fase I do controle estatístico do processo.

Em continuidade a pesquisa, recomenda-se a verificação do desempenho do método *bootstrap* na construção de gráficos de controle de \bar{X} . Assim como investigar o efeito do aumento no valor de B para reduzir a variabilidade das estimativas. Deve-se dedicar especial interesse na comparação do desempenho do método na estimação de limites de controle, baseando-se em amostras provenientes de distribuições com coeficientes de assimetria e de curtose mais acentuados que aqueles das distribuições utilizadas neste trabalho. É importante também avaliar o comportamento desses gráficos no monitoramento de processos de produção fora de controle (Fase II).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUS, B. Note on the minimum mean integrated squared error of kernel estimates of a distribution function and its derivatives. **Communications in Statistics: Theory and Methods**, v. 22, p. 603 - 609, 1993.

ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. Are Estimated Control Charts in Control? **Statistics**, v. 38, p. 67–79, 2004.

ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. Estimation in Shewhart Control Charts: Effects and Corrections. **Metrika**, v. 59, p. 207–234., 2004.

AROIAN, L. A.; AND LEVENE, H. The Effectiveness of Quality Control Charts. **Journal of the American Statistical Association**, v. 45, p. 520–529., 1950.

AZZALINI, A. A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method. **Biometrika**, v. 68, p. 326-328, 1981.

BAJGIER, S. M. The use of bootstrapping to construct limits on control charts. **Proceedings of the Decision Science Institute**, San Diego, p. 1611-1613, 1992.

BALAKRISHNAN, N.; TRIANTAFYLLOU, I. S.; KOUTRAS, M. V. A distribution-free control charts based on order statistics. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, v. 39, n. 20, p. 3652-3677, 2010.

BESSEGATO, L. F. Escolha do parâmetro de suavidade na estimativa da função de distribuição. **Dissertação de Mestrado, UFMG/Departamento de Estatística, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.** , 2001.

BESSEGATO, L. F.; LOURES, A. P.; OLIVEIRA, F. L. P. Desempenho de Cartas de Controle Não Paramétricas para Medidas Individuais Baseadas em Núcleo Estimadores.. **In: II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional**, p. 1-11, 2014.

BESSEGATO, L. F.; LOURES, A. P.; OLIVEIRA, F. L. P. Desempenho de Estimativa Bootstrap por Subgrupos dos Limites de Gráficos de Controle: um Estudo Comparativo. **Encontro Mineiro de Engenharia de Produção**, 2014.

BESSEGATO, L. F.; LOURES, A. P.; OLIVEIRA, F. L. P. Uso de Núcleos Estimadores na Construção de Gráficos de Controle de Shewhart para Medidas Individuais. **Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto**, v. 3, p. 351-361, 2014.

BISCHAK, D. P.; TRIETSCH, D. The rate of false signals in charts with estimated limits. **journal quality technology**, v. 39, n. 1, p. 54-65, 2007.

BORROR, C. M.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Robustness of the EWMA control chart to non-normality. **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 3, p. 309-316, 1999.

BOWMAN, A. W. An Alternative Method of Cross Validations for the Smoothing of Density Estimates. **Biometrika**, v. 71, p. 353-360, 1984.

BOWMAN, A. W.; HALL, P.; PRVAN, T. Bandwidth Selection for the Smoothing of Distribution Function. **Biometrika**, v. 85, p. 799-808, 1998.

BRAUN, W. J.; AND PARK, D. Estimation of Sigma for Individuals Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 40, n. 3, p. 332-344., 2008.

BURR, I. W. The effect of non-normality on constants for X and R charts.. **Industrial Quality Control**, v. 23, n. 11, p. 98-102, 1967.

CAMPOS, V. F. **Controle de Qualidade Total**. Belo Horizonte: Fundação Cristiano Ottoni , 1992.

CAPIZZI, G.; MASAROTTO, G. Phase I Distribution-Free Analysis of Univariate Data. **Journal of Quality Technology**, v. 45, n. 3, p. 273-284, 2013.

CASELLA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

CASTAGLIOLA, P. et al. The variable sample size Xbar chart with estimated parameters. **quality and reliability engineering international**, v. 28, n. 7, p. 687-699, 2012.

CHAKRABORTI, S. Parameter estimation and design considerations in prospective applications of the Xbar-chart. **journal of applied statistics** , v. 33, n. 4, p. 439-459, 2006.

CHAKRABORTI, S.; LAAN, P.; WIEL, M. A. A class of distribution-free control charts. **Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)**, v. 53, n. 3, p. 443-462, 2004.

CHAN, L. K.; HAPUARACHCHI, K. P.; MACPHERSON, B. D. Robustness of mean X and R charts. **Ieee Transactions on Reliability**, v. 37, n. 1, p. 117-123, 1988.

CHEN, G. The mean and standard deviation of the run length distribution of X charts when control limits are estimated. **statistica sinica**, v. 7, n. 3, p. 789-798, 1997.

CHIU, S. T. Bandwidth Selection for kernel density estimation. **The Annals of Statistics** , v. 33, p. 1883-1905, 1991.

COSTA, A. F.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle estatístico de qualidade**. São Paulo: Atlas, 2005.

- DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. **Bootstrap methods and their application**. London: Cambridge University Press, 1997. 594 p.
- DEL RIO, A. Q.; PEREZ, G. E. Nonparametric kernel distribution function estimation with kerdier: an R package for bandwidth choice and applications. **Journal of Statistical Software**, v. 50, n. 8, p. 1-21, 2012.
- DEMAN, C.; ROSS, S. An improved estimats of sig in quality control. **Probability in the Engineering and Informational Science**, v. 9, n. 3, p. 411-415, 1995.
- DEMING, W. E. **Qualidade: A Revolução da Administração**. Rio de Janeiro : Marques Saraiva, 1990.
- DUNCAN, A. J. **Quality Control and Industrial Statistics**. R.D. Irwin Inc., Homewood: Illinois, 1965.
- EDOPKA, I. W.; OGBEIDE, E. M. Bootstrap approach control limit for statistical quality control. **International Journal of Engineering Science Invention**, v. 2, n. 4, p. 28-33, 2013.
- EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. **Annals of Statistics**, v. 7, p. 1-26, 1979.
- EFRON, B.; GONG, G. A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation. **The American Statistician**, v. 37, p. 36-48, 1983.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An introduction to the bootstrap**. [S.l.]: Boca Raton: CRC Press, v. 57, 1994. 456 p.
- GHOSH, B. K.; REYNOLDS, M. R. . J.; AND HUI, Y. V. Shewhart Charts with Estimated Process Variance. **Communications in Statistics—Theory and Methods**, v. 18, p. 1797–1822, 1981.
- GUNTER, B. Bootstrapping: how to make something from almost nothing and get statistically valid answers, part I. **Quality Progress**, v. 24, n. 12, p. 97-103, 1991.
- GUNTER, B. Bootstrapping: how to make something from almost nothing and get statistically valid answers, part III. **Quality Progress**, v. 25, n. 4, p. 119-122, 1992.
- HALL, P.; MARRON, J. S. Estimation of integrated squared density derivatives. **Statistics and Probability Letters**, v. 6, p. 109 - 115, 1987.
- HARDING, A. J.; LEE, K. R.; MULLINS, J. L. The effect of instabilities on estimates of sigma. In: **46th Annual Quality Congress Transactions. Milwaukee, WI: ASQC**, p. 1037-1043, 1992.
- HILL, B. M. A simple general approach to inference aboutthe tail of a distribution. **The Annals of Statistics**, v. 3, p. 1163-1174, 1975.

HILLIER, F. Chart Control Limits Based on a Small Number of Subgroups. **Industrial Quality Control**, v. 20, p. 24–29, 1964.

HILLIER, F. Small Sample Probability Limits for the Range Chart. **Journal of the American Statistical Association**, v. 62, p. 1488–1493, 1967.

HILLIER, F. S. \bar{x} and R Chart Control Limits Based on a Small Number of Subgroups. **Journal of Quality Technology**, v. 1, 1969.

ION, R. A. Nonparametric Statistical Process Control, 2001.

ION, R. A.; KLAASSEN, C. A. J. Non-parametric Shewhart control charts. **Nonparametrics Statistics**, v. 17, n. 8, p. 971-98, 2005.

ISHIKAWA, K. **What is Total Quality Control?** NY: Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1985.

JENSEN, W. A. et al. Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review. **Journal of Quality Technology**, v. 38, n. 4, p. 349-364., 2006.

JONES, L. A.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. the performance of exponentially weighted moving average chart with estimated parametes. **technometrics**, v. 43, n. 2, p. 157-167, 2001.

JONES, L. A.; WOODALL, W. H. The performance of bootstrap control charts. **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 4, p. 362-375, 1998.

JONES, M. C. The performance of kernel density functions in kernel distribution function estimation. **Statistics and Probability Letters**, v. 9, p. 129 - 132, 1990.

JONES, M. C.; SHEATHER, S. J. Using non-stochastic terms to advantage in kernel-based estimation of integrated squared density derivatives. **Statistics and Probability Letters**, v. 11, p. 511 - 514, 1991.

JONES-FARMER, L. A. et al. An Overview of Phase I Analysis for Process Improvement and Monitoring. **Journal of Quality Technology**, v. 46, n. 3, p. 265-280, 2014.

JURAN, J. M.. **A Qualidade Desde o Projeto**. São Paulo: Pioneira, 1992.

KAMAT, A. R. On the Mean Successive Difference and its Ratio to the Root Mean Square. **Biometrika**, v. 40, n. 1, p. 116-127, 1953.

KING, E. P. Probability Limits for the Average Chart when Process Standards are Unspecified. **Industrial Quality control**, v. 10, p. 62–64, 1954.

LIO, Y. L.; PARK, C. A bootstrap control chart for Birnbaum–Saunders percentiles. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 24, n. 5, p. 585-600, 2008.

- LIU, R. Y.; TANG, J. Control chart dependente and independente measures based on bootstrap methods. **Journal of the American Statistical Association**, v. 91, p. 1694-1700, 1996.
- MAHMOUD, A. M. et al. Estimating the Standard Deviation in Quality-Control Applications. **Journal of Quality Technology**, v. 42, n. 4, p. 348-357, 2010.
- MARAVELAKIS, P. E.; PANARETOS, J.; AND PSARAKIS, S. Effect of Estimation of the Process Parameters on the Control Limits of the Univariate Control Charts for Process Dispersion. **ommunications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 31, p. 443-461, 2002.
- MARRON, J. S.; WAND, M. P. Exact mean integrated squared error. **The Annals of Statistics.**, v. 20, p. 712-736, 1992.
- MERCADO, G. R.; CONERLY, M. D.; PERRY, M. B. Phase I control charts based on kernel estimator of the quantile function.. **Quality and Reliability Engineering International.**, v. 27, n. 8, p. 1131-1144, 2011.
- MITTAG, H. J. **Statistical Methods of Quality Assurance**. London: Chapman and Hall, 1993.
- MONTGOMERY, D. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- MONTGOMERY, D. C. Design and Analysis of Experiments. **Wiley**, New York, n. 4, 1997.
- MONTGOMERY, D. C. Introduction to Statistical Quality Control. **Wiley**, New York, v. 6, 2009.
- MOONEY, C. Z.; DUVAL, R. D. **Bootstrapping**: a nonparametric approach to statistical inference. Newbury Park: Sage Publications, 1993.
- NADARAYA, E. A. Some new estimates for distribution functions. **Theory of Probability and its Applications**, v. 9, n. 1, p. 141-142, 1964.
- NGUYEN, T. T.; CHEN, J. T. A connection between the double gamma model and Laplace sample mean. **Statistics & Probability Letters**, v. 79, n. 10, p. 1305-1310, 2009.
- NOLAN, T. W.; PROVOST, L. P. Understanding variation. **Quality Progress**, n. 24, p. 70-78, 1990.
- PARK, B.; MARRON, S. S. Comparisom of Data-Driven Bandwidth Selectors. **Journal of the American Statistics Association**, v. 85, p. 66-72, 1990.
- PARK, H. I. Median control charts based on bootstrap method. **Communications in Statistics—Simulation and Computation**, v. 38, n. 3, p. 558-570, 2009.

POLANSKY, A. M. A general framework for constructing control charts.. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 21, n. 6, p. 633-653, 2005.

POLANSKY, A. M.; BAKER, E. R. Multistage plug-in bandwidth selection for kernel distribution function estimates. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 65, p. 63-80, 2000.

PROSCHAN, F.; SAVAGE, I. R. Starting a Control Chart. **Industrial Quality Control**, v. 17, p. 12–13, 1960.

PSARAKIS, S.; VYNIYOU, A. K.; CASTAGLIOLA, P. some recent developments on the effects of parameter estimation o control charts. **quality and reliability engineering international**, v. 30, n. 8, p. 641-650, 2014.

QIU, P. Distribution-free multivariate process control based on log-linear modeling. **IIE Transactions**, v. 40, n. 7, p. 664-677, 2008.

QIU, P. H.; LIU, Z. On nonparametric statistical process control of univariate process. **Technometrics**, v. 53, n. 4, p. 390-405, 2011.

QIU, P.; HAWKINS, D. A nonparametric multivariate cumulative sum procedure for detecting shifts in all directions. **Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)**, v. 52, n. 2, p. 151-164, 2003.

QUESENBERRY, C. P. The effect of sample size on estimated limits for \bar{X} and \bar{X} control charts. **Journal of Quality Technology**, v. 25, n. 4, p. 237-247, 1993.

REYNOLDS, M. R. J.; STOUMBOS, Z. G. Individual control schemes for monitoring mean and variance of process subject to drifts.. **Stochastic Analysis and Applications**, v. 19, p. 863-892, 2001.

REYNOLDS, M. R. J.; STOUMBOS, Z. G. Monitoring the process mean and variance using individual observations and variable sampling intervals. **Journal of Quality Technology**, v. 33, p. 181-205, 2001.

RIGDON, S. E.; CRUTHIS, E. N.; CHAMP, C. W. Design Strategies for Individuals and Moving Range Control Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 26, p. 274–287., 1994.

ROES, K. C.; DOES, R. J.; SCHURINK, Y. Shewhart-type control charts for individual observations. **Journal of Quality Technology**, v. 25, n. 3, p. 188-198, 1993.

SALEH, N. A. et al. The difficulty in designing Shewhart \bar{X} and \bar{X} Control Charts with estimated parameters. **journal of quality technology**, v. 47, n. 2, p. 127-138, 2015.

SANIGA, E. M.; SHIRLAND, L. E. Quality Control in Practice. A Survey. **Quality Progress**, v. 5, n. 10, 1977.

- SCHILLING, E. G.; NELSON, P. R. The Effect of Non-Normality on the Control Limits of Xbar Charts. **Journal of Quality Technology**, v. 8, n. 4, p. 183-188, 1976.
- SEPPALA, T. et al. Statistical process control via the subgroup bootstrap. **Journal of Quality Technology**, v. 27, p. 139-153, 1995.
- SHEWHART, W. A. **Economic Control of Quality of Manufactured Products**. [S.l.]: [s.n.], 1924.
- SHORE, H. Non-normal populations in quality applications: a revisited perspective. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 20, n. 4, p. 375–382, 2004.
- SILVERMAN, B. W. **Density Estimation for Statistics and Data Analysis**. London: Chapman and Hall, 1986.
- SINGH, R. S.; GASSER, T.; PRASAD, B. Nonparametric estimates of distribution function. **Communications in Statistics: Theory and Methods**, v. 12, p. 2095 - 2108, 1983.
- SUTHERLAND, J.; DEVOR, R.; CHANG, T. **Statistical Quality Design and Control: Contemporary Concepts and Methods**. [S.l.]: [s.n.], 1992.
- SWANEPOEL, J. H. W. Mean integrated squared error properties and optimal kernels when estimating a distribution function. **Communications in Statistics: Theory and Methods**, v. 17, p. 3785 - 3799, 1988.
- VARDEMAN, S. B. A Brief Tutorial on the Estimation of the Process Standard Deviation. **IIE Transactions**, v. 31, p. 503-507, 1999.
- VERMAAT, M. B. et al. A Comparison of Shewhart Individuals Control Charts Based on Normal, Non-parametric. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 19, n. 4, p. 337-353, 2003.
- WAND, M. P. Data-based choice of histogram bin width. **The American Statistician**, v. 51, p. 59 - 64, 1997.
- WAND, M. P.; JONES, M. C. **Kernel Smoothing**. London: Chapman and Hall, 1995.
- WHEELER, D. J. **Advanced Topics in Statistical Process Control**. SPC Press, Knoxville: Tennessee, 1995.
- WILLEMAIN, T. R.; RUNGER, G. C. Designing Control Charts Based on an Empirical Reference Distribution. **Journal of Quality Technology**, v. 28, n. 1, p. 31-38, 1996.
- WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Research issues and ideas in statistical process control. **Journal of Quality Technology**, v. 31, p. 376-386, 1999.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Using ranges to estimate variability. **Quality Engineering**, v. 13, n. 2, p. 211-217, 2000.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Some current directions in the theory and application of statistical process monitoring. **journal quality technology**, v. 46, n. 1, p. 78-94, 2014.

YANG, C.; HILLIER, F. Mean and Variance Control Chart Limits Based on a Small Number of Subgroups. **Journal of Quality Technology**, v. 2, p. 9–16, 1970.

YOUNG, G. A. Bootstrap: more than a stab in the dark. **Statistical Science**, v. 9, p. 382-415, 1994.

YOURSTONE, S.; ZIMMER, W. Non-Normality and the Design of Control Charts for Averages. **Decision Sciences**, v. 32, p. 1099-1113, 1992.

ZHANG, J.; WANG, X. Robust normal reference bandwidth for kernel density estimation. **Statistica Neerlandica**, v. 63, n. 1, p. 13-23, 2009.

ZOU, C.; TSUNG, F.; WANG, Z. Monitoring process based on nonparametric regression models. **Technometrics**, v. 50, n. 4, p. 512-526, 2008.

APÊNDICE A – Propriedades dos principais estimadores.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma característica de qualidade X , com média μ e desvio padrão σ .

Resultado 1: *Média amostral:* A média amostral, \bar{X} , é um estimador não enviesado da média do processo, desde que esteja sob controle.

Prova:

$$\begin{aligned}
 E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{X}_i\right) \\
 &= E(X_i) \\
 &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}\right) \\
 &= E(x_{ij}) \\
 &= \mu \blacksquare
 \end{aligned}$$

Resultado 2: *O erro padrão da média amostral é σ/\sqrt{n} desde que o processo esteja sob controle.*

Prova:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{X}} &= \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} \\
 &= \sqrt{\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}\right)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_{ij})} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{n} \text{Var}(X_{ij})} \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Para sua simplicidade, usa-se também a amplitude amostral para estimar o desvio padrão no contexto de controle estatístico de processo. Vamos denotar como $W = R/\sigma$ a amplitude relativa. No caso de amostras provenientes de população normal a distribuição de W está bem estudada. A média de W é uma constante $d_2(n)$ que depende do tamanho da amostra. Isto é, $E(W) = d_2(n)$. Assim, um estimador não enviesado do desvio padrão σ de uma amostra oriunda de uma distribuição normal é $\hat{\sigma} = R/d_2(n)$.

Resultado 3: *Amplitude amostral média: O valor esperado da amplitude amostral média de k amostras provenientes da mesma distribuição normal é $E(\bar{R}) = d_2(n)\sigma$.*

Prova:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\bar{R}}{d_2(n)}\right) &= E\left(\frac{1}{d_2(n)}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k R_i\right)\right) \\ &= E\left(\frac{\bar{R}_i}{d_2(n)}\right) \\ &= \sigma \blacksquare \end{aligned}$$

Um estimador possível do desvio padrão do processo sob controle, σ , é:

$$\hat{\sigma}_A = \frac{\bar{R}}{d_2(n)} \quad (A.1)$$

Considerando agora o interesse na construção de um gráfico de controle da variabilidade que apresente valores das amplitudes amostrais, R_i , ao longo do tempo utilizaremos o gráfico R . Para determinar os limites de controle.

Supondo normalidade, a estimativa do erro padrão da amplitude amostral, σ_R , é $\hat{\sigma}_R = \frac{d_3(n)}{d_2(n)}\bar{R}$.

Prova:

Como $R = W\sigma$, temos que, $\sigma_R = d_3(n)\sigma$, sendo que σ é desconhecido, então devemos estimar:

$$\hat{\sigma}_R = d_3(n) \frac{\bar{R}}{d_2(n)}.$$

Usando-se $\bar{\bar{X}}$ como estimador de μ e $\hat{\sigma}_A$ como estimador de σ , os limites clássicos (3σ) dos gráficos de controle de \bar{X} e R , estabelecido por Shewhart (1924).

- Limites de controle estimados para o gráfico de \bar{X} :

$$\widehat{LSC} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2(n)\sqrt{n}}\bar{R}$$

e

$$\widehat{LIC} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2(n)\sqrt{n}}\bar{R}$$

- Limites de controle estimado para o gráfico de R :

$$\widehat{LSC} = \bar{R} + 3d_3(n)\frac{\bar{R}}{d_2(n)}$$

e

$$\widehat{LIC} = \bar{R} - 3d_3(n)\frac{\bar{R}}{d_2(n)}$$

Resultado 4: *Desvio padrão médio amostral: O valor esperado do desvio padrão médio amostral de k amostras provenientes da mesma distribuição normal*

A variabilidade pode ser monitorada adequadamente mediante a visualização do comportamento do desvio padrão amostral, S_i , quando se dispõe de muitas observações por amostra, o desvio padrão amostral é mais eficiente do que a amplitude amostral para estimar a variabilidade do processo. O valor esperado do desvio padrão é obtido da seguinte maneira:

$$E(S_i) = c_4(n)\sigma$$

Além disso, o desvio padrão de S é:

$$\sigma_S = \sigma \sqrt{(1 - c_4^2(n))} \blacksquare \quad (A.2)$$

A prova está detalhada em Costa et al (2005).

$c_4(n)$ é uma constante de correção de vício que depende apenas do tamanho da amostra, cuja expressão é:

$$c_4(n) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

e $\Gamma(\cdot)$ correspondente a função gama.

Montgomery (2009) apresenta uma expressão simplificada, que fornece boa aproximação para $n > 25$, a constante $c_4(n)$ pode ser estreitamente aproximadas através de:

$$c_4(n) \approx \frac{4n-4}{4n-3}$$

para $n > 25$. Esta aproximação conduz uma variância aproximada de S de:

$$\sigma_S^2 \approx \frac{(8n-7)\sigma^2}{(4n-3)^2}$$

Dessa forma, é possível estimar o desvio padrão médio amostral e que seu valor esperado é dado por:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\bar{S}}{c_4(n)}\right) &= E\left(\frac{1}{kc_4(n)}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k S_i\right)\right) \\ &= E\left(\frac{\bar{S}_i}{c_4(n)}\right) \\ &= \sigma \end{aligned}$$

Um estimador possível da expressão do erro padrão do desvio padrão médio pode ser encontrado em Kamat (1954) vamos denotar como $\hat{\sigma}_B$ a estimativa de σ .

$$\hat{\sigma}_B = \frac{\bar{S}}{c_4(n)}$$

Usando-se \bar{X} como estimador de μ e $\hat{\sigma}_B$ como estimador de σ , os limites clássicos (3σ) dos gráficos de controle de \bar{X} e S , estabelecido por Shewhart (1924).

- Limites de controle estimados para o gráfico de \bar{X} :

$$\widehat{LSC} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{c_4(n)\sqrt{n}} \bar{S}$$

e

$$\widehat{LIC} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{c_4(n)\sqrt{n}} \bar{S}$$

- Limites de controle estimado para o gráfico de S :

$$\widehat{LSC} = \bar{S} + \frac{3\bar{S}}{c_4(n)} \sqrt{(1 - c_4^2(n))}$$

e

$$\widehat{LIC} = \bar{S} - \frac{3\bar{S}}{c_4(n)} \sqrt{(1 - c_4^2(n))}$$

Apresenta-se na seção 3.1.1 um estudo detalhado de possíveis estimadores do desvio do processo, cuja, distribuição subjacente seja normal.

APÊNDICE B – Propriedades do núcleo estimador

Bessegato (2001) apresentou uma visão geral sobre núcleo estimador da função de distribuição, e suas propriedades, assim como sobre métodos para escolha da janela ótima neste contexto. Extraímos, dali algumas propriedades teóricas de $\hat{F}_{n,h}$ como um estimador da função de distribuição desconhecida F e as apresentamos a seguir.

Resultado 5: A esperança de $\hat{F}_{n,h}$ é dada por

$$E[\hat{F}_{n,h}(x)] = F(x) + h^2 C_2 + o(h^2) \quad (B.1)$$

Prova:

$$\begin{aligned} E[\hat{F}_{n,h}(x)] &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right] \\ &= E\left[K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x - u}{h}\right) f(u) du \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} k\left(\frac{x - u}{h}\right) F(u) du \end{aligned}$$

mudando-se para a variável $z = \frac{x-u}{h}$, tem-se:

$$E[\hat{F}_{n,h}(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(z) F(x - zh) dz, \quad (B.2)$$

aplicando a expansão de Taylor, temos

$$F(x - zh) = F(x) - zhF'(x) + \frac{z^2 h^2}{2} F''(x) + o(h^2)$$

a eq. (B.2) pode ser transformada em:

$$\begin{aligned} E[\hat{F}_{n,h}(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} k(z) F(x) dz - \int_{-\infty}^{\infty} k(z) zhF'(x) dz + \int_{-\infty}^{\infty} k(z) \frac{z^2 h^2}{2} F''(x) dz + o(h^2) \\ &= F(x) \int_{-\infty}^{\infty} k(z) dz - hF'(x) \int_{-\infty}^{\infty} zk(z) h dz + \frac{h^2}{2} F''(x) \int_{-\infty}^{\infty} z^2 k(z) dz + o(h^2) \end{aligned}$$

desde que k é simétrica e tem suporte compacto, tem-se que:

$$\begin{aligned} E[\hat{F}_{n,h}(x)] &= F(x) + \frac{h^2}{2} F''(x) \mu_2(k) + o(h^2) \\ &= F(x) + h^2 C_1 + o(h^2) \end{aligned} \quad (B.3)$$

em que C_1 é uma constante dada por

$$C_1 = \frac{F''(x) \mu_2(k)}{2} \blacksquare \quad (B.4)$$

Da eq. (B.1), verifica-se que $\hat{F}_{n,h}$ está sujeita a um vício cujo termo principal é da forma $h^2 C_1$ e C_1 depende do núcleo K e da função de distribuição desconhecida F .

Resultado 6: A variância de $\hat{F}_{n,h}$ é dada por

$$\text{Var}[\hat{F}_{n,h}(x)] = \frac{1}{n} F(x)[1 - F(x)] - \frac{h}{n} C_1 + o\left(\frac{h}{n}\right),$$

Prova:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{F}_{n,h}(x)] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} \left[K \left(\frac{x - X_i}{h} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \text{Var} \left[K \left(\frac{x - X_1}{h} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left\{ E \left[K^2 \left(\frac{x - X_1}{h} \right) \right] - E \left[K \left(\frac{x - X_1}{h} \right) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ I - E \left[K \left(\frac{x - X_1}{h} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (B.5)$$

sendo

$$I = E \left[K^2 \left(\frac{x - X_1}{h} \right) \right]$$

integrando por partes, temos que:

$$\begin{aligned} I &= \int K^2 \left(\frac{x-u}{h} \right) f(u) du \\ &= \frac{2}{h} \int K \left(\frac{x-u}{h} \right) k \left(\frac{x-u}{h} \right) F(u) du \end{aligned}$$

mudando-se para a variável $z = \frac{x-u}{h}$, tem-se:

$$I = 2 \int K(z) k(z) F(x - zh) dz$$

Aplicando novamente a expansão de Taylor, temos que $F(x - zh) = F(x) - zhF'(x) + o(h)$ e então:

$$\begin{aligned} I &= 2 \left\{ \int K(z)k(z)F(z)dz - \int K(z)k(z)zhF'(z)dz + o(h) \right\} \\ &= 2 \left\{ F(x) \int K(z)k(z)dz - hF'(x) \int zK(z)k(z)dz + o(h) \right\} \end{aligned}$$

Como $\int K(z)K'(z)dz = \frac{1}{2}$, temos que

$$I = F(x) - 2hF'(x) \int zK(z)k(z)dz + o(h)$$

Assim das eq. (B.3) e (B.5), temos

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{F}_{n,h}(x)] &= \frac{1}{n} \left\{ F(x) - 2hF'(x) \int zK(z)k(z)dz + o(h) \right. \\ &\quad \left. - \left[F(x) + \frac{h^2}{2}F''(x)w_2 + o(h^2) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ F(x)[1 - F(x)] - \frac{2h}{n}F'(x) \int zK(z)k(z)dz \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^2}{n}F(x)F''(x) \int z^2k(z)dz - \frac{h^4}{4n} \left[F''(x) \int z^2k(z)dz \right]^2 + o\left(\frac{h}{n}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n}F(x)[1 - F(x)] - \frac{h}{n}C_2 + o\left(\frac{h}{n}\right) \end{aligned} \quad (B.6)$$

onde

$$C_2 = 2F'(x) \int_{-\infty}^{\infty} tK(t)k(t)dt > 0 \blacksquare \quad (B.7)$$

Verifica-se que a variância do núcleo estimador é menor que a variância da função de distribuição empírica eq. (4). A redução dá-se pelo termo $-\frac{C_2h}{n}$, com $C_2 > 0$, salientando que $(\text{Var}[\hat{F}_{n,h}] - \text{Var}[\hat{F}_n]) \rightarrow 0$, pois $C_2 \frac{h}{n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Prova-se que $\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)k(t)dt > 0$. Dessa maneira $\text{Var}[\hat{F}_{n,h}] \leq [\hat{F}_n]$. Entretanto, $\hat{F}_{n,h}$ está sujeito a um vício cujo o termo principal da forma h^2C_1 conforme verificado em (B.1).

As constantes C_1 e C_2 dependem do núcleo K e da função de distribuição desconhecida F . Salientamos assim que a escolha da janela ótima visa um balanceamento entre o vício e a variância de $\hat{F}_{n,h}$.

Verifica-se pelas eq. (B.3) e (B.6) que o ajuste no valor do parâmetro de suavidade pode reduzir o vício do estimador, impondo, entretanto um acréscimo em sua variância. Se for utilizado um valor pequeno de h para eliminar o vício, então a variância torna-se grande. De outra maneira, a escolha de um valor grande de h reduzirá a variação aleatória, quantificada pela variância, em troca da introdução de um erro sistemático, ou vício na estimativa. Assim, a escolha do parâmetro de suavidade implica um *trade off* entre erro aleatório e erro sistemático, sendo este um dos problemas fundamentais em estimação.

APÊNDICE C – Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis

Tabela 11: Fatores para construção de gráficos de controle

Observação na amostra (n)	Fatores		
	c4	d2	d3
2	0,7979	1,128	0,853
3	0,8862	1,693	0,888
4	0,9213	2,059	0,880
5	0,9400	2,326	0,864
6	0,9515	2,534	0,848
7	0,9594	2,704	0,833
8	0,9650	2,847	0,820
9	0,9693	2,970	0,808
10	0,9727	3,078	0,797
11	0,9754	3,173	0,787
12	0,9776	3,258	0,778
13	0,9794	3,336	0,770
14	0,9810	3,407	0,763
15	0,9823	3,472	0,756
16	0,9835	3,532	0,750
17	0,9845	3,588	0,744
18	0,9854	3,640	0,739
19	0,9862	3,689	0,734
20	0,9869	3,735	0,729
21	0,9876	3,778	0,724
22	0,9882	3,819	0,720
23	0,9887	3,858	0,716
24	0,9892	3,895	0,712
25	0,9896	3,931	0,708