

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL
DOUTORADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Davi Riani Gotardelo

Otimização Multiobjetivo utilizando Algoritmos Evolutivos em Seleção de Carteiras: uma abordagem envolvendo ω , assimetria e antifragilidade

Juiz de Fora
2020

Davi Riani Gotardelo

Otimização Multiobjetivo utilizando Algoritmos Evolutivos em Seleção de Carteiras: uma abordagem envolvendo ω , assimetria e antifragilidade

Tese apresentada ao Doutorado em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional. Área de concentração: Modelagem Computacional

Orientador: Prof. D.Sc. Leonardo Goliatt da Fonseca

Coorientadora: Prof. D.Sc. Fernanda Finotti Cordeiro

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gotardelo, Davi Riani.

Otimização Multiobjetivo utilizando Algoritmos Evolutivos em Seleção de Carteiras: uma abordagem envolvendo ω , assimetria e antifragilidade / Davi Riani Gotardelo. – 2020.

169 f. : il.

Orientador: Leonardo Goliatt da Fonseca

Coorientadora: Fernanda Finotti Cordeiro

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. Doutorado em Modelagem Computacional, 2020.

1. Algoritmos Evolutivos. 2. Otimização Multiobjetivo. 3. Seleção de Carteiras. I. Fonseca, Leonardo G., orient. II. Doutor.

Davi Riani Gotardelo

Otimização Multiobjetivo utilizando Algoritmos Evolutivos em Seleção de Carteiras: uma abordagem envolvendo ômega, assimetria e antifragilidade

Tese apresentada ao Doutorado em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional. Área de concentração: Modelagem Computacional

Aprovada em 30 de outubro de 2020.


BANCA EXAMINADORA




Prof. D.Sc. Leonardo Goliatt da Fonseca - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Fernanda Finotti Cordeiro - Coorientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Douglas Adriano Augusto
Fundação Oswaldo Cruz - FIOCRUZ



Prof. D.Sc. Carlos Cristiano Hasenclever Borges
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Paulo César Coimbra Lisboa
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Fabrízio Condé de Oliveira
Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de terminar mais esta fase da minha carreira. Obrigado pelos milagres que Ele fez nessa caminhada.

Agradeço aos meus pais por me ensinarem desde pequeno que aprender nunca é demais.

Agradeço à minha casa, minha querida esposa Aline pela paciência, companheirismo e suporte sempre presente nas horas mais difíceis. Agradeço também aos meus queridos filhos Vinícius e Lavínia pelas orações, torcida e pelo carinho de sempre. Amo muito todos vocês!!

Agradeço aos meus orientadores por tudo. À prof. Fernanda pelo suporte sempre presente, respondendo mensagens de madrugada e por me encorajar e sempre trazer uma palavra positiva para minha vida. Ao prof. Leonardo por me ajudar a mergulhar no universo da computação e pelo tratamento sempre respeitoso e valoroso. Sua didática foi fundamental para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço aos professores e colegas do PGMCC, mas quero destacar alguns colegas que foram indispensáveis: Hernando e Camila pela ajuda nas matérias, à Grasi pelas inúmeras ajudas com os meus códigos e por me ensinar tanto, à Gisele por me ensinar a mexer no Cluster. Sem vocês eu certamente não teria conseguido!

Agradeço a meus amigos e irmãos que mantiveram meu nome em suas orações, em especial, ao meu querido irmão Wagner. Obrigado pela cobertura meu irmão!

Agradeço a Ju e o Dani por prestigiarem esse momento em minha vida! Amo vocês!

RESUMO

A rentabilidade em investimentos sempre foi desejo de qualquer investidor, seja pessoa física ou jurídica. Em períodos de quedas das taxas de juros das economias mundiais, bem como a existência de um desempenho instável dos ativos das bolsas de valores devido a recorrentes crises financeiras, como a recente ocasionada pelo COVID-19, a rentabilidade de ativos de Renda Fixa e Variável está cada vez mais ameaçada.

Esse contexto suscita nos investidores uma busca cada vez maior por ativos que consigam conciliar rentabilidade e um mínimo de segurança na composição de seus portfólios. Isso faz com que a seleção de carteiras de ativos seja, sem dúvida, um dos temas mais desafiadores da área de Finanças.

Desde a contribuição inicial de Markowitz, diversos pesquisadores têm buscado estudar métodos, técnicas e modelos aplicáveis ao tema. Um marco teórico importante foi a proposição nos anos 60 do modelo CAPM que, embora robusto e consistente, apresenta falhas severas empíricas. Sua limitação empírica é apontada pelo fato da *proxy* da carteira de mercado idealizada pelo modelo não se efetivar na prática. Aliado a isso, algumas premissas como a normalidade da distribuição e a função utilidade quadrática tornam o modelo CAPM cada vez menos propenso ao sucesso quando implementado na prática.

Diante disso, novas abordagens têm sido apresentadas, com destaque recente para o modelo OCAPM, em que a medida $\hat{\Omega}$ permite relaxar essas premissas do CAPM e pode representar com maior efetividade a preferência do investidor. Novos atributos que não somente a média e variância passam a ser relevantes no processo de tomada de decisão do investidor, transformando o problema em uma abordagem multiobjetiva.

Como o OCAPM ainda não tem ampla aplicação empírica, esta pesquisa se divide em três partes: a primeira, trabalha com otimização mono-objetivo e busca conhecer empiricamente se o modelo OCAPM apresenta desempenho superior ao modelo CAPM nos mercados estudados; a segunda parte trabalha com uma otimização de atributos puramente convexas e visa ratificar a visão de que a média e variância podem não ser, por si só, suficientes para representar toda a distribuição de retorno dos ativos e, por conseguinte, da decisão dos investidores. A terceira parte, a principal da pesquisa, trata da otimização de carteiras multiobjetivas que envolvam atributos convexas e não-convexas através do emprego de algoritmos evolutivos.

Neste experimento, são propostas 03 carteiras multiobjetivas: i) Global, envolvendo a otimização dos atributos $\hat{\Omega}$, média, assimetria, curtose, *drawdown* e antifragilidade; ii) Antifrágil, envolvendo *drawdown* e antifragilidade e iii) Assimétrica, envolvendo $\hat{\Omega}$, assimetria e curtose.

Os resultados da pesquisa mostram que a carteira Antifrágil trouxe ganhos superiores em relação à média de retornos dos demais modelos e sobretudo no mercado americano

apresentou melhores condições de risco. Valorizar ativos que apresentem baixo *drawdown* e possuam relativa resiliência em períodos de turbulência se torna vantajoso na gestão de investimentos. Perder pouco em momentos de crise parece ser mais significativo que ganhar em períodos de bonança e estabilidade. Dentre os algoritmos evolutivos empregados, o destaque fica com o NSGA3, que apresentou o melhor desempenho fora da amostra na otimização de carteiras multiobjetivas.

Palavras-chave: Algoritmos Evolutivos. Otimização Multiobjetivo. Seleção de Carteiras. Antifragilidade.

ABSTRACT

Profitability in investments has always been the desire of any investor, whether an individual or a company. In periods of declining interest rates in world economies, as well as the existence of an unstable performance of stock exchange assets due to recurring financial crises, such as the recent one caused by COVID-19, the profitability of Fixed and Variable Income assets is increasingly threatened.

This context causes investors to increasingly search for assets that manage to reconcile profitability and a minimum of security in the composition of their portfolios. It makes the selection of asset portfolios undoubtedly one of the most challenging topics in the Finance area.

Since Markowitz's initial contribution, several researchers have sought to study methods, techniques, and models applicable to the topic. A crucial theoretical landmark was the proposal in the 1960s of the CAPM model, which has severe empirical flaws, although robust and consistent. Its empirical limitation is pointed out by the fact that the market portfolio proxy idealized by the model does not take effect in practice. In addition to this, some premises as normal distribution and the quadratic utility function make the CAPM model less and less likely to succeed when implemented in practice.

Therefore, new approaches have been presented, with a recent highlight for the OCAPM model, in which the Omega measure allows us to relax these CAPM premises and represent the investor's preference more effectively. Thus, new attributes that not only mean and variance become relevant in the process of building new approaches to the model, transforming the problem into a multiobjective approach.

As OCAPM does not yet have a full empirical application, this research splits into three parts: the first works with mono-objective optimization and seeks to empirically know if the OCAPM model performs better than the CAPM model in the studied markets. The second part works with the optimization of purely convex attributes. It aims to ratify the view that the mean and variance may not be sufficient to represent the entire distribution of return on assets and, therefore, investors' decisions. The third part, the central part of the research, deals with the optimization of multiobjective portfolios involving convex and non-convex attributes through the use of evolutionary algorithms.

In this experiment, there are three multiobjective portfolios: i) Global, involving the optimization of the omega, mean, asymmetry, kurtosis, drawdown, and antifragility attributes; ii) Antifragile, involving drawdown and antifragility and iii) Asymmetric, involving omega, skewness, and kurtosis.

The results of the research show that the antifragile portfolio brought higher average returns than CAPM and OCAPM models, and the American market showed better risk conditions. Valuing assets that have a low drawdown and have relative resilience in times

of turbulence becomes advantageous in investment management. Losing little in crisis times seems to be more significant than winning in periods of calm and stability. Among the evolutionary algorithms used, the highlight is the NSGA3, which presented the best performance out of the sample in the optimization of multiobjective portfolios.

Keywords: Evolutionary Algorithms. Multiobjective optimization. Portfolio Selection. Antifragility.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Teorema de Tobin	30
Figura 2 – SML x Modelo CAPM	31
Figura 3 – Medida $\hat{\Omega}$	34
Figura 4 – Fronteira Eficiente $\hat{\Omega}$	35
Figura 5 – SML $\hat{\Omega}$	36
Figura 6 – Região Factível x Espaço Objetivo	46
Figura 7 – Exemplo de Dominância - Adaptado de Deb(82)	49
Figura 8 – Soluções Ótimas-Pareto para 02 objetivos	50
Figura 9 – Proposta de taxonomia de técnicas de solução para problemas de otimização	51
Figura 10 – Categoria principal da técnica utilizada e tipo de meta-heurística	52
Figura 11 – Distribuição de publicações mono-objetivo e multiobjetivo por ano	53
Figura 12 – Número de objetivos, restrições e medidas utilizadas	54
Figura 13 – Distribuição das restrições	55
Figura 14 – Esquema básico de um AG	59
Figura 15 – Mecanismo de Seleção - NSGAI	62
Figura 16 – Pontos de Referência para 03 objetivos - NSGAIII	64
Figura 17 – Convergência e Diversidade das soluções	67
Figura 18 – Hypervolume	68
Figura 19 – Indicadores de Desempenho dos Algoritmos dos trabalhos levantados por Liagkouras e Metaxiotis (113)	69
Figura 20 – Fluxograma da Metodologia de Otimização e Análise	72
Figura 21 – Janelas Dentro e Fora da Amostra	74
Figura 22 – Esquema da restrição de cardinalidade utilizada na carteira ótima	75
Figura 23 – Maximum Drawdown	83
Figura 24 – Correlação VIX x Dow Jones	84
Figura 25 – Correlação VIX Brasil x IBOVESPA	85
Figura 26 – Tabelas de Atributos otimizados por Experimento	88
Figura 27 – Fluxograma dos Testes Estatísticos aplicados na seleção dos melhores algoritmos	90
Figura 28 – Composição das Carteiras Otimizadas - Dow Jones	92
Figura 29 – Composição das Carteiras Otimizadas - IBOVESPA	93
Figura 30 – Composição das Carteiras Otimizadas - Small Caps	94
Figura 31 – Rentabilidade Acumulada fora da amostra OCAPM x CAPM - Dow Jones	99
Figura 32 – Rentabilidade Acumulada fora da amostra OCAPM x CAPM - IBOVESPA	100

Figura 33 – Rentabilidade Acumulada fora da amostra OCAPM x CAPM - Small Caps	101
Figura 34 – Composição das Carteiras com atributos convexos - Dow Jones	105
Figura 35 – Composição das Carteiras com atributos convexos - IBOVESPA	105
Figura 36 – Composição das Carteiras com atributos convexos - Small Caps	106
Figura 37 – Rentabilidade Acumulada fora da amostra Carteira Convexa - Dow Jones	107
Figura 38 – Rentabilidade Acumulada fora da amostra Carteira Convexa - IBOVESPA	108
Figura 39 – Rentabilidade Acumulada fora da amostra Carteira Convexa - Small Caps	109
Figura 40 – Testes estatísticos - Carteira Global	112
Figura 41 – Testes estatísticos - Carteira Assimétrica	112
Figura 42 – Testes estatísticos - Carteira Antifrágil	113
Figura 43 – Resumo dos Testes estatísticos	113
Figura 44 – Composição das Carteiras - Dow Jones	115
Figura 45 – Carteiras por Setor – Dow Jones	115
Figura 46 – Composição das Carteiras - IBOVESPA	116
Figura 47 – Carteiras por Setor – IBOVESPA	117
Figura 48 – Composição das Carteiras - Small Caps	118
Figura 49 – Carteiras por Setor – SMALL CAPS	119
Figura 50 – Rentabilidade Bruta por período - Dow Jones	120
Figura 51 – Retorno Acumulado - Dow Jones - Rolling Windows	121
Figura 52 – Análise por Setores - Dow Jones	123
Figura 53 – Rentabilidade Bruta por período - IBOVESPA	123
Figura 54 – Retorno Acumulado - IBOVESPA - Rolling Windows	124
Figura 55 – Análise por Setores - IBOVESPA	125
Figura 56 – Rentabilidade Bruta por período – SMALL CAPS	126
Figura 57 – Retorno Acumulado - Small Caps - Rolling Windows	127
Figura 58 – Análise por Setores - Small Caps	128
Figura 59 – Análise de Componentes Principais - Dow Jones	129
Figura 60 – Carga Fatorial - Dow Jones	130
Figura 61 – Estatísticas Descritivas dos ativos - Dow Jones	131
Figura 62 – Análise de Componentes Principais - IBOVESPA	132
Figura 63 – Carga Fatorial - IBOVESPA	133
Figura 64 – Estatísticas Descritivas dos ativos - IBOVESPA	134
Figura 65 – Carga Fatorial - Small Caps	135
Figura 66 – Estatísticas Descritivas dos ativos - Small Caps	136
Figura 67 – Gráfico de Componentes – Small Caps	137

Figura 68 – Betas - Dow Jones	156
Figura 69 – Betas - IBOVESPA	157
Figura 70 – Betas - Small Caps	158
Figura 71 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 1994 a 1995	159
Figura 72 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 1996 a 1997	159
Figura 73 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 1998 a 1999	160
Figura 74 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2000 a 2001	160
Figura 75 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2002 a 2003	160
Figura 76 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2004 a 2005	161
Figura 77 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2006 a 2007	161
Figura 78 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2008 a 2009	161
Figura 79 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2010 a 2011	162
Figura 80 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2012 a 2013	162
Figura 81 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2014 a 2015	162
Figura 82 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2016 a 2017	163
Figura 83 – Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2018 a 2019	163
Figura 84 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 1994 a 1995	163
Figura 85 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 1996 a 1997	164
Figura 86 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 1998 a 1999	164
Figura 87 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2000 a 2001	164
Figura 88 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2002 a 2003	165
Figura 89 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2004 a 2005	165
Figura 90 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2006 a 2007	165
Figura 91 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2008 a 2009	166
Figura 92 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2010 a 2011	166
Figura 93 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2012 a 2013	166
Figura 94 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2014 a 2015	167
Figura 95 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2016 a 2017	167
Figura 96 – Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2018 a 2019	167
Figura 97 – Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2009 a 2010	168
Figura 98 – Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2011 a 2012	168
Figura 99 – Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2013 a 2014	168
Figura 100 – Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2015 a 2016	169
Figura 101 – Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2017 a 2018	169

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pesquisas multiobjetivas envolvendo problema de seleção de carteiras	41
Tabela 2 – Algoritmos Evolutivos aplicados à seleção de carteiras	56
Tabela 3 – Parâmetros dos Algoritmos utilizados em pesquisas anteriores	61

Tabela 4 – Parâmetros da Otimização	89
Tabela 5 – Composição das carteiras por setor (Dow Jones)	92
Tabela 6 – Composição das carteiras por setor (IBOVESPA)	94
Tabela 7 – Composição das carteiras por setor (Small Caps)	95
Tabela 8 – GRS Multivariado - Dow Jones	96
Tabela 9 – GRS Multivariado - IBOVESPA	96
Tabela 10 – GRS Multivariado - Small Caps	96
Tabela 11 – Teste T dos Alfas - Dow Jones	97
Tabela 12 – Teste T dos Alfas - IBOVESPA	97
Tabela 13 – Teste T dos Alfas - Small Caps	97
Tabela 14 – Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Dow Jones	98
Tabela 15 – Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - IBOVESPA	100
Tabela 16 – Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Small Caps	101
Tabela 17 – Erro médio de projeção - Dow Jones - Valores a 10^{-5}	102
Tabela 18 – Erro médio de projeção - IBOVESPA - Valores a 10^{-5}	102
Tabela 19 – Erro médio de projeção - Small Caps - Valores a 10^{-5}	102
Tabela 20 – Teste T - Diferença dos erros médios - CAPM x OCAPM - Dow Jones	103
Tabela 21 – Teste T - Diferença dos erros médios - CAPM x OCAPM - IBO- VESPA	103
Tabela 22 – Teste T - Diferença dos erros médios - CAPM x OCAPM - SMALL	103
Tabela 23 – Composição das Carteiras Convexas por Setor	106
Tabela 24 – Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Carteira Convexa - Dow Jones	107
Tabela 25 – Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Carteira Convexa -IBOVESPA	108
Tabela 26 – Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Carteira Convexa - Small Caps	109
Tabela 27 – Estatísticas Descritivas dos Retornos fora da amostra - Dow Jones	122
Tabela 28 – Estatísticas Descritivas dos Retornos fora da amostra - IBOVESPA	125
Tabela 29 – Estatísticas Descritivas dos Retornos fora da amostra - Small Caps	128
Tabela 30 – Resumo da Análise de Componentes Principais	135
Tabela 31 – Desempenho dentro da amostra x fora da amostra	138

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AF	Antifragilidade
CVIX	Correlação Condicional ao VIX
DWJ	Dow Jones
IBOV	IBOVESPA
MVP	<i>Minimum Variance Portfolio</i>
SMALL	Small Caps
TLR	Taxa Livre de Risco
VIX	<i>Volatility Index</i>
MOEA	<i>Multiobjective evolutionaty algorithm</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	MOTIVAÇÃO	21
1.2	OBJETIVOS	24
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	25
2	REFERENCIAL TEÓRICO	27
2.1	TEORIA DE CARTEIRAS	27
2.1.1	Contribuição inicial de Markowitz	27
2.1.2	Modelo CAPM	29
2.1.3	Modelo OCAPM	32
2.1.4	Abordagens Multiobjetivas Recentes	38
2.1.5	Antifragilidade em portfólios	41
2.2	OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO	45
2.2.1	Definição Geral	45
2.2.2	Convexidade	46
2.2.3	Dominância	47
2.2.4	Conjunto Ótimo de Pareto	48
2.3	ESTADO DA ARTE EM TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS AO PROBLEMA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS	50
2.3.1	Taxonomia	50
2.3.2	<i>Surveys</i>	51
2.4	ALGORITMOS EVOLUTIVOS MULTIOBJETIVOS	57
2.4.1	Algoritmo Evolutivo	57
2.4.2	Parâmetros de Evolução	58
2.4.3	NSGA II (<i>Nondominated Sorting Genetic Algorithm</i>):	60
2.4.4	NSGA III (<i>Nondominated Sorting Genetic Algorithm</i>):	62
2.4.5	GDE3 (<i>Generalized Differential Evolution</i>):	64
2.4.6	IBEA (<i>Indicator Based Evolutionary Algorithm</i>):	66
2.4.7	Medida de desempenho dos algoritmos	67
3	METODOLOGIA	71
3.1	COLETA DE DADOS	71
3.1.1	Mercados escolhidos e critério de liquidez	71
3.1.2	Janelas temporais	73
3.1.3	Taxa Livre de Risco - <i>Risk Free</i>	73
3.1.4	Restrições	74
3.1.4.1	Cardinalidade	74
3.1.4.2	Restrições do peso de cada ativo ($0 < w \leq 1$ <i>Bound constraint</i>)	75
3.1.4.3	Restrições do somatório dos pesos ser igual a 1 (<i>Budget constraint</i>)	75

3.1.5	<i>Proxies</i> comparativas de desempenho	76
3.2	EXPERIMENTO 01 - MONO-OBJETIVO: MODELO CAPM x OCAPM	76
3.2.1	Otimização do Modelo CAPM	76
3.2.2	Otimização do Modelo Ômega CAPM (OCAPM)	77
3.2.2.1	A transformação convexa da função Ômega	77
3.3	EXPERIMENTO 02: OTIMIZAÇÃO DOS ATRIBUTOS CONVEXOS: MÉDIA, VARIÂNCIA, CURTOSE E EXPECTED SHORTFALL	79
3.3.1	Otimização da combinação não-negativa dos atributos convexos	80
3.4	EXPERIMENTO 03: OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO UTILIZANDO ALGORITMOS EVOLUTIVOS ENVOLVENDO ATRIBUTOS CON- VEXOS E NÃO-CONVEXOS	81
3.4.1	Definição dos atributos não-convexos: <i>Maximum Drawdown</i> e Correlação Condicional ao VIX	82
3.4.1.1	<i>Maximum Drawdown</i>	82
3.4.1.2	Correlação Condicional ao VIX	83
3.4.2	Otimização Multiobjetiva Global	85
3.4.3	Otimização Multiobjetiva Antifrágil	86
3.4.4	Otimização Multiobjetiva Assimétrica	87
3.4.5	Algoritmos e parâmetros escolhidos	88
3.4.6	Testes Estatísticos	89
4	RESULTADOS	91
4.1	EXPERIMENTO 01 - MONO-OBJETIVO: MODELO CAPM x OCAPM	91
4.1.1	Betas dos Modelos CAPM e OCAPM	91
4.1.2	Desempenho dentro da amostra	91
4.1.2.1	Composição das carteiras otimizadas	91
4.1.2.2	Teste GRS Multivariado	94
4.1.2.3	Teste T para diferença das médias dos resíduos (alfas)	96
4.1.3	Desempenho fora da amostra	97
4.1.3.1	Rentabilidade Bruta	97
4.1.3.2	Erro médio - Fora da amostra	101
4.1.3.3	Teste T para diferença dos erros por modelo - Fora da amostra	102
4.1.4	Conclusões	103
4.2	EXPERIMENTO 02: OTIMIZAÇÃO DOS ATRIBUTOS CONVEXOS: MÉDIA, VARIÂNCIA, CURTOSE E EXPECTED SHORTFALL	104
4.2.1	Composição da carteira com atributos convexos	104
4.2.2	Desempenho fora da amostra	106
4.2.3	Conclusões	110

4.3	EXPERIMENTO 03: OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO UTILIZANDO ALGORITMOS EVOLUTIVOS ENVOLVENDO ATRIBUTOS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS	110
4.3.1	Hypervolumes	111
4.3.2	Testes estatísticos dos hypervolumes	111
4.3.3	Composição da carteira multiobjetiva com emprego de algoritmos evolutivos	114
4.3.4	Análise de desempenho fora da amostra	119
4.3.4.1	Rentabilidade Bruta	119
4.3.4.2	Análise de Componentes Principais dos resultados	127
4.3.5	Análise do desempenho dos algoritmos - Dentro x Fora da amostra	136
4.3.6	Conclusões	138
5	CONCLUSÕES FINAIS	141
	REFERÊNCIAS	145
6	APENDICES	155

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Nos últimos anos, a política monetária dos Bancos Centrais ao redor das principais economias mundiais tem sido a de reduzir as taxas de juros dos títulos de suas dívidas públicas. Vários países já se encontram atualmente com juros reais negativos, caso este em que a inflação supera a taxa básica de juros da economia. Taxas de juros muito baixas resultam para o investidor em rentabilidades cada vez menores em produtos de Renda Fixa, o que inevitavelmente os levam a investigarem alternativas mais interessantes no mercado de Renda Variável.

Paralelo a isso, em 2020, a economia mundial foi seriamente abalada pela pandemia do COVID-19, fato este que provocou uma grande desvalorização dos ativos em praticamente todas as bolsas de valores mundiais, afetando seriamente o desempenho do mercado de Renda Variável. No Brasil, além da desvalorização dos ativos, verificou-se uma forte desvalorização do real frente ao dólar, além da taxa de juros básica da economia (SELIC) atingir os menores patamares de sua história.

Daí o que se tem no cenário atual são ambos os mercados - Renda Fixa e Renda Variável - em declínio de rentabilidade: o primeiro pela redução das taxas de juros, que com a pandemia, tendem a permanecer baixas para estimular a retomada do crescimento econômico dos países; o segundo por incorporar riscos de desvalorização dos ativos em virtude de graves crises financeiras, como a do próprio COVID-19.

Este movimento certamente suscita nos investidores o desejo de investir em ativos ou produtos financeiros que buscam conciliar rentabilidade, mas também proteção de seu patrimônio. Haveria formas de se aplicar em ativos de Renda Variável em que vários objetivos pudessem ser simultaneamente conjugados? Essa proposta multiobjetiva poderia resultar em desempenho mais atrativo aos investidores?

Sob este contexto, um dos maiores desafios dos estudos atuais da área de Finanças é, sem dúvida, aquele relacionado à seleção de carteira de ativos. Desde a contribuição inicial de Markowitz (1952)(1), diversos pesquisadores têm buscado estudar métodos, técnicas e modelos aplicáveis à seleção de portfólios. Para Markowitz, o investidor apresenta uma função utilidade quadrática, em que busca maximizar o retorno ao menor risco possível. Para isso, o autor entendeu o retorno como o retorno esperado e o risco como a variância.

Em 1964, Sharpe (2) aperfeiçoa o modelo de Markowitz propondo o CAPM - *Capital Asset Price Model* - modelo clássico amplamente utilizado até os dias atuais. Neste modelo, Sharpe considera que existe uma Taxa Livre de Risco - TLR, uma taxa pela qual os investidores são remunerados praticamente sem risco envolvido. Na concepção original do CAPM, fez-se necessário assumir que o mercado fosse eficiente em termos de média

e variância. A única forma então conhecida para gerar tal resultado era a utilização da função utilidade quadrática ou da distribuição normal para os retornos (3). Neste aspecto, o retorno de mercado serve de parâmetro na comparação de qualquer ativo isoladamente.

Embora o CAPM seja o modelo mais usado na área de Finanças, por se apresentar teoricamente robusto, a partir do final dos anos 70, estudos empíricos têm encontrado dificuldades de aplicar o modelo na prática. Isso porque existem algumas premissas do modelo CAPM que embora teoricamente sejam pertinentes, são difíceis de serem demonstradas em experimentos práticos. A principal delas talvez seja a composição do que o autor chama de carteira de mercado, pilar importante para o modelo e que tem falhado em experimentos práticos aplicados do CAPM (2). Roll (1977) (4) argumenta que o CAPM é irrefutável, pois não pode ser testado com perfeição, uma vez que a carteira de mercado, da qual o modelo depende, é inestimável. Como o modelo não pode ser testado, a única discussão possível é sobre o quão razoável é assumir que o mercado seja eficiente em termos de média e variância apenas. Desde então, surge a necessidade de se encontrar ou produzir novos modelos de previsão de retornos ajustados ao risco.

Neste contexto, novas alternativas surgiram ao CAPM. Pode-se destacar o APT - *Arbitrage Pricing Theory* (5) e o Modelo de 03 Fatores (Fama e French) (6), este último buscando incrementar outros fatores que expliquem os retornos esperados de um ativo no mercado financeiro. Mais recentemente, em 2013, foi proposto o OCAPM (Ômega CAPM)(7), que corresponde a uma tentativa de aperfeiçoar o CAPM sobretudo na questão de relaxar algumas premissas envolvendo a normalidade da distribuição dos retornos, bem como a função quadrática de utilidade do investidor.

O OCAPM utiliza a medida Ômega obtida do trabalho inicial de Kazemi *et al* (8), que é uma medida que consegue incorporar todos os momentos da distribuição e não só apenas a média e variância, como estabelecido por Markowitz. A medida fornece uma descrição das características do risco-retorno, de tal modo que resulte em uma medida intuitivamente atrativa e facilmente computável. Assim, ao invés de se estimar alguns momentos individuais, a medida Ômega mede o impacto total, o qual é certamente de interesse dos tomadores de decisão.

Paralelo a isso, além dessa medida Ômega, outros esforços têm sido despendidos a fim de incluir outras variáveis ou métricas que possam ser relevantes ao investidor na sua tomada de decisão, como a assimetria, curtose, rebaixamento de saldo (*drawdown*), entre outras. Medidas essas que buscam capturar informações relevantes de uma carteira de investimento e que sobrepujem a média e variância como medidas clássicas.

Ao se incluir essas outras variáveis, o desafio passa a ser incorporar essas medidas de forma simultânea como objetivos do decisor. Modelos de otimização com um único objetivo talvez não sejam suficientes para capturar o cerne de decisão dos investidores, dada a complexidade de informações e características do mercado financeiro. Assim,

investidores podem privilegiar carteiras com maior média, mas também que valorizem aspectos como assimetria, curtose, *drawdown*, entre outros.

Neste sentido, agregar múltiplos objetivos passa a ser um nicho promissor de pesquisa e a otimização multiobjetivo tem se mostrado bem-sucedida através do emprego de algoritmos evolutivos. Além do desafio de atender a vários objetivos simultaneamente, a otimização deve ser modelada de forma que se submeta também a várias restrições, normalmente impostas pelo investidor ou pelo próprio mercado. Assim, são comuns as restrições orçamentárias, restrições do peso dos ativos na carteira e, em destaque, a restrição de cardinalidade, que definirá o número máximo de ativos a compor a carteira.

Desta forma, otimizar um problema com vários objetivos e restrições simultaneamente, não é possível utilizando métodos triviais de otimização e é neste quesito que os algoritmos evolutivos de otimização multiobjetivo surgem como técnica diferenciada para gerar soluções que atendam a todos esses requisitos.

Particularmente, neste estudo, serão trabalhadas as medidas de assimetria, curtose e a própria medida Ômega. Aliado a essas medidas, foi também considerado o *Maximum Drawdown* (Rebaixamento Absoluto), medida amplamente utilizada pelos analistas de investimento e também bem empregada em pesquisas acadêmicas. Este indicador revela ao investidor a perda máxima apresentada por uma carteira baseada em seus valores históricos, desde o último pico até o seu valor mínimo.

Como componente inovador, este trabalho propõe também uma medida antifrágil, baseada no conceito de antifragilidade criado por Nassim Nicholas Taleb (9), cujo objetivo é avaliar o grau de resiliência de um ativo em momentos de crise e turbulência econômica.

Assim, as medidas Assimetria, Curtose, *Drawdown Máximo* e antifragilidade se juntam às medidas Média e Ômega para compor proposições empíricas que, otimizadas de forma multiobjetiva, possam apresentar desempenho superior aos modelos CAPM e OCAPM. Uma composição dos atributos puramente convexos é testada nesta pesquisa através de um experimento que chamamos de otimização da carteira Convexa. Além disso, foram propostas três carteiras multiobjetivas com o emprego de algoritmos evolutivos: a primeira carteira denominada Global, envolvendo a otimização de todas as seis medidas: Média, Ômega, Assimetria, Curtose, Drawdown e Antifragilidade ; a segunda, denominada Antifrágil, que avalia o *Drawdown* e antifragilidade e a última, chamada de carteira Assimétrica que visa conciliar a medida Ômega, Assimetria e Curtose.

A principal contribuição científica desta pesquisa é, sobretudo, de origem econômica e corresponde ao desenvolvimento de proposições empíricas que busquem composições de carteiras de mercado que apresentem desempenho superior às carteiras de mercado idealizadas pelo modelo CAPM, de forma assim a mitigar a inoperância empírica deste modelo. Além disso, apresentar novas alternativas de investimento que visam conciliar interesses muitas vezes diversificados por parte dos investidores pode ser uma nova abor-

dagem de investimentos. Essas proposições podem ser úteis para a tomada de decisão de investimento corporativo e para investidores no mercado financeiro.

Por ser uma proposta recente, o OCAPM carece de maior experimentação empírica. Assim, como forma de testar o modelo OCAPM frente ao modelo CAPM, este trabalho se divide em três etapas: a primeira etapa trabalha com otimização mono-objetivo e busca confirmar se o modelo OCAPM apresenta, empiricamente, desempenho superior ao modelo CAPM tradicional em mercados desenvolvido (EUA) e emergente (Brasil). A hipótese é que o modelo Ômega (OCAPM) possa representar melhor o comportamento dos investidores em um modelo de precificação de ativos do que simplesmente a média e a variância (CAPM).

A segunda e terceira etapas do trabalho visam corroborar que a média e variância não são, por si só, suficientes para representar toda a distribuição de retornos dos ativos e por conseguinte, da decisão dos investidores. Para isso, experimentos envolvendo a otimização de outros atributos convexos e não-convexos são realizados com esse objetivo.

Uma dessas características relevantes ao estudo de carteiras é o comportamento da cauda da distribuição de retornos, comumente medida nas pesquisas acadêmicas pela assimetria e curtose. Isso implica afirmar que o coeficiente de assimetria positivo é preferível ao negativo, pois a frequência de retornos superiores será maior que a frequência de retornos inferiores. Ao mesmo tempo, em relação à curtose, distribuições com menor coeficiente de curtose são preferíveis ao maior, indicando que a distribuição se encontra mais achatada em relação ao valor modal.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do trabalho envolve principalmente sua contribuição econômica ao tema. Ao se trabalhar com medidas que não envolvam apenas a média e a variância, esta pesquisa visa ampliar a discussão da construção de modelos que melhor descrevam os retornos esperados de um ativo de capital. Este trabalho utiliza os algoritmos evolutivos multiobjetivos como técnica de otimização para verificar se outras medidas combinadas produzem desempenho superior aos modelos abordados (CAPM e OCAPM), quer seja por retornos maiores ou por riscos menores ao investidor.

Os objetivos específicos do trabalho correspondem a:

- (i) Verificar, inicialmente, se o OCAPM apresenta, empiricamente, desempenho superior ao CAPM;
- (ii) Propor, empiricamente, uma otimização dos atributos puramente convexos que vão além da média e variância, objetivando desempenho superior aos modelos CAPM e

OCAPM, bem como ao portfólio ingênuo (*Naive*¹);

- (iii) Propor, empiricamente, atributos não-convexos que otimizados simultaneamente em uma abordagem multiobjetiva, possam produzir resultados superiores aos modelos CAPM e OCAPM;
- (iv) Avaliar qualitativamente e quantitativamente o desempenho das carteiras multiobjetivas frente aos modelos tradicionais, buscando identificar componentes que permitam ao investidor melhores alternativas de investimentos.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 2, é apresentado o pilar teórico do trabalho, que se divide em 4 partes:

- (i) a primeira diz respeito à Teoria de Carteiras em Finanças, sobretudo às contribuições seminais de Markowitz, os modelos CAPM e OCAPM, abordagens multiobjetivas recentes e traz, ao final, conceitos de antifragilidade que podem ser aplicados à seleção de carteiras;
- (ii) a segunda parte envolve os principais conceitos de Otimização Multiobjetivo, dominância e conjunto ótimo de Pareto;
- (iii) a terceira parte apresenta o estado da arte em técnicas de otimização multiobjetivas aplicadas ao problema de seleção de carteiras, incluindo uma taxonomia destas técnicas e um resumo dos principais *surveys* recentes sobre o tema;
- (iv) a quarta e última parte do Referencial Teórico expõe os conceitos de algoritmo evolutivo e apresenta os principais algoritmos empregados neste trabalho.

O Capítulo 3 apresenta a Metodologia desta pesquisa, envolvendo coleta de dados e demonstra os procedimentos empregados na otimização multiobjetivo com algoritmos evolutivos, como a definição das funções objetivos, restrições e a apresentação das proposições empíricas deste trabalho. Esta seção ainda traz o resumo dos principais testes estatísticos aplicados na pesquisa, bem como fluxos que facilitam a demonstração de cada processo realizado pelo autor.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados dos 3 experimentos: (i) a otimização mono-objetivo dos modelos CAPM e OCAPM; (ii) a otimização de atributos puramente

¹ A carteira ou portfólio ingênuo, também chamado de Carteira Naive, é muito usada como *benchmarking* pela academia e corresponde ao investimento igualmente ponderado em todos os ativos do mercado, a saber, cada ativo recebe o peso $\frac{1}{n}$ na carteira, sendo n o número de ativos;

convexos e (iii) a otimização multiobjetivo envolvendo as carteiras global, antifrágil e assimétrica.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões finais deste trabalho, bem como suas limitações e sugestões de pesquisas futuras.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O objetivo deste capítulo é apresentar os pilares teóricos da pesquisa. Como o assunto é interdisciplinar, optou-se por destinar uma Seção para a Teoria de Carteiras, contendo a contribuição seminal de Markowitz, o modelo CAPM, suas críticas e o modelo OCAPM. Abordagens multiobjetivas recentes e o conceito de antifragilidade são apresentados no final desta Seção. Em seguida, a segunda Seção traz os principais conceitos envolvendo otimização multiobjetivo. A terceira apresenta uma taxonomia das técnicas de otimização, bem como o estado da arte, através de um levantamento em *surveys* recentes sobre o tema. Na última Seção deste capítulo, são apresentadas as principais características dos algoritmos evolutivos empregados nesta pesquisa, bem como parâmetros e métrica de desempenho.

2.1 TEORIA DE CARTEIRAS

2.1.1 Contribuição inicial de Markowitz

A precificação de ativos de capital sempre foi um tema de grande interesse no meio acadêmico. A primeira grande contribuição ao tema veio através do trabalho de Markowitz (1952) sobre Teoria de Carteiras(1). Antes de Markowitz, a ideia principal era que o ativo que apresentasse o maior retorno esperado deveria ser escolhido, independente do seu risco associado. O autor contribui principalmente com a inclusão da variável risco na escolha do ativo. O trabalho de Markowitz apresenta pelo menos três premissas importantes na construção teórica de seu modelo (10).

A primeira premissa é que os investidores avaliariam as carteiras apenas com base no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos sobre o horizonte de tempo de um período. A função utilidade do investidor seria diretamente proporcional ao retorno e inversamente proporcional ao risco. A segunda premissa diz que os investidores seriam avessos ao risco. Isto é, se duas carteiras tivessem o mesmo retorno esperado, o investidor sempre escolheria a de menor risco. A terceira premissa é que os investidores estariam sempre insatisfeitos em termos de retorno. No caso de duas carteiras de mesmo risco, os investidores sempre escolheriam a de maior retorno.

Desta forma, os investidores escolheriam carteiras “eficientes em média-variância”, que minimizassem a variância do retorno da carteira dado o retorno esperado e maximizassem o retorno esperado dada a variância. Entende-se como retorno esperado da carteira a média ponderada dos retornos de cada ativo de acordo com o peso que cada um ocupa na carteira. Já a variância da carteira é calculada como a variância dos ativos isolados, acrescidos da covariância dos ativos que compõem a carteira, calculada 2 a 2.

Markowitz conclui sua teoria definindo a fronteira eficiente como o “lugar geométrico

formado pelas infinitas carteiras e suas linhas (ou hipérboles) associadas, onde se permite obter um dado retorno com o mínimo risco possível ou um dado risco com o maior retorno possível”.

O modelo da Média-Variância pode ser descrito a seguir. Seja p uma carteira com n ativos. O retorno esperado da carteira é dado por:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i E[R_i], \quad (2.1)$$

Em que:

w_i é a participação do ativo i na carteira p ;

$[R_p]$ é o retorno da carteira p ;

$E[R_p]$ é o retorno esperado da carteira p ;

$E[R_i]$ é o retorno esperado do ativo i .

Já a variância da carteira é apresentada a seguir:

$$Var[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_p \rho_{ij}, \quad (2.2)$$

Em que:

$Var[R_p]$ é a variância dos retornos da carteira;

σ_i e σ_p são, respectivamente, o desvio-padrão do ativo i e da carteira p e, finalmente,

ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre os ativos i e j .

O desvio-padrão da carteira é dado pela raiz da variância:

$$\sigma_p = \sqrt{Var[R_p]}. \quad (2.3)$$

O objetivo principal do modelo é construir a fronteira eficiente, que representa todas as combinações de carteiras ótimas em termos de retorno e risco. A fronteira eficiente pode ser construída através de dois passos:

$$\text{Maximizar } E[R_p] \text{ , sujeito a } \sigma_p = k_1 \quad (2.4)$$

e

$$\text{Minimizar } \sigma_p \text{ , sujeito a } E[R_p] = k_2 \quad (2.5)$$

onde k_1 e k_2 são constantes.

Na Equação (2.4), maximiza-se o retorno esperado para um dado desvio-padrão (k_1). Se o processo for repetido várias vezes para diferentes níveis de desvio-padrão, o

resultado será um conjunto de carteiras ótimas que gerarão a fronteira eficiente. No caso da Equação (2.5), o processo é análogo, mas agora o desvio-padrão é minimizado para um dado nível de retorno esperado (k_2). O modelo assume que quanto maior o retorno e menor o desvio-padrão, melhor será carteira. A relação entre retorno e risco, definida por um ponto da borda da fronteira eficiente deverá ser escolhida pelo investidor de acordo com sua aversão ou não ao risco.

Como o modelo de Markowitz privilegia a análise da Média-Variância em uma série histórica financeira, é importante destacar que a distribuição dessa série deveria ser necessariamente normal para que sua análise fosse de fato pertinente e aplicável. Muitos estudos já demonstraram e praticamente pacificaram que as séries históricas financeiras não se comportam como distribuição normal, e portanto, não podem ser explicadas pela média e variância apenas (11).

2.1.2 Modelo CAPM

Após Markowitz, ainda nos anos 50, um dos autores de destaque foi Jonh Larry Kelly Jr. (12), que mais tarde se notabilizaria pelo critério de Kelly, utilizando conceitos relacionados à informação mútua em que o objetivo é maximizar o valor esperado do logaritmo da variável aleatória X , sendo X a representação da riqueza. Ele também concluiu que com probabilidade 1, o investidor que obedecesse seu critério iria enriquecer mais que qualquer outro critério. Kelly estudou jogos nos quais o perdedor perde o valor apostado; portanto, para evitar a ruína, somente uma fração de sua riqueza deve ser investida no jogo.

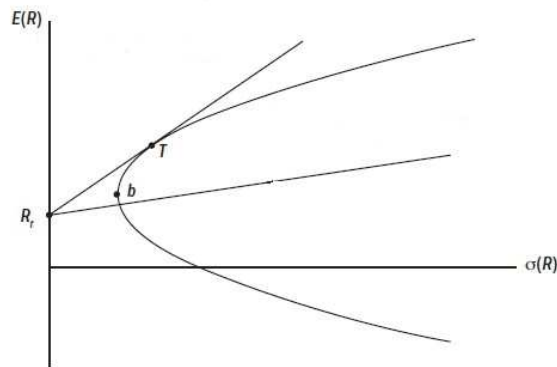
Em 1961, Treynor (13) começou a construir inicialmente o modelo que mais tarde ficaria conhecido como CAPM, buscando quantificar o risco e estabelecer suas relações, trabalho que deu origem ao seu segundo artigo em 1962, em que estabelece a relação linear entre o retorno esperado da ação e a covariância com a carteira de ações.

Em 1964, Sharpe consolida, a partir do modelo de Markowitz e Treynor, o modelo de precificação de ativos de capital conhecido classicamente como CAPM (*Capital Asset Price Model*)(2). À proposta de Markowitz, Sharpe inclui mais duas premissas: a de expectativas homogêneas e a da taxa livre de risco (14). A premissa de expectativas homogêneas diz que os investidores têm as mesmas perspectivas em relação aos retornos esperados, desvios-padrão e covariâncias dos ativos (hipótese de mercado eficiente). A premissa da taxa livre de risco é que existe tomada e concessão de empréstimos à taxa livre de risco, que é a mesma para todos os investidores e independe do montante tomado ou concedido. Na prática, a taxa livre de risco corresponde ao rendimento que o investidor recebe com risco mínimo e pode ser exemplificado como os ativos mais seguros de investimento, como o T-Bond no mercado americano e a SELIC no mercado brasileiro.

O acréscimo da taxa livre de risco faz com que a fronteira eficiente preconizada

por Markowitz se transforme em uma reta, já que existe um ponto de intercepto com o eixo Y que é a TLR – Taxa Livre de Risco ou R_f (*Risk-free*), apresentado na Figura 1. Para se obter as carteiras eficientes em média-variância disponíveis com tomada e concessão de empréstimos à taxa livre de risco, traça-se uma linha de R_f para cima e para a direita até a carteira tangente T. Pode-se perceber então que todas as carteiras eficientes são combinações do ativo livre de risco com uma só carteira tangente arriscada, T. A esse resultado chamou-se de “teorema da separação” de Tobin (15) . Assim, todos os investidores concordam que a carteira T é a única configuração que atinge a fronteira eficiente de média-variância. Ainda na Figura 1, o ponto b representa a carteira de mínima variância.

Figura 1: Teorema de Tobin



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

As premissas do CAPM implicam que a carteira de mercado deva estar sobre a fronteira de variância mínima para que o mercado de ativo feche. Assim, cria-se o beta (β), que corresponde à covariância do retorno do ativo X e do retorno do mercado, dividido pela variância do retorno do mercado. Dessa forma, o modelo CAPM se fez clássico pela equação da linha de mercado de títulos (SML - *Securities Market Line*), conhecida como:

$$R_i = R_f + \beta(R_m - R_f) \quad (2.6)$$

Em que:

R_i = Taxa de Retorno do Ativo X;

R_f = Taxa Livre de Risco;

β = Coeficiente Beta;

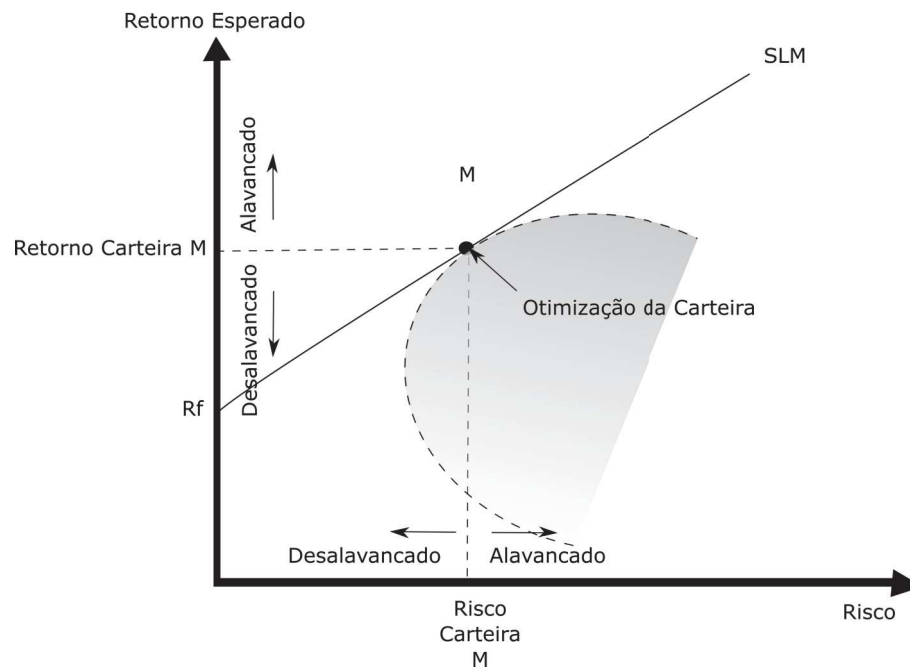
R_m = Taxa de Retorno do Mercado.

Assim, a equação que calcula o Beta (β) no Modelo CAPM é dado por:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_m)}{VAR(R_m)} \quad (2.7)$$

A representação da SML é apresentada na Figura 2 que mostra o ponto M correspondente à carteira tangente ótima, que se liga à taxa livre de risco R_f através de uma reta. É possível observar também a possibilidade de se obter carteiras acima do ponto M na reta, que é a construção de carteiras alavancadas, ou seja, carteiras que tragam um retorno maior que M mas que também trazem um risco maior. Da mesma forma, pontos inferiores a M trarão retornos e riscos inferiores à carteira tangente. :

Figura 2: SML x Modelo CAPM



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Após a proposição do modelo CAPM, vários estudos buscaram testar o CAPM empiricamente. Os primeiros testes empíricos com o CAPM foram publicados nos trabalhos de Douglas (1968) (16), Jensen et al (1972)(17), Miller e Scholes (1972) (18), Blume e Friend (1973)(19) e Fama e MacBeth(1973)(20) e eles rejeitaram a ideia de que o valor esperado do retorno excedente de um ativo fosse completamente explicado pelo seu prêmio pelo risco esperado (beta (β) x risco do ativo). Assim, a relação entre o beta (β) e o retorno médio existe, mas ela é excessivamente horizontal, ou seja, a inclinação da reta verificada é bem menor que a reta preconizada no CAPM. Isso significa dizer que, para betas pequenos, o retorno modelado está subestimado e para betas elevados, o retorno está superestimado.

Mais tarde, em 1977, Roll (4) publica em seu trabalho que o CAPM nunca foi testado e, provavelmente, jamais o será. Segundo o autor, a carteira de mercado idealizada como o centro do modelo é teórica e empiricamente efêmera, uma vez que não está teoricamente claro quais ativos podem ser excluídos ou incluídos nela. Assim, os testes do CAPM são obrigados a usar *proxies* da carteira de mercado, testando na prática, se as *proxies* estão na fronteira de mínima variância. Como os testes usam *proxies* e não a carteira de mercado verdadeira, o autor enfatiza que nada se pode concluir quanto ao CAPM.

Fama e French (21) reforçam a crítica de Roll, alegando que a relação entre retorno esperado e beta de mercado do CAPM é simplesmente a condição de variância mínima que se sustenta em qualquer carteira eficiente aplicada à carteira de mercado. Assim, ao se encontrar uma *proxy* de mercado que esteja na fronteira de variância mínima, ela pode ser usada para descrever diferenças de retornos esperados. No entanto, as contundentes rejeições empíricas do CAPM indicam que os pesquisadores ainda não encontraram uma *proxy* de mercado razoável que esteja próxima à fronteira de variância mínima.

Fama e French (22) (23) também evidenciam o problema para o CAPM: as carteiras formadas pela classificação de ações por índices de preço produzem uma ampla gama de retornos médios, mas sem correlação positiva com os betas de mercado.

Por fim, transcreve-se a análise feita por Fama e French (21):

'É sempre possível que pesquisadores redimam o CAPM, encontrando uma proxy razoável para a carteira de mercado que esteja na fronteira de variância mínima. Enfatizamos, contudo, que essa possibilidade não pode ser usada para justificar a maneira como o CAPM tem sido aplicado. O problema é que as aplicações costumam usar as mesmas proxies de mercado, como a carteira ponderada pelo valor de ações americanas, que levam a rejeições do modelo em testes empíricos. As contradições do CAPM observadas quando usadas tais proxies em testes do modelo revelam-se más estimativas dos retornos esperados nas aplicações – por exemplo, estimativas do custo do capital que são por demais baixas (em relação aos retornos médios históricos) para ações pequenas e ações com elevado índice escritural-mercado. Em suma, se uma proxy de mercado não funciona nos testes do CAPM, também não funciona na aplicação.'

2.1.3 Modelo OCAPM

Diante da vulnerabilidade empírica do modelo CAPM, algumas variantes surgiram após a sua criação, alterando algumas características do modelo original. Uma das mais conhecidas é o APT - *Arbitrage Pricing Theory*, proposto por Ross (5) que se baseia no pressuposto de que não há como prever preços diferentes para dois ativos com o mesmo

fluxo de caixa e, caso houvesse, a diferença seria rapidamente eliminada pelo processo de arbitragem.

O Modelo de 3 Fatores foi proposto por Fama e French em 1993, em que três fatores responderiam pelo comportamento do preço de um ativo: o mercado, tamanho e o indicador B/M (*Book-to-Market*¹) (6).

Embora bem conhecidos, os modelos de 3 Fatores e APT são meramente descritivos dos retornos, isto é, se limitam apenas a explicar os retornos obtidos. Eles não foram construídos como forma de projetarem os retornos ajustados ao risco, como o CAPM por exemplo.

Em 2013, Vasconcelos *et al.* (7) propõem o Ômega CAPM como forma de relaxar algumas premissas do CAPM. No que diz respeito às distribuições de retornos, o OCAPM não faz uso de nenhuma premissa, nem mesmo de que os ativos tenham a mesma distribuição. Do ponto de vista das funções utilidade, é preciso assumir que os investidores sejam avessos ao risco e prefiram mais a menos riqueza.

A medida Ômega é uma medida de performance proposta originalmente por Keating *et al* (8). Esta medida tem a vantagem de não fazer qualquer tipo de pressuposição quanto às distribuições dos retornos de ativos, eliminando assim a necessidade de se avaliar a decisão de investimento unicamente pela ótica do binômio média-variância de Markowitz.

De acordo com Vasconcelos *et al*(7), a vantagem da medida Ômega advém do fato de toda a informação da distribuição de retornos ser considerada, ou seja, todos os momentos superiores são levados em conta, em conjunto, sem a necessidade de calculá-los. Funções utilidade também não são necessárias e é preciso apenas assumir que os indivíduos são avessos ao risco e não saciáveis. Além disso, as características de risco e recompensa podem ser descritas em torno de qualquer nível de retorno e não apenas da média.

A fórmula matemática do Ômega é concebida inicialmente através da definição de um ponto de retorno mínimo L , exógeno e definido pelo investidor. Assim, o investidor estará na região de ganhos se $x > L$ e estará na região de perdas se $x < L$. Conforme demonstra Vasconcelos *et al.*(7), se X é uma variável aleatória em uma distribuição de retornos que assume valores $a \leq X \leq b$, a medida Ômega será definida como:

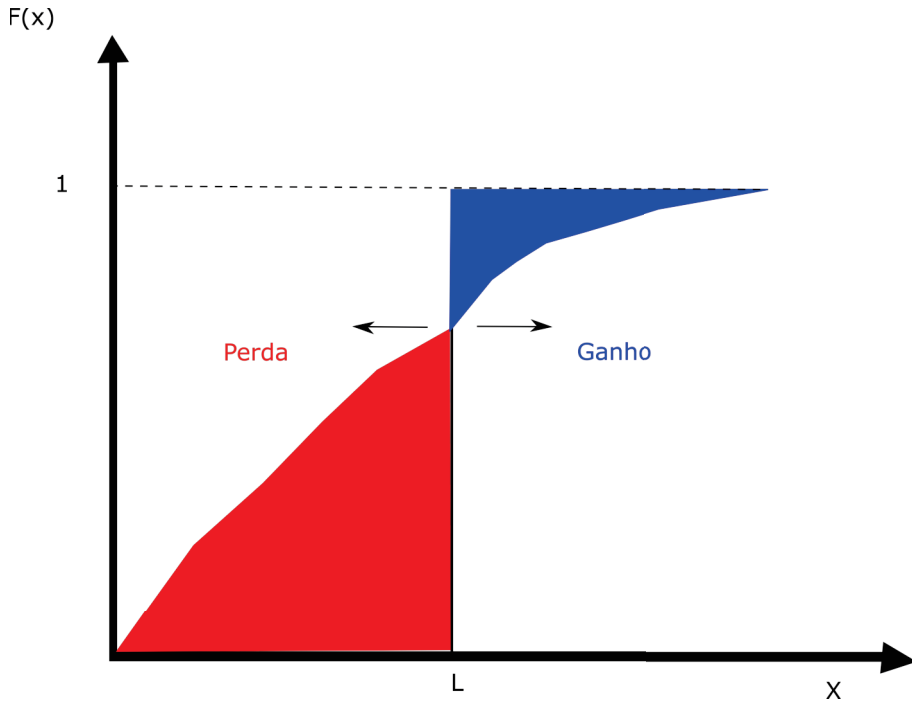
$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F_x(x)] dx}{\int_a^L [F_x(x)] dx} \quad (2.8)$$

Em que $F_x(x)$ é a função de distribuição acumulada dos retornos de um portfólio.

A medida Ômega é a razão entre a área de ganhos e a área de perdas da distribuição acumulada de retornos. Essa região é apresentada na Figura 3.

¹ *Book-to-Market* é um indicador que mede a relação entre o valor contábil de uma empresa e seu valor de mercado.

Figura 3: Medida Ômega



Fonte: Adaptada de Vasconcelos *et al.* (7)

Kazemi *et al.* (24) definiram Expected Chance (EC) como o valor esperado do excesso de ganho ($X - L$) condicional a resultados positivos e Expected Shortfall (ES) como o valor esperado da perda ($L - X$) condicional a resultados negativos. Assim, a nova equação do Ômega ficaria da seguinte forma:

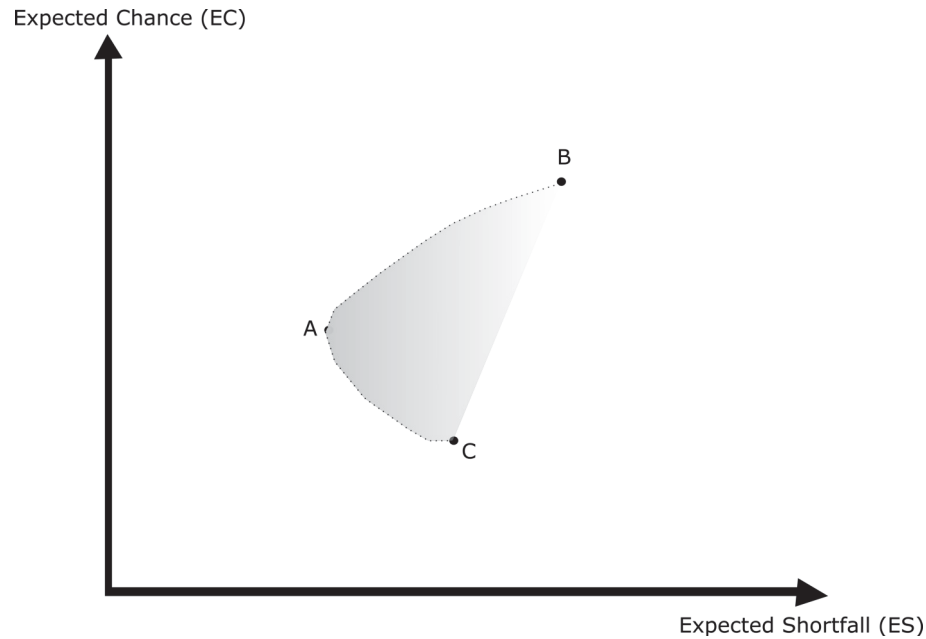
$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F_x(x)] dx}{\int_a^L [F_x(x)] dx} = \frac{EC(L)}{ES(L)} = \frac{E[\text{Max}(X - L; 0)]}{E[\text{Max}(L - X; 0)]} \quad (2.9)$$

Vasconcelos *et al.* (7) destacam que a medida Ômega é uma característica natural da distribuição de retornos e, de fato, ela é a própria distribuição. Assim, não existe necessidade de introduzir funções utilidade. Assim como no modelo da Média-Variância de Markowitz, no Modelo Ômega CAPM também existe a definição de fronteira eficiente, só que ao invés de se utilizar a Média-Variância, agora são adotados o EC (*Expected Chance*) e o ES (*Expected Shortfall*) como parâmetros. Agora a otimização deve ser eficiente no sentido Ômega e não mais no sentido Média-Variância.

A Figura 4 ilustra a fronteira eficiente Ômega, em que o ponto A representa o menor *Expected Shortfall* factível entre todas as carteiras disponíveis no mercado. Assim, todos os investidores avessos ao risco e não saciáveis nunca escolherão pontos abaixo do ponto A, pois sempre será possível obter um nível mais elevado de *Expected Chance*, sem alterar o *Expected Shortfall*. O conjunto de carteiras obtido via medida Ômega factível será composto por todas as carteiras existentes entre os pontos AB da fronteira eficiente

Ômega.

Figura 4: Fronteira Eficiente Ômega



Fonte: Adaptada de Vasconcelos *et al.* (7)

Analogamente à otimização da Média-Variância de Markowitz e, considerando que os investidores são avessos ao risco e preferem mais Expected Chance a menos, a fronteira eficiente Ômega pode ser obtida mediante a seguinte otimização:

$$\text{Maximizar } EC(L) \text{ , sujeito a } ES(L) = k_1 \quad (2.10)$$

e

$$\text{Minimizar } ES(L) \text{ , sujeito a } EC(L) = k_2 \quad (2.11)$$

Onde k_1 e k_2 são constantes.

Vasconcelos *et al.*(7) demonstram em seu trabalho a criação da linha de mercado do modelo Ômega CAPM, bem semelhante ao raciocínio do Modelo CAPM. A fórmula final deduzida pelos autores é a seguinte:

$$E[R_i] = L + \beta_i(E[R_m] - L) \quad (2.12)$$

E a fórmula do Beta Ômega seria:

$$\beta_i = E\left[\frac{(R_m - L)(R_i - L)}{|R_m - L|}\right] \frac{1}{E[|R_m - L|]} \text{ , } |R_m - L| \neq 0 \quad (2.13)$$

Em que:

$E[R_i]$ = Retorno esperado do Ativo i ;

L = Taxa mínima do investidor (semelhante à taxa livre de risco do CAPM);

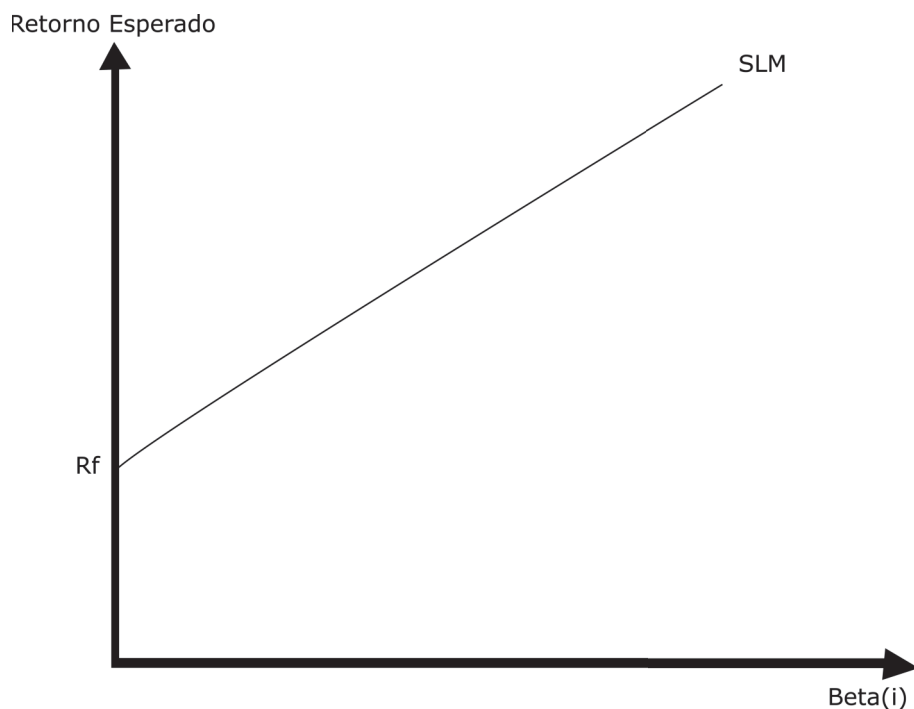
R_m = Retorno do mercado.

Desta forma, o modelo final do Ômega CAPM tem interpretação similar ao modelo CAPM, com o valor L funcionando similarmente como a taxa livre de risco do CAPM e o valor do prêmio ($E[R_m] - L$) também semelhante ao prêmio de mercado do modelo CAPM. A única diferença significativa do modelo Ômega CAPM em relação ao CAPM tradicional é a construção do beta (β_i).

De acordo com Vasconcelos *et al*(7), parâmetro beta do Ômega CAPM é diferente do beta CAPM por não se tratar mais de uma razão entre uma covariância e uma variância. Agora, o beta Ômega CAPM indica um comovimento entre duas variáveis aleatórias (retornos de ativos e mercado) e não é mais uma razão da covariância com a variância.

Assim, o OCAPM se desvia da discussão sobre as condições suficientes nas premissas econômicas (utilidade e distribuição) para atender à condição necessária (mercado eficiente no sentido média-variância) presente no CAPM: sua única condição necessária e suficiente é a eficiência de mercado no sentido Ômega, que é atendida de forma mais fácil, sem impor restrições fortes nas premissas. A Figura 5 mostra a SML Ômega, que tem o mesmo formato da SML CAPM, com a diferença apenas na fórmula de cálculo do beta (β_i).

Figura 5: SML Ômega



Fonte: Adaptada de Vasconcelos *et al.* (7)

Vasconcelos *et al*(7) compararam o OCAPM e o CAPM em empresas americanas no período de 2000 a 2012 e concluíram que o OCAPM é mais eficaz que o CAPM, o que leva a crer que é mais razoável entender que os investidores pensem mais na lógica $\hat{\Omega}$ do que na média-variância.

Por ser uma proposição relativamente recente (2013), o OCAPM ainda não foi testado em pesquisas acadêmicas, o que dificulta qualquer conclusão quanto a sua validade empírica. Alguns estudos já utilizaram a medida $\hat{\Omega}$ como métrica de desempenho de investimento, no entanto sem trabalhar com os fundamentos teóricos do OCAPM (25), (26).

A medida $\hat{\Omega}$ também já foi aplicada em diversos estudos e pesquisas visando avaliar o desempenho de fundos de investimento. No entanto, a partir de 2006, o trabalho inicial de Mausser *et al* e mais tarde em 2010, o trabalho de Kane *et al* (27), questionaram a não-convexidade da medida $\hat{\Omega}$ que, como tal, não poderia ter seu ótimo global encontrado em processos de otimização tradicional. Assim, os autores propuseram a transformação da medida $\hat{\Omega}$ em uma medida convexa. Nesta tese, para a otimização da medida $\hat{\Omega}$, utilizou-se a transformação convexa supracitada que será apresentada em detalhes na seção 3.2.2.

O trabalho de Manfred e Enrico (2010) (28) apresentou um dos primeiros algoritmos para tratar a não-convexidade da medida $\hat{\Omega}$. Trata-se de um algoritmo Threshold Accepting (TA), que utiliza computação paralela para encontrar soluções que otimizem a proporção entre o momento parcial inferior (Expected Shortfall) e o momento parcial superior (Expected Gain) de um portfólio.

Há trabalhos que questionam o uso da medida $\hat{\Omega}$, com destaque para a recente pesquisa de Massimiliano *et al* (29). Nela, os autores afirmam que a razão $\hat{\Omega}$ é inconsistente com o critério de dominância estocástica de segunda ordem, ou seja, os investidores deveriam preferir um retorno maior a um menor e também serem avessos ao risco. Além disso, os autores observaram que o *trade-off* retorno x risco correspondente à medida $\hat{\Omega}$ pode ser essencialmente influenciado pelo retorno médio.

Outro trabalho recente de Carole *et al* (30) conclui que otimizar o Índice $\hat{\Omega}$ pode levar a riscos excessivos e, ao impor restrições adicionais, os autores demonstram que a estratégia de maximização do $\hat{\Omega}$ ainda é muito arriscada e pode coincidir com a escolha feita por investidores neutros em risco.

Yu *et al* (31) estudaram portfólios utilizando modelos de CVaR contra o Worst-case $\hat{\Omega}$ (W $\hat{\Omega}$) e concluíram que o modelo W $\hat{\Omega}$ gera valores de perda mais baixos do que os correspondentes relacionados ao CVaR, controlando melhor o risco de queda.

De qualquer forma, o modelo OCAPM apresenta inúmeras vantagens ao se utilizar a medida $\hat{\Omega}$ que podem representar um avanço teórico e empírico em relação à média e variância do CAPM e, por isso, sua validação empírica é importante e considerada neste

trabalho.

2.1.4 Abordagens Multiobjetivas Recentes

No contexto da crítica de Roll (4) já apresentada no referencial teórico, é importante salientar que os modelos CAPM e OCAPM só apresentarão êxito em sua implementação, à medida que encontrarem carteiras de mercado ótimas e que representem a fronteira de mínima variância de ambos os modelos. Neste sentido, muitos trabalhos começaram a ser desenvolvidos visando otimizar a composição de ativos em uma carteira.

Uma das hipóteses inicialmente estudadas foi a de que a carteira igualmente ponderada ($1/n$), conhecida também como carteira *naive*, seria a mais eficiente, dada a redução do seu risco pela diversificação de seus ativos. Tang (32) questiona em seu trabalho a afirmação dos livros tradicionais de Finanças que ensinam que embora a diversificação da carteira possa ajudar a reduzir o risco do investimento sem sacrificar a taxa de retorno esperada, o benefício da diversificação é esgotado com um tamanho de carteira de 10 a 15 ativos. O autor examina a questão da diversificação ingênua e mostra analiticamente que, para uma população infinita de ativos, um portfólio com tamanho de 20 ativos é necessário para eliminar em média 95% do risco diversificável. No entanto, é necessária uma adição de 80 ativos (isto é, um tamanho de 100) para eliminar um risco de 4% (isto é, 99% no total) do risco diversificável. Esse resultado não depende dos horizontes de investimento, períodos de amostragem e nem dos mercados envolvidos.

Um dos trabalhos iniciais mais conhecidos sobre carteira ingênua foi o dos autores De Miguel *et al.* (33). Eles fizeram a comparação entre 14 técnicas de otimização e concluíram que a carteira igualmente ponderada (*naive*) é aquela que produz a combinação mais eficiente dos ativos disponíveis, medida através do Índice de Sharpe e retorno equivalente.

Por outro lado, Tu e Zhou (34) propuseram uma combinação da estratégia da carteira *naive* com alguma outra alocação ótima de ativos, como a da própria Média-Variância (Markowitz). Os resultados da pesquisa mostraram que as carteiras formadas com as estratégias combinadas foram mais eficientes do que aquelas compostas somente pela diversificação ingênua.

Entre trabalhos brasileiros, destaca-se a pesquisa de Alves e Tessari (35) que avaliou o desempenho de técnicas quantitativas de otimização de carteiras quando aplicadas ao mercado brasileiro de ações, considerando distintas frequências de rebalanceamento das carteiras e também distintas especificações para a estimação de matrizes de covariâncias. O artigo mostra que a adoção de estimadores mais sofisticados (robustos ao erro de estimação) para a matriz de covariâncias é capaz de gerar carteiras otimizadas com um desempenho ajustado ao risco consistentemente superior ao obtido com a abordagem tradicional baseada em uma matriz de covariâncias amostral e também superior aos *benchmarking* considerados (Índice Bovespa e carteira *naive*).

Jiang *et al* (36) demonstram em seu trabalho como o desempenho fora da amostra do portfólio de variância mínima (MVP) pode ser melhorado em relação aos erros de estimação ao ser agregado à carteira igualmente ponderada. Os resultados indicam que uma combinação apropriada do MVP e da carteira *naive* pode melhorar os índices de Sharpe sob quaisquer cenários considerados, e também pode reduzir o risco do portfólio se a venda a descoberto for permitida. No entanto, a estratégia de combinação não é capaz de gerar um nível de risco inferior ao do MVP quando uma restrição de venda a descoberto é imposta.

Além da carteira *naive*, muitas pesquisas buscaram considerar outros atributos além da média e variância. A assimetria e cauda longa (*Fat Tail*) têm sido frequentemente debatidas em estudos e artigos teóricos sobre seleção de carteiras, principalmente pelo argumento de que escolher ativos com maior assimetria produz, por si só, uma carteira mais assimétrica e, por consequência, ganhos maiores que as perdas, quando ambos ocorrem. Esta assimetria ratifica a visão Ômega da carteira, uma vez que privilegia retornos maiores em detrimento de perdas menores. Mas a questão principal é se privilegiar a assimetria compromete o foco da média-variância, ou seja, privilegiar a assimetria pode provocar carteiras menos eficientes em termos de média-variância.

Um dos trabalhos iniciais envolvendo assimetria em portfólios foi dos autores Konno e Yamazaki(37), que propuseram um modelo que utilizasse a assimetria e o desvio médio absoluto do retorno dos ativos como alternativa à variância na otimização de um portfólio. A principal justificativa para este modelo é a simplicidade computacional, já que o modelo de Markowitz se baseia em modelos de programação quadrática, enquanto que o modelo de Konno recai em um problema de programação linear, computacionalmente mais simples de ser resolvido.

Sun e Yan (38) argumentaram que existem estudos que descobriram que os retornos das ações *ex-post* são positivamente distorcidos, mas tal assimetria é apenas persistente para ações individuais, não para portfólios. Isso implica afirmar que o conhecimento *ex-post* da assimetria pode não ser útil na seleção do portfólio *ex-ante*. Segundo os autores, que trabalharam com dados de empresas americanas e japonesas, seria mais significativo verificar se a assimetria persistiria em portfólios eficientemente formados através da média-variância e que também privilegiassem a assimetria, em uma forma de método de programação de objetivos polinomiais.

Já Canela e Colazzo (39) em seu trabalho utilizaram a programação de objetivos polinomiais para determinar o portfólio ideal de indústrias em mercados emergentes e concluíram que a decisão de considerar a incorporação da assimetria na decisão do portfólio melhora a performance da carteira. No entanto, os autores trabalham com um método que separa a assimetria em 02 componentes: um primeiro, que deve ser evitado, derivado de valores muito altos (*outliers*) e o outro, causado pelo desvio da cauda e pelo coeficiente

de assimetria dos ativos, este sim, a ser buscado pelo investidor.

Uma discussão relevante é se a escolha de ativos assimétricos produz, por si só, carteiras assimétricas. Kim (40) apresenta que, embora muitos estudos de precificação de ativos presumam que a elasticidade de uma ação ou a assimetria idiossincrática é precificada devido à influência da característica na assimetria do portfólio, empiricamente ele demonstra que o número de ações de uma carteira é o determinante mais importante da assimetria do portfólio, enquanto que a coassimetria entre as ações ou a assimetria idiossincrática têm efeitos marginais. Assim, o autor conclui que a assimetria da ação individual não representa bem a assimetria do portfólio.

Em relação ao comportamento da assimetria entre os ativos (coassimetria), a pesquisa de Oliveira et al (41) trata da influência da coassimetria e cocurtose, em separado e em conjunto, na análise dos preços das ações no mercado financeiro brasileiro. Os autores concluíram que a coassimetria e a cocurtose não melhoram o desempenho do modelo de precificação de ativos.

Jiang et al (42) investigaram a seleção de portfólios dentro de uma estrutura de assimetria de média-variância. Eles derivaram a composição de portfólios eficientes e analisaram suas propriedades. Demonstraram que a assimetria sistemática requerida é alcançada às custas da eficiência tradicional de média-variância e que uma restrição de assimetria sistemática mais rigorosa induz a uma maior perda na eficiência de média-variância.

Assim como a assimetria, mas menos frequente, a curtose também tem despertado interesse em pesquisadores da área de Finanças, sobretudo na relevância da sua influência no processo de precificação de ativos de capital. Fang e Lai (43) mostraram que o excesso de retorno está relacionado não somente com a variância sistemática, mas também com a assimetria e curtose sistemáticas. Os investidores são compensados em maior retorno esperado por suportar a variância sistemática e os riscos sistemáticos da curtose, bem como por abrir mão do excesso de retorno para receber o benefício de aumentar a assimetria sistemática.

Um estudo importante é o de Castro Junior (44) que apresenta resultados empíricos que permitem afirmar que a formulação clássica do CAPM é falha ao não considerar a curtose como relevante para a determinação do preço dos ativos. Desta forma, não só a assimetria passa a ser uma medida interessante a ser inserida nas proposições empíricas deste trabalho, mas também a curtose. Enquanto a primeira mede o deslocamento da cauda da distribuição, a segunda se preocupa com o seu achatamento em relação aos valores mais frequentes.

Em relação a outras medidas relevantes na avaliação de desempenho de carteiras, destaca-se o uso do *Maximum Drawdown* ou Rebaixamento Máximo de Saldo. Esta medida é muito empregada por analistas de investimentos no mercado financeiro. O *Maximum*

Drawdown busca responder historicamente qual foi a maior perda que o ativo sofreu até que recuperasse seu patamar original antes da perda. O tema foi destaque no trabalho de Cheklov et al (45) e merecem relevância também os trabalhos de Mendes e Leal (46), Hamelink e Hoesli (47) e Magdon et al (48).

Os autores Zabaranikin *et al* (49) propuseram um modelo específico de CAPM com a utilização do *Drawdown* em Risco Condicional (CDaR). Mendes e Lavrado (50) utilizaram simulações de Monte Carlo e aplicaram o *Maximum Drawdown* em índices internacionais como medida de risco.

A Tabela 1 sumariza algumas das publicações e seus respectivos atributos utilizados. Baseada na ampla utilização e sua destacada importância no desempenho de carteiras de investimento, para esta pesquisa serão utilizados os atributos Média, Variância, Ômega, Assimetria, Curtose e *Maximum Drawdown*, em uma abordagem multiobjetiva.

Tabela 1: Pesquisas multiobjetivas envolvendo problema de seleção de carteiras

Atributos utilizados	Autores
Média, Variância e Assimetria	(51),(52),(53),(54),(55),(56),(57),(58),(59)
Média, Variância, Curtose e Assimetria	(60)
Média, Semivariância e Assimetria	(61)
Desvio Absoluto Médio, Semi-variância e Variância-Assimetria	(62)
Curtose, Co-curtose, Variância e Covariância	(63)
<i>Drawdown</i>	(64) , (65) , (66)
Ômega	(67), (28), (68), (30), (31)

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

2.1.5 Antifragilidade em portfolios

Além dos atributos aqui já destacados, um tema muito recente e que tem intrigado a academia é a antifragilidade em carteiras. O grande sucesso do livro "Antifragil: coisas que se beneficiam com o caos", do autor Nassim Nicholas Taleb (9), lançado no final de 2012, embora não tivesse como alvo a academia, acendeu a discussão se a antifragilidade beneficia ou não o desempenho das carteiras de investimento.

A grande questão envolvendo seleção de carteiras é como a carteira se comporta em períodos de crises. O sucesso do autor Taleb se deve muito ao acerto de sua previsão feita em relação à crise de 2008 antes que ela acontecesse. Por isso, entender como uma carteira se comporta em crises ou eventos extraordinários é igualmente importante no seu desempenho.

A pandemia do COVID-19, o colapso financeiro mundial causado pelo isolamento social e declínio das atividades econômicas corroboram e contribuem ainda mais para a abordagem desta questão. No início de 2020, com a COVID-19, praticamente todos os

mercados financeiros mundiais foram abalados e merecem ser alvo de estudos também sob a ótica de seleção de carteiras. Existem ativos que sofreram menos que outros? Quais características desses ativos seriam interessantes incluir em uma carteira?

Inicialmente, cumpre ressaltar que a antifragilidade não é um conceito muito empregado na academia, sendo o mais comum encontrar o termo cisne negro (*black swans*). Taleb (69) refere-se a um cisne negro como um evento que está associado a três atributos: (i) é um desvio, pois está fora do âmbito das expectativas regulares, porque nada no passado pode apontar de forma convincente para sua possibilidade; (ii) carrega um impacto extremo e (iii) apesar de seu *status* externo, a natureza humana busca inventar explicações para sua ocorrência após o fato, tornando-o explicável e previsível.

Sem dúvidas, um dos autores de maior destaque em pesquisas envolvendo cisne negro é o norueguês Terje Aven. Em seu trabalho de 2013 (70), Aven refere-se a um cisne negro como um evento surpreendentemente extremo em relação à crença ou conhecimento de alguém.

No ano seguinte, em seu trabalho com Krohn (71), eles classificam três tipos principais de eventos de cisne negro com base nessa definição:

- (i) **Incógnitas desconhecidas:** Eventos que eram completamente desconhecidos para o meio científico;
- (ii) **Conhecidos desconhecidos:** Eventos que não constam da lista de eventos conhecidos daqueles que realizaram uma análise de risco, mas que são conhecidos por outros - eventos desconhecidos para alguns, conhecidos por outros;
- (iii) Eventos na lista de eventos conhecidos na análise de risco, mas considerados com probabilidade insignificante de ocorrência e, portanto, não se acredita que ocorram.

Recentemente, o estudo de Lin e Tsai (72) buscou identificar cisnes negros através de dados intradiários da bolsa de valores da China. Os autores investigaram se as quedas e retomadas dos preços dos ativos foram superiores aos considerados normais que viessem de fato caracterizar os eventos como cisnes negros.

Alguns trabalhos atrelam a ocorrência de cisnes negros a técnicas de avaliação e gestão de risco (73), (74), enquanto outros buscam estudar a antecipação de cisnes negros em instrumentos financeiros (75).

O foco neste trabalho não é estabelecer métodos complexos de avaliação de risco e predição de cisnes negros, mas tão somente tentar identificar variações abruptas de volatilidade nos mercados estudados. Para isso, um dos indicadores atualmente mais utilizados no mercado financeiro para medição da volatilidade é o indicador VIX - *Volatility*

Index - ², conhecido mundialmente como o Índice do Medo e que mede a volatilidade dos principais ativos do mercado americano. Existem versões do VIX para outros países e, no Brasil, começou a ter sua série calculada em 2011, baseado no ETF ³do Índice BOVESPA.

Em se tratando do VIX, um dos trabalhos pioneiros mais citados na literatura é o trabalho de Whaley (76), cujo objetivo é testar se o VIX realmente representa o índice do medo. O autor conclui que:

'Curiosamente, a relação entre o retorno das ações e alterações no VIX são assimétricos. O mercado de ações reage mais negativamente a um aumento no VIX do que reage positivamente quando o VIX cai. Em outras palavras, o VIX é mais um barômetro do medo dos investidores em desvantagem do que é um barômetro da excitação dos investidores (ou ganância) em uma recuperação do mercado. Como o VIX é construído a partir das volatilidades implícitas das opções do índice S&P 100, é, por definição, uma medida do risco esperado pelo mercado de ações. Dizemos "investidor" porque os investidores definem o nível do VIX, embora indiretamente. Demanda dos investidores pelas opções de compra e venda do S&P 100 definem preços e esses preços, por sua vez, são usados para sugerir o nível do VIX.'

O autor conclui dizendo que ao longo de seus quatorze anos de história, o VIX atuou de maneira confiável como um medidor de medo. Altos níveis de VIX são coincidentes com altos graus de turbulência no mercado, e a turbulência é atribuível ao declínio do mercado de ações, guerras, mudanças inesperadas nas taxas de juros ou qualquer número de outros eventos dignos de destaque. Quanto maior o VIX, maior o medo.

Diante da crise de 2008 e as quedas substanciais dos mercados financeiros, o autor Whaley publicou seu trabalho (77) procurando explicar com detalhes a composição do índice VIX. A partir de 2008, o índice passou a ser um marco de medição de volatilidade do mercado financeiro mundial.

Já o trabalho de Sarwar (78) examina as relações intertemporais entre o VIX e retornos da bolsa de valores no Brasil, Rússia, Índia e China (BRIC) e entre o VIX e os retornos das ações dos mercados americanos no período de 1993 a 2007. O intuito é descobrir se o VIX serve como um medidor de medo do investidor nos mercados BRIC e EUA. Os resultados sugerem uma forte correlação negativa entre o VIX e os retornos do mercado de ações americano. Essa relação é mais forte quando o VIX é mais alto e mais volátil. Uma correlação negativa significativa também foi encontrada entre o VIX e o mercado da China e Brasil durante o período de 1993-2007 e para a Índia durante 1993 a 1997. Semelhante ao mercado dos EUA, a correlação negativa entre os retornos das ações

² O VIX é calculado pela Chicago Board Options Exchange - maiores detalhes em: <http://www.cboe.com/vix>.

³ ETF significa *Exchange Traded Funds* e corresponde a fundos negociados em Bolsa de Valores.

brasileiras e alterações do VIX é muito mais forte quando o VIX é alto e mais volátil. Assim, os resultados indicam que o VIX não é apenas um investidor medidor de medo para o mercado de ações dos EUA, mas também para os mercados de ações da China, Brasil e Índia.

O trabalho de Moran et al (79) avalia a possibilidade de se incluir o VIX no portfólio como forma de reduzir o risco de queda da carteira de ações. Os autores concluem que a adição de uma pequena alocação em contratos futuros de VIX apresenta potencial para melhorar a eficiência do portfólio.

Bahaji et al (80) afirmam que um investidor racional desinformado com um nível viável de aversão ao risco pode usar de maneira otimizada contratos futuros de VIX para melhorar significativamente o desempenho de sua carteira de referência composta por ações, títulos e um ativo monetário. Os autores também encontraram evidências de melhorias em portfólios no uso dos contratos futuros do VIX em comparação com commodities e fundos de *hedge*.

Dentre os trabalhos mais recentes, destaca-se o de Qadan et al (81). Segundo os autores, os dados de empresas americanas de 1990 a 2016 mostram que o risco agregado de volatilidade do mercado, capturado pelo VIX, desempenha um papel na relação entre a volatilidade idiossincrática e o retorno das ações. Especificamente, um aumento (declínio) do VIX tende a ser seguido por uma relação negativa (positiva) entre volatilidade idiossincrática e retornos futuros, mesmo após levar em consideração outros fatores de risco. Assim, um aumento no VIX pode refletir um aumento na aversão ao risco dos investidores, levando-os a equilibrar suas carteiras, aumentando a diversidade de seus investimentos.

Assim, de uma forma geral conclui-se que existe uma correlação negativa entre o VIX e o retorno das ações no mercado financeiro, que é cada vez mais acentuada à medida que o VIX atinge valores maiores. Além disso, a inclusão do VIX pode proteger a carteira de quedas acentuadas.

Se a antifrágilidade visa minimizar os impactos de um evento não esperado no desempenho de uma carteira, é interessante relacioná-la à correlação com o VIX. Assim, ativos que não apresentem correlação negativa com o aumento do VIX (ou seja, não se desvalorizam na mesma proporção do aumento da volatilidade) devem ser preferidos aos demais.

Como o objetivo deste trabalho não é agregar ao portfólio ativos, commodities ou mercadorias fora do mercado de ações, optou-se por buscar ações que apresentem correlações menos negativas possíveis em relação ao VIX.

Desta forma, serão calculadas as correlações dos movimentos das carteiras com o VIX, de forma sempre a tentar minimizar o impacto de picos de volatilidade no desempenho dos portfólios. Assim, neste trabalho uma correlação condicional ao VIX é proposta como medida de antifrágilidade. Maiores detalhes serão abordados na Seção 3.4.1, na

Metodologia.

2.2 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

2.2.1 Definição Geral

Uma otimização multiobjetivo é aquela em que estão envolvidas várias funções objetivos simultâneas, seja para maximizar ou minimizar. Assim como na otimização mono-objetivo, a otimização multiobjetivo pode estar sujeita a um conjunto de restrições às quais as soluções devam satisfazer. De acordo com Deb (82), a forma geral de um problema de otimização multiobjetivo é apresentado como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximizar ou minimizar} && f_m(x) && m = 1, \dots, N_{obj} \\
 &&& \text{sujeito a:} \\
 &&& g_j(x) \geq 0 && j = 1, \dots, J \\
 &&& h_k(x) = 0 && k = 1, \dots, K \\
 &&& x_{lb} \leq x \leq x_{ub} && i = 1, \dots, N_{var}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Em que:

x é um vetor com N_{var} variáveis de decisão

N_{obj} é o número de objetivos do problema

$g_j(x)$ são as restrições de desigualdade

$h_k(x)$ são as restrições de igualdade

J e K são os números de restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente

x_{lb} e x_{ub} são os limites inferiores e superiores para cada variável de decisão

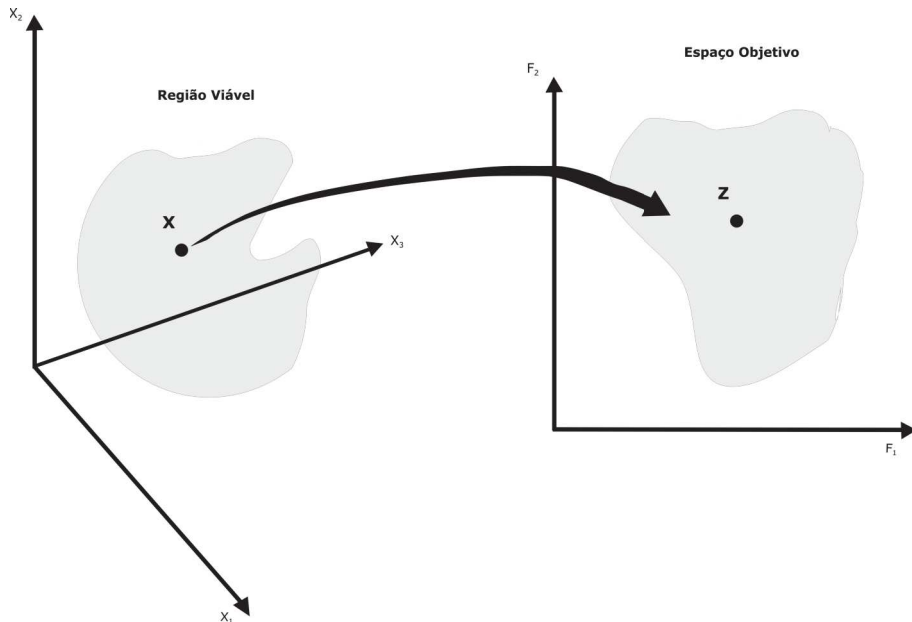
De acordo com Deb (82), os limites inferiores e superiores definem o espaço de decisão e as restrições de desigualdade são tratadas como tipos maior ou igual a, embora uma restrição de desigualdade do tipo menor ou igual a também seja atendida na formulação acima. Neste último caso, a restrição deve ser convertida em uma restrição do tipo maior ou igual a (\geq), multiplicando a função de restrição por -1 (83).

Uma solução x que não satisfaça todas as restrições ($J + K$) e todos os limites de variáveis x_{lb} e x_{ub} é classificada como uma solução infactível. Por outro lado, se qualquer solução x satisfizer todas as restrições e limites das variáveis, ela é conhecida como uma solução factível. Portanto, na presença de restrições, todo o espaço da variável de decisão precisa ser factível. O conjunto de todas as soluções possíveis é chamado de região factível.

Uma das diferenças marcantes entre a otimização de um objetivo e o de múltiplos objetivos é que, na otimização multiobjetivo, as funções objetivo constituem um espaço multidimensional, além do espaço variável de decisão usual. Esse espaço adicional é chamado de espaço objetivo. Para cada solução X no espaço da variável de decisão, existe

um ponto no espaço objetivo, denotado por $f(x) = z = z_1, z_2, \dots, z_M$. O mapeamento ocorre entre um vetor solução n -dimensional e um vetor objetivo M -dimensional. A Figura 6 apresenta a região factível e o espaço objetivo.

Figura 6: Região Factível x Espaço Objetivo



Fonte: Adaptada de Deb (82).

2.2.2 Convexidade

Quando todas as funções objetivo e restrições são lineares, o problema é chamado de linear. Se pelo menos uma das funções objetivos é não-linear, o problema é um problema de otimização multiobjetivo não-linear. Infelizmente, para problemas não-lineares, as técnicas de solução geralmente não possuem provas de convergência. Como a maioria dos problemas de otimização multiobjetivo do mundo real é de natureza não-linear, nenhuma estrutura particular das funções objetivo e restrição foi assumida neste momento.

Uma questão importante na aplicação de algoritmos na resolução de problemas multiobjetivos é quanto à convexidade do problema. Para isso é importante pontuar o conceito de convexidade de uma função:

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa se, para dois pares de soluções $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, a seguinte condição for verdadeira:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \text{para todo } 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (2.15)$$

Assim, as propriedades de uma função convexa são (82):

1. A aproximação linear de $f(x)$ em qualquer ponto no intervalo x_1, x_2 sempre subestima o valor da função real;
2. A matriz Hessiana de $f(x)$ é positiva definida para todos os valores de x ;
3. Para uma função convexa, um mínimo local é sempre um mínimo global.

Uma função que satisfaça a desigualdade mostrada na Equação (2.14) com um sinal de $>$ em vez de um sinal \leq é chamada de função não-convexa. Para testar se uma função é convexa dentro de um intervalo, a matriz Hessiana é calculada e verificada quanto à sua certeza positiva em todos os pontos do intervalo. Uma das maneiras de verificar a definição positiva de uma matriz é calcular os autovalores da matriz e verificar se todos os autovalores são positivos. Para testar se uma função f é não-convexa em um intervalo, a matriz Hessiana é verificada quanto à sua certeza positiva. Se for positivo-definido, a função f é não-convexa.

É interessante perceber que se uma função $g(x)$ é não-convexa, o conjunto de soluções que satisfazem $g(x) \geq 0$ representa um conjunto convexo. Portanto, um espaço de pesquisa factível formado por funções de restrição não-convexa envolverá uma região convexa.

Assim, um problema de otimização multiobjetivo é convexo se todas as funções objetivo são convexas e a região factível é convexa (ou todas as restrições de desigualdade são não-convexas e as restrições de igualdade são lineares). De acordo com essa definição, um problema multiobjetivo linear é um problema convexo. Existem muitos algoritmos que podem lidar bem com problemas de otimização multiobjetivo convexas, mas enfrentam dificuldades em resolver problemas de otimização multiobjetivo não-convexas. Como o problema possui dois espaços, a convexidade em cada espaço (região factível e espaço objetivo) é importante para um algoritmo de otimização multiobjetivo. Além disso, embora o espaço de busca possa ser não-convexo, a frente ótima de Pareto pode ser convexa.

Desta forma, não é possível encontrar uma única solução que otimize todos os objetivos simultaneamente. Na otimização multiobjetivo, os vetores são considerados como ideais se seus componentes não podem ser melhorados sem deterioração de pelo menos um dos outros componentes. A essa otimalidade se chamou Otimalidade de Pareto(84), que será descrita na Seção 2.2.4.

2.2.3 Dominância

A maioria dos algoritmos multiobjetivos usa o conceito de dominância ou dominação. Nesses algoritmos, duas soluções são comparadas com base em quem domina a outra solução ou não. Assim, uma solução x_1 domina uma outra solução x_2 , se as seguintes condições forem verdadeiras ((82)):

1. A solução x_1 não é pior que x_2 em todos os objetivos;
2. A solução x_1 é estritamente melhor que x_2 em pelo menos um objetivo.

Se qualquer uma das condições for violada, a solução x_1 não domina a solução x_2 . Se x_1 domina x_2 , é comum também descrever que:

- (i) x_2 é dominado por x_1 ;
- (ii) x_1 é não-dominado por x_2 ;
- (iii) x_1 é não-inferior a x_2 .

A Figura 7 apresenta um exemplo hipotético de uma função multiobjetivo com 02 objetivos: a F_1 com o objetivo de maximização e a F_2 com o objetivo de minimização. O conceito de dominância pode ser bem compreendido na análise entre as soluções A e E. Ao se comparar A com B, pode-se afirmar que A domina B, em virtude de A atender às duas condições supracitadas, ou seja, A não é pior que B em todos os objetivos e A é estritamente melhor que B em pelo menos um objetivo. Ao se comparar a solução A com a solução E, nota-se que a solução E é melhor que a solução A em F_1 e não é pior que A em F_2 (igual). Portanto, a solução E domina a solução A.

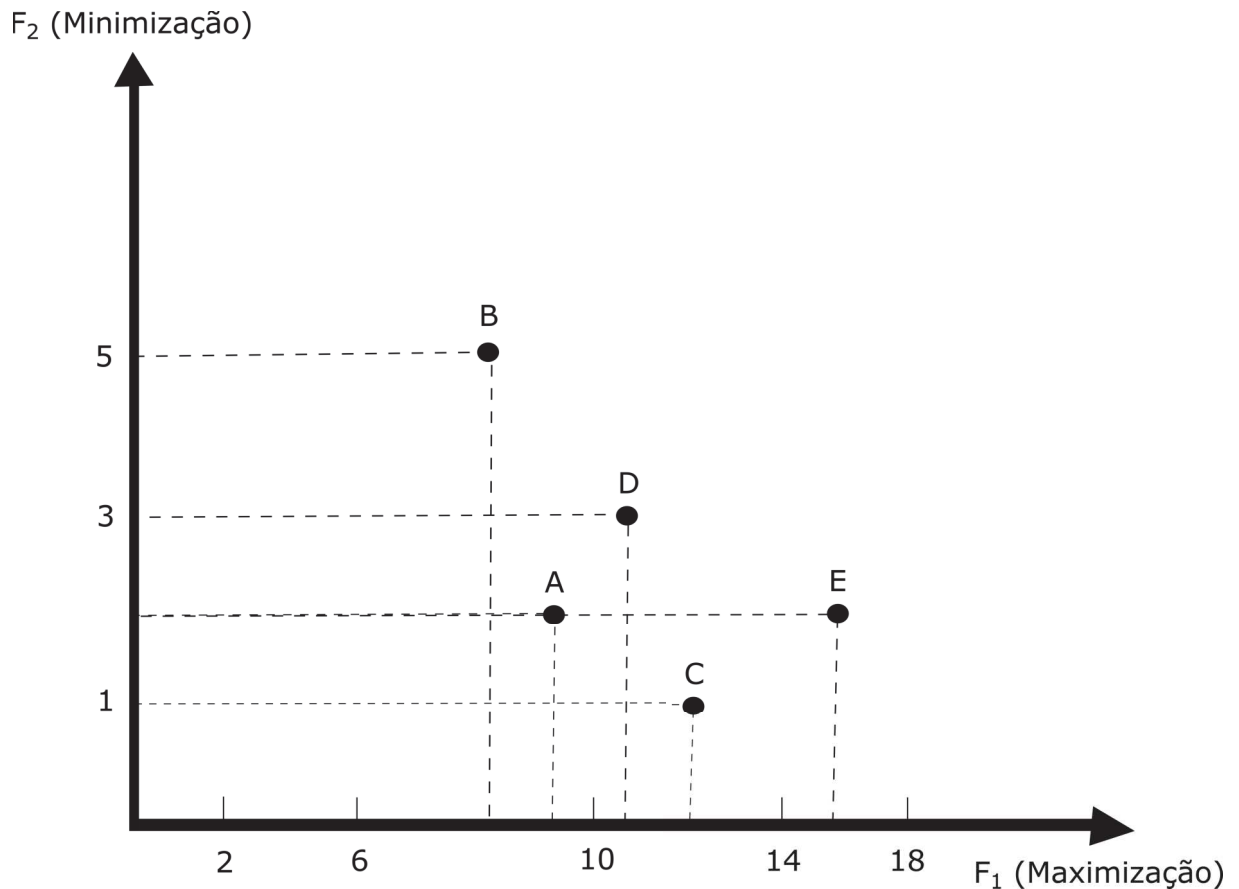
A solução E comparada à solução C mostra que E é melhor que C em F_1 e pior que C em F_2 . Neste caso, a primeira condição não é mais satisfeita, já que E não é pior que C em todos os objetivos. Assim, não se pode afirmar que E domina C e nem tampouco que C domina E e as soluções serão denominadas Soluções Não-Dominadas.

Deb(82) define que um Conjunto Não-Dominado é aquele que entre um conjunto de soluções P , as soluções do conjunto não-dominado P' não são dominadas por nenhum membro do conjunto P . No problema exemplificativo, as soluções C e E constituem o conjunto não-dominado do conjunto dado de cinco soluções. Quando o conjunto P é todo o espaço de busca, o conjunto não-dominado resultante P' é chamado de conjunto ótimo de Pareto ou Fronteira de Pareto.

2.2.4 Conjunto Ótimo de Pareto

A Figura 8 apresenta o desenho destacado em vermelho da Fronteira de Pareto para uma função com 02 objetivos, ora maximizando, ora minimizando cada um deles. É importante notar que um algoritmo de otimização multiobjetivo pode ser facilmente usado para lidar com todos os casos simplesmente usando a definição de dominação. No entanto, para se evitar qualquer confusão, a maioria dos aplicativos usa o princípio da dualidade para converter um problema de maximização em um problema de minimização e tratar cada problema como uma combinação de minimizar todos os objetivos. Assim, o mais comum é encontrar somente a minimização ou maximização de todos os objetivos.

Figura 7: Exemplo de Dominância - Adaptado de Deb(82)

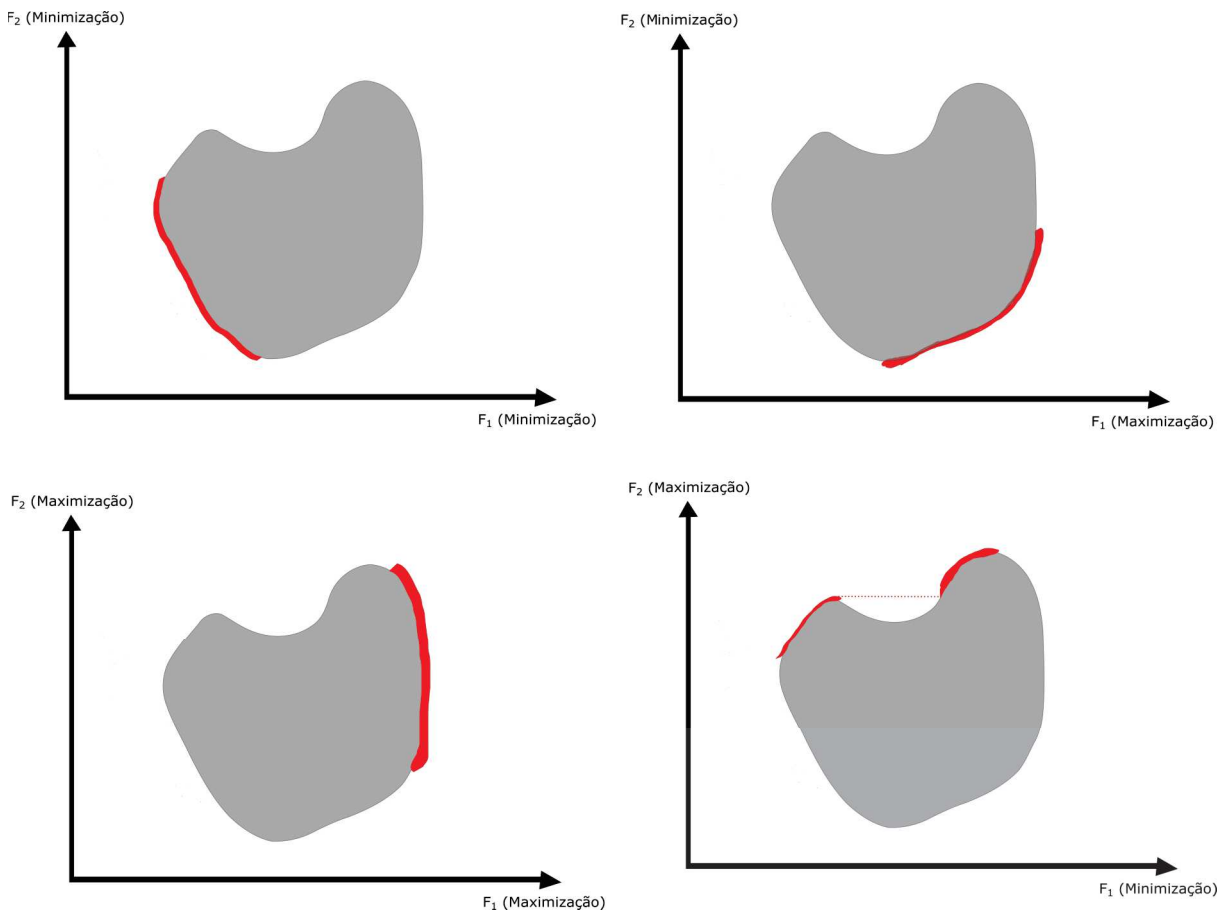


Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Em relação às soluções ótimas de Pareto, elas podem ser consideradas localmente ótimas ou globalmente ótimas. Uma solução global de Pareto ótima é, naturalmente, uma solução local de Pareto. De acordo com Deb (82), o conjunto não-dominado de todo o espaço de pesquisa factível S é o conjunto globalmente ótimo de Pareto. Por outro lado, se para cada membro X em um conjunto P não existir solução Y (na vizinhança de X tal que $\|y - x\|_\infty \leq \epsilon$, onde ϵ é um pequeno número positivo) que domine qualquer membro do conjunto P , então as soluções pertencentes ao conjunto P constituem um conjunto de soluções localmente ótimas de Pareto.

De acordo com Pereira (85), à medida que se aumenta o número de objetivos a serem otimizados, o problema de buscar uma solução Pareto-ótima torna-se difícil de forma rápida e progressiva. Em alguns casos, as funções objetivos poderiam ser otimizadas separadamente, uma a uma, buscando um ganho no tempo computacional. Porém, soluções satisfatórias para o problema global raramente poderiam ser achadas neste sentido, já que uma solução ótima em um objetivo, se tal ótimo existe, comumente implica desempenho inferior em um ou mais dos outros objetivos, resultando na necessidade de se fazer um ajuste simultâneo nos objetivos. Ainda segundo o autor, os métodos de otimização convencional,

Figura 8: Soluções Ótimas-Pareto para 02 objetivos



Fonte: Adaptada de Deb (82).

como os baseados no Gradiente e no Simplex, adaptados aos problemas multiobjetivo apresentam limitações e tornam-se ineficientes.

2.3 ESTADO DA ARTE EM TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS AO PROBLEMA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS

Esta Seção tem como objetivo apresentar o estado da arte envolvendo pesquisas sobre a utilização de técnicas de otimização aplicadas ao problema de seleção de carteiras. Inicialmente será apresentada uma proposta de taxonomia das técnicas disponíveis para otimização de carteiras e em seguida serão apresentados *surveys* recentes que englobam a maioria das pesquisas recentes sobre o tema. Ao final, serão destacadas algumas pesquisas relevantes ao tema.

2.3.1 Taxonomia

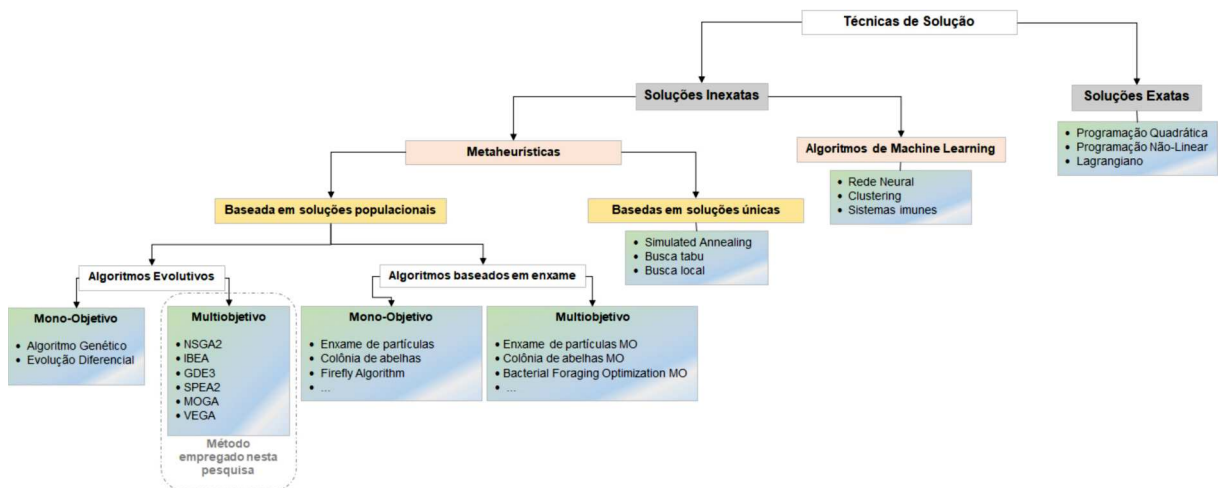
A Figura 9 apresenta uma proposta de taxonomia adaptada do trabalho de Kalayci *et al* (86) envolvendo técnicas para resolução do problema de seleção de carteiras. A

primeira divisão apresentada corresponde à exatidão das soluções, isto é, técnicas que apresentam soluções exatas, como a programação quadrática, a programação não-linear e o lagrangiano. Por outro lado, as soluções inexatas se dividem em dois grupos: o das meta-heurísticas e os algoritmos de Machine Learning. Dentro do Machine Learning, é bem comum o emprego das redes neurais, *clustering* e sistemas imunes, em que a solução é conseguida através de processos de aprendizagem. Já na meta-heurística, existem dois grupos principais: o de soluções individuais ou únicas e o de soluções populacionais. Ao contrário das soluções únicas, as soluções populacionais são aquelas obtidas através de uma população de possíveis candidatos à solução.

As meta-heurísticas baseadas em soluções populacionais foram divididas em algoritmos evolutivos e algoritmos baseados em enxame. Os algoritmos evolutivos simulam o processo de evolução das soluções de forma natural, baseado em Darwin. Já os algoritmos baseados em enxame, correspondem a um procedimento de otimização baseado no comportamento de grupos de organizações, conhecido como inteligência coletiva e que pode ser encontrado em formigas, abelhas, células entre outros.

Tanto os algoritmos evolutivos quanto os baseados em soluções individuais podem ser mono-objetivos ou multiobjetivos. Para esta pesquisa, serão utilizados somente algoritmos evolutivos multiobjetivos que serão apresentados na Seção 2.4.

Figura 9: Proposta de taxonomia de técnicas de solução para problemas de otimização



Fonte: Adaptada de Kalayci *et al* (86).

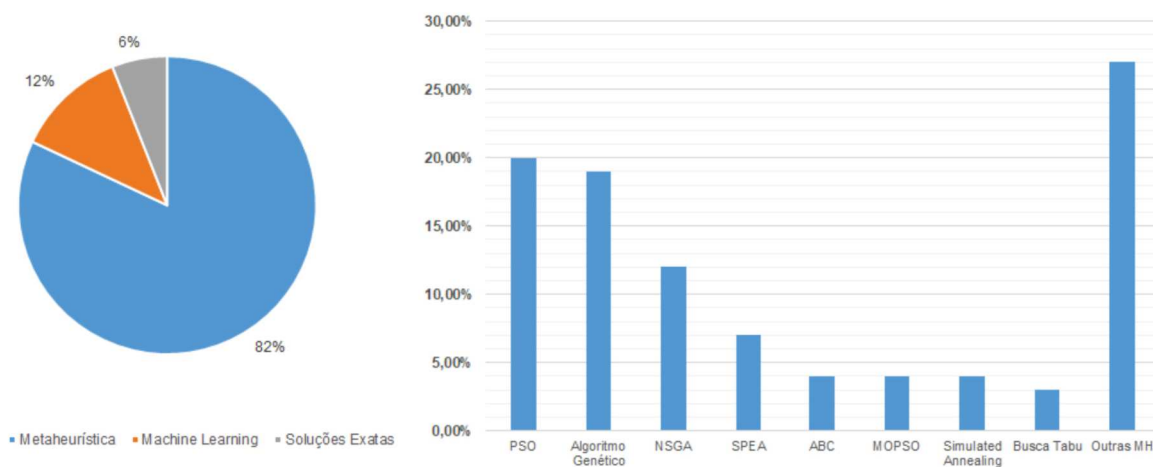
2.3.2 Surveys

Como forma de apresentar melhor o estado da arte, 03 pesquisas foram detalhadas a seguir envolvendo *surveys* recentes sobre o tema. O primeiro trabalho, de Metaxiotis e Liagkouras (2012) vasculhou trabalhos publicados entre 1994 e 2011 nas bases Science Direct, Elsevier e Springer. O segundo trabalho, também dos mesmos autores, publicado

em 2015, também apresenta características e detalhes dos algoritmos envolvidos em 220 *papers* publicados sobre o tema. Mais recente, em 2019, os autores Kalayci et al (2019) pesquisaram 175 publicações entre 1998 e 2018.

Enquadrando as pesquisas à taxonomia aqui apresentada, a Figura 10 mostra que em 82% dos artigos foram utilizadas meta-heurísticas, enquanto que Machine Learning ficou com 12% e soluções exatas com apenas 6%. Entre as meta-heurísticas levantadas, interessante destacar o equilíbrio do uso de PSO (Particle Swarm Optimization) e Algoritmos Genéticos, com cerca de 20% para cada um.

Figura 10: Categoria principal da técnica utilizada e tipo de meta-heurística



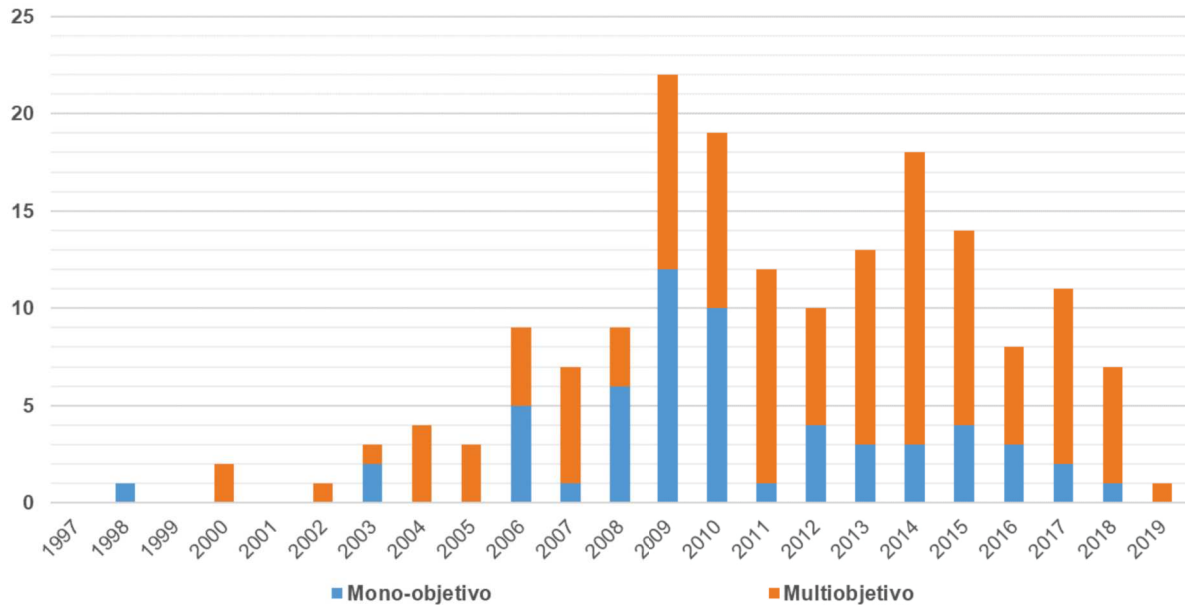
Fonte: Adaptada de Kalayci *et al* (86).

Em relação ao número de objetivos, a Figura 11 apresenta a evolução ano-a-ano dos trabalhos mono-objetivos e multiobjetivos e nota-se a partir de 2011, um aumento significativo de pesquisas multiobjetivas, sendo incomum encontrar atualmente pesquisas com um único objetivo. Já em relação ao número de objetivos, a Figura 12 evidencia uma predominância de dois objetivos nos trabalhos investigados até 2011.

No que tange à medida de risco associada à carteira, a variância predominou nas pesquisas levantadas (72,40%), enquanto que a média e variância ainda apareceram como os objetivos mais frequentes a serem atingidos, com mais de 75% somadas. Em relação ao número de restrições, 62,07% dos trabalhos investigados apresentaram duas restrições e um pouco mais de 30% apresentaram três ou mais restrições.

A Figura 13 apresenta os tipos de restrição presentes nas pesquisas levantadas por cada *survey*. Os números mostram uma predominância de 03 restrições: a orçamentária, cujo somatório dos pesos dos ativos deve ser igual a 1 (um); a de limite inferior e superior dos pesos, ou seja, o peso de cada ativo deve ser maior ou igual a zero (0) e menor que um (1); e, por último, a cardinalidade, que corresponde a um número k que deve ser o número máximo de ativos contidos na carteira.

Figura 11: Distribuição de publicações mono-objetivo e multiobjetivo por ano



Fonte: Adaptada de Kalayci *et al* (86).

Aliás, boa parte dos trabalhos recentes (88), (89), (90), (91) adotam a cardinalidade como restrição em virtude de sua utilidade prática, isto é, para o investidor não é interessante comprar muitos papéis mas sim, um número k de ativos que garantam seu objetivo de investimento e reduzam os custos de transação envolvidos.

Ruben e Suarez (92) concluíram que, em geral, as carteiras com restrições de cardinalidade têm melhor desempenho do que as carteiras que investem em todos os ativos. Bermudez *et al* (88) utilizaram lógica *fuzzy* para selecionar carteiras compostas por empresas espanholas com a restrição de cardinalidade. A incerteza dos retornos de uma determinada carteira é modelada usando números *fuzzy* e a medida *downside risk* é usada para descrever a importância do risco para o investidor. Os autores encontraram resultados promissores através da classificação das carteiras em três níveis de risco distintos: arriscado, médio risco e conservador. Assim, o investidor escolheria a carteira mais adaptada ao seu nível de risco.

Anagnostopoulos e Mamanis (93) trabalharam a cardinalidade da carteira como um objetivo em seu estudo. A pesquisa abordou um modelo com três objetivos: variância, retorno esperado e cardinalidade, sendo o alvo desta última a sua minimização em virtude principalmente dos custos de transação. Os autores concluíram que o algoritmo SPEA2 (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*) é o melhor algoritmo para o problema de otimização de carteira multiobjetivo restrito e não-restrito. Além disso, a solução do problema de três objetivos com algoritmos evolutivos multiobjetivos apresentaram ao investidor carteiras adicionais que não são eficientes em termos de média-variância, mas

Figura 12: Número de objetivos, restrições e medidas utilizadas

Número de Objetivos		Número de restrições	
02 objetivos	82,50%	01 restrição	6,90%
03 objetivos	10,00%	02 restrições	62,07%
04 objetivos	2,50%	03 restrições	20,69%
05 objetivos	5,00%	Mais de 03 restrições	10,34%

Medida de Risco utilizada		Função Objetivo utilizada	
Variância	72,40%	Média	39,38%
VaR	8,52%	Variância	36,18%
Expected Shortfall	4,26%	VaR	4,27%
Assimetria	4,26%	Dividendos anuais	2,13%
Semi-variância	2,13%	Expected Shortfall	2,13%
CVaR	2,13%	Assimetria	2,13%
Outras	6,30%	Semi-variância	1,06%
		Índice de Sharpe	1,06%
		CVaR	1,06%
		Outras	10,60%

Fonte: Adaptada de Metaxiotis e Liagkouras (2012) (87)).

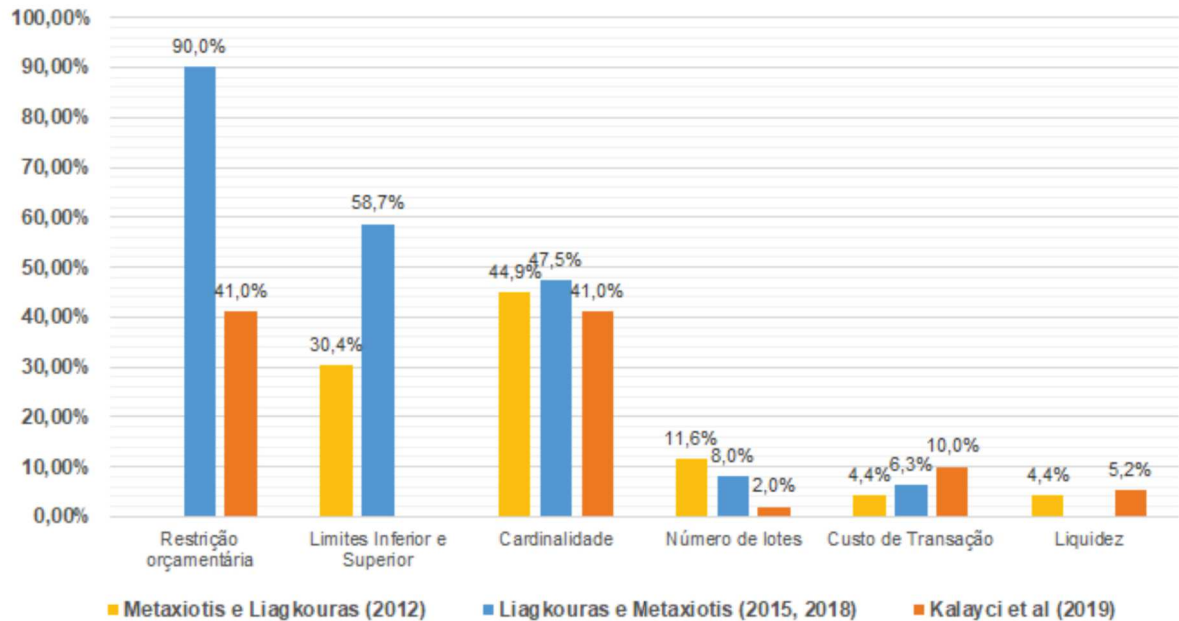
que tiveram um menor número de ativos em sua composição.

Com a introdução de restrições, sobretudo a da cardinalidade, o problema de otimização de carteira tornou-se um problema multiobjetivo restrito que é NP-difícil ⁴ e a otimização tradicional já não consegue ser empregada com eficiência para buscar portfólios ótimos. Para preencher essa lacuna, os algoritmos evolutivos de otimização multiobjetivo surgem como uma técnica diferenciada para gerar soluções de muitos modelos de seleção de carteiras.

Arnone *et al* (94) foram os pioneiros a usar MOEAs (do termo inglês, *Multiobjective Evolutionary Algorithm*) para otimizar carteiras de investimento. Os autores adotam o modelo de Markowitz, mas substituem a variância pelo *downside risk*, o que torna o problema mais difícil, porque a forma da superfície objetiva é geralmente não-convexa. Portanto, a programação quadrática não pode mais ser usada para encontrar soluções

⁴ Os problemas computacionais são classificados de acordo com sua dificuldade inerente. Portanto, diversas classes são definidas para identificar o quão eficiente um determinado algoritmo pode ser para dado problema de acordo com um recurso computacional. Assim, a Classe NP (NP de *Nondeterministic Polynomial Time*) é a classe que consiste dos problemas de decisão em que a resposta "Sim" pode ser verificada de forma eficiente, ou seja, se existe um algoritmo que, ao receber uma instância I de X e uma suposta solução S de I, responde "Sim" ou "Não" conforme S seja ou não solução de I, e consome tempo limitado por um polinômio no tamanho de I para responder "Sim". Neste sentido, um problema X é NP-difícil se todos os problemas em NP não são mais difíceis que X, isto é, um problema é NP-difícil se for tão difícil quanto qualquer problema em NP.

Figura 13: Distribuição das restrições



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

exatas. Os autores adotam algoritmo genético com uma função de agregação para resolver este problema.

Vedarajan *et al* (95) utilizam algoritmo genético com uma função de agregação que combina os dois objetivos de Markowitz (média e variância) em um único valor escalar, em que os pesos são variados, a fim de gerar diferentes soluções não-dominadas.

Hochreiter (96) propõe o uso de algoritmos heurísticos para os problemas de otimização de seleção de carteiras devido à complexidade e a não-convexidade de problemas de engenharia financeira. O autor realiza uma comparação e fornece resultados numéricos do algoritmo evolutivo para três medidas de risco, a saber: desvio padrão, valor em risco (VaR) e valor condicional em risco (CVaR).

Anagnostopoulos e Mamanis (97) comparam a eficácia dos algoritmos *Nondominated Sorting Genetic Algorithm-II* (NSGA-II), *Pareto Envelope-based Selection Algorithm - (PESA)* e *Strength Pareto Evolutionary Algorithm II - (SPEA-II)*. Os resultados mostram que os MOEAs, em geral, são eficientes e confiáveis para o problema de seleção de carteiras, independente da função utilizada para o cálculo do risco da carteira.

Já na área de algoritmos baseado em enxames (*Swarm Based Algorithms*), o destaque vai para o enxame de partículas (*PSO - Particle Swarm Optimization*) e colônia de abelhas artificiais (*ABC - Artificial Bee Colony*). Em relação à utilização do PSO, os autores Golmakani e Fazel (91) obtiveram em seu trabalho resultados superiores ao algoritmo genético convencional na resolução de problemas de seleção de carteira com

restrição de cardinalidade.

Chen (90) oferece uma importante contribuição ao desenvolver um algoritmo híbrido envolvendo colônia artificial de abelhas (ABC) e otimização através de enxame de partículas (PSO) para resolver problemas de carteira com restrição de cardinalidade. O trabalho apresenta resultados superiores aos alcançados em algoritmos heurísticos, como o algoritmo genético e os próprios ABC e PSO individualizados.

Kalayci *et al* (89) utilizam o algoritmo de colônia de abelhas no problema de otimização de carteiras com restrição de cardinalidade. Os autores utilizam o algoritmo juntamente com um procedimento de fiscalização de viabilidade atrelado a um procedimento de tolerância a inviabilidade, a fim de fornecer uma busca parcial livre. O procedimento de tolerância a infalibilidade permitiu que a solução viesse a violar as restrições de limites temporariamente, enquanto o mecanismo de reparação assegurava que o número de ativos a serem mantidos na carteira obedecesse à cardinalidade exigida. Resultados computacionais mostraram que esta técnica é muito eficiente e competitiva em comparação a outras abordagens de solução na literatura.

A Tabela 2 apresenta uma evolução temporal dos algoritmos, com uma lista dos principais algoritmos evolutivos aplicados ao problema de seleção de carteiras, bem como seu criador, o ano em que foi proposto e a qual tipo de objetivo a ser atingido (Mono-objetivo ou Multiobjetivo).

Tabela 2: Algoritmos Evolutivos aplicados à seleção de carteiras

Algoritmo Evolutivo	Proposto por	Tipo de Objetivo
Algoritmo Genético	Holland (1975)	Mono-Objetivo
VEGA (<i>Vector evaluated genetic algorithm</i>)	Schaffer (1985)	Multiobjetivo
Evolução Diferencial	Storn e Price (1997)(98)	Mono-Objetivo
PESA (<i>Pareto envelope-based selection algorithm</i>)	Corne et al (2000)	Multiobjetivo
SPEA2	Zitzler et al (2001) (84)	Multiobjetivo
NSGA-II	Deb et al (2002)(99)	Multiobjetivo
IBEA (<i>Indicator based evolutionary algorithm</i>)	Zitzler e Kunzli (2004)(100)	Multiobjetivo
GDE3 (<i>Generalized differential evolution 3</i>)	Kukkonen e Lampinen (2005)(101)	Multiobjetivo
e-MOEA (<i>e-multi objective evolutionary algorithm</i>)	Hanne (2007)	Multiobjetivo
NSGA-III	Deb e Jain (2014) (102)	Multiobjetivo

Fonte: Adaptada de Kalayci *et al* (86).

Por fim, após apresentada a evolução do tema e as principais características dos trabalhos mais recentes, identificam-se algumas conclusões sobre o estado da arte em relação ao assunto em epígrafe:

- (i) A tendência dos estudos é totalmente multiobjetiva, com aumento crescente do número de objetivos envolvidos na otimização;

- (ii) Como taxonomia, a meta-heurística permanece como o tipo de técnica mais empregada na otimização de carteiras;
- (iii) Os problemas de otimização apresentam pelo menos 02 restrições, sendo mandatórias as restrições de orçamento, limite inferior e superior dos pesos e a cardinalidade;
- (iv) Há um equilíbrio entre as técnicas de otimização por enxame de partículas (PSO) e algoritmos genéticos, ambas respondendo por quase metade das pesquisas levantadas.

A próxima Seção irá detalhar o funcionamento básico de um algoritmo evolutivo, bem como listar as principais características dos quatro algoritmos utilizados neste trabalho: O NSGAI, o NSGAI, o GDE3 e o IBEA. Pesquisas que utilizaram cada um dos algoritmos serão também referenciadas ao longo da descrição de cada algoritmo.

2.4 ALGORITMOS EVOLUTIVOS MULTI OBJETIVOS

2.4.1 Algoritmo Evolutivo

Algoritmo Evolutivo (AE) é o nome dado a uma classe de métodos de otimização estocásticos que simulam o processo de evolução natural, descrito por Darwin. A origem dos Algoritmos Evolutivos se dá na década de 50. Entretanto, o desenvolvimento de inúmeras técnicas só ocorreu nos anos 80, com o advento dos computadores e posterior aumento da capacidade de processamento.

Dentre os AE, estão os Algoritmos Genéticos (AG), que correspondem a uma técnica de otimização estocástica baseada nos conceitos de seleção natural e genética. Os AG são algoritmos que operam sobre uma codificação das soluções candidatas de um problema por meio do uso de operadores genéticos (mutação e cruzamento) combinados com técnicas de seleção. AG utilizam o valor das funções objetivo do problema (denominadas funções-aptidão) de cada indivíduo, para escolher por meio de testes de classificação, quais irão permanecer para as próximas iterações (gerações). Normalmente, consistem em algoritmos de busca estocástica em que não há garantia de otimalidade das soluções. Porém, a facilidade com que estes métodos são compreendidos e implementados computacionalmente, juntamente com o custo computacional relativamente baixo em comparação com técnicas tradicionais, é uma grande vantagem para seu uso (103).

O esquema básico de um AG está apresentado na Figura 14. De acordo com Mitchell (104), um AG funciona basicamente em 07 etapas:

Etapa 01: Iniciar aleatoriamente a população de cromossomos;

Etapa 02: Calcular a aptidão, representada por $f(x)$, de cada cromossomo x da população. A função de avaliação ou aptidão é a função objetivo responsável por fornecer o mecanismo que irá avaliar o indivíduo da população, atribuindo um conceito (valor

ou aptidão) para cada solução potencial. É a partir do resultado desta função que os cromossomos evoluem. A avaliação é que permite ao algoritmo genético determinar sua proximidade da solução.

Etapa 03: Selecionar um par de cromossomos pai da população atual, sendo a probabilidade de seleção uma função crescente de ajuste (*fitness*). O mecanismo de seleção modela o mecanismo natural de sobrevivência do indivíduo mais apto. Assim sendo, as soluções inaptas tendem a desaparecer. No esquema de seleção proporcional, um indivíduo com maior aptidão tem maior probabilidade de sobrevivência. A seleção é feita com substituição, significando que o mesmo cromossomo pode ser selecionado mais de uma vez para se tornar um pai.

Etapa 04: Com probabilidade p_c (a probabilidade de *crossover* ou taxa de *crossover*), cruzar o par em um ponto aleatoriamente escolhido (escolhido com probabilidade uniforme) para formar dois descendentes. Se não ocorrer o cruzamento, dois descendentes serão cópias exatas de seus respectivos pais. Note que aqui a taxa de *crossover* é definida como a probabilidade de que dois pais cruzem em um único ponto. Existem também o *crossover* multipontos, onde muitos pontos de cruzamentos são utilizados (ao invés de um único) e também o *crossover* uniforme, que não utiliza pontos de cruzamento, mas determina através de um parâmetro global, qual a probabilidade de cada variável ser trocada entre os pais.

Etapa 05: Fazer a mutação de dois descendentes em cada locus com probabilidade p_m (a probabilidade de mutação ou taxa de mutação) e colocar os cromossomos resultantes na nova população. A mutação é responsável por introduzir novas sequências de caracteres na população. A inserção de novo material genético ou de material perdido em iterações passadas garante a diversidade das características dos indivíduos da população e permite que sejam introduzidas informações que não estiveram presentes em nenhum dos indivíduos. Além disto, proporciona uma busca exploratória no AG, oferecendo oportunidade para que mais pontos do espaço de busca sejam avaliados.

Etapa 06: Substituir a população atual pela nova população.

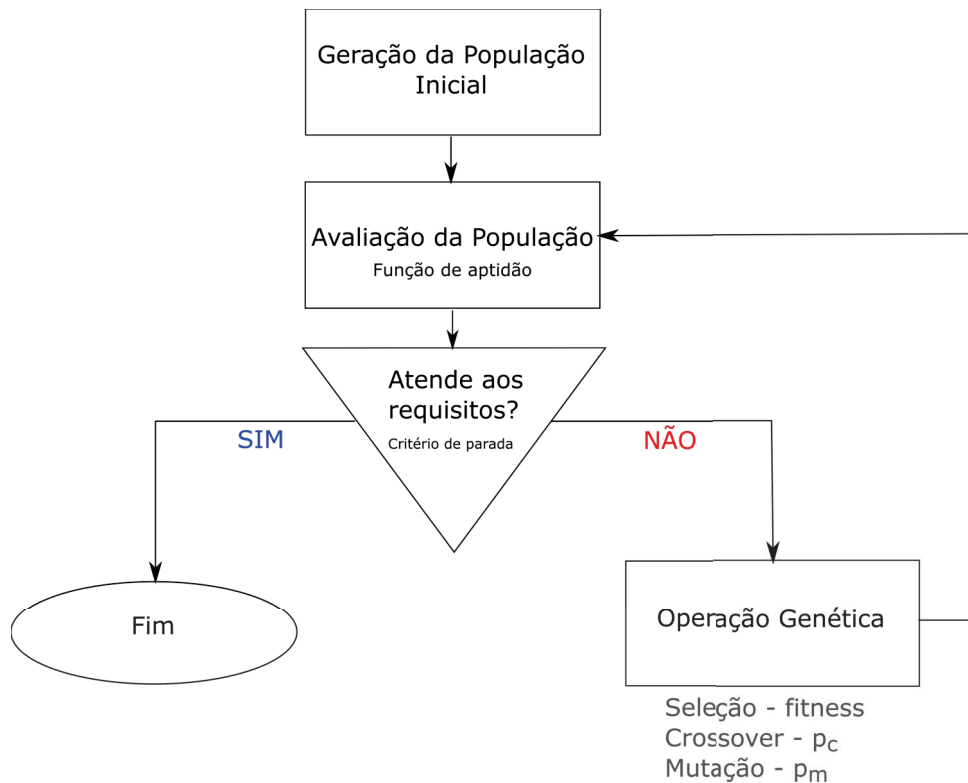
Etapa 07: Retornar à Etapa 02.

2.4.2 Parâmetros de Evolução

De acordo com o esquema apresentado na Figura 14, alguns parâmetros são necessários para a execução do AG. Eles são apresentados a seguir:

- 1. Tamanho da População:** é o parâmetro que define o valor da população inicial aleatoriamente gerada. Afeta o desempenho global e a eficiência do AG. Uma população muito pequena oferece uma pequena cobertura do espaço de busca, prejudicando assim a diversidade e o desempenho do algoritmo. Uma população suficientemente grande fornece uma melhor abrangência do domínio do problema e previne a convergência prematura

Figura 14: Esquema básico de um AG



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

para soluções locais. Por outro lado, uma população muito grande demanda recursos computacionais maiores, ou um tempo maior de processamento do problema. Logo, deve-se buscar um ponto de equilíbrio no que diz respeito ao tamanho escolhido para a população.

2. Taxa ou probabilidade de *Crossover* (P_c): probabilidade de um indivíduo ser recombinado com outro. Quanto maior for esta taxa, mais rapidamente novas estruturas serão introduzidas na população. No entanto, essa recombinação pode gerar um efeito indesejável, pois a maior parte da população será substituída, causando assim perda de variedade genética, que pode ocasionar perda de estruturas de alta aptidão e convergência. Isso pode acarretar uma população com indivíduos extremamente parecidos, o que favorece a convergência para um máximo local ou mínimo local, indivíduos estes de solução boa ou não. Com um valor baixo, o algoritmo pode-se tornar lento e até não convergir para uma resposta aceitável.

3. Taxa ou probabilidade de *Mutaçãõ* (P_m): probabilidade do conteúdo de um gene de um cromossomo ser alterado. A mutaçãõ previne a perda da diversidade e evita que uma dada população fique estagnada em pequenos espaços restritos de busca. Porém deve-se evitar uma taxa de mutaçãõ muito alta, uma vez que esta pode tornar a busca essencialmente aleatória, prejudicando a convergência para uma solução ótima.

4. Número de gerações: representa o número total de ciclos de evoluçãõ do

AG. Um número de gerações muito pequeno causa uma queda no desempenho, enquanto que um valor grande implica em um tempo maior de processamento, o que acarreta um aumento do custo computacional. Normalmente, o número de gerações também funciona como critério de parada do algoritmo.

5. Critérios de parada: São critérios estabelecidos que finalizam a execução computacional do AG, satisfazendo os objetivos do usuário. Os critérios podem ser número de gerações ou valores obtidos pela função objetivo das soluções, por exemplo.

De acordo com Deb *et al* (105) (106), na otimização multiobjetivo existem três metas importantes:

- (i) obter um conjunto de soluções que esteja o mais próximo possível da Fronteira de Pareto;
- (ii) obter um conjunto de soluções com a maior diversidade possível, incluindo critérios como uniformidade no espalhamento ao longo da Fronteira de Pareto; e
- (iii) alcançar as duas metas anteriores com a maior eficiência computacional possível.

A Tabela 3 apresenta os parâmetros utilizados em pesquisas anteriores envolvendo otimização multiobjetivo. Importante notar que a população inicial encontrada varia de 40 a 300, sendo o mais comum o número de 100 indivíduos. Número de execuções varia entre 25 a 100, enquanto que o número de avaliações chega a atingir 500.000. A probabilidade de cruzamento mais comum é 0.9 enquanto que a probabilidade de mutação mais recorrente é 0.1. Como o objetivo deste estudo não é realizar busca exaustiva de parâmetros, optou-se por trabalhar com valores de parâmetro mais empregados na academia.

2.4.3 NSGA II (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm*):

O NSGA II é proposto por Deb (107) (99) como uma melhoria do NSGA original (NSGA I), proposto em seu próprio trabalho com Srinivas (116). O NSGA I é baseado em várias camadas de classificação dos indivíduos. Antes da seleção ser realizada, a população é classificada na base de não-dominância: todos os indivíduos não-dominados são classificados em uma categoria (com um valor de aptidão *dummy*, que é proporcional ao tamanho da população para gerar um potencial reprodutivo igual para esses indivíduos).

Para manter a diversidade da população, esses indivíduos classificados são compartilhados com seus valores de aptidão. Esse grupo de indivíduos classificados é ignorado e uma outra camada de indivíduos não-dominados é considerada. O processo continua até que todos os indivíduos da população sejam classificados. A seleção proporcional remanescente estocástica é adotada para esta técnica.

Como os indivíduos na primeira frente têm o valor máximo de aptidão, eles sempre irão obter mais cópias do que o resto da população. Isso permite uma melhor busca nas

Tabela 3: Parâmetros dos Algoritmos utilizados em pesquisas anteriores

Autores	População Inicial	Número de execuções	Número de avaliações	Probabilidade de Crossover	Probabilidade de Mutação
Deb <i>et al</i> (107)	100	10	250	$P_c = 0,8$	$P_m = 1/k$
Sen <i>et al</i> (108)	300	300	500	$P_c = 0,9$	$P_m = 0,1$
Chen, W.(109)	40	20	2500	$P_c = 0,8$ $CR = 0,9$	$P_m = 0,08$ $F = 0,5$
Wei <i>et al</i> (110)	210	25	500000	$CR = 0,9$	$P_m = 0,05$ $F = 0,8$
Saborido <i>et al</i> (111)	220	50	500	$P_c = 0,9$ $CR = 1$	$P_m = 1/k$ $F = 0,5$
Kar <i>et al</i> (112)	100	100	25000	$P_c = 0,9$	$P_m = 0,03$
Liagkouras e Metaxiotis(113)	100	20	100000	$P_c = 0,9$ $CR = 0,9$	$P_m = 0,1$ $F = 0,5$
Chen e Xu(114)	50	20	1000	$P_c = 0,8$ $CR = 0,5$	$P_m = 0,08$ $F = 0,8$
Anagnostopoulos e Mamanis(115)	250	30	400	$P_c = 0,9$	$P_m = 1/k$
Chen <i>et al</i> (60)	20	20	10000	$P_c = 0,5$	$P_m = 0,01$

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

regiões da Fronteira de Pareto e resulta em convergência da população para essas regiões. Compartilhar, por sua vez, ajuda a distribuir a população sobre esta região (isto é, a Fronteira de Pareto do problema). Como resultado, o algoritmo converge rapidamente; entretanto, um gargalo ocorre com o mecanismo de compartilhamento de fitness. Muitos estudos obtiveram sucesso com o emprego do NSGA I (117) (118) (119). No entanto, o NSGA I foi considerado um algoritmo altamente ineficiente pela maneira em que ele classifica indivíduos(120).

O NSGA-II basicamente classifica a população em frentes de dominância e se caracteriza principalmente por 03 aspectos:

i) Classificação das soluções não-dominadas: o algoritmo avalia toda a população e classifica aqueles indivíduos não-dominados (Pareto) em diversas frentes;

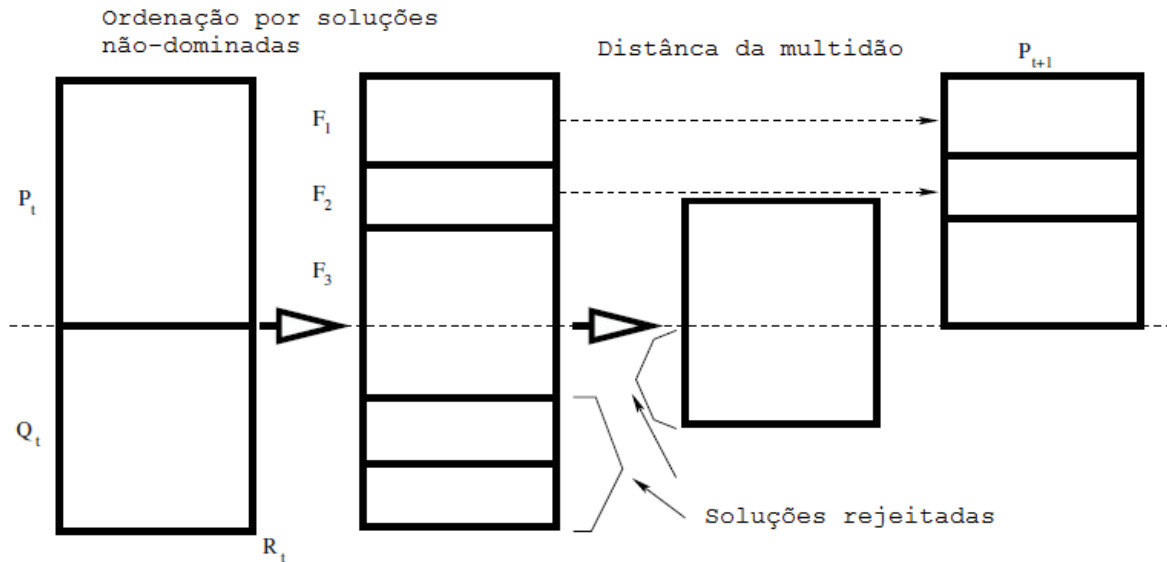
ii) Elitismo: o algoritmo armazena as soluções não-dominadas para as futuras gerações, garantindo assim filhos com maior chance de nascerem não-dominados;

iii) Distância de Aglomeração (*Crowding Distance*): a fim de garantir a diversidade de soluções, o algoritmo escolhe soluções menos concentradas ou densas, de forma a garantir que os indivíduos não sejam muito parecidos entre si. Com isso, os indivíduos que apresentarem distâncias muito pequenas ao longo da mesma frente são descartados.

A Figura 15 apresenta o esquema básico de seleção da população por parte do algoritmo. A população P_t é inicialmente classificada em frentes (F_1, F_2, F_3, \dots). Algumas

soluções são excluídas pela distância da aglomeração ou multidão (*crowding distance*) ou pelo fato da frente estar muito distante da Frente Ótima de Pareto. Com isso, uma nova população P_{t+1} é selecionada e será usada na próxima geração.

Figura 15: Mecanismo de Seleção - NSGAI



Fonte: Adaptada de Deb (82)

Dentre as vantagens do NSGA-II, destacam-se o mecanismo explícito de preservação da diversidade, através do cálculo da distância de aglomeração, bem como o mecanismo de elitismo que não permite que uma solução ótima de Pareto já encontrada seja excluída.

Como principal desvantagem tem-se que a comparação da distância de aglomeração pode restringir a convergência do algoritmo. Além disso, o método exige uma classificação de dominância da população de tamanho $2N$, o dobro da população inicial, o que requer maior custo computacional.

Konak et al (121) ainda destaca como vantagem o fato do NSGA-II ser eficiente e depender apenas de um parâmetro inicial (N) enquanto que, como desvantagem, os autores colocam o fato da distância de aglomeração funcionar apenas no espaço objetivo e não no espaço das variáveis de decisão (região factível).

2.4.4 NSGA III (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm*):

Os algoritmos de otimização multiobjetivo evolucionários demonstraram sucesso em vários problemas práticos envolvendo principalmente dois e três objetivos. Todavia, há uma necessidade crescente de desenvolvimento de algoritmos de otimização multiobjetivo evolutivos para lidar com problemas com muitos objetivos. Assim, Deb e Jain (102) propuseram o modelo NSGA-III como uma melhoria da versão do NSGA-II. Essa melhoria

corresponde a utilizar pontos de referência para resolver problemas que envolvam muitos objetivos.

A estrutura básica proposta pelo NSGA-III permanece semelhante ao algoritmo NSGA-II com mudanças significativas em seu mecanismo de seleção. Ao contrário do NSGA-II que utiliza o cálculo da distância da aglomeração (*crowding distance*), a manutenção da diversidade entre os membros da população no NSGA-III é auxiliada pelo fornecimento de uma série de pontos de referência bem espalhados. Estes pontos de referência podem ser predefinidos de forma estruturada ou fornecidos preferencialmente pelo usuário. Na ausência de qualquer informação de preferência, qualquer colocação estruturada de pontos de referência pode ser adotada. Os pontos de referência utilizados nada mais são do que um conjunto de pontos no espaço de objetivos que procuram guiar o processo de busca, de forma a melhorar tanto a diversidade quanto a convergência do conjunto de soluções do algoritmo.

De acordo com Ribeiro (122), em sua estrutura, o algoritmo gera um simplex unitário na dimensão imediatamente inferior à quantidade de objetivos, ou seja, se a quantidade de objetivos é igual a 3, o simplex tem dimensão igual a 2. O simplex unitário é definido como a generalização do triângulo para uma determinada quantidade de dimensões. Assim, um simplex bidimensional é um triângulo, um simplex tridimensional é um tetraedro, e assim sucessivamente. O simplex gerado intercepta cada um dos eixos no ponto unitário, ou seja, para um simplex de dimensão 2 em um espaço de três objetivos, os seus três vértices são $v_1 = (1;0;0)$, $v_2 = (0;1;0)$ e $v_3 = (0;0;1)$. Para cada eixo, são feitas p subdivisões entre 0 e 1. Estes pontos para cada dimensão são então combinados, de modo a gerar todas as combinações possíveis que restem sobre o simplex unitário. A Figura 16 apresenta um exemplo de triângulo com 03 eixos (X, Y e Z).

Uma vez fornecidos os pontos de referência e iniciada a população, o algoritmo NSGA-III segue os mesmos procedimentos do NSGA-II. A grande diferença passa a ser no estágio de seleção. Neste caso, é calculada a estimativa de um ponto ideal da população corrente, denominado z_i no espaço de objetivos, composto pelo menor ou maior valor para cada um dos objetivos (nos casos de minimização ou maximização, respectivamente).

O vetor de objetivos de cada indivíduo é transladado de acordo com o valor z_i (102). A partir do conjunto de objetivos transladados, encontram-se aqueles mais próximos de cada um dos eixos, formando um conjunto de pontos extremos, composto de m pontos, onde m é a quantidade de objetivos. Com o conjunto de m pontos extremos é construído um hiperplano.

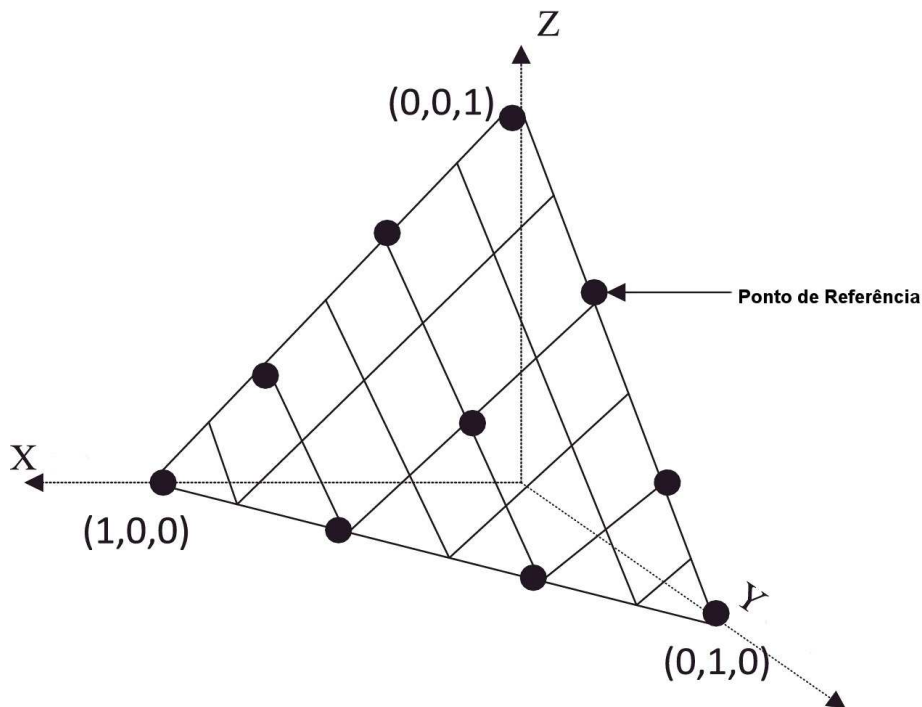
Com os valores normalizados dos objetivos de cada um dos indivíduos, faz-se a associação de cada um deles ao ponto de referência mais próximo da reta de referência que passa pela origem e pelo ponto π . Para cada ponto de referência é definido um contador de nicho ρ_j , que é a quantidade de indivíduos associados àquele ponto de referência que

já foram selecionados para compor a próxima geração. Os indivíduos não selecionados não contribuem para o contador de nicho do ponto de referência ao qual estão associados. Para preencher o restante da população portanto, primeiramente é encontrado o ponto de referência com menor ρ_j . Caso haja mais de um, um deles é escolhido aleatoriamente.

Se o valor $\rho_j = 0$ para o ponto escolhido, não existe nenhum membro da população da próxima geração associado ao ponto. Verifica-se então quantos indivíduos da fronteira não-dominada atual estão associados a este ponto de referência. Se houver um ou mais, aquele com a menor distância perpendicular à reta de referência é selecionado e o contador ρ_j é incrementado. Caso não haja nenhum indivíduo associado, o ponto de referência é descartado para análise na geração atual.

Nos casos em que $\rho_j \geq 1$, é escolhido aleatoriamente um membro da fronteira não-dominada associado ao ponto de referência j , caso exista. Este procedimento é repetido até que seja preenchida a nova população, e o algoritmo prossegue para a próxima geração.

Figura 16: Pontos de Referência para 03 objetivos - NSGAIII



Fonte: Adaptada de Zhu *et al* (123)

2.4.5 GDE3 (*Generalized Differential Evolution*):

O algoritmo de Evolução Diferencial (em inglês: Differential Evolution - DE) é um algoritmo de otimização simples e eficiente que foi proposto por Storn e Price em 1995 (98). O DE é conhecido pela sua eficácia para funções objetivo que não são diferenciáveis ou convexas e tem facilidade na busca do ótimo com populações pequenas (124).

O DE é um algoritmo que utiliza N vetores de parâmetros D-dimensionais $x_{i,g}$, $i = 1, \dots, N$, como população em cada geração G . O conjunto inicial de vetores é gerado aleatoriamente e deve cobrir todo o espaço de busca. Na ausência de qualquer conhecimento acerca do espaço de busca, uma distribuição uniforme pode ser empregada para a população inicial.

Assim, a cada iteração para avaliação dos candidatos ocorre a mutação, isto é, o DE gera novos vetores de parâmetros através da adição da diferença ponderada entre dois vetores de parâmetros a um terceiro indivíduo (125). O operador de mutação é definida por:

$$\nu_{novo} = \nu_{base} + F(\nu_1 - \nu_2) \quad (2.16)$$

Em que ν_{novo} é o novo indivíduo gerado e F determina a ponderação da diferença entre $F(\nu_1 - \nu_2)$. O vetor ν_{base} é o vetor base onde ocorrerá a perturbação.

Em seguida, ocorre então o cruzamento ou *crossover*, que é quando os vetores de parâmetros modificados são então combinados com outros vetores predeterminados (*target vectors*), a fim de gerar vetores candidatos (*trial vectors*), para dar maior diversidade genética ao problema. O vetor experimental é formado pela seguinte equação:

$$\mu^{ji,J+1} = \begin{cases} \nu_{ji,J+1}, & \text{if } r_i \leq CR \\ \theta_{ji,J}, & \text{if } r_i > CR \end{cases}, \quad (2.17)$$

Em que r_i é um número gerado aleatoriamente e CR é uma constante de cruzamento definida pelo usuário entre 0 e 1.

Para garantir a realização da mutação em ao menos uma variável, seleciona-se, anteriormente à geração de um novo indivíduo, um dos componentes do mesmo, denominado *jRand*, onde a mutação é realizada independentemente da probabilidade CR .

Por fim, a seleção é feita de forma gulosa: se a aptidão determinada através do cálculo da função objetivo do indivíduo i da população corrente é maior do que a aptidão do indivíduo i da população de cruzamento, esse indivíduo passa para a próxima geração com os melhores entre as duas populações.

Assim, o DE é indicado para resolver problemas sobre um domínio contínuo devido à operação da adição diferencial, que causa perturbações na população trabalhada e que está diretamente ligado ao espaço Euclidiano (126). Desta forma, a aplicação em problemas discretos não pode ser tida inicialmente como simples.

A primeira versão de uma Evolução Diferencial Generalizada (GDE) estendida para multiobjetivo restrito foi obtida modificando a seleção regra do DE básico (127).

Uma versão mais elaborada do algoritmo de Evolução Diferencial Generalizada, GDE3, foi proposto por Kukkonen e Lampinen *et al* (101). O GDE3 é uma extensão do

Diferencial Evolution (DE) para otimização global com um número arbitrário de objetivos e restrições. Em caso de um problema com um único objetivo e sem restrições, GDE3 torna-se o DE original.

De acordo com Vargas (128), o GDE3 adota uma ordenação baseada na dominância de Pareto no espaço das restrições para o tratamento delas. Assim, o algoritmo substitui o vetor alvo na próxima geração da população pelo experimental, caso este último tenha dominado o primeiro. Além disso, o autor destaca que o GDE3 também possui um esquema de controle do tamanho da população que privilegia a permanência de vetores dominantes e mais bem espalhados sobre a Fronteira de Pareto até o limite máximo de indivíduos da população.

2.4.6 **IBEA (*Indicator Based Evolutionary Algorithm*):**

Em 2004, Zitzler e Kunzli (100) propuseram o IBEA, um algoritmo evolutivo baseado em indicadores. Para os autores, os demais algoritmos multiobjetivos trabalham com os dois objetivos antagônicos: o de minimizar a distância para a Fronteira Ótima de Pareto e ao mesmo tempo maximizar a diversidade dentro da própria Fronteira Ótima de Pareto. Segundo os autores, não existe nenhuma definição formal que atenda aos dois objetivos distintos, um para a convergência e um para a diversidade e seja compatível com a relação de dominância de Pareto. Além disso, citam o trabalho de Bosman *et al.* (129) que apresentou problemas práticos relacionados à conciliação de convergência e diversidade.

No contexto multiobjetivo, indicadores vêm sendo utilizados para avaliar a qualidade de uma fronteira de Pareto aproximada. O Hypervolume, que será discutido mais adiante neste trabalho, é um exemplo de indicador usado para a avaliação e comparação de fronteiras de Pareto aproximadas. No algoritmo IBEA, indicadores de qualidade são utilizados para avaliar o conjunto de soluções não-dominadas. Para usar o IBEA, é necessário definir qual indicador será usado para associar cada par de soluções a um valor escalar.

A equação de avaliação do algoritmo IBEA é dada pela Equação 2.18 e é utilizada para calcular a contribuição de uma dada solução para o valor do indicador de uma população, onde k é um fator de escala dependente de I , que representa o valor do indicador de qualidade para o problema.

$$f(x_i) = \sum_{x_j \in (P-x_i)} -e^{\frac{-I(x_j, x_i)}{k}} \quad (2.18)$$

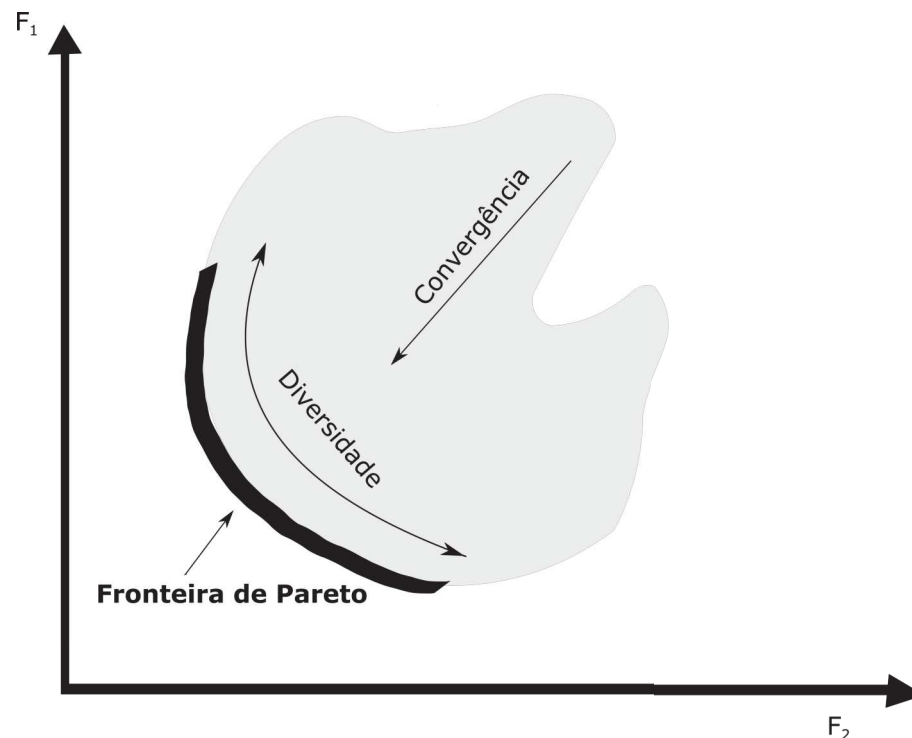
O valor de $f(x_i)$ corresponde à qualidade que a aproximação da fronteira de Pareto perde se a solução x_i for removida da população, com base no valor de I .

Nesta pesquisa, o indicador escolhido para ser trabalhado no IBEA foi o hypervolume, que será apresentado em seguida.

2.4.7 Medida de desempenho dos algoritmos

Ao se avaliar as soluções candidatas em um processo de otimização multiobjetivo, dois atributos são considerados fundamentais na qualidade das soluções: a convergência e a diversidade (82). A convergência avalia o quão próximas estão as soluções em relação à Fronteira de Pareto, enquanto que a diversidade avalia quão diversas as soluções são em relação a si mesmas. A Figura 17 apresenta graficamente os conceitos de convergência e diversidade em um problema de minimização com dois objetivos.

Figura 17: Convergência e Diversidade das soluções



Fonte: Adaptada de Deb (82)

O Hypervolume foi proposto inicialmente por Zitzler(2007) (130) e corresponde ao cálculo da área, no caso de problemas com dois objetivos, ou volume no caso de problemas com três ou mais objetivos. A área ou volume é o tamanho do espaço coberto por um conjunto de soluções não-dominadas, limitadas por um ponto de referência. A Figura 18 apresenta um exemplo de cálculo do Hypervolume para 02 objetivos (f_1 e f_2):

Em que:

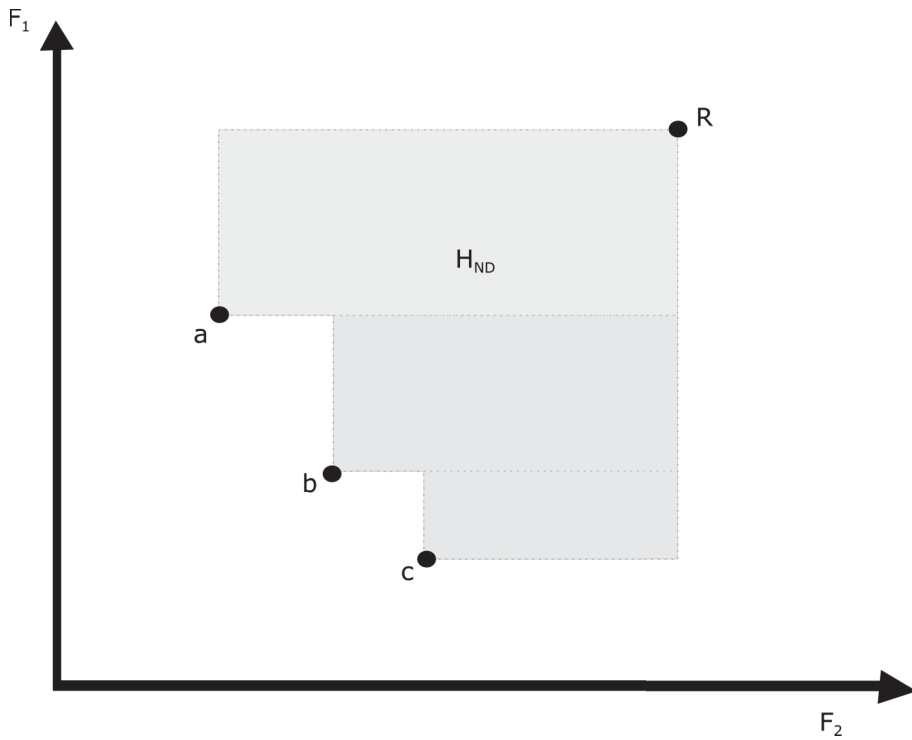
R = Ponto de referência das soluções

a, b, c = Soluções Não-Dominadas

H_{ND} = Área do Hypervolume

O Hypervolume é a união das áreas dos retângulos formados entre cada solução (a, b, c) e o ponto de referência P . No exemplo da Figura, as soluções a, b, c são soluções

Figura 18: Hypervolume



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

não-dominadas em que os objetivos são minimizar F_1 e F_2 respectivamente, já que a melhor solução de todas, supondo objetivos não-negativos, seria o ponto $(0,0)$. Assim, como o ponto R é o oposto da melhor solução possível $(0,0)$, quanto maior for a área preenchida pelo Hypervolume, melhor será a solução, tendo em vista que a distância para a melhor solução $(0,0)$ será menor.

Assim, quanto maior o Hypervolume, melhor a qualidade das soluções. O cálculo do Hypervolume resultaria em números muito elevados dependendo da unidade de medida dos objetivos. Assim, como notação empregada nesse trabalho, o Hypervolume será expresso em decimal, com valor de 0 (zero) até 1 (um). O cálculo do Hypervolume em percentual de desvio em relação ao ponto R é apresentado a seguir:

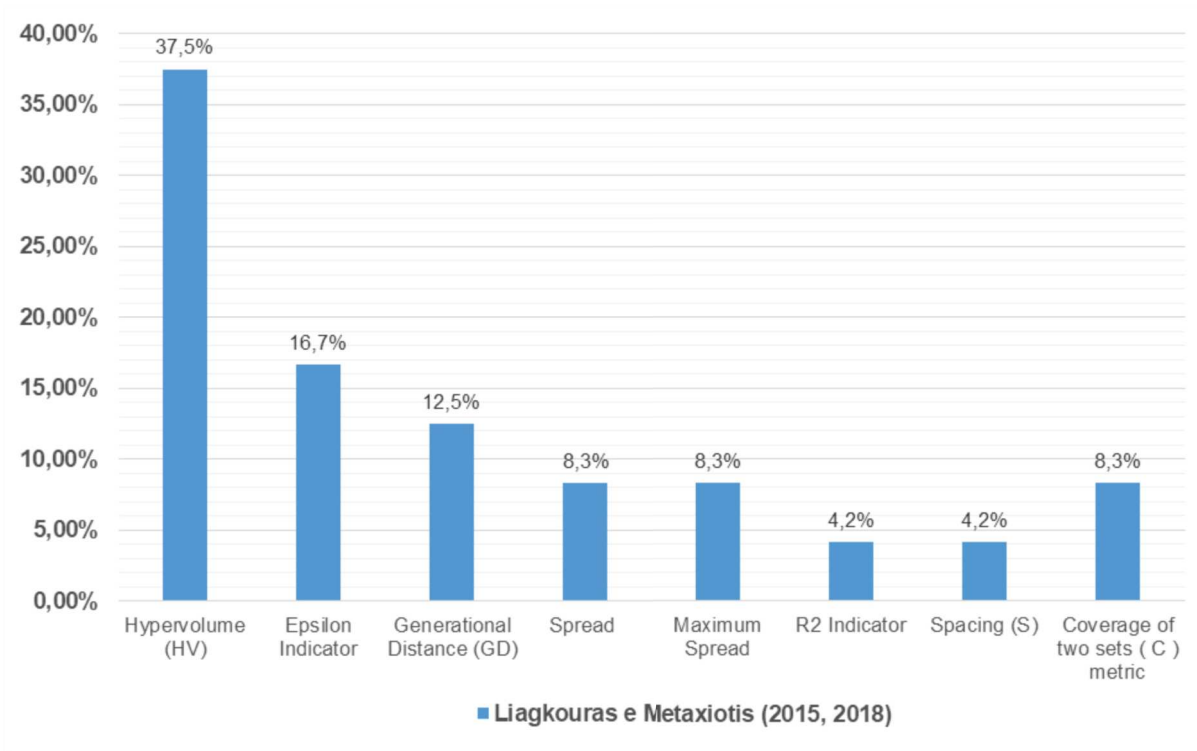
$$H_{ND} = 100 \left(\frac{H_{Ref} - H_{ND}}{H_{Ref}} \right) \quad (2.19)$$

Riquelme et al (131) desenvolveram um estudo minucioso sobre as medidas de desempenho dos algoritmos utilizados nos principais artigos e trabalhos científicos apresentados em um dos eventos mais importantes da área de otimização envolvendo computação evolucionista - o *EMO Conferences (Evolutionary Multi-Criterion Optimization)* durante o período de 2005 a 2013. Neste estudo, os autores concluíram que aproximadamente metade dos trabalhos apresentaram uma única medida de desempenho e que o hypervolume foi a

medida mais empregada, com 65% de utilização pelos pesquisadores.

Neste sentido, a Figura 19 confirma a larga utilização do hypervolume. O estudo de Liagkouras e Metaxiotis (113) mostra que o hypervolume foi o indicador mais utilizado como medida de desempenho dos algoritmos com 37,5% dos trabalhos pesquisados.

Figura 19: Indicadores de Desempenho dos Algoritmos dos trabalhos levantados por Liagkouras e Metaxiotis (113)



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

3 METODOLOGIA

Os experimentos deste trabalho se dividem em três grandes blocos: o primeiro destinado a comparar o desempenho do modelo $\hat{\Omega}$ CAPM em relação ao modelo CAPM. O objetivo deste primeiro experimento é verificar se carteiras com maior $\hat{\Omega}$ apresentam melhor desempenho fora da amostra que carteiras com maior Sharpe e se as previsões do modelo OCAPM são mais assertivas do que as do modelo CAPM.

Partindo para a abordagem multiobjetiva, o segundo experimento otimiza apenas atributos convexos, ou seja, aqueles que podem ser minimizados ou maximizados de forma global, sem a necessidade de meta-heurísticas. A ideia é saber se atributos convexos otimizados produzem resultados superiores aos modelos OCAPM e CAPM.

O terceiro e último experimento otimiza não só os atributos convexos mas também os não-convexos através de algoritmos evolutivos, já que não é mais possível a obtenção de máximos e mínimos globais. A componente CVIX foi criada e sugerida como uma correlação condicional ao VIX e será detalhada na Seção 3.4.1. São apresentadas três proposições de carteiras multiobjetivas:

- (i) **Carteira Global:** recebe esse nome porque visa otimizar todos os seis atributos simultaneamente: Média, $\hat{\Omega}$, Assimetria, Curtose, *Drawdown* Máximo e o CVIX.
- (ii) **Carteira Antifrágil:** otimiza atributos que tendem a valorizar ativos que não apresentem quedas abruptas de rendimento em períodos turbulentos ou de crise. Por isso, a carteira otimiza o *Drawdown* Máximo e o CVIX.
- (iii) **Carteira Assimétrica:** busca otimizar atributos que valorizem retornos assimétricos positivos (caudas à direita). Assim, a carteira buscará ativos com $\hat{\Omega}$ máximo, alto grau de assimetria e baixa curtose.

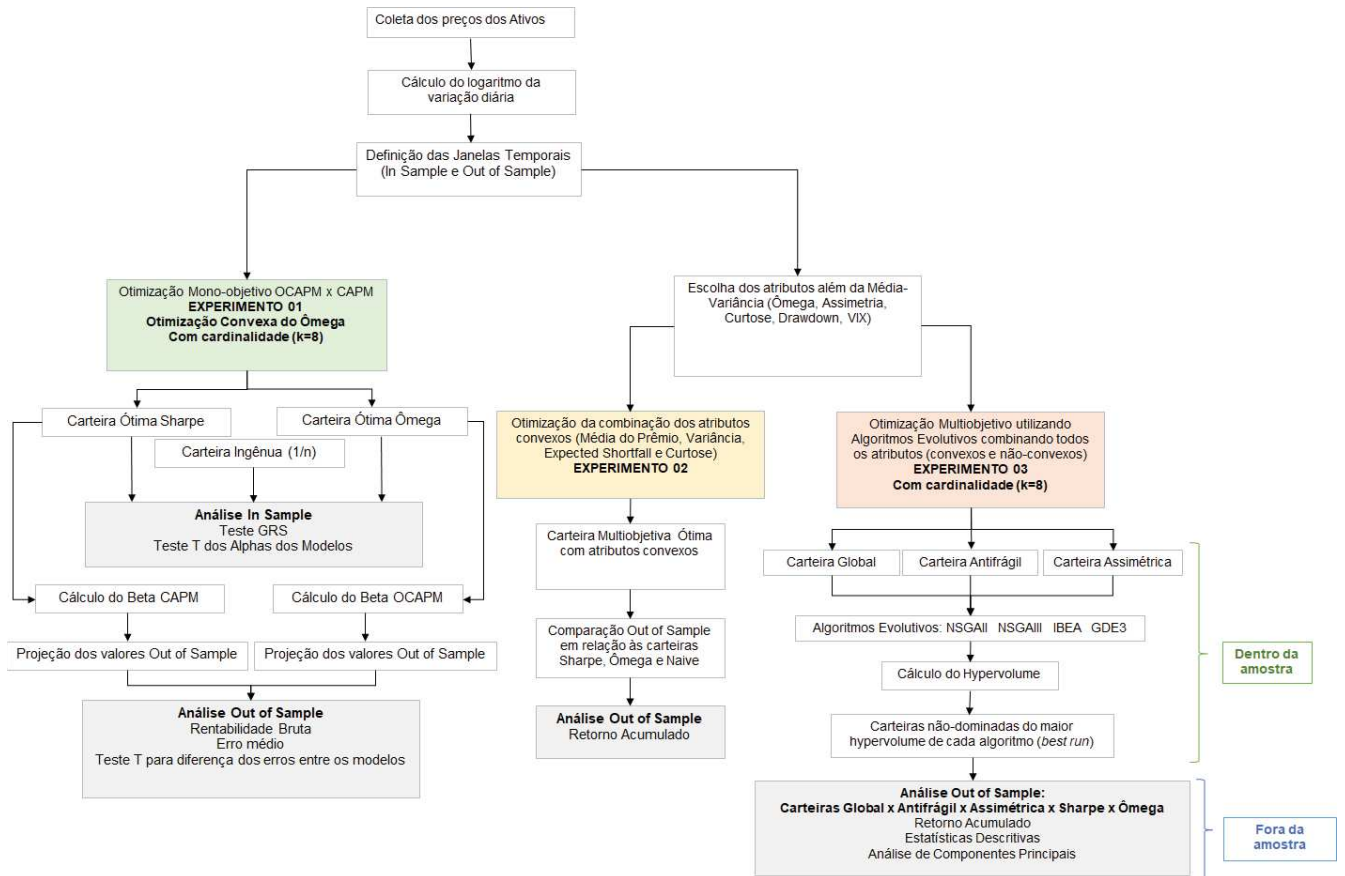
O experimento 03 busca avaliar se algoritmos evolutivos produzem carteiras multiobjetivas com melhor desempenho que os modelos CAPM, OCAPM e também do portfólio convexo. O fluxograma apresentado na Figura 20 esquematiza os principais procedimentos utilizados na pesquisa. Em seguida, são apresentadas as descrições relativas à coleta de dados e as otimizações de cada experimento.

3.1 COLETA DE DADOS

3.1.1 Mercados escolhidos e critério de liquidez

Em todos os experimentos desta pesquisa, foram coletados preços dos ativos negociados no mercado americano (Dow Jones) e mercado brasileiro (IBOVESPA e Small

Figura 20: Fluxograma da Metodologia de Otimização e Análise



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Caps) do período de 1994 a 2020. Como o índice Small Caps não dispunha de informações desde o início do período, seus dados foram coletados a partir de 2008.

Foi calculado inicialmente o logaritmo da variação diária de cada ativo e como critério de liquidez, estabeleceu-se que os ativos tivessem negociação em pelo menos 80% dos pregões realizados no período.

Os dados foram coletados do software Economática e correspondem aos preços diários de fechamento dos ativos, já devidamente ajustados aos dividendos, desdobramentos e agrupamentos.

A justificativa de se escolher os mercados americano e brasileiro é a possibilidade de se comparar um mercado desenvolvido (americano) com um mercado emergente (brasileiro). A escolha de empresas que compõem o Índice Small Caps foi feita pelo fato de serem empresas recém-ingressadas no mercado, normalmente de menor porte, e, por isso, seria interessante testar o modelo nesse tipo de empresa, já que o menor porte pode favorecer a influência da assimetria e especulação no comportamento de seus preços.

3.1.2 Janelas temporais

Um dos grandes desafios em estudos envolvendo séries temporais em Finanças é definir os períodos em que as análises serão feitas, tendo em vista que o contexto econômico que o país ou mercado atravessa impacta diretamente no desempenho de suas empresas e, por conseguinte, na análise financeira proposta.

As obras clássicas de Merton (1969, 1990) (132) (133) e Campbell e Viceira (2002) (134) ilustram que as políticas de seleção de carteiras de período único geralmente não são mais adequadas, pois não capturam efeitos intertemporais e demandas de *hedge*. A previsibilidade do retorno e o impacto no mercado naturalmente dão origem a demandas intertemporais de *hedge* para valores mobiliários e os investidores precisam olhar além do próximo período ao alocar de maneira ideal seus ativos.

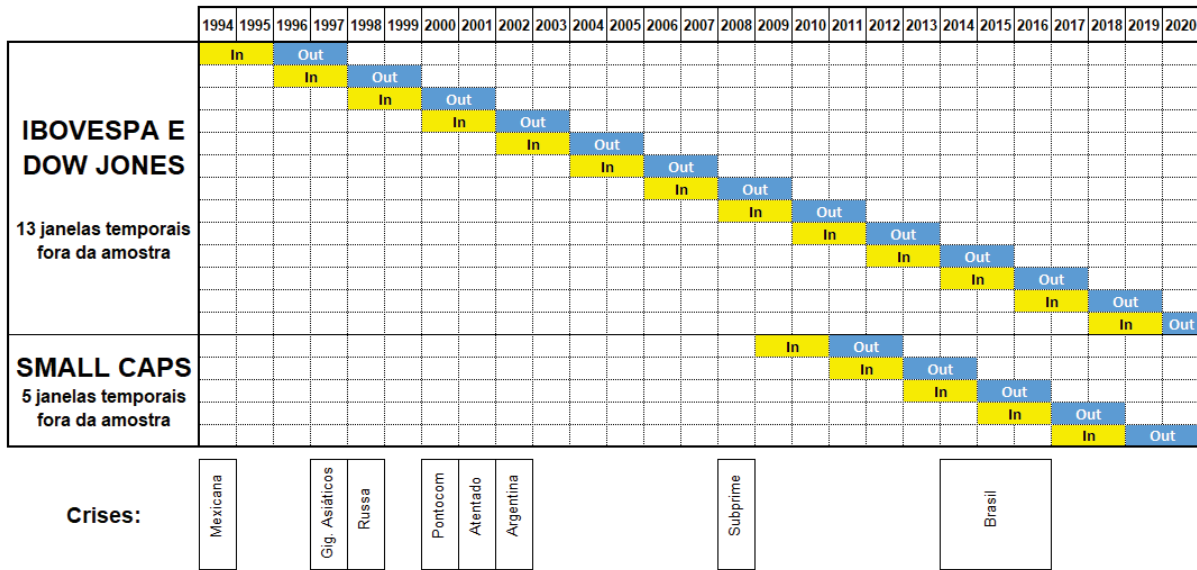
Além disso, é importante que além de se trabalhar com vários períodos distintos, a carteira também desempenhe bem em mercados diferentes, isto é, uma proposta empírica é robusta à medida que apresenta bom desempenho em tempos diferentes e com ativos diferentes. Como o presente estudo já aborda 03 mercados distintos, entende-se que esse requisito também já esteja atendido.

Assim, como forma de trazer robustez à proposta empírica desta pesquisa, optou-se por segmentar todo o período estudado em janelas deslizantes de 02 anos, ou seja, otimizam-se os dois primeiros anos e verifica nos dois anos seguintes o desempenho das carteiras. Este procedimento elimina a contaminação ou viés temporal em quaisquer que sejam as janelas temporais estabelecidas *ex-ante*. Desta forma, as janelas temporais desta pesquisa são apresentadas na Figura 21, que também apresenta as principais crises financeiras do período. Optou-se por estender os dados da pesquisa até abril de 2020 para considerar os efeitos da crise do COVID-19 na avaliação dos resultados das carteiras.

3.1.3 Taxa Livre de Risco - *Risk Free*

Conforme apresentado na Teoria de Carteiras, um dos componentes incrementados por William Sharpe (1964) na Teoria proposta por Markowitz (1952) é a de inclusão de uma taxa livre de risco no modelo de precificação de ativos de capital. Assim foram utilizados como *proxies* da TLR o *T-Bond* de 10 anos (*Treasure Bond - 10 years*) para o mercado americano e o CDI (Certificado de Depósito Interbancário) para o mercado brasileiro. Como os retornos logarítmicos foram calculados diariamente, a Taxa Livre de Risco foi convertida para o período diário e, em seguida, foi calculado o logaritmo de sua variação diária.

Figura 21: Janelas Dentro e Fora da Amostra



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

3.1.4 Restrições

Os experimentos desenvolvidos neste trabalho visam incorporar algumas restrições que ao mesmo tempo tragam o máximo da realidade dos gestores de investimento, bem como atendam ao rigor científico-matemático de cada modelo. Para isso, três restrições foram definidas: (i) cardinalidade, (ii) peso de cada ativo e (iii) somatório dos pesos.

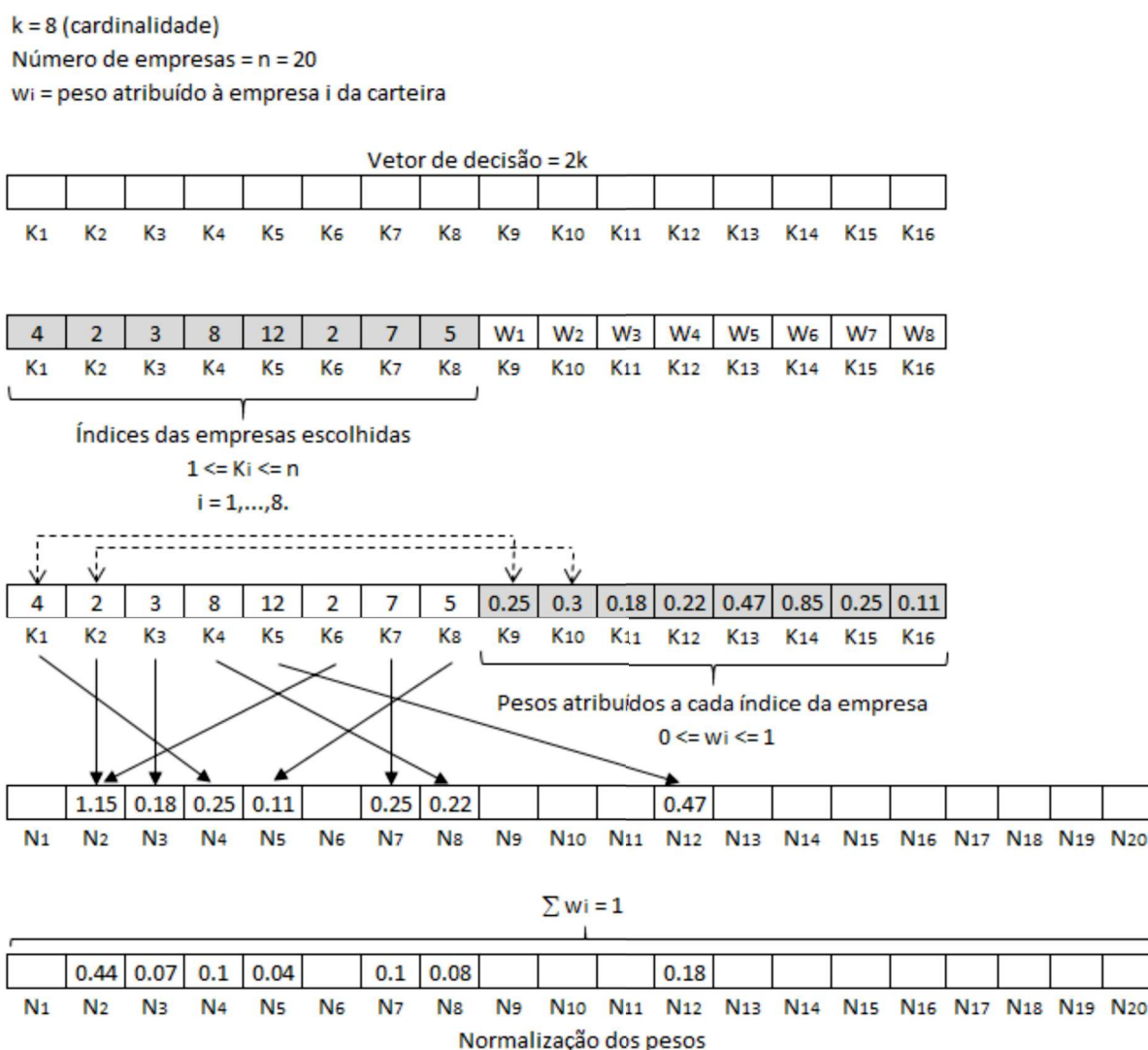
3.1.4.1 Cardinalidade

A cardinalidade é a quantidade máxima de ativos que a carteira deve conter em sua composição. Ela contribui para a redução de ativos a serem administrados e geridos pelos gestores de investimento, ao mesmo tempo que reduz também o custo de transação envolvendo corretagens, taxas e emolumentos de suas transações.

Conforme visto na Seção 2.3.2, a cardinalidade está presente como restrição hoje em praticamente metade dos trabalhos publicados. Para esta pesquisa, adotou-se uma cardinalidade de no máximo 08 (oito) ativos ($k = 8$).

A cardinalidade foi tratada como restrição de modo semelhante ao trabalho de Barbosa *et al* (103), em que o vetor de variáveis de decisão é duplicado, sendo a primeira parte destinada ao índice de empresas que irão compor a carteira ótima e a segunda parte aos pesos atribuídos a cada uma. A Figura 22 ilustra o esquema utilizado, supondo uma cardinalidade de 08 ativos ($k = 8$), em um universo hipotético de 20 ativos ($n = 20$).

Figura 22: Esquema da restrição de cardinalidade utilizada na carteira ótima



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

3.1.4.2 Restrições do peso de cada ativo ($0 < w \leq 1$ *Bound constraint*)

A restrição do peso de cada ativo, também conhecida como *bound constraint*, impõe uma condição do peso w de cada ativo apresentar valores não-negativos e inferiores ou igual a 1, isso para evitar alavancagem ou possibilidade de venda a descoberto dos ativos. Não houve restrição de valor máximo de alocação por ativo.

3.1.4.3 Restrições do somatório dos pesos ser igual a 1 (*Budget constraint*)

A última restrição é conhecida restrição orçamentária (*Budget constraint*) e garante que o somatório dos pesos dos ativos seja igual a 1, isso para facilitar a adaptação da carteira a qualquer nível de orçamento.

3.1.5 *Proxies* comparativas de desempenho

Em se tratando de estudos envolvendo seleção de carteiras, é importante definir quais *proxies* comparativas serão adotadas para análise dos resultados encontrados. Como as janelas temporais são específicas, é difícil encontrar resultados empíricos em pesquisas anteriores com o mesmo recorte temporal. Assim, a primeira *proxy* utilizada foi a carteira igualmente ponderada (*naive*), em que investidores diluem o capital em frações iguais em todos os ativos ($1/n$). Além disso, foi utilizado também o desempenho do Índice relativo ao mercado estudado, neste caso, o Índice Dow Jones, o Índice BOVESPA e o Índice Small Caps. Além disso, como parâmetro de Renda Fixa, foram utilizados o T-Bond de 10 anos no mercado americano e o CDI no mercado brasileiro.

3.2 EXPERIMENTO 01 - MONO-OBJETIVO: MODELO CAPM x OCAPM

O experimento 01 teve como objetivo comparar as carteiras ótimas produzidas pelos modelos CAPM e OCAPM, bem como a assertividade na projeção de valores esperados dos retornos dos ativos. Assim, para o modelo CAPM a otimização deve ser do Índice de Sharpe e do modelo OCAPM a otimização deve ser do Índice Ômega.

3.2.1 Otimização do Modelo CAPM

A função objetivo do modelo CAPM é maximizar o Índice de Sharpe, sujeito à restrição de que a soma dos ativos de ponderação em carteira seja igual a um e os ativos de ponderação não sejam negativos. Além disso, o número máximo de ativos escolhidos na carteira deve ser igual a oito (cardinalidade).

A fórmula da função objetivo do Índice de Sharpe é:

$$\text{Maximizar Índice de Sharpe} = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i} \quad (3.1)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.2)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \forall i \in (1, 2, \dots, k = 8) \quad (3.3)$$

Em que R_i é o retorno da carteira i , R_f é a taxa livre de risco, σ_i é o desvio-padrão da carteira i , w_i são os pesos dos ativos i da carteira, n é o número de ativos da carteira e k a cardinalidade da carteira.

O método de otimização utilizado nesta etapa do trabalho foi a Programação Sequencial de Mínimos Quadrados (SLSQP - *Sequential Least Squares Programming*), um método iterativo para otimização não linear restrita. Os métodos SLSQP resolvem uma sequência de subproblemas de otimização, cada um dos quais otimiza um modelo quadrático do objetivo sujeito a uma linearização das restrições.

Se o problema é irrestrito, o método se reduz ao método de Newton para encontrar um ponto em que o gradiente do objetivo desaparece. Se o problema tiver apenas restrições de igualdade, o método é equivalente a aplicar o método de Newton às condições de otimalidade de primeira ordem, ou condições de Karush-Kuhn-Tucker do problema. O método envolve a sub-rotina *SLSQP Optimization* originalmente implementada por Dieter Kraft (135).

3.2.2 Otimização do Modelo Ômega CAPM (OCAPM)

O objetivo da otimização do modelo Ômega CAPM é maximizar o Índice Ômega. No entanto, ao contrário do Índice Sharpe, a maximização não deve ocorrer de forma global em virtude da medida Ômega ser uma medida não-convexa. Assim, será utilizada a transformação convexa do Ômega proposta no trabalho de Mausser *et al* (136) e detalhada a seguir:

3.2.2.1 A transformação convexa da função Ômega

Inicialmente, a função objetivo do Índice Ômega seria:

$$\text{Maximizar Índice Ômega} = \frac{EC_x(L)}{ES_x(L)} \quad (3.4)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.5)$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \quad (3.6)$$

Em que $EC_x(L)$ é o *Expected Chance*, $ES_x(L)$ é o *Expected Shortfall*, w_i é o peso dos ativos i no portfolio e n o número de ativos da carteira

No entanto, como a função é não-convexa, uma transformação linear será necessária. Dessa forma, para facilitar a notação, o Expected Chance será chamado de u_i e o Expected Shortfall será chamado de d_i . Assim, a função Ômega é apresentado na Equação 3.7, em

que L é a taxa livre de risco (ponto de retorno mínimo), w é o peso de cada ativo, $R_{ij}w_j$ é a ponderação da matriz de retorno R pelos pesos w e N o número de ativos.

$$\Omega(L) = \max_{w,u,d} \frac{\sum u_i}{\sum d_i} \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^N R_{ij}w_j - u_i + d_i = L \quad i = 1, \dots, S \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^N w_j = 1 \quad (3.9)$$

Para que a condição de complementariedade entre ganhos (u_i) e perdas (d_i) seja atendida, é necessário que $u_i \cdot d_i = 0$, conforme Equação 3.10. Além disso, w_j deve ser positivo, evitando assim vendas a descoberto dos ativos.

$$u_i, d_i, w_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad u_i \cdot d_i = 0 \quad (3.10)$$

Para transformação do problema que é não-linear e não-convexo, introduziu-se uma transformação de variáveis (adaptada de Charnes e Cooper (1962)(137) que torna o problema em um problema linear, desde que a condição de complementaridade seja omitida.

Assim, tem-se que:

$$t = \frac{1}{\sum d_i} \quad (3.11)$$

Assim, as variáveis transformadas passariam a valer:

$$\tilde{w}_j = w_j t \quad \tilde{u}_i = u_i t \quad \tilde{d}_i = d_i t \quad (3.12)$$

Desde que t seja positivo (> 0), as variáveis podem ser retornadas conforme a seguir:

$$w_j = \tilde{w}_j / t \quad u_i = \tilde{u}_i / t \quad d_i = \tilde{d}_i / t \quad (3.13)$$

Efetuada as substituições com a variável t , o problema de otimização passa a se apresentar da seguinte forma:

$$\Omega(L) = \max_{w,u,d,t} \sum \tilde{u}_i \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^N R_{ij} \tilde{w}_j - \tilde{u}_i + \tilde{d}_i - Lt = 0 \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=1}^N \tilde{w}_j - t = 0 \quad (3.16)$$

$$\sum \tilde{d}_i = 1 \quad (3.17)$$

$$Aw - bt \leq 0 \quad \tilde{u}_i, \tilde{d}_i, \tilde{w}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.18)$$

De acordo com Mausser *et al* (136), não se pode assumir automaticamente que a solução ideal da equação 3.14 fornece uma solução ótima para a equação 3.7 revertendo a transformação feita em t (Equação 3.10), isto porque não existe mais a condição de complementaridade da Equação 3.10. Assim, os autores concluem que o valor ótimo de $\hat{\Omega}$ (Equação 3.14) satisfaz que $\Omega(L) \geq 1$ e que, se $\Omega(L) > 1$, então a condição de complementariedade ($u_i \cdot d_i = 0$) está automaticamente satisfeita. Neste caso, a solução da Equação 3.7 pode ser obtida da solução ótima da Equação 3.14, revertendo a transformação de t (Equação 3.10).

Em relação à restrição de cardinalidade, se colocada na otimização, ela só poderia ser resolvida através de programação inteira mista. Optou-se inicialmente por retirar a restrição de cardinalidade, tendo em vista que o modelo irrestrito já gerou um número de ativos inferior à cardinalidade desejada ($k \leq 8$).

3.3 EXPERIMENTO 02: OTIMIZAÇÃO DOS ATRIBUTOS CONVEXOS: MÉDIA, VARIÂNCIA, CURTOSE E EXPECTED SHORTFALL

Os atributos originais do modelo seminal de Markowitz são a média e variância, que são, por si só, convexos. Além da média e variância, conforme já apresentado, muitos estudos optaram por incluir os momentos de terceira e quarta ordem (assimetria e curtose) na otimização de carteiras.

É sabido que os momentos de ordem superior são convexos (138). Desta forma, a média, variância, assimetria e curtose são convexos e podem ter seu mínimo ou máximo otimizado de forma global. No entanto, ao se buscar uma otimização global, deve-se ou minimizar ou maximizar todas as funções objetivos envolvidas e, no caso específico da assimetria, como o desejável é a sua maximização, deveria ser computada com sinal negativo (-), o que levaria seu comportamento se tornar côncavo e não mais convexo. Portanto, somente a curtose poderia ser incluída na otimização de atributos de ordem superior, já que ela deve ser minimizada.

Assim, a fórmula de curtose empregada nas otimizações é a descrita como Coeficiente de Curtose no livro do Kokoska e Zwillinger (139) e apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de Curtose} &= \frac{m_4}{m_2^2} & (3.19) \\ m_4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4 \\ m_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

Em que:

X_i é o valor de cada observação da carteira

\bar{X} é o valor da média da carteira

Embora a medida $\hat{\Omega}$ não seja convexa, seu denominador, *Expected Shortfall*, é convexo separadamente, o que permite a inclusão desse atributo na otimização da carteira de atributos convexos. A convexidade da medida *Expected Shortfall* e a não-convexidade da medida *Expected Chance* foram testadas através de simulações, não cabendo neste trabalho a sua demonstração matemática. Assim, a carteira de atributos convexos otimizaria a média, variância, curtose e *Expected Shortfall*, através da função objetivo apresentada a seguir.

3.3.1 Otimização da combinação não-negativa dos atributos convexos

A função objetivo da otimização dos atributos convexos é dada por um escalar que soma todos os atributos, conforme demonstrado a seguir:

Minimizar c

sendo $c =$

(3.20)

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de Curtose} &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ + \text{Expected Shortfall} &= \sum_{i=1}^S p_i d_i \\ + \text{Variância} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \\ - \text{Média} &= \bar{X} \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.21)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \forall i \in (1, 2, \dots, k = 8) \quad (3.22)$$

Da mesma forma que a otimização do CAPM, o método de otimização utilizado nesta etapa do trabalho foi a Programação Sequencial de Mínimos Quadrados (SLSQP - *Sequential Least Squares Programming*).

Importante mencionar que o experimento convexo produz, através da ponderação de pesos de cada um dos atributos, uma fronteira eficiente semelhante à Frente de Pareto. No entanto, para este trabalho considerou-se apenas um único ponto da fronteira eficiente, correspondente ao mesmo peso dentre os atributos convexos (como foram 04 atributos, correspondente a 25% para cada atributo).

3.4 EXPERIMENTO 03: OTIMIZAÇÃO MULTI OBJETIVO UTILIZANDO ALGORITMOS EVOLUTIVOS ENVOLVENDO ATRIBUTOS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS

O Experimento 03 agrega atributos que não são convexos à otimização, tornando o problema de otimização mais complexo e, por conseguinte, mais recomendado a ser resolvido através de meta-heurísticas.

A assimetria foi um dos atributos escolhidos na composição de proposições empíricas deste trabalho. Como não foi possível conciliar sua otimização no experimento 02, ela

foi incluída como um atributo a ser otimizado no experimento 03. Assim, a fórmula de assimetria empregada nas otimizações é a descrita como coeficiente de assimetria no livro do Kokoska e Zwillinger(139) e apresentada a seguir:

$$\text{Coeficiente de Assimetria} = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}} \quad (3.23)$$

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Em que:

X_i é o valor de cada observação da carteira

\bar{X} é o valor da média da carteira

A grande contribuição da abordagem multiobjetiva deste trabalho é incluir a medida de *drawdown* máximo e sugerir uma medida de antifragilidade denominada correlação condicional ao VIX (CVIX) na função multiobjetiva.

3.4.1 Definição dos atributos não-convexos: *Maximum Drawdown* e Correlação Condicional ao VIX

3.4.1.1 *Maximum Drawdown*

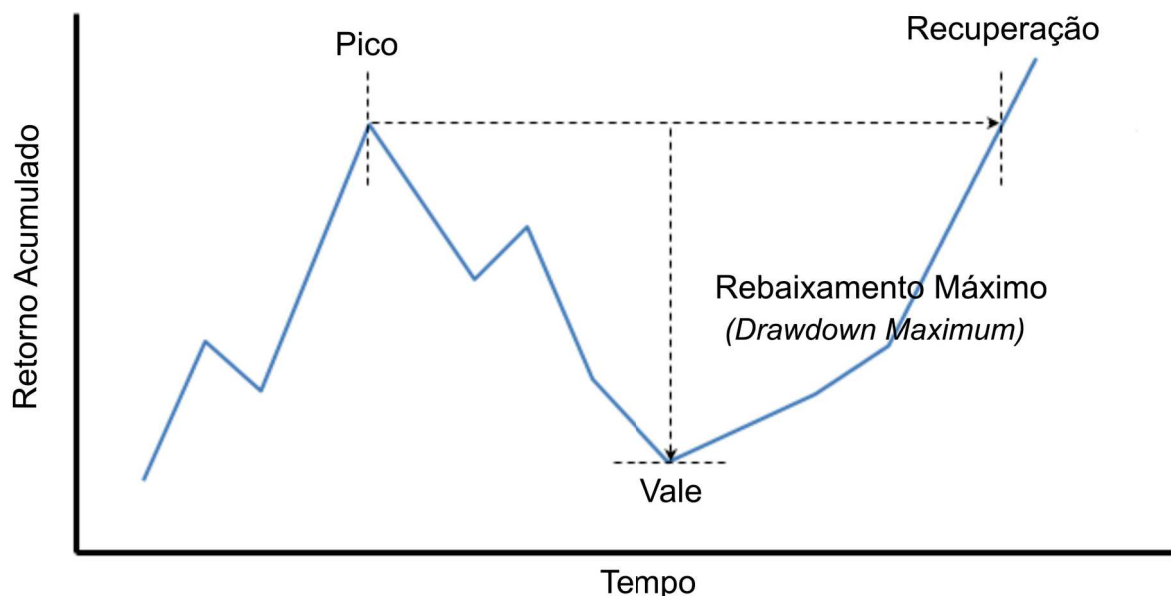
O *Maximum Drawdown* ou Rebaixamento Máximo de Saldo é um dos indicadores mais utilizados na avaliação de carteiras de investimentos por parte de analistas e investidores. Sua relação indica o valor da perda máxima de um pico a um vale de um portfolio, antes que um novo pico seja atingido. A Figura 23 representa graficamente o *Maximum Drawdown* e sua fórmula é apresentada a seguir, adaptada do trabalho de Zabaranin et al (49). Alguns autores adaptaram métricas utilizando o *drawdown* com o intuito de torná-lo convexo, como o CED (*Conditional Expected Drawdown*) (140) e o CDaR (*Conditional Drawdown-at-risk*) (141).

Sua fórmula é dada por:

$$\text{Maximum Drawdown} = \frac{(X_{max} - X_{min})}{X_{max}} \quad (3.24)$$

Como o valor sempre será positivo, o *Maximum Drawdown* deverá ser sempre minimizado.

Figura 23: Maximum Drawdown



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

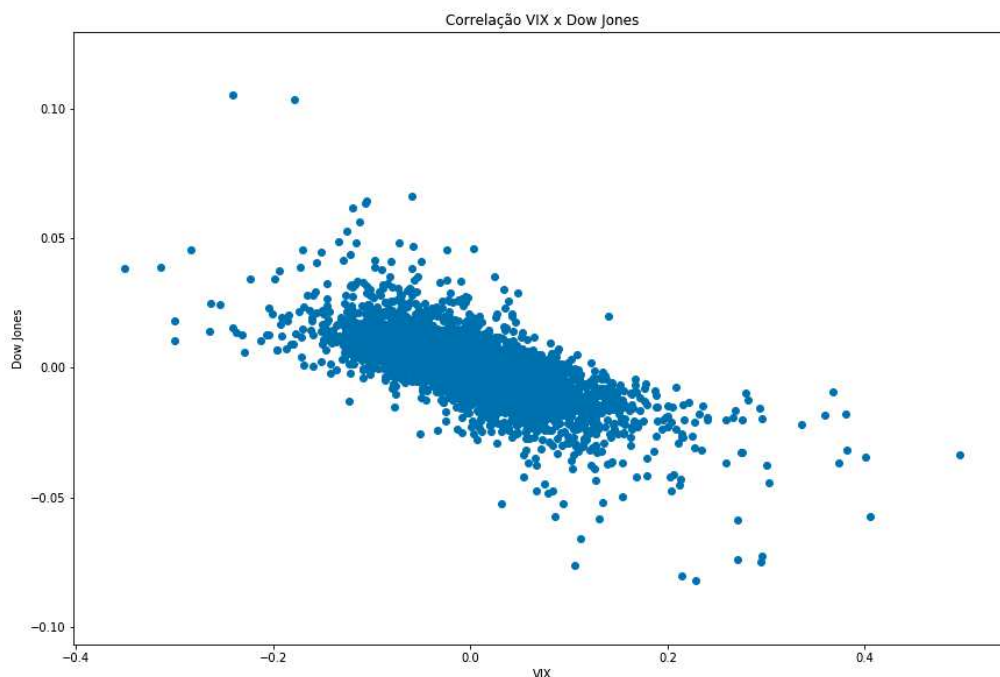
3.4.1.2 Correlação Condicional ao VIX

Além do *Maximum Drawdown*, outra característica importante de um portfólio é seu comportamento em tempos de crise ou pânico. Esta pesquisa buscou indicadores que relacionassem o comportamento de um portfólio à volatilidade do mercado. O indicador VIX (Volatility Index) é hoje um dos índices de volatilidade mais conhecidos usados no mercado. Sua metodologia de cálculo e cálculo é apresentada no site da CBOE - Chicago Board Options Exchange - www.cboe.com.

O indicador VIX originalmente foi proposto para medir a volatilidade do mercado americano, mas ao longo do tempo o cálculo foi estendido a outros mercados. Para o Brasil, o VIX é calculado sobre o ETF do índice brasileiro no mercado americano (EWZ) e pode ser encontrado no site da CBOE sob a sigla VXEWZ. O cálculo começou a ser feito em outubro de 2011 e para os dados anteriores a esta data utilizou-se o valor do VIX americano original.

Como forma de tentar incluir esse atributo na composição do portfólio, foi calculada a correlação linear entre o logaritmo da variação do VIX em relação ao Índice Dow Jones e do VIX Brasil em relação ao IBOVESPA. A Figura 24 mostra uma correlação negativa entre os Índices e o VIX. Para VIX x Dow Jones, o coeficiente de correlação foi de -0,6993 enquanto que a correlação do VIX Brasil com o IBOVESPA foi de -0,4514 (Figura 25).

Figura 24: Correlação VIX x Dow Jones



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Isso implica que, em um relacionamento linear, quanto maior a volatilidade, mais os ativos apresentam retorno negativo, conforme evidências teóricas já apresentadas neste trabalho. Assim, seria interessante procurar carteiras que caiam pouco em tempos de alta volatilidade, isto é, seria desejável que o portfólio apresente as seguintes relações com o VIX:

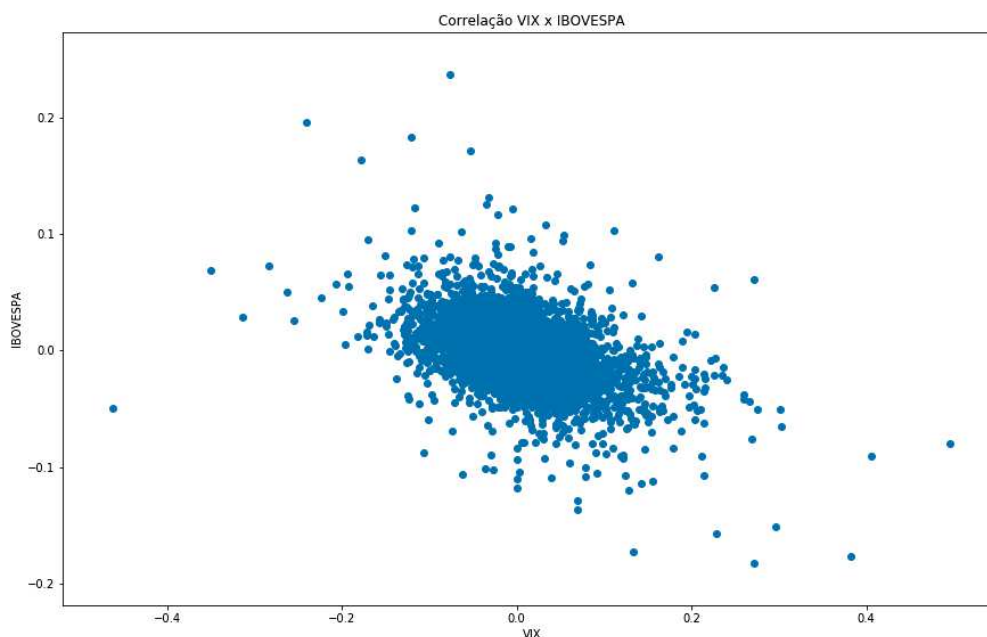
- Se a volatilidade aumentar (VIX+), os ativos deveriam cair o mínimo possível;
- Se a volatilidade diminuir (VIX-), os ativos deveriam se valorizar o máximo possível;

Desta forma, a correlação condicional ao VIX foi calculada em duas etapas: a primeira, comparando somente os valores positivos de VIX e a segunda somente com os valores negativos.

Na primeira etapa, para logs positivos de VIX(+), deseja-se que a carteira também tenha logs positivos de seu retorno, ou seja, caso o mercado passe por um pico positivo de volatilidade, é desejável que os ativos também apresentem variações positivas nos seus preços. Portanto, a primeira etapa objetiva-se uma correlação positiva.

Na segunda etapa, para logs negativos de VIX(-), deseja-se também que a carteira

Figura 25: Correlação VIX Brasil x IBOVESPA



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

tenha logs positivos, ou seja, para casos em que a volatilidade caia, é interessante que o ativo apresente uma variação positiva do seu logaritmo. Portanto, a segunda etapa objetiva-se uma correlação negativa.

Para otimização das correlações, foi criada uma variável escalar chamada de correlação condicional ao VIX e é estruturada da seguinte forma:

$$CVIX = (Coeficiente\ de\ Correlação_{Etapa2} - Coeficiente\ de\ Correlação_{Etapa1}) \quad (3.25)$$

Como notação, o coeficiente de correlação condicional foi apresentado como CVIX. Em seguida são apresentadas as formulações das funções objetivos para as 03 carteiras multiobjetivas propostas neste trabalho: Global, Antifrágil e Assimétrica.

3.4.2 Otimização Multiobjetiva Global

A função objetivo da carteira multiobjetiva Global é:

$$\text{Maximizar } \textit{Omega} = \frac{EC_x(L)}{ES_x(L)} \quad (3.26)$$

$$\text{Maximizar } \textit{Coeficiente de Assimetria} = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Minimizar } \textit{Coeficiente de Curtose} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

$$\text{Maximizar } \textit{Media} = \bar{X}$$

$$\text{Minimizar } \textit{Maximum Drawdown} = \frac{(X_{max} - X_{min})}{X_{max}}$$

$$\text{Minimizar } \textit{CVIX}$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.27)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \forall i \in (1, 2, \dots, k), k = 8. \quad (3.28)$$

Em que $EC_x(L)$ é o *Expected Chance*, $ES_x(L)$ é o *Expected Shortfall*, m_2 , m_3 e m_4 foram definidos nas Equações 3.19 e 3.23, w_i é o peso dos ativos i no portfólio, n o número de ativos da carteira e k a cardinalidade definida para a carteira.

A expectativa para essa proposição é que o algoritmo selecione carteiras com: (i) ômega elevado; (ii) coeficiente de assimetria positivo, ou seja, caudas à direita da distribuição; (iii) reduzido coeficiente de curtose, isto é, os valores mais achatados em relação ao valor modal; (iv) média elevada; (v) baixo *drawdown* máximo e (vi) baixo CVIX.

3.4.3 Otimização Multiobjetiva Antifrágil

A função objetivo da carteira multiobjetiva Antifrágil é:

$$\text{Minimizar } \textit{Maximum Drawdown} = \frac{(X_{max} - X_{min})}{X_{max}} \quad (3.29)$$

Minimizar CVIX

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.30)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \forall i \in (1, 2, \dots, k), k = 8. \quad (3.31)$$

Em que w_i é o peso dos ativos i no portfólio, n o número de ativos da carteira e k a cardinalidade definida para a carteira.

A expectativa para essa proposição é que o algoritmo selecione carteiras com valores reduzidos de *drawdown* máximo e CVIX.

3.4.4 Otimização Multiobjetiva Assimétrica

A função objetivo da carteira multiobjetiva Assimétrica é:

$$\text{Maximizar } \textit{Omega} = \frac{EC_x(L)}{ES_x(L)} \quad (3.32)$$

$$\text{Maximizar } \textit{Coeficiente de Assimetria} = \frac{m_3}{m_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Minimizar } \textit{Coeficiente de Curtose} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.33)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \forall i \in (1, 2, \dots, k), k = 8. \quad (3.34)$$

Em que $EC_x(L)$ é o *Expected Chance*, $ES_x(L)$ é o *Expected Shortfall*, m_2 , m_3 e m_4 foram definidos nas Equações 3.19 e 3.23, w_i é o peso dos ativos i no portfólio, n o número de ativos da carteira e k a cardinalidade definida para a carteira.

A expectativa para essa proposição é que o algoritmo selecione carteiras com: (i) ômega elevado; (ii) coeficiente de assimetria positivo, ou seja, caudas à direita da distribuição e (iii) reduzido coeficiente de curtose.

A Figura 26 apresentada a seguir resume os atributos otimizados por experimento, com sinal positivo (+) no caso de maximização e negativo (-) no caso de minimização.

Figura 26: Tabelas de Atributos otimizados por Experimento

	Índice de Sharpe	Índice Omega	Média	Variância	Curtose	Assimetria	Expected Shortfall	Drawdown Máximo	CVIX
(i) Otimização Sharpe	+								
(ii) Otimização Ômega		+							
(iii) Otimização de Atributos Convexos			+	-	-		-		
(iv) Otimização Multiobjetiva Global		+	+		-	+		-	-
(v) Otimização Multiobjetiva Antifrágil								-	-
(vi) Otimização Multiobjetiva Assimétrica		+			-	+			

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

3.4.5 Algoritmos e parâmetros escolhidos

Para a otimização multiobjetivo, foram escolhidos 04 algoritmos evolutivos: NSGAI, NSGAIII, IBEA e GDE3. O critério de escolha dos algoritmos foi o de abranger algoritmos que a literatura sugerisse melhor desempenho em problemas com mais de 02 objetivos (NSGAIII e GDE3), um algoritmo que fosse teoricamente mais eficiente em domínios contínuos (GDE3), além de incluir um algoritmo baseado em indicador (IBEA). Assim, a otimização foi realizada de acordo com cada algoritmo evolutivo e realizada para cada janela temporal e mercado separadamente.

Os parâmetros da otimização multiobjetivo são apresentados na Tabela 4 e estão de acordo com os valores mais praticados pelos pesquisadores da área, conforme já apresentado no Referencial Teórico. Para os algoritmos NSGAI e NSGAIII, o método de mutação utilizado foi o BitFlip¹ e o de cruzamento (*crossover*) foi o SBX (*Simulated Binary*

¹ *Bitflip* corresponde a simplesmente trocar o bit de um cromossomo por outro. Portanto, o gene selecionado com probabilidade P_m de mutação, tem seu alelo alterado de 0 para 1 e vice-versa.

Crossover)². O procedimento de seleção empregado foi o de seleção por torneio³. O pacote utilizado para a otimização multiobjetivo foi o Platypus, do Python e para as demais operações e cálculos foram utilizados os pacotes Numpy, Pandas, Scipy, StatsModels, todos em Python.

O tempo de processamento médio de um algoritmo foi de cerca de 20 horas para cada 30 execuções completas por mercado. O computador usado para esse desempenho foi um Intel Core i7-8565U, CPU 1.80Ghz, com 8 GB de RAM.

Tabela 4: Parâmetros da Otimização

	NSGAI	NSGAIII	IBEA	GDE3
População Inicial	100			
Número de execuções	30			
Número de avaliações	20000			
Critério de parada	Número máximo de avaliações			
Probabilidade de <i>crossover</i> (P_c ou Cr)	$P_c=0.9$	$P_c=0.9$	$P_c=0.9$	$Cr = 0.8$
Probabilidade de mutação (P_m ou F)	$P_m=0.1$	$P_m=0.1$	$P_m=0.1$	$F =0.5$

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Ao final da otimização multiobjetivo, calculou-se o hypervolume de cada uma das 30 execuções. Assim, para cada mercado e janela temporal, obteve-se 120 valores de hypervolume, distribuídos em 30 valores para cada um dos quatro diferentes algoritmos. Optou-se por trabalhar o hypervolume como medida de desempenho dos algoritmos neste trabalho em virtude de sua ampla utilização em pesquisas envolvendo seleção de carteiras, conforme já demonstrado no Referencial Teórico.

Para selecionar o melhor algoritmo baseado no hypervolume, alguns testes estatísticos foram aplicados e serão detalhados a seguir.

3.4.6 Testes Estatísticos

A Figura 27 apresenta o fluxograma dos testes estatísticos aplicados na avaliação dos hypervolumes dos algoritmos. Inicialmente, aplica-se o teste de Levene para verificar se os hypervolumes apresentam a mesma variância. Em caso positivo, testa-se o pressuposto de normalidade da distribuição através do Teste de Shapiro Wilk. Caso a distribuição seja normal, o Teste ANOVA é empregado para verificar se há diferença entre as médias dos

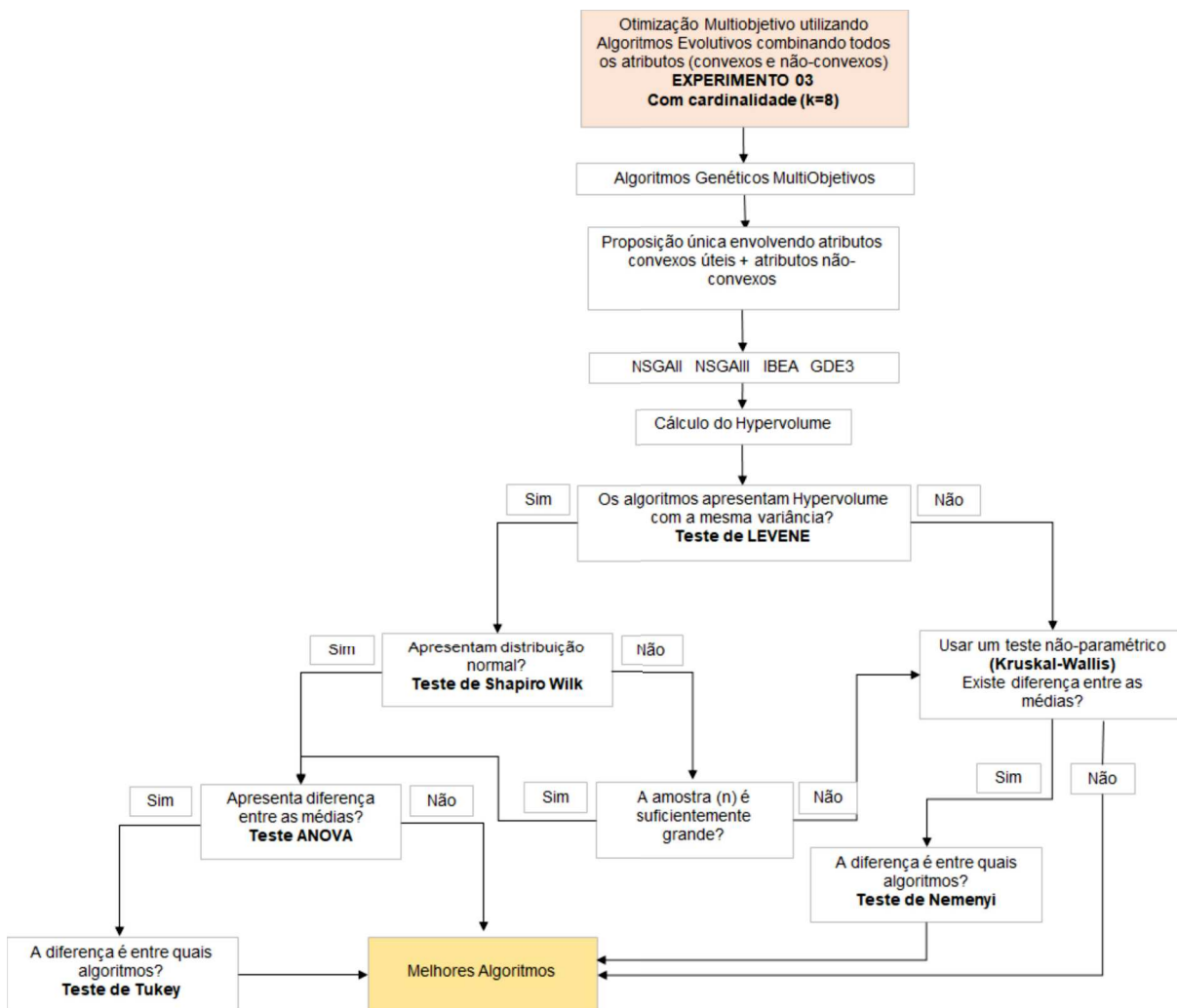
² O SBX é bastante conveniente para AGs com variáveis reais, em razão da sua capacidade de simular os operadores de cruzamento binário e evitar a recodificação das variáveis. Maiores detalhes no trabalho de Deb *et al* (142).

³ Na seleção por torneio, sorteiam-se dois indivíduos ao acaso, comparam-se suas aptidões e o mais apto é selecionado. Este procedimento é repetido para cada indivíduo a ser selecionado. Não é necessário calcular a probabilidade de seleção, o que torna o procedimento muito mais simples e rápido.

hypervolumes. Em caso positivo, o Teste de Tukey vai definir o melhor algoritmo baseado no melhor hypervolume.

No caso dos hypervolumes não apresentarem a mesma variância, utiliza-se o teste não-paramétrico de Kruskal-Wallis para verificar se existe diferença entre as médias. Para saber quais algoritmos diferem entre si, o teste não-paramétrico de Nemenyi foi aplicado para verificar o melhor algoritmo.

Figura 27: Fluxograma dos Testes Estatísticos aplicados na seleção dos melhores algoritmos



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Os testes estatísticos visam diferenciar o melhor algoritmo dentro da amostra. No entanto, optou-se por não descartar a apresentação dos resultados fora da amostra de todos os algoritmos, mesmo que ele não tenha tido a maior média do hypervolume entre todos. Isto porque o melhor algoritmo dentro da amostra não necessariamente será o melhor algoritmo fora da amostra. Desta forma, será indicado o melhor algoritmo (com maior hypervolume) entre os demais, mas serão apresentados os resultados fora da amostra da melhor execução de todos os algoritmos.

4 RESULTADOS

4.1 EXPERIMENTO 01 - MONO-OBJETIVO: MODELO CAPM x OCAPM

4.1.1 Betas dos Modelos CAPM e OCAPM

O cálculo dos betas dos modelos CAPM e OCAPM é necessário para a projeção dos valores fora da amostra. Eles foram feitos de acordo com o apresentado nas Seções 2.1.2 e 2.1.3, respectivamente e as Figuras 68,69 e 70 com os resultados dos betas, estão disponíveis nos Anexos 01 (Dow Jones), 02 (IBOVESPA) e 03 (Small Caps).

4.1.2 Desempenho dentro da amostra

As Figuras 28,29 e 30 apresentam as carteiras otimizadas pelo modelo CAPM e OCAPM período a período.

4.1.2.1 Composição das carteiras otimizadas

Em relação ao mercado americano (DWJ), a Figura 28 apresenta a composição das carteiras otimizadas para cada período (1994 a 2019), bem como um valor total médio escolhido por empresa. Nota-se que as empresas escolhidas pelos modelos CAPM e OCAPM são, em sua maioria, diferentes para um mesmo período. No modelo CAPM, as empresas mais escolhidas foram a United Health(15%), IBM(14%), United Tech (9%) Chevron e 3M (7% cada), enquanto que no modelo OCAPM, as escolhas mais frequentes foram United Health(16%), Apple(11%), Mc Donalds e Visa (9% cada).

Outra característica é a presença da rotatividade das empresas escolhidas, tendo em vista que nenhuma empresa foi selecionada com participação relevante por mais de um período consecutivo. No que diz respeito à cardinalidade das carteiras americanas, percebe-se que em sua maioria a carteira teve entre 04 e 05 ativos, inferior à restrição máxima de 08 ativos.

Em relação aos setores selecionados, a Tabela 5 mostra uma similaridade de escolhas entre os modelos, com destaque para o setor de tecnologia, serviços de saúde e varejo, todos respondendo juntos por mais de 50% das escolhas dos modelos CAPM e OCAPM.

No mercado brasileiro (IBOVESPA), a Figura 29 mostra que, em algumas janelas temporais, as carteiras ótimas do CAPM e OCAPM foram rigorosamente iguais (1994-1995 e 2014-2015), motivadas pelo excelente desempenho dentro da amostra das empresas (VALE3 e RADL3). As principais empresas escolhidas pelo CAPM foram: Raia Drogasil (RADL3 – 20%), Vale (VALE3 - 15%), Bradesco Participações (BRAP4 - 10%), Gerdau (GGBR4 - 8%) e Sabesp (SBSP3 - 8%). Já o modelo OCAPM selecionou como principais empresas: AMBEV (ABEV3 - 15%), Raia Drogasil (RADL3 - 13%), Vale (VALE3 - 10%), Lojas Americanas (LAME4 - 9%) e Natura (NATU3 - 7%).

Figura 28: Composição das Carteiras Otimizadas - Dow Jones

DOW JONES	1994-1995		1996-1997		1998-1999		2000-2001		2002-2003		2004-2005		2006-2007		2008-2009		2010-2011		2012-2013		2014-2015		2016-2017		2018-2019		TOTAL	
	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM
Apple	-	-	-	-	-	0,23	-	-	-	-	0,56	-	0,10	-	-	-	0,20	-	0,01	-	-	-	0,03	-	0,23	-	0,11	
Amer Exp	0,16	-	-	0,12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,01	
Boeing	-	0,11	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06	-	-	-	-	0,00	-	0,15	0,08	0,00	-	-	0,10	0,00	-	0,01	0,03	
Caterpillar	-	-	-	-	-	-	-	-	0,30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	-	-	-	-	0,03	
Cisco	-	-	-	-	-	0,35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03
Chevron	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,62	0,08	-	-	-	0,00	-	-	-	-	0,28	-	-	-	0,07	0,01	
Dupont	-	-	-	0,09	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	0,01	
Disney	-	-	0,11	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,16	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,01
GE	-	-	0,47	0,04	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,04	0,00	
Goldman Sachs	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06	-	0,17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	-
Home Depot	-	-	-	-	-	0,12	0,00	-	0,00	-	-	-	0,00	-	-	-	0,42	-	-	0,27	-	0,43	-	0,01	-	0,03	0,06	
IBM	-	-	0,18	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,00	0,01	0,58	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,14	0,00	
Intel	0,12	-	0,16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	0,02	0,00
Johnson	-	0,12	-	-	-	-	-	0,00	-	0,13	-	-	-	0,00	-	-	-	-	0,12	-	-	-	0,11	-	-	0,01	0,03	
JP Morgan	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	0,53	-	-	-	0,04	-	
Coca Cola	-	0,15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	0,04	
MC Donalds	-	0,08	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	0,19	-	-	-	0,77	-	-	-	-	-	0,15	-	-	0,00	0,09	
3M	-	-	-	-	-	0,36	-	-	0,21	-	-	-	-	0,00	-	-	-	0,50	0,16	-	-	-	0,13	-	-	0,07	0,04	
Merck	-	0,22	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	0,24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,55	0,28	0,04	0,06	
Microsoft	-	-	-	0,32	0,50	0,05	-	0,00	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,16	-	-	0,05	0,04	0,05	
Nike	0,21	0,15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,04	-	-	-	-	-	0,03	-	0,26	-	-	-	0,04	0,02	0,04	
Pfizer	0,41	0,17	-	0,20	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,03	
Procter & Gamble	-	-	-	0,08	-	-	-	-	-	0,10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,45	0,41	0,03	0,04
Travelers	-	-	-	0,12	0,00	-	0,64	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	0,01
United Health	0,05	-	-	-	-	-	-	-	1,00	-	0,40	0,81	0,38	-	0,00	-	-	0,03	0,05	-	1,00	0,14	-	0,19	-	0,15	0,16	
United Tech	-	-	-	-	-	-	-	-	1,00	-	0,00	-	0,20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,09	-
Visa	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,99	-	-	0,30	0,16	-	-	-	-	-	-	0,02	0,09
Verizon	0,06	-	0,09	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,19	-	-	-	0,03	-
Walmart	-	-	-	-	0,49	0,22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	0,00	-	-	-	0,14	-	-	0,04	0,03
Exxon	-	-	-	-	-	0,03	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 5: Composição das carteiras por setor (Dow Jones)

CAPM		OCAPM	
Tecnologia	28,78%	Tecnologia	18,06%
Serviços de Saúde	14,66%	Serviços de Saúde	16,40%
Serviços Financeiros	14,34%	Varejo	13,80%
Varejo	10,50%	Alimentos	13,01%
Indústria Farmacêutica	8,37%	Indústria Farmacêutica	11,23%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Tabela 6 mostra que o CAPM privilegiou ativos do setor financeiro, enquanto que o OCAPM selecionou ativos de empresas varejistas. Os setores de mineração e petróleo foram comuns aos dois modelos.

O mercado de Small Caps é composto de empresas menores com estruturas de capital inferiores às grandes companhias e que estão sujeitas à maior variabilidade de desempenho, seja positivo ou negativo. Além disso, o número de empresas deste mercado é o maior entre os três estudados, com 62 empresas disponíveis para alocação.

A Figura 30 apresenta na carteira CAPM uma maior presença dos ativos SAPR4

Figura 29: Composição das Carteiras Otimizadas - IBOVESPA

IBOVESPA	1994-1995		1996-1997		1998-1999		2000-2001		2002-2003		2004-2005		2006-2007		2008-2009		2010-2011		2012-2013		2014-2015		2016-2017		2018-2019		TOTAL		
	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	
ABEV3	-	-	-	-	-	-	-	0,99	-	-	-	0,25	-	-	-	-	-	0,67	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	
BBD3	-	-	0,13	0,03	0,00	-	0,05	-	-	-	-	0,13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	0,01	
BBD4	0,00	-	-	-	-	-	0,95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	-	
BRAP4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,00	0,09	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,36	0,26	-	-	-	0,10	0,03	
BRKM3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,22	0,01	-	-	0,25	-	-	-	0,02	0,02	
CCRO3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,20	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	0,02	-	
CESP6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,16	-	0,01	
CIEL3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,78	0,16	-	-	-	-	-	-	0,06	0,01	
CMIG4	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,00	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	
CPFE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	-	-	-	-	-	-	0,15	-	0,02	
CPLE6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,19	0,00	0,01	
CSNA3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	0,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	
CTIP3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,22	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02	
EGIE3	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,21	-	0,02	
EMBR3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-	
ENBR3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,00	-	
YDUQ3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,76	-	-	-	0,01	-	-	-	-	0,06	
FIBR3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	
GGBR4	-	-	-	0,39	-	0,09	-	-	1,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	0,08	0,04	
GOAU4	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	0,01	
HYPE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	
ITSA4	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	
ITUB4	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	
JBSS3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,41	0,09	0,03	0,01
KLBN11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	0,00	-	
LAME4	-	-	-	-	-	0,60	-	-	0,60	0,35	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,09	
MRF3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	
MRVE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,07	-	0,01	-	
MULT3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-	-	-	-	-	-	0,00	-	
NATU3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,65	0,42	-	-	-	0,47	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	0,05	0,07	
PCAR4	-	-	0,14	0,07	-	0,24	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-	-	-	-	-	0,01	0,02	
PETR3	0,00	-	0,73	0,49	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06	0,05	
PETRA	-	-	0,00	0,03	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	0,00	
QUAL3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,08	-	-	-	-	0,01	
RADL3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,00	0,38	-	-	-	-	-	1,00	1,00	0,64	0,36	-	0,20	0,13	
RENT3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03	0,22	-	0,02	0,00	-	
RAIL3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,30	-	-	0,02	-	
SBSP3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,08	0,00	
SMLS3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
SUZB3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,44	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	0,13	0,00	0,04	
TIMP3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,00	-	
USIM5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	-	0,00	0,00	
VALE3	1,00	1,00	-	-	1,00	0,07	-	-	0,26	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	0,10	
VALE5	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-
VIVT4	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	
WEGE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,08	-	0,01

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

(Companhia de Saneamento do Paraná - 21%), SLCE3 (SLC Agrícola - 20%), ALUP11 (Alupar - 20%), enquanto que o modelo OCAPM privilegiou, além da SAPR4 (18%), a empresa de tecnologia LINX3 (16%) e a empresa de diagnóstico médico FLRY3 (14%).

Em relação aos setores, a Tabela 7 mostra que ambos os modelos escolheram prioritariamente empresas de saneamento, seguidos pelos setores agropecuário e energia elétrica para o CAPM e tecnologia e material hospitalar para o OCAPM. O setor varejista foi o quarto mais escolhido por ambos os modelos.

Tabela 6: Composição das carteiras por setor (IBOVESPA)

CAPM		OCAPM	
Serviços Financeiros	25,22%	Varejo	11,59%
Mineração	15,38%	Mineração	10,28%
Saneamento	7,69%	Petróleo	7,62%
Petróleo	7,27%	Serviços Financeiros	6,78%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 30: Composição das Carteiras Otimizadas - Small Caps

SMALL CAPS	2009-2010		2011-2012		2013-2014		2015-2016		2017-2018		TOTAL	
	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM
ALPA4	0,58	0,31	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	0,06
ALUP11	-	-	-	-	1,00	-	-	-	-	-	0,20	-
BTOW3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,67	0,03	0,13	0,01
CESP6	-	-	-	-	-	0,04	-	-	-	-	-	0,01
CGAS5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00
CPL6	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-
DIRR3	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	0,00	-
DTEX3	-	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
ECOR3	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	0,00	-
ELPL4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ESTC3	0,00	-	-	-	-	0,18	-	-	-	-	0,00	0,04
EVEN3	-	-	0,00	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-
EZTC3	-	0,04	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
FESA4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,14	-	0,03
FLRY3	-	-	-	-	-	-	-	0,72	-	-	-	0,14
GOAU4	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-
GOLL4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-	0,00
HBOR3	-	0,33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07
HGTX3	-	0,14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,03
JHSF3	-	-	-	0,10	-	-	-	-	-	-	-	0,02
LEVE3	-	-	-	0,11	-	-	-	-	-	-	-	0,02
LIGT3	-	-	-	-	0,00	-	-	-	-	-	0,00	-
LINX3	-	-	-	-	-	0,78	-	-	-	-	-	0,16
MEAL3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-
MGLU3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,39	-	0,08
MPLU3	-	-	0,07	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-
MYPK3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,33	-	0,07	-
ODPV3	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
POMO4	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	0,00	-
RLOG3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	-	0,01
RSID3	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	-	0,00	-
SAPR4	0,11	0,04	0,93	0,60	-	-	-	0,28	-	-	0,21	0,18
SLCE3	-	-	-	-	-	-	1,00	-	-	0,36	0,20	0,07
SULA11	0,25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05	-
TCSA3	0,07	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01	-
TUPY3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VLID3	-	0,05	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
VVAR3	-	-	-	0,19	-	-	-	-	-	-	-	0,04

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.1.2.2 Teste GRS Multivariado

O teste GRS foi proposto por Gibbons *et al* (143) e pode ser usado para medir a eficiência das carteiras otimizadas pelo modelo CAPM e OCAPM. Corresponde a um teste estatístico F usado para medir se a hipótese de que todos os alfas (desvios de um conjunto de regressões de séries temporais) são iguais a zero. Utilizando a adaptação

Tabela 7: Composição das carteiras por setor (Small Caps)

CAPM		OCAPM	
Saneamento	20,80%	Saneamento	18,22%
Agropecuária	20,00%	Tecnologia	15,59%
Energia Elétrica	20,00%	Material Hospitalar	15,55%
Varejo	13,44%	Varejo	12,20%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

proposta por Castro *et al* (144) para aplicação do teste GRS multivariado nos modelos CAPM e OCAPM, o cálculo da estatística ficaria da seguinte forma:

$$\frac{T - N - 1}{N} \frac{1}{1 + \theta^2} \alpha_t \epsilon^{-1} \alpha \sim F(N, T - N - 1) \quad (4.1)$$

Em que:

T = Número de observações

N = Número de ativos

θ = Índice Sharpe da carteira ótima

α = Vetor dos resíduos das projeções

α_t = Vetor transposto dos resíduos das projeções

ϵ^{-1} = Matriz inversa de covariância dos resíduos

Pela fórmula, pode-se deduzir que o GRS Multivariado será menor quanto maior for o Índice Sharpe encontrado na otimização e/ou quanto menores os alfas gerados por cada modelo.

As Tabelas 8, 9, 10 apresentam o cálculo do GRS Multivariado para as Carteiras CAPM e OCAPM em cada mercado, utilizando para cada otimização os Betas CAPM e OCAPM, respectivamente.

Os resultados indicam valores de GRS menores para o Beta OCAPM (exceto no mercado Dow Jones em 2002-2003 e no de Small Caps nos anos de 2011-2012 e 2015-2016), o que significa dizer que o modelo que utilizou o Beta OCAPM apresentou erros menores em relação ao Beta CAPM para praticamente todos os mercados e janelas temporais.

Como o GRS é um teste realizado dentro da amostra, ele indica que as previsões do modelo Ômega são mais assertivas que o modelo CAPM dentro da amostra. Para validar estatisticamente essa superioridade, foi realizado um Teste T de diferença de médias baseado nos alfas (resíduos) gerados por cada modelo.

Tabela 8: GRS Multivariado - Dow Jones

	1994-1995	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007
CAPM	0,9708	0,5580	0,7793	0,4160	0,4116	1,0102	0,9199
OCAPM	0,1672	0,3302	0,4725	0,3253	0,4970	0,6733	0,5934
	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	
CAPM	0,2800	0,7613	0,8782	0,9463	1,3400	0,8292	
OCAPM	0,2696	0,5754	0,4921	0,8729	0,7452	0,7347	

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 9: GRS Multivariado - IBOVESPA

	1994-1995	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007
CAPM	0,7733	1,5412	0,6045	0,4306	1,1344	0,7144	0,6240
OCAPM	0,7297	1,4340	0,5981	0,3752	0,8203	0,4692	0,5664
	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	
CAPM	0,3587	0,6568	0,6753	1,2540	0,7010	0,6675	
OCAPM	0,3100	0,6363	0,5592	1,2525	0,5186	0,4495	

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 10: GRS Multivariado - Small Caps

	2009-2010	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018
CAPM	1,4118	0,8417	0,8191	0,4438	0,9562
OCAPM	0,6361	0,8571	0,8185	0,4655	0,7010

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.1.2.3 Teste T para diferença das médias dos resíduos (alfas)

A hipótese do teste é que a diferença entre os modelos CAPM e OCAPM seja igual a zero, ou seja, os modelos se equivalem estatisticamente. A demonstração da hipótese inicial (H_0) é apresentada a seguir:

$$H_0 = \mu_{\text{modeloCAPM}} - \mu_{\text{modeloOCAPM}} = 0 \quad (4.2)$$

A carteira *Naive* não foi considerada na análise dos alfas porque seu objetivo é simplesmente estabelecer um *benchmarking* do mercado, não cabendo a esta carteira nenhum esforço de otimização, o que perde o sentido verificar sua acurácia em relação à projeção dos valores.

As Tabelas 11,12,13 apresentam os resultados do Teste T e confirmam a diferença significativa na maioria das janelas temporais e mercados. Os valores sublinhados dos p-valores indicam a rejeição da hipótese nula de que a diferença entre as médias dos modelos seja igual a zero (0).

Tabela 11: Teste T dos Alfas - Dow Jones

	1994-1995	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007
T (p-valor)	2,77 (<u>0,01</u>)	1,15 (0,25)	1,37 (0,18)	1,8 (0,08)	2,33 (<u>0,02</u>)	3,19 (<u>0,00</u>)	3,13 (<u>0,00</u>)
	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	
T (p-valor)	0,85 (0,4)	2,35 (<u>0,02</u>)	1,38 (0,17)	2,73 (<u>0,01</u>)	4 (<u>0,00</u>)	1,46 (0,15)	

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 12: Teste T dos Alfas - IBOVESPA

	1994-1995	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007
T (p-valor)	0,05 (0,96)	0,09 (0,93)	2,03 (<u>0,05</u>)	4,16 (<u>0,00</u>)	3,37 (<u>0,00</u>)	4,74 (<u>0,00</u>)	2,5 (<u>0,02</u>)
	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	
T (p-valor)	2,97 (<u>0,00</u>)	2,28 (<u>0,02</u>)	2,95 (<u>0,00</u>)	-0,01 (0,99)	-0,43 (0,67)	4,00 (<u>0,00</u>)	

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 13: Teste T dos Alfas - Small Caps

	2009-2010	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018
T (p-valor)	4,17 (<u>0,00</u>)	2,12 (<u>0,04</u>)	2,84 (<u>0,01</u>)	5,04 (<u>0,00</u>)	3,95 (<u>0,00</u>)

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.1.3 Desempenho fora da amostra

Após analisado o desempenho dentro da amostra de cada modelo, o próximo passo do trabalho foi avaliar o resultado dos modelos para valores projetados fora da amostra. Três métricas foram usadas para avaliação da performance do modelo fora da amostra: a rentabilidade bruta da carteira no período, o erro médio de projeção e, por fim, um teste T para diferença dos erros entre os métodos.

4.1.3.1 Rentabilidade Bruta

A fim de se comparar o desempenho das carteiras ótimas dos modelos CAPM e Ômega, foi calculada a rentabilidade bruta no período fora da amostra.

A Tabela 14 apresenta o desempenho fora da amostra do mercado americano (DWJ). A carteira Sharpe do modelo CAPM obteve resultados superiores nas janelas de 1996 a 1997, 2010 a 2011, 2016 a 2017 e 2018 a 2019. A carteira Naive apresentou melhor desempenho nas janelas de 2000 a 2001 e 2012 a 2013. Em todas as demais janelas, o modelo OCAPM apresentou a maior rentabilidade.

Tabela 14: Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Dow Jones

	1996 a 1997	1998 a 1999	2000 a 2001	2002 a 2003	2004 a 2005	2006 a 2007	2008 a 2009	2010 a 2011	2012 a 2013	2014 a 2015	2016 a 2017	2018 a 2019	2020
CAPM	63,8%	64,7%	-37,1%	12,0%	19,8%	0,1%	-12,6%	37,6%	33,3%	20,4%	66,0%	16,8%	-9,1%
OCAPM	53,0%	65,6%	-67,2%	49,8%	41,9%	56,1%	-6,9%	16,6%	10,9%	31,2%	35,4%	7,5%	-5,2%
Naive	53,9%	51,7%	-12,6%	7,2%	17,1%	29,5%	-11,9%	21,2%	41,4%	12,8%	33,5%	13,3%	-18,9%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Figura 31 apresenta o gráfico da evolução do retorno acumulado de cada carteira no mercado americano de 1996 a 2020. A carteira Ômega apresentou-se superior cumulativamente desde 2004 até 2020, alcançando um total de 289% de rentabilidade, contra 276% da carteira Sharpe (CAPM). O portfólio Naive apresentou uma rentabilidade acumulada de 238% no período.

A carteira OCAPM, embora vencedora, apresentou uma forte queda nos anos de 2000 a 2001, período este caracterizado pela crise envolvendo empresas de tecnologia nos EUA (Bolha das ponto com) e no período dentro da amostra (1998 a 1999) o modelo Ômega concentrou suas escolhas em empresas de tecnologia Cisco (35%), Apple (23%) e Microsoft (5%), o que justificou a queda do desempenho nos anos seguintes.

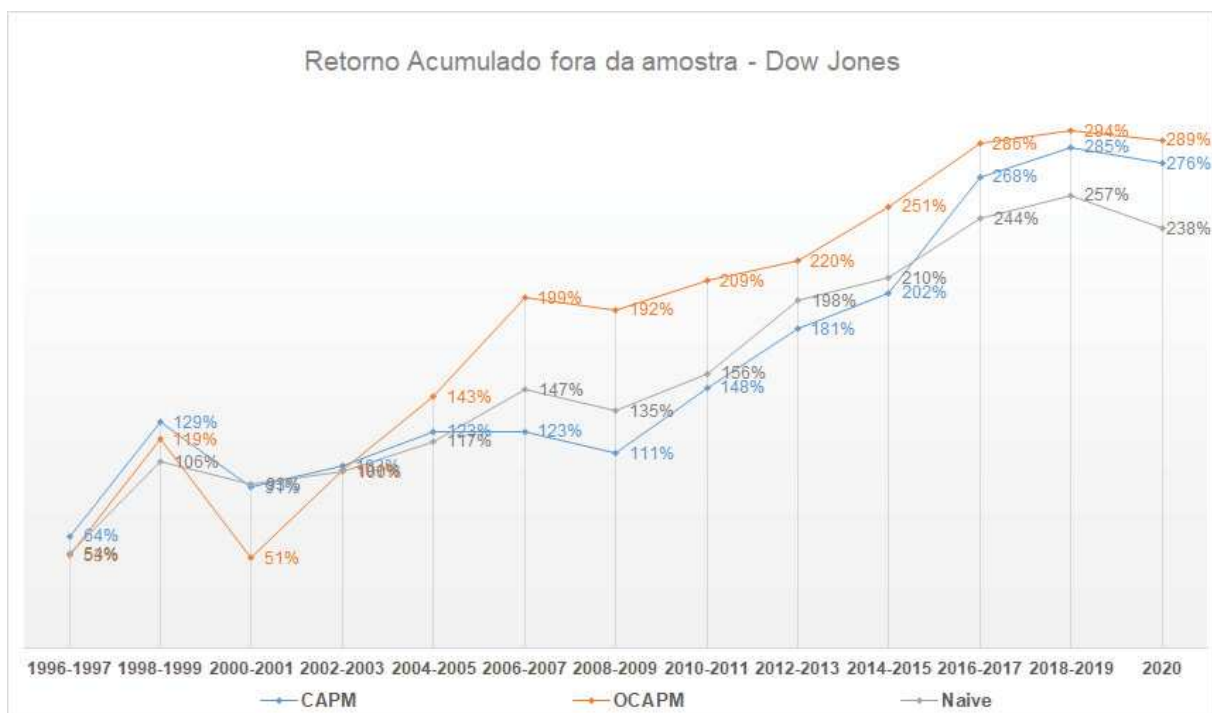
Importante destacar o desempenho da carteira OCAPM no período de 2002 a 2009, com rentabilidade superior às demais carteiras e com uma boa recuperação no período relativo à crise de 2008.

No ano de 2020, os impactos da COVID foram menos comprometedores na carteira Ômega, que perdeu apenas 5,2% de janeiro a abril, contra 9,1% do modelo CAPM e 18,9% da carteira Naive.

Já no mercado brasileiro, nas empresas do IBOVESPA (IBOV), conforme demonstrado na Tabela 15, a Carteira OCAPM apresentou o melhor desempenho fora da amostra nos períodos de 1998 a 1999, 2004 a 2005 e 2020. A carteira Naive apresentou o melhor desempenho nos períodos de 1996 a 1997, 2002 a 2003, 2006 a 2009 e 2018 a 2019. Em todas as outras janelas, a carteira CAPM apresentou rentabilidade superior, com exceção da janela de 2016 a 2017 onde a escolha da carteira foi idêntica à carteira ômega, ambas com 113,5% de rentabilidade para esses anos.

No desempenho acumulado do período, a Figura 32 mostra que a carteira CAPM apresentou o melhor desempenho alcançando 367% de rentabilidade, seguido pela carteira

Figura 31: Rentabilidade Acumulada fora da amostra OCAPM x CAPM - Dow Jones



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Naive com 295% e da carteira Ômega com 267%.

Interessante notar o bom desempenho da carteira Naive no início da série temporal, permanecendo como a melhor carteira acumulada desde os anos 2002 até 2013. No período da crise de 2000 das empresas americanas de tecnologia, somente a carteira CAPM apresentou desempenho positivo (24,3%) em virtude de se ter escolhido dentro da amostra somente a mineradora Vale (VALE3) em sua composição. Cumpre destacar também o excelente desempenho do modelo CAPM frente aos demais no período de 2010 a 2017, obtendo inclusive a menor perda percentual de rentabilidade durante a crise financeira brasileira (2014 a 2015).

Assim como no mercado americano, no IBOVESPA, a carteira menos impactada pelo COVID-19 em 2020 foi a carteira Ômega, com perda de 12,4% até o mês de abril, contra 20,2% do CAPM e 34,5% da carteira Naive.

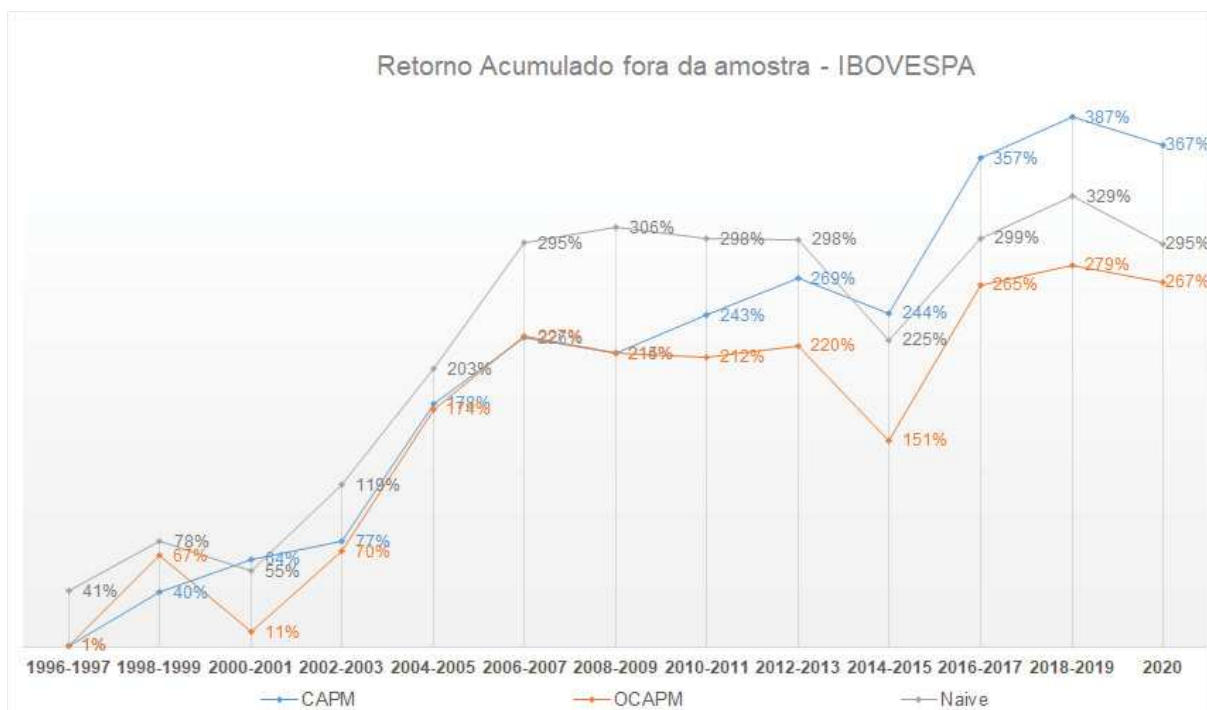
Nas empresas que compõem o Índice Small Caps (SMALL), pode-se verificar na Tabela 16 que a Carteira OCAPM prevaleceu nos períodos de 2011 a 2012 e no período de 2019 a 2020. Em todas as outras janelas temporais, a carteira CAPM obteve rentabilidade superior. O mercado de Small Caps é composto por empresas que ingressaram no mercado recentemente e, por serem de menor porte, foram bastante afetadas pelo período de crise

Tabela 15: Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - IBOVESPA

	1996 a 1997	1998 a 1999	2000 a 2001	2002 a 2003	2004 a 2005	2006 a 2007	2008 a 2009	2010 a 2011	2012 a 2013	2014 a 2015	2016 a 2017	2018 a 2019	2020
CAPM	1,49%	38,5%	24,3%	12,7%	100,6%	48,0%	-11,3%	28,1%	26,4%	-25,2%	113,5%	29,6%	-20,2%
OCAPM	1,49%	65,2%	-55,5%	58,9%	103,8%	52,9%	-12,4%	-2,4%	8,2%	-69,2%	113,5%	14,5%	-12,4%
Naive	41,3%	36,2%	-22,2%	63,5%	84,2%	91,8%	11,2%	-8,2%	-0,3%	-73,0%	74,0%	30,7%	-34,5%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 32: Rentabilidade Acumulada fora da amostra OCAPM x CAPM - IBOVESPA



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

que o Brasil atravessou entre os anos 2014 a 2016, o que levou todas as carteiras do período a apresentarem rentabilidade negativa. A carteira Naive não conseguiu melhor desempenho em nenhuma das janelas temporais.

Em relação ao período de 2019 a 2020, a carteira Ômega apresentou o melhor desempenho (40,74%), favorecido pela escolha da empresa agrícola SLCE3, que representou 36% da carteira. Isso contribuiu para que a carteira Ômega fosse também a menos impactada pelo COVID-19 no ano de 2020, já que a empresa SLCE3 foi uma das poucas empresas brasileiras que não apresentaram rentabilidade negativa no ano de 2020.

Em relação ao desempenho acumulado, a Figura 33 mostra a carteira CAPM como a mais rentável, com 107% de rentabilidade em todo o período, seguida pela carteira Ômega com 7% enquanto que a carteira Naive apresentou uma rentabilidade negativa de

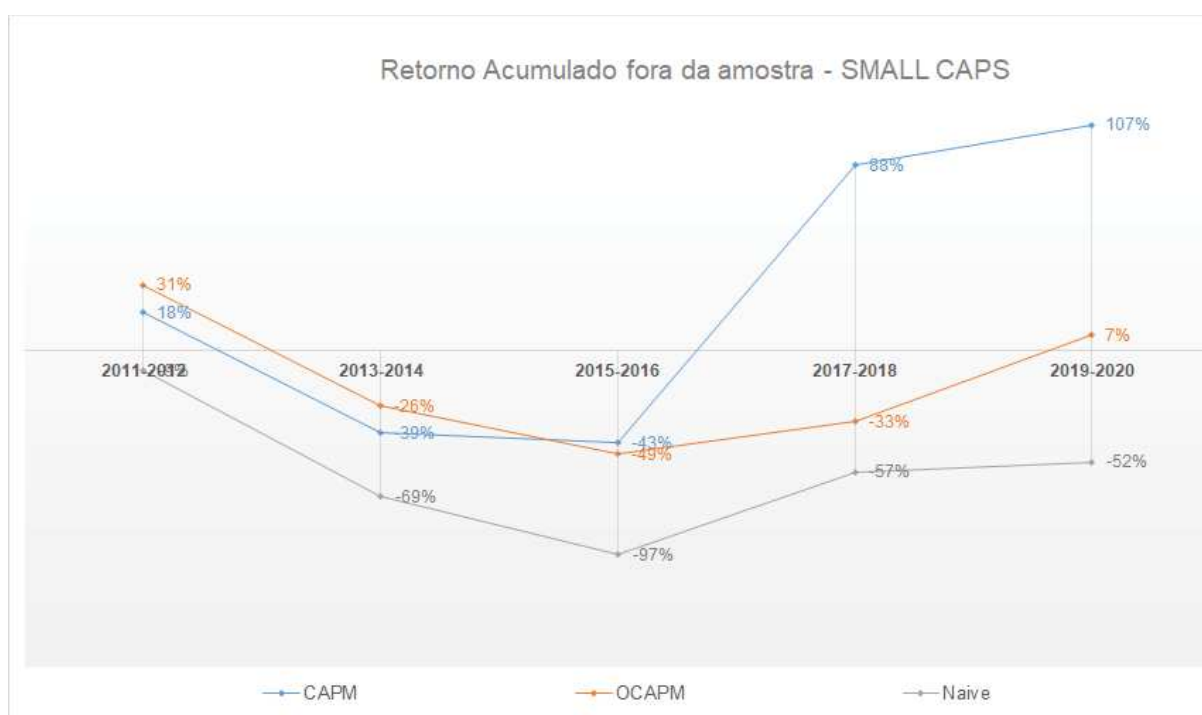
Tabela 16: Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Small Caps

	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018	2019-2020
CAPM	18,42%	-57,09%	-4,77%	131,51%	19,24%
OCAPM	31,39%	-57,41%	-22,62%	15,35%	40,74%
Naive	-9,02%	-60,12%	-27,54%	39,35%	4,88%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

52%.

Figura 33: Rentabilidade Acumulada fora da amostra OCAPM x CAPM - Small Caps



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.1.3.2 Erro médio - Fora da amostra

Para avaliar o desempenho fora da amostra de cada um dos modelos, foi também calculado o valor do erro médio da carteira ótima de cada modelo. O erro médio é dado pela seguinte fórmula:

$$\epsilon_{modelo} = \frac{\sum |Valorproj_{modelo} - Valorreal_{modelo}|}{n} \quad (4.3)$$

Em que:

modelo = modelos estudados: CAPM e Ômega CAPM

n = número de dias da janela temporal

As Tabelas 17, 18 e 19 apresentam os erros médios de cada modelo. A carteira Ômega apresentou o menor erro médio fora da amostra em praticamente todas as janelas temporais de todos os mercados, à exceção da janela 2011 a 2012 do mercado de Small Caps.

Tabela 17: Erro médio de projeção - Dow Jones - Valores a 10^{-5}

	1996 a 1997	1998 a 1999	2000 a 2001	2002 a 2003	2004 a 2005	2006 a 2007	2008 a 2009	2010 a 2011	2012 a 2013	2014 a 2015	2016 a 2017	2018 a 2019	2020
CAPM	2,68	2,29	3,41	2,39	1,66	1,88	3,39	1,84	1,37	1,47	1,49	1,50	4,02
OCAPM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 18: Erro médio de projeção - IBOVESPA - Valores a 10^{-5}

	1996 a 1997	1998 a 1999	2000 a 2001	2002 a 2003	2004 a 2005	2006 a 2007	2008 a 2009	2010 a 2011	2012 a 2013	2014 a 2015	2016 a 2017	2018 a 2019	2020
CAPM	0,00	5,21	3,65	4,47	4,43	3,90	6,55	3,90	3,26	3,18	3,12	2,45	7,24
OCAPM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 19: Erro médio de projeção - Small Caps - Valores a 10^{-5}

	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018	2019-2020
CAPM	2,91	3,71	3,96	3,77	5,07
OCAPM	40,22	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.1.3.3 Teste T para diferença dos erros por modelo - Fora da amostra

A última métrica a ser construída a fim de validar os erros de previsão de cada modelo fora da amostra é a aplicação de um Teste T de diferença de médias entre os modelos. O Teste foi executado comparando o modelo CAPM (Sharpe) contra o modelo OCAPM (Ômega). A hipótese nula do Teste T para diferença de médias é a seguinte:

$$H_0 = \mu_{CAPM} - \mu_{OCAPM} = 0 \quad (4.4)$$

Assim, caso o valor p seja menor que 0.05, a hipótese não pode ser rejeitada, ou seja, os modelos apresentam valores médios equivalentes ao nível de significância de 0.05.

As Tabelas 20, 21 e 22 apresentam o resumo do Teste T para cada mercado. Os dados evidenciam que somente nas janelas de 2016 a 2017 dos mercado Dow Jones e IBOVESPA e da janela 2017 a 2018 do mercado SMALL, o modelo OCAPM não apresentou erros equivalentes aos do modelo CAPM. Em todas as demais janelas, em todos os mercados, os erros podem ser considerados iguais estatisticamente (ao nível de significância de 5%).

Tabela 20: Teste T - Diferença dos erros médios - CAPM x OCAPM - Dow Jones

	1996 a	1998 a	2000 a	2002 a	2004 a	2006 a	2008 a	2010 a	2012 a	2014 a	2016 a	2018 a	2020
	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	
T	1,73	1,60	- 0,94	0,10	0,48	- 0,32	- 0,33	1,11	1,44	0,72	2,63	0,53	- 0,37
p-valor	0,08	0,11	0,35	0,92	0,63	0,75	0,74	0,27	0,15	0,47	<u>0,01</u>	0,59	0,71

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 21: Teste T - Diferença dos erros médios - CAPM x OCAPM - IBOVESPA

	1996 a	1998 a	2000 a	2002 a	2004 a	2006 a	2008 a	2010 a	2012 a	2014 a	2016 a	2018 a	2020
	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	
T	- 1,52	- 0,10	- 0,13	- 0,37	1,08	0,40	- 0,31	0,14	0,23	- 1,07	2,02	0,53	- 0,44
p-valor	0,13	0,92	0,89	0,71	0,28	0,69	0,75	0,89	0,82	0,28	<u>0,04</u>	0,59	0,66

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Tabela 22: Teste T - Diferença dos erros médios - CAPM x OCAPM - SMALL

	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018	2019-2020
T	1,09	- 1,36	- 0,52	2,01	0,18
p-valor	0,27	0,17	0,60	<u>0,04</u>	0,86

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.1.4 Conclusões

A abordagem mono-objetivo teve como objetivo comparar o desempenho do Modelo OCAPM como alternativa ao tradicional Modelo CAPM, principalmente pelo fato do OCAPM desobrigar algumas condições de normalidade das distribuições dos retornos exigida pelo CAPM e, mais que isso, considerar todos os momentos superiores da distribuição de retornos e não mais somente a média e a variância.

O trabalho analisou dados de 02 economias distintas: a americana, sólida e desenvolvida e a brasileira, emergente e menos desenvolvida. Essa escolha foi feita com a intenção de validar a aplicabilidade do modelo $\hat{\Omega}$ em economias mais turbulentas, mais sujeitas às assimetrias informacionais do mercado, bem como a um alto grau de especulação.

Os resultados da pesquisa confirmam a superioridade do modelo $\hat{\Omega}$ no que diz respeito ao desempenho dentro e fora da amostra. Dentro da amostra, o Teste GRS apresentou o modelo OCAPM com valores inferiores ao modelo CAPM, indicando uma maior eficiência do modelo. No desempenho fora da amostra, tanto no mercado brasileiro e americano, o modelo $\hat{\Omega}$ apresentou os menores erros médios de projeção, embora a diferença desses erros não tenha sido em sua grande maioria estatisticamente relevante.

Em relação à rentabilidade, o modelo OCAPM apresentou melhor desempenho no mercado americano que as carteiras CAPM e Naive no período fora da amostra. Já no mercado brasileiro, tanto no segmento IBOVESPA quanto Small Caps, o CAPM apresentou maior rentabilidade acumulada fora da amostra do que o modelo OCAPM.

4.2 EXPERIMENTO 02: OTIMIZAÇÃO DOS ATRIBUTOS CONVEXOS: MÉDIA, VARIÂNCIA, CURTOSE E EXPECTED SHORTFALL

O objetivo do experimento 02 é avaliar se atributos convexos otimizados simultaneamente produzem carteiras com desempenho superior fora da amostra em relação aos modelos CAPM e OCAPM, de forma a justificar a inclusão de outros atributos além da média e variância no problema de seleção de carteiras. Em seguida, são apresentadas as composições das carteiras convexas otimizadas, bem como o desempenho fora da amostra.

4.2.1 Composição da carteira com atributos convexos

A Figura 34 apresenta a composição otimizada da carteira convexa nas janelas temporais do mercado americano (Dow Jones). Na média, as empresas mais escolhidas foram Home Depot, Johnson & Johnson e United Tech (com 9% cada), 3M e Procter & Gamble (com 8% cada). A cardinalidade média das carteiras ótimas foi de cinco ativos, abaixo do limite máximo de oito.

A escolha das empresas otimizadas no IBOVESPA é apresentada na Figura 35. O destaque fica com a empresa Vale, que apresentou mais de 22% de média na escolha dos ativos (VALE3 e VALE5). Em seguida, as empresas CSN e Klabin representaram 6% na média das escolhas da otimização. A cardinalidade média do IBOVESPA ficou ainda mais baixo que a Dow Jones, com quatro empresas na média da carteira.

A Figura 36 apresenta a composição otimizada da carteira convexa no mercado brasileiro de Small Caps. As empresas mais escolhidas, na média, foram a Marcopolo

Figura 34: Composição das Carteiras com atributos convexos - Dow Jones

DOW JONES	1994-1995	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	TOTAL MÉDIO
Amer Exp	0,03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00
Caterpillar	-	-	-	-	-	-	0,17	-	-	-	-	-	-	0,01
Chevron	-	-	-	0,27	-	-	-	-	-	-	-	0,22	-	0,04
Dupont	0,10	0,51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,15	0,06
Disney	-	-	-	-	0,11	-	-	-	-	-	0,11	-	-	0,02
GE	-	-	0,16	-	-	-	-	-	-	-	-	0,11	-	0,02
Goldman Sachs	-	-	-	-	-	0,30	-	-	-	-	-	-	0,39	0,05
Home Depot	-	-	-	-	-	-	-	0,57	0,66	-	-	-	-	0,09
IBM	-	-	-	-	-	0,10	0,19	-	-	-	-	-	0,27	0,04
Intel	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Johnson	-	-	-	0,39	0,06	0,30	-	-	-	-	0,45	-	-	0,09
JP Morgan	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,17	0,01
MC Donalds	-	-	-	0,29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02
3M	-	-	-	-	0,24	-	-	0,43	0,14	0,22	-	-	-	0,08
Merck	-	-	-	-	0,33	0,04	-	-	-	-	-	-	-	0,03
Microsoft	-	-	0,54	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,04
Nike	0,30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02
Pfizer	-	-	-	-	-	0,06	-	-	-	-	-	-	-	0,00
Procter & Gamble	0,05	-	0,30	0,05	-	-	-	-	-	0,31	-	-	0,30	0,08
Travelers	-	-	-	-	-	0,11	-	-	-	0,20	0,33	-	-	0,05
United Health	0,05	-	-	-	-	0,09	-	-	-	-	0,11	-	-	0,02
United Tech	0,46	-	-	-	0,26	-	0,48	-	-	-	-	-	-	0,09
Visa	-	-	-	-	-	-	-	-	0,21	0,27	-	0,40	-	0,07
Verizon	-	0,49	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,04
Walmart	-	-	-	-	-	-	0,16	-	-	-	-	-	-	0,01

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 35: Composição das Carteiras com atributos convexos - IBOVESPA

IBOVESPA	1994-1995	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2006-2007	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	TOTAL MÉDIO
BBA3	-	-	-	0,09	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
BBDC3	-	0,04	0,01	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00
BBDC4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BBSE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,20	0,02
BRFS3	-	-	-	-	-	0,07	-	-	0,15	-	-	-	0,02
CCRO3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,12	0,02
CPFE3	-	-	-	-	-	0,25	-	-	-	-	-	-	0,02
CPLE6	-	-	-	-	-	0,10	-	-	-	-	-	-	0,01
CSNA3	-	0,72	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,06
ECOR3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,00	-	-	0,00
EGIE3	-	-	-	-	0,12	-	-	-	0,48	-	-	-	0,05
EMBR3	-	-	-	-	0,20	-	-	-	-	0,33	-	0,14	0,05
ENBR3	-	-	-	-	-	-	0,41	-	-	-	-	-	0,03
EQTL3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,29	-	-	0,02
GGBR4	-	-	-	0,31	0,06	-	-	-	-	-	-	-	0,03
HYPE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITSA4	-	-	0,66	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05
ITUB4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,20	0,02
KLBN11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,78	-	0,06
LAME4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,05
MRFG3	-	-	-	-	-	-	-	0,02	-	-	-	-	0,00
MIRV3	-	-	-	-	-	-	-	-	0,31	-	-	0,10	0,03
NATU3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,01
PCAR4	-	0,24	-	-	-	-	-	-	0,05	0,07	-	-	0,03
PETR3	-	-	-	0,26	-	-	-	-	-	-	-	-	0,02
PETR4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
QUAL3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,31	-	-	0,02
RADL3	-	-	-	-	-	-	0,16	-	-	-	0,22	0,17	0,04
RENT3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,07	0,01
SBS3	-	-	-	-	-	-	-	0,66	-	-	-	-	0,05
SUZB3	-	-	-	-	-	-	0,43	-	-	-	-	-	0,03
USIM5	-	-	-	-	-	-	-	0,32	-	-	-	-	0,02
VALE3	1,00	-	0,33	-	-	0,58	-	-	-	-	-	-	0,15
VALE5	-	-	-	0,33	0,62	-	-	-	-	-	-	-	0,07

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

(POMO4) com 20% e a Comgas (CGAS5) com 19%, seguidas da companhia paranaense de saneamento (SAPR4), com 10% e a companhia aérea GOL (GOLL4), com 9%.

Figura 36: Composição das Carteiras com atributos convexos - Small Caps

SMALL CAPS	2009-2010	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018	TOTAL MÉDIO
ALPA4	0,17	-	-	-	-	0,03
ALSC3	-	-	-	0,11	-	0,02
BRAP4	-	-	0,06	-	-	0,01
CGAS5	0,02	-	0,94	-	-	0,19
CPL6	0,30	-	-	-	-	0,06
ECOR3	-	0,37	-	-	-	0,07
EZTC3	-	-	-	0,06	-	0,01
FLRY3	-	0,10	-	-	-	0,02
GOLL4	-	-	-	0,46	-	0,09
MIL3	-	0,17	-	-	-	0,03
MYPK3	-	0,04	-	-	-	0,01
POMO4	-	-	-	-	1,00	0,20
RSID3	-	0,04	-	-	-	0,01
SAPR4	0,24	0,27	-	-	-	0,10
SULA11	0,26	-	-	-	-	0,05
TUPY3	-	-	-	0,36	-	0,07

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Tabela 23 apresenta a distribuição de empresas selecionadas percentualmente pelos setores de cada mercado. No mercado americano, o predomínio foi de empresas do setor financeiro, tecnologia e varejo, totalizando cerca de 60% das escolhas. A área de indústria farmacêutica foi a quarta mais escolhida com 13,92%. No mercado BOVESPA, as escolhas privilegiaram setores de Mineração, Siderurgia e Metalurgia - que responderam por quase 50% das escolhas - além do segmento de energia elétrica e serviços financeiros. Os setores em destaque no mercado de Small Caps brasileiro foram o de Transporte (32,8%), seguidos de Saneamento (15,7%), Construção Civil (12,9%) e Agropecuário (9,5%).

Tabela 23: Composição das Carteiras Convexas por Setor

	DOW JONES	IBOVESPA	SMALL CAPS
Serviços Financeiros	20,12%	Mineração	22,00%
Tecnologia	20,39%	Energia	13,05%
Varejo	19,14%	Siderurgia e Metalurgia	11,27%
Indústria Farmacêutica	13,92%	Serviços Financeiros	9,31%
		Transporte	32,38%
		Saneamento	15,71%
		Construção Civil	12,90%
		Agropecuária	9,56%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.2.2 Desempenho fora da amostra

A Tabela 24 apresenta para o mercado americano (DWJ) a rentabilidade bruta fora da amostra da carteira convexa, comparando-a com as carteiras Sharpe (CAPM),

Ômega (OCAPM) e Naive.

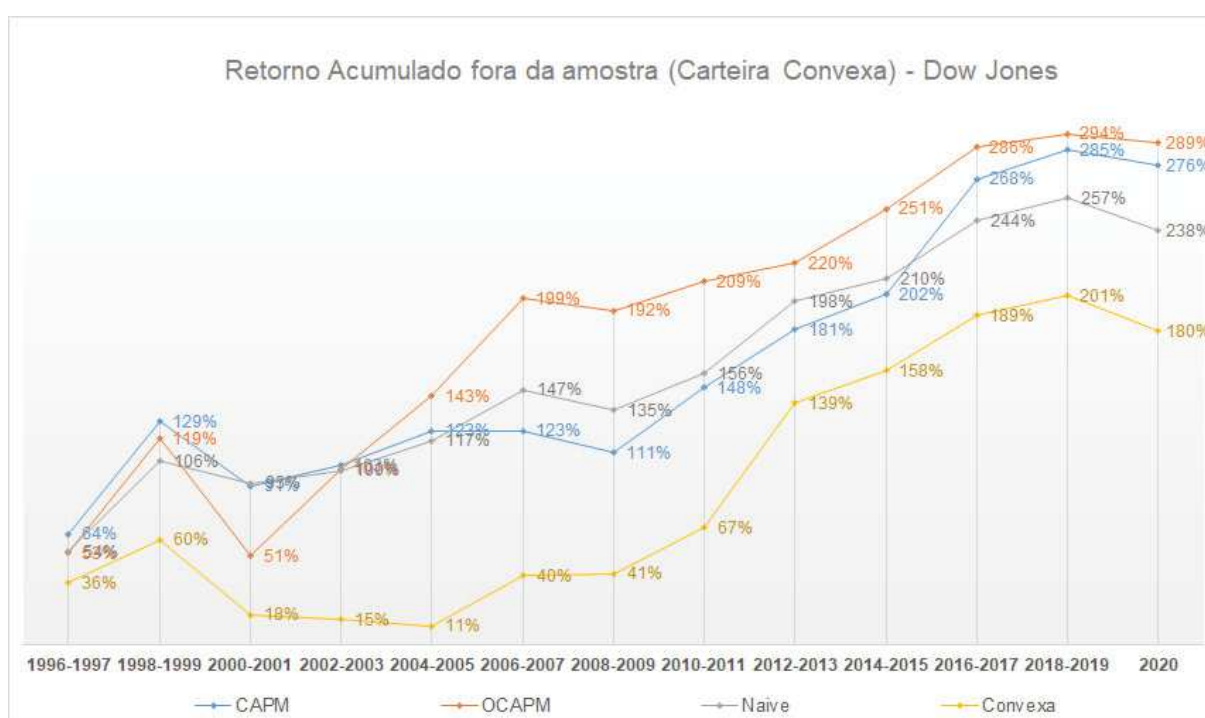
Tabela 24: Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Carteira Convexa - Dow Jones

	1996 a 1997	1998 a 1999	2000 a 2001	2002 a 2003	2004 a 2005	2006 a 2007	2008 a 2009	2010 a 2011	2012 a 2013	2014 a 2015	2016 a 2017	2018 a 2019	2020
CAPM	63,8%	64,7%	-37,1%	12,0%	19,8%	0,1%	-12,6%	37,6%	33,3%	20,4%	66,0%	16,8%	-9,1%
OCAPM	53,0%	65,6%	-67,2%	49,8%	41,9%	56,1%	-6,9%	16,6%	10,9%	31,2%	35,4%	7,5%	-5,2%
Naive	53,9%	51,7%	-12,6%	7,2%	17,1%	29,5%	-11,9%	21,2%	41,4%	12,8%	33,5%	13,3%	-18,9%
Convexa	35,8%	24,7%	-42,9%	-2,7%	-3,9%	28,7%	1,4%	26,3%	71,5%	18,6%	31,7%	11,4%	-20,4%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O desempenho da carteira convexa, em seu aspecto global, não foi positivo em relação aos demais modelos. No mercado americano, embora a carteira atingisse 180% de rentabilidade acumulada, ela foi inferior ao desempenho da carteira OCAPM (289%), CAPM(275%) e Naive(238%), conforme mostra a Figura 37. Somente nas janelas de 2008 a 2009 e 2012 a 2013 a carteira convexa obteve rentabilidade superior às demais.

Figura 37: Rentabilidade Acumulada fora da amostra Carteira Convexa - Dow Jones



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Apesar do desempenho inferior aos demais modelos, chama a atenção o desempenho da carteira convexa no período da crise de 2008 (2008 a 2009), sendo a única carteira a apresentar rentabilidade positiva no período (1,4%). Em contrapartida, ao se analisar o ano

de 2020, a carteira convexa foi a mais impactada pelo COVID-19, com uma rentabilidade negativa de 20,4% no período.

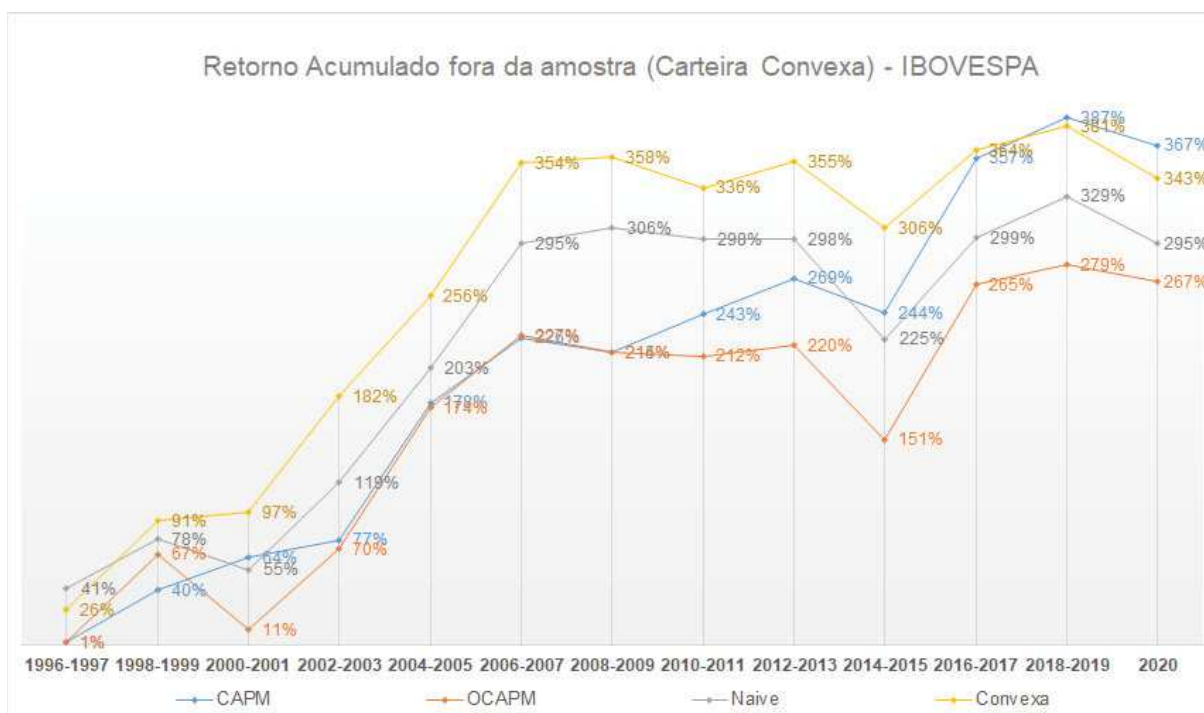
No mercado brasileiro, no segmento IBOVESPA, a carteira convexa teve desempenho superior às carteiras Naive e OCAPM e levemente inferior à carteira CAPM (343% contra 365%), como mostra a Figura 38. A carteira convexa só apresentou rentabilidade superior nas janelas de 2002 a 2003 e 2006 a 2007, conforme demonstrado na Tabela 25. Interessante observar que a carteira convexa foi a melhor carteira acumulada desde 1998 até 2017, sendo ultrapassada pelo modelo CAPM apenas no ano de 2018, o que ratifica seu bom desempenho no mercado BOVESPA.

Tabela 25: Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Carteira Convexa -IBOVESPA

	1996 a 1997	1998 a 1999	2000 a 2001	2002 a 2003	2004 a 2005	2006 a 2007	2008 a 2009	2010 a 2011	2012 a 2013	2014 a 2015	2016 a 2017	2018 a 2019	2020
CAPM	1,5%	38,5%	24,3%	12,7%	100,6%	48,0%	-11,3%	28,1%	26,4%	-25,2%	113,5%	29,6%	-20,2%
OCAPM	1,5%	65,2%	-55,5%	58,9%	103,8%	52,9%	-12,4%	-2,4%	8,2%	-69,2%	113,5%	14,5%	-12,4%
Naive	41,3%	36,2%	-22,2%	63,5%	84,2%	91,8%	11,2%	-8,2%	-0,3%	-73,0%	74,0%	30,7%	-34,5%
Convexa	25,6%	65,2%	6,3%	85,0%	73,7%	97,7%	4,2%	-22,2%	19,3%	-49,2%	57,5%	17,2%	-37,9%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 38: Rentabilidade Acumulada fora da amostra Carteira Convexa - IBOVESPA



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

No mercado de Small Caps, da mesma forma, o desempenho da carteira convexa

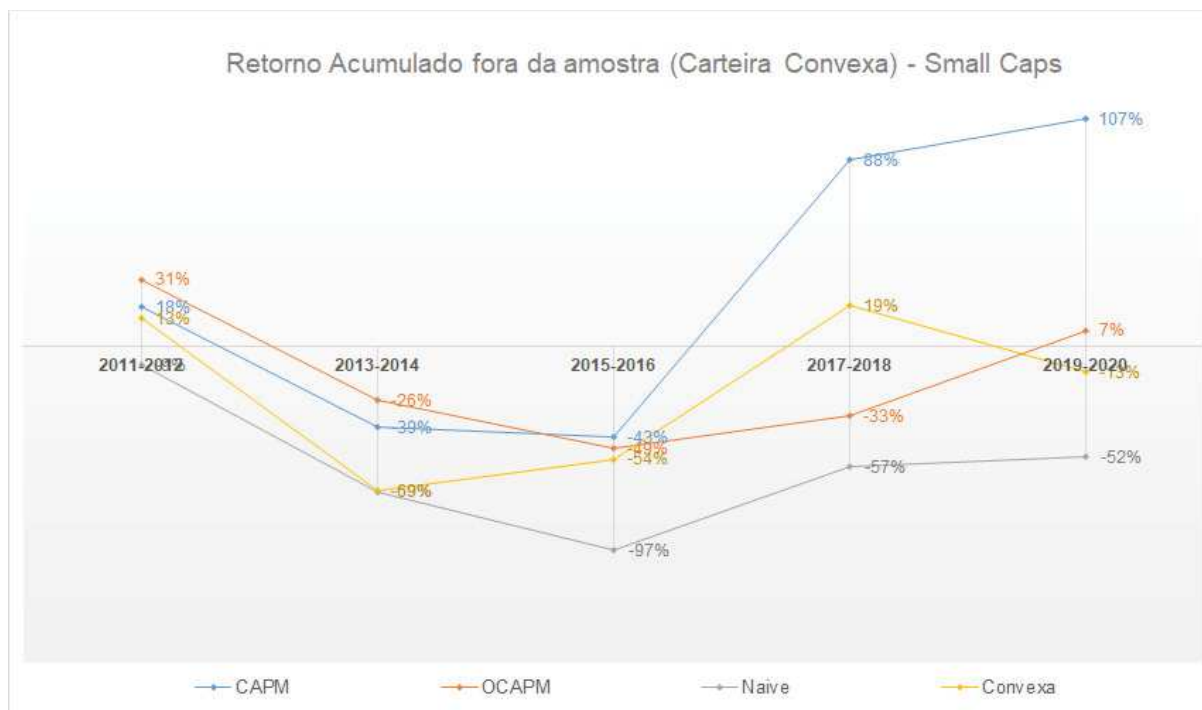
foi inferior aos demais modelos, superando apenas a carteira Naive (-13% contra -52%), conforme mostra a Figura 39. Os resultados de 2013 a 2014 e 2019 a 2020 foram decisivos para o fraco desempenho da carteira convexa no período. No período de 2019 a 2020, a carteira convexa selecionou dentro da amostra apenas 01 carteira em sua composição: a empresa de transporte rodoviário Marcopolo, que foi altamente atingida pela pandemia do COVID-19 no ano de 2020, resultando em uma rentabilidade de -31,7% acumulada para os dois anos. Apenas no período de 2015 a 2016 é que a carteira convexa apresentou desempenho superior às demais carteiras (Tabela 26), motivado pelo bom desempenho da companhia de gás COMGAS (CGAS5).

Tabela 26: Rentabilidade Bruta - Fora da Amostra - Carteira Convexa - Small Caps

	2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018	2019-2020
CAPM	18,4%	-57,1%	-4,8%	131,5%	19,2%
OCAPM	31,4%	-57,4%	-22,6%	15,3%	40,7%
Naive	-9,0%	-60,1%	-27,5%	39,3%	4,9%
Convexa	13,1%	-81,7%	15,0%	72,7%	-31,7%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 39: Rentabilidade Acumulada fora da amostra Carteira Convexa - Small Caps



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.2.3 Conclusões

A otimização da carteira convexa buscou otimizar os atributos da média, variância, curtose e *expected shortfall* simultaneamente através da otimização destes atributos convexos. Essa proposição tinha como objetivo incluir medidas adicionais, como a curtose e o *expected shortfall* que os modelos CAPM (no caso de ambos) e OCAPM (no caso da média, variância e curtose) não capturavam explicitamente.

Embora a otimização convexa possibilitasse a composição de empresas de setores e características diferentes aos modelos CAPM e OCAPM, suas escolhas não geraram resultados superiores unânimes em relação aos modelos CAPM e OCAPM. No mercado americano, o desempenho da carteira convexa foi o pior entre os modelos. No mercado brasileiro, sobretudo no BOVESPA, a carteira convexa conseguiu alcançar um desempenho superior aos modelos CAPM e à carteira Naive e, durante boa parte da série temporal estudada, foi a melhor carteira entre todas. Já no mercado de Small Caps, a otimização da carteira convexa ficou à frente apenas da carteira Naive.

Assim, conclui-se que a carteira convexa apresentou bom desempenho no mercado IBOVESPA, sendo uma alternativa em relação às carteiras Ômega e Naive. No entanto, seu desempenho no mercado americano e de Small Caps não foi destacado.

4.3 EXPERIMENTO 03: OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO UTILIZANDO ALGORITMOS EVOLUTIVOS ENVOLVENDO ATRIBUTOS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS

O experimento 03, considerado o mais importante desta pesquisa, trabalha a otimização de todos os atributos simultaneamente (convexos e não-convexos) com o objetivo de produzir portfólios superiores aos modelos CAPM e OCAPM.

Conforme explicitado na Metodologia, 03 proposições foram construídas: (i) Carteira Global, que envolve todos os atributos (Média, Ômega, Assimetria, Curtose, *Drawdown* Máximo e Correlação Condicional ao VIX (CVIX)); (ii) Carteira Antifrágil, que envolve os atributos *Drawdown* Máximo e Correlação Condicional ao VIX e (iii) Carteira Assimétrica, com Assimetria, Curtose e Ômega. Assim, todos os resultados serão apresentados em conjunto, comparando-se as três carteiras multiobjetivas.

Por se tratar de algoritmos evolutivos, conforme apresentado na Metodologia, os passos até se encontrar os resultados finais foram:

- (i) Calcular o hypervolume de cada execução por algoritmo;
- (ii) Com os hypervolumes calculados, executar os testes estatísticos relativos à variância e normalidade das amostras;

- (iii) Em caso de atendimento aos requisitos de variância e normalidade, calcular o Teste de Tukey para verificar as diferenças estatisticamente significantes entre as médias dos hypervolumes de cada algoritmo;
- (iv) Em caso de não-atendimento aos requisitos de variância e normalidade, utilizar testes não-paramétricos (Kruskall-Wallis e Nemenyi) para verificar as diferenças estatisticamente significantes entre as médias dos hypervolumes de cada algoritmo;
- (v) Selecionar a melhor execução (*best run*) de cada algoritmo para reproduzir suas carteiras otimizadas fora da amostra;
- (vi) Reproduzir as carteiras otimizadas não-dominadas por cada algoritmo fora da amostra e avaliar o seu desempenho;
- (vii) Comparar os resultados médios encontrados pelos algoritmos com as carteiras Sharpe(CAPM), Omega(OCAPM), Convexa, Naive e o Índice relativo ao mercado estudado, além de comparar também à taxa livre de risco (CDI ou T-Bond).

4.3.1 Hypervolumes

De forma a organizar melhor o texto deste trabalho, decidiu-se apresentar todos os *boxplots* dos hypervolumes como anexo. Eles serão apresentados por mercado e janela temporal no ANEXO 04.

4.3.2 Testes estatísticos dos hypervolumes

As Figuras 40, 41 e 42 apresentam o resumo dos testes estatísticos aplicados aos hypervolumes de cada algoritmo e de cada uma das três carteiras multiobjetivas. O objetivo dos testes é validar, de forma paramétrica ou não-paramétrica, qual algoritmo apresentou o maior hypervolume médio entre os demais.

Como forma de resumir os testes estatísticos aplicados sobre os hypervolumes dos algoritmos, a Figura 43 apresenta o total de vezes em que o hypervolume de um algoritmo foi superior aos demais de forma paramétrica e não-paramétrica.

Na Carteira Global, o algoritmo NSGAIII foi o que mais diferenciou dos demais em todos os mercados. Ele venceu 13 janelas, sendo 3 paramétricas e 10 não-paramétricas. Seu bom desempenho pode ter sido favorecido pelo fato do algoritmo apresentar, em estudos anteriores, bom desempenho em problemas com mais de 02 objetivos, já que a carteira Global é a que otimiza o maior número de objetivos (06).

Na Carteira Antifrágil, o algoritmo NSGAII apresentou a maior frequência de médias mais altas dos seus hypervolumes, com 9 janelas temporais, todas medidas de forma não-paramétrica. O fato da Carteira Antifrágil ter somente 02 objetivos pode

Figura 40: Testes estatísticos - Carteira Global

CARTEIRA GLOBAL																			
DOW JONES	Variância Teste de Levene	Normalidade Shapiro Wilk	Médias Iguais? Teste ANOVA	Distrib. Iguais? Kruskal Wallis	Teste de Tukey II H0: $\mu_1 = \mu_2$						Teste de Nemenyi						Melhor algoritmo Não-Paramétrico	Melhor algoritmo Paramétrico	
					GDE3 x IBEA	GDE3 x NSGA2	GDE3 x NSGA3	IBEA x NSGA2	IBEA x NSGA3	NSGA2 x NSGA3	GDE3 x IBEA	GDE3 x NSGA2	GDE3 x NSGA3	IBEA x NSGA2	IBEA x NSGA3	NSGA2 x NSGA3			
1994-1995	3,47 (0,01)			103, (0,00)								0,00	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	NSGA3	
1996-1997	0,91 (0,43)	0,88 (0,00)	493, (0,00)	101, (0,00)	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0		0,00	0,17	0,00	0,04	0,00	0,00	NSGA3	NSGA3
1998-1999	11,9 (0,00)			93,9 (0,00)								0,00	0,17	0,00	0,04	0,00	0,00	NSGA3	NSGA3
2000-2001	1,21 (0,36)	0,82 (0,00)	922, (0,00)	96,9 (0,00)	Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0		0,00	0,00	0,20	0,01	0,00	0,00	---	NSGA3
2002-2003	9,27 (0,00)			101, (0,00)								0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	NSGA3	---
2004-2005	19,0 (0,00)			97,6 (0,00)								0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	NSGA3	---
2006-2007	1,30 (0,27)	0,92 (0,00)	367, (0,00)	102, (0,00)	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0		0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	---	NSGA3
2008-2009	20,7 (0,00)			100, (0,00)								0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	NSGA3	---
2010-2011	7,47 (0,00)			78,9 (0,00)								0,00	0,01	0,07	0,00	0,00	0,95	---	---
2012-2013	4,26 (0,00)			102, (0,00)								0,00	0,07	0,01	0,00	0,00	0,00	NSGA3	---
2014-2015	5,49 (0,00)			75,1 (0,00)								0,00	0,47	0,66	0,00	0,00	0,04	---	---
2016-2017	2,10 (0,10)	0,97 (0,02)	17,7 (0,00)		Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0		0,00	0,00	0,70	0,01	0,00	0,00	GDE3	---
2018-2019	5,18 (0,00)			93,1 (0,00)								0,00	0,00	0,70	0,01	0,00	0,00	GDE3	---
IBOVESPA																			
1994-1995	12,7 (0,00)			93,0 (0,00)								0,00	0,00	0,85	0,00	0,00	0,00	---	---
1996-1997	12,3 (0,00)			82,5 (0,00)								0,00	0,93	0,01	0,00	0,00	0,00	---	---
1998-1999	14,8 (0,00)			79,4 (0,00)								0,00	0,94	0,41	0,00	0,00	0,33	---	---
2000-2001	18,7 (0,00)			86,4 (0,00)								0,00	0,99	0,00	0,00	0,00	0,00	NSGA3	---
2002-2003	7,47 (0,00)			103, (0,00)								0,00	0,02	0,04	0,00	0,00	0,00	---	---
2004-2005	10,6 (0,00)			100, (0,00)								0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,42	GDE3	---
2006-2007	5,14 (0,00)			105, (0,00)								0,00	0,01	0,05	0,01	0,00	0,00	---	---
2008-2009	7,79 (0,00)			13,9 (0,00)								0,06	1,00	0,95	0,04	0,01	0,98	---	---
2010-2011	6,02 (0,00)			76,6 (0,00)								0,00	1,00	0,05	0,00	0,00	0,07	---	---
2012-2013	19,9 (0,00)			92,2 (0,00)								0,00	0,67	0,00	0,00	0,00	0,00	NSGA3	---
2014-2015	10,3 (0,00)			92,8 (0,00)								0,00	0,01	0,48	0,00	0,00	0,00	---	---
2016-2017	16,6 (0,00)			101, (0,00)								0,00	0,00	0,07	0,05	0,00	0,00	---	---
2018-2019	3,19 (0,02)			66,6 (0,00)								0,00	0,56	0,02	0,01	0,00	0,00	NSGA3	---
SMALL																			
2009-2010	11,1 (0,00)			108, (0,00)								0,00	0,04	0,01	0,01	0,00	0,00	NSGA3	---
2011-2012	21,9 (0,00)			83,9 (0,00)								0,00	0,57	0,07	0,00	0,00	0,00	---	---
2013-2014	11,3 (0,00)			72,3 (0,00)								0,00	0,86	0,09	0,00	0,00	0,43	---	---
2015-2016	4,06 (0,00)			104, (0,00)								0,00	0,01	0,02	0,03	0,00	0,00	NSGA3	---
2017-2018	17,4 (0,00)			80,5 (0,00)								0,00	0,92	0,05	0,00	0,00	0,01	---	---

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 41: Testes estatísticos - Carteira Assimétrica

CARTEIRA ASSIMÉTRICA																			
DOW JONES	Variância Teste de Levene	Normalidade Shapiro Wilk	Médias Iguais? Teste ANOVA	Distrib. Iguais? Kruskal Wallis	Teste de Tukey II H0: $\mu_1 = \mu_2$						Teste de Nemenyi						Melhor algoritmo Não-Paramétrico	Melhor algoritmo Paramétrico	
					GDE3 x IBEA	GDE3 x NSGA2	GDE3 x NSGA3	IBEA x NSGA2	IBEA x NSGA3	NSGA2 x NSGA3	GDE3 x IBEA	GDE3 x NSGA2	GDE3 x NSGA3	IBEA x NSGA2	IBEA x NSGA3	NSGA2 x NSGA3			
1994-1995	3,09 (0,02)			73,7 (0,00)								0,00	0,91	0,09	0,00	0,00	0,36	---	---
1996-1997	10,8 (0,00)			41,6 (0,00)								0,93	0,01	0,00	0,00	0,00	0,49	---	---
1998-1999	2,22 (0,08)	0,96 (0,00)	16,5 (0,00)		Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0		0,00	0,97	0,00	0,00	0,06	0,00	---	IBEA
2000-2001	5,43 (0,00)			69,8 (0,00)								0,00	0,12	0,00	0,00	0,00	0,07	---	---
2002-2003	6,80 (0,00)			88,1 (0,00)								0,00	0,12	0,00	0,00	0,00	0,07	---	---
2004-2005	8,45 (0,00)			42,9 (0,00)								0,01	0,95	0,00	0,05	0,13	0,00	---	---
2006-2007	1,45 (0,23)	0,82 (0,00)	296, (0,00)		Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0		0,00	0,01	0,05	0,01	0,00	0,00	---	GDE3
2008-2009	6,21 (0,00)			12,2 (0,00)								0,02	0,70	0,08	0,27	0,95	0,59	---	---
2010-2011	7,23 (0,00)			48,2 (0,00)								0,91	0,00	0,17	0,00	0,03	0,01	NSGA2	---
2012-2013	1,84 (0,14)	0,98 (0,11)	11,2 (0,00)		Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0		0,00	0,16	0,02	0,00	0,00	0,89	---	---
2014-2015	2,58 (0,05)			76,8 (0,00)								0,00	0,92	0,00	0,00	0,01	0,00	---	---
2016-2017	9,11 (0,00)			78,7 (0,00)								0,00	0,92	0,00	0,00	0,01	0,00	---	---
2018-2019	11,5 (0,00)			66,0 (0,00)								0,00	0,00	0,00	0,38	0,15	0,96	GDE3	---
IBOVESPA																			
1994-1995	5,74 (0,00)			84,0 (0,00)								0,00	0,08	0,00	0,00	0,00	0,53	---	---
1996-1997	0,82 (0,48)	0,97 (0,01)	62,2 (0,00)		Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0		0,00	0,98	0,00	0,00	0,00	0,00	---	GDE3
1998-1999	8,12 (0,00)			86,6 (0,00)								0,00	0,98	0,00	0,00	0,00	0,00	---	---
2000-2001	2,03 (0,11)	0,78 (0,00)	80,7 (0,00)		Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	FALSO		0,00	0,22	0,58	0,00	0,05	0,01	---	---
2002-2003	4,75 (0,00)			41,4 (0,00)								0,00	0,18	0,00	0,00	0,47	0,00	---	---
2004-2005	5,46 (0,00)			69,5 (0,00)								0,00	0,18	0,00	0,00	0,47	0,00	---	---
2006-2007	0,36 (0,77)	0,98 (0,11)	8,88 (0,00)		Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Rejeita H0		0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,55	GDE3	---
2008-2009	9,63 (0,00)			73,8 (0,00)								0,00	0,87	0,81	0,00	0,00	1,00	---	---
2010-2011	8,43 (0,00)			52,5 (0,00)								0,00	0,36	0,00	0,00	0,00	0,17	---	---
2012-2013	3,80 (0,01)			80,9 (0,00)								0,00	0,09	1,00	0,00	0,00	0,10	---	---
2014-2015	11,3 (0,00)			70,5 (0,00)								0,00	0,09	1,00	0,00	0,00	0,10	---	---
2016-2017	5,37 (0,00)			18,9 (0,00)								0,00	0,19	0,11	0,20	0,31	1,00	---	---
2018-2019	1,47 (0,22)	0,93 (0,00)	0,29 (0,82)		Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0	Não Rejeita H0		0,00	0,81	0,00	0,00	0,08	0,00	---	---
SMALL																			
2009-2010	8,73 (0,00)			73,5 (0,00)								0,00	0,81	0,00	0,00	0,08	0,00	---	---
2011-2012	0,89 (0,44)	0,96 (0,00)	34,8 (0,00)		Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Rejeita H0	Não Rejeita H0		0,00	0,99	0,08	0,00	0,00	0,15	---	GDE3
2013-2014	9,43 (0,00)			74,2 (0,00)								0,00	0,99	0,08	0,00	0,00	0,15	---	---
2015-2016	6,21 (0,00)			52,4 (0,00)								0,00	0,00	0,00	1,00	0,10	0,09	GDE3	---
2017-2018	5,35 (0,00)			62,3 (0,00)								0,00	0,75	1,00	0,00	0,00	0,61	---	---

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

justificar o bom desempenho do NSGAI, tendo em vista que o NSGAI e GDE3 são mais indicados para problemas com mais de 02 objetivos.

Figura 42: Testes estatísticos - Carteira Antifrágil

CARTEIRA ANTIFRÁGIL																		
	Variância	Normalidade	Médias iguais?	Distrib. Iguais?	Teste de Tukey // H0: $\mu_1 = \mu_2$						Teste de Nemenyi						Melhor algoritmo Não-Paramétrico	Melhor algoritmo Paramétrico
					DOW JONES		IBOVESPA		SMALL CAPS		DOW JONES		IBOVESPA		SMALL CAPS			
	Teste de Levene	Shapiro Wilk	Teste ANOVA	Kruskal Wallis	GDE3 x IBEA	GDE3 x NSGA2	GDE3 x NSGA3	IBEA x NSGA2	IBEA x NSGA3	NSGA2 x NSGA3	GDE3 x IBEA	GDE3 x NSGA2	GDE3 x NSGA3	IBEA x NSGA2	IBEA x NSGA3	NSGA2 x NSGA3		
1994-1995	4.79 (0.00)			61.0 (0.00)							0.00	0.03	0.20	0.00	0.12	0.00		NSGA2
1996-1997	5.61 (0.00)			80.8 (0.00)							0.00	0.09	0.00	0.00	0.34	0.00		---
1998-1999	7.81 (0.00)			17.2 (0.00)							0.97	0.19	0.30	0.07	0.56	0.00		---
2000-2001	3.53 (0.01)			63.5 (0.00)							0.00	0.00	0.97	0.00	0.01	0.00		NSGA2
2002-2003	16.1 (0.00)			26.8 (0.00)							0.94	0.80	0.00	0.45	0.01	0.00		---
2004-2005	18.2 (0.00)			48.3 (0.00)							0.97	0.00	0.73	0.00	0.94	0.00		NSGA2
2006-2007	9.91 (0.00)			48.8 (0.00)							0.00	0.98	0.00	0.00	0.89	0.00		---
2008-2009	17.8 (0.00)			32.1 (0.00)							0.19	0.00	0.84	0.23	0.02	0.00		---
2010-2011	22.1 (0.00)			49.4 (0.00)							0.73	0.04	0.00	0.00	0.04	0.00		NSGA2
2012-2013	11.6 (0.00)			50.6 (0.00)							0.08	0.10	0.00	0.00	0.53	0.00		---
2014-2015	2.79 (0.04)			60.0 (0.00)							0.00	0.08	0.03	0.00	0.50	0.00		---
2016-2017	12.4 (0.00)			22.9 (0.00)							0.21	0.48	0.07	0.00	0.96	0.00		---
2018-2019	6.72 (0.00)			21.7 (0.00)							0.97	0.00	0.81	0.00	0.54	0.05		---
IBOVESPA																		
1994-1995	16.2 (0.00)			22.2 (0.00)							0.87	0.00	1.00	0.01	0.91	0.00		NSGA2
1996-1997	6.43 (0.00)			66.0 (0.00)							0.00	0.33	0.00	0.00	0.55	0.00		---
1998-1999	23.7 (0.00)			78.3 (0.00)							0.00	0.61	0.00	0.00	0.92	0.00		---
2000-2001	12.5 (0.00)			30.2 (0.00)							0.94	0.00	0.56	0.01	0.24	0.00		NSGA2
2002-2003	4.20 (0.00)			66.5 (0.00)							0.04	1.00	0.00	0.04	0.00	0.00		---
2004-2005	9.58 (0.00)			43.9 (0.00)							0.29	0.01	0.10	0.00	0.95	0.00		NSGA2
2006-2007	8.97 (0.00)			31.3 (0.00)							0.92	0.32	0.00	0.09	0.03	0.00		---
2008-2009	13.3 (0.00)			57.1 (0.00)							0.00	0.00	0.98	1.00	0.00	0.00		---
2010-2011	8.66 (0.00)			39.3 (0.00)							0.00	0.77	0.00	0.03	0.53	0.00		---
2012-2013	6.14 (0.00)			29.3 (0.00)							1.00	0.00	0.88	0.00	0.93	0.00		NSGA2
2014-2015	8.35 (0.00)			44.3 (0.00)							1.00	0.74	0.00	0.81	0.00	0.00		---
2016-2017	33.2 (0.00)			67.8 (0.00)							0.74	0.03	0.00	0.32	0.00	0.00		---
2018-2019	12.1 (0.00)			28.7 (0.00)							0.58	0.00	0.91	0.05	0.20	0.00		NSGA2
SMALL																		
2009-2010	15.5 (0.00)			11.9 (0.00)							0.71	0.43	0.55	0.05	0.99	0.02		---
2011-2012	18.7 (0.00)			22.8 (0.00)							0.97	0.98	0.00	1.00	0.00	0.00		---
2013-2014	13.6 (0.00)			67.4 (0.00)							0.64	0.01	0.00	0.28	0.00	0.00		---
2015-2016	7.56 (0.00)			65.6 (0.00)							0.01	0.12	0.00	0.00	0.67	0.00		---
2017-2018	34.1 (0.00)			38.5 (0.00)							0.04	0.00	0.41	0.82	0.00	0.00		---

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Por último, a Carteira Assimétrica teve o GDE3 como o algoritmo com maior hypervolume médio nas janelas temporais e mercados estudados. Ele venceu 6 janelas temporais, sendo 3 paramétricas e 3 não-paramétricas. Além disso, foi

Portanto, espera-se que o NSGAIII apresente melhor desempenho na Carteira Global, o NSGAII na Carteira Antifrágil e o GDE3 na Carteira Assimétrica.

Figura 43: Resumo dos Testes estatísticos

	Número de vezes que o hypervolume médio foi maior que os demais																	
	Carteira Global						Carteira Antifrágil						Carteira Assimétrica					
	Dow Jones		IBOVESPA		Small Caps		Dow Jones		IBOVESPA		Small Caps		Dow Jones		IBOVESPA		Small Caps	
	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP	P	NP
NSGAII	-	-	-	-	-	-	-	4	-	5	-	-	-	-	1	-	-	-
NSGAIII	3	5	-	3	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GDE3	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1
IBEA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-
Indiferentes	1	3	-	9	-	3	-	9	-	8	-	5	-	9	3	8	-	3
TOTAL	4	9	-	13	-	5	-	13	-	13	-	5	2	11	4	9	1	4

Legenda:
P - Paramétricos
NP - Não-Paramétricos

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.3.3 Composição da carteira multiobjetiva com emprego de algoritmos evolutivos

Como o método de escolha da seleção foi a melhor execução entre todas por algoritmo, é natural que uma execução apresente muitas soluções não-dominadas em sua composição, até pelo alto número de objetivos simultâneos a serem otimizados. Assim, como forma de apresentar quais empresas compuseram as carteiras ótimas, somou-se todos os percentuais de cada empresa por solução não-dominada e ao final dividiu-se pelo total de soluções não-dominadas, de forma a evidenciar o peso relativo total do ativo dentre todas as carteiras não-dominadas resultantes da melhor execução de cada algoritmo.

A Figura 44 apresenta um mapa de calor com a composição otimizada das carteiras multiobjetivas no mercado Dow Jones. O fato de existirem várias carteiras não-dominadas pulveriza muito a escolha entre os ativos, mas algumas características se destacam:

- (i) As empresas Boeing e United Tech tiveram destaque na escolha por todos os algoritmos da Carteira Global e Assimétrica;
- (ii) A empresa 3M apresentou boa participação nas Carteiras Antifrágil e Assimétrica;
- (iii) As empresas Merck e Nike apresentaram destaque na Carteira Assimétrica, enquanto que as empresas Disney e Procter & Gamble tiveram relevante aparição na Carteira Antifrágil.

Importante destacar que empresas que foram destaque nos modelos CAPM e OCAPM, tais como Apple (OCAPM), IBM (CAPM) e United Health (ambos) não foram selecionadas como importantes por nenhuma das carteiras multiobjetivas, o que sugere que a busca dos algoritmos multiobjetivos foge das abordagens de escolha dos modelos CAPM e OCAPM.

A Figura 45 apresenta o resumo setorial das carteiras multiobjetivas. Os destaques são o setor de Tecnologia que representou cerca de 20% das escolhas de cada uma das carteiras na média e o setor de Indústria Farmacêutica, que ficou entre 12% e 16% das carteiras escolhidas. Além disso, a carteira Antifrágil teve como principal setor de destaque o Varejo, com 21,6% das carteiras não-dominadas em média.

Em relação às carteiras otimizadas pelos algoritmos evolutivos no mercado IBOVESPA, a Figura 46 mostra que na Carteira Global, as empresas mais escolhidas foram a Energias BR (ENBR3), Itaú (ITUB4) e Suzano (SUZB3). Na composição Antifrágil, a empresa ENBR3 também foi a mais escolhida, seguida da Vale (VALE5), Itaú (ITUB4), Cosan (CSAN3) e Suzano (SUZB3). Curioso notar também nessa abordagem a presença de duas empresas do ramo de telefonia como destaques: a Vivo (VIVT4) e a Tim (TIMP3). Por último, a carteira Assimétrica apresentou o Itaú (ITUB4), a Vale (VALE5) e a Usiminas (USIM5) como as empresas de maior destaque.

Figura 44: Composição das Carteiras - Dow Jones

DOW JONES	% TOTAL DE EMPRESAS ESCOLHIDAS - 1994 a 2019														
	CAPM	OCAPM	Convex	Global				Anti-frágil				Assimétrica			
				NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA	NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA	NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA
Apple	0,0%	10,5%	0,0%	1,4%	1,7%	7,9%	1,8%	2,2%	1,7%	5,3%	2,5%	2,4%	2,6%	7,5%	3,0%
Amer Exp	1,2%	1,3%	1,1%	1,1%	1,7%	1,0%	0,5%	0,1%	0,2%	0,1%	0,0%	2,2%	1,5%	1,1%	1,4%
Boeing	1,1%	2,4%	0,0%	10,4%	4,4%	8,1%	9,4%	2,9%	3,0%	4,9%	3,6%	7,0%	7,2%	6,2%	7,1%
Caterpillar	0,0%	3,5%	1,4%	1,8%	3,9%	1,2%	1,0%	0,4%	0,3%	0,1%	0,1%	2,8%	2,1%	1,3%	1,9%
Cisco	0,0%	3,1%	0,0%	4,4%	3,5%	2,7%	3,3%	1,7%	2,7%	1,6%	1,4%	4,0%	4,0%	3,1%	4,5%
Chevron	7,0%	0,6%	3,8%	1,2%	1,9%	1,3%	0,2%	1,2%	3,6%	1,4%	1,7%	1,5%	3,0%	2,4%	0,8%
Dupont	0,0%	0,6%	2,5%	5,9%	3,0%	3,8%	0,5%	3,0%	3,4%	1,3%	2,3%	1,1%	0,7%	0,9%	0,5%
Disney	0,8%	1,2%	1,7%	4,8%	4,6%	4,6%	1,9%	8,7%	8,4%	9,2%	9,6%	6,0%	4,9%	3,7%	4,2%
GE	3,6%	0,6%	2,4%	4,2%	2,8%	3,6%	0,4%	2,5%	2,9%	0,8%	1,2%	2,8%	2,3%	0,9%	0,0%
Goldman Sachs	1,8%	0,0%	5,3%	0,3%	1,8%	1,3%	0,1%	2,0%	0,0%	0,5%	0,4%	1,0%	0,7%	1,0%	0,0%
Home Depot	3,2%	6,6%	9,5%	2,6%	2,5%	2,5%	0,5%	2,3%	2,2%	1,9%	2,3%	3,3%	3,7%	2,2%	0,6%
IBM	13,6%	0,7%	4,6%	1,3%	2,6%	2,3%	0,9%	1,6%	1,9%	2,1%	1,6%	0,5%	0,1%	1,5%	0,1%
Intel	2,1%	0,1%	0,0%	4,0%	4,3%	3,1%	11,1%	5,1%	6,0%	4,8%	5,7%	2,8%	4,4%	3,6%	6,1%
Johnson Johnson	1,0%	2,4%	9,2%	3,2%	5,6%	2,6%	3,5%	5,5%	3,8%	4,4%	5,5%	5,1%	5,8%	5,2%	3,0%
JP Morgan	4,1%	0,0%	1,3%	2,3%	2,6%	2,7%	1,9%	2,0%	3,8%	2,4%	2,1%	1,8%	2,2%	2,5%	2,5%
Coca Cola	0,0%	3,5%	0,0%	2,1%	3,3%	2,7%	1,0%	2,2%	4,4%	2,8%	1,9%	4,6%	2,9%	3,4%	3,2%
MC Donalds	0,0%	8,9%	2,2%	1,5%	2,8%	2,0%	0,3%	1,2%	0,0%	1,4%	1,3%	0,3%	0,6%	1,0%	0,1%
3M	6,6%	3,9%	7,9%	6,2%	4,2%	3,3%	8,2%	6,6%	6,5%	7,4%	7,5%	7,4%	7,4%	5,5%	11,3%
Merck	4,2%	5,4%	2,9%	4,0%	3,7%	3,7%	13,4%	4,5%	5,9%	3,7%	5,5%	6,3%	5,3%	4,4%	5,7%
Microsoft	3,8%	4,4%	6,5%	2,8%	3,7%	3,1%	2,3%	3,8%	2,0%	3,1%	3,8%	2,0%	1,5%	2,2%	5,7%
Nike	1,6%	3,7%	2,3%	4,6%	3,7%	5,8%	5,9%	4,4%	2,8%	2,8%	2,9%	7,4%	6,8%	6,4%	11,7%
Pfizer	3,1%	2,4%	1,9%	2,8%	4,3%	2,6%	4,4%	2,4%	3,0%	2,9%	3,7%	4,6%	6,1%	5,2%	4,2%
Procter & Gamble	3,5%	4,4%	8,2%	3,4%	4,4%	3,7%	2,6%	8,8%	11,4%	9,4%	10,8%	1,0%	1,5%	1,8%	0,7%
Travelers	4,9%	0,8%	5,8%	2,2%	2,4%	0,9%	0,0%	1,1%	1,9%	1,1%	1,4%	1,9%	0,5%	0,6%	0,9%
United Health	14,7%	16,5%	2,0%	1,6%	2,9%	1,3%	1,3%	2,4%	2,8%	1,5%	2,0%	1,3%	1,0%	1,5%	0,6%
United Tech	9,3%	0,0%	9,3%	7,2%	5,0%	5,5%	12,7%	5,6%	3,2%	4,2%	4,9%	5,6%	7,7%	5,2%	9,7%
Visa	2,3%	8,8%	6,8%	1,6%	1,8%	1,6%	0,2%	2,4%	1,7%	2,0%	1,5%	1,7%	0,6%	1,0%	0,2%
Verizon	2,6%	0,2%	0,2%	3,4%	4,4%	3,0%	5,3%	2,0%	1,2%	4,2%	1,8%	3,1%	3,0%	2,8%	2,8%
Walmart	3,8%	3,1%	1,4%	6,6%	4,7%	5,4%	4,9%	10,3%	9,1%	8,7%	9,1%	6,1%	4,9%	4,4%	6,9%
Exxon	0,0%	0,5%	0,0%	1,0%	1,6%	6,7%	0,8%	1,2%	0,2%	3,9%	1,7%	2,4%	4,9%	11,2%	0,5%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 45: Carteiras por Setor – Dow Jones

DOW JONES	Carteira Global	Carteira Antifrágil	Carteira Assimétrica
Alimentos	3,88%	3,82%	4,01%
Aviação	8,05%	3,62%	6,88%
Comunicação	4,00%	2,28%	2,95%
Conglomerado	5,46%	7,02%	7,91%
Construção e Mineração	1,98%	0,22%	2,03%
Energia	2,73%	1,84%	1,50%
Entretenimento	3,99%	8,98%	4,70%
Indústria Farmacêutica	13,47%	12,72%	15,22%
Indústria Química	3,29%	2,52%	0,79%
Petróleo	3,70%	3,69%	6,70%
Serviços de Saúde	1,80%	2,18%	1,09%
Serviços Financeiros	7,00%	6,67%	6,36%
Tecnologia	24,68%	19,64%	22,46%
Varejo	10,95%	21,60%	9,33%
Vestuário	5,01%	3,21%	8,07%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 46: Composição das Carteiras - IBOVESPA

IBOVESPA	% TOTAL DE EMPRESAS ESCOLHIDAS - 1994 a 2019														
	CAPM	OCAPM	Convex	Global				Anti-frágil				Assimétrica			
				NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA	NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA	NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA
ABEV3	0,0%	14,7%	0,0%	3,2%	1,5%	6,5%	3,9%	6,0%	1,6%	7,8%	6,7%	2,5%	1,9%	6,7%	2,3%
BBAS3	0,0%	0,0%	0,7%	0,8%	2,9%	1,8%	3,8%	1,2%	0,0%	1,8%	1,1%	1,2%	3,1%	3,0%	1,9%
BBDC3	1,4%	1,2%	0,4%	2,0%	3,6%	2,0%	0,4%	0,2%	0,9%	0,2%	0,1%	2,5%	1,8%	0,9%	3,3%
BBDC4	7,3%	0,0%	0,0%	3,6%	3,5%	1,6%	0,9%	5,1%	1,6%	5,1%	4,0%	1,4%	0,8%	0,8%	1,3%
BBSE3	0,0%	0,0%	1,5%	0,0%	0,3%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,2%
BRAP4	10,5%	2,7%	0,0%	1,6%	1,9%	0,9%	0,0%	2,5%	1,5%	2,3%	3,0%	2,2%	1,3%	1,6%	4,0%
BRFS3	0,0%	0,0%	1,7%	0,9%	2,0%	3,5%	4,2%	0,1%	0,4%	0,3%	0,1%	0,1%	0,5%	0,1%	0,0%
BRKM3	1,7%	2,1%	0,0%	0,3%	3,7%	2,0%	1,3%	3,7%	3,0%	2,1%	2,9%	1,6%	1,5%	0,7%	1,7%
BRML3	0,0%	0,0%	0,0%	0,8%	1,0%	0,3%	0,5%	0,7%	0,2%	0,5%	0,4%	0,5%	0,3%	0,1%	0,0%
B3SA3	0,0%	0,0%	0,0%	1,0%	1,5%	0,5%	4,1%	0,0%	2,3%	0,3%	0,0%	2,2%	2,4%	0,6%	4,1%
CCRO3	0,0%	1,5%	1,9%	1,5%	1,0%	0,8%	0,1%	0,7%	1,4%	1,1%	0,1%	1,5%	2,3%	1,2%	2,0%
CESP6	0,0%	1,2%	0,0%	2,4%	0,9%	0,9%	2,7%	0,6%	4,6%	1,9%	0,9%	0,0%	0,5%	0,6%	0,0%
CIEL3	6,0%	1,2%	0,0%	0,5%	0,7%	0,4%	0,0%	0,0%	2,3%	0,5%	0,0%	2,8%	2,9%	1,2%	2,7%
CMIG4	0,0%	0,0%	0,0%	1,3%	3,2%	2,3%	1,4%	0,2%	2,8%	0,2%	0,1%	1,0%	1,5%	1,3%	0,7%
CPFE3	0,0%	2,0%	1,9%	0,5%	0,8%	1,3%	0,4%	0,3%	0,3%	0,6%	0,0%	0,6%	0,5%	0,4%	1,3%
CPLE6	0,0%	1,4%	1,1%	1,8%	4,5%	2,8%	2,7%	0,8%	1,0%	0,3%	1,4%	0,8%	1,3%	1,4%	2,0%
CSAN3	0,0%	0,0%	0,0%	2,2%	1,0%	0,7%	0,0%	4,3%	5,8%	4,0%	5,1%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%
CSNA3	0,0%	2,1%	6,0%	3,4%	3,2%	6,4%	16,0%	0,9%	3,3%	0,7%	1,4%	3,4%	2,5%	3,3%	3,3%
CTIP3	0,0%	1,7%	0,0%	0,0%	0,8%	0,5%	1,2%	0,0%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,4%	0,0%
CYRE3	0,0%	0,0%	0,0%	2,2%	2,4%	1,0%	0,0%	5,1%	0,3%	3,5%	4,6%	0,4%	0,9%	0,7%	0,0%
ECOR3	0,0%	0,0%	0,0%	0,8%	0,7%	1,2%	0,1%	1,2%	0,3%	1,0%	1,0%	0,6%	0,7%	0,8%	0,8%
EGIE3	0,0%	1,7%	4,7%	0,3%	3,6%	4,1%	4,1%	0,0%	0,4%	0,5%	0,0%	0,8%	0,3%	0,8%	0,3%
EMBR3	0,0%	0,0%	5,2%	0,9%	3,2%	1,9%	2,0%	0,5%	1,8%	0,5%	0,6%	0,7%	2,2%	0,7%	0,1%
ENBR3	0,0%	0,0%	3,2%	9,0%	9,4%	9,0%	8,9%	8,0%	8,1%	9,0%	9,2%	1,7%	1,8%	2,1%	2,1%
EQTL3	0,0%	0,0%	2,2%	1,6%	0,4%	1,0%	0,0%	1,4%	1,3%	0,9%	1,7%	2,0%	2,5%	1,2%	1,8%
YDUQ3	0,0%	5,9%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,2%	1,0%	0,1%	0,5%	0,3%	1,7%	0,0%
FIBR3	0,0%	0,5%	0,0%	0,3%	0,4%	0,5%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,5%	0,2%	0,0%
GGBR4	7,7%	3,7%	2,8%	1,8%	1,9%	2,5%	2,9%	2,9%	3,4%	3,5%	3,1%	3,4%	2,5%	2,8%	2,4%
GOAU4	0,0%	0,9%	0,0%	1,2%	2,9%	0,8%	0,0%	0,5%	2,7%	0,4%	0,5%	0,9%	1,0%	1,4%	0,2%
HYPE3	0,0%	1,1%	0,0%	0,0%	0,8%	0,7%	1,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,5%	2,0%	0,0%
ITSA4	0,0%	0,0%	5,1%	3,0%	3,5%	6,2%	6,1%	4,0%	2,2%	4,2%	3,7%	4,4%	4,2%	3,1%	4,9%
ITUB4	0,0%	0,0%	1,5%	6,6%	4,6%	5,2%	14,3%	5,3%	7,5%	4,6%	5,1%	8,6%	11,4%	7,2%	12,8%
JBSS3	3,2%	0,7%	0,0%	0,0%	1,4%	2,1%	0,0%	0,0%	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	0,0%
KLBN11	0,0%	0,0%	6,0%	0,3%	0,3%	0,1%	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%
COGN3	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	0,7%	0,2%	0,7%	0,5%	0,0%	0,2%	0,9%	0,3%	0,4%	0,3%	0,7%
LAME4	2,7%	9,2%	5,3%	3,4%	3,5%	1,3%	0,0%	1,6%	3,0%	1,1%	2,1%	3,3%	3,3%	2,0%	1,5%
LREN3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,9%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,2%	0,1%	0,9%	0,0%
MRFG3	0,0%	0,0%	0,2%	0,1%	1,7%	0,8%	0,2%	1,5%	0,0%	1,2%	1,3%	1,1%	0,2%	1,3%	0,0%
MRV3	0,6%	0,0%	3,2%	2,6%	1,1%	0,5%	0,0%	0,8%	0,0%	0,9%	0,8%	3,1%	3,7%	4,4%	2,5%
MULT3	0,0%	0,0%	0,0%	2,4%	0,9%	1,7%	0,0%	0,9%	0,0%	0,0%	0,5%	2,9%	3,3%	1,3%	4,7%
NATU3	5,0%	6,9%	0,6%	0,5%	0,5%	1,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	0,0%	1,7%	0,3%	0,9%	1,8%
PCAR4	1,1%	2,4%	2,8%	1,1%	1,2%	1,3%	1,7%	0,1%	0,1%	0,4%	0,0%	2,6%	0,8%	2,4%	1,4%
PETR3	5,6%	5,4%	2,0%	0,5%	1,3%	3,9%	1,8%	0,8%	1,6%	0,4%	1,0%	0,3%	0,1%	0,3%	0,0%
PETRA	0,0%	0,2%	0,0%	2,4%	2,4%	0,4%	0,0%	1,6%	2,0%	1,5%	1,6%	5,1%	5,6%	5,9%	4,4%
QUAL3	0,0%	0,6%	2,4%	0,0%	0,6%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%
RADL3	20,3%	13,4%	4,3%	1,0%	0,4%	1,4%	0,9%	0,9%	0,5%	0,5%	1,1%	2,7%	1,1%	1,1%	2,4%
RENT3	1,7%	0,2%	0,6%	1,5%	0,4%	0,0%	0,0%	0,1%	0,2%	0,0%	0,0%	2,3%	2,1%	1,7%	2,7%
RAIL3	2,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,4%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
SANB11	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%
SBSP3	7,7%	0,1%	5,1%	3,4%	0,8%	0,8%	2,2%	1,4%	3,2%	1,2%	1,6%	2,6%	2,2%	1,6%	0,4%
SMLS3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,2%	0,0%	0,0%	0,2%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,2%
SUZB3	0,0%	4,4%	3,3%	5,4%	3,8%	8,2%	3,1%	7,7%	2,5%	9,7%	6,1%	3,4%	4,3%	2,2%	2,3%
TIMP3	0,0%	0,0%	0,0%	2,5%	1,2%	0,7%	0,0%	7,2%	3,9%	5,1%	7,4%	0,5%	0,3%	1,5%	0,0%
UGPA3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,3%	0,0%
USIM5	0,0%	0,0%	2,5%	4,8%	1,5%	1,9%	1,7%	3,7%	4,8%	3,4%	3,3%	5,6%	7,1%	6,0%	6,6%
VALE3	15,4%	10,3%	14,7%	1,3%	0,7%	0,7%	0,0%	0,1%	0,2%	0,3%	0,0%	0,6%	0,9%	0,6%	0,0%
VALE5	0,0%	0,0%	7,3%	8,1%	0,8%	0,4%	2,8%	8,9%	9,2%	7,4%	8,4%	9,3%	8,8%	7,8%	10,3%
VIVT4	0,0%	0,0%	0,0%	2,5%	0,3%	0,5%	0,0%	5,6%	4,9%	7,9%	6,8%	3,4%	1,4%	7,3%	1,7%
WEGE3	0,0%	0,6%	0,0%	0,0%	0,1%	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,5%	0,0%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

No que diz respeito aos setores escolhidos no mercado IBOVESPA, a Figura 47 mostra que o setor de Serviços Financeiros foi o de maior destaque, com pouco mais de

20% das escolhas das carteiras multiobjetivas na média. Na Carteira Global, os setores de Energia (20,53%) e Siderurgia e Metalurgia (13,27%) foram os mais escolhidos pelos algoritmos. Já na Carteira Antifrágil, além do setor de Energia, destacam-se também os setores de Telefonia (12,16%) e Petróleo (10,37%). A Carteira Assimétrica apresentou ainda como relevantes os setores de Siderurgia e Metalurgia (13,11%), Mineração (9,58%), Energia (7,81%) e Petróleo (6,95%).

Figura 47: Carteiras por Setor – IBOVESPA

IBOVESPA	Carteira Global	Carteira Antifrágil	Carteira Assimétrica
Alimentos	7,97%	7,24%	4,33%
Aluguel de Carros	0,50%	0,10%	2,20%
Aviação	1,79%	0,85%	0,90%
Celulose	5,98%	6,56%	3,33%
Construção Civil	2,63%	4,00%	3,96%
Cosméticos	1,39%	0,04%	1,17%
Energia	20,53%	14,16%	7,81%
Entretenimento	1,91%	0,79%	3,28%
Máquinas e Equipamentos	0,10%	0,01%	0,15%
Mineração	2,47%	8,62%	9,58%
Petróleo	6,25%	10,37%	6,95%
Saneamento	1,72%	1,84%	1,71%
Serviços de Saúde	1,73%	0,78%	2,49%
Serviços Educacionais	0,58%	0,72%	1,04%
Serviços Financeiros	22,65%	18,28%	26,90%
Siderurgia e Metalurgia	13,27%	9,65%	13,11%
Telefonia	1,48%	12,16%	3,98%
Transporte	1,81%	1,70%	2,51%
Varejo	5,24%	2,12%	4,59%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Figura 48 apresenta a composição otimizada das carteiras multiobjetivas no mercado de Small Caps. Para fins de apresentação, as empresas cujo somatório dos pesos tenha sido menor que 0,5% das escolhas foram retiradas do mapa de calor.

Na Carteira Global, as empresas Marcopolo (POMO4) e SLC Agrícola (SLCE3) obtiveram pequeno destaque em relação às demais, sobretudo nos algoritmos GDE3 e IBEA. No algoritmo NSGA2, os destaques foram B2W Digital (BTOW3), Companhia de Saneamento Paraná (SAPR4) e Rossi Residencial (RSID3).

Na abordagem Antifrágil, os destaques ficaram para as empresas Eco Rodovias (ECOR3), FERBASA (FESA4), Multiplus (MPLU3), SLC Agrícola (SLCE3) e Tupy (TUPY3).

A Carteira Assimétrica apresentou a Companhia de Saneamento Paraná (SAPR4) como a mais escolhida dentre todas, seguidas de B2W Digital (BTOW3), Bradesco Participações (BRAP4) e a Magazine Luiza (MGLU3).

Figura 48: Composição das Carteiras - Small Caps

SMALL CAPS	% TOTAL DE EMPRESAS ESCOLHIDAS - 2009 a 2018														
	CAPM	OCAPM	Convex	Global				Anti-frágil				Assimétrica			
				NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA	NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA	NSGA2	NSGA3	GDE3	IBEA
ABCB4	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	1,1%	1,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,8%	0,0%	0,1%	0,4%	6,7%	0,0%
ALPA4	11,6%	5,7%	5,7%	1,4%	1,9%	0,8%	0,0%	0,1%	2,7%	0,0%	0,3%	3,6%	4,8%	1,0%	3,1%
ALSC3	0,0%	0,0%	2,2%	0,1%	1,8%	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	0,2%	0,3%	0,0%
ALUP11	20,0%	0,0%	0,0%	0,3%	0,9%	0,3%	0,0%	0,0%	2,3%	0,0%	0,7%	0,1%	0,1%	0,2%	0,0%
BEEF3	0,0%	0,0%	0,0%	5,5%	1,4%	2,3%	1,5%	2,5%	0,0%	2,7%	0,6%	1,6%	3,3%	0,9%	0,0%
BRAP4	0,0%	0,0%	1,1%	4,2%	2,5%	6,9%	2,7%	2,1%	0,0%	0,0%	0,7%	7,4%	13,1%	1,8%	9,1%
BRPR3	0,0%	0,0%	0,0%	1,0%	2,6%	0,9%	0,0%	0,0%	0,0%	0,3%	0,0%	0,0%	0,1%	0,1%	0,0%
BTOW3	13,4%	0,5%	0,0%	8,6%	2,3%	1,4%	0,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	8,3%	9,7%	9,0%	9,5%
CARD3	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%	2,0%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,0%	1,9%	1,0%	0,0%
CESP6	0,0%	0,7%	0,0%	0,5%	1,4%	0,3%	0,2%	1,1%	1,9%	0,1%	0,0%	0,7%	1,7%	0,7%	1,5%
CGAS5	0,0%	0,0%	18,9%	0,8%	1,7%	0,7%	0,0%	6,1%	0,0%	2,7%	3,8%	0,1%	0,2%	0,8%	0,0%
CPLE6	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%	0,9%	3,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%
CSMG3	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	2,5%	0,4%	0,0%	0,5%	0,0%	0,1%	0,0%	0,4%	0,0%	0,6%	0,0%
CYRE3	0,0%	0,0%	0,0%	0,3%	1,4%	1,2%	3,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,4%	0,7%	0,9%	0,0%
DIRR3	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	2,2%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,2%	0,0%
DTEX3	0,0%	0,8%	0,8%	0,5%	1,0%	0,4%	2,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	4,9%	5,0%	1,8%	1,5%
ECOR3	0,0%	0,0%	7,4%	2,1%	1,7%	0,7%	0,0%	15,5%	10,4%	13,6%	15,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%
ELPL4	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	0,9%	0,1%	0,0%	0,3%	2,2%	1,1%	0,0%	0,1%	0,0%	0,2%	0,0%
ESTC3	0,0%	3,7%	0,0%	0,3%	0,9%	0,2%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,2%	0,6%	0,0%	0,3%	1,0%
FESA4	0,0%	2,7%	0,0%	3,3%	2,4%	3,5%	14,1%	9,3%	12,2%	9,6%	11,5%	1,6%	1,0%	0,5%	0,0%
FLRY3	0,0%	14,4%	2,0%	2,4%	2,5%	4,3%	7,4%	0,3%	1,4%	0,9%	0,0%	2,0%	3,7%	1,3%	3,4%
GOLL4	0,0%	0,3%	9,2%	3,0%	1,3%	2,0%	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	3,1%	4,1%	3,7%	0,6%
GRND3	0,0%	0,0%	0,0%	2,1%	2,0%	1,4%	0,0%	0,4%	2,7%	0,4%	0,2%	1,1%	3,9%	0,7%	3,1%
HBOR3	0,0%	6,2%	6,2%	1,6%	0,9%	0,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,2%	1,5%	1,8%	3,5%
HGTX3	0,0%	2,7%	2,7%	3,3%	1,3%	1,0%	1,7%	3,1%	0,9%	0,9%	3,8%	4,6%	4,1%	2,1%	2,5%
IGTA3	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	1,3%	3,3%	4,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,8%	0,5%	1,4%	0,0%
JHSF3	0,0%	2,0%	0,0%	0,5%	1,8%	2,6%	13,4%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	1,5%	0,1%
LEVE3	0,0%	2,2%	0,0%	0,8%	2,5%	0,4%	0,0%	6,7%	1,9%	5,4%	7,6%	0,0%	0,1%	0,5%	2,3%
LIGT3	0,0%	0,0%	0,0%	1,9%	0,6%	0,6%	1,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,3%	0,2%	0,0%
LINX3	0,0%	15,6%	0,0%	4,0%	2,1%	3,9%	3,6%	3,3%	6,0%	7,2%	5,1%	2,2%	5,1%	10,3%	8,3%
MEAL3	0,0%	0,0%	0,0%	0,5%	1,7%	1,3%	1,8%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%
MGLU3	0,0%	7,8%	0,0%	3,9%	4,0%	4,4%	3,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	9,0%	5,5%	4,9%	15,9%
MILS3	0,0%	0,0%	3,5%	0,3%	3,8%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%
MPLU3	1,3%	0,0%	0,0%	3,5%	1,2%	0,7%	0,0%	9,2%	12,3%	7,2%	8,7%	2,3%	0,1%	0,5%	0,0%
MRVE3	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	2,3%	0,5%	0,0%	2,7%	2,8%	2,8%	4,9%	0,0%	0,1%	1,3%	0,0%
MYPK3	6,6%	0,0%	0,8%	0,3%	1,2%	2,6%	6,0%	0,3%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	0,1%	0,4%	0,0%
ODPV3	0,0%	1,1%	1,1%	6,2%	3,2%	2,8%	0,0%	0,5%	1,8%	0,8%	0,2%	0,0%	0,3%	4,6%	8,2%
POMO4	0,0%	0,0%	20,0%	0,4%	2,7%	9,8%	11,7%	0,2%	2,2%	0,6%	0,6%	0,0%	0,5%	0,8%	0,0%
QGEP3	0,0%	0,0%	0,0%	3,6%	2,3%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	0,0%	3,3%	1,4%	1,6%	2,8%
RLOG3	0,0%	1,4%	0,0%	0,2%	1,1%	4,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
RSID3	0,0%	0,0%	0,9%	8,1%	1,0%	3,4%	0,2%	0,0%	0,0%	0,1%	0,0%	5,5%	1,6%	4,2%	1,2%
SAPR4	20,8%	18,2%	5,2%	8,6%	1,3%	1,9%	3,2%	5,5%	5,7%	3,1%	5,7%	17,6%	15,5%	12,0%	18,7%
SEER3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%	0,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
SLCE3	20,0%	7,2%	0,0%	3,9%	3,1%	4,7%	13,5%	10,9%	6,1%	17,5%	10,9%	5,8%	3,4%	2,2%	2,3%
SULA11	4,9%	0,3%	0,3%	0,6%	1,6%	1,4%	0,0%	4,5%	4,4%	0,5%	5,3%	4,0%	2,0%	1,8%	0,0%
TUPY3	0,0%	0,5%	7,7%	2,7%	0,8%	0,1%	0,0%	12,0%	9,3%	15,4%	13,5%	1,8%	0,9%	1,8%	0,0%
VVAR3	0,0%	3,9%	0,0%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,8%	0,0%	0,8%	1,3%	4,3%	0,9%
WIZS3	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%	1,4%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,6%	0,0%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Dentre os setores escolhidos com destaque, a Figura 49 mostra a Construção Civil como o mais importante na Carteira Global com 14,59% das escolhas, seguidos de Transportes (10,36%) e Mineração (9,50%). A Carteira Antifrágil centrou boa parte

das suas escolhas em 04 setores: Mineração (23,90%), Tecnologia (14,81%), Transporte (14,60%) e Agropecuária (11,33%). A Carteira Assimétrica apresentou o Varejo (19,79%) e Saneamento (16,21%) como os setores mais relevantes.

Ao contrário dos demais mercados, o mercado de Small Caps foi o que teve a distribuição dos setores mais pulverizada. O setor de Mineração foi o único que contou com boa participação de todas as carteiras (Global, Antifrágil e Assimétrica).

Figura 49: Carteiras por Setor – SMALL CAPS

SMALL CAPS	Carteira Global	Carteira Antifrágil	Carteira Assimétrica
Agropecuária	6,33%	11,33%	3,43%
Alimentos	5,91%	2,22%	2,42%
Construção Civil	14,59%	4,45%	9,50%
Energia Elétrica	2,13%	2,45%	1,64%
Lazer	0,56%	0,38%	0,05%
Madeira e Papel	0,21%	0,00%	3,33%
Máquinas e Equipamentos	1,47%	5,50%	0,86%
Material Hospitalar	3,07%	1,61%	5,94%
Mineração	9,50%	23,90%	9,80%
Petróleo e Gás	0,58%	3,13%	0,28%
Saneamento	4,09%	5,16%	16,21%
Serviços	0,23%	1,19%	0,35%
Serviços de Saúde	0,51%	0,02%	0,00%
Serviços Educacionais	0,95%	0,07%	0,50%
Serviços Financeiros	4,07%	3,96%	6,06%
Siderurgia	0,99%	0,86%	0,33%
Tecnologia	4,95%	14,81%	7,21%
Transporte	10,36%	14,60%	3,28%
Varejo	6,46%	0,47%	19,79%
Vestuário	3,01%	3,88%	9,02%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.3.4 Análise de desempenho fora da amostra

Como os algoritmos evolutivos apresentam soluções não-dominadas entre si, optou-se por apresentar o valor médio dentre todas as soluções fora da amostra da melhor execução otimizada dentro da amostra.

4.3.4.1 Rentabilidade Bruta

A Figura 50 mostra a rentabilidade bruta de cada carteira em cada um dos períodos analisados, destacando-se em azul qual carteira foi a vencedora de cada período. Analisando as carteiras individualmente, percebe-se que a carteira Antifrágil venceu 04 das 13 janelas temporais, a carteira Ômega (OCAPM) venceu 03, seguida pela carteira CAPM que venceu 02 janelas. Nos períodos de grande crise econômica (2000, 2008 e agora em 2020 com o COVID-19), o T-Bond foi o vencedor dentre as carteiras.

Figura 50: Rentabilidade Bruta por período - Dow Jones

DOW JONES		1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	2020
CAPM		63,8%	64,7%	-37,1%	12,0%	19,8%	0,1%	-12,6%	37,6%	33,3%	20,4%	66,0%	16,8%	-9,1%
OCAPM		53,0%	65,6%	-67,2%	49,8%	41,9%	56,1%	-6,9%	16,6%	10,9%	31,2%	35,4%	7,5%	-5,2%
Naive		53,9%	51,7%	-12,6%	7,2%	17,1%	29,5%	-11,9%	21,2%	41,4%	12,8%	33,5%	13,3%	-18,9%
Convex		35,8%	24,7%	-42,9%	-2,7%	-3,9%	28,7%	1,4%	26,3%	71,5%	18,6%	31,7%	11,4%	-20,4%
Index		43,5%	37,4%	-13,7%	4,2%	2,5%	21,3%	-24,1%	15,8%	30,5%	5,0%	35,0%	13,9%	-14,7%
T-Bond		12,4%	10,6%	10,6%	8,4%	8,4%	9,2%	6,8%	5,9%	4,1%	4,6%	4,1%	2,2%	0,4%
Carteira Global	NSGA2	66,6%	27,7%	-9,1%	16,2%	28,0%	30,1%	-14,4%	15,0%	51,9%	15,7%	25,8%	15,1%	-31,9%
	NSGA3	59,8%	44,0%	-8,8%	4,1%	20,7%	27,6%	-16,2%	18,2%	46,0%	12,9%	32,5%	15,9%	-22,6%
	GDE3	61,3%	43,0%	-24,3%	8,0%	59,7%	38,5%	-13,1%	14,3%	43,2%	16,6%	16,8%	17,3%	-28,8%
	IBEA	61,0%	39,2%	-8,2%	26,6%	38,0%	27,7%	-34,3%	8,2%	59,1%	9,9%	27,1%	16,7%	-9,1%
Carteira Antifrágil	NSGA2	73,1%	59,3%	-24,8%	7,2%	69,2%	30,1%	-6,8%	10,2%	56,8%	7,7%	37,3%	16,3%	-22,5%
	NSGA3	64,7%	72,9%	-25,6%	9,5%	39,9%	28,9%	2,8%	13,7%	54,0%	9,3%	28,8%	20,8%	-22,2%
	GDE3	63,8%	70,6%	-26,8%	5,1%	80,3%	35,4%	-2,1%	11,6%	56,1%	8,5%	39,4%	20,4%	-42,3%
	IBEA	72,0%	35,0%	-23,9%	6,5%	60,6%	30,7%	-7,7%	11,5%	55,5%	8,1%	38,6%	17,4%	-37,9%
Carteira Assimétrica	NSGA2	52,3%	39,3%	-7,3%	10,3%	16,8%	35,5%	-13,5%	18,5%	54,2%	17,4%	23,6%	15,2%	-29,4%
	NSGA3	53,9%	40,6%	-11,9%	11,3%	10,4%	36,6%	-10,8%	20,3%	47,9%	15,2%	22,1%	13,3%	-34,7%
	GDE3	58,8%	37,7%	-10,7%	8,7%	35,3%	42,9%	-12,1%	16,8%	42,4%	14,2%	24,6%	18,4%	-27,6%
	IBEA	53,4%	51,7%	-15,4%	17,6%	8,2%	35,4%	-8,8%	22,0%	52,8%	10,2%	15,7%	13,0%	-20,5%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

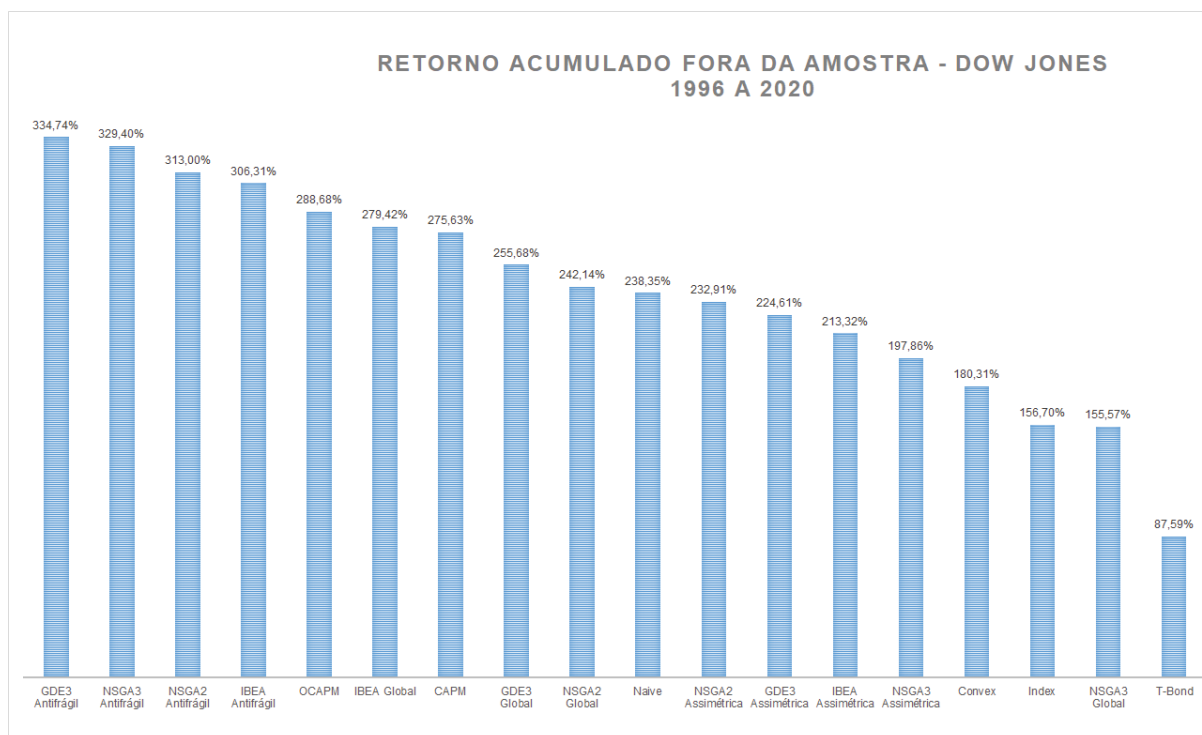
Mais importante que analisar individualmente, a Figura 51 apresenta o retorno acumulado de cada um dos modelos e algoritmos. O algoritmo GDE3 Antifrágil foi o vencedor, com 334,74% de retorno acumulado de 1996 a 2020. O NSGA3 Antifrágil apresentou o segundo melhor desempenho, com 329,40% de retorno acumulado. Em terceiro, o NSGA2 Antifrágil ficou com 313% e o IBEA Antifrágil em quarto com 306,31%. A carteira Ômega ficou em quinto lugar com 288,68%, seguidos do IBEA Global (279,42%) e CAPM (275,63%).

Percebe-se claramente que a abordagem antifrágil foi a que obteve melhor desempenho fora da amostra no mercado americano, com as 04 primeiras colocações no ranking de rentabilidade. Praticamente todos os modelos e algoritmos foram superiores ao índice americano (Índice Dow Jones), ratificando assim que uma inteligência de portfólio é capaz de produzir desempenho superior. Até mesmo a carteira Naive tem sido uma melhor escolha do que simplesmente a aplicação no Índice (238,35% contra 156,70%), dados os benefícios de sua diversificação.

Avaliar os resultados fora da amostra apenas pelo retorno acumulado pode ser perigoso por negligenciar o risco envolvido na relação. Para isso, foram produzidas algumas estatísticas descritivas de cada modelo e carteiras de forma a elucidar uma melhor avaliação das alternativas envolvendo retorno e risco simultaneamente.

A Tabela 27 apresenta as estatísticas descritivas do mercado Dow Jones. Conforme já relatado, a carteira vencedora do retorno acumulado foi a GDE3 Antifrágil que, como consequência, apresentou a melhor média de retorno por janela temporal, com 25,75% a cada 02 anos. Para comparar o retorno com o risco incorrido, foi calculado o Coeficiente de Variação (CV) que indica a relação de risco (desvio-padrão) pelo retorno incorrido (média). Assim, percebemos que o NSGA3 Antifrágil apresenta um CV de 1.01, inferior ao

Figura 51: Retorno Acumulado - Dow Jones - Rolling Windows



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

do GDE3 (1.33), indicando uma melhor relação risco x retorno. Corroborando esse bom desempenho, a carteira NSGA3 Antifrágil ainda alcançou um $\hat{\Omega}$ de 10.08, a maior assimetria positiva entre todas as carteiras (0.1850) e um *drawdown* máximo de apenas 22.25%.

Dentre as outras carteiras multiobjetivas, o NSGA3 da carteira Global também se destacou, apresentando um CV de 1.01, graças ao baixo desvio-padrão encontrado (21,21%). Além disso, a carteira contou com um *drawdown* máximo de apenas 14,44% no período. Pelo lado negativo, a carteira convexa foi a que apresentou o maior CV (2.06) e a carteira $\hat{\Omega}$ apresentou o maior *drawdown* máximo entre todas as carteiras, com um rebaixamento máximo de 67,18% do saldo. Comparando o $\hat{\Omega}$ com CAPM, embora o $\hat{\Omega}$ tenha tido maior média, seu desvio-padrão maior fez com que seu CV fosse aumentado e sua relação risco x retorno passou a ser desfavorável em relação ao modelo CAPM.

Assim, conclui-se que a melhor alternativa fora da amostra para o mercado americano foi o NSGA3 da carteira Antifrágil, que apresentou a melhor relação risco x retorno (menor CV), o terceiro menor *drawdown* entre todas as carteiras multiobjetivas, o maior $\hat{\Omega}$ e a maior assimetria dentre todos. Importante destacar também a presença do NSGA3 da carteira Global, com o mesmo CV e o menor *drawdown* máximo entre to-

dos. O bom desempenho do NSGA3 permite ratificar sua importância em abordagens multiobjetivas, sobretudo a da carteira Global, que envolve 06 objetivos simultâneos.

Tabela 27: Estatísticas Descritivas dos Retornos fora da amostra - Dow Jones

		Média	Desvio-Padrão	Ômega	Assimetria	Curtose	Drawdown Máximo	Coefficiente de Variação
	CAPM	21,20%	31,81%	3,1950	- 0,0515	- 0,8025	-37,12%	1,50
	OCAPM	22,21%	35,76%	3,0708	- 1,1054	0,9577	-67,18%	1,61
	Naive	18,33%	23,65%	3,4200	- 0,0710	- 1,0137	-18,86%	1,29
	Convexa	13,87%	28,56%	1,9002	- 0,0772	0,1821	-42,91%	2,06
	Index	12,05%	21,39%	1,8602	- 0,1637	- 1,0749	-24,06%	1,77
	T-Bond	6,74%	3,59%		- 0,1389	- 0,9560	0,00%	0,53
Global	NSGA2	18,63%	25,31%	3,2830	0,0096	- 0,2615	-26,40%	1,36
	NSGA3	21,07%	21,21%	5,1440	0,0940	- 0,5857	-14,44%	1,01
	GDE3	19,67%	29,12%	3,0673	- 0,2187	- 0,9050	-29,72%	1,48
	IBEA	21,49%	26,07%	4,1959	- 0,3972	- 0,0323	-34,35%	1,21
Antifrágil	NSGA2	24,08%	33,26%	4,0859	0,0742	- 1,2187	-24,81%	1,38
	NSGA3	25,34%	25,66%	10,0869	0,1850	- 0,4154	-22,25%	1,01
	GDE3	25,75%	34,34%	4,6377	- 0,1473	- 0,5718	-42,27%	1,33
	IBEA	23,56%	30,37%	4,5896	- 0,3115	- 0,6838	-37,87%	1,29
Assimétrica	NSGA2	17,92%	24,52%	3,1395	- 0,2914	- 0,5515	-29,39%	1,37
	NSGA3	15,22%	22,20%	2,7906	- 0,5710	0,2978	-34,69%	1,46
	GDE3	17,28%	24,16%	2,8078	- 0,5793	- 0,8233	-27,55%	1,40
	IBEA	16,41%	21,08%	3,3650	0,0389	- 0,6338	-20,48%	1,28

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Figura 52 apresenta um mapa de calor dos setores escolhidos apresentados em colunas ordenadas pelas carteiras vencedoras em termos de rentabilidade acumulada. Nota-se que as quatro carteiras melhores colocadas são as antifrágeis e trazem os setores de Tecnologia e Varejo como os mais escolhidos, seguidos pela indústria farmacêutica. Nesta figura, percebe-se a diferença das carteiras antifrágeis em relação à carteira CAPM: esta última escolheu empresas de Serviços Financeiros e Serviços de Saúde, enquanto que as primeiras não deram ênfase a estes setores. O contrário também ocorre: carteiras antifrágeis escolheram empresas dos setores de Varejo, Indústria Farmacêutica e Entretenimento, enquanto que no modelo CAPM estes setores apresentaram baixa participação. O mesmo ocorre com o modelo OCAPM, que privilegiou, além dos setores de Serviços Financeiros e Serviços de Saúde, o setor de Alimentos, que da mesma forma não se mostrou relevante nas carteiras antifrágeis.

No IBOVESPA, a Figura 53 mostra o modelo CAPM com 03 janelas temporais vencedoras, seguido pelo modelo Ômega e Carteiras Global e Assimétrica, com 02 janelas cada. Assim como no mercado americano, os anos da crise das empresas ponto com (2000), a crise brasileira (2014-2015) e a crise da pandemia do COVID-19 (2020) foram vencidos pela Renda Fixa (CDI).

A Figura 54 mostra que na rentabilidade acumulada, o NSGA3 Antifrágil foi o vencedor, com 407,50% de rentabilidade em 24 anos, o que daria uma média de quase 17%

Figura 52: Análise por Setores - Dow Jones

DOW JONES	GDE3 Antifrágil	NSGA3 Antifrágil	NSGA2 Antifrágil	IBEA Antifrágil	OCAPM	IBEA Global	CAPM	GDE3 Global	NSGA2 Global	NSGA2 Assimétrica	GDE3 Assimétrica	IBEA Assimétrica	NSGA3 Assimétrica	Convex	NSGA3 Global
Alimentos	4,26%	4,39%	3,37%	3,25%	12,47%	1,24%	0,04%	4,71%	3,55%	4,89%	4,42%	3,29%	3,44%	2,25%	6,04%
Aviação	4,91%	3,03%	2,91%	3,61%	2,36%	9,37%	1,15%	8,05%	10,39%	6,97%	6,23%	7,13%	7,20%	0,00%	4,40%
Comunicação	4,16%	1,21%	1,97%	1,80%	0,18%	5,29%	2,59%	2,97%	3,39%	3,14%	2,83%	2,83%	2,98%	0,18%	4,35%
Conglomerado	7,44%	6,46%	6,62%	7,55%	3,85%	8,16%	6,61%	3,29%	6,16%	7,43%	5,51%	11,26%	7,41%	7,87%	4,22%
Construção e Mineração	0,10%	0,33%	0,38%	0,08%	3,50%	1,00%	0,00%	1,16%	1,85%	2,82%	1,29%	1,93%	2,08%	1,41%	3,93%
Energia	0,77%	2,86%	2,54%	1,20%	0,63%	0,39%	3,60%	3,57%	4,22%	2,80%	0,90%	0,01%	2,30%	2,39%	2,75%
Entretenimento	9,19%	8,44%	8,69%	9,61%	1,22%	1,88%	0,82%	4,64%	4,83%	5,95%	3,74%	4,18%	4,91%	1,70%	4,63%
Indústria Farmacêutica	11,09%	12,70%	12,40%	14,67%	10,15%	21,25%	8,37%	8,99%	10,08%	15,96%	14,81%	12,91%	17,21%	13,92%	13,54%
Indústria Química	1,34%	3,37%	3,05%	2,31%	0,58%	0,46%	0,00%	3,79%	5,88%	1,06%	0,88%	0,52%	0,70%	2,50%	3,02%
Petróleo	5,29%	3,73%	2,34%	3,40%	1,18%	1,01%	6,96%	8,00%	2,28%	3,96%	13,61%	1,32%	7,93%	3,80%	3,52%
Serviços de Saúde	1,51%	2,80%	2,37%	2,02%	16,51%	1,33%	14,66%	1,31%	1,63%	1,28%	1,55%	0,58%	0,96%	1,99%	2,93%
Serviços Financeiros	5,98%	7,67%	7,51%	5,52%	10,91%	2,69%	14,34%	7,42%	7,48%	8,63%	6,23%	5,03%	5,53%	20,12%	10,41%
Tecnologia	21,17%	17,55%	20,04%	19,82%	18,72%	32,05%	28,78%	24,65%	21,14%	17,26%	23,09%	29,10%	20,41%	20,39%	20,88%
Varejo	20,00%	22,72%	21,43%	22,23%	14,07%	8,02%	10,50%	11,62%	12,52%	10,40%	8,54%	8,24%	10,12%	19,14%	11,65%
Vestuário	2,77%	2,75%	4,37%	2,93%	3,67%	5,86%	1,58%	5,84%	4,61%	7,45%	6,36%	11,66%	6,83%	2,34%	3,72%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 53: Rentabilidade Bruta por período - IBOVESPA

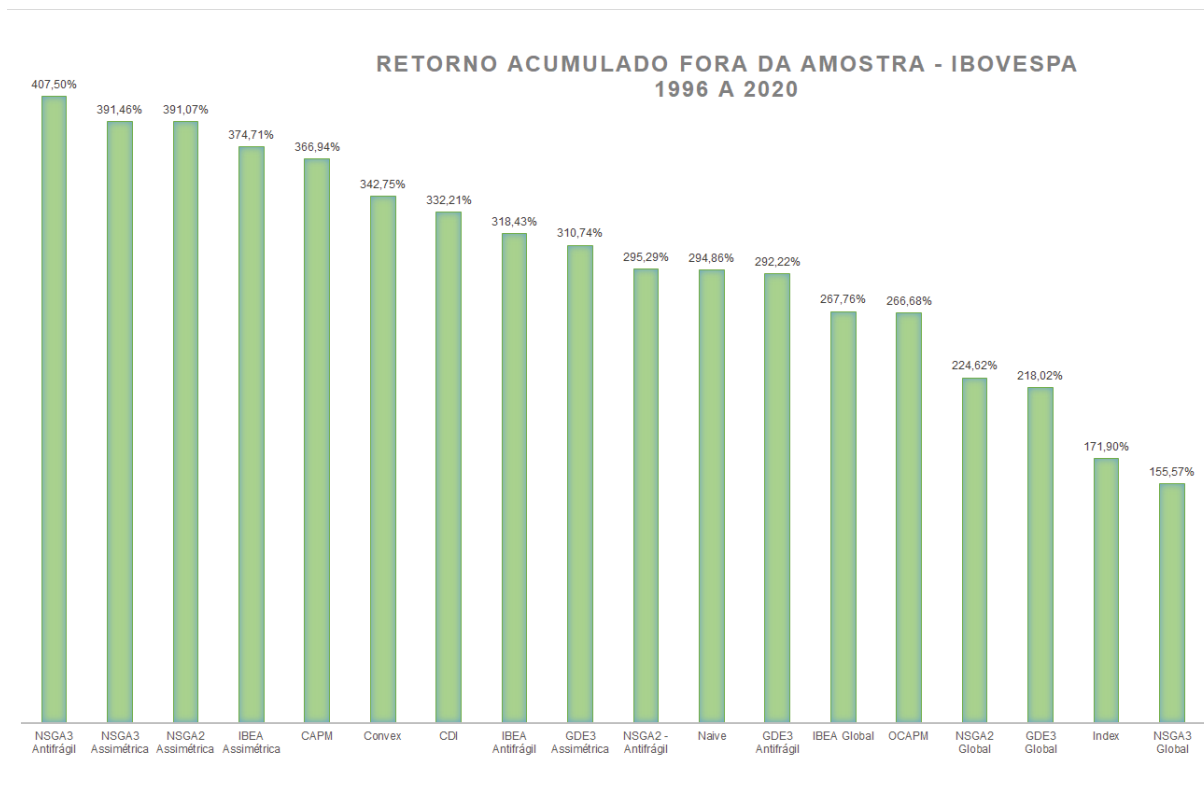
IBOVESPA	1996-1997	1998-1999	2000-2001	2002-2003	2004-2005	2006-2007	2008-2009	2010-2011	2012-2013	2014-2015	2016-2017	2018-2019	2020	
CAPM	0,0%	38,6%	24,3%	12,7%	100,7%	48,0%	-11,3%	28,1%	26,5%	-25,2%	113,5%	29,7%	-20,2%	
OCAPM	0,0%	65,3%	-55,5%	58,9%	103,8%	53,0%	-12,5%	-2,5%	8,2%	-69,2%	113,5%	14,6%	-12,4%	
Naive	41,4%	36,3%	-22,3%	63,6%	84,2%	91,9%	11,3%	-8,2%	-0,3%	-73,1%	74,0%	30,8%	-34,5%	
Convex	25,7%	65,3%	6,4%	85,1%	73,8%	97,7%	4,2%	-22,2%	19,3%	-49,3%	57,5%	17,2%	-37,9%	
Index	72,6%	4,5%	-49,0%	27,4%	61,9%	92,6%	8,8%	-26,4%	-31,9%	-68,3%	73,3%	39,8%	-33,2%	
CDI	45,2%	46,9%	31,5%	37,9%	32,1%	24,8%	20,7%	20,0%	15,5%	22,3%	22,4%	11,8%	1,3%	
Carteira Global	NSGA2	47,5%	3,1%	-20,6%	77,0%	6,9%	94,3%	4,3%	-0,8%	-8,4%	-61,5%	78,4%	32,2%	-27,6%
	NSGA3	2,8%	0,5%	-1,5%	50,9%	4,4%	76,7%	19,2%	-8,3%	0,2%	-60,3%	69,5%	38,0%	-36,5%
	GDE3	44,4%	-2,6%	-4,2%	63,7%	3,9%	74,0%	20,7%	0,4%	5,9%	-62,4%	76,1%	24,7%	-26,4%
	IBEA	64,8%	0,1%	-21,6%	44,9%	6,0%	127,5%	31,1%	-12,1%	-2,1%	-33,5%	73,8%	5,0%	-16,1%
Carteira Antifrágil	NSGA2	49,3%	10,7%	-23,2%	85,3%	92,5%	91,3%	0,2%	-26,3%	-0,7%	-77,2%	47,5%	64,6%	-18,7%
	NSGA3	49,9%	47,6%	-29,9%	82,3%	85,0%	106,5%	1,5%	1,3%	-31,4%	55,8%	70,9%	-37,7%	
	GDE3	51,8%	3,4%	-22,8%	75,2%	93,2%	87,7%	5,9%	-31,7%	4,3%	-65,9%	44,0%	71,4%	-24,4%
	IBEA	52,0%	14,9%	-28,6%	89,4%	93,7%	96,4%	-1,0%	-21,3%	3,0%	-80,6%	48,1%	71,1%	-18,5%
Carteira Assimétrica	NSGA2	31,4%	80,0%	-29,3%	111,9%	90,7%	78,7%	-0,4%	-5,7%	1,3%	-64,4%	94,9%	38,8%	-36,8%
	NSGA3	21,3%	79,9%	-22,7%	103,4%	91,2%	86,9%	-0,6%	-10,6%	-5,5%	-45,7%	92,6%	44,1%	-42,8%
	GDE3	29,7%	46,2%	-33,0%	103,6%	85,1%	81,3%	5,0%	-32,7%	0,2%	-72,9%	84,7%	40,3%	-26,8%
	IBEA	21,8%	56,1%	-27,0%	127,1%	95,8%	80,5%	2,9%	-5,1%	-1,2%	-60,3%	95,7%	31,3%	-42,8%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

ao ano. Em seguida, a carteira Assimétrica aparece com 03 algoritmos: NSGA3, NSGA2 e IBEA, respectivamente, com 391,46%, 391,07% e 374,71%, afirmando seu bom desempenho para o mercado brasileiro. O CAPM aparece em quinto lugar, com uma rentabilidade acumulada de 368,94%. A carteira convexa é a sexta melhor colocada, com 342,75% de retorno acumulado. Essas 06 carteiras foram as únicas que superaram o desempenho da Renda Fixa (CDI) no período, ou seja, apresentaram prêmio líquido positivo no período, o que reacende a discussão sobre a viabilidade da propensão ao risco em Renda Variável em mercados emergentes como o Brasil. O CDI, como sétimo lugar, remunerou 332,21% e ficou acima de todas as carteiras multiobjetivas Global e também do modelo OCAPM, carteira Naive e do próprio Índice.

No mercado IBOVESPA, a carteira NSGA3 Antifrágil apresentou o maior retorno acumulado fora da amostra. A Tabela 28 mostra que o NSGA3 Antifrágil também apresentou o menor coeficiente de variação (1.56) dentre as carteiras multiobjetivas,

Figura 54: Retorno Acumulado - IBOVESPA - Rolling Windows



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

caracterizando-se assim como uma ótima alternativa de risco x retorno, já que seu desvio-padrão se apresentou inferior aos demais. Isso justifica o valor mais alto de $\hat{\Omega}$ dentre todos (1.37). Em relação ao rebaixamento, o NSGA3 Antifrágil apresentou um *drawdown* máximo de 37.75%, o terceiro menor entre todos. A carteira CAPM também apresentou desempenho interessante: seu coeficiente de variação foi inferior à carteira NSGA3 Antifrágil (1.47 contra 1.56), seu *drawdown* máximo foi de apenas 25.22%, o menor entre todos e seu coeficiente de assimetria o mais elevado dentre todas as alternativas (0.79).

Como conclusão das estatísticas descritivas, assim como no Dow Jones, a carteira NSGA3 Antifrágil apresentou a maior média, o segundo menor coeficiente de variação, o maior $\hat{\Omega}$ e o terceiro menor *drawdown* máximo entre todos. Juntamente com o CAPM, podem ser consideradas as melhores carteiras para o mercado brasileiro do IBOVESPA.

A Figura 55 relaciona os setores das carteiras vencedoras em ordem de rentabilidade. Os setores de destaque das carteiras vencedoras foram os de Serviços Financeiros, Siderurgia e Metalurgia e Mineração. Pode-se notar que na carteira NSGA3 Antifrágil, o setor de Energia apresentou-se relevante (18,50%) mas foi ignorado na carteira CAPM (0,02%) e não teve participação muito expressiva nas carteiras Assimétricas. Isso confirma a

Tabela 28: Estatísticas Descritivas dos Retornos fora da amostra - IBOVESPA

		Média	Desvio-Padrão	Ômega	Assimetria	Curtose	Drawdown Máximo	Coefficiente de Variação
	CAPM	28,23%	41,60%	1,1874	0,7940	- 0,0650	-25,22%	1,47
	OCAPM	20,51%	55,68%	0,7808	0,1554	- 0,8274	-69,20%	2,71
	Naive	22,68%	49,63%	0,8523	- 0,2998	- 0,8089	-73,09%	2,19
	Convexa	26,37%	47,00%	1,0492	- 0,0593	- 1,1155	-49,25%	1,78
	Index	13,22%	52,51%	0,5599	0,0136	- 1,3169	-68,34%	3,97
	CDI	25,55%	12,99%		0,0495	- 0,5397	0,00%	0,51
Global	NSGA2	17,28%	46,09%	0,6353	0,2361	- 0,8397	-61,47%	2,67
	NSGA3	11,97%	39,07%	0,4391	0,0462	- 0,5088	-60,32%	3,27
	GDE3	16,77%	40,15%	0,5538	- 0,1080	- 0,5061	-62,42%	2,39
	IBEA	20,60%	46,04%	0,7480	1,0040	0,1766	-33,47%	2,24
Antifrágil	NSGA2	22,71%	53,21%	0,8742	- 0,1688	- 0,9904	-77,18%	2,34
	NSGA3	31,35%	49,00%	1,3729	- 0,0572	- 1,3654	-37,75%	1,56
	GDE3	22,48%	51,43%	0,8618	- 0,0846	- 1,2354	-65,95%	2,29
	IBEA	24,49%	55,28%	0,9526	- 0,2064	- 0,9566	-80,60%	2,26
Assimétrica	NSGA2	30,08%	57,35%	1,2260	- 0,0774	- 1,3046	-64,43%	1,91
	NSGA3	30,11%	55,30%	1,2252	0,0315	- 1,5631	-45,68%	1,84
	GDE3	23,90%	55,66%	0,9254	- 0,1293	- 1,1692	-72,86%	2,33
	IBEA	28,82%	58,45%	1,1585	0,1620	- 1,1218	-60,33%	2,03

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

ideia de que os algoritmos multiobjetivos buscam empresas fora do radar dos modelos tradicionais e nem sempre consideram ativos tradicionalmente incluídos nos modelos CAPM. Um exemplo disso é o setor de Serviços de Saúde: enquanto que no modelo CAPM ele representa 20,28% das escolhas, nas carteiras Antifrágil e Assimétrica ele não representa nem 1% das escolhas.

Em termos práticos, as carteiras vencedoras do mercado IBOVESPA sugerem a aplicação do portfólio em: 1 banco, 1 empresa de energia elétrica, 1 siderúrgica, 1 na área de petróleo e 1 na área de mineração.

Figura 55: Análise por Setores - IBOVESPA

IBOVESPA	NSGA3 Antifrágil	NSGA3 Assimétrica	NSGA2 Assimétrica	IBEA Assimétrica	CAPM	Convex	IBEA Antifrágil	GDE3 Assimétrica	NSGA2 Antifrágil	GDE3 Antifrágil	IBEA Global	OCAPM	NSGA2 Global	GDE3 Global	NSGA3 Global
Alimentos	3,89%	2,70%	3,83%	2,30%	3,16%	1,86%	8,16%	8,50%	7,68%	9,24%	8,29%	15,36%	4,20%	12,87%	6,54%
Aluguel de Carros	0,24%	2,08%	2,27%	2,75%	1,67%	0,57%	0,00%	1,73%	0,10%	0,04%	0,00%	0,20%	1,50%	0,04%	0,45%
Aviação	1,80%	2,16%	0,67%	0,08%	0,00%	5,16%	0,63%	0,68%	0,47%	0,50%	2,01%	0,00%	0,82%	1,88%	3,15%
Celulose	2,49%	4,79%	3,69%	2,33%	0,00%	9,27%	6,19%	2,52%	7,82%	9,74%	5,08%	4,86%	5,97%	8,84%	4,48%
Construção Civil	0,30%	4,64%	3,55%	2,53%	0,56%	3,16%	5,37%	5,14%	5,95%	4,40%	0,00%	0,00%	4,80%	1,52%	3,44%
Cosméticos	0,06%	0,26%	1,72%	1,77%	5,00%	0,63%	0,00%	0,92%	0,01%	0,08%	0,00%	6,85%	0,50%	0,97%	0,45%
Energia	18,50%	6,49%	6,92%	8,07%	0,02%	13,05%	13,36%	7,77%	11,38%	13,38%	20,16%	6,33%	16,89%	21,30%	22,75%
Entretenimento	0,19%	3,56%	3,42%	4,74%	0,00%	0,00%	0,88%	1,40%	1,54%	0,54%	0,47%	0,00%	3,17%	2,03%	1,95%
Máquinas e Equipamentos	0,00%	0,06%	0,02%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,51%	0,02%	0,03%	0,00%	0,62%	0,04%	0,31%	0,06%
Mineração	9,39%	9,65%	9,90%	10,35%	15,38%	22,00%	8,40%	8,44%	9,00%	7,69%	2,78%	10,28%	9,44%	1,06%	1,51%
Petróleo	12,38%	7,28%	7,05%	6,10%	7,27%	2,01%	10,70%	7,39%	10,42%	7,98%	3,09%	7,62%	5,50%	7,09%	8,84%
Saneamento	3,18%	2,24%	2,55%	0,40%	7,69%	5,06%	1,62%	1,65%	1,40%	1,17%	2,19%	0,09%	3,38%	0,85%	0,81%
Serviços de Saúde	0,54%	1,68%	2,85%	2,38%	20,28%	6,64%	1,08%	3,05%	0,89%	0,62%	1,89%	15,25%	1,02%	2,20%	1,79%
Serviços Educacionais	0,23%	0,68%	0,82%	0,72%	0,00%	0,00%	0,94%	1,97%	0,57%	1,15%	0,70%	5,92%	0,59%	0,29%	0,73%
Serviços Financeiros	19,05%	27,90%	25,42%	35,50%	25,22%	9,31%	16,93%	18,80%	18,25%	18,87%	30,80%	6,78%	19,15%	20,41%	24,34%
Siderurgia e Metalurgia	14,25%	13,15%	13,27%	12,54%	7,69%	11,27%	8,37%	13,49%	8,05%	7,95%	20,55%	6,72%	11,15%	11,64%	9,46%
Telefonia	8,71%	1,65%	3,82%	1,73%	0,00%	0,00%	14,14%	8,71%	12,80%	12,98%	0,00%	0,00%	4,92%	1,17%	1,53%
Transporte	1,71%	2,95%	2,15%	2,86%	2,31%	1,93%	1,14%	2,07%	1,87%	2,07%	0,27%	1,54%	2,37%	2,07%	2,16%
Varejo	3,08%	4,09%	6,10%	2,88%	3,75%	8,09%	2,10%	5,28%	1,77%	1,55%	1,72%	11,59%	4,47%	3,46%	5,55%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A análise de janelas deslizantes do mercado brasileiro de Small Caps foi mais

curta, em virtude do início do mercado ter se dado no ano de 2009, o que correspondeu a apenas 05 janelas temporais fora da amostra (2011 a 2020). A Figura 56 mostra um fraco desempenho das carteiras multiobjetivas, uma vez que não venceram nenhuma das janelas temporais. O modelo OCAPM venceu 02 janelas, o CAPM venceu 01 e o CDI venceu nas 02 janelas relativas à crise financeira brasileira (2014 a 2015). O destaque de todo o período fica por conta da carteira CAPM no período de 2017 a 2018, com uma rentabilidade de 131,5% para o período, justificada pelo excelente desempenho da empresa Alupar (ALUP11) que compôs 100% da carteira escolhida pelo modelo CAPM.

Assim como no mercado americano e no IBOVESPA, o modelo OCAPM foi o melhor modelo para o período envolvido na pandemia do COVID-19, apresentando uma rentabilidade de 40,7% para o período de 2019 a 2020.

Figura 56: Rentabilidade Bruta por período – SMALL CAPS

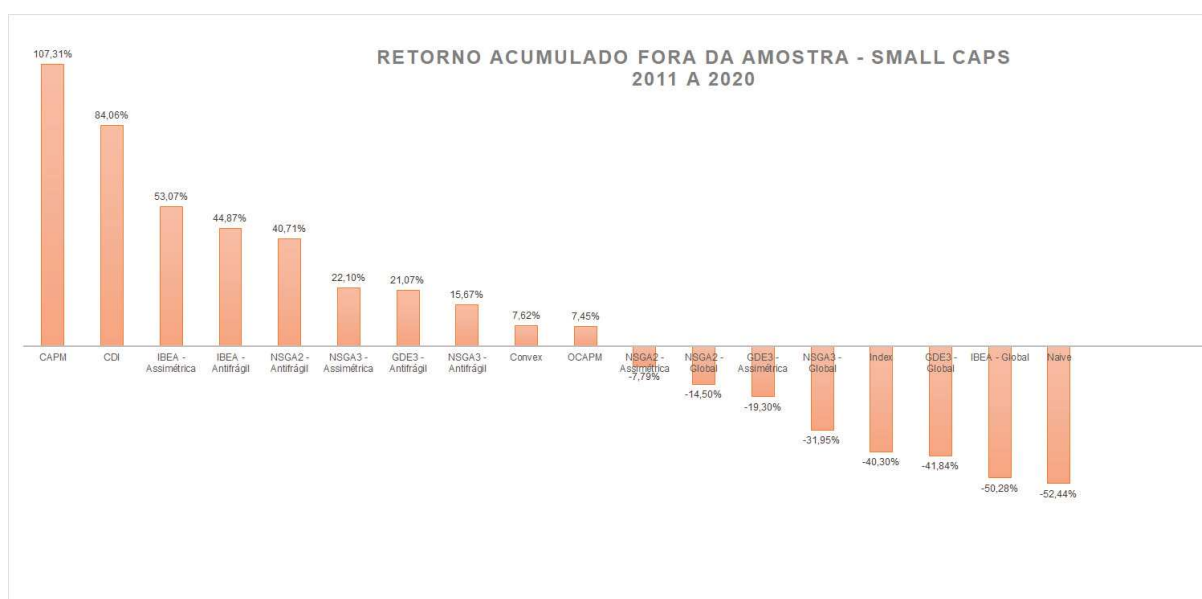
SMALL CAPS		2011-2012	2013-2014	2015-2016	2017-2018	2019-2020
	CAPM	18,4%	-57,1%	-4,8%	131,5%	19,2%
	OCAPM	31,4%	-57,4%	-22,6%	15,4%	40,7%
	Naive	-9,0%	-60,1%	-27,5%	39,4%	4,9%
	Convex	13,1%	-81,7%	15,5%	92,5%	-31,7%
	Index	-13,4%	-61,3%	-18,2%	48,4%	4,2%
	CDI	18,8%	17,7%	25,2%	15,5%	6,9%
Global	NSGA2	10,2%	-74,0%	-54,5%	67,1%	36,6%
	NSGA3	2,7%	-62,4%	-32,9%	44,6%	16,1%
	GDE3	-16,4%	-61,4%	-26,5%	45,3%	17,1%
	IBEA	-13,0%	-74,7%	-56,1%	71,4%	22,2%
Anti-frágil	NSGA2	10,0%	-57,4%	-6,3%	60,6%	33,8%
	NSGA3	7,7%	-53,8%	-17,4%	70,3%	8,8%
	GDE3	3,7%	-56,5%	-10,9%	60,6%	24,2%
	IBEA	11,2%	-60,4%	-8,6%	72,0%	30,7%
Assimétrica	NSGA2	24,7%	-92,3%	-46,7%	72,0%	34,5%
	NSGA3	24,6%	-62,4%	-47,0%	84,8%	22,2%
	GDE3	13,4%	-70,5%	-46,7%	76,4%	8,1%
	IBEA	25,6%	-44,9%	-60,0%	94,0%	38,5%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Figura 57 mostra o desempenho acumulado das carteiras e apresenta o CAPM como o grande vencedor do mercado de Small Caps, obtendo 107,31% de rentabilidade bruta acumulada. A segunda alternativa mais rentável do período foi o CDI com 84,06%, o que indica que os ativos do mercado de Small Caps não apresentaram desempenho suficiente para o risco incorrido. Em seguida, embora positivos no período, os algoritmos IBEA (Antifrágil e Assimétrica), NSGA2 (Antifrágil), NSGA3 (Antifrágil e Assimétrica) e GDE3 Antifrágil, bem como a carteira Ômega apresentaram prêmio negativo ao investidor, tendo em vista que sua rentabilidade não superou nem mesmo a Renda Fixa (CDI). Os demais algoritmos, a carteira Naive e o próprio Índice apresentaram rentabilidade negativa

para o período.

Figura 57: Retorno Acumulado - Small Caps - Rolling Windows



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Tabela 29 apresenta as estatísticas descritivas dos retornos fora da amostra das carteiras aplicadas no mercado de Small Caps. A carteira CAPM apresentou unanimemente os melhores indicadores dentre todos: a maior média de retorno (21.46%), o maior $\hat{\Omega}$ (1.22), o maior coeficiente de assimetria (0.7096), o menor drawdown máximo (61.86%) e o menor coeficiente de variação, com 3.21.

A Figura 58 apresenta os setores das carteiras vencedoras e foi o único mercado em que o modelo CAPM foi vitorioso em relação aos demais algoritmos multiobjetivos. Pelo fato da amostra conter um número maior de empresas (62), a análise setorial ficou mais comprometida. Mas algumas informações podem ser obtidas a partir dos dados da Figura 58: na abordagem Antifrágil, os setores de Mineração, Tecnologia, Transporte e Agropecuária foram os mais frequentes; nas carteiras Assimétricas, predominaram os setores de Saneamento, Varejo e Construção Civil; no modelo CAPM, os destaques foram para os setores de Saneamento, Energia, Agropecuária, Varejo e Vestuário.

Como a carteira CAPM foi a vitoriosa no estudo, sua sugestão prática seria uma carteira constituída de: 1 empresa de Saneamento, 1 empresa de Energia Elétrica, 1 empresa do Agronegócio, 1 varejista e 1 empresa do ramo de Vestuário.

4.3.4.2 Análise de Componentes Principais dos resultados

Como forma de investigar ainda melhor os resultados obtidos em cada mercado, foi realizada uma análise de componentes principais (ACP) da série histórica dos retornos

Tabela 29: Estatísticas Descritivas dos Retornos fora da amostra - Small Caps

		Média	Desvio-Padrão	Ômega	Assimetria	Curtose	Drawdown Máximo	Coefficiente de Variação
	CAPM	21,46%	68,89%	1,2212	0,7096	- 0,4302	-61,86%	3,21
	OCAPM	1,49%	40,86%	0,3772	- 0,5265	- 1,2525	-80,04%	27,44
	Naive	-10,49%	37,00%	0,1489	0,0016	- 0,9363	-87,66%	- 3,53
	Convexa	1,52%	64,50%	0,5018	0,1483	- 0,8739	-81,74%	42,30
	Index	-8,06%	39,68%	0,2091	0,1305	- 0,7061	-79,49%	- 4,92
	CDI	16,81%	6,61%		- 0,3527	- 0,6193	0,00%	0,39
Global	NSGA2	-2,90%	59,91%	0,4522	- 0,1159	- 1,5648	-128,50%	- 20,66
	NSGA3	-6,39%	41,89%	0,2478	- 0,1892	- 1,2412	-95,25%	- 6,56
	GDE3	-8,37%	41,02%	0,2412	0,0632	- 1,1545	-87,84%	- 4,90
	IBEA	-10,06%	59,12%	0,3462	0,2777	- 1,2853	-130,84%	- 5,88
Antifrágil	NSGA2	8,14%	44,48%	0,6240	- 0,3927	- 0,8854	-63,68%	5,46
	NSGA3	3,13%	45,35%	0,4534	0,3313	- 0,7059	-71,13%	14,47
	GDE3	4,21%	43,28%	0,4977	- 0,1378	- 0,8713	-67,40%	10,27
	IBEA	8,97%	48,89%	0,6718	- 0,1878	- 0,8572	-68,97%	5,45
Assimétrica	NSGA2	-1,56%	66,46%	0,4949872	- 0,3585	- 1,3454	-139,00%	- 42,67
	NSGA3	4,42%	59,76%	0,5931	0,1281	- 1,3136	-109,42%	13,52
	GDE3	-3,86%	57,35%	0,3753	0,2214	- 1,1326	-117,21%	- 14,86
	IBEA	10,61%	63,30%	0,7904	0,0879	- 1,3772	-104,97%	5,96

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Figura 58: Análise por Setores - Small Caps

SMALL CAPS	CAPM	IBEA Assimétrica	IBEA Antifrágil	NSGA2 Antifrágil	NSGA3 Assimétrica	GDE3 Antifrágil	NSGA3 Antifrágil	Convex	OCAPM	NSGA2 Assimétrica	NSGA2 Global	GDE3 Assimétrica	NSGA3 Global	GDE3 - Global	IBEA Global
Agropecuária	20,00%	2,30%	10,88%	10,88%	3,42%	17,53%	6,05%	0,00%	7,21%	5,77%	3,94%	2,23%	3,12%	4,74%	13,55%
Alimentos	0,00%	0,00%	0,76%	3,50%	3,47%	3,53%	1,11%	0,00%	0,00%	1,75%	7,22%	4,47%	5,39%	6,58%	5,42%
Construção Civil	1,37%	7,60%	4,87%	3,10%	5,44%	3,73%	6,11%	12,68%	9,04%	11,88%	16,45%	13,08%	21,35%	13,14%	17,37%
Energia Elétrica	20,00%	1,46%	0,69%	1,43%	2,21%	1,28%	6,38%	0,00%	0,75%	1,01%	3,84%	1,87%	4,69%	5,01%	1,79%
Lazer	0,00%	0,04%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,52%	0,00%	0,00%	0,11%	0,00%	0,03%	1,76%	0,49%	0,00%
Madeira e Papel	0,00%	1,52%	0,00%	0,00%	5,01%	0,00%	0,00%	0,85%	0,85%	4,95%	0,51%	1,85%	1,01%	0,42%	2,05%
Máquinas e Equipamentos	6,56%	2,34%	7,68%	7,08%	0,20%	5,39%	1,87%	0,82%	2,29%	0,02%	1,17%	0,88%	3,64%	3,06%	5,96%
Material Hospitalar	0,00%	11,54%	0,63%	0,95%	3,96%	1,71%	3,15%	3,16%	15,56%	2,01%	9,12%	6,24%	6,31%	7,63%	7,41%
Mineração	0,00%	9,11%	25,71%	23,30%	15,02%	25,09%	21,47%	8,88%	3,20%	10,88%	10,13%	4,19%	5,71%	10,51%	16,86%
Petróleo e Gás	0,00%	0,00%	3,79%	6,07%	0,19%	2,67%	0,00%	18,86%	0,04%	0,14%	0,80%	0,77%	1,70%	0,69%	0,00%
Saneamento	20,80%	18,68%	5,74%	5,97%	15,52%	3,18%	5,73%	6,17%	18,22%	18,00%	8,72%	12,65%	3,83%	2,29%	3,19%
Serviços	0,00%	0,08%	0,00%	0,08%	0,40%	0,89%	3,78%	0,97%	0,97%	0,31%	0,14%	0,60%	0,25%	0,61%	0,00%
Serviços de Saúde	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,07%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,01%	0,31%	1,75%	0,00%
Serviços Educacionais	0,00%	0,97%	0,15%	0,12%	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	3,66%	0,63%	0,39%	0,39%	3,02%	0,76%	0,00%
Serviços Financeiros	4,94%	0,02%	5,34%	4,47%	5,11%	1,59%	4,43%	2,50%	0,30%	7,14%	2,85%	11,97%	10,54%	9,07%	4,55%
Siderurgia	0,00%	0,00%	0,00%	1,10%	0,71%	1,14%	1,22%	0,00%	0,00%	0,29%	0,91%	0,33%	2,04%	2,08%	0,00%
Tecnologia	1,32%	8,34%	13,78%	12,71%	5,17%	14,47%	18,30%	0,00%	15,59%	4,50%	7,61%	10,83%	3,75%	4,95%	3,57%
Transporte	0,00%	0,56%	15,65%	15,66%	4,76%	14,48%	12,62%	36,65%	1,69%	3,10%	5,86%	4,71%	8,20%	16,84%	12,74%
Varejo	13,44%	26,32%	0,00%	0,00%	16,48%	1,86%	0,01%	0,00%	12,20%	18,10%	12,58%	18,26%	6,41%	5,86%	3,86%
Vestuário	11,88%	9,12%	4,32%	3,57%	12,93%	1,39%	6,24%	8,44%	8,44%	9,40%	7,76%	4,64%	6,97%	3,53%	1,69%

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

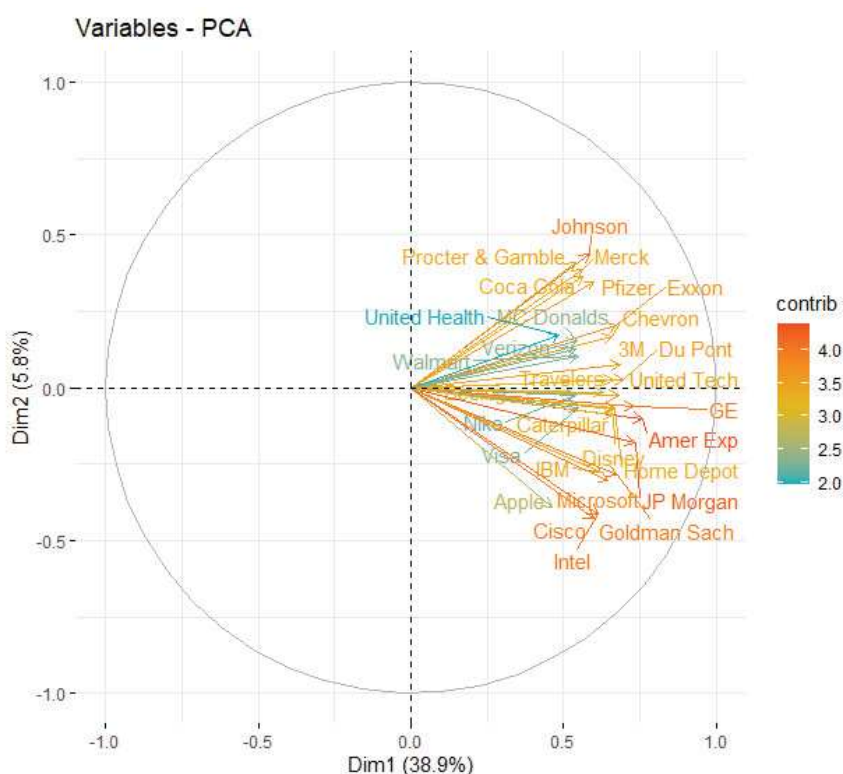
ponderados pelo peso médio ótimo da carteira com maior rentabilidade fora da amostra. Uma forma alternativa de ACP levando em conta os pesos de cada ativo em cada período foi tentada sem sucesso, uma vez que apresentou um comportamento muito disperso das variáveis, com um número muito grande de fatores que inviabilizaram a análise.

A Análise de Componentes Principais (ACP) é uma técnica clássica de redução de dimensionalidade cujo objetivo é sumarizar os dados que contêm muitas variáveis p por um conjunto menor de k variáveis compostas derivadas a partir do conjunto original (145). A ideia da técnica é reduzir o tamanho dos dados, com uma representação mais compacta sem a perda de informação relevante.

Para realizar a ACP, a matriz de dados foi organizada da seguinte forma: nas colunas foram agrupados os ativos pertencentes à carteira ótima e nas linhas os retornos ponderados de cada ativo pelo seu peso médio representativo na carteira ótima.

A Figura 59 apresenta a ACP da carteira NSGA3 Antifrágil para o mercado Dow Jones. A dimensão 1 representou 38,9% da explicação da variância dos dados enquanto a dimensão 2 representou 5,8%, totalizando 44,7% de explicação dos dados. A Figura indica a contribuição de cada ativo nas duas dimensões através de uma escala gradual de coloração na sua legenda lateral.

Figura 59: Análise de Componentes Principais - Dow Jones



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Figura 60 apresenta um mapa de calor com a matriz fatorial de cada componente. Ao analisarmos a componente 1, percebemos que os ativos que mais contribuem são American Express (AXP), JP Morgan (JPM), GE (General Electric) e Du Pont (DD).

Como forma de subsidiar a análise da componente, a Figura 61 apresenta as principais estatísticas descritivas dos ativos, ordenadas de forma decrescente de acordo com o Índice de Sharpe de cada um. Nota-se assim que as empresas que mais contribuem para a componente 1 são curiosamente umas das menos rentáveis, apresentando baixos índices de Sharpe, Ômega, retorno acumulado e retorno médio.

Por outro lado, as empresas apresentaram uns dos menores CVIX (correlação ao

VIX), indicando que em momentos de alta volatilidade, os ativos tendem a oscilar menos. Este dado reforça que a componente 1 representa a antifragilidade da carteira escolhida, isto é, foram privilegiados ativos que embora não apresentem média e ômega elevados, tendem a perder menos em períodos de crise ou grande volatilidade. São empresas que equilibram o portfólio e desempenham o papel de perder menos nas crises do que ganhar muito em períodos de bonança.

Figura 60: Carga Fatorial - Dow Jones

	Componente			
	1	2	3	4
AXP	0,761	-0,102	-0,153	-0,216
JPM	0,735	-0,182	-0,163	-0,237
GE	0,729	-0,062	-0,061	-0,095
DD	0,696	0,028	-0,248	0,030
MMM	0,684	0,077	-0,143	0,025
UTX	0,679	-0,025	-0,201	-0,014
GS	0,674	-0,284	-0,205	-0,177
XOM	0,673	0,203	-0,243	0,456
HD	0,669	-0,069	0,064	-0,338
CAT	0,668	-0,066	-0,222	0,084
DIS	0,662	-0,090	-0,033	-0,065
TRV	0,661	0,026	-0,132	-0,169
CVX	0,660	0,168	-0,327	0,447
MSFT	0,646	-0,306	0,289	0,189
BA	0,631	-0,015	-0,193	0,021
IBM	0,621	-0,274	0,218	0,154
INTC	0,612	-0,415	0,327	0,200
PFE	0,600	0,347	0,245	0,055
CSCO	0,598	-0,429	0,325	0,127
JNJ	0,585	0,435	0,252	0,090
KO	0,563	0,364	0,181	-0,005
MRK	0,561	0,386	0,242	0,072
WMT	0,549	0,103	0,278	-0,346
V	0,548	-0,066	-0,280	-0,011
MCD	0,543	0,154	0,078	-0,165
NKE	0,541	-0,025	-0,043	-0,133
VZ	0,541	0,125	0,143	-0,013
PG	0,539	0,411	0,229	-0,071
UNH	0,485	0,170	-0,077	-0,017
AAPL	0,461	-0,391	0,237	-0,171

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A componente 2, embora represente apenas 5,8% de explicação da variância, apresentou como destaque na carga fatorial as empresas Johnson & Johnson (JNJ), com 0,435 e a Procter & Gamble (PG) com 0,411 e, como carga negativa, a empresa Cisco (CSCO), com -0,429. De acordo com a Figura 59, as empresas JNJ e PG apresentaram 2 dos 4 menores *drawdown* máximo dentre todos os ativos. De forma inversa, a empresa CSCO apresentou o maior *drawdown* máximo, com rebaixamento de 223,10% no período.

Portanto, pode-se concluir que as duas componentes principais da carteira NSGA3 Antifrágil no mercado Dow Jones durante todo o período estudado estão associadas à

Figura 61: Estatísticas Descritivas dos ativos - Dow Jones

	Sharpe	Ômega	Retorno Acumulado	Retorno Médio	Assimetria	Curtose	Drawdown Máximo	CVIX	Ret. Acum / Drawdown Máx
Sinal da Otimização	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Min (-)	Min (-)	Min (-)	Máx (+)
V	0,044	1,143	2,609	0,001	- 0,013	9,041	0,732	- 0,676	3,564
JNJ	0,037	1,114	3,180	0,001	- 0,285	9,894	0,451	- 0,559	7,055
MSFT	0,035	1,106	4,473	0,001	- 0,069	7,512	1,187	- 0,703	3,769
AAPL	0,032	1,104	5,664	0,001	- 2,544	75,857	1,704	- 0,497	3,324
NKE	0,031	1,095	3,963	0,001	- 0,005	9,303	1,019	- 0,558	3,889
MCD	0,030	1,091	2,953	0,001	- 0,096	10,229	1,333	- 0,514	2,215
PG	0,029	1,095	2,738	0,000	- 2,376	59,596	0,779	- 0,499	3,514
UNH	0,029	1,094	4,192	0,001	- 1,265	30,490	1,363	- 0,503	3,077
HD	0,027	1,083	3,499	0,001	- 0,927	19,523	1,219	- 0,668	2,869
WMT	0,025	1,075	2,590	0,000	0,129	5,665	0,470	- 0,510	5,511
PFE	0,025	1,072	2,663	0,000	- 0,167	4,428	1,179	- 0,607	2,258
MMM	0,025	1,074	2,402	0,000	- 0,208	6,177	0,785	- 0,680	3,062
CSCO	0,023	1,070	3,703	0,001	- 0,007	7,244	2,231	- 0,613	1,660
IBM	0,022	1,068	2,545	0,000	- 0,128	8,072	0,900	- 0,605	2,826
KO	0,022	1,067	2,018	0,000	- 0,161	7,528	0,805	- 0,543	2,507
MRK	0,021	1,064	2,349	0,000	- 1,130	22,540	1,159	- 0,535	2,027
CAT	0,021	1,061	2,815	0,000	- 0,184	4,508	1,325	- 0,691	2,124
INTC	0,021	1,062	3,251	0,001	- 0,375	7,926	1,729	- 0,625	1,881
CVX	0,021	1,063	2,274	0,000	- 0,467	21,173	0,833	- 0,684	2,729
AXP	0,020	1,062	2,838	0,000	0,033	10,549	1,823	- 0,735	1,557
UTX	0,019	1,062	2,251	0,000	- 4,843	133,250	1,140	- 0,656	1,975
DIS	0,018	1,056	2,278	0,000	- 0,103	9,193	1,136	- 0,654	2,006
XOM	0,018	1,053	1,826	0,000	- 0,112	10,060	1,070	- 0,730	1,708
VZ	0,017	1,050	1,773	0,000	0,118	5,660	0,841	- 0,533	2,109
BA	0,017	1,051	2,262	0,000	- 0,661	17,471	1,511	- 0,608	1,497
TRV	0,017	1,053	1,874	0,000	- 0,151	18,251	0,801	- 0,645	2,340
JPM	0,013	1,043	1,973	0,000	0,189	12,633	1,370	- 0,726	1,440
GS	0,009	1,028	1,156	0,000	0,257	11,689	1,553	- 0,765	0,744
DD	0,009	1,026	1,059	0,000	- 0,071	6,235	1,305	- 0,670	0,812
GE	0,004	1,012	0,519	0,000	- 0,088	8,341	1,933	- 0,724	0,268

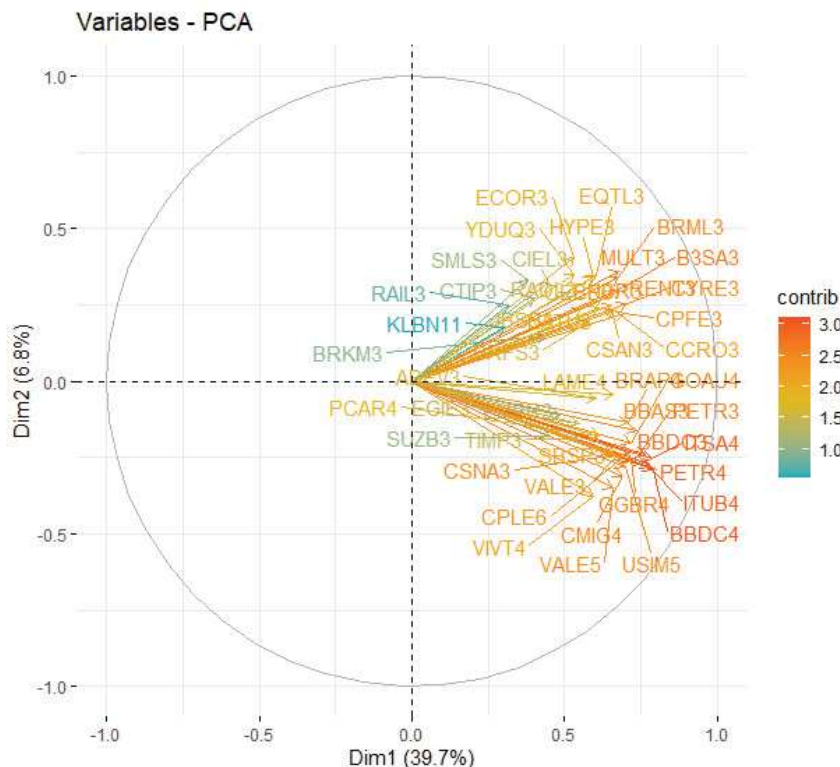
Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

antifragilidade e ao menor *drawdown* máximo, corroborando assim sua função objetivo empregada.

A Figura 62 apresenta a ACP do mercado IBOVESPA. A carteira vencedora analisada foi a do algoritmo NSGA3 da carteira Antifrágil. A dimensão 1 explica 39,7% da variância dos dados enquanto que a dimensão 2 explica 6,8%, totalizando 46,5% de explicação dos dados.

Dentre os ativos que melhor contribuem para a componente 1, a Figura 63 apresenta como destaque o Bradesco (BBDC3 e BBDC4), Itaú (ITUB4) e Itaúsa (ITSA4), todas do setor bancário. A Figura 64 apresenta as estatísticas descritivas dos ativos separadamente, ordenados pelo Índice de Sharpe. Embora não apresente os maiores Índices de Sharpe e

Figura 62: Análise de Componentes Principais - IBOVESPA



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Ômega, as quatro empresas de destaque da componente 1 apresentaram 4 dos 6 menores CVIX dentre todos os ativos. Mais uma vez, assim como ocorrido no mercado americano, é possível afirmar que a componente valoriza empresas que tenham comportamento antifrágil: a empresa ITSA4 foi a que apresentou menor CVIX (-0,573), e as demais também apresentaram valores menores de CVIX (ITUB4 com -0,541, BBDC4 com -0,528 e BBDC3 com -0,50). A componente 2 representou 6,8% da explicação da variância dos dados e sua interpretação não logrou êxito. Com cargas fatoriais positivas de destaque na componente 2 observam-se as empresas Eco Rodovias (ECOR3) com 0,404, Multiplan (MULT3) com 0,361 e YDUQ3 com 0,351. Com cargas negativas, os destaques foram a Vivo (VIVT4) com -0,375 e a Vale (VALE5) com -0,351. No entanto, nenhuma relação com as principais estatísticas descritivas disponíveis foi construída de forma a identificar a quais atributos essa componente faz referência.

Desta forma, conclui-se que a carteira NSGA3 Antifrágil do mercado IBOVESPA teve como componente principal o CVIX, ou seja, privilegiou a escolha de ativos que sofreram menos em períodos de turbulência ou picos de volatilidade.

No mercado de Small Caps, a análise de componentes principais apresentou 02 componentes principais, com explicação de 40,25% e 5,55% da variâncias, respectivamente.

Figura 63: Carga Fatorial - IBOVESPA

	Componente					
	1	2	3	4	5	6
BBDC4	0,790	-0,291	0,191	-0,119	-0,083	-0,189
ITSA4	0,786	-0,255	0,133	-0,155	-0,050	-0,153
ITUB4	0,779	-0,280	0,149	-0,142	-0,071	-0,189
BBDC3	0,763	-0,242	0,193	-0,126	-0,069	-0,185
PETR4	0,763	-0,269	0,126	0,178	-0,040	-0,177
BBAS3	0,736	-0,163	0,158	-0,043	-0,105	-0,065
PETR3	0,725	-0,262	0,098	0,184	-0,030	-0,185
GOAU4	0,719	-0,202	-0,167	0,229	-0,076	0,158
GGBR4	0,716	-0,259	-0,169	0,210	-0,058	0,135
CSNA3	0,714	-0,235	-0,164	0,274	-0,050	0,032
BRAP4	0,709	-0,137	-0,319	0,235	0,008	0,072
B3SA3	0,705	0,315	-0,086	0,018	-0,031	-0,206
CYRE3	0,703	0,252	-0,158	-0,070	-0,173	0,006
USIM5	0,698	-0,279	-0,096	0,209	-0,097	0,081
CPFE3	0,696	0,223	-0,109	-0,164	0,029	0,150
CMIG4	0,688	-0,311	0,248	-0,049	0,012	0,101
CPL6	0,688	-0,256	0,211	-0,144	0,038	0,193
RENT3	0,683	0,297	-0,109	-0,069	-0,149	0,000
BRML3	0,678	0,339	-0,053	-0,047	-0,124	-0,104
MULT3	0,677	0,361	-0,034	-0,045	-0,114	-0,078
VALE3	0,673	-0,242	-0,327	0,335	0,014	-0,065
CCRO3	0,664	0,230	0,052	-0,032	-0,049	0,114
LAME4	0,660	-0,045	0,002	-0,141	-0,054	0,021
VALE5	0,658	-0,351	-0,281	0,254	0,022	-0,129
SBSP3	0,656	-0,237	0,171	-0,141	0,025	0,127
CSAN3	0,656	0,235	-0,177	-0,082	-0,063	-0,001
ENBR3	0,655	0,251	-0,089	-0,165	0,027	0,158
CESP6	0,619	0,263	-0,141	-0,155	-0,020	0,076
PCAR4	0,614	-0,179	0,083	-0,155	0,056	0,003
NATU3	0,613	0,240	-0,072	-0,020	-0,053	0,104
ABEV3	0,605	-0,058	0,015	-0,160	0,085	0,005
EQTL3	0,603	0,347	0,017	-0,049	0,083	-0,061
VIVT4	0,593	-0,375	0,207	-0,075	0,112	-0,054
HYPE3	0,592	0,339	-0,060	-0,037	0,057	-0,197
BRFS3	0,580	0,197	-0,168	-0,115	0,005	0,063
JBSS3	0,555	0,235	-0,201	-0,078	0,008	-0,068
EGIE3	0,546	-0,138	0,132	-0,244	0,112	0,291
TIMP3	0,543	-0,191	0,011	-0,160	0,115	0,217
ECOR3	0,532	0,404	0,358	0,268	-0,003	0,070
YDUQ3	0,531	0,351	0,095	-0,069	-0,080	-0,044
RADL3	0,514	0,291	-0,089	-0,108	0,123	-0,135
EMBR3	0,486	-0,114	-0,082	-0,097	0,137	0,189
SUZB3	0,452	-0,182	-0,253	-0,069	0,410	0,024
CIEL3	0,447	0,324	0,247	0,203	0,168	-0,102
BRKM3	0,437	0,150	-0,097	-0,012	0,074	0,226
CTIP3	0,401	0,270	0,129	0,073	0,372	-0,344
SMLS3	0,378	0,331	0,386	0,268	-0,204	0,199
RAIL3	0,314	0,250	0,327	0,371	-0,083	0,233
KLBN11	0,303	0,176	0,126	0,253	0,536	0,094

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

A Figura 65 apresenta a carga fatorial da ACP do mercado de Small Caps, com destaque na componente 1 das empresas Even(EVEN3), Companhia Paranaense de Energia (CPL6), EcoRodovias (ECOR3), Iochpe-Maxion (MYPK3), Tecnisa (TCSA3) e Light (LIGT3). Ao contrário de outros mercados, o algoritmo multiobjetivo não foi o vencedor desse mercado, ficando a carteira CAPM como a melhor carteira fora da amostra. Curiosamente, os ativos escolhidos não apresentaram os maiores índices de Sharpe do período, conforme demonstra a Figura 66.

Mais uma vez a correlação com o VIX (CVIX) foi decisiva na escolha dos ativos da melhor carteira, mesmo que ela não tenha sido otimizada *ex-ante*. Ao se ordenar os ativos pelo CVIX, percebe-se que 04 dos 06 menores CVIX encontrados foram relativos aos ativos

Figura 64: Estatísticas Descritivas dos ativos - IBOVESPA

Sinal da Otimização	Sharpe	Ômega	Retorno Acumulado	Retorno Médio	Assimetria	Curtose	Drawdown Máximo	CVIX	Ret. Acum / Drawdown Máx
	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Min (-)	Min (-)	Min (-)	Máx (+)
ABEV3	0,052	1,168	6,707	0,001	- 0,172	8,620	0,905	- 0,350	7,411
ITSA4	0,024	1,071	4,183	0,001	0,083	5,848	1,175	- 0,573	3,560
ITUB4	0,023	1,066	4,041	0,001	0,128	5,248	1,179	- 0,541	3,428
BBDC3	0,021	1,060	3,647	0,001	0,112	4,840	1,227	- 0,500	2,971
CCRO3	0,032	1,094	3,925	0,001	- 0,271	7,127	1,322	- 0,436	2,968
BBDC4	0,020	1,059	3,682	0,001	0,167	7,329	1,248	- 0,528	2,951
SUZB3	0,032	1,093	5,341	0,001	0,333	3,836	1,970	- 0,408	2,711
BRKM3	0,034	1,102	3,668	0,001	- 0,404	5,640	1,418	- 0,294	2,588
EGIE3	0,023	1,068	3,470	0,001	0,393	7,946	1,360	- 0,341	2,552
RADL3	0,037	1,109	3,039	0,001	- 0,080	5,643	1,244	- 0,343	2,443
LREN3	0,032	1,097	3,708	0,001	- 0,264	8,026	1,596	- 0,513	2,323
RENT3	0,030	1,089	3,409	0,001	- 0,312	10,081	1,719	- 0,478	1,982
EQTL3	0,031	1,090	2,006	0,001	- 0,289	6,266	1,054	- 0,395	1,903
LAME4	0,021	1,062	4,211	0,001	0,127	6,295	2,219	- 0,452	1,897
VALE3	0,027	1,081	5,023	0,001	- 0,087	6,313	2,655	- 0,499	1,892
WEGE3	0,029	1,091	2,443	0,001	0,376	18,578	1,325	- 0,473	1,844
ENBR3	0,017	1,048	1,484	0,000	- 0,289	4,596	0,962	- 0,415	1,543
VIVT4	0,014	1,041	2,393	0,000	0,224	9,947	1,593	- 0,422	1,502
EMBR3	0,014	1,044	2,292	0,000	0,062	16,804	1,615	- 0,393	1,419
CPFE3	0,022	1,064	1,842	0,001	- 0,595	8,349	1,395	- 0,429	1,320
CTIP3	0,026	1,075	0,982	0,001	0,014	2,750	0,780	- 0,210	1,258
VALES	0,020	1,057	3,371	0,001	0,162	5,262	2,687	- 0,477	1,255
PCAR4	0,015	1,044	2,390	0,000	- 0,002	9,643	1,920	- 0,383	1,245
SBSP3	0,015	1,043	2,696	0,001	- 0,724	11,635	2,312	- 0,472	1,166
NTCO3	0,020	1,058	1,976	0,001	- 0,351	7,307	1,709	- 0,410	1,157
GGBR4	0,018	1,052	3,764	0,001	- 0,048	3,677	3,323	- 0,551	1,133
BBAS3	0,010	1,030	2,133	0,000	- 0,189	5,920	1,913	- 0,451	1,115
CSNA3	0,015	1,042	3,228	0,001	- 0,112	5,115	3,050	- 0,491	1,058
CMIG4	0,010	1,029	2,079	0,000	- 0,339	7,492	2,053	- 0,450	1,013
PETR3	0,013	1,039	2,855	0,000	- 0,333	6,834	3,066	- 0,462	0,931
TIMP3	0,011	1,031	1,979	0,000	- 0,269	6,745	2,165	- 0,437	0,914
KLBN11	0,010	1,027	0,292	0,000	- 0,030	1,771	0,384	- 0,129	0,761
PETR4	0,011	1,032	2,257	0,000	- 0,409	7,348	3,171	- 0,499	0,712
CSAN3	0,012	1,034	1,308	0,000	- 0,307	5,001	2,027	- 0,503	0,645
CYRE3	0,011	1,032	1,390	0,000	- 0,387	8,498	2,168	- 0,545	0,641
GOAU4	0,015	1,043	3,028	0,001	- 0,261	5,834	4,857	- 0,499	0,623
YDUQ3	0,010	1,030	0,958	0,000	- 0,237	11,548	1,629	- 0,353	0,588
B3SA3	0,010	1,030	0,910	0,000	- 0,200	8,359	1,554	- 0,476	0,585
CPL6	0,007	1,020	1,255	0,000	- 0,159	5,940	2,360	- 0,470	0,532
JBSS3	0,006	1,017	0,708	0,000	- 0,271	8,956	1,567	- 0,425	0,451
HYPE3	0,009	1,025	0,720	0,000	- 0,085	5,914	1,626	- 0,423	0,443
BRFS3	0,008	1,024	0,838	0,000	- 0,316	9,594	1,903	- 0,460	0,440
MULT3	0,007	1,020	0,575	0,000	- 0,096	13,367	1,491	- 0,442	0,385
BRAP4	0,008	1,023	1,279	0,000	- 0,137	3,986	3,333	- 0,490	0,384
CESP6	0,008	1,023	0,764	0,000	- 0,956	17,346	2,049	- 0,462	0,373
BBSE3	0,010	1,027	0,379	0,000	- 0,329	5,672	1,080	- 0,198	0,351
SANB11	0,005	1,014	0,311	0,000	- 0,211	4,559	1,232	- 0,298	0,252
QUAL3	0,005	1,015	0,327	0,000	- 0,686	17,847	1,303	- 0,245	0,251
MRVE3	0,004	1,013	0,510	0,000	- 0,333	9,342	2,276	- 0,464	0,224
BRML3	0,004	1,012	0,419	0,000	- 0,181	11,404	2,028	- 0,414	0,207
USIM5	0,002	1,005	0,376	0,000	- 0,048	4,499	4,786	- 0,506	0,079
FIBR3	- 0,000	0,999	- 0,016	-	- 0,104	1,433	1,337	- 0,284	- 0,012
RAIL3	- 0,001	0,997	- 0,039	-	- 0,438	8,958	2,716	- 0,159	- 0,014
COGN3	- 0,001	0,999	- 0,029	-	- 0,756	7,077	1,795	- 0,219	- 0,016
ECOR3	- 0,002	0,996	- 0,098	-	- 0,540	8,466	2,193	- 0,304	- 0,045
SMLS3	- 0,006	0,982	- 0,339	- 0,000	- 3,716	48,874	2,221	- 0,217	- 0,153
MRFG3	- 0,007	0,980	- 0,772	- 0,000	- 0,346	8,622	2,428	- 0,388	- 0,318
CIEL3	- 0,010	0,973	- 0,662	- 0,000	- 0,176	9,186	2,074	- 0,246	- 0,319
UGPA3	- 0,008	0,976	- 0,435	- 0,000	- 0,711	15,613	1,281	- 0,270	- 0,339

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

escolhidos na carteira: EVEN3 (-0,166), ECOR3(-0,153), MYPK3(-0,152), LIGT3(-0,132).

A Figura 67 apresenta o gráfico de componentes. Além dos destaques já enumerados da componente 1, tem-se ainda na componente 2 algumas empresas que se destacaram:

Figura 65: Carga Fatorial - Small Caps

	Componente	
	1	2
EVEN3	0,756	-0,140
CPL6	0,753	-0,048
ECOR3	0,723	-0,101
MYPK3	0,708	-0,008
TCSA3	0,700	-0,041
LIGT3	0,697	-0,139
POMO4	0,695	-0,024
GOAU4	0,689	-0,056
DIRR3	0,689	-0,102
ALPA4	0,659	-0,050
RSID3	0,606	0,053
SAPR4	0,579	-0,147
BTOW3	0,578	-0,004
SULA11	0,561	0,401
ALUP11	0,543	0,109
ESTC3	0,525	0,471
SLCE3	0,517	0,273
MPLU3	0,484	0,352
MEAL3	0,468	-0,606

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

Estácio de Sá (ESTC3), Sulamérica (SULA11), Multiplus (MPLU3) e SLC Agrícola (SLCE3). Novamente olhando para as estatísticas descritivas da Figura 66 percebe-se que foram escolhidas as 04 empresas com menor curtose dentre todas.

A conclusão da análise de componentes da carteira CAPM do mercado de Small Caps é que a otimização privilegiou ativos antifrágeis na componente principal 1, mesmo que isso não tenha sido objeto da função objetivo, já que o modelo de otimização foi o Sharpe (Modelo CAPM). Como componente 2, a carteira apresentou ativos que apresentaram em sua distribuição de retorno um baixo coeficiente de curtose.

A Tabela 30 sumariza o resumo final da ACP por componente e mercado, com destaque para a antifrágilidade como a principal componente em todos os mercados estudados.

Tabela 30: Resumo da Análise de Componentes Principais

	Componente principal 01	Componente principal 02
Dow Jones	Antifragilidade (Menor CVIX)	Menor Drawdown máximo
IBOVESPA	Antifragilidade (Menor CVIX)	—
Small Caps	Antifragilidade (Menor CVIX)	Menor Curtose

Figura 66: Estatísticas Descritivas dos ativos - Small Caps

	Sharpe	Ômega	Retorno Acumulado	Retorno Médio	Assimetria	Curtose	Drawdown Máximo	CVIX	Ret. Acum / Drawdown Máx
Sinal da Otimização	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Máx (+)	Mín (-)	Mín (-)	Mín (-)	Máx (+)
ALPA4	0,046	1,139	3,141	0,001	- 0,306	11,832	1,400	- 0,087	2,244
SAPR4	0,044	1,135	3,200	0,001	- 0,215	5,903	1,797	- 0,082	1,780
SULA11	0,038	1,106	2,452	0,001	0,030	2,464	0,884	- 0,062	2,773
ESTC3	0,031	1,089	1,976	0,001	- 0,040	4,962	1,629	- 0,076	1,213
SLCE3	0,019	1,052	1,376	0,001	0,003	2,361	1,230	- 0,120	1,118
MPLU3	0,017	1,046	0,803	0,000	- 0,220	2,337	1,133	- 0,115	0,708
POMO4	0,016	1,045	1,300	0,001	- 0,400	6,486	2,144	- 0,121	0,606
MYPK3	0,014	1,042	1,146	0,000	- 0,222	7,549	2,150	- 0,152	0,533
CPL6	0,013	1,038	0,937	0,000	- 0,594	6,696	1,677	- 0,112	0,559
EVEN3	0,009	1,025	0,764	0,000	- 0,826	9,889	1,835	- 0,166	0,417
BTOW3	0,009	1,024	0,931	0,000	0,495	5,248	2,556	- 0,161	0,364
ALUP11	0,005	1,014	0,167	0,000	- 0,530	8,178	1,102	- 0,046	0,152
ECOR3	- 0,002	0,996	- 0,098	-	- 0,540	8,466	2,193	- 0,153	- 0,045
LIGT3	- 0,005	0,986	- 0,398	- 0,000	- 0,653	14,303	2,104	- 0,132	- 0,189
DIRR3	- 0,006	0,983	- 0,432	- 0,000	- 0,765	8,797	2,234	- 0,098	- 0,193
GOAU4	- 0,017	0,953	- 1,613	- 0,001	- 0,350	6,216	4,424	- 0,180	- 0,365
TCSA3	- 0,018	0,951	- 1,520	- 0,001	- 0,276	7,088	3,566	- 0,121	- 0,426
MEAL3	- 0,018	0,944	- 0,754	- 0,001	- 2,175	24,694	1,639	- 0,072	- 0,460
RSID3	- 0,026	0,925	- 3,418	- 0,001	1,050	10,680	6,270	- 0,131	- 0,545

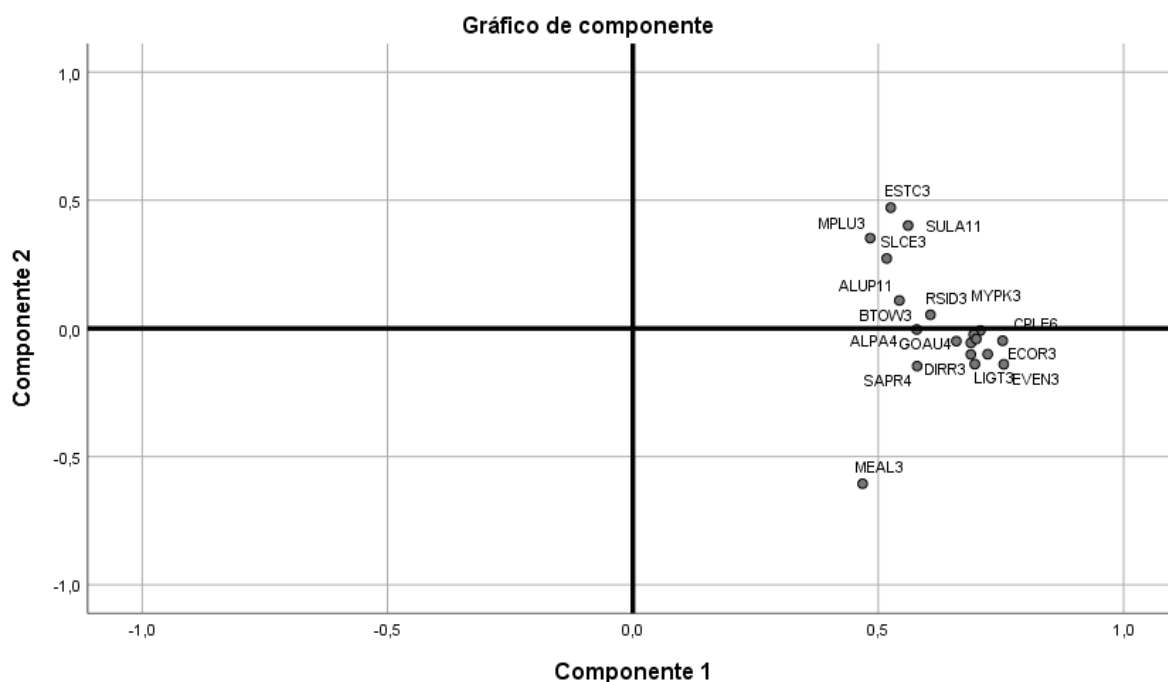
Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.3.5 Análise do desempenho dos algoritmos - Dentro x Fora da amostra

O foco desta pesquisa não foi investir tempo e recursos na parametrização dos algoritmos genéticos multiobjetivos, mas sim aplicar os parâmetros mais frequentes utilizados na literatura em cada um dos algoritmos envolvidos. Ao se analisar as carteiras não-dominadas através dos hypervolumes, foram selecionados os melhores algoritmos dentro da amostra através de testes estatísticos. Agora, ao final do trabalho, é importante analisar quais foram os melhores algoritmos fora da amostra em comparação com os melhores dentro da amostra.

A Tabela 31 apresenta um comparativo dos melhores algoritmos dentro da amostra e fora da amostra. Somente em um único caso o melhor algoritmo dentro da amostra foi também o melhor fora: o da Carteira Global do mercado Dow Jones - NSGA3. Para todos os outros cenários, nem sempre o melhor algoritmo dentro da amostra correspondeu ao melhor fora da amostra. Isso pode ser justificado pela dinâmica peculiar relativa aos preços dos ativos, isto é, uma condição econômica encontrada no período dentro da amostra pode ter sido modificada no período fora da amostra, seja por volatilidade, eventos externos, crises, entre outros. Desta forma, melhor que buscar uma melhor relação dentro x fora da amostra, o interessante é analisar qual algoritmo teve o melhor desempenho somente em períodos fora da amostra.

Figura 67: Gráfico de Componentes – Small Caps



Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

O algoritmo NSGA3 foi o melhor algoritmo em 04 cenários (02 no Dow Jones e 02 no IBOVESPA), o IBEA foi melhor também em 04 cenários (02 no Small Caps, 01 no Dow Jones e 01 no IBOVESPA) e o NSGA2 foi melhor apenas na Carteira Global do mercado de Small Caps.

Mais relevante que saber quantos cenários cada algoritmo venceu, é conhecer qual algoritmo foi responsável pela geração da melhor carteira em cada mercado. Neste quesito, o NSGA3 foi o melhor algoritmo, já que tanto no Dow Jones quanto no IBOVESPA ele foi responsável pelo melhor desempenho fora da amostra dentre todos os modelos. No mercado de Small Caps, um nicho que teve o seu desempenho geral muito prejudicado pelo período avaliado, o IBEA foi o que apresentou as melhores alternativas de carteira. Isso pode ser justificado pelo fato do IBEA trabalhar com evolução baseado no indicador hypervolume, ou seja, o algoritmo vai substituindo os candidatos e mantendo-os na população à medida que o hypervolume vai melhorando, o que traz ao algoritmo uma rotatividade e mutação menor das soluções nos casos em que poucos ativos apresentaram desempenho positivo no período, isto é, ao encontrar um ativo com desempenho positivo em meio a tantos com desempenho negativo, ele dificilmente deixará de fazer parte da população após a evolução do algoritmo.

Tabela 31: Desempenho dentro da amostra x fora da amostra

Dow Jones			
	Carteira Global	Carteira Antifrágil	Carteira Assimétrica
Melhor Algoritmo dentro da amostra	NSGA3	NSGA2	GDE3
Melhor Algoritmo Out of Sample	NSGA3	NSGA3	IBEA
IBOVESPA			
	Carteira Global	Carteira Antifrágil	Carteira Assimétrica
Melhor Algoritmo dentro da amostra	NSGA3	NSGA2	GDE3
Melhor Algoritmo fora da amostra	IBEA	NSGA3	NSGA3
Small Caps			
	Carteira Global	Carteira Antifrágil	Carteira Assimétrica
Melhor Algoritmo dentro da amostra	NSGA3	Não houve	GDE3
Melhor Algoritmo fora da amostra	NSGA2	IBEA	IBEA

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

4.3.6 Conclusões

Construir carteiras multiobjetivas com desempenho superior aos modelos clássicos foi o principal objetivo deste experimento. A superioridade de desempenho pode trazer à área de investimentos novos parâmetros de modelos de previsão de retorno ajustado ao risco. Neste sentido, algumas conclusões foram evidenciadas sobre cada uma das propostas multiobjetivas apresentadas nesta seção.

A principal conclusão diz respeito à carteira antifrágil, que notadamente trouxe ganhos superiores em relação a média de retornos em relação aos modelos existentes. Valorizar ativos que apresentam baixo *drawdown* e possuem relativa resiliência em períodos de turbulência pode ser vantajoso na gestão de investimentos. Perder pouco ou não perder muito em momentos de crise pode ser mais significativo que ganhar em momentos de bonança e estabilidade. Essa conclusão foi amplamente corroborada pela análise de componentes principais feita nas carteiras ótimas de cada mercado.

Especificamente no mercado americano, a abordagem antifrágil trouxe além de uma maior média de retornos fora da amostra, uma melhoria da relação risco e retorno, com desvios-padrão inferiores aos outros modelos. Além disso, as carteiras antifrágeis apresentaram maiores Ômegas que as próprias carteiras do modelo OCAPM e maior assimetria que os modelos CAPM e OCAPM.

No mercado brasileiro houve também contribuições relevantes das propostas multiobjetivas. Os algoritmos conseguiram construir carteiras com maior retorno médio aos modelos CAPM e aos demais (Naive e OCAPM). No entanto, assim como a média é maior, o *drawdown* também se apresentou muito maior que o mercado americano por exemplo.

Isso se justifica à medida que uma economia emergente é mais sujeita a turbulências econômicas e por isso a necessidade de se criar abordagens mais defensivas e resilientes, que visam reduzir o rebaixamento de saldo das carteiras.

Dentre todas as carteiras multiobjetivas, a Carteira Global foi a que apresentou o desempenho mais tímido. A conciliação de 06 objetivos simultâneos mostrou que aglomerar vários objetivos ao mesmo tempo não significa melhorar o desempenho da carteira. Seu fraco desempenho pode ser explicado pelo fato de ter dentre os 06 objetivos, alguns que são concorrentes entre si, como por exemplo, média e variância. O aumento do espaço de busca para 06 objetivos pode ter prejudicado a evolução dos algoritmos ao se lidar com inúmeras soluções não-dominadas, o que comprometeu a classificação de dominância entre os atributos e, como consequência, a melhoria genética da população.

Em relação aos algoritmos empregados, o NSGA3 foi o que produziu as melhores soluções de carteiras multiobjetivas fora da amostra, corroborando sua vantagem de se trabalhar com problemas com mais de 02 objetivos. Mais que isso, o grande diferencial do NSGA3 pode ter sido sua diversidade genética obtida graças aos seus pontos de referências espalhados no domínio de busca do algoritmo.

5 CONCLUSÕES FINAIS

Investigar novos atributos que permitam discutir a construção de novos modelos de previsão de retornos ajustados ao risco foi o grande desafio deste trabalho. O contexto desfavorável da Renda Fixa com a redução cada vez mais recorrente das taxas de juros por parte dos Bancos Centrais das economias mundiais, aliado à instabilidade de desempenho das ações das empresas negociadas em bolsas de todo mundo em função de recorrentes crises financeiras gera, por si só, uma demanda cada vez mais crescente dos investidores: buscar a construção de carteiras que tenham uma adequada relação de retorno ajustada ao risco.

Assim, a maior contribuição deste trabalho foi empírica, à medida que novos atributos foram testados na composição de portfólio. Assim, todas as propostas empíricas desta pesquisa foram desenvolvidas em duas economias: a americana e brasileira, visando garantir uma heterogeneidade de características que pudessem permitir estudar o comportamento de cada proposta empírica na realidade econômica de cada país. Além disso, as séries temporais trabalhadas foram em formato *rolling windows*, ou seja, para eliminação de qualquer viés temporal, as séries foram segmentadas em períodos de 02 anos dentro e fora da amostra, entre os anos de 1994 a 2020, período suficiente para avaliar momentos de crise e bonança econômica nos dois países.

Inicialmente, o primeiro objetivo deste trabalho foi o de comparar o modelo OCAPM empiricamente frente ao modelo CAPM. Nos testes estatísticos empregados, concluiu-se que o modelo OCAPM foi mais assertivo que o CAPM dentro e fora da amostra, apresentando menores erros de estimação. No que tange ao desempenho em termos de rentabilidade fora da amostra, o modelo OCAPM foi superior ao CAPM no mercado americano (Dow Jones), porém inferior no Brasil (IBOVESPA e Small Caps).

O segundo objetivo desta pesquisa foi experimentar uma combinação de atributos puramente convexos com o intuito de verificar se atributos além da média e variância produziram melhores portfólios. Neste quesito, a carteira convexa pouco contribuiu no tema: exceto no IBOVESPA, nos demais mercados a carteira apresentou tímido desempenho e não pareceu ser uma boa alternativa ao investidor.

O terceiro e principal objetivo da pesquisa foi propor abordagens multiobjetivas mais complexas, que envolviam atributos convexos e não-convexos simultaneamente. Para este experimento, esta pesquisa empregou quatro algoritmos evolutivos, a saber, NSGA2, NSGA3, IBEA e GDE3 como meta-heurísticas na resolução do problema de otimização.

A carteira Antifrágil foi a proposição de destaque deste trabalho. Tendo como contexto o conceito de antifragilidade estabelecido por Taleb, a carteira buscou otimizar o *drawdown* máximo e uma nova proposição de uma métrica de antifragilidade: a correlação da variação logarítmica dos retornos dos ativos com a variação logarítmica do VIX, o

indicador mais usado mundialmente para medir a volatilidade dos mercados. Assim, em momentos de pânico, ativos que variassem menos que a variação do VIX deveriam ser preferidos, supondo uma maior resiliência desses papéis em tempos de crise.

E a abordagem antifrágil trouxe resultados substanciais a esta pesquisa: a proposta apresentou ganhos superiores no retorno médio da carteira e principalmente, ganhos relevantes na relação risco x retorno, sobretudo no mercado americano. Carteiras ótimas antifrágeis apresentaram fora da amostra retornos médios maiores, positivamente mais assimétricos, com ôegas mais elevados e menos arriscados (menor desvio-padrão e menor coeficiente de variação). Isto implica concluir que perder pouco ou não perder em momentos de crise talvez seja mais importante que ganhar em momentos de bonança e estabilidade e que momentos de turbulência devem ser esperados e certamente vão ocorrer. A análise de componentes principais das carteiras ótimas estudadas neste trabalho confirmou a visão de antifragilidade na escolha dos ativos.

A carteira Global foi uma outra proposta de carteira multiobjetiva e abarcou a avaliação de seis atributos simultâneos: ômega, média, assimetria, curtose, drawdown e antifragilidade. No entanto, talvez pela conciliação de tantos atributos às vezes concorrentes, seu desempenho não alcançou os mesmos resultados da abordagem antifrágil.

A carteira Assimétrica, que otimizou os atributos ômega, assimetria e curtose, apresentou relevante destaque no IBOVESPA: 03 das 04 melhores carteiras foram de algoritmos das carteiras Assimétricas, com rentabilidade superior aos modelos CAPM, OCAPM e até mesmo a Renda Fixa no período, demonstrando que em mercados emergentes pode ser uma ótima alternativa. Aliás, a Renda Fixa no mercado brasileiro embora com rendimento pequeno nos dias atuais (a SELIC em 2020 está a 2,25% ao ano), foi um excelente investimento no período estudado, isto porque os ativos brasileiros apresentaram, por natureza, um maior *drawdown* e desvio-padrão em relação aos ativos americanos, o que tornou a Renda Fixa um atrativo investimento neste período.

O emprego de algoritmos evolutivos foi decisivo nos resultados da pesquisa, muito embora não se constituiu escopo do trabalho explorar minuciosamente os parâmetros de cada algoritmo. Optou-se por trabalhar com os parâmetros mais recorrentes na academia. Mesmo assim, algumas conclusões em relação aos algoritmos foram possíveis. A primeira diz respeito ao desempenho dos algoritmos dentro e fora da amostra. Apenas em um único caso, o algoritmo vencedor no período dentro da amostra foi o mesmo que fora da amostra. Em todos os outros 08 cenários, o algoritmo vencedor fora da amostra foi diferente. Isso revela que em problemas de seleção de carteira, o desempenho *ex-ante* do algoritmo não tem relação com seu desempenho *ex-post* e é preciso cautela na avaliação de alternativas somente considerando o período dentro da amostra.

Outra conclusão importante sobre os algoritmos é a superioridade evidente do algoritmo NSGA3. Nos mercados Dow Jones e IBOVESPA, o NSGA3 foi responsável

por apresentar a carteira com o melhor desempenho dentre todos, confirmando sua característica de funcionar bem em problemas com mais de 02 objetivos e principalmente, a melhor variedade genética dos candidatos só é conseguida graças a seus pontos de referência espalhados no espaço de busca do algoritmo. Daí, surge uma oportunidade de melhoria para ser desenvolvida em trabalhos futuros que é o de investir tempo no estudo de parâmetros e ajustes do NSGA3, trabalhando por exemplo com um ajuste fino nos pontos de referência trazidos nas características do algoritmo. Como o NSGA3 é o mais recente dos algoritmos empregados, algumas variantes poderiam ser criadas adaptando sua realidade à seleção de carteiras.

Dentre as limitações da pesquisa, a mais importante se refere à parte computacional: como o trabalho é multidisciplinar, envolvendo as áreas de computação e economia, optou-se por utilizar os algoritmos e parâmetros já consagrados pela academia, sem maiores esforços para encontrar melhores configurações computacionais ao problema. Ao mesmo tempo, essa lacuna abre espaço para uma grande melhoria em trabalhos futuros, em particular, modificar os algoritmos ou até mesmo investir em outras técnicas aplicadas exclusivamente à carteira antifrágil conseguindo possivelmente uma evolução ainda maior no seu desempenho.

Uma segunda limitação da pesquisa diz respeito à ausência de comparação dos resultados obtidos pelos algoritmos evolutivos com alguma outra meta-heurística, ou seja, os resultados produzidos pelos algoritmos evolutivos não foram comparados com outros de técnicas similares, como por exemplo, de algoritmos de enxame de partículas.

Uma terceira limitação se refere a testes de robustez dos resultados: embora este trabalho apresentou todos os seus resultados fora da amostra e agrupou dados de 03 mercados distintos, testes avançados de robustez já estão disponíveis e podem ser utilizados em trabalhos futuros. Cita-se apenas o *Walk Forward Analysis*, em que vários períodos dentro e fora da amostra são conjugados para validar a consistência da carteira. Essa análise permite, por exemplo, dimensionar o prazo de duração do portfólio, com sugestões de período de substituição dos ativos, bem como trocar sua composição em virtude de indicadores históricos, como o *drawdown* histórico, entre outros.

Outra limitação importante do estudo é que ele não avança em propor modelos econômicos, limitando sua atuação no âmbito empírico. Ainda que a proposta inicial tenha sido de não avançar em modelagem econômica, transformar e construir a abordagem antifrágil sob o contexto econômico pode enriquecer e criar um novo marco na Teoria de Carteiras, aliando desempenho empírico a uma boa construção teórica. Adicionalmente, a modelagem da teoria antifrágil abre condições de uma maior envergadura dos seus testes empíricos em outras bases de dados, inclusive aquelas tradicionalmente utilizadas na academia.

Como sugestão de trabalhos futuros tem-se a aplicação de mecanismos adicionais

de proteção à carteira, principalmente pelo fato da abordagem antifrágil privilegiar ativos com baixo *drawdown*. Isso poderia ser feito conciliando proteções contra grandes quedas através de compras de opções de venda (*puts*), por exemplo, ou a montagem de operações estruturadas para resguardar o portfólio de quedas muito abruptas. Dessa forma, o algoritmo poderia trabalhar mais agressivo em alcance de rentabilidade, já que teria a operação de proteção via derivativos garantida.

Já nos experimentos envolvendo o CAPM, uma sugestão de trabalho futuro é avaliar a eficiência do CAPM ao se trocar a variância pela semi-variância, bem como trocar o Índice de Sharpe pelo Índice de Sortino na otimização. Há indícios na literatura que essas alterações possam representar uma melhoria do modelo em geral.

O experimento convexo pode ser aperfeiçoado em trabalhos futuros: conforme já apresentado na metodologia, primeiramente, construindo uma Fronteira de Pareto através de diferentes pesos de cada um dos atributos convexos; em segundo, desacoplando a otimização do problema em um modelo híbrido (convexo e não-convexo), isto é, otimiza-se inicialmente os atributos convexos e, partindo do resultado dessa otimização, partir-se-ia para uma otimização de atributos não-convexos utilizando meta-heurísticas. Por último, a fim de se testar a eficiência da otimização dos atributos convexos, seria interessante rodar algoritmos evolutivos como técnica de solução do experimento convexo, servindo de contraprova em relação aos resultados apresentados.

Como o NSGA3 foi o algoritmo de destaque do trabalho, seria interessante trabalhar em pesquisas futuras de que forma os melhores resultados alcançados pelo experimento convexo podem se transformar em pontos de referência do grid de busca do NSGA3. Isso possibilitaria uma melhoria ainda mais significativa no desempenho do algoritmo.

Ainda nessa linha, o trabalho poderia avançar em analisar carteiras com diferentes estratégias simultaneamente e a otimização trabalharia não só com ponderação dos pesos dos ativos, mas sim dos pesos das estratégias no portfólio. Isso implicaria em análises avançadas de correlação entre as estratégias que poderiam resultar em melhores desempenhos finais ao investidor.

Não poderiam faltar sugestões de pesquisas futuras envolvendo técnicas mais avançadas como *deep learning* na aplicação de seleção de carteiras. Estudos envolvendo a análise de textos e notícias em sites de busca (*text mining*) bem como a aplicação de redes neurais na distribuição de pesos dos ativos são nichos promissores de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- 1 MARKOWITZ, H., “Portfolio selection”, *The journal of finance*, v. 7, n. 1, pp. 77–91, 1952.
- 2 SHARPE, W. F., “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *The journal of finance*, v. 19, n. 3, pp. 425–442, 1964.
- 3 BERK, J. B., “Necessary conditions for the CAPM”, *Journal of Economic Theory*, v. 73, n. 1, pp. 245–257, 1997.
- 4 ROLL, R., “A critique of the asset pricing theory’s tests Part I: On past and potential testability of the theory”, *Journal of financial economics*, v. 4, n. 2, pp. 129–176, 1977.
- 5 ROSS, S. A., “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing”, 1976.
- 6 FAMA, E. F., FRENCH, K. R., “Common risk factors in the returns on stocks and bonds”, *Journal of financial economics*, v. 33, n. 1, pp. 3–56, 1993.
- 7 VASCONCELOS, G. F. R., PEROBELLI, F. F. C., DE TOLEDO VIEIRA, M., “Precificação de ativos levando em conta os momentos superiores das distribuições de retornos: A derivação do omega capital asset pricing model (ocapm)”. In: *Anais do XLI Encontro Nacional de Economia [Proceedings of the 41st Brazilian Economics Meeting]*, n. 126, 2014.
- 8 KEATING, C., SHADWICK, W. F., “A universal performance measure”, *Journal of performance measurement*, v. 6, n. 3, pp. 59–84, 2002.
- 9 TALEB, N. N., *Antifrágil: coisas que se beneficiam com o caos*. Objetiva, 2020.
- 10 ZANINI, F. A. M., FIGUEIREDO, A. C., “As teorias de carteira de Markowitz e de Sharpe: uma aplicação no mercado brasileiro de ações entre julho/95 e junho/2000”, *Revista de Administração Mackenzie (Mackenzie Management Review)*, v. 6, n. 2, 2008.
- 11 FAMA, E. F., “The behavior of stock-market prices”, *The journal of Business*, v. 38, n. 1, pp. 34–105, 1965.
- 12 KELLY JR, J. L., “A new interpretation of information rate”, In: *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice*, pp. 25–34, World Scientific, 2011.
- 13 FRENCH, C. W., “The Treynor capital asset pricing model”, *Journal of Investment Management*, v. 1, n. 2, pp. 60–72, 2003.
- 14 SHARPE, W., ALEXANDER, G. J., BAILEY, J. W., “Investments”, 1998.
- 15 TOBIN, J., “Liquidity preference as behavior towards risk”, *The review of economic studies*, v. 25, n. 2, pp. 65–86, 1958.
- 16 DOUGLAS, G. W., “Risk in the equity markets: an empirical appraisal of market efficiency.” 1968.
- 17 JENSEN, M. C., BLACK, F., SCHOLES, M. S., “The capital asset pricing model: Some empirical tests”, 1972.

- 18 MILLER, M. H., SCHOLES, M., “Rates of return in relation to risk: A reexamination of some recent findings”, *Studies in the theory of capital markets*, v. 23, 1972.
- 19 BLUME, M. E., FRIEND, I., “A new look at the capital asset pricing model”, *The journal of finance*, v. 28, n. 1, pp. 19–34, 1973.
- 20 FAMA, E. F., MACBETH, J. D., “Risk, return, and equilibrium: Empirical tests”, *Journal of political economy*, v. 81, n. 3, pp. 607–636, 1973.
- 21 FAMA, E. F., FRENCH, K. R., “O modelo de precificação de ativos de capital: teoria e evidências”, *Revista de Administração de Empresas*, v. 47, n. 2, pp. 103–118, 2007.
- 22 FAMA, E. F., FRENCH, K. R., “Multifactor explanations of asset pricing anomalies”, *The journal of finance*, v. 51, n. 1, pp. 55–84, 1996.
- 23 FAMA, E. F., FRENCH, K. R., “Value versus growth: The international evidence”, *The journal of finance*, v. 53, n. 6, pp. 1975–1999, 1998.
- 24 KAZEMI, H., SCHNEEWEIS, T., GUPTA, B., “Omega as a performance measure”, *JOURNAL OF PERFORMANCE MEASUREMENT.*, v. 8, pp. 16–25, 2004.
- 25 BERTRAND, P., PRIGENT, J.-L., “Omega performance measure and portfolio insurance”, *Journal of Banking & Finance*, v. 35, n. 7, pp. 1811–1823, 2011.
- 26 FAVRE-BULLE, A., PACHE, S., “The omega measure: Hedge fund portfolio optimization”, 2003.
- 27 KANE, S. J., BARTHOLOMEW-BIGGS, M. C., CROSS, M., DEWAR, M., “Optimizing Omega”, *Journal of Global Optimization*, v. 45, n. 1, pp. 153–167, 2009.
- 28 GILLI, M., SCHUMANN, E., “Distributed optimisation of a portfolio’s Omega”, *Parallel Computing*, v. 36, n. 7, pp. 381–389, 2010.
- 29 CAPORIN, M., COSTOLA, M., JANNIN, G., MAILLET, B., ““On the (Ab)use of Omega?””, *Journal of Empirical Finance*, v. 46, n. October 2017, pp. 11–33, 2018.
- 30 BERNARD, C., VANDUFFEL, S., YE, J., “Optimal strategies under Omega ratio”, *European Journal of Operational Research*, v. 275, n. 2, pp. 755–767, 2019.
- 31 YU, J. R., CHIOU, W. J. P., LEE, W. Y., CHUANG, T. Y., “Realized performance of robust portfolios: Worst-case Omega vs. CVaR-related models”, *Computers and Operations Research*, v. 104, pp. 239–255, 2019.
- 32 TANG, G. Y., “How efficient is naive portfolio diversification? An educational note”, *Omega*, v. 32, n. 2, pp. 155–160, 2004.
- 33 DEMIGUEL, V., GARLAPPI, L., UPPAL, R., “Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?” *The review of Financial studies*, v. 22, n. 5, pp. 1915–1953, 2007.
- 34 TU, J., ZHOU, G., “Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies”, *Journal of Financial Economics*, v. 99, n. 1, pp. 204–215, 2011.

- 35 ALVES PORTELA SANTOS, A., TESSARI, C., “Técnicas quantitativas de otimização de carteiras aplicadas ao mercado de ações brasileiro”, *Revista Brasileira de Finanças*, v. 10, n. 3, 2012.
- 36 JIANG, C., DU, J., AN, Y., “Combining the minimum-variance and equally-weighted portfolios: Can portfolio performance be improved?” *Economic Modelling*, 2018.
- 37 KONNO, H., SHIRAKAWA, H., YAMAZAKI, H., “A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model”, *Annals of Operations Research*, v. 45, n. 1, pp. 205–220, 1993.
- 38 SUN, Q., YAN, Y., “Skewness persistence with optimal portfolio selection”, *Journal of Banking & Finance*, v. 27, n. 6, pp. 1111–1121, 2003.
- 39 CANELA, M. A., COLLAZO, E. P., “Portfolio selection with skewness in emerging market industries”, *Emerging Markets Review*, v. 8, n. 3, pp. 230–250, 2007.
- 40 KIM, T., “Does individual-stock skewness/coskewness reflect portfolio risk?” *Finance Research Letters*, v. 15, pp. 167–174, 2015.
- 41 DE OLIVEIRA, A. S., LOPES, L. F. D., ABBADE, E. B., “Coassimetria e cocurtose na análise dos preços das ações no mercado financeiro nacional”, *Revista de Administração da UFSM*, v. 3, n. 3, pp. 326–345, 2010.
- 42 JIANG, C., MA, Y., AN, Y., “Portfolio selection with a systematic skewness constraint”, *The North American Journal of Economics and Finance*, v. 37, pp. 393–405, 2016.
- 43 FANG, H., LAI, T.-Y., “Co-kurtosis and capital asset pricing”, *Financial Review*, v. 32, n. 2, pp. 293–307, 1997.
- 44 CASTRO JUNIOR, F. H. F. D., *Apreçamento de ativos com assimetria e curtose: um teste de comomentos com dados em painel*, Tese (Doutorado), Universidade de São Paulo, 2008.
- 45 CHEKHLOV, A., URYASEV, S., ZABARANKIN, M., “Drawdown measure in portfolio optimization”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v. 8, n. 01, pp. 13–58, 2005.
- 46 MENDES, B. V., LEAL, R. P., “Maximum drawdown: Models and applications”, 2003.
- 47 HAMELINK, F., HOESLI, M., “The maximum drawdown as a risk measure: the role of real estate in the optimal portfolio revisited”, *FAME Research Paper*, , n. 87, 2003.
- 48 MAGDON-ISMAIL, M., ATIYA, A. F., “Maximum drawdown”, 2004.
- 49 ZABARANKIN, M., PAVLIKOV, K., URYASEV, S., “Capital asset pricing model (CAPM) with drawdown measure”, *European Journal of Operational Research*, v. 234, n. 2, pp. 508–517, 2014.
- 50 DE MELO MENDES, B. V., LAVRADO, R. C., “Implementing and testing the Maximum Drawdown at Risk”, *Finance Research Letters*, v. 22, pp. 95–100, 2017.

- 51 PRAKASH, A. J., CHANG, C. H., PACTWA, T. E., “Selecting a portfolio with skewness: Recent evidence from US, European, and Latin American equity markets”, *Journal of Banking and Finance*, v. 27, n. 7, pp. 1375–1390, 2003.
- 52 LI, X., QIN, Z., KAR, S., “Mean-variance-skewness model for portfolio selection with fuzzy returns”, *European Journal of Operational Research*, v. 202, n. 1, pp. 239–247, 2010.
- 53 BHATTACHARYYA, R., KAR, S., MAJUMDER, D. D., “Fuzzy mean-variance-skewness portfolio selection models by interval analysis”, *Computers and Mathematics with Applications*, v. 61, n. 1, pp. 126–137, 2011.
- 54 CHEN, G., LUO, Z., LIAO, X., YU, X., YANG, L., “Mean-variance-skewness fuzzy portfolio selection model based on intuitionistic fuzzy optimization”, *Procedia Engineering*, v. 15, pp. 2062–2066, 2011.
- 55 BRIEC, W., KERSTENS, K., VAN DE WOESTYNE, I., “Portfolio selection with skewness: A comparison of methods and a generalized one fund result”, *European Journal of Operational Research*, v. 230, n. 2, pp. 412–421, 2013.
- 56 BHATTACHARYYA, R., HOSSAIN, S. A., KAR, S., “Fuzzy cross-entropy, mean, variance, skewness models for portfolio selection”, *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*, v. 26, n. 1, pp. 79–87, 2014.
- 57 JIANG, C., MA, Y., AN, Y., “Portfolio selection with a systematic skewness constraint”, *North American Journal of Economics and Finance*, v. 37, pp. 393–405, 2016.
- 58 HITAJ, A., ZAMBRUNO, G., “Are Smart Beta strategies suitable for hedge fund portfolios?” *Review of Financial Economics*, v. 29, pp. 37–51, 2016.
- 59 CHEN, W., LI, D., LIU, Y.-J., “A novel hybrid ICA-FA algorithm for multiperiod uncertain portfolio optimization model based on multiple criteria”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 27, n. 5, pp. 1023–1036, 2018.
- 60 CHEN, B., ZHONG, J., CHEN, Y., “A hybrid approach for portfolio selection with higher-order moments: Empirical evidence from Shanghai Stock Exchange”, *Expert Systems with Applications*, v. 145, 2020.
- 61 LIU, Y. J., ZHANG, W. G., ZHAO, X. J., “Fuzzy multi-period portfolio selection model with discounted transaction costs”, *Soft Computing*, v. 22, n. 1, pp. 177–193, 2018.
- 62 BAVARSAD SALEHPOOR, I., MOLLA-ALIZADEH-ZAVARDEHI, S., “A constrained portfolio selection model at considering risk-adjusted measure by using hybrid meta-heuristic algorithms”, *Applied Soft Computing Journal*, v. 75, pp. 233–253, 2019.
- 63 DENG, X., XU, W.-J., WANG, Z.-Q., “Dynamic multi-objective fuzzy portfolio model that considers corporate social responsibility and background risk”, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, v. 19, n. 2, pp. 413–432, 2016.
- 64 CHEKHLOV, A., URYASEV, S., ZABARANKIN, M., “Drawdown measure in portfolio optimization”, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v. 8, n. 1, pp. 13–58, 2005.
- 65 ALEXANDER, G. J., BAPTISTA, A. M., “Portfolio selection with a drawdown constraint”, *Journal of Banking and Finance*, v. 30, n. 11, pp. 3171–3189, 2006.

- 66 ALMAHDI, S., YANG, S. Y., “An adaptive portfolio trading system: A risk-return portfolio optimization using recurrent reinforcement learning with expected maximum drawdown”, *Expert Systems with Applications*, v. 87, pp. 267–279, 2017.
- 67 FAVRE-BULLE, A., PACHE, S., “The Omega Measure: Hedge Fund Portfolio Optimization”, *SSRN Electronic Journal*, v. 41, n. 0, 2005.
- 68 BERTRAND, P., LUC PRIGENT, J., “Omega performance measure and portfolio insurance”, *Journal of Banking and Finance*, v. 35, n. 7, pp. 1811–1823, 2011.
- 69 TALEB, N. N., *O cisne Negro*. Leya, 2017.
- 70 AVEN, T., “Practical implications of the new risk perspectives”, *Reliability Engineering & System Safety*, v. 115, pp. 136–145, 2013.
- 71 AVEN, T., KROHN, B. S., “A new perspective on how to understand, assess and manage risk and the unforeseen”, *Reliability Engineering & System Safety*, v. 121, pp. 1–10, 2014.
- 72 LIN, W.-Y., TSAI, I.-C., “Black swan events in China’s stock markets: Intraday price behaviors on days of volatility”, *International Review of Economics & Finance*, v. 59, pp. 395–411, 2019.
- 73 THEKDI, S., AVEN, T., “An integrated perspective for balancing performance and risk”, *Reliability Engineering & System Safety*, v. 190, pp. 106525, 2019.
- 74 TALEB, N. N., GOLDSTEIN, D. G., SPITZNAGEL, M. W., “The six mistakes executives make in risk management”, *Harvard Business Review*, v. 87, n. 10, pp. 78–81, 2009.
- 75 OLSON, E., MILLER, S., WOCHAR, M. E., ““Black Swans” before the “Black Swan” evidence from international LIBOR–OIS spreads”, *Journal of International Money and Finance*, v. 31, n. 6, pp. 1339–1357, 2012.
- 76 WHALEY, R. E., “The investor fear gauge”, *The Journal of Portfolio Management*, v. 26, n. 3, pp. 12–17, 2000.
- 77 WHALEY, R. E., “Understanding the VIX”, *The Journal of Portfolio Management*, v. 35, n. 3, pp. 98–105, 2009.
- 78 SARWAR, G., “Is VIX an investor fear gauge in BRIC equity markets?” *Journal of Multinational Financial Management*, v. 22, n. 3, pp. 55–65, 2012.
- 79 MORAN, M. T., DASH, S., “VIX futures and options: Pricing and using volatility products to manage downside risk and improve efficiency in equity portfolios”, *The Journal of Trading*, v. 2, n. 3, pp. 96–105, 2007.
- 80 BAHAJI, H., ABERKANE, S., “How rational could VIX investing be?” *Economic Modelling*, v. 58, pp. 556–568, 2016.
- 81 QADAN, M., KLIGER, D., CHEN, N., “Idiosyncratic volatility, the VIX and stock returns”, *The North American Journal of Economics and Finance*, v. 47, pp. 431–441, 2019.

- 82 DEB, K., *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc.: New York, NY, USA, 2001.
- 83 DEB, K., *Optimization for engineering design: Algorithms and examples*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2012.
- 84 ZITZLER, E., DEB, K., THIELE, L., COELLO, C. C., COELLO, C. A. C., CORNE, D., *Evolutionary Multi-criterion Optimization:... International Conference; Proceedings. Zurich, Switzerland, March 7-9, 2001*. N. 1993, Springer Science & Business Media, 2001.
- 85 PEREIRA, G. W., “Aplicação da técnica de recozimento simulado em problemas de planejamento florestal multiobjetivo”, 2004.
- 86 KALAYCI, C. B., ERTENLICE, O., AKBAY, M. A., “A comprehensive review of deterministic models and applications for mean-variance portfolio optimization”, *Expert Systems with Applications*, 2019.
- 87 METAXIOTIS, K., LIAGKOURAS, K., “Multiobjective evolutionary algorithms for portfolio management: A comprehensive literature review”, *Expert Systems with Applications*, v. 39, n. 14, pp. 11685–11698, 2012.
- 88 BERMÚDEZ, J. D., SEGURA, J. V., VERCHER, E., “A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection”, *Fuzzy Sets and Systems*, v. 188, n. 1, pp. 16–26, 2012.
- 89 KALAYCI, C. B., ERTENLICE, O., AKYER, H., AYGOREN, H., “An artificial bee colony algorithm with feasibility enforcement and infeasibility toleration procedures for cardinality constrained portfolio optimization”, *Expert Systems with Applications*, v. 85, pp. 61–75, 2017.
- 90 CHEN, W., “Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 429, pp. 125–139, 2015.
- 91 GOLMAKANI, H. R., FAZEL, M., “Constrained portfolio selection using particle swarm optimization”, *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 7, pp. 8327–8335, 2011.
- 92 RUIZ-TORRUBIANO, R., SUÁREZ, A., “A memetic algorithm for cardinality-constrained portfolio optimization with transaction costs”, *Applied Soft Computing*, v. 36, pp. 125–142, 2015.
- 93 ANAGNOSTOPOULOS, K. P., MAMANIS, G., “A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables”, *Computers & Operations Research*, v. 37, n. 7, pp. 1285–1297, 2010.
- 94 ARNONE, S., LORASCHI, A., TETTAMANZI, A., “A genetic approach to portfolio selection”, *Neural Network World*, v. 3, n. 6, pp. 597–604, 1993.
- 95 VEDARAJAN, G., CHAN, L. C., GOLDBERG, D., “Investment portfolio optimization using genetic algorithms”. In: *Late breaking papers at the genetic programming 1997 conference*, pp. 255–263, 1997.

- 96 HOCHREITER, R., “An evolutionary computation approach to scenario-based risk-return portfolio optimization for general risk measures”. In: *Workshops on Applications of Evolutionary Computation*, pp. 199–207, 2007.
- 97 ANAGNOSTOPOULOS, K. P., MAMANIS, G., “Multiobjective evolutionary algorithms for complex portfolio optimization problems”, *Computational Management Science*, v. 8, n. 3, pp. 259–279, 2011.
- 98 STORN, R., PRICE, K., “Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces”, *Journal of global optimization*, v. 11, n. 4, pp. 341–359, 1997.
- 99 DEB, K., PRATAP, A., AGARWAL, S., MEYARIVAN, T., “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”, *IEEE transactions on evolutionary computation*, v. 6, n. 2, pp. 182–197, 2002.
- 100 ZITZLER, E., KÜNZLI, S., “Indicator-based selection in multiobjective search”. In: *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*, pp. 832–842, 2004.
- 101 KUKKONEN, S., LAMPINEN, J., “GDE3: The third evolution step of generalized differential evolution”. In: *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on*, v. 1, pp. 443–450, 2005.
- 102 DEB, K., JAIN, H., “An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints.” *IEEE Trans. Evolutionary Computation*, v. 18, n. 4, pp. 577–601, 2014.
- 103 BARBOSA, H. J., LEMONGE, A. C., BORGES, C. C., “A genetic algorithm encoding for cardinality constraints and automatic variable linking in structural optimization”, *Engineering Structures*, v. 30, n. 12, pp. 3708–3723, 2008.
- 104 MITCHELL, M., *An introduction to genetic algorithms*. MIT press, 1998.
- 105 DEB, K., *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. v. 16. John Wiley & Sons, 2001.
- 106 DEB, K., MOHAN, M., MISHRA, S., “A fast multi-objective evolutionary algorithm for finding well spread pareto optimal solutions (KanGAL Report No. 2003002)”, *Kanpur, India: Indian Institute of Technology*, 2003.
- 107 DEB, K., AGRAWAL, S., PRATAP, A., MEYARIVAN, T., “A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II”. In: *International Conference on Parallel Problem Solving From Nature*, pp. 849–858, 2000.
- 108 SEN, T., SAHA, S., EKBAL, A., LAHA, A. K., “Bi-objective portfolio optimization using archive multi-objective simulated annealing”, *2014 International Conference on High Performance Computing and Applications, ICHPCA 2014*, pp. 1–6, 2015.
- 109 CHEN, W., “Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 429, pp. 125–139, 2015.

- 110 WEI, W., WANG, J., TAO, M., “Constrained differential evolution with multiobjective sorting mutation operators for constrained optimization”, *Applied Soft Computing Journal*, v. 33, pp. 207–222, 2015.
- 111 SABORIDO, R., RUIZ, A. B., BERMÚDEZ, J. D., VERCHER, E., LUQUE, M., “Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection”, *Applied Soft Computing Journal*, v. 39, pp. 48–63, 2016.
- 112 KAR, M. B., MAJUMDER, S., KAR, S., PAL, T., “Cross-entropy based multi-objective uncertain portfolio selection problem”, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, v. 32, n. 6, pp. 4467–4483, 2017.
- 113 LIAGKOURAS, K., METAXIOTIS, K., “A new efficiently encoded multiobjective algorithm for the solution of the cardinality constrained portfolio optimization problem”, *Annals of Operations Research*, v. 267, pp. 281–319, 2018.
- 114 CHEN, W., XU, W., “A Hybrid Multiobjective Bat Algorithm for Fuzzy Portfolio Optimization with Real-World Constraints”, *International Journal of Fuzzy Systems*, v. 21, n. 1, pp. 291–307, 2019.
- 115 ANAGNOSTOPOULOS, K. P., MAMANIS, G., “The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms”, *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 11, pp. 14208–14217, 2011.
- 116 SRINIVAS, N., DEB, K., “Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms”, *Evolutionary computation*, v. 2, n. 3, pp. 221–248, 1994.
- 117 WEILE, D. S., MICHELSEN, E., GOLDBERG, D. E., “Multiobjective synthesis of electromagnetic devices using nondominated sorting genetic algorithms”. In: *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1996. AP-S. Digest*, v. 1, pp. 592–595, 1996.
- 118 REED, P. M., MINSKER, B. S., GOLDBERG, D. E., “Designing a new elitist nondominated sorted genetic algorithm for a multiobjective long term groundwater monitoring application”. In: *Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*, pp. 1454–1454, 2001.
- 119 BLUMEL, A. L., HUGHES, E. J., WHITE, B. A., “Fuzzy autopilot design using a multiobjective evolutionary algorithm”. In: *Evolutionary Computation, 2000. Proceedings of the 2000 Congress on*, v. 1, pp. 54–61, 2000.
- 120 COELLO, C. A. C., LAMONT, G. B., VAN VELDHUIZEN, D. A., OTHERS, *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. v. 5. Springer, 2007.
- 121 KONAK, A., COIT, D. W., SMITH, A. E., “Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial”, *Reliability Engineering & System Safety*, v. 91, n. 9, pp. 992–1007, 2006.
- 122 DE SOUZA RIBEIRO, R., *Comparação De Algoritmos Evolucionários Para Problemas Com Muitos Objetivos*, Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.































- 123 ZHU, Y., LIANG, J., CHEN, J., MING, Z., “An improved NSGA-III algorithm for feature selection used in intrusion detection”, *Knowledge-Based Systems*, v. 116, pp. 74–85, 2017.
- 124 CHENG, S.-L., HWANG, C., “Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm”, *IEEE Transactions on Systems, man, and cybernetics-part a: systems and humans*, v. 31, n. 6, pp. 698–707, 2001.
- 125 ARAUJO, R. L. D., “Evolução diferencial para problemas de otimização com restrições lineares”, 2016.
- 126 PRADO, R. S., SILVA, R. C. P., GUIMARÃES, F. G., NETO, O. M., “Uma nova abordagem para a evolução diferencial em otimização discreta”. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática. Bonito-MS*, 2010.
- 127 LAMPINEN, J., OTHERS, “DE’s selection rule for multiobjective optimization”, *Lappeenranta University of Technology, Department of Information Technology, Tech. Rep*, pp. 03–04, 2001.
- 128 VARGAS, D. E., “Análise Paramétrica do Algoritmo The Third Step of Generalized Differential Evolution (GDE3) em Problemas de Otimização Estrutural Multiobjetivo”, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, 2018.
- 129 BOSMAN, P. A., THIERENS, D., “The balance between proximity and diversity in multiobjective evolutionary algorithms”, *IEEE transactions on evolutionary computation*, v. 7, n. 2, pp. 174–188, 2003.
- 130 ZITZLER, E., BROCKHOFF, D., THIELE, L., “The hypervolume indicator revisited: On the design of Pareto-compliant indicators via weighted integration”. In: *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pp. 862–876, 2007.
- 131 RIQUELME, N., VON LÜCKEN, C., BARAN, B., “Performance metrics in multi-objective optimization”. In: *2015 Latin American Computing Conference (CLEI)*, pp. 1–11, 2015.
- 132 MERTON, R. C., SAMUELSON, P. A., “Continuous-time finance”, 1992.
- 133 MERTON, R. C., “Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case”, *The review of Economics and Statistics*, pp. 247–257, 1969.
- 134 CAMPBELL, J. Y., VICEIRA, L. M., VICEIRA, L. M., OTHERS, *Strategic asset allocation: portfolio choice for long-term investors*. Clarendon Lectures in Economic, 2002.
- 135 KRAFT, D., “A software package for sequential quadratic programming”, *Forschungsbericht- Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt*, 1988.
- 136 MAUSSER, H., SAUNDERS, D., SECO, L., “Optimising omega”, *RISK-LONDON-RISK MAGAZINE LIMITED-*, v. 19, n. 11, pp. 88, 2006.
- 137 CHARNES, A., COOPER, W. W., “Programming with linear fractional functionals”, *Naval Research logistics quarterly*, v. 9, n. 3-4, pp. 181–186, 1962.

- 138 NIU, Y.-S., WANG, Y.-J., “Higher-order Moment Portfolio Optimization via The Difference-of-Convex Programming and Sums-of-Squares”, *arXiv preprint arXiv:1906.01509*, 2019.
- 139 KOKOSKA, S., ZWILLINGER, D., *CRC standard probability and statistics tables and formulae*. Crc Press, 1999.
- 140 GOLDBERG, L. R., MAHMOUD, O., “Drawdown: from practice to theory and back again”, *Mathematics and Financial Economics*, v. 11, n. 3, pp. 275–297, 2017.
- 141 CHEKHLOV, A., URYASEV, S., ZABARANKIN, M., “Portfolio optimization with drawdown constraints”, In: *Supply chain and finance*, pp. 209–228, World Scientific, 2004.
- 142 DEB, K., AGRAWAL, R. B., OTHERS, “Simulated binary crossover for continuous search space”, *Complex systems*, v. 9, n. 2, pp. 115–148, 1995.
- 143 GIBBONS, M. R., ROSS, S. A., SHANKEN, J., “A test of the efficiency of a given portfolio”, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 1121–1152, 1989.
- 144 CASTRO, C. H. D. C., “Medida de performance de carteira por média-variância e a medida Ômega: uma análise empírica dos modelos CAPM e OCAPM para o Ibovespa e Dow Jones”, 2014.
- 145 JOLLIFFE, I. T., CADIMA, J., “Principal component analysis: a review and recent developments”, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 374, n. 2065, pp. 20150202, 2016.

6 APENDICES

ANEXO 01 - Betas - Dow Jones

Figura 68: Betas - Dow Jones

DOW JONES	BETAS																															
	1994-1995		1996-1997		1998-1999		2000-2001		2002-2003		2004-2005		2006-2007		2008-2009		2010-2011		2012-2013		2014-2015		2016-2017		2018-2019							
	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM						
Apple 	--	--	0,67	0,73	0,67	1,31	0,21	0,28	0,48	0,80	0,38	1,40	0,70	1,77	0,88	0,59	0,83	1,19	0,59	0,54	0,37	0,65	0,40	0,82	0,61	1,22						
Amer Exp 	0,77	0,75	0,72	0,98	0,65	0,63	0,65	0,46	0,69	1,06	0,24	0,29	0,76	0,94	1,34	1,09	1,15	1,12	0,93	1,06	0,39	0,71	0,55	0,75	0,63	0,79						
Boeing 	0,36	0,77	0,73	0,72	0,31	0,35	0,52	0,29	0,69	0,79	0,32	0,35	0,52	0,71	0,78	0,39	1,10	1,16	1,02	1,02	0,36	0,69	0,67	1,34	0,54	0,64						
Caterpillar 	0,46	0,42	0,61	0,59	0,32	0,24	0,54	0,38	0,64	1,15	0,42	0,49	0,72	0,85	0,99	0,70	1,27	1,34	0,92	0,91	0,32	0,66	0,90	1,57	0,57	0,92						
Cisco 	0,85	1,87	1,20	1,26	0,87	1,11	0,48	0,14	0,76	0,99	0,24	0,42	0,54	0,79	0,97	0,56	0,98	1,00	0,72	0,74	0,33	0,68	0,55	0,85	0,74	1,01						
Chevron 	0,20	0,49	0,56	0,56	0,18	0,16	0,17	0,12	0,35	0,61	0,29	0,29	1,11	0,92	0,86	0,45	0,90	0,96	0,69	0,74	0,36	0,66	0,93	0,78	0,45	0,49						
Dupont 	0,22	0,36	0,63	0,69	0,30	0,32	0,52	0,30	0,57	0,84	0,21	0,24	0,54	0,75	0,99	0,62	1,06	1,15	0,87	1,00	0,27	0,55	0,60	0,95	0,54	0,81						
Disney 	0,42	0,68	0,66	0,61	0,45	0,38	0,20	0,13	0,68	1,05	0,22	0,34	0,51	0,78	0,95	0,54	1,00	1,03	0,78	1,15	0,36	0,76	0,47	0,48	0,50	0,65						
GE 	0,33	0,69	1,03	0,92	0,57	0,48	0,53	0,40	0,68	0,99	0,25	0,28	0,44	0,63	0,98	0,61	1,07	1,10	0,82	0,91	0,35	0,69	0,63	0,66	0,44	0,69						
Goldman Sachs 	--	--	--	--	--	--	0,53	0,32	0,58	0,85	0,34	0,40	1,07	1,26	1,30	0,88	0,96	1,03	1,07	1,21	0,43	0,87	1,19	1,11	0,49	0,82						
Home Depot 	0,51	0,52	0,64	0,73	0,77	0,78	0,66	0,39	0,48	0,88	0,36	0,35	0,54	0,76	0,89	0,50	1,10	0,93	0,68	1,10	0,37	1,05	0,40	0,68	0,51	0,69						
IBM 	0,50	0,66	1,18	1,04	0,49	0,57	0,27	0,16	0,56	0,71	0,13	0,24	0,41	0,72	1,00	0,43	0,93	0,79	0,60	0,62	0,31	0,67	0,51	0,65	0,63	0,81						
Intel 	1,13	1,02	1,29	1,28	0,78	0,80	0,39	0,23	0,77	1,01	0,27	0,41	0,64	1,05	0,96	0,56	0,91	0,96	0,77	0,76	0,32	0,67	0,57	1,01	0,58	0,96						
Johnson 	0,55	1,17	0,66	0,82	0,39	0,26	0,16	0,19	0,34	0,55	0,19	0,13	0,21	0,41	0,42	0,17	0,50	0,52	0,47	0,58	0,35	0,60	0,27	0,58	0,66	0,69						
JP Morgan 	--	--	0,63	0,74	0,69	0,64	0,59	0,35	0,75	1,07	0,27	0,29	0,77	0,95	1,55	1,10	1,21	1,13	0,93	1,12	0,42	0,85	1,23	1,05	0,44	0,65						
Coca Cola 	0,33	0,94	0,75	0,81	0,32	0,19	0,24	0,19	0,26	0,50	0,17	0,16	0,33	0,75	0,43	0,17	0,56	0,59	0,56	0,63	0,20	0,42	0,19	0,43	0,63	0,63						
MC Donalds 	0,36	0,49	0,49	0,57	0,37	0,32	0,26	0,12	0,34	0,47	0,29	0,34	0,35	0,99	0,47	0,25	0,52	0,95	0,40	0,45	0,23	0,54	0,23	0,73	0,52	0,56						
3M 	0,23	0,41	0,47	0,51	0,15	0,14	0,70	0,38	0,45	0,84	0,29	0,24	0,47	0,62	0,65	0,36	0,90	0,97	0,89	0,89	0,33	0,68	0,43	0,82	0,60	0,80						
Merck 	0,46	1,14	0,66	0,87	0,46	0,37	0,29	0,23	0,40	0,60	0,12	0,11	0,40	1,13	0,59	0,32	0,68	0,72	0,47	0,55	0,36	0,56	0,47	0,70	1,07	1,01						
Microsoft 	0,83	1,12	0,95	1,36	1,01	0,80	0,27	0,19	0,58	0,81	0,18	0,27	0,49	0,79	0,83	0,41	0,83	0,78	0,71	0,83	0,41	0,92	0,49	0,84	0,72	1,12						
Nike 	1,09	1,04	0,56	0,57	0,31	0,25	0,36	0,21	0,40	0,66	0,25	0,33	0,43	0,62	0,84	0,42	0,89	1,03	0,62	0,78	0,38	0,98	0,34	0,56	0,61	0,85						
Pfizer 	1,15	1,19	0,74	1,10	0,58	0,51	0,24	0,26	0,47	0,88	0,13	0,17	0,42	0,71	0,58	0,32	0,75	0,89	0,54	0,61	0,42	0,64	0,36	0,67	0,70	0,77						
Procter & Gamble 	0,41	0,71	0,69	0,81	0,33	0,27	0,28	0,18	0,23	0,48	0,22	0,19	0,29	0,52	0,49	0,24	0,46	0,47	0,47	0,56	0,26	0,48	0,24	0,43	0,92	0,87						
Travelers 	--	--	0,37	0,46	0,44	0,32	1,17	0,34	0,45	0,72	0,35	0,31	0,59	0,75	0,99	0,59	0,77	0,80	0,66	0,81	0,31	0,59	0,51	0,68	0,67	0,69						
United Health 	0,71	0,78	0,69	0,46	0,17	0,22	0,46	1,00	0,22	1,10	1,19	0,51	0,28	0,51	0,77	0,37	0,88	0,94	0,63	0,65	1,00	0,98	0,40	1,11	0,51	0,60						
United Tech 	0,31	0,37	0,48	0,55	0,38	0,36	0,66	0,40	1,00	0,91	0,28	0,32	0,61	0,79	0,77	0,45	0,97	0,99	0,92	1,04	0,34	0,59	0,46	0,83	0,59	0,76						
Visa 	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,75	1,01	0,85	1,08	1,24	1,23	0,42	0,84	0,48	0,79	0,64	0,90						
Verizon 	0,30	0,49	0,44	0,39	0,27	0,19	0,18	0,16	0,47	0,71	0,20	0,19	0,45	0,78	0,67	0,35	0,55	0,58	0,43	0,57	0,20	0,44	0,47	0,57	0,58	0,52						
Walmart 	0,30	0,30	0,56	0,70	1,00	0,80	0,43	0,25	0,40	0,70	0,23	0,21	0,40	0,66	0,46	0,25	0,45	0,43	0,33	0,47	0,29	0,61	0,17	0,88	0,55	0,56						
Exxon 	0,24	0,60	0,59	0,60	0,16	0,14	0,22	0,15	0,43	0,72	0,30	0,30	1,00	0,96	0,76	0,37	0,80	0,84	0,65	0,70	0,34	0,63	0,63	0,64	0,50	0,59						

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

ANEXO 02 - Betas - IBOVESPA

Figura 69: Betas - IBOVESPA

IBOVESPA	BETAS																											
	1994-1995		1996-1997		1998-1999		2000-2001		2002-2003		2004-2005		2006-2007		2008-2009		2010-2011		2012-2013		2014-2015		2016-2017		2018-2019			
	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM		
ABEV3	--	--	--	--	--	--	0,28	1,01	0,34	0,47	0,20	0,72	0,47	0,63	0,44	0,70	0,39	1,06	0,34	0,30	0,42	0,43	0,48	0,45	0,29	0,46		
BBA53	0,31	0,35	0,45	0,51	0,32	0,40	0,46	0,29	0,64	0,95	0,52	1,03	0,71	0,98	0,67	0,98	0,55	0,88	0,59	0,57	0,73	0,67	1,10	1,11	0,70	1,10		
BBDC3	0,32	0,34	0,45	0,46	0,30	0,46	0,79	0,46	0,59	0,85	0,51	1,07	0,61	0,81	0,60	0,88	0,56	0,82	0,49	0,50	0,60	0,56	0,82	0,84	0,66	1,09		
BBDC4	0,39	0,37	0,52	0,50	0,32	0,55	1,01	0,45	0,64	0,85	0,55	1,05	0,66	0,93	0,62	0,92	0,61	0,87	0,52	0,52	0,62	0,58	0,87	0,91	0,60	0,98		
BBSE3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,58	0,53	0,73	0,75	0,40	0,64		
BRAP4	--	--	--	--	--	--	--	0,52	0,76	0,57	0,98	1,00	1,14	0,75	1,08	0,71	0,88	0,51	0,57	0,46	0,46	1,45	1,53	0,34	0,82			
BRFS3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,57	0,75	0,56	0,79	0,48	0,68	0,30	0,34	0,35	0,34	0,59	0,57	0,69	0,78			
BRKM3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,34	0,44	--	--	0,43	0,53	0,93	0,45	0,31	0,32	0,45	0,82	0,27	0,34			
BRML3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,76	0,92	0,53	0,85	0,51	0,61	0,60	0,82	0,83	0,59	0,89			
BSSA3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,66	0,98	0,55	0,64	0,60	0,57	0,78	0,84	0,70	1,21			
CCRO3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,42	1,08	0,56	0,78	0,55	0,75	0,47	0,76	0,37	0,54	0,62	0,63	0,83	0,83	0,63	1,00		
CESP6	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,66	0,78	0,52	0,66	0,43	0,38	0,51	0,52	0,68	0,57	0,32	0,96		
CIEL3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,40	0,66	1,02	0,49	0,47	0,46	0,61	0,65	0,48	0,55			
CMIG4	0,45	0,39	0,65	0,65	0,60	0,71	0,58	0,48	0,71	0,94	0,62	1,11	0,60	0,87	0,46	0,70	0,47	0,54	0,39	0,33	0,52	0,54	1,13	1,14	0,64	1,18		
CPFE3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,52	0,70	0,50	0,77	0,41	0,62	0,40	0,35	0,54	0,55	0,51	0,47	0,20	0,62			
CPLE6	--	--	--	--	0,59	0,66	0,59	0,58	0,71	0,99	0,59	1,00	0,58	0,82	0,55	0,82	0,45	0,56	0,35	0,39	0,54	0,56	0,96	0,98	0,55	1,49		
CSAN3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,78	1,10	0,66	0,96	0,58	0,84	0,44	0,56	0,56	0,74	0,80	0,48	0,84	0,84	0,84		
CSNA3	0,40	0,46	0,30	0,32	0,26	0,35	0,43	0,39	0,60	0,79	0,59	1,06	0,73	1,21	0,74	1,17	0,68	0,85	0,51	0,52	0,61	0,60	1,53	1,50	0,66	1,09		
CTIP3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,49	1,00	0,42	0,42	0,46	0,46	--	--	--	--	--		
CYRE3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,71	0,97	0,77	1,21	0,72	1,11	0,56	0,68	0,45	0,45	0,88	0,87	0,72	1,13			
ECOR3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,33	0,58	0,33	0,37	0,57	0,62	0,89	0,86	0,65	1,15			
EGIE3	--	--	--	--	--	0,41	0,38	0,51	0,73	0,45	0,83	0,53	0,73	0,45	0,59	0,30	0,42	0,25	0,24	0,50	0,54	0,57	0,58	0,36	0,94			
EMBR3	--	--	--	--	--	0,52	0,39	0,43	0,65	0,30	0,63	0,30	0,44	0,51	0,77	0,51	0,64	0,27	0,40	0,23	0,22	0,33	0,38	0,30	0,59			
ENBR3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,59	0,82	0,47	0,82	0,37	0,56	0,28	0,24	0,46	0,44	0,58	0,58	0,40	0,90			
EQTL3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,52	0,63	0,29	0,59	0,33	0,37	0,43	0,48	0,54	0,55	0,37	0,72			
YDUO3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,45	0,68	1,17	0,54	0,51	0,76	0,80	0,70	1,37	1,37			
FIBR3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,75	0,91	0,33	0,42	0,05	0,03	0,14	0,13	--	--			
GGBR4	0,23	0,25	0,37	0,87	0,36	0,63	0,56	0,29	1,00	0,79	0,64	1,14	0,73	1,06	0,78	1,18	0,68	0,93	0,45	0,49	0,37	0,41	1,26	1,30	0,43	0,89		
GOAU4	--	--	--	--	0,28	0,38	0,41	0,42	0,68	0,77	0,61	1,13	0,73	1,04	0,78	1,19	0,68	0,89	0,50	0,54	0,39	0,41	1,37	1,47	0,52	0,96		
HYPE3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,55	0,93	0,66	0,89	0,52	0,63	0,54	0,52	0,51	0,53	0,37	0,55			
ITSA4	0,23	0,24	0,45	0,43	0,36	0,48	0,55	0,40	0,58	0,76	0,51	1,00	0,68	0,98	0,64	0,92	0,61	0,85	0,60	0,62	0,57	0,54	0,78	0,79	0,59	0,99		
ITUB4	0,25	0,32	0,51	0,48	0,32	0,49	0,54	0,43	0,61	0,79	0,56	0,98	0,70	0,95	0,64	0,91	0,62	0,88	0,58	0,60	0,57	0,55	0,83	0,84	0,53	0,93		
JBSS3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,70	1,03	0,62	0,90	0,55	0,54	0,45	0,42	0,68	0,58	1,29	1,21		
KLBN11	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,32	0,32	0,41	0,45	1,15	0,57		
COGN3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,58	0,54	0,72	0,74	0,77	1,24		
LAME4	0,23	0,22	0,29	0,28	0,14	1,25	0,56	0,50	0,41	1,28	0,82	0,83	0,64	0,84	0,69	1,14	0,62	0,99	0,54	0,66	0,60	0,63	0,82	0,75	0,73	1,08		
LREN3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,67	0,92	0,70	1,10	0,68	1,02	0,50	0,63	0,61	0,62	0,76	0,81	0,66	1,07		
MRFG3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,59	0,89	0,68	0,82	0,53	0,44	0,47	0,39	0,54	0,53	0,59	0,66		
MRVE3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,96	1,34	0,68	1,07	0,57	0,73	0,54	0,56	0,58	0,57	0,72	1,02		
MULT3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,50	0,78	0,49	0,77	0,39	0,45	0,53	0,54	0,67	0,69	0,56	0,89		
NATU3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	1,10	1,11	0,51	0,74	0,43	1,05	0,45	0,70	0,34	0,32	0,56	0,52	0,76	0,77	--	--		
PCAR4	--	--	0,43	0,43	0,42	0,72	0,32	0,35	0,46	0,62	0,40	0,75	0,55	0,76	0,50	0,84	0,49	0,70	0,38	0,46	0,50	0,48	0,77	0,81	0,40	0,74		
PETR3	0,49	0,60	1,21	1,23	0,53	0,61	0,34	0,27	0,57	0,74	0,37	0,68	0,60	0,95	0,66	0,99	0,62	0,68	0,51	0,51	0,71	0,67	1,09	1,13	0,55	0,88		
PETR4	0,50	0,49	0,78	0,75	0,51	0,67	0,36	0,31	0,54	0,73	0,40	0,72	0,61	0,95	0,65	0,98	0,59	0,69	0,52	0,53	0,71	0,67	1,19	1,22	0,65	1,00		
QUAL3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,28	0,33	0,53	0,50	0,65	0,78	0,64	1,02		
RADL3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	1,00	0,96	0,46	0,81	0,41	0,31	1,00	1,00	0,75	0,80	0,34	0,59		
RENT3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,60	0,84	0,73	1,02	0,54	0,91	0,39	0,47	0,56	0,51	0,80	0,88	0,88	1,11			
RAIL3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,77	0,87	
SANB11	--	--	--	--	--	--	0,60	0,60	0,63	0,90	0,59	0,91	0,60	0,88	0,45	0,71	0,53	0,70	0,50	0,41	0,41	0,48	0,64	0,73	0,43	0,75		
SBSF3	--	--	--	0,53	0,67	0,52	0,40	0,63	0,85	0,50	0,87	0,54	0,75	0,57	0,86	1,00	0,72	0,42	0,52	0,51	0,51	0,70	0,75	0,56	1,06			
SMLS3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,40	0,34	0,87	0,94	0,54	0,54		
SUZB3	--	--	--	--	--	--	--	0,39	0,61	0,44	0,74	0,45	0,88	0,56	0,83	0,62	0,89	0,33	0,37	0,06	0,02	0,19	0,18	-0,03	0,83			
TIMP3	--	--	--	--	--	--	0,60	0,60	0,63	0,90	0,59	0,91	0,60	0,88	0,45	0,71	0,53	0,70	0,50	0,41	0,41	0,48	0,64	0,73	0,43	0,75		
UGPA3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	0,45	0,43	0,49	0,47	0,52	0,52	0,56	0,60	
USIM5	0,32	0,33	0,51	0,48	0,47	0,41	0,59	0,47	0,70	0,95	0,71	1,34	0,82	1,19	0,80	1,22	0,59	0,87	0,57	0,58	0,43	0,38	1,39	1,44	0,68	1,11		
VALE3	1,00	1,00	--	--	1,00	0,35	0,31	0,32	0,25	0,47	0,49	0,85	0,85	1,07	0,70	1,05	0,66	0,86	0,47	0,57	0,41	0,43	1,26	1,31	0,25	0,63		
VALE5	0,49	0,48	0,55	0,53	0,72	0,49	0,35	0,31	0,24	0,42	0,48	0,87	0,82	1,06	0,68	1,01	0,62	0,81										

ANEXO 03 - Betas - Small Caps

Figura 70: Betas - Small Caps

SMALL CAPS	BETAS									
	2009-2010		2011-2012		2013-2014		2015-2016		2017-2018	
	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM	CAPM	OCAPM
AALR3	--	--	--	--	--	--	--	--	0,25	0,26
ABCB4	0,79	0,91	0,37	0,64	0,44	0,41	0,47	0,76	0,40	0,44
ALPA4	1,12	0,85	0,29	0,67	0,45	0,42	0,41	0,58	0,40	0,41
ALSC3	--	--	0,21	0,53	0,47	0,55	0,45	0,71	--	--
ALUP11	--	--	--	--	1,00	0,24	0,42	0,57	0,26	0,25
ANIM3	--	--	--	--	--	--	0,60	0,91	0,41	0,43
ARZZ3	--	--	0,33	0,56	0,44	0,48	0,35	0,70	0,51	0,56
BEEF3	0,85	0,97	0,33	0,71	0,29	0,30	0,41	0,57	0,19	0,12
BRAP4	1,13	1,11	0,29	0,66	0,35	0,30	0,49	0,72	0,27	0,46
BRPR3	--	--	0,31	0,54	0,53	0,53	0,38	0,45	0,31	0,41
BTOW3	0,93	0,91	0,32	0,66	0,40	0,58	0,53	0,75	1,22	0,81
CARD3	0,56	0,53	0,27	0,56	0,30	0,49	0,43	0,47	0,38	0,46
CESP6	0,77	0,74	0,38	0,43	0,44	0,42	0,44	0,57	0,32	0,32
CGAS5	0,48	0,50	0,22	0,45	0,31	0,29	0,38	0,55	0,24	0,24
CPLE6	0,59	0,55	0,22	0,42	0,52	0,42	0,54	0,80	0,48	0,53
CSMG3	0,64	0,62	0,35	0,67	0,29	0,33	0,42	0,78	0,41	0,43
CVCB3	--	--	--	--	--	--	0,42	0,72	0,45	0,63
CYRE3	1,22	1,28	0,35	0,85	0,52	0,53	0,48	0,73	0,50	0,49
DIRR3	--	--	0,33	0,58	0,56	0,51	0,61	0,80	0,41	0,41
DTEX3	0,67	0,81	0,35	0,65	0,46	0,49	0,47	0,74	0,49	0,49
ECOR3	--	--	0,27	0,53	0,51	0,47	0,54	0,75	0,49	0,55
ELPL4	0,54	0,61	0,21	0,34	0,52	0,53	0,54	0,81	--	--
ESTC3	0,56	0,65	0,30	0,63	0,45	0,70	0,53	0,86	--	--
EVEN3	0,79	0,96	0,39	0,80	0,56	0,55	0,48	0,64	0,56	0,56
EZTC3	0,84	1,05	0,36	0,77	0,56	0,51	0,50	0,77	0,48	0,48
FESA4	0,91	0,95	0,30	0,68	0,27	0,28	0,34	0,52	0,29	0,57
FLRY3	--	--	0,21	0,50	0,38	0,35	0,37	1,00	0,33	0,48
GFA3	1,19	1,19	0,49	1,01	0,70	0,58	0,52	0,77	0,35	0,43
GOAU4	1,00	1,07	0,39	0,76	0,31	0,27	0,53	0,83	0,50	0,55
GOLL4	0,80	0,95	0,41	0,92	0,72	0,64	0,62	1,07	0,70	0,92
GRND3	0,60	0,67	0,28	0,49	0,42	0,43	0,38	0,58	0,25	0,28
HBOR3	0,70	1,17	0,35	0,77	0,48	0,43	0,48	0,70	0,49	0,55
HGTX3	0,82	1,32	0,34	0,65	0,45	0,53	0,52	0,69	0,44	0,53
IGTA3	0,66	0,74	0,23	0,55	0,46	0,50	0,48	0,62	0,44	0,42
JHSF3	0,95	1,00	0,30	0,79	0,49	0,44	0,45	0,69	0,49	0,52
LEVE3	--	--	0,16	0,47	0,31	0,33	0,39	0,48	0,25	0,24
LIGT3	0,52	0,50	0,25	0,54	0,49	0,40	0,56	0,88	0,45	0,40
LINX3	--	--	--	--	0,22	1,10	0,42	0,50	0,31	0,33
MEAL3	--	--	--	--	--	--	0,31	0,60	0,29	0,39
MGLU3	--	--	0,32	0,69	0,58	0,38	0,56	1,09	0,74	1,53
MILS3	--	--	0,31	0,65	0,55	0,44	0,51	0,72	0,45	0,61
MPLU3	--	--	0,20	0,38	0,36	0,31	0,38	0,56	--	--
MRF3	0,77	0,90	0,46	0,79	0,51	0,54	0,41	0,56	0,30	0,32
MRVE3	1,14	1,12	0,43	0,91	0,61	0,66	0,45	0,62	0,39	0,44
MYPK3	0,78	0,96	0,28	0,76	0,40	0,38	0,52	0,69	0,56	0,53
ODPV3	0,62	0,90	0,34	0,55	0,33	0,25	0,37	0,52	0,24	0,30
POMO4	0,83	0,91	0,32	0,75	0,52	0,44	0,53	0,67	0,48	0,58
QGEP3	--	--	0,39	0,74	0,39	0,33	0,57	0,79	--	--
QUAL3	--	--	--	--	0,33	0,39	0,48	0,73	0,47	0,58
RAPT4	0,83	0,91	0,27	0,68	0,43	0,47	0,46	0,68	0,67	0,76
RLOG3	--	--	--	--	--	--	0,51	0,57	0,40	0,48
RSID3	1,21	1,21	0,39	1,00	0,59	0,73	0,71	0,90	0,47	0,53
SAPR4	0,67	0,50	1,06	1,20	0,41	0,37	0,45	1,00	0,33	0,36
SEER3	--	--	--	--	--	--	0,56	0,80	0,38	0,41
SLCE3	0,82	0,79	0,25	0,61	0,23	0,21	1,00	0,48	0,20	0,72
SMT03	0,95	0,97	0,26	0,51	0,41	0,43	0,37	0,55	0,25	0,24
SULA11	0,90	0,68	0,32	0,59	0,38	0,36	0,40	0,58	0,22	0,36
TCSA3	0,90	0,86	0,37	0,73	0,52	0,51	0,46	0,57	0,39	0,42
TOTS3	--	--	--	--	--	--	--	--	0,30	0,31
TUPY3	0,76	0,83	0,16	0,32	0,39	0,39	0,40	0,55	0,19	0,23
VLID3	0,47	0,66	--	--	0,32	0,39	0,32	0,40	0,27	0,31
VVAR3	0,64	0,70	0,26	0,81	0,39	0,46	0,36	0,53	0,49	0,59
WIZS3	--	--	--	--	--	--	0,58	0,96	0,38	0,51

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

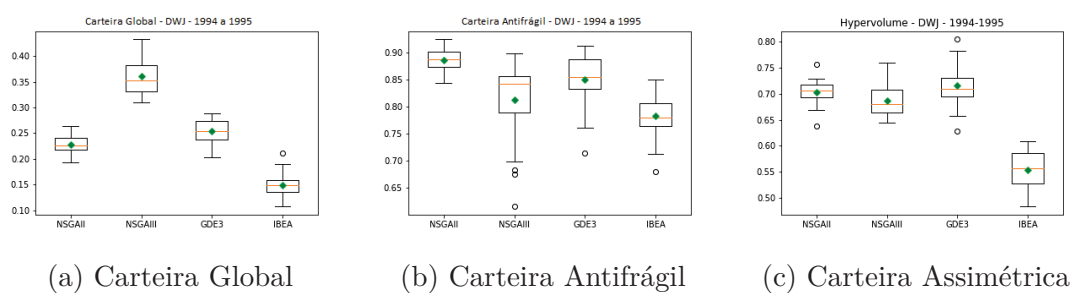
ANEXO 04 - *Boxplots* dos hypervolumes

Figura 71: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 1994 a 1995

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

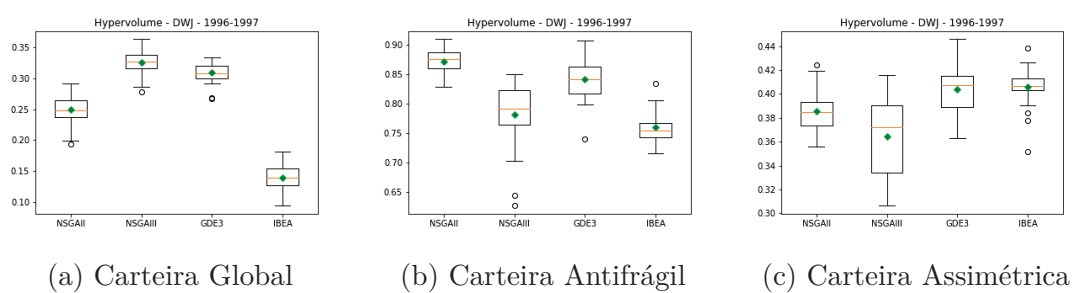


Figura 72: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 1996 a 1997

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

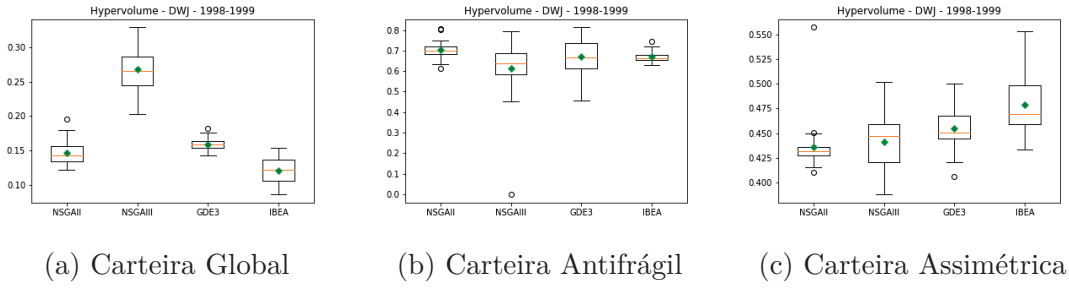


Figura 73: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 1998 a 1999

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

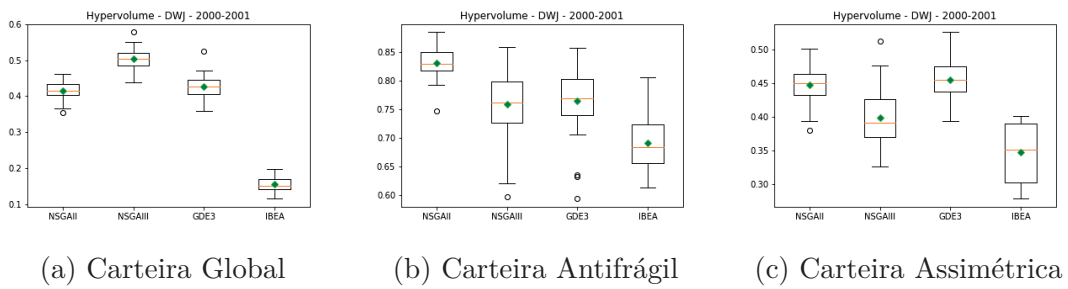


Figura 74: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2000 a 2001

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

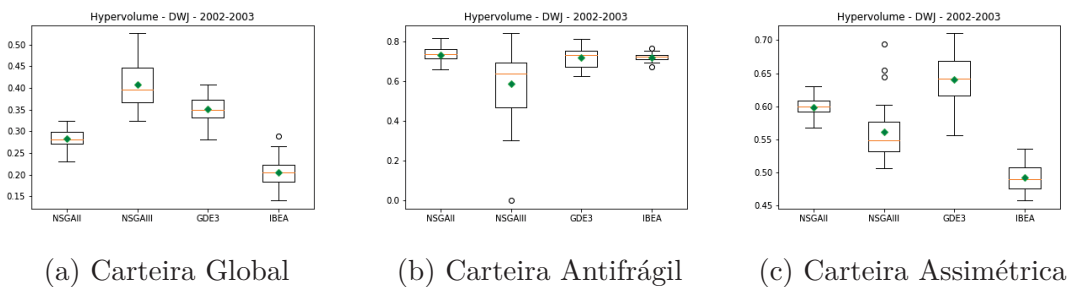


Figura 75: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2002 a 2003

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

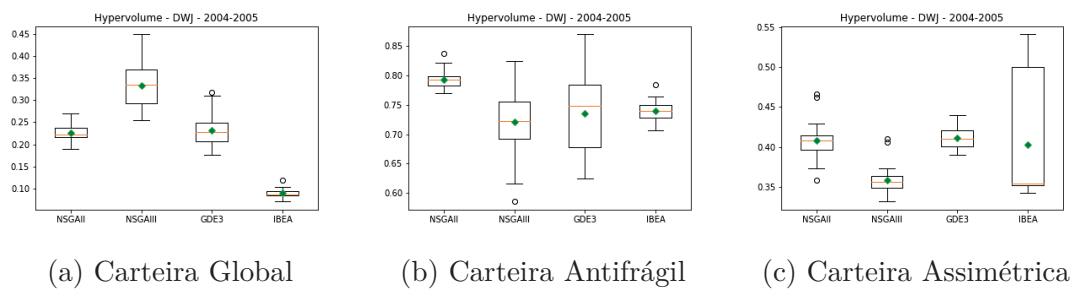


Figura 76: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2004 a 2005

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

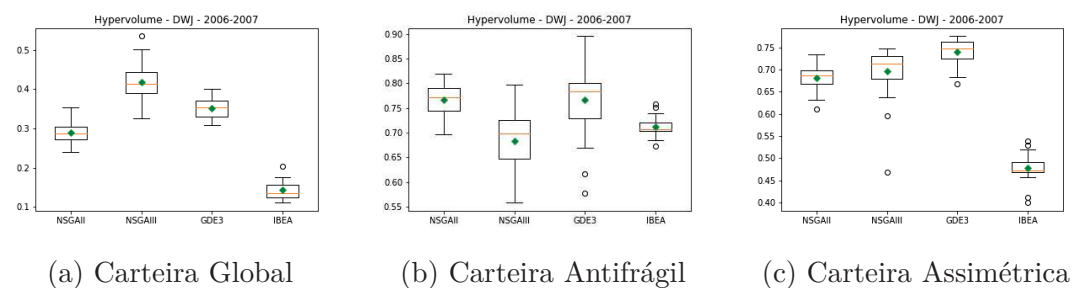


Figura 77: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2006 a 2007

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

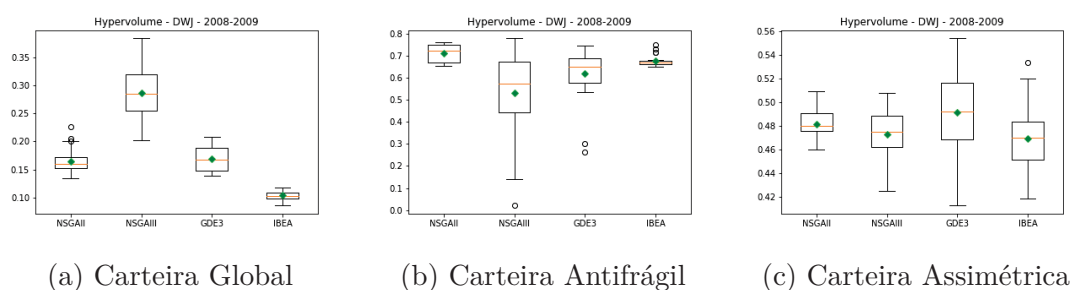


Figura 78: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2008 a 2009

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

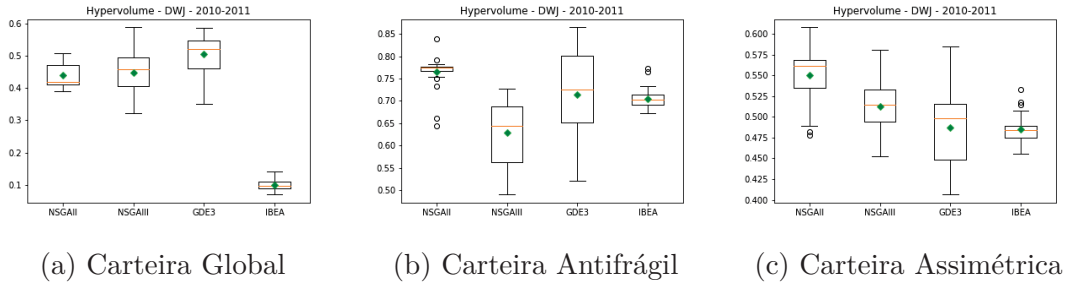


Figura 79: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2010 a 2011

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

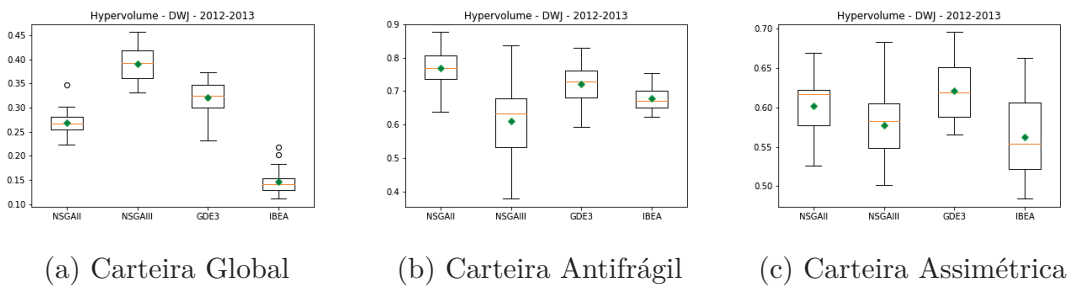


Figura 80: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2012 a 2013

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

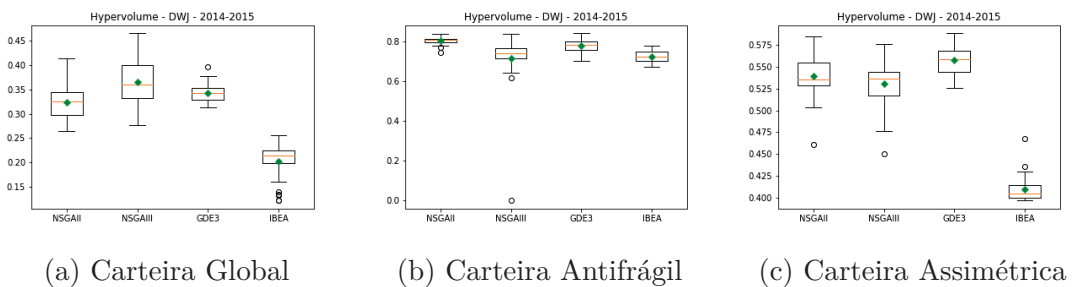


Figura 81: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2014 a 2015

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

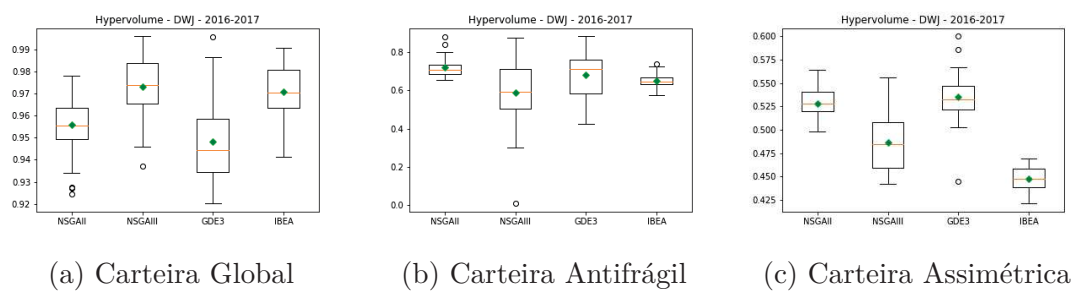


Figura 82: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2016 a 2017

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

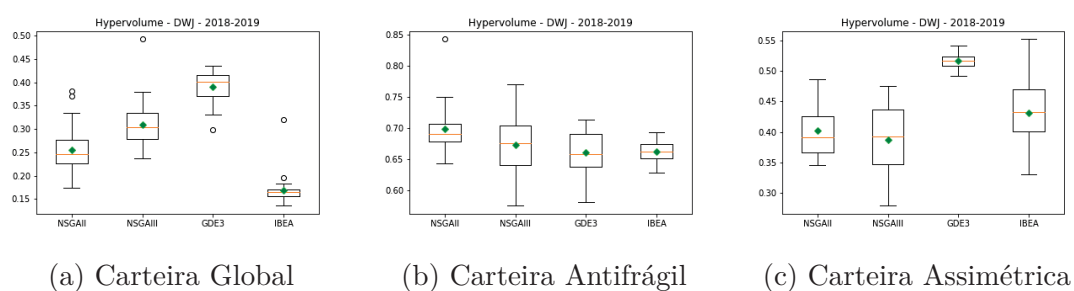


Figura 83: Boxplot dos Hypervolumes - Dow Jones - 2018 a 2019

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

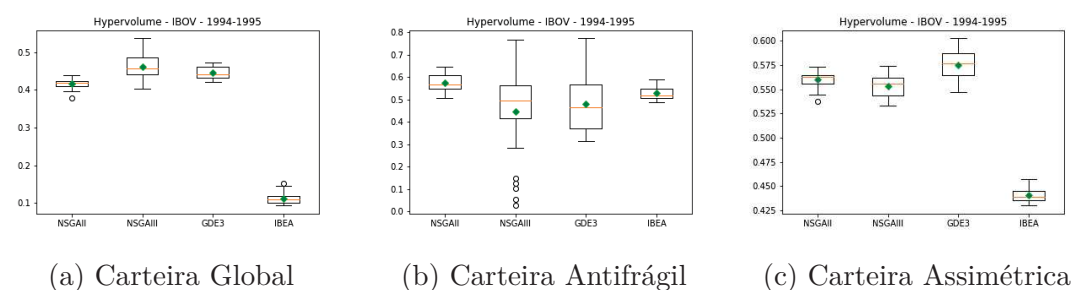


Figura 84: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 1994 a 1995

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

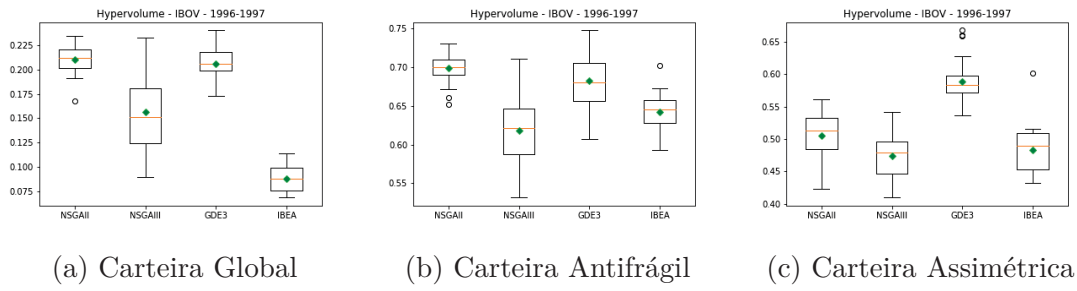


Figura 85: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 1996 a 1997

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

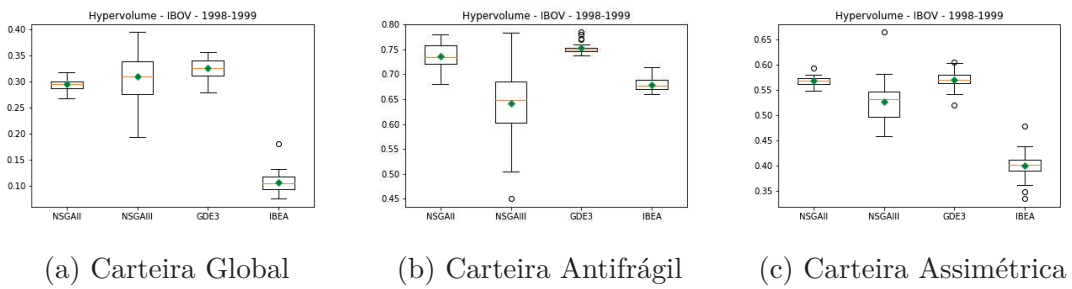


Figura 86: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 1998 a 1999

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

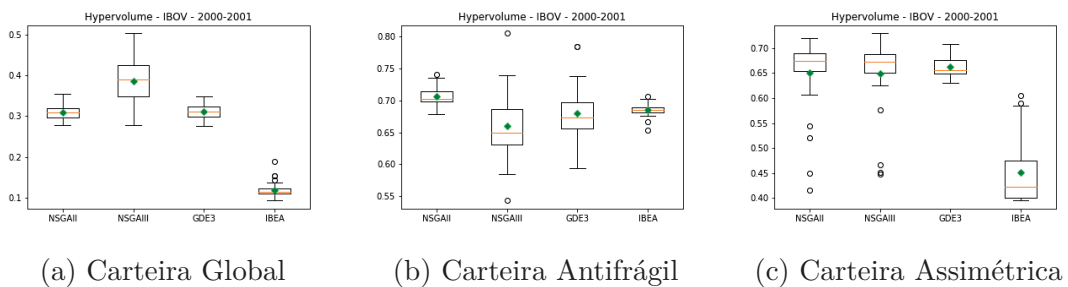


Figura 87: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2000 a 2001

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

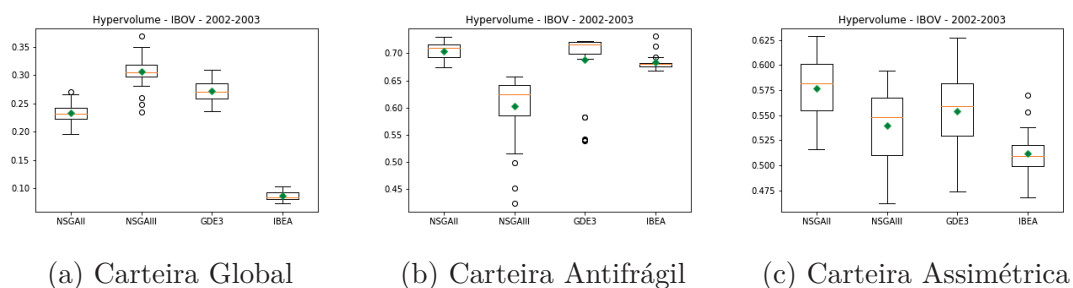


Figura 88: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2002 a 2003

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

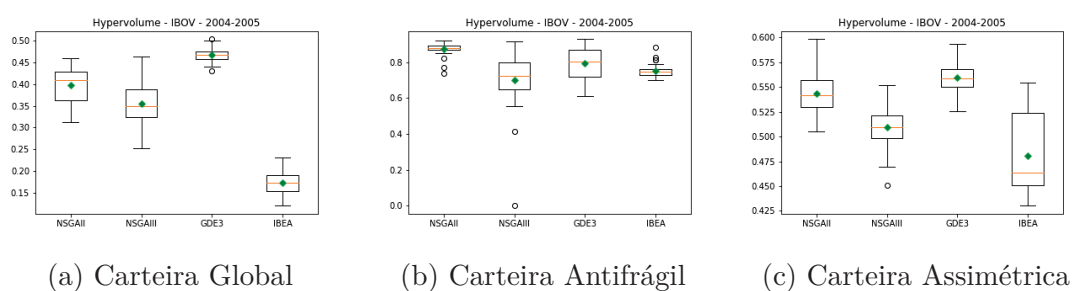


Figura 89: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2004 a 2005

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

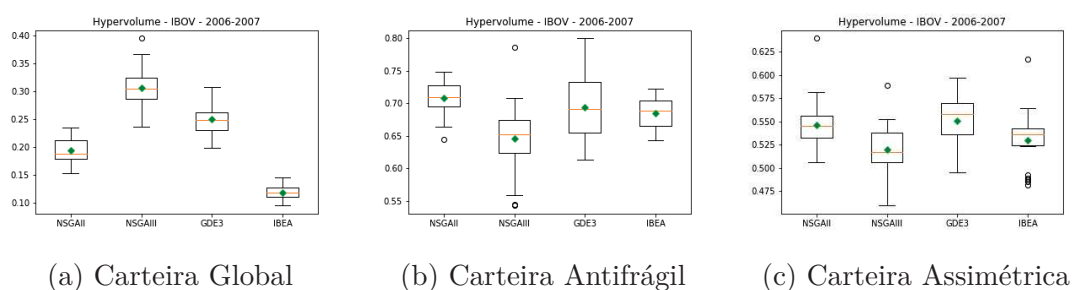


Figura 90: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2006 a 2007

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

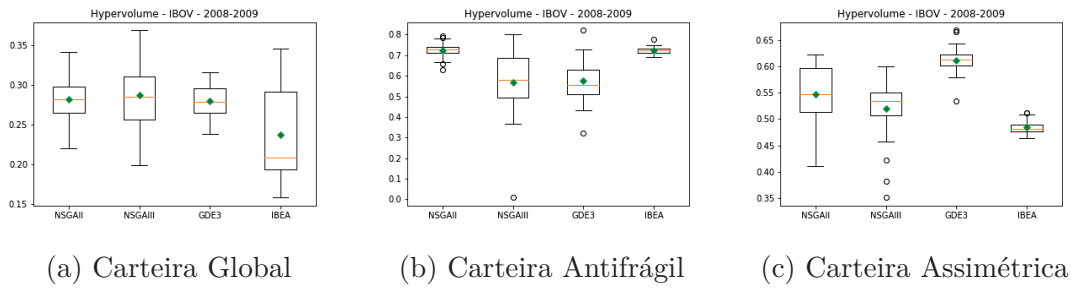


Figura 91: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2008 a 2009

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

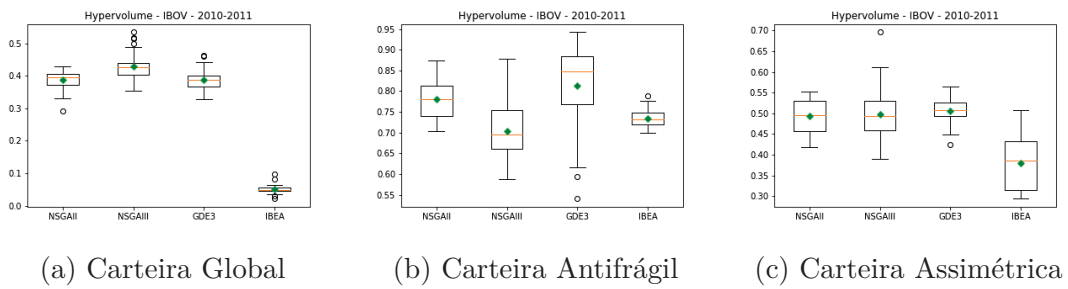


Figura 92: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2010 a 2011

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

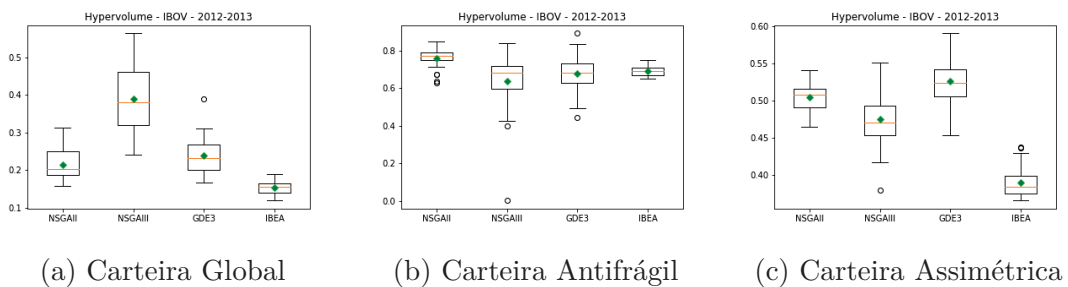


Figura 93: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2012 a 2013

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

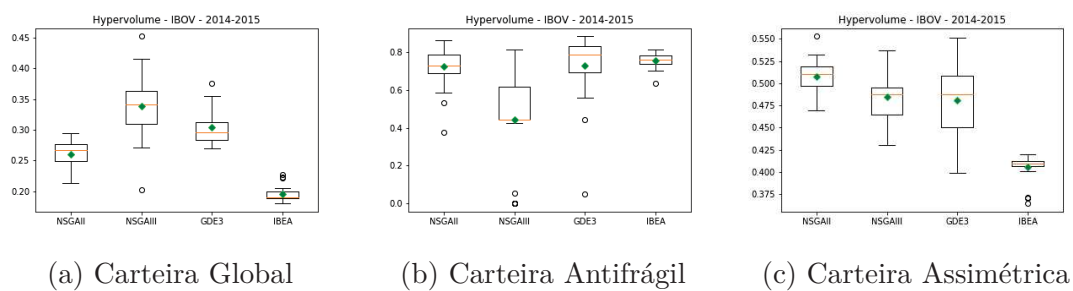


Figura 94: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2014 a 2015

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

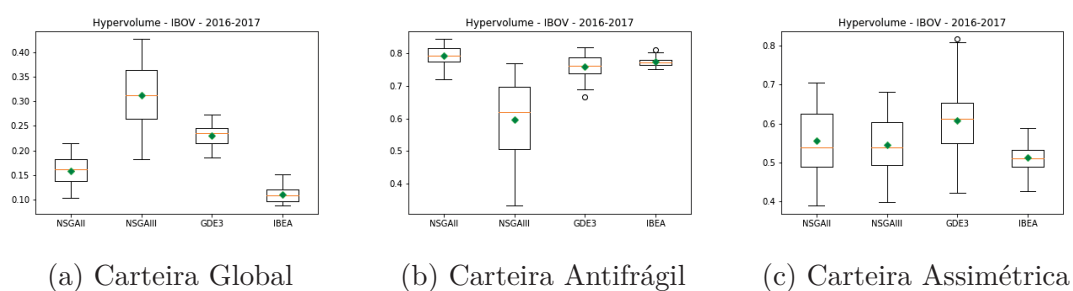


Figura 95: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2016 a 2017

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

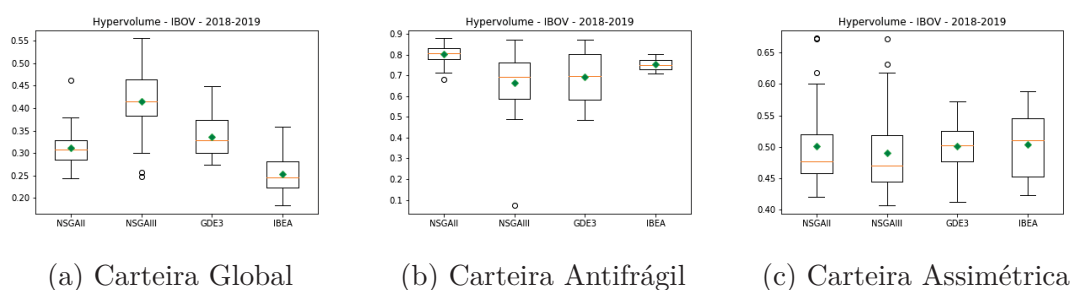


Figura 96: Boxplot dos Hypervolumes - IBOVESPA- 2018 a 2019

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

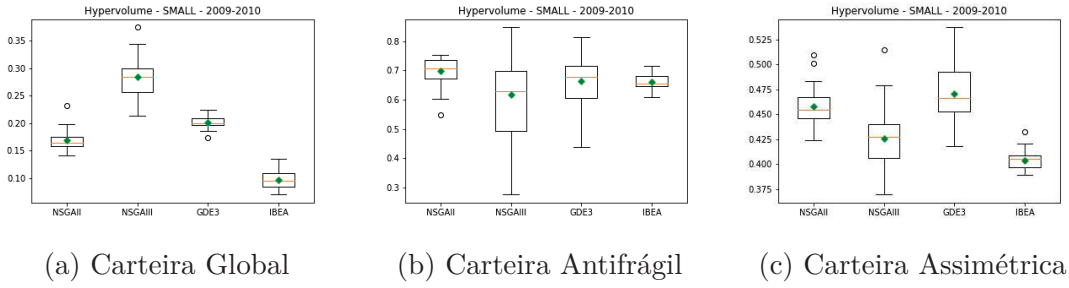


Figura 97: Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2009 a 2010

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

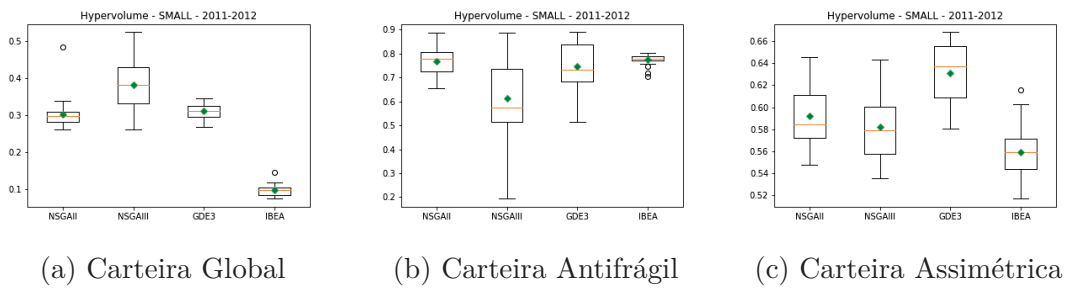


Figura 98: Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2011 a 2012

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

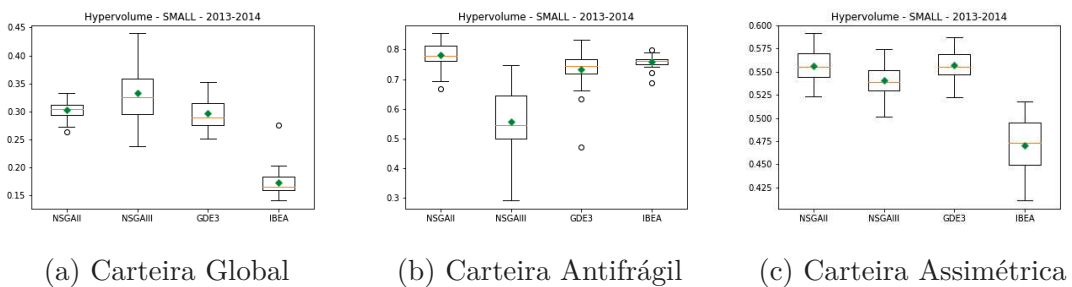


Figura 99: Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2013 a 2014

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

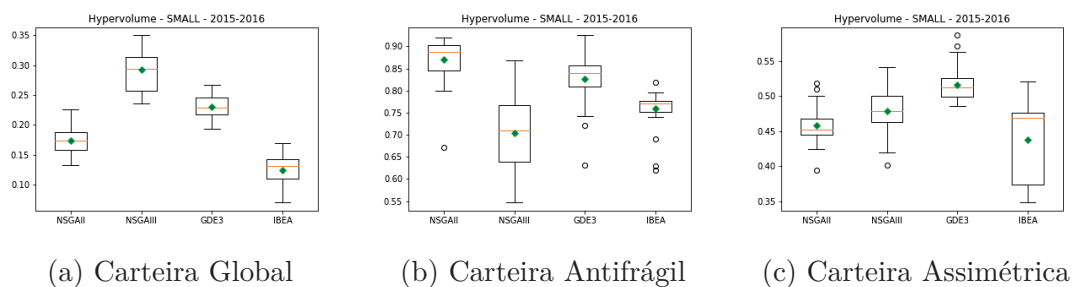


Figura 100: Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2015 a 2016

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).

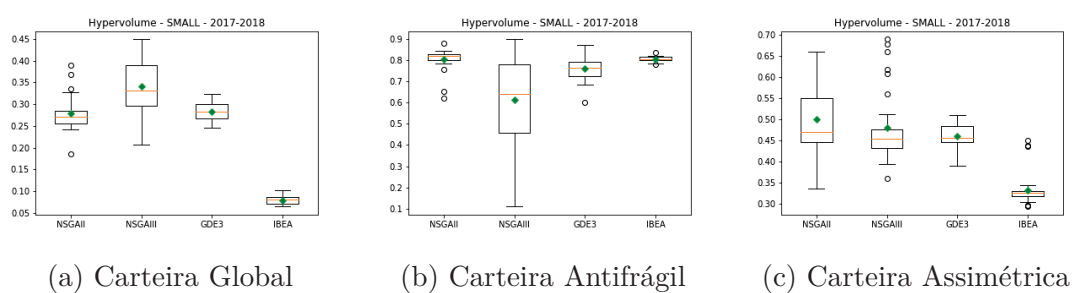


Figura 101: Boxplot dos Hypervolumes - SMALL - 2017 a 2018

Fonte: Elaborada pelo autor (2020).