

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL

Jhuan Barbosa da Silva e Cedro

**Influência da pressão capilar em escoamentos bifásicos
com espuma em meios porosos**

Juiz de Fora

2020

Jhuan Barbosa da Silva e Cedro

**Influência da pressão capilar em escoamentos bifásicos
com espuma em meios porosos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cedro, Jhuan Barbosa da Silva.

Influência da pressão capilar em escoamentos bifásicos
com espuma em meios porosos / Jhuan Barbosa da Silva e Cedro. – 2020.
78 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Coorientador: Iury Higor Aguiar da Igreja

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade
de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional,
2020.

1. Escoamento em meios porosos. 2. Espumas. 3. Pressão capilar. 4.
Ondas viajantes. 5. Diferenças finitas. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Igreja,
Iury, coorient. III. Título.

Jhuan Barbosa da Silva e Cedro

**Influência da pressão capilar em escoamentos bifásicos
com espuma em meios porosos**

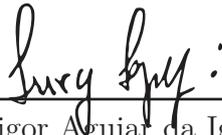
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em: 29 de Setembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Iury Higor Aguiar da Igreja - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Bernardo Martins Rocha
Universidade Federal de Juiz de Fora



Dr. Luis Fernando Lozano Guerrero
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Eduardo Cardoso de Abreu
Universidade Estadual de Campinas

AGRADECIMENTOS

À minha família que deste sempre tem me apoiado e acreditado em mim. À minha namorada que sempre se fez presente e disposta me ajudar nessa minha caminhada. Aos meus amigos pelo companheirismo, suporte e confiança nestes anos de universidade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional que me facilitaram todo o conhecimento necessário para o completo entendimento e construção deste trabalho. Aos meus orientadores por sua atenção, paciência e dedicação ao trabalho desenvolvido.

Aos meus colegas do Laboratório de Matemática Aplicada, pelo apoio e suporte durante o meu projeto de mestrado. Em especial, aos colegas Luis Lozano e Rosmery Quispe que tiveram contribuição fundamental neste trabalho.

Este trabalho foi realizado em associação com o projeto de P&D registrado como ANP 20715-9, *Modelagem matemática e computacional de injeção de espuma usada em recuperação avançada de petróleo* (Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF / Shell Brasil / ANP). Modelagem computacional e matemática da injeção de espuma como uma técnica de recuperação avançada aplicada aos reservatórios de pré-sal do Brasil, apoiado pela Shell Brasil sobre o ANP P&D como *Compromisso de Investimentos com Pesquisa e Desenvolvimento*. Este projeto foi realizado em parceria com a Petrobras.

RESUMO

Injeção de espuma é um dos métodos estudados para a recuperação avançada de petróleo. Este método possui um grande potencial de aplicação no pré-sal brasileiro. A técnica consiste em injetar espuma no reservatório (ou criá-la *in situ*). O objetivo da técnica é reduzir a mobilidade do gás e possibilitar uma varredura mais uniforme e eficiente do reservatório.

Modelos de espuma são tipicamente descritos por um sistema contendo uma lei de conservação para a massa de água e uma lei de balanço para a quantidade de espuma. Em trabalhos anteriores, supondo que a concentração de surfactante é fixa, buscou-se soluções na forma de onda viajante para este modelo. Inspirados por fenômenos como adsorção, propusemos uma modificação deste modelo para considerar a concentração de surfactante variável. Ao estudar analiticamente este modelo modificado, buscando soluções na forma de ondas viajantes, constatamos que é possível ter soluções não físicas. Além disso as soluções obtidas numericamente e analiticamente não coincidiram. Isso motivou o estudo da influência da capilaridade no modelo cinético de primeira ordem.

No presente trabalho, discutimos como o modelo cinético se comporta sob duas simplificações da pressão capilar. Na primeira, aproximamos a difusão capilar em ambas as equações do sistema por uma constante. Na segunda, aproximamos a difusão capilar na equação de conservação de água por uma constante e desconsideramos a difusão capilar no balanço de espuma, motivado pelo fato de que a difusão de bolhas em fase gasosa é menor em relação à difusão água-gás. Em ambos os casos, buscamos soluções analíticas na forma de ondas viajantes e as validamos com simulações numéricas. As soluções obtidas apresentaram quedas abruptas na textura de espuma. Tais quedas já foram descritas na literatura em simulações computacionais e foram atribuídas a erros numéricos. Outros trabalhos justificam que estas quedas representam fenômeno físicos. Neste sentido o presente trabalho é um dos pioneiros a demonstrar este fenômeno analiticamente.

Palavras-chave: Escoamento em meios porosos. Espumas. Pressão capilar. Ondas viajantes. Diferenças finitas.

ABSTRACT

Foam injection is one of the studied methods for advanced oil recovery. This method has great potential for application in the Brazilian pre-salt reservoirs. The technique consists of injecting foam into the reservoir (or creating it in situ). This technique aims to reduce gas mobility to provide more uniform and efficient sweeping in the reservoir.

Foam models are typically described as a system containing a conservation law for the mass of water and a balance law for the amount of foam. In previous works, assuming a fixed surfactant concentration, the authors present traveling wave solutions for this model. Inspired by adsorption phenomena, we proposed a modification for this model to consider a variable surfactant concentration. By analyzing this modified model analytically, looking for solutions in the form of traveling waves, we found that it may lead to non-physical solutions. Besides, the numerical and analytical obtained solutions did not match. This has motivated us to study the influence of capillarity on the first-order-kinetic model.

In the present work, we discuss how the kinetic model behaves under two capillary pressure simplifications. In the first, we approximate the capillary diffusion in both system equations by a constant. In the second, we approximate the capillary diffusion in the water conservation equation by a constant and neglect the capillary diffusion in the foam balance, motivated by the fact that bubble diffusion in the gas phase is lower than water-gas diffusion. We look for analytical solutions in both cases as traveling waves and validate them with numerical simulations. The obtained solutions show abrupt drops in the foam texture. Such decay have already been described in the literature in simulations and assumed to be numerical errors. Other studies justify that this decay represent physical phenomena. In this context, the present work is one of the pioneers to describe that phenomenon analytically.

Key-words: Flow in porous media. Foam. Capillary pressure. Traveling waves. Finite difference.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação de um reservatório, ilustrando a recuperação secundária.	19
Figura 2 – Representação de um reservatório, ilustrando a recuperação por injeção de gás <i>versus</i> injeção espuma.	20
Figura 3 – Exemplos de meios porosos.	25
Figura 4 – Efeitos capilares em tubos de diferentes espessuras.	29
Figura 5 – Representação de bolhas em um meio poroso rochoso com escoamento trifásico de água, gás e óleo.	31
Figura 6 – Tensão superficial da água em função da concentração de surfactante [1].	31
Figura 7 – Mecanismos de criação de bolhas em meios porosos.	32
Figura 8 – Relação entre pressão capilar e saturação de água [2].	33
Figura 9 – Representação de espumas fortes e fracas em um meio poroso. [3] . . .	33
Figura 10 – Solução analítica do modelo cinético de primeira ordem (3.2) para o problema de Riemann (6.1) com $K_c = 200$	52
Figura 11 – Solução analítica do modelo cinético de primeira ordem (3.2) para o problema de Riemann (6.1) com $K_c = 1$	53
Figura 12 – Solução analítica do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.2).	53
Figura 13 – Solução numérica das EDPs (3.10) para o problema de Riemann (6.2) em $t = 25$ s.	54
Figura 14 – Solução analítica do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.3).	55
Figura 15 – Solução numérica das EDPs (3.10) para o problema de Riemann (6.3) em $t = 25$ s.	55
Figura 16 – Solução analítica do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.4).	56
Figura 17 – Coeficientes de difusão dados por (7.7) como funções de S_w	60
Figura 18 – Solução para o problema de Riemann (7.19) com $\epsilon = 1$ e $K_c = 0.001$. .	63
Figura 19 – Solução para o problema de Riemann (7.19) com $\epsilon = 0.1$ e $K_c = 0.001$.	64
Figura 20 – Solução para o problema de Riemann (7.19) com $\epsilon = 3.361 \cdot 10^{-4}$ e $K_c = 0.001$	66

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CMC	<i>Critical micelle concentration</i> – Concentração micelar crítica
EDO	Equação diferencial ordinária
EDP	Equação diferencial parcial
EOR	<i>Enhanced Oil Recovery</i> – Recuperação avançada de Petróleo
SAG	<i>Surfactant-alternating-gas</i> – Injeção alternada de solução de surfactante e gás
WAG	<i>Water-alternating-gas</i> – Injeção alternada de água e gás

LISTA DE SÍMBOLOS

w, g, α	Subíndices das fases água, gás e α
S_w, S_g, S_α	Saturação das fases
f_w, f_g, f_α	Fluxo fracionário das fases
C_s	Concentração de surfactante em fase aquosa
n_f	Textura da espuma, densidade de bolhas/lamelas
n_D	Textura adimensional da espuma
n_D^{LE}	Textura adimensional da espuma em equilíbrio local
n_{max}	Textura máxima da espuma
$S_{wc}, S_{gr}, S_{\alpha r}$	Saturações residuais de água, gás e α
P_w, P_g, P_α	Pressão parcial das fases
P_c	Pressão capilar
P_c^*	Pressão capilar crítica
S_w^*	Saturação crítica da água
\mathbf{k}, k	Permeabilidade do meio poroso
\mathbf{u}, u	Velocidade total de Darcy
$u_w, u_g, \mathbf{u}_\alpha$	Velocidades parciais de Darcy
\mathbf{v}	Velocidade intersticial total
\mathbf{v}_α	Velocidade intersticial da fase
$k_{rw}, k_{rg}, k_{r\alpha}$	Permeabilidades relativas das fases
k_{rg}^0	Permeabilidade relativa do gás sem espuma
$\lambda_w, \lambda_g, \lambda_\alpha$	Mobilidade das fases
μ_w, μ_g, μ_α	Viscosidade das fases
$\lambda_{rw}, \lambda_{rg}, \lambda_{r\alpha}$	Mobilidade relativa das fases
MRF	Fator redução de mobilidade
ϕ	Porosidade do meio poroso
σ_{wg}	Tensão superficial entre água e gás
A, K_c	Parâmetros do modelo cinético linear
r_g, r_c	Termos de geração e destruição de espuma
Φ	Termo fonte do balanço de espuma
η	Variável do sistema de ondas viajantes
v	Velocidade de propagação da onda viajante
v_s	Velocidade do choque de Rankine-Hugoniot
\tilde{x}, \tilde{t}	Variáveis do modelo adimensional
$x^*, t^*, \mathcal{K}_c, \beta$	Parâmetros do modelo adimensional
$\epsilon, \epsilon_{S_w}, \epsilon_{n_D}$	Coefficientes de difusão
G, F, B, R	Representação matricial do modelo
$\mathbb{G}, \mathbb{F}, \mathbb{Y}$	Matrizes do sistema numérico de EDPs
H, Z, M	Funções auxiliares no desenvolvimento por ondas viajantes

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
1.2	CONTRIBUIÇÕES DESTE TRABALHO	22
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	22
2	TEORIA DE FLUXO FRACIONÁRIO	25
2.1	ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS	25
2.2	LEI DE DARCY	27
2.3	LEIS DE CONSERVAÇÃO	28
2.4	ESCOAMENTO BIFÁSICO	28
2.5	ESPUMAS	30
2.5.1	Surfactantes	30
2.5.2	Mecanismos de criação e destruição	31
2.5.3	Textura de espuma	32
2.5.4	Modelagem	33
3	MODELOS DE ESCOAMENTO DE ESPUMA	37
3.1	MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM	37
3.2	MODELO CINÉTICO INCLUINDO EQUAÇÃO PARA O SURFACTANTE	39
4	ESTUDO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS	41
4.1	ONDAS VIAJANTES	41
4.2	MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM	42
4.3	MODELO CINÉTICO INCLUINDO EQUAÇÃO PARA O SURFACTANTE	44
5	ABORDAGEM NUMÉRICA	47
5.1	DISCRETIZAÇÃO DO MODELO INCLUINDO SURFACTANTE . . .	48
6	SIMULAÇÕES SEM PRESSÃO CAPILAR	51
6.1	MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM	51
6.2	MODELO CINÉTICO INCLUINDO EQUAÇÃO PARA O SURFACTANTE	52
6.3	CONSIDERAÇÕES PARCIAIS	56
7	SIMPLIFICAÇÃO DA DIFUSÃO CAPILAR	59
7.1	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO	59
7.2	SIMPLIFICAÇÃO DA DIFUSÃO	60
7.3	DIFUSÃO SIMPLIFICADA ($\epsilon = \epsilon_{S_w} = \epsilon_{n_D}$)	61
7.3.1	Estudo analítico	61
7.3.2	Experimentos numéricos	62
7.4	DIFUSÃO SIMPLIFICADA ($\epsilon = \epsilon_{S_w}, \epsilon_{n_D} = 0$)	64
7.4.1	Estudo analítico	65
7.4.2	Experimentos numéricos	65
7.5	CONSIDERAÇÕES PARCIAIS	66

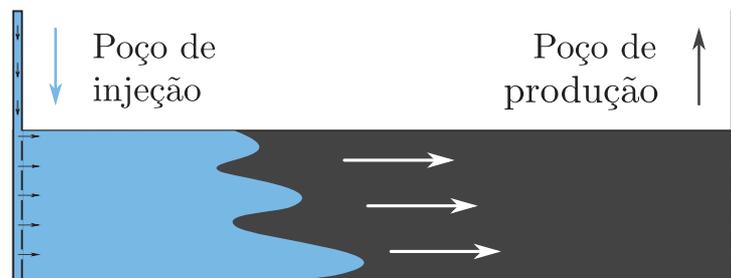
8	CONCLUSÕES	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a indústria petrolífera tem se preocupado em buscar métodos mais eficientes para a extração de petróleo de reservatórios naturais. Estes reservatórios são formações rochosas porosas preenchidas com hidrocarbonetos, o que torna a recuperação de petróleo uma das aplicações de maior destaque no estudo de escoamento de fluidos em meios porosos.

Existem três principais tipos de recuperação de petróleo [4]. A recuperação primária é aquela na qual própria perfuração do reservatório implica na produção de petróleo, devido à pressão natural no interior do reservatório ser superior à pressão exterior. Nesta etapa, cerca de 15 a 30% do petróleo presente no reservatório costuma ser recuperado [5]. Na recuperação secundária, injeta-se em um poço do reservatório substâncias como água ou gás, de forma que a pressão permaneça alta o suficiente para manter a extração de petróleo em um poço de produção (Figura 1). Técnicas ainda mais avançadas são chamadas de recuperação terciária ou recuperação avançada (*Enhanced Oil Recovery* – EOR). Neste ramo, podemos citar procedimentos térmicos, como combustão *in-situ* [6, 7], aquecimento eletromagnético [8, 9] e injeção de água quente e vapor [10, 11], ou procedimentos químicos, como injeção de espuma [12, 13, 14, 15, 16] – foco deste trabalho.

Figura 1 – Representação de um reservatório, ilustrando a recuperação secundária.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Um dos principais obstáculos às técnicas de recuperação deve-se à dinâmica dos fluidos envolvidos no processo. Ao injetar um fluido no reservatório, como água ou gás, a permeabilidade heterogênea do meio poroso faz com que alguns caminhos sejam preferenciais ao escoamento dos fluidos com maior mobilidade, formando uma frente não-uniforme na varredura do reservatório. Este fenômeno é chamado de “dedos” (ou *fingerling*), pela frente se assemelhar a dedos que percorrem o reservatório (veja a Figura 1). Assim que o fluido injetado atinge o poço de produção por um destes caminhos preferenciais, a recuperação do petróleo cai drasticamente, uma vez que parte da produção passa a ser o próprio fluido injetado.

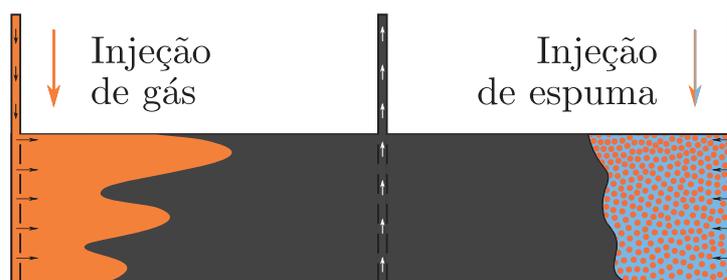
Outra questão a ser considerada depende da densidade dos fluidos envolvidos no

processo. Um fluido menos denso, que seja injetado no reservatório, tende a deslocar-se em direção ao topo devido ao efeito da gravidade. Da mesma forma, fluidos injetados mais densos que os presentes no meio tendem a deslocar-se para regiões inferiores do reservatório. Este fenômeno é chamado de segregação gravitacional (*gravity override*) e se destaca quanto maior for a altura do reservatório e a distância entre os poços de injeção e produção. Como ocorre com o *fingering*, quando o fluido injetado alcança o poço de produção a eficiência do processo cai significativamente.

Para evitar esta perda de eficiência, existem técnicas EOR que buscam reduzir a mobilidade do fluido injetado. Uma delas é a injeção alternada de água e gás (*water-alternating-gas* – WAG), onde a alternância entre um fluido mais denso e outro menos denso que o óleo torna a varredura mais uniforme, melhorando a eficiência da recuperação. Uma estratégia adotada em técnicas WAG é a reinjeção de gás dióxido de carbono (CO_2), presente em altas concentrações em muitos reservatórios de petróleo. Por exemplo, alguns campos do pré-sal brasileiro produzem até 45% de CO_2 [17]. Portanto, parte dessa produção de gás pode ser aproveitada com reinjeção de CO_2 em procedimentos WAG. Essa técnica reduz a emissão de gases que promovem o efeito estufa, um dos principais objetivos do Acordo de Paris de 2016, do qual o Brasil é signatário [18, 19].

Mesmo com eficiência superior às técnicas de injeção mais convencionais, os métodos WAG ainda são limitados pela alta mobilidade e baixa densidade do gás. Uma opção estudada é injetar surfactante diluído em fase aquosa para que o escoamento dentro do meio poroso crie espuma, dificultando a passagem do gás e, conseqüentemente, reduzindo a sua mobilidade [20]. Essa estratégia é frequentemente referida na literatura como injeção de espuma ou injeção alternada de surfactante e gás (*surfactant-alternating-gas* – SAG). A Figura 2 ilustra a eficiência da injeção de espuma, através da qual o reservatório é varrido mais uniformemente, se comparado com, por exemplo, a injeção de gás. O desenvolvimento das técnicas de injeção mencionadas motivam o estudo da dinâmica de escoamentos multifásicos em meios porosos e, neste trabalho em particular, o estudo do escoamento de espuma.

Figura 2 – Representação de um reservatório, ilustrando a recuperação por injeção de gás *versus* injeção espuma.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O interesse na análise do escoamento de espuma tem crescido, não só devido às aplicações na indústria do petróleo [21], mas também pelo seu uso em questões ambientais, como recuperação de solos e aquíferos contaminados [22, 23]. O estudo de espumas é desafiador devido à sua conexão com processos químicos e à natureza não-Newtoniana do fluido. Há uma literatura substancial sobre os aspectos experimentais deste tópico [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Vários modelos físicos foram propostos para descrever diferentes condições de fluxo de espuma em meios porosos [12, 13, 14, 15, 16], que também foram abordados numericamente [5, 30, 14, 31, 32].

A literatura matemática sobre modelos de deslocamento de espuma não é tão abundante e faltam artigos com análises rigorosas do tema. Em parte, isso pode ser explicado pela e pela complexidade das equações envolvidas na física do problema.

A solução para alguns modelos de espuma foi tratada na forma de ondas viajantes [15, 33]. Esta abordagem apresenta algumas vantagens, pois diferentes estudos experimentais apontam para perfis semelhantes aos de ondas viajantes [24, 34, 35, 36, 27, 37]. Do ponto de vista matemático, este método introduz uma simetria que permite trabalhar com um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) conectando dois equilíbrios [38]. Neste trabalho, seguimos esta abordagem e investigamos a existência de uma solução de ondas viajantes para um modelo simples de deslocamento de espuma.

Todos os modelos de escoamento de espuma citados acima são baseados na teoria de fluxo fracionário [39, 5]. Uma das maiores dificuldades desta teoria está ligada à pressão capilar. O estudo dos efeitos capilares não é algo trivial no ramo teórico, na modelagem, nem mesmo no desenvolvimento de métodos computacionais. Modelos de capilaridade baseados nas permeabilidades relativas de Corey-Brooks [40], Van Genuchten [41] e outros são tratados em [42, 43, 44, 45]. Alguns adotam o conceito de pressão dinâmica [46, 42], que depende da variação no tempo da saturação de água. Os modelos estudados em [46, 47] consideram os efeitos de drenagem e embebição do meio nas funções de permeabilidade relativa, resultando em histerese na pressão capilar. Este comportamento também foi observado experimentalmente [48, 49]. Em [50, 43, 44, 51, 52], os autores apresentam abordagens numéricas para escoamento multifásico em meios porosos heterogêneo e considerando descontinuidades na pressão capilar. Os trabalhos [45, 53] estudam a existência de soluções similares para obter resultados analíticos pra problemas com descontinuidades. Sob certas condições de estabilidade, alguns autores simplificam a pressão capilar na análise do escoamento [32, 54]. Isso facilita, entre outras coisas, a investigação analítica do modelo

Como visto, há muitos estudos sobre efeitos da pressão capilar para fluxo em meios porosos, alguns experimentais, outros numéricos e outros analíticos. Contudo,

nenhum deles estudam analiticamente modelos de capilaridade para um escoamento não-Newtoniano, como espuma. Neste trabalho, propomos estudar de forma semi-analítica algumas modificações em como a capilaridade é usada em modelos de espuma.

1.2 CONTRIBUIÇÕES DESTE TRABALHO

O objetivo do presente trabalho é investigar matematicamente o que acontece quando o termo de pressão capilar é simplificado em modelos mecanicistas de escoamento de espuma, particularmente no modelo cinético de primeira ordem [15, 33]. Esta simplificação consiste em assumir que a difusão causada por este termo é constante, podendo inclusive ser nula.

Neste trabalho apresentamos o modelo cinético de primeira ordem para escoamento de espumas. Este modelo considera uma concentração fixa de surfactante. Em seguida propomos uma modificação que inclui a concentração de surfactante como variável no modelo. Estes dois modelos são investigados analiticamente na ausência de capilaridade. Contudo a solução analítica desenvolvida não condiz com os resultados numéricos. A apresentação e estudo deste modelo com concentração variável de surfactante é parte do trabalho publicado em [55].

Visando justificar os problemas que surgiram ao desconsiderar a pressão capilar, estudamos uma simplificação do modelo cinético. Esta simplificação, mantém a difusão, mas assume que é constante. Dessa forma é possível observar o comportamento do modelo para diferentes ordens de grandeza da pressão capilar e os efeitos que podem ocorrer quando esses valores são cada vez menores. Esse estudo ajuda a entender alguns resultados presentes na literatura, que são frequentemente apontados como erros numéricos. A investigação desse modelo com pressão capilar simplificada é parte um trabalho em conclusão [56].

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho segue organizado da seguinte maneira. O Capítulo 2 apresenta algumas das principais características da teoria base de escoamento de espumas em meios porosos e como este fenômeno é modelado matematicamente. No Capítulo 3, apresentamos o modelo cinético de primeira ordem e o modelo proposto para adição de concentração de surfactante no modelo. No Capítulo 4, apresentamos o estudo da existência de soluções na forma de ondas viajantes para ambos os modelos citados, para isso, desconsideramos a capilaridade. O Capítulo 5 descreve o procedimento numérico adotado neste trabalho para a obtenção das soluções dos sistema de equações diferenciais parciais de cada modelo. No Capítulo 6 apresentamos os resultados das simulações de ambos os modelos sem capilaridade e apresentamos nossas conclusões parciais sobre os resultados obtidos. O

Capítulo 7 apresenta soluções para o modelo cinético de primeira ordem, considerando duas simplificações para a pressão capilar. Na primeira simplificação, consideramos que a difusão por pressão capilar é constante. Na segunda, consideramos a difusão constante na lei de conservação de água e nula na equação de balanço de espuma. Finalmente, o Capítulo 8 apresenta algumas discussões e considerações finais do trabalho.

2 TEORIA DE FLUXO FRACIONÁRIO

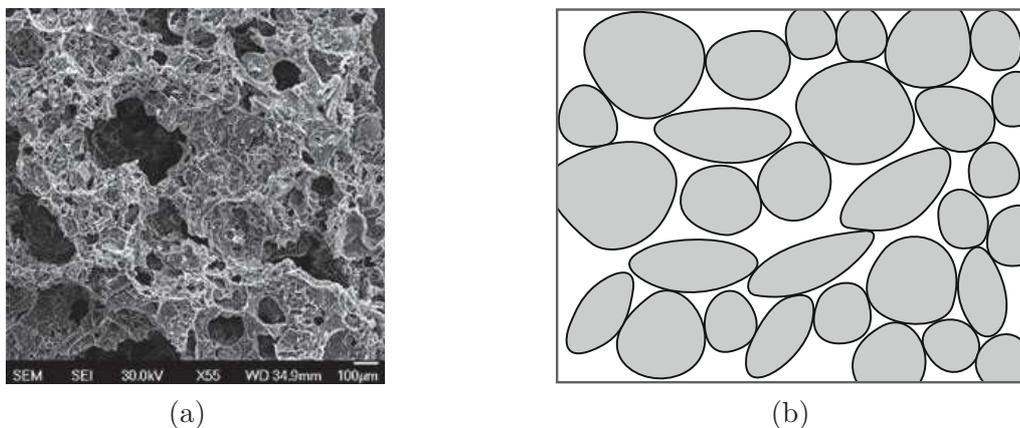
A teoria de fluxo fracionário descreve a dinâmica do escoamento de fluidos miscíveis e imiscíveis em meios porosos [3, 57]. Este nome deve-se à análise das funções que descrevem a fração do fluxo total correspondente a cada fase do escoamento. A teoria de fluxo fracionário possui varias restrições que não se aplicam ao escoamento de espuma [58, 4]. Portanto, há trabalhos que mostram como, mesmo assim, essa teoria também é útil na explicação dos mecanismos complexos envolvidos no escoamento de espuma em meios porosos [59, 60, 61].

Neste capítulo, descreveremos a teoria básica de escoamentos multifásicos em meios porosos, apresentando as equações que modelam este fenômeno. Apresentamos os principais conceitos da dinâmica de espumas e mostramos como estes são geralmente incorporados aos modelos de escoamentos multifásicos. Por fim, é mostrada a modelagem tipicamente adotada para escoamento de espuma, descrita em termos das funções de fluxo fracionário.

2.1 ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS

Um meio poroso pode ser descrito como uma matriz sólida com espaços internos interconectados por poros, permitindo a um fluido escoar através do material [62]. Muitos materiais do cotidiano são meios porosos, como esponjas, tijolos, algumas cerâmicas e solos. A Figura 3 ilustra alguns exemplos de meios porosos. A seguir, definiremos algumas grandezas físicas importantes na modelagem desses fenômenos.

Figura 3 – Exemplos de meios porosos. (a) Imagem microscópica de uma cerâmica. (b) Representação simplificada de um meio poroso.



Fonte: BEAR (2018).

Definimos volume poroso (V_p) como o volume total dos poros que pode ser preenchido pelo fluido. Com isso, define-se porosidade (ϕ) em uma região como a razão entre o

volume poroso e o volume total (V) nesta região:

$$\phi = \frac{V_p}{V}. \quad (2.1)$$

Observe que esta é uma definição discreta de porosidade, uma vez que é definida sobre uma região afixada. Para efeitos de modelagem matemática e pela escala do domínio do problema em relação ao tamanho dos poros, adotamos a hipótese do contínuo e assumimos a porosidade como uma grandeza pontual. Sendo assim, todo ponto do domínio físico possui um valor de porosidade, como se em cada ponto coexistissem sólidos e poros na razão ϕ .

Neste trabalho, estudaremos a dinâmica do escoamento multifásico considerando fases imiscíveis. A razão entre o volume V_α ocupado por uma fase α e o volume poroso é denominada saturação (S_α):

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_p}. \quad (2.2)$$

Adotando a hipótese do contínuo, assumimos as saturações como valores pontuais, como se em cada porção do domínio coexistissem uma fração de cada uma das fases. Um meio poroso é dito saturado quando o volume poroso é totalmente preenchido pelas fases estudadas no modelo, de forma que:

$$\sum_{\alpha} (S_\alpha) = 1. \quad (2.3)$$

Dependendo das propriedades do meio e dos fluidos, pode não ser possível deslocar completamente uma fase de uma região. A quantidade mínima remanescente de uma fase α é descrita pela saturação residual ($S_{\alpha r}$).

Outra propriedade do meio poroso é a permeabilidade (k), ou permeabilidade absoluta. Esta descreve a capacidade do meio em permitir o escoamento de um fluido, dependendo das características geométricas dos poros. Da mesma forma que anteriormente, definimos a permeabilidade como uma grandeza escalar pontual. Em um escoamento multifásico a permeabilidade de uma fase é inferior em relação ao caso monofásico [5]. Define-se então, permeabilidade efetiva (k_α) como a capacidade de escoamento da fase α no meio em presença de outras fases. Por fim, define-se permeabilidade relativa ($k_{r\alpha}$) de α como a razão entre as permeabilidades efetiva e absoluta, de forma que:

$$k_\alpha = k_{r\alpha} k. \quad (2.4)$$

Existem alguns modelos principais de permeabilidades relativas, ajustados empiricamente, que as descrevem como funções das saturações das fases do problema [40, 63, 41, 64, 65].

A resistência que um fluido apresenta ao escoamento é caracterizada pela sua viscosidade (μ). Considerando as propriedades do meio e de todos os fluidos do escoamento, descrevemos a capacidade de uma fase α deslocar-se no meio como mobilidade (λ_α), definida

como a razão entre a permeabilidade efetiva k_α e a viscosidade μ_α . Além disso, definimos os termos de mobilidade total (λ) e relativa ($\lambda_{r\alpha}$), de forma que:

$$\lambda_\alpha = \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad \lambda_{r\alpha} = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda = \sum_\alpha \lambda_\alpha. \quad (2.5)$$

Por fim, definimos fluxo fracionário (f_α) como a fração volumétrica do deslocamento em uma direção composta pela fase α . Este fluxo pode ser definido como a razão entre a mobilidade da fase λ_α e a mobilidade total [57, 4]:

$$f_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda} \Rightarrow \sum_\alpha f_\alpha = 1. \quad (2.6)$$

2.2 LEI DE DARCY

A lei de Darcy é uma equação constitutiva inferida experimentalmente por Henry Darcy [66]. Esta equação descreve o comportamento hidrodinâmico de um escoamento monofásico em meio poroso. Ela estabelece uma relação de proporcionalidade entre a velocidade do escoamento \mathbf{u} e o gradiente de pressão no reservatório (∇P). Para o caso sem efeitos gravitacionais, temos que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\mu} \nabla P, \quad (2.7)$$

onde, para um meio n -dimensional, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ é a velocidade em um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{k}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é o tensor de permeabilidades em \mathbf{x} . Cada componente $k_{i,j}$ do tensor \mathbf{k} pode ser interpretada como a facilidade com que uma porção de fluido desloca-se na direção i devido a um gradiente de pressão na direção j . Em alguns casos é possível assumir que \mathbf{k} é um tensor diagonal, ou seja, $k_{i,j} = 0$ para $i \neq j$ [5]. Sendo mais particular, em casos isotrópicos a permeabilidade do meio independe da direção e, portanto, $k_{ii} = k$. Em meios homogêneos, a permeabilidade é igual em todo os pontos e, portanto, \mathbf{k} é constante e independe de \mathbf{x} .

A velocidade de Darcy ou velocidade superficial \mathbf{u} é definida como a taxa efetiva de deslocamento de massa no meio poroso. Isso porque a velocidade real do fluido \mathbf{v} (ou velocidade intersticial) ocorre apenas dentro dos poros, pois é onde realmente o fluido se desloca. Ao adotar a hipótese do contínuo, assumimos que o fluido desloca-se por todo o volume do meio com velocidade \mathbf{u} , dada por:

$$\mathbf{u} = \phi \mathbf{v}. \quad (2.8)$$

Uma adaptação, proposta por Muskat e Meres [67], permite estender a lei de Darcy para descrever a dinâmica de escoamentos multifásicos em meios porosos. Para o caso multifásico, define-se para cada fase α , a velocidade parcial de Darcy \mathbf{u}_α e pressão parcial P_α . Temos então que:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}(\mathbf{x}) \lambda_{r\alpha} \nabla P_\alpha, \quad \mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{u}_\alpha. \quad (2.9)$$

Da mesma forma que definimos (2.8), a velocidade parcial de Darcy \mathbf{u}_α considera apenas a parcela da velocidade real da fase (\mathbf{v}_α) correspondente à fração volumétrica que a fase α ocupa no meio. Portanto:

$$\mathbf{u}_\alpha = \phi S_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (2.10)$$

2.3 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Uma lei de conservação é uma equação diferencial parcial (EDP) que descreve o comportamento de uma determinada quantidade que não varia ao longo do tempo [68]. Podemos expressar a lei de conservação de uma quantidade ν , na seguinte forma diferencial:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}(\nu) = 0, \quad (2.11)$$

onde \mathbf{f} é o fluxo volumétrico de ν por unidade de área. A equação (2.11) determina que, para qualquer região delimitada no espaço, a variação temporal da quantidade ν depende apenas do fluxo desta quantidade que entra ($\nabla \cdot \mathbf{f}(\nu) < 0$) ou sai ($\nabla \cdot \mathbf{f}(\nu) > 0$) desta região.

Parte importante da dinâmica de fluidos é o princípio de conservação da massa. Em problemas de escoamento em meios porosos, esta lei de conservação pode ser escrita em termos das saturações das fases. Como trabalharemos com fluidos imiscíveis, não há transferência de massa entre as fases e, portanto, podemos escrever uma lei de conservação para a massa de cada fase separadamente. Considerando a massa m_α da fase α , de massa específica ρ_α , nos poros de uma região com volume V , temos que:

$$m_\alpha = \rho_\alpha (V \phi S_\alpha).$$

Podemos, então, escrever a lei de conservação de massa em meios porosos para uma fase α a partir de (2.11), adotando $\nu = m_\alpha$ e definindo o fluxo mássico por unidade de área como $\mathbf{f}(m_\alpha) = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \phi S_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0. \quad (2.12)$$

Para fases incompressíveis, ρ_α é constante e independe de posição ou tempo e pode ser simplificada na equação. Em meios homogêneos, a porosidade ϕ também é constante.

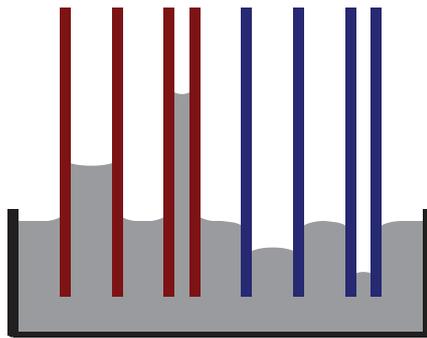
2.4 ESCOAMENTO BIFÁSICO

Para a modelagem de espuma, adotaremos um modelo de escoamento bifásico de água e gás. Temos, portanto, $\alpha = w$ para a fase aquosa e $\alpha = g$ para a fase gasosa. De acordo com (2.6) e (2.9):

$$f_g + f_w = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_w = \mathbf{u}. \quad (2.13)$$

Quando tratamos de problemas multifásicos, a interação que ocorre nas interfaces entre as fases tem efeitos relevantes na hidrodinâmica. Substâncias diferentes interagem de forma diferente quando em contato com uma superfície, podendo ser mais ou menos atraídas (a nível molecular) pela superfície. A fase que sofre maior atração é dita molhante e a outra é dita não-molhante. Uma fase molhante tende a formar uma maior área de contato com a superfície, fazendo com que ela tenda a se deslocar em direção à fase não-molhante. Este efeito, denominado capilaridade, é acentuado quando a área da superfície é maior em relação à quantidade de fluido. A Figura 4 mostra a ação da capilaridade mais acentuada em tubos mais finos, onde a porção de fluido é reduzida em relação à superfície de contato com o tubo. Isso reforça a importância dos efeitos capilares no fluxo em meios porosos, por possuir muita superfície de contato com os fluido.

Figura 4 – Efeitos capilares em tubos de diferentes espessuras, onde o fluido cinza é molhante na superfície vermelha e não-molhante na superfície azul [69].



Fonte: Wikipedia (2020).

Definimos, portanto, pressão capilar (P_c) como a diferença, nestas interfaces, entre a pressão das fases não-molhante e molhante, respectivamente. A definição de qual fase é ou não molhante depende das fases envolvidas na interação e do meio com o qual elas interagem [70, 71]. No nosso problema, a fase aquosa é molhante e gasosa é não-molhante. Portanto:

$$P_c = P_g - P_w. \quad (2.14)$$

Podemos relacionar as velocidades parciais \mathbf{u}_w e \mathbf{u}_g com a velocidade total \mathbf{u} da seguinte forma [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_w &= \mathbf{u}f_w + \mathbf{k}\lambda_{rg}f_w\nabla P_c, \\ \mathbf{u}_g &= \mathbf{u}f_g - \mathbf{k}\lambda_{rw}f_g\nabla P_c. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Associando a lei de conservação de massa (2.12) à expressão da velocidade (2.15), obtida a partir da lei de Darcy, podemos derivar a seguinte expressão para a fase aquosa [72]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \phi S_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{u} f_w) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{k} \lambda_{rg} f_w \nabla P_c) = 0. \quad (2.16)$$

Para um escoamento bifásico em um meio poroso saturado, não há necessidade de derivar uma expressão análoga para a fase gasosa, uma vez que $S_g + S_w = 1$.

2.5 ESPUMAS

Nesta seção destacamos as características principais do fluxo de espuma em meios porosos. Esta modelagem estende a teoria de fluxo fracionário, adaptando alguns dos conceitos apresentados neste capítulo para incluir os efeitos da espuma no escoamento.

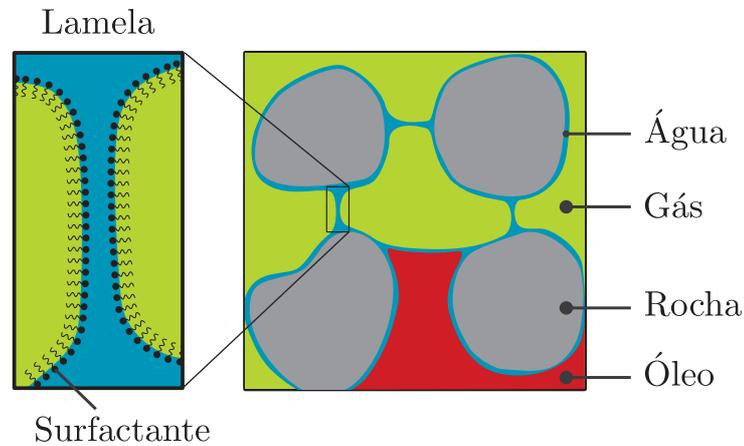
Neste trabalho, denominamos espuma como um aglomerado de bolhas gasosas que são separadas uma das outras por um filme líquido denominado lamela [73, 74, 75]. Contudo, esta estrutura de bolhas não ocorre com facilidade quando as lamelas são compostas apenas por água. Isso porque a tensão superficial da água torna as lamelas cineticamente instáveis. Uma alternativa para obter bolhas estáveis em meio aquoso é reduzindo a tensão superficial com adição de surfactantes à solução [76].

2.5.1 Surfactantes

Surfactantes, ou tensoativos, são moléculas que atuam na redução da tensão superficial de soluções aquosas [77]. O termo surfactante deriva da expressão em inglês “*surface active agent*”, literalmente: “agente de atividade superficial” [78]. Estas moléculas possuem uma estrutura que é hidrofílica numa extremidade e hidrofóbica em outra. Essa estrutura faz com que o surfactante tenda a ficar nas interface entre a solução aquosa e as outras fases, permitindo a redução da tensão superficial da água e facilitando a formação de lamelas estáveis [79, 76]. A Figura 5 ilustra a composição de uma lamela em um meio poroso rochoso durante um escoamento trifásico. Nela é possível ver moléculas de surfactante na superfície do filme líquido, tornando estável a estrutura da lamela.

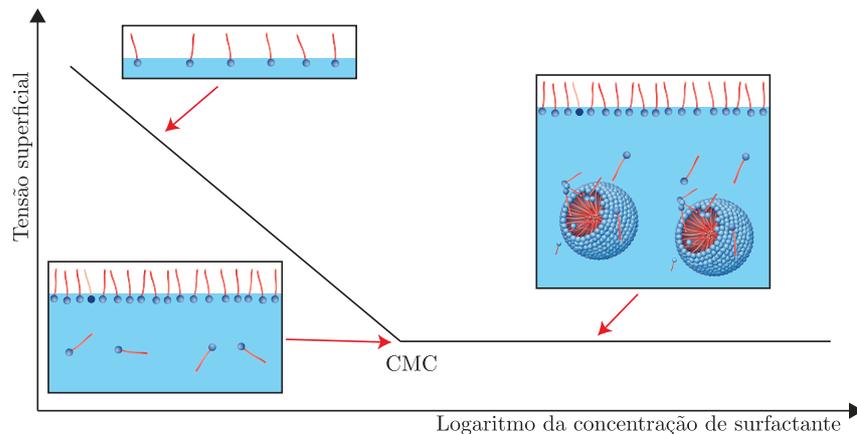
A tensão superficial da solução cai conforme se aumenta a concentração de surfactante no meio, devido à deposição das moléculas na superfície aquosa. Porém, quando a superfície encontra-se saturada de surfactante, as moléculas passam a se aglomerar no interior do líquido, em conformações esféricas denominadas micelas. O ponto a partir do qual isso ocorre é chamado de concentração micelar crítica (CMC). Portanto, qualquer concentração de surfactante acima do CMC não apresenta significativa alteração na tensão superficial [82, 77]. A Figura 6 ilustra a relação entre a concentração de surfactante e a tensão superficial.

Figura 5 – Representação de bolhas em um meio poroso rochoso com escoamento trifásico de água, gás e óleo. Na lamela, vê-se o surfactante disposto na interface entre a água e o gás conforme as propriedades de suas partes hidrofílica e hidrofóbica [80, 81].



Fonte: Adaptado de FARAJZADEH et al. (2012).

Figura 6 – Tensão superficial da água em função da concentração de surfactante [1].



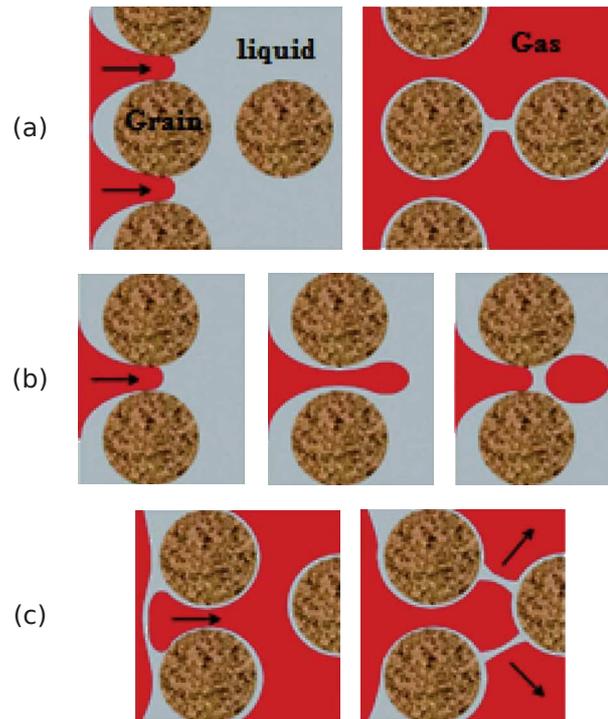
Fonte: Adaptado de *DataPhysics Instruments* (2020).

2.5.2 Mecanismos de criação e destruição

A estratégia do uso de espuma em aplicações EOR consiste em utilizar soluções de surfactantes combinadas com gases para que formam bolhas. Este processo pode ocorrer antes da injeção (espuma pré-gerada) ou após a injeção da solução de surfactante (geração *in situ*) [83, 31, 2]. No meio poroso, a formação das bolhas é tradicionalmente descrita na literatura por meio de três principais mecanismos. O primeiro, denominado *leave-behind*, acontece quando o gás varre uma região inicialmente preenchida pela solução aquosa e solução líquida residual entre os poros forma lamelas. O segundo, denominado *snap-off*, ocorre quando uma bolha se forma a partir da passagem de uma porção de gás por um poro. O terceiro decorre da divisão de uma lamela em outras menores. A Figura 7 ilustra

esses três mecanismos de geração. Recentemente foram observados outros dois fenômenos de criação de bolhas, o “*neighbor-wall pinch-off*” e o “*neighbor-neighbor pinch-off*” [84]. Estes ocorrem quando uma bolha é dividida em duas ao serem pressionadas pelas paredes dos poros ou por outras bolhas.

Figura 7 – Mecanismos de criação de bolhas em meios porosos: (a) *leave-behind*, (b) *snap-off* e (c) divisão. [2]



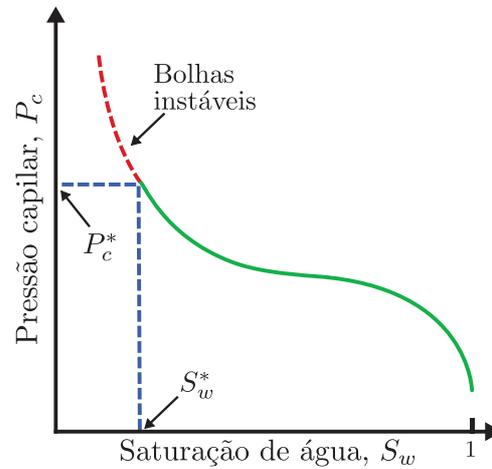
Fonte: HEMATPUR et al. (2018).

Quando a espessura do filme líquido torna-se fina ao ponto de não sustentar mais a estrutura da lamela, a bolha colapsa, num fenômeno denominado coalescência [74, 12, 21]. A estrutura da espuma torna-se instável sob altos valores de pressão capilar, acarretando em uma repentina ruptura da lamela. Vários modelos multifásicos assumem que a pressão capilar pode ser descrita em função da saturação das fases. Estudos evidenciam a existência de um valor crítico de pressão capilar (P_c^*), acima do qual as bolhas colapsam [85, 2]. Conseqüentemente, associamos um valor crítico S_w^* para a saturação de água, abaixo do qual a espuma é instável. Este comportamento é ilustrado na Figura 8.

2.5.3 Textura de espuma

Considerando o objetivo de reduzir a mobilidade do gás, algumas estruturas de espumas são mais eficientes que outras. Em geral, espumas com mais bolhas, conseqüentemente mais lamelas, são as que mais reduzem a mobilidade do gás [31]. Por isso, as espumas com muitas lamelas são denominadas fortes, enquanto que a presença de poucas lamelas caracteriza uma espuma fraca (Figura 9). Define-se, então, o conceito de textura

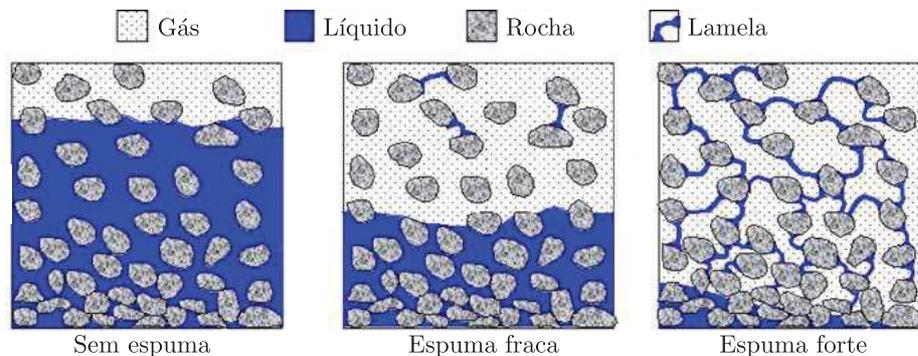
Figura 8 – Relação entre pressão capilar e saturação de água [2]. Abaixo da saturação crítica S_w^* (ou acima de uma pressão crítica P_c^*) as bolhas se tornam instáveis.



Fonte: Adaptado de HEMATPUR (2018).

de espuma (n_f), com o objetivo de quantificar o número de lamelas ou bolhas presente por unidade de área ou volume. Portanto, quanto maior a textura da espuma (ou mais fina) maior é a redução da mobilidade do gás e mais forte é a espuma.

Figura 9 – Representação de espumas fortes e fracas em um meio poroso. [3]



Fonte: DHOLKAWALA et al. (2007).

2.5.4 Modelagem

Existem dois principais tipos de modelos para a dinâmica do escoamento de espuma. Os modelos podem ser empíricos ou mecanicistas. Os modelos empíricos são empregados na maior parte dos *softwares* comerciais. Estes modelos assumem uma quantidade de espuma definida matematicamente por uma relação algébrica derivada por meio de certas relações empíricas, não considerando esta como incógnita nas equações. Já os modelos mecanicistas assumem que a quantidade de espuma é uma variável independente e inclusa

nas equações do problema . Esta última abordagem é considerada mais precisa do ponto de vista físico [2]. Por conta disso, este trabalho foca em modelos mecanicistas.

Conforme dito, uma forma de quantificar a capacidade da espuma em reduzir a mobilidade do gás é através da definição de textura (n_f). Contudo, devido à elevada magnitude da densidade de bolhas em muitas aplicações, é comum que ela seja representada de forma normalizada em relação a uma constante considerada a textura de referência da espuma (n_{\max}). Definimos então o valor adimensional de textura de espuma n_D como sendo:

$$n_D = \frac{n_f}{n_{\max}}. \quad (2.17)$$

A dinâmica da espuma pode ser modelada por uma lei de balanço para a quantidade de espuma. Diferentemente das leis de conservação, as leis de balanço descrevem fenômenos em que uma quantidade não necessariamente se conserva e, portanto, possuem um termo fonte na equação. No caso, o termo fonte será proporcional à taxa de criação e destruição de bolhas no meio poroso.

Como a textura mensura densidade de lamelas em fase gasosa, consideraremos uma lei de balanço para o produto ($S_g n_D$). A função Φ , descreverá a criação e destruição efetiva de bolhas por unidade de volume gasoso (ϕS_g). Assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \phi S_g n_D) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g n_D) = \phi S_g \Phi. \quad (2.18)$$

Considerando as velocidades da equação (2.15):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g \phi S_g n_D) + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{u}_g n_D) - \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{k} \lambda_{rw} f_g \nabla P_c n_D) = \phi S_g \Phi. \quad (2.19)$$

Existem vários modelos que buscam descrever diferentes mecanismos de geração e destruição de espuma através da função Φ . Modelos empíricos, por exemplo, limitam-se a avaliar o comportamento do escoamento apenas para casos em que há um equilíbrio na textura de espuma, considerando $\Phi = 0$.

Além de definir o termo fonte, cada modelo define como a espuma altera a mobilidade do gás. Para isso, modificam-se os termos de permeabilidade relativa ou de viscosidade do gás na equação (2.5).

Outro ponto relevante na física de processos SAG é a concentração de surfactante presente em meio aquoso, pois este é um dos fatores que determinam o processo de criação de espuma. Existem alguns modelos mecanicistas que consideram a concentração de surfactante como variável do problema [86, 16, 87]. Em outros trabalhos, admite-se que a concentração de surfactante é sempre constante e suficientemente grande para não afetar a taxa de criação e destruição de bolhas [37, 14, 88, 15]. Essa ideia condiz com o conceito de concentração micelar crítica, uma vez que em um meio com concentração relativamente alta de surfactante, pode-se admitir que as variações dessa concentração não alteram a

dinâmica da espuma. Alguns modelos também consideram o transporte das partículas de surfactante, incluindo fenômenos como o de adsorção de surfactante na parede do meio poroso, o que influencia na geração e destruição de espuma [16, 87].

O comportamento do fluxo de espuma é reportado em vários trabalhos como um escoamento não-Newtoniano pseudoplástico (*shear thinning*) [89, 26, 85, 88]. Isso significa que a viscosidade da espuma deveria diminuir conforme a velocidade do gás aumenta. Na literatura existem algumas relações entre a viscosidade e a velocidade da espuma [26, 90] e modelos que abrangem este comportamento [14, 37, 16]. Contudo, das referências bibliográficas que citamos neste trabalho, todas as que desenvolvem soluções analíticas para os modelos de espuma – como faremos – desconsideram essa variação na viscosidade.

3 MODELOS DE ESCOAMENTO DE ESPUMA

Com base nas equações definidas no Capítulo 2, apresentaremos dois modelos mecanicistas para o escoamento de espuma em meios porosos. No primeiro, a concentração de surfactante é constante e, no segundo, adicionamos a variação de surfactante ao modelo. Desenvolveremos estes modelos em sua forma unidimensional, considerando um escoamento incompressível numa matriz porosa rígida e homogênea, ou seja, ρ_w , ρ_g , ϕ e k são constantes. Assim, a partir as equações (2.12) e (2.18), construímos o sistema:

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial u_w}{\partial x} = 0, \\ \phi \frac{\partial}{\partial t}(S_g n_D) + \frac{\partial}{\partial x}(u_g n_D) = \phi S_g \Phi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Adotamos, também, um valor constante para a velocidade total de Darcy (u). Substituindo as velocidades parciais de Darcy (2.15) no sistema (3.1) e utilizando a relação $f_g \lambda_{rw} = f_w \lambda_{rg}$, podemos escrever o modelo de forma extensa como:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial f_w}{\partial x} + \frac{k}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{dx} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(S_g n_D) + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x}(f_g n_D) - \frac{k}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{dx} n_D \right) = S_g \Phi. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.1 MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM

O Modelo Cinético de primeira ordem, proposto em [15], é um modelo mecanicista que considera que a presença de espuma no meio poroso altera a mobilidade do gás por um fator linear de redução de mobilidade (MRF):

$$\text{MRF}(n_D) = 18500n_D + 1. \quad (3.3)$$

O modelo, então, define k_{rg}^0 como a permeabilidade relativa do gás em ausência de espuma e k_{rg} como a permeabilidade relativa que o gás assume quando há espuma no meio poroso, isto é:

$$k_{rg}(S_w, n_D) = \frac{k_{rg}^0(S_w)}{\text{MRF}(n_D)}. \quad (3.4)$$

As funções de permeabilidades relativas baseiam-se no modelo de Corey-Brooks [40],

ajustado aos dados experimentais [60, 91]:

$$k_{rw}(S_w) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq S_w \leq S_{wc} \\ 0.20 \left(\frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{4.2} & , \quad S_{wc} < S_w \leq 1 \end{cases} , \quad (3.5)$$

$$k_{rg}^0(S_w) = \begin{cases} 0.94 \left(\frac{1 - S_w - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{1.3} & , \quad 0 \leq S_w < 1 - S_{gr} \\ 0 & , \quad 1 - S_{gr} \leq S_w \leq 1 \end{cases} . \quad (3.6)$$

A saturação residual da fase aquosa é referida neste problema como saturação de água conata, ou seja, $S_{wc} = S_{rw}$.

A pressão capilar é modelada como função da saturação de água conforme segue [92, 37]:

$$P_c(S_w) = \sigma_{wg} \sqrt{\frac{\phi}{k}} 0.022 \frac{(1 - S_w - S_{gr})^c}{S_w - S_{wc}} \quad \text{e } c = 0.01 , \quad (3.7)$$

onde σ_{wg} é a tensão superficial entre água e gás e c é um parâmetro usado para garantir a continuidade de P_c próximo a $S_w = S_{wc}$.

O termo fonte do balanço populacional de espuma é proporcional aos termos de geração (r_g) e coalescência (r_c). O modelo assume uma concentração de surfactante constante à um valor alto o suficiente para não interferir no processo de formação de espuma [15]. Por isso, este modelo não considera uma variável independente para a concentração de surfactante e nem a inclui no termo fonte do balanço de espuma. Portanto, o termo fonte é dado por:

$$\Phi = (r_g - r_c) = K_c (n_D^{\text{LE}}(S_w) - n_D) , \quad (3.8)$$

onde K_c é o parâmetro que regula a taxa de criação e destruição de espuma e n_D^{LE} é a textura de espuma em equilíbrio local, ou seja, o valor no qual não há criação ou destruição efetiva de espuma, de forma que $n_D = n_D^{\text{LE}} \Rightarrow r_g = r_c \Rightarrow \Phi = 0$. O cálculo da textura em equilíbrio local (n_D^{LE}) considera o fato de existir uma pressão capilar crítica (P_c^*) acima da qual as bolhas colapsam [85] (ver Figura 8). Considerando a pressão capilar como função da saturação (3.7), definimos o valor crítico S_w^* , de forma que $P_c^* = P_c(S_w^*)$. Note que, como $P_c(S_w)$ é uma função decrescente, as bolhas colapsam abruptamente para $S_w < S_w^*$. Essa mudança abrupta na textura da espuma é aqui modelada por uma função tangente hiperbólica, conforme segue:

$$n_D^{\text{LE}}(S_w) = \begin{cases} \tanh(A(S_w - S_w^*)) , & S_w > S_w^* \\ 0 & , \quad S_w \leq S_w^* \end{cases} , \quad (3.9)$$

onde A é o parâmetro do modelo que determina o quão abrupta é a mudança na formação de espuma próximo à saturação crítica.

3.2 MODELO CINÉTICO INCLUINDO EQUAÇÃO PARA O SURFACTANTE

Em [86, 55] é proposto um modelo que modifica o modelo cinético [15] apresentado na Seção 3.1. A modificação considera variável a concentração de surfactante presente em fase aquosa, representada por C_s , de forma análoga ao feito em [16]. Como o surfactante é dissolvido na fase aquosa, é adicionada uma lei de balanço para o surfactante, tal qual há para textura da espuma, presente em fase gasosa. Sendo assim, o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w) + \frac{\partial}{\partial x}(u_w) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_g n_D) + \frac{\partial}{\partial x}(u_g n_D) = \phi S_g \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi S_w C_s) + \frac{\partial}{\partial x}(u_w C_s) = -\phi S_g \Phi, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde, aqui, a função Φ é dada por:

$$\Phi = (r_g - r_c) = C_s K_c (n_D^{\text{LE}}(S_w) - n_D). \quad (3.11)$$

Definimos aqui C_s como uma grandeza adimensional, normalizando-a pela concentração micelar crítica (Seção 2.5.1). Sendo assim C_s varia de 0 (sem surfactante) a 1 (CMC). Os demais parâmetros e funções deste modelo são os mesmos apresentados na Seção 3.1 para o modelo sem variação de surfactante.

Observa-se que as duas últimas equações de (3.10) possuem termos fontes opostos, o que indica que a criação de espuma deve implicar diretamente no consumo do surfactante da fase aquosa. Consequentemente, a destruição de espuma implica no depósito de surfactante na fase aquosa.

Note que, por um lado, a concentração de surfactante intensifica a criação de espuma, quando $n_D^{\text{LE}} > n_D$. Mas, por outro, quando $n_D^{\text{LE}} < n_D$, a destruição de espuma também é intensificada pela concentração de surfactante. Além disso, sabemos que concentrações acima do CMC não alteram significativamente a dinâmica da espuma, porém este modelo não trata bem esse comportamento que ocorre quando $C_s > 1$.

4 ESTUDO DE SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Equações diferenciais parciais são empregadas para representar uma extensa gama de fenômenos naturais. Contudo, a complexidade da matemática envolvida em muitas destas equações impede a obtenção de soluções analíticas. Por isso modelos descritos por EDPs são amplamente abordados por métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas. Por outro lado, equações diferenciais ordinárias são mais simples de tratar com o ferramental analítico e numérico presente na literatura.

Uma forma de tratar alguns tipos de EDPs é buscando soluções na forma de ondas viajantes, ou seja, perfis estáticos que transladam ao longo do tempo. Alguns trabalhos aplicam essa teoria para obter soluções de casos específicos de métodos EOR, como a injeção de espuma [93, 94, 15, 33, 6, 7].

O trabalhos [15, 33, 95], empregam ondas viajantes para tratar analiticamente o modelo de espuma apresentado na Seção 3.1 como um sistema de EDOs. Em [33], este mesmo modelo foi reduzido a um sistema composto por uma EDO e uma equação algébrica, simplificando ainda mais a busca por soluções. Em [86, 55], a mesma técnica de redução foi empregada para simplificar o modelo com concentração variável de surfactante da Seção 3.2. Neste capítulo, desenvolvemos estas soluções de ondas viajantes para ambos os modelos de espumas.

4.1 ONDAS VIAJANTES

Como introduzido neste capítulo, procurar soluções na forma de ondas viajantes significa buscar um perfil estático que se translada ao longo do tempo à uma velocidade constante v . Fazemos isso substituindo as variáveis originais do problema x e t pela variável viajante η , de forma que, nesta nova variável, a solução independa do tempo. Se temos uma EDP para a variável $U(x, t)$, definimos $\eta = x - vt$ e as constantes U^- e U^+ , de forma que:

$$\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{dU}{d\eta} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} U = U^\pm. \quad (4.1)$$

Ou seja, a solução U na variável viajante η independe do tempo e conecta assintoticamente os estados constantes U^- e U^+ .

O uso de ondas viajantes pode ser bastante útil para descrever soluções de choque. Matematicamente, define-se um choque como uma descontinuidade presente entre dois segmentos contínuos de uma função. Equações diferenciais parciais hiperbólicas, como leis de conservação, podem admitir soluções fracas na forma de choque [68]. Isso pode ocorrer mesmo que o problema se inicie com uma condição inicial suave. Em escoamento em meios porosos, os choques podem descrever saltos na saturação de uma fase ou concentração de um soluto, como o que ocorre quando se injeta uma mistura diferente da que já se

encontra no reservatório. Nesse contexto, utilizamos problemas de Riemann para estudar o comportamento dos modelos de escoamento.

Um problema de Riemann é uma lei de conservação que possui como condição inicial um choque entre dois estados constantes. Para uma variável U , esta condição inicial é dada por:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U^-, & x < 0, \\ U^+, & x > 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde são constantes os estados à esquerda (U^-) e à direita (U^+) de $x = 0$. Para exemplificar, assumimos um escoamento bifásico água-gás num meio poroso saturado, de forma que $U(x, t) = S_w(x, t)$. Quando este meio encontra-se inicialmente saturado apenas com água e iniciamos uma injeção de gás, temos que $U^- = S_w^- = 0$ e $U^+ = S_w^+ = 1$.

Para o modelo de escoamento com espuma, assumiremos um problema de Riemann em que:

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} S_w(x, t) \\ n_D(x, t) \end{bmatrix} \Rightarrow U^- = \begin{bmatrix} S_w^- \\ n_D^- \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U^+ = \begin{bmatrix} S_w^+ \\ n_D^+ \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

E para o modelo em que incluímos a variação do surfactante:

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} S_w(x, t) \\ n_D(x, t) \\ C_s(x, t) \end{bmatrix} \Rightarrow U^- = \begin{bmatrix} S_w^- \\ n_D^- \\ C_s^- \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U^+ = \begin{bmatrix} S_w^+ \\ n_D^+ \\ C_s^+ \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

4.2 MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM

Dado o modelo cinético apresentado na Seção 3.1, analisaremos a existência de soluções na forma de ondas viajantes. Em [15, 33], esse mesmo tratamento é feito desconsiderando os efeitos da pressão capilar. Portanto, assumiremos também que $P_c = 0$. Considerando a variável viajante $\eta = x - vt$, temos:

$$\begin{aligned} S_w(\eta) &= S_w(x - vt, t), \\ n_D(\eta) &= n_D(x - vt, t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Desta forma, podemos substituir (4.5) nas EDPs (3.1) do modelo, utilizando a regra da cadeia para obter o sistema de EDOs:

$$\begin{cases} -v \frac{d}{d\eta}(\phi S_w) + \frac{d}{d\eta}(u_w) = 0, \\ -v \frac{d}{d\eta}(\phi S_g n_D) + \frac{d}{d\eta}(u_g n_D) = \phi S_g \Phi. \end{cases} \quad (4.6)$$

Considerando um problema de Riemann para este sistema, definimos os estados esquerdo (S_w^-, n_D^-) e direito (S_w^+, n_D^+). Assim, definimos também os valores das funções de

fluxo fracionário e de velocidades parciais avaliadas no estado à esquerda como f_w^- , f_g^- , u_w^- e u_g^- e avaliadas no estado à direita como f_w^+ , f_g^+ , u_w^+ , u_g^+ :

$$\begin{aligned} f_w^- &= f_w(S_w^-, n_D^-), & u_w^+ &= u f_w^+, \\ f_w^+ &= f_w(S_w^+, n_D^+), & u_w^- &= u f_w^-, \\ f_g^+ &= 1 - f_w^+. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como visto em (4.1), ao supormos uma solução na forma de ondas viajantes para as variáveis S_w e n_D , temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} S_w &= S_w^\pm, & \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} n_D &= n_D^\pm, \\ \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{dS_w}{d\eta} &= 0, & \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} \frac{dn_D}{d\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A partir da primeira equação em (4.6), obtemos uma expressão constante em η . Aplicando os limites com $\eta \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{d}{d\eta}(-v\phi S_w + u_w) = 0 \quad \Rightarrow \quad -v\phi S_w + u_w = -v\phi S_w^- + u_w^- = -v\phi S_w^+ + u_w^+. \quad (4.9)$$

Considerando que descartamos a pressão capilar, as velocidades parciais das fases são dadas por $u_w = u f_w$ e $u_g = u f_g$, (2.15). Portanto, da expressão acima podemos obter:

$$v = \frac{u}{\phi} v_s, \quad \text{onde} \quad v_s = \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-}. \quad (4.10)$$

Cabe ressaltar que v_s é a velocidade de propagação de choques em leis de conservação, dada pela condição de Rankine-Hugoniot [68]. Além disso, de (4.9) obtém-se:

$$f_w = f_w^- + v_s(S_w - S_w^-) \quad \Leftrightarrow \quad f_g = f_g^- + v_s(S_g - S_g^-). \quad (4.11)$$

Aplicando a regra da cadeia à segunda equação de (4.6):

$$\left(-v \frac{d}{d\eta}(\phi S_g) + \frac{du_g}{d\eta}\right) n_D + (-v\phi S_g + u_g) \frac{dn_D}{d\eta} = \phi S_g \Phi. \quad (4.12)$$

Atentando-se ao fato de que $S_w + S_g = 1$ e $u_w + u_g = u$, observa-se que o primeiro termo à esquerda na equação (4.12) é nulo, devido à primeira equação de (4.6). Da equação (4.9), temos que o coeficiente de $\frac{dn_D}{d\eta}$ é constante e, portanto, pode ser avaliado em qualquer um dos estados conhecidos (+) ou (-). Assim a EDO com n_D em relação a η pode ser definida como:

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{\phi S_g \Phi}{u(f_g^- - v_s S_g^-)}. \quad (4.13)$$

Com a regra da cadeia $\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{dn_D}{dS_w} \frac{dS_w}{d\eta}$, a EDO de S_w em relação a η é dada por:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{\phi S_g \Phi}{u(f_g^- - v_s S_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}}. \quad (4.14)$$

O sistema de EDOs formado pelas equações (4.13)-(4.14) descreve soluções para o modelo de espuma na forma de ondas viajantes. Contudo, com o intuito de simplificar a busca por soluções neste sistema, o reduziremos a um sistema com apenas uma EDO e uma equação algébrica, como feito em [33].

Pelas definições em (2.4)-(2.6) e (3.3)-(3.4), segue que:

$$f_w = \left(1 + \frac{\lambda_{rg}^0}{\lambda_{rw}} \frac{1}{18500n_D + 1} \right)^{-1} \Rightarrow n_D = \frac{1}{18500} \left[\left(\frac{1}{1 - f_w} - 1 \right) \frac{\lambda_{rg}^0}{\lambda_{rw}} - 1 \right], \quad (4.15)$$

em que $\lambda_{rg}^0 = k_{rg}^0/\mu_g$ indica a permeabilidade relativa do gás em ausência de espuma.

Utilizando a relação para f_w obtida em (4.11):

$$n_D(S_w) = \frac{1}{18500} \left[\left(\frac{1}{f_g^- - v_s(S_w - S_w^-)} - 1 \right) \frac{\lambda_{rg}^0}{\lambda_{rw}} - 1 \right]. \quad (4.16)$$

Com as mobilidades relativas dependendo apenas da saturação, n_D pode ser escrita em função de S_w . Desta forma, é possível, além de escrever o modelo (3.1) como o sistema de EDOs (4.6), reduzi-lo a um sistema com apenas uma EDO e uma equações algébricas, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = \frac{\phi S_g \Phi}{u(f_g^- - v_s S_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}}, \\ n_D(S_w) = \frac{1}{18500} \left[\left(\frac{1}{f_g^- - v_s(S_w - S_w^-)} - 1 \right) \frac{\lambda_{rg}^0}{\lambda_{rw}} - 1 \right]. \end{cases} \quad (4.17)$$

A solução do sistema (4.17) é uma órbita parametrizada em η . Se há solução na forma de ondas viajantes para o problema original (4.6), então a órbita descrita por (4.17) conecta os estados à esquerda (-) e à direita (+) da onda.

Além disso, a redução do sistema de EDOs (4.6) ao sistema (4.17) implica que a solução de (4.17) será a projeção de uma solução de (4.6) sobre a superfície definida por (4.16), o que possivelmente restringe as soluções que podem ser obtidas com esta simplificação.

Com o problema posto na forma (4.17), é viável a visualização de soluções na forma de ondas viajantes. Para isto, basta resolver numericamente a EDO de S_w e, posteriormente, avaliar $n_D(S_w)$.

4.3 MODELO CINÉTICO INCLUINDO EQUAÇÃO PARA O SURFACTANTE

Para o modelo cinético que inclui a concentração de surfactante, apresentado na Seção 3.2, analisamos a existência de soluções na forma de ondas viajantes, com um procedimento análogo ao desenvolvido na Seção 4.2. Assim, aplicamos a mudança de

variável $\eta = x - vt$ nas EDPs de(3.10) do modelo e o reescrevemos como um sistema de EDOs:

$$\begin{cases} -v \frac{d}{d\eta}(\phi S_w) + \frac{d}{d\eta}(u_w) = 0, \\ -v \frac{d}{d\eta}(\phi S_g n_D) + \frac{d}{d\eta}(u_g n_D) = \phi S_g \Phi, \\ -v \frac{d}{d\eta}(\phi S_w C_s) + \frac{d}{d\eta}(u_w C_s) = -\phi S_g \Phi. \end{cases} \quad (4.18)$$

Aqui, consideraremos um problema de Riemann no qual definem-se os estados esquerdo (S_w^-, n_D^-, C_s^-) e direito (S_w^+, n_D^+, C_s^-) .

A obtenção da EDO para S_w e da expressão algébrica do $n_D(S_w)$ se dá exatamente da mesma forma que na Seção 4.2. A única diferença é que, no modelo com surfactante, a função Φ é dada por (3.11). Portanto:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{\phi S_g \Phi}{u(f_g^- - v_s S_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}}. \quad (4.19)$$

$$n_D(S_w) = \frac{1}{18500} \left[\left(\frac{1}{f_g^- - v_s(S_w - S_w^-)} - 1 \right) \frac{\lambda_{rg}^0}{\lambda_{rw}} - 1 \right]. \quad (4.20)$$

Ainda é necessário obter uma expressão para o C_s . De forma análoga à desenvolvida em (4.12)-(4.13), ao aplicar a regra da cadeia à terceira equação de (4.18) e combinar o resultado com a primeira, obtém-se:

$$\frac{dC_s}{d\eta} = \frac{-\phi S_g \Phi}{u(f_w - v_s S_w)}. \quad (4.21)$$

Somando-se as duas últimas equações de (4.18), e aplicando as relações $v\phi = uv_s$ e $u_\alpha = uf_\alpha$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left(-v\phi(S_g n_D + S_w C_s) + (u_g n_D + u_w C_s) \right) &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left(-v_s u(S_g n_D + S_w C_s) + u(f_g n_D + f_w C_s) \right) &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left(C_s(f_w - v_s S_w) + n_D(f_g - v_s S_g) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, encontramos um invariante em η . Tomando $\eta \rightarrow -\infty$:

$$C_s(f_w - v_s S_w) + n_D(f_g - v_s S_g) = C_s^-(f_w^- - v_s S_w^-) + n_D^-(f_g^- - v_s S_g^-). \quad (4.22)$$

De (4.11), temos que:

$$f_w - v_s S_w = f_w^- - v_s S_w^-. \quad (4.23)$$

Podemos então reescrever a expressão (4.22) como C_s em função de S_w :

$$C_s(S_w) = C_s^- + \left(\frac{f_g^- - v_s S_g^-}{f_w^- - v_s S_w^-} \right) (n_D^- - n_D(S_w)). \quad (4.24)$$

Desta forma, é possível, além de escrever o modelo (3.10) como o sistema de EDOs (4.18), reduzi-lo a um sistema com apenas uma EDO e duas equações algébricas, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = \frac{\phi S_g \Phi}{u(f_g^- - v_s S_g^-) \frac{dn_D}{dS_w}}, \\ n_D(S_w) = \frac{1}{18500} \left[\left(\frac{1}{f_g^- - v_s(S_w - S_w^-)} - 1 \right) \frac{\lambda_{rg}^0}{\lambda_{rw}} - 1 \right], \\ C_s(S_w) = C_s^- + \left(\frac{f_g^- - v_s S_g^-}{f_w^- - v_s S_w^-} \right) (n_D^- - n_D(S_w)). \end{cases} \quad (4.25)$$

Este desenvolvimento por ondas viajantes é análogo ao realizado para o Modelo Cinético [15]. Da mesma forma como apresentado na Seção 4.2, a solução do sistema (4.25) é uma órbita parametrizada em η . Se há solução na forma de ondas viajantes para o problema original (3.10), então a órbita descrita por (4.18) conecta os estados à esquerda ($-$) e à direita ($+$) da onda. Porém, a obtenção destas órbitas em um espaço tridimensional é um problema difícil. Já as orbitas de (4.25) são mais facilmente visualizadas por meio métodos numéricos para a resolução da EDO de S_w .

Em [33] é mostrada uma redução de um sistema de duas EDPs para um sistema de uma EDO e uma equação algébrica, dependente da solução da EDO, como mostramos anteriormente. Para a modificação que inclui o surfactante, é ainda possível utilizar a mesma estratégia para reduzir do sistema (3.10) de três EDPs ao sistema (4.25), que possui apenas uma EDO e duas equações algébricas, como mostrado em [86, 55] e apresentado neste trabalho.

Contudo, a solução de (4.25) é a projeção de uma solução de (4.18) sobre a superfície definida por (4.20) e (4.24), possivelmente restringindo as soluções que podem ser obtidas com esta simplificação.

5 ABORDAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo, mostramos como são obtidos os resultados numéricos para os sistemas de EDPs dos modelos de espuma. A obtenção de soluções numéricas diretamente das EDPs é interessante para comparar com as soluções obtidas por meio de ondas viajantes. Equivalência dessas duas soluções corroboram a validade de ambas as resoluções. Por um lado, a equivalência indica que o método numérico é capaz de encontrar soluções comprovadas analiticamente. Por outro lado, o sistema de EDPs representa exatamente o modelo original, sem a adição das hipóteses de ondas viajantes e projeção sobre invariantes que utilizamos no desenvolvimento analítico. Consequentemente, a diferença entre as soluções podem indicar limitações na técnica utilizada para a resolução analítica encontrada na literatura [33, 86].

Para a resolução numérica dos sistemas de EDPs tratados neste trabalho, adotou-se um esquema de diferenças finitas para equações do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(U) + \frac{\partial}{\partial x}F(U) = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + R(U). \quad (5.1)$$

O esquema que aqui detalhamos é o utilizado pelo *software* RCD [96]. A seguir são descritas as discretizações empregadas, para as quais os índices m e n indicam as discretizações espacial e temporal respectivamente:

$$\frac{\partial G}{\partial t} \approx \frac{G_m^{n+1} - G_m^n}{\Delta t}, \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \approx \alpha \tilde{F}_m^{n+1} + (1 - \alpha) \tilde{F}_m^n, \\ \tilde{F}_m = \frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2\Delta x}, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial U}{\partial x} \right) \approx \alpha \tilde{B}_m^{n+1} + (1 - \alpha) \tilde{B}_m^n, \\ \tilde{B}_m = \frac{(B_{m+1} + B_m)(U_{m+1} - U_m) - (B_m + B_{m-1})(U_m - U_{m-1})}{2\Delta x^2}, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$R \approx \alpha R_m^{n+1} + (1 - \alpha) R_m^n. \quad (5.5)$$

Observe que para $\alpha = 0$, a discretização obtida é explícita no tempo, enquanto que $\alpha = 1$ resulta numa discretização completamente implícita no tempo. Neste trabalho, utilizou-se $\alpha = 1/2$, conhecida como discretização Crank-Nicolson [97, 5, 68].

Substituindo (5.2)-(5.5) em (5.1), e agrupando os termos implícitos e explícitos em

\mathbb{F} e \mathbb{Y} , tem-se que:

$$\underbrace{\frac{G_m^{n+1}}{\Delta t} + \alpha(\tilde{F}_m^{n+1} + \tilde{B}_m^{n+1} + R_m^{n+1})}_{\mathbb{F}_m(U_{m-1}^{n+1}, U_m^{n+1}, U_{m+1}^{n+1})} = \underbrace{\frac{G_m^n}{\Delta t}(\alpha - 1)(\tilde{F}_m^n + \tilde{B}_m^n + R_m^n)}_{\mathbb{Y}_m(U_m^n)}. \quad (5.6)$$

Note que, em um método iterativo, no passo de tempo n , conhece-se a solução U_m^i para todo $i \leq n$, enquanto que todos os pontos U_m^{n+1} permanecem incógnitas. Sendo assim, podemos escrever a função:

$$\mathbb{G}_m(U_{m-1}^{n+1}, U_m^{n+1}, U_{m+1}^{n+1}) = \mathbb{F}_m - \mathbb{Y}_m = 0. \quad (5.7)$$

Agrupando todos os pontos m da discretização espacial, definimos a função vetorial $\mathbb{G}(U^{n+1}) = 0$. Portanto, a solução U no tempo $n + 1$ é o vetor que anula a função \mathbb{G} . Podemos obter a solução em cada passo de tempo através do método de Newton-Raphson para a obtenção da solução de $\mathbb{G} = 0$ [98, 99, 5]. O método consiste em \hat{n} iterações de \hat{U}^i :

$$\hat{U}^{i+1} = \hat{U}^i + (J_{\mathbb{G}})^{-1} \mathbb{G}(\hat{U}^i), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \hat{U}^0 = U^n, \\ \hat{U}^{\hat{n}} = U^{n+1}, \end{cases} \quad (5.8)$$

e $J_{\mathbb{G}}$ é a matriz jacobiana de \mathbb{G} em relação às variáveis U_m^{n+1} , para todo m .

5.1 DISCRETIZAÇÃO DO MODELO INCLUINDO SURFACTANTE

A partir da metodologia apresentada no início do capítulo, apresentamos aqui a discretização para o modelo cinético de primeira ordem com concentração de surfactante (3.10). Este modelo pode ser escrito na seguinte forma estendida:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial f_w}{\partial x} = -\frac{k}{\phi \mu_g^0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(f_w k_{rg} \frac{dP_c}{dS_w} \right) \frac{\partial S_w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (S_g n_D) + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (f_g n_D) = \frac{k}{\phi \mu_g^0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(f_w k_{rg} \frac{dP_c}{dS_w} \right) n_D \right) \frac{\partial S_w}{\partial x} + \phi S_g \Phi, \\ \frac{\partial}{\partial t} (S_w C_s) + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (f_w C_s) = -\phi S_g \Phi. \end{cases} \quad (5.9)$$

Podemos escrever o modelo acima na forma (5.1) do método numérico apresentado, ao considerarmos:

$$U = \begin{bmatrix} S_w \\ n_D \\ C_s \end{bmatrix}, \quad G(U) = \begin{bmatrix} S_w \\ S_g n_D \\ S_w C_s \end{bmatrix}, \quad F(U) = \frac{u}{\phi} \begin{bmatrix} f_w \\ f_g n_D \\ f_w C_s \end{bmatrix}, \quad R(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi S_g \Phi \\ -\phi S_g \Phi \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$B(U) = \frac{k}{\phi \mu_g^0} \begin{bmatrix} -f_w k_{rg} \frac{dP_c}{dS_w} + \epsilon_{S_w} & 0 & 0 \\ f_w k_{rg} \frac{dP_c}{dS_w} n_D & \epsilon_{n_D} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{C_s} \end{bmatrix}.$$

Note que em (5.10) adicionamos os termos ϵ_{S_w} , ϵ_{n_D} e ϵ_{C_s} na matriz B . Esta modificação resulta em termos de difusão artificial nessas variáveis, conforme (5.1). Por usarmos o esquema de diferenças finitas de Crank-Nicolson, o método pode ter dificuldades em lidar com variações muito abruptas na solução. Por isso, os termos de difusão artificial podem ser controlados na simulação para melhorar a solução caso necessário. Na Seção 7.2, por exemplo, os termos de são tratados diretamente no modelo.

Por fim o cálculo da matriz jacobiana pode ser feito de duas maneiras. Uma delas é calculando analiticamente, para a qual é necessário avaliar as todas as derivadas de G , F , B e R em relação às variáveis de U . Outra maneira, porém menos precisa, é avaliar a jacobianas numericamente, através de diferenças finitas, por exemplo.

Devido à melhor precisão, neste trabalho, a avaliação da jacobiana J_G é feita de forma analítica.

6 SIMULAÇÕES SEM PRESSÃO CAPILAR

Neste capítulo discutimos soluções para os modelos cinéticos apresentados no Capítulo 3. Para cada um dos modelos, comparamos a solução analítica de ondas viajantes (Capítulo 4) com a solução numérica do sistema de EDPs (Capítulo 5). O objetivo dos experimentos numéricos é encontrar na simulação das EDPs o perfil viajante que conecta os estados $(-)$ e $(+)$ de um problema de Riemann.

Primeiramente, apresentamos na Seção 6.1 simulações que validam o método numérico apresentado no Capítulo 5. Para isso, simulamos o modelo cinético de primeira ordem conforme proposto em [15], isto é, considerando a pressão capilar variável. Comparamos estas simulações com as soluções de ondas viajantes desse modelo [15, 95]. Posteriormente, mostramos na Seção 6.2 os resultados para o modelo que apresentamos com concentração de surfactante negligenciando os efeitos da pressão capilar.

Neste trabalho consideram-se os parâmetros definidos em [15], apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros para o Modelo Cinético.

Símbolo	Descrição	Valor
S_{wc}	Saturação de água conata	0.2
S_{gr}	Saturação residual de gás	0.18
μ_w	Viscosidade da água	$1 \cdot 10^{-3}$ Pas
μ_g^0	Viscosidade do gás sem espuma	$2 \cdot 10^{-5}$ Pas
k	Permeabilidade do meio poroso	$1 \cdot 10^{-12}$ m ²
ϕ	Porosidade do meio	0.25
u	Velocidade de Darcy	$2.93 \cdot 10^{-5}$ mm s ⁻¹
n_{\max}	Textura máxima de espuma	$8 \cdot 10^{13}$ m ⁻³
σ_{wg}	Tensão superficial entre água e gás	0.03 N/m
S_w^*	Saturação crítica de água	0.37
A	Parâmetro do modelo cinético	400

Fonte: Adaptado de ASHOORI et al. (2011).

6.1 MODELO CINÉTICO DE PRIMEIRA ORDEM

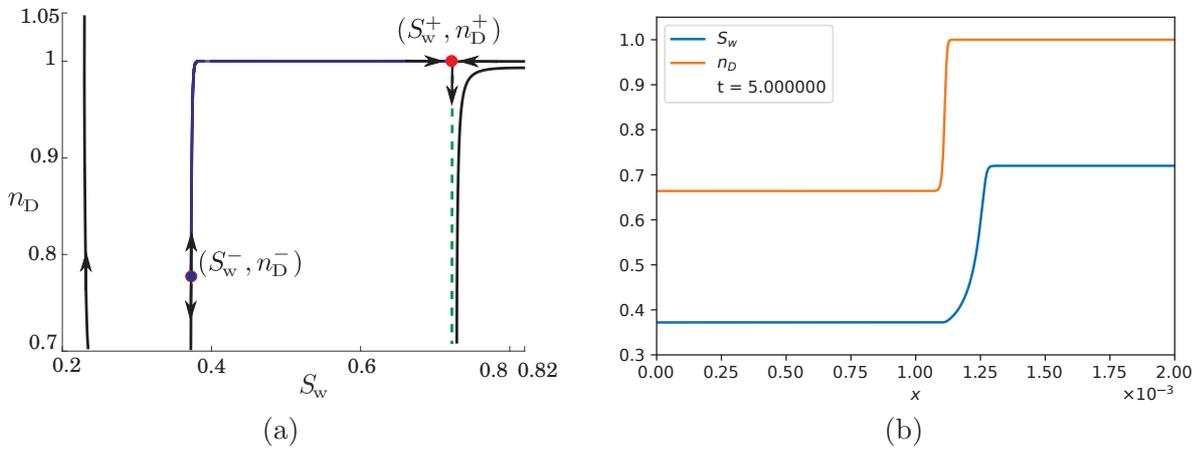
Simulamos o modelo cinético que não considera o surfactante para o problema de Riemann com os seguintes estados esquerdo $(-)$ e direito $(+)$:

$$\begin{cases} S_w^- = 0.372, & S_w^+ = 0.72, \\ n_D^- = 0.664, & n_D^+ = 0.1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Este problema representa uma situação em que o meio está preenchido majoritariamente por água $(+)$ e é injetado neste meio água e gás com espuma pré-gerada. As Figuras 10

e 11 mostram o comportamento do modelo para $K_c = 200$ e $K_c = 1$, experimentando condições bem diferentes de geração e destruição de espuma. Em [95], o autor classifica todas soluções de ondas viajantes deste modelo com base no comportamento do sistema de EDOs. Essa classificação mostra, por exemplo, que o resultado oscilatório encontrado na Figura 11 são esperados em soluções de ondas viajantes e não decorrem apenas de erros numéricos. A solução numérica obtida neste trabalho está de acordo com a solução analítica disponível em [15, 95].

Figura 10 – Solução analítica do modelo cinético de primeira ordem (3.2) para o problema de Riemann (6.1) com $K_c = 200$. (a) Espaço de fase indicando a solução de onda viajante que conecta os estados (S_w^-, n_D^-) e (S_w^+, n_D^+) [95]. (b) Solução numérica do modelo. Observe que esta solução corresponde à ilustrada no espaço de fase da figura (a).



Fonte: (a) LOZANO et al. (2020). (b) Elaborado pelo autor (2020).

6.2 MODELO CINÉTICO INCLUINDO EQUAÇÃO PARA O SURFACTANTE

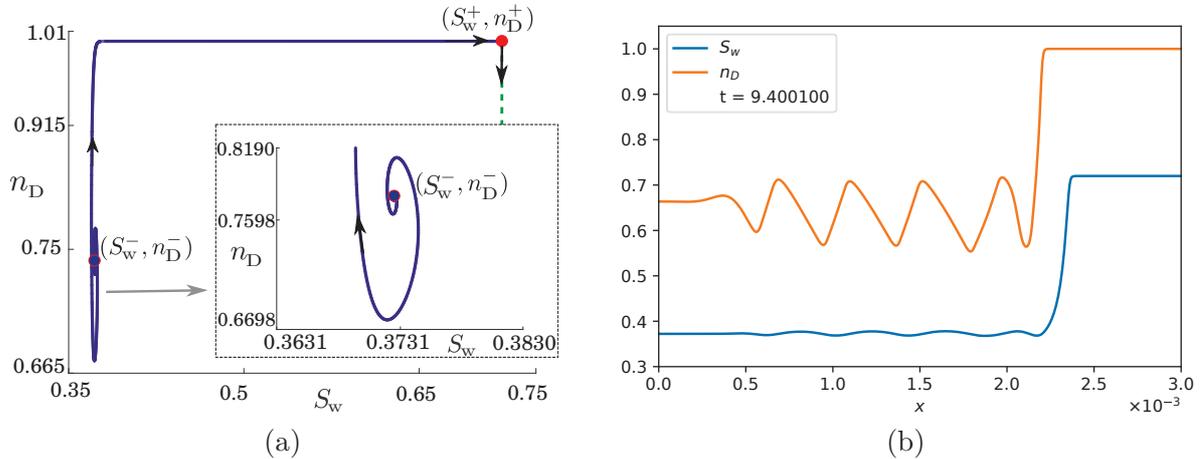
Mostramos aqui soluções para o modelo cinético com concentração variável de surfactante. Este modelo é dado pelo sistema de EDPs (3.10) e foi reduzido, na Seção 4.3, ao sistema (4.25), composto por uma EDO e duas expressões algébricas. Simulamos e comparamos a solução dos dois sistemas para três problemas de Riemann. Em todos os experimentos desta seção adotamos $K_c = 1$.

No primeiro exemplo, os estados à esquerda e direita são dados por:

$$\begin{cases} S_w^- = 0.34, & S_w^+ = 0.37015, \\ n_D^- = 0, & n_D^+ = 0.0599, \\ C_s^- = 1, & C_s^+ = 1.0584. \end{cases} \quad (6.2)$$

Neste caso, a condição inicial (+) possui uma saturação de água S_w um pouco acima da crítica ($S_w^* = 0.37$), com pouca espuma no meio, e a condição de injeção (-) possui $S_w < S_w^*$ e nenhuma espuma. A Figura 12 mostra a solução do sistema (4.25) para o

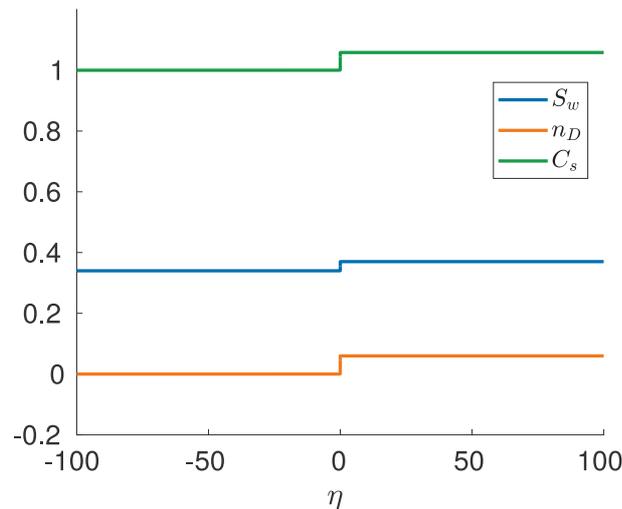
Figura 11 – Solução analítica do modelo cinético de primeira ordem (3.2) para o problema de Riemann (6.1) com $K_c = 1$. (a) Espaço de fase indicando a solução de onda viajante que conecta os estados (S_w^-, n_D^-) e (S_w^+, n_D^+) [95]. (b) Solução numérica do modelo. Observe que esta solução corresponde à ilustrada no espaço de fase da figura (a).



Fonte: (a) LOZANO et al. (2020). (b) Elaborado pelo autor (2020).

problema de Riemann (6.2). A solução obtida é um choque que conecta os estados esquerdo e direito, indicando que o perfil inicial do problema deve se deslocar no eixo x ao longo do tempo (pois $\eta = x - vt$).

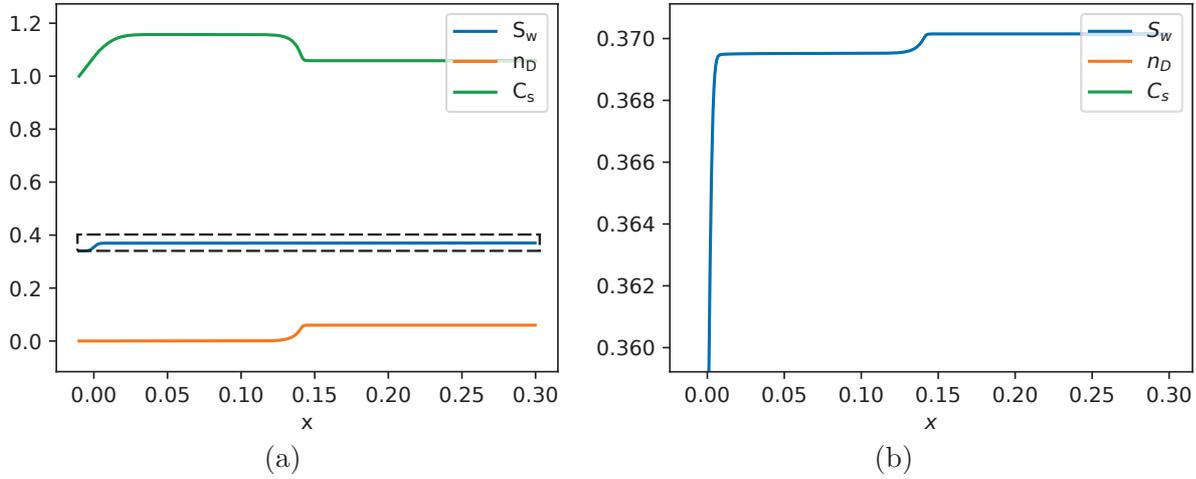
Figura 12 – Solução analítica do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.2).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A simulação numérica do sistema de EDPs (3.10) com os mesmos estados iniciais (6.2) é mostrada na Figura 13. Na simulação, próximo a $x = 0.15$, com $t = 25s$, há um choque nas três variáveis que se propaga para a direita. Contudo, este choque não conecta

Figura 13 – (a) Solução numérica das EDPs (3.10) para o problema de Riemann (6.2) em $t = 25s$. (b) Ampliação da região destacada em (a).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

os mesmos estados esquerdo e direito definidos em (6.2), como ocorre com a solução de onda viajante da Figura 13. A variação na solução que ocorre em $x = 0$ é estacionária e não se propaga com a onda viajante.

Para o segundo exemplo, adotamos o problema de Riemann com os estados iniciais:

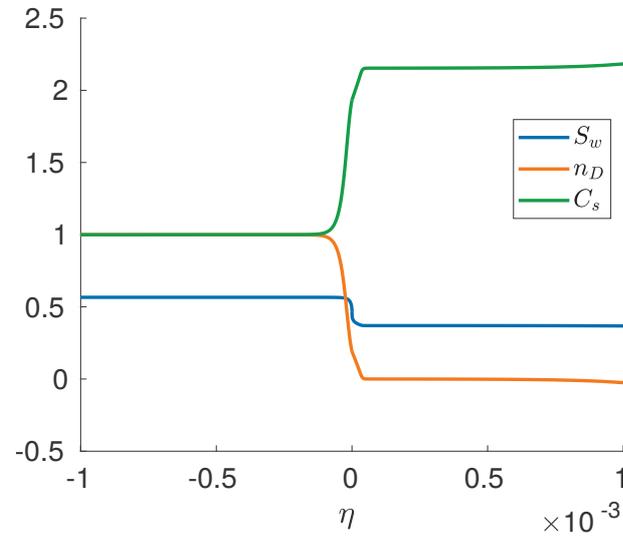
$$\begin{cases} S_w^- = 0.566, & S_w^+ = 0.37, \\ n_D^- = 1, & n_D^+ = 0, \\ C_s^- = 1, & C_s^+ = 2.1537. \end{cases} \quad (6.3)$$

A Figura 14 mostra a solução do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.3). Novamente, encontramos solução de onda viajante na forma de um choque que conecta os estados esquerdo e direito. Portanto, a solução esperada para o sistema de EDPs é o perfil inicial transladado no tempo.

A simulação numérica do sistema de EDPs, com os mesmos estados iniciais (6.3), é mostrada na Figura 15. Como anteriormente, próximo a $x = 0.15$ em $t = 25s$, o gráfico apresenta solução na forma de um choque nas três variáveis que se propaga para a direita. Contudo, este choque conecta apenas os estados de C_s para o problema de Riemann. A perturbação que ocorre em $x = 0$ é estacionária e não se propaga com o restante do perfil da solução. Esta perturbação pode ser uma representação do comportamento real do sistema de EDPs ou uma instabilidade numérica devido à dificuldade do método de diferenças finitas em tratar a condição inicial de descontinuidade.

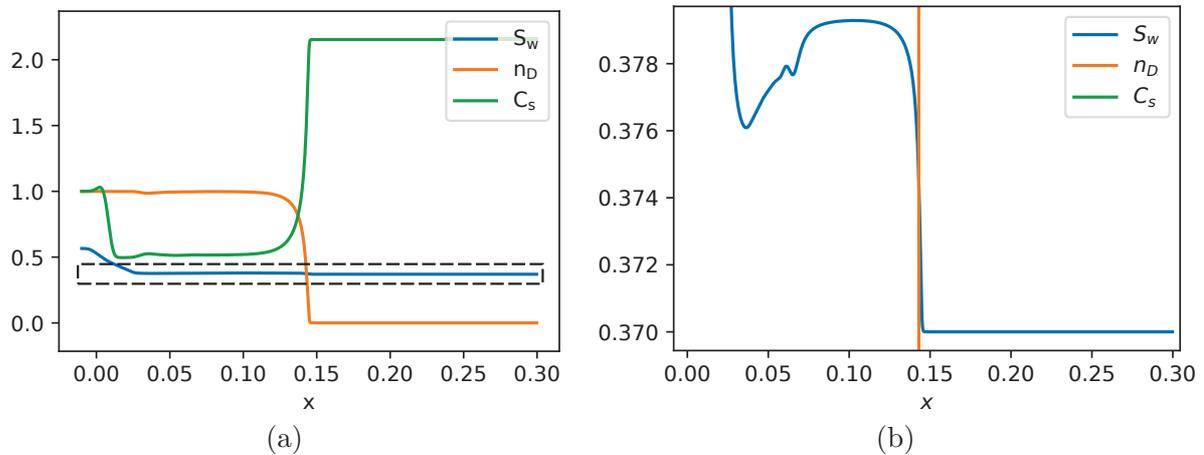
Para os dois exemplos que apresentamos, obtivemos soluções diferentes para o modelo (3.10) e a simplificação por ondas viajantes (4.25). É importante ressaltar que a obtenção de (4.25) impõe ao modelo original certas hipóteses. Uma destas é a existência

Figura 14 – Solução analítica do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.3).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Figura 15 – (a) Solução numérica das EDPs (3.10) para o problema de Riemann (6.3) em $t = 25s$. (b) Ampliação da região destacada em (a).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

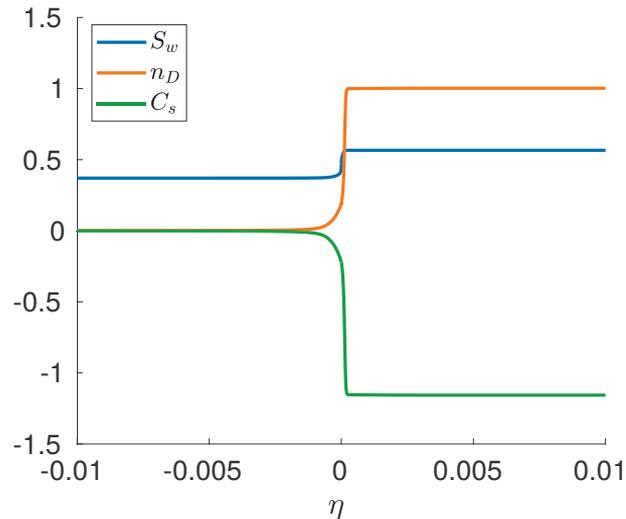
de soluções na forma de ondas viajantes e outra é que a solução do sistema de EDOs (4.18) pode ser projetada sobre a superfície definida pelas equações algébricas (4.20) e (4.24). A imposição destas hipóteses podem criar condições em que esses dois sistemas não apresentem a mesma solução, como observamos nos dois primeiros exemplos.

No terceiro exemplo, definimos a condição inicial:

$$\begin{cases} S_w^- = 0.37, & S_w^+ = 0.566, \\ n_D^- = 0, & n_D^+ = 1, \\ C_s^- = 0, & C_s^+ = -1.1537. \end{cases} \quad (6.4)$$

O problema de Riemann (6.4) apresenta um estado à direita fisicamente incoerente, com concentração negativa de surfactante e a Figura 16 a solução obtida com a resolução do sistema (4.25), obtido com a redução das ondas viajantes. Observamos, portanto, este sistema admite a possibilidade de soluções que conectam estados fisicamente viáveis à estados inviáveis. Para este exemplo, não apresentamos a comparação com a solução numérica das EDPs, uma vez que o problema não é de interesse físico.

Figura 16 – Solução analítica do sistema (4.25) para o problema de Riemann (6.4).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

6.3 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Apresentamos até aqui um estudo sobre um modelo de espuma que considera a variação da concentração de surfactante. Em busca de resultados analíticos, procuramos soluções na forma de ondas viajantes e reduzimos o problema original de um sistema com três EDPs (3.10) para um problema que resolvemos apenas uma EDO (4.25). Para isso, adotamos a mesma técnica apresentada em [33] para modelo sem concentração de surfactante. Finalmente, obtivemos soluções numéricas para o modelo original a partir do sistema de EDPs (3.10).

Analisando a solução de (3.10), verifica-se a presença de ondas viajantes. Contudo, esta solução não coincide com a obtida pelo sistema (4.25). Além disso, os resultados obtidos pelo sistema (4.25) apresentam soluções fisicamente incorretas.

Uma possível explicação para estes resultados é que a projeção que adotamos perde informações essenciais do problema original. Desta forma, soluções existentes no sistema de ondas viajantes (4.18) podem não ser possíveis na redução (4.25). Portanto, o método de projeção aplicado a este modelo não é robusto na obtenção das soluções.

No próximo capítulo, investigamos outros resultados que podem justificar a divergência nos resultados que obtivemos para o modelo com concentração de surfactante.

Os resultados apresentados nesse capítulo foram publicados em [55].

7 SIMPLIFICAÇÃO DA DIFUSÃO CAPILAR

No Capítulo 6, desconsideramos a capilaridade e, nesse caso, as soluções numéricas para o modelo cinético com concentração de surfactante não coincidiram com as soluções obtidas por ondas viajantes. Visando entender essa incompatibilidade dos resultados, buscaremos uma maneira de simplificar a pressão capilar sem desconsiderá-la completamente do modelo. Neste capítulo, fazemos isso considerando que a difusão causada pela pressão capilar é constante. Com isso, estudaremos a existência de soluções na forma de ondas viajantes e verificaremos os resultados numericamente.

Por simplicidade, analisaremos aqui o modelo cinético sem concentração de surfactante [15], apresentado na Seção 3.1. Das equações (3.2) e (3.8), o reescrevemos como:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial f_w}{\partial x} + \frac{k}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{dx} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (S_g n_D) + \frac{u}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} (f_g n_D) - \frac{k}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{dx} n_D \right) = S_g K_c (n_D^{\text{LE}} - n_D). \end{cases} \quad (7.1)$$

7.1 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO

Para realizar o estudo da difusão capilar o sistema (7.1) pode ser escrito numa forma adimensional. Para tanto, definimos as variáveis adimensionais \tilde{x} e \tilde{t} como segue:

$$\tilde{x} = \frac{x}{x^*}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t^*}. \quad (7.2)$$

Substituindo as expressões (7.2) em (7.1), temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial \tilde{t}} + \left(\frac{t^* u}{\phi x^*} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(f_w + \frac{k}{u x^*} f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{d\tilde{x}} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (S_g n_D) + \left(\frac{t^* u}{\phi x^*} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(f_g n_D - \frac{k}{u x^*} f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{d\tilde{x}} n_D \right) = t^* S_g K_c (n_D^{\text{LE}} - n_D). \end{cases} \quad (7.3)$$

Escolhemos as quantidades de referência x^* e t^* como sendo:

$$x^* = L \quad \text{e} \quad t^* = \frac{L \phi}{u}, \quad (7.4)$$

onde L é o comprimento de referência do problema unidimensional. Para todos os experimentos deste trabalho, assumiremos $L = 1$. Definindo também:

$$\mathcal{K}_c = t^* K_c = \frac{K_c L \phi}{u}, \quad \beta = \frac{k}{u L} \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi} = \mathcal{K}_c (n_D^{\text{LE}} - n_D), \quad (7.5)$$

omitimos o til de \tilde{x} , \tilde{t} e $\tilde{\Phi}$ e reescrevemos (7.3) como:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{dx} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} (S_g n_D) + \frac{\partial}{\partial x} (f_g n_D) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta f_w \lambda_{rg} \frac{dP_c}{dx} n_D \right) + S_g \tilde{\Phi}. \end{cases} \quad (7.6)$$

7.2 SIMPLIFICAÇÃO DA DIFUSÃO

Partindo do modelo cinético em sua forma adimensional (7.6), definimos as funções:

$$\varepsilon_{S_w}(S_w) = -\beta \lambda_{rg} f_w \frac{dP_c}{dS_w}, \quad \varepsilon_{n_D}(S_w, n_D) = -\beta \lambda_{rg} f_w \frac{dP_c}{dS_w} n_D. \quad (7.7)$$

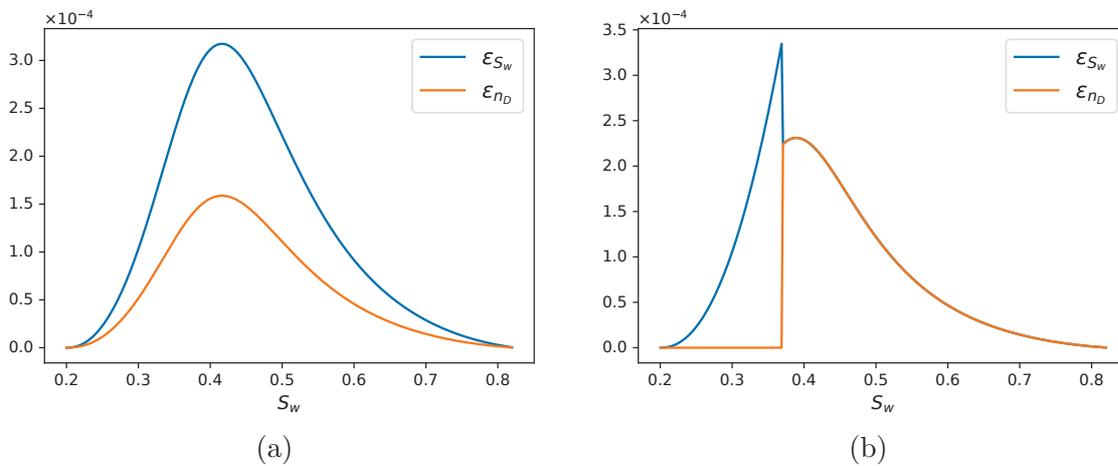
Considerando constantes as funções ε_{S_w} e ε_{n_D} , o sistema (7.6) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f_w}{\partial x} = \varepsilon_{S_w} \frac{\partial^2 S_w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(S_g n_D) + \frac{\partial}{\partial x}(f_g n_D) = \varepsilon_{n_D} \frac{\partial^2 n_D}{\partial x^2} + S_g \Phi, \end{cases} \quad (7.8)$$

onde ε_{S_w} e ε_{n_D} são os coeficientes de difusão nas variáveis S_w e n_D . Para a obtenção destas constantes, observaremos os valores que assumem as funções ε_{S_w} e ε_{n_D} em algumas situações. Esta simplificação foi inspirada em modelagem simplificada de fluxo de componentes e fases [5]. Esta simplificação também pode ser vista como aproximação de erro de segunda ordem de um método de diferenças finitas [100].

A Figura 17 mostra um gráfico de ε_{S_w} e ε_{n_D} em função de S_w para alguns valores de n_D . Com estas funções, podemos compreender melhor o intervalo de valores que os coeficientes constantes ε_{S_w} e ε_{n_D} podem assumir para que fiquem mais próximos do modelo original. Observamos na figura que os maiores coeficientes são da ordem de grandeza de 10^{-4} . Com base nisso, em nossos experimentos, tentamos, sempre que possível, usar valores de ε_{S_w} e ε_{n_D} próximos a esta ordem de grandeza.

Figura 17 – Coeficientes de difusão dados por (7.7) como funções de S_w . (a) $n_D = 0.5$: O valores máximos das funções são $\varepsilon_{S_w} = 3.154 \cdot 10^{-4}$ e $\varepsilon_{n_D} = 1.577 \cdot 10^{-4}$. (b) $n_D = n_D^{LE}$: O valores máximos das funções são $\varepsilon_{S_w} = 3.361 \cdot 10^{-4}$ e $\varepsilon_{n_D} = 2.299 \cdot 10^{-4}$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Assim como feito em [15, 33, 95] e apresentado no Capítulo 4, procuraremos soluções na forma de uma onda viajante para o sistema com difusão simplificada (7.8).

7.3 DIFUSÃO SIMPLIFICADA ($\epsilon = \epsilon_{S_w} = \epsilon_{n_D}$)

Nessa seção, desenvolvemos (7.8) por meio de ondas viajantes, com difusão nas duas equações. Consideraremos coeficientes de difusão iguais, isto é, $\epsilon = \epsilon_{S_w} = \epsilon_{n_D}$. Em seguida, comparamos os resultados analíticos desenvolvidos com experimentos numéricos.

7.3.1 Estudo analítico

Seja, então, a mudança de variáveis $\eta = x - vt$:

$$\begin{cases} -v \frac{dS_w}{d\eta} + \frac{df_w}{d\eta} = \epsilon \frac{d^2 S_w}{d\eta^2}, \\ -v \frac{d}{d\eta}(S_g n_D) + \frac{d}{d\eta}(f_g n_D) = \epsilon \frac{d^2 n_D}{d\eta^2} + S_g \Phi. \end{cases} \quad (7.9)$$

Da primeira equação, temos o invariante:

$$\frac{d}{d\eta} \left(-v S_w + f_w - \epsilon \frac{dS_w}{d\eta} \right) = 0. \quad (7.10)$$

Analogamente ao feito na Seção 4.1, consideraremos aqui uma onda viajante que conecta dois estados de um problema de Riemann, conforme (4.7)-(4.8). Desta forma, aplicando o limite de $\eta \rightarrow \pm\infty$, obtemos, de forma similar:

$$-v S_w + f_w - \epsilon \frac{dS_w}{d\eta} = -v S_w^- + f_w^- = -v S_w^+ + f_w^+, \quad (7.11)$$

$$v = \frac{f_w^+ - f_w^-}{S_w^+ - S_w^-} = v_s. \quad (7.12)$$

Além disso, podemos explicitar a EDO de S_w :

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)}{\epsilon}. \quad (7.13)$$

Aplicando a regra da cadeia na segunda equação de (7.20):

$$-v \frac{dS_g}{d\eta} n_D - v \frac{dn_D}{d\eta} S_g + \frac{df_g}{d\eta} n_D + \frac{dn_D}{d\eta} f_g = \epsilon \frac{d^2 n_D}{d\eta^2} + S_g \Phi. \quad (7.14)$$

Considerando que $S_g = 1 - S_w$, $f_g = 1 - f_w$ e:

$$\frac{d}{d\eta} f_w(S_w, n_D) = \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{dS_w}{d\eta} + \frac{\partial f_w}{\partial n_D} \frac{dn_D}{d\eta},$$

podemos expandir o terceiro termo de (7.14):

$$\left(v - \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \right) \frac{dS_w}{d\eta} n_D + \left(-v S_g + f_g - \frac{\partial f_w}{\partial n_D} n_D \right) \frac{dn_D}{d\eta} = \epsilon \frac{d^2 n_D}{d\eta^2} + S_g \Phi. \quad (7.15)$$

Utilizamos então a relação (7.12) e obtemos a EDO para n_D :

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{\left(\frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v\right) \frac{dS_w}{d\eta} n_D + \epsilon \frac{d^2 n_D}{d\eta^2} + S_g \Phi}{f_g^+ - vS_g^+ - \frac{\partial f_w}{\partial n_D} n_D}. \quad (7.16)$$

A fim de escrever as equações de forma reduzida e de obter um sistema de EDOs de primeira ordem, definimos as seguintes função auxiliares:

$$H(S_w, n_D) = \frac{f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)}{\epsilon}, \quad (7.17)$$

$$M(S_w, n_D) = f_g^+ - vS_g^+ - \frac{\partial f_w}{\partial n_D} n_D \quad \text{e} \quad Z(S_w, n_D) = \frac{dn_D}{d\eta}.$$

Substituindo (7.17) em (7.13) e (7.16), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = H, \\ \frac{dn_D}{d\eta} = Z, \\ \frac{dZ}{d\eta} = \frac{ZM - \left(\frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v\right) H n_D - \Phi}{\epsilon}. \end{cases} \quad (7.18)$$

7.3.2 Experimentos numéricos

Para validar a solução analítica de ondas viajantes obtida em (7.18), a comparamos com a solução numérica de (7.8) com $\epsilon = \epsilon_{S_w} = \epsilon_{n_D}$ para o seguinte problema de Riemann:

$$\begin{cases} S_w^- = 0.372, & S_w^+ = 0.72, \\ n_D^- = 0.664, & n_D^+ = 1. \end{cases} \quad (7.19)$$

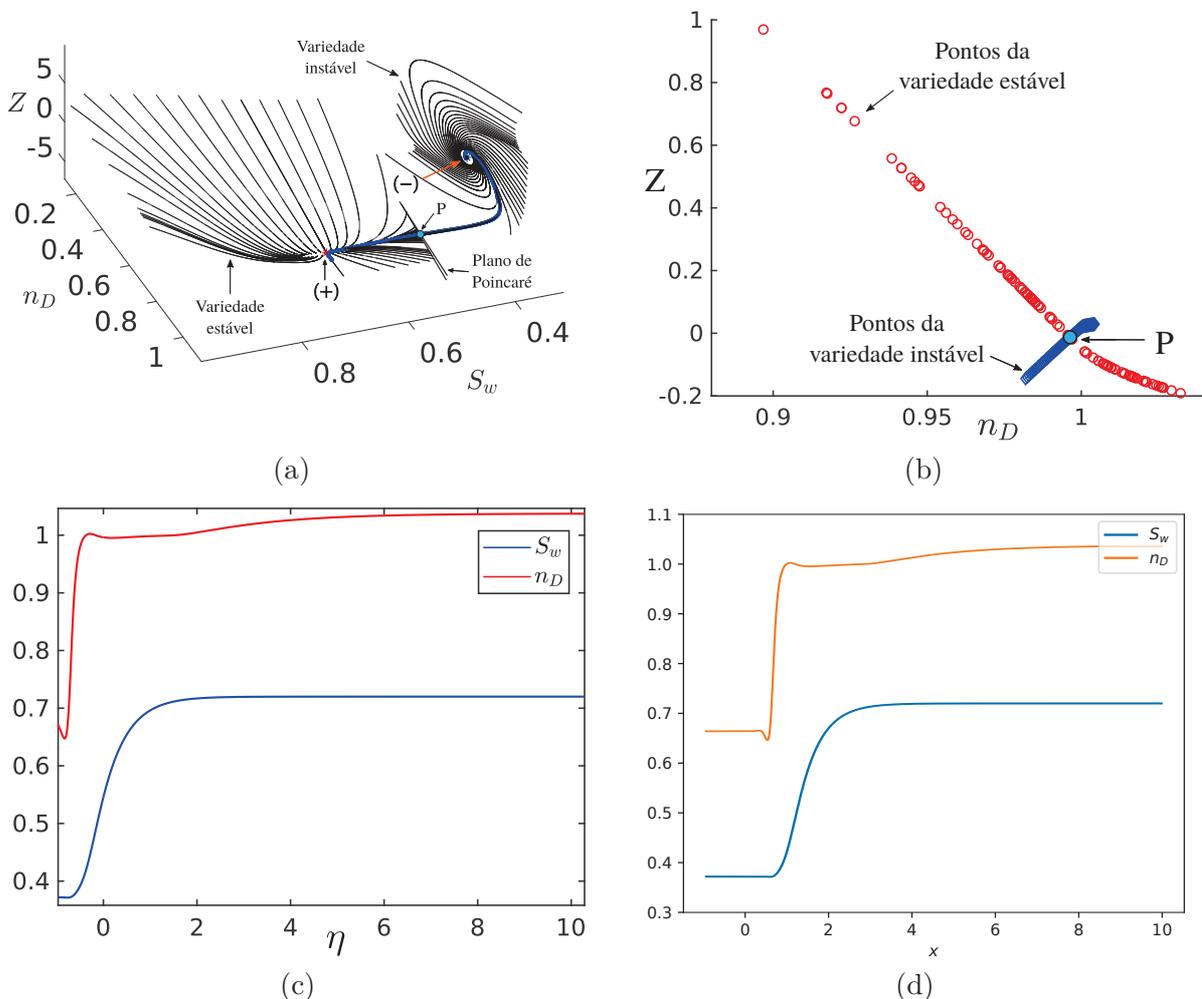
Esse problema representa o que aconteceria em um reservatório inicialmente preenchido com pouco gás, mas com uma espuma forte (+) no qual injetamos uma fração alta de gás, porém com espuma mais fraca (-).

A Figura 18 mostra os resultados analíticos e numéricos obtidos para este problema com $\epsilon = 1$. Desta vez, o espaço de fase da solução da EDO é tridimensional. e a técnica para comprovar a existência da solução é mais rebuscada. No Capítulo 4, utilizamos uma técnica de projeção para reduzir o número de EDOs dos sistemas que encontramos. Encontrar soluções para uma EDP na forma de ondas viajantes é equivalente a buscar órbitas que conectem assintoticamente dois equilíbrios da EDO correspondente [38]. Uma forma de mostrar a existência destas soluções é usar a análise geométrica do espaço de fase. Neste caso, buscaremos numericamente órbitas que conectem dois equilíbrios num espaço de fase tridimensional, definido nas variáveis S_w , n_D e Z (7.18). O método consiste em encontrar um ponto P de interseção entre a variedade estável do equilíbrio à direita (+) e a variedade instável do equilíbrio à esquerda (-) – ver Figura 18(a). Para encontrar

o ponto P , analisamos a interseção das duas variedades supracitadas no plano de Poincaré (transversal ao fluxo da EDO) – ver Figura 18(b). Para maiores informações do método, consulte [101]. Para fundamentação teórica do método, veja [102].

Vemos na Figura 18(c) o perfil da solução do sistema de EDOs (7.18) descrito em função da variável viajante. A Figura 18(d) mostra a simulação numérica do sistema de EDPs (7.8). Observamos que a solução analítico concorda com a simulada, comprovando a existência de ondas viajantes para este modelo.

Figura 18 – Solução para o problema de Riemann (7.19) com $\epsilon = 1$ e $K_c = 0.001$. (a) Órbitas no espaço de fase. (b) Plano de Poincaré de (a); ponto P representa a interseção entre as variedades, indicando a existência de órbita heteroclínica conectando os equilíbrios. (c) Saturação de água e textura da espuma pela posição em coordenadas viajantes. (d) Onda viajante na solução numérica de (7.8).

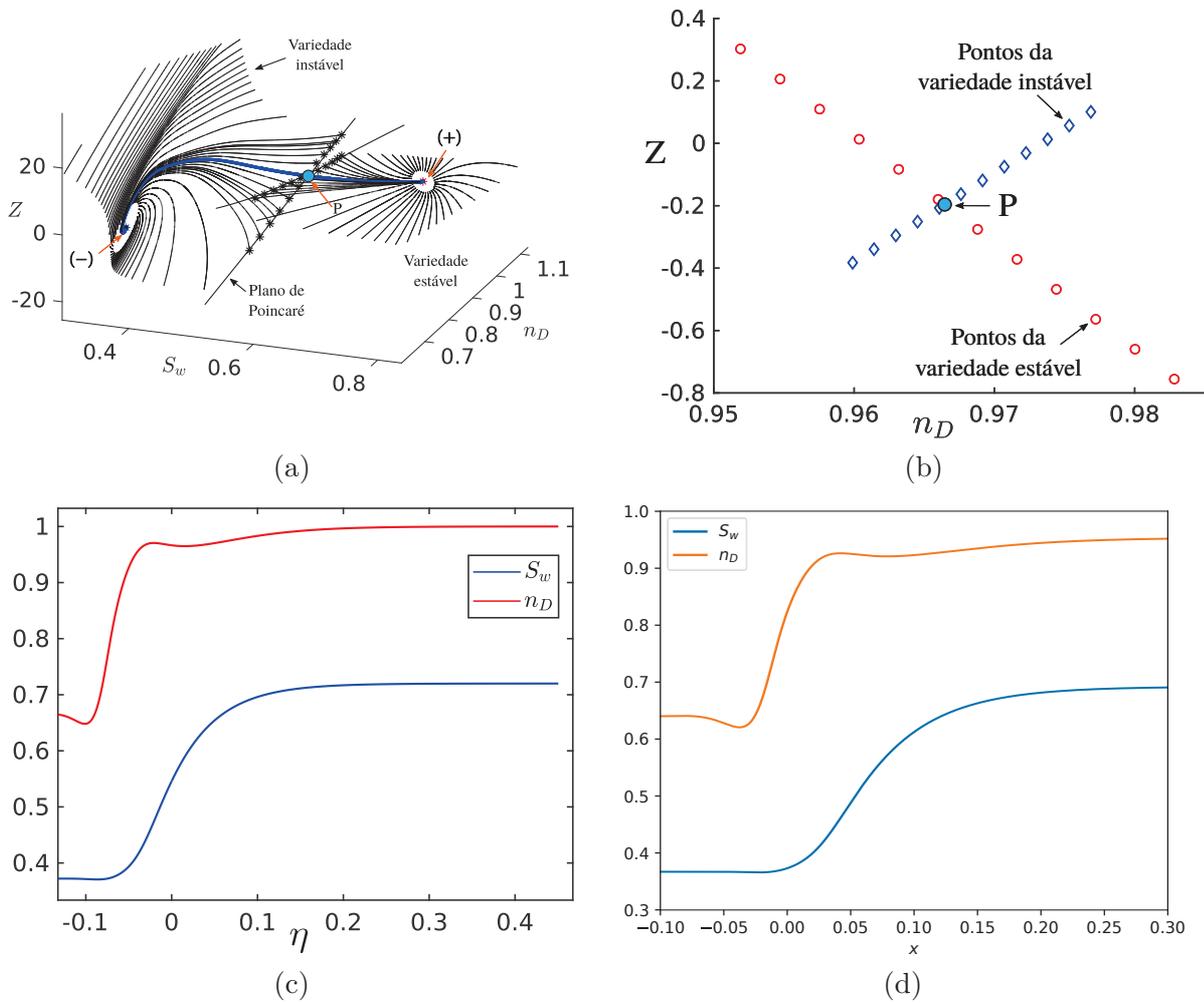


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na Figura 19, mostramos os resultados do mesmo estudo analítico de soluções e comparamos com as simulações numéricas do problema (7.19), utilizando $\epsilon = 0.1$. Estes dois resultados também concordam entre si, evidenciando a existência de ondas viajantes

para este exemplo.

Figura 19 – Solução para o problema de Riemann (7.19) com $\epsilon = 0.1$ e $K_c = 0.001$. (a) Órbitas no espaço de fase. (b) Plano de Poincaré de (a); ponto P representa a interseção entre as variedades, indicando a existência de órbita heteroclínica conectando os equilíbrios. (c) Saturação de água e textura da espuma pela posição em coordenadas viajantes. (d) Onda viajante na solução numérica de (7.8).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

7.4 DIFUSÃO SIMPLIFICADA ($\epsilon = \epsilon_{S_w}, \epsilon_{n_D} = 0$)

Nesta seção, propomos outra forma de simplificar a difusão capilar, como alternativa à forma apresentada na Seção 7.3. Consideramos aqui a difusão constante na equação do balanço da massa de água e desprezada na equação do balanço de espuma. A principal motivação para tal simplificação está no fato de as bolhas serem muito maiores que as moléculas de água ou gás. Portanto, o fenômeno de difusão como o que ocorre em misturas líquidas, não tem o mesmo efeito em espumas na fase gasosa. Poderíamos, então, considerar que a taxa de difusão ϵ_{n_D} da espuma é nula.

7.4.1 Estudo analítico

Nesta seção desenvolvemos de soluções analíticas por ondas viajantes para o modelo cinético sem surfactante com difusão simplificada. O procedimento é bastante semelhante ao executado na Seção 7.3.1, partir do modelo cinético adimensional. Com a mudança de variáveis $\eta = x - vt$ aplicada ao modelo adimensionalizado (7.8) e adotando $\epsilon_{n_D} = 0$ e $\epsilon = \epsilon_{S_w}$, obtemos:

$$\begin{cases} -v \frac{dS_w}{d\eta} + \frac{df_w}{d\eta} = \epsilon \frac{d^2 S_w}{d\eta^2}, \\ -v \frac{d}{d\eta}(S_g n_D) + \frac{d}{d\eta}(f_g n_D) = S_g \Phi. \end{cases} \quad (7.20)$$

A obtenção da EDO explícita para S_w é a mesma da Seção 7.3.1. Portanto:

$$\frac{dS_w}{d\eta} = \frac{f_w - f_w^+ - v(S_w - S_w^+)}{\epsilon}. \quad (7.21)$$

Para n_D é semelhante ao desenvolvido anteriormente, contudo, como $\epsilon_{n_D} = 0$, a EDO resultante é de primeira ordem:

$$\frac{dn_D}{d\eta} = \frac{\left(\frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v\right) \frac{dS_w}{d\eta} n_D + S_g \Phi}{f_g^+ - v S_g^+ - \frac{\partial f_w}{\partial n_D} n_D}. \quad (7.22)$$

Adotando as mesmas funções auxiliares H e M de (7.17), escrevemos o sistema:

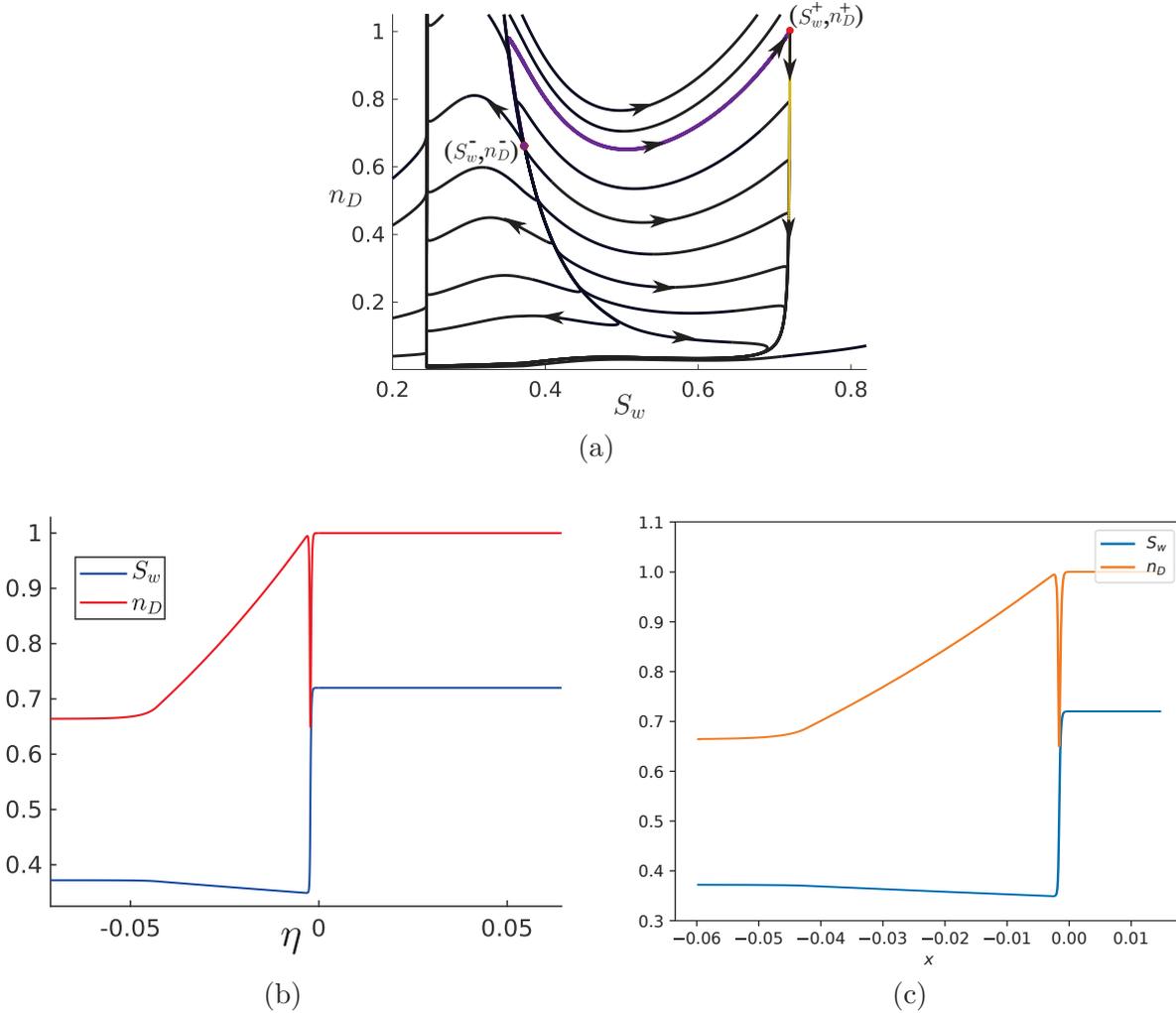
$$\begin{cases} \frac{dS_w}{d\eta} = H, \\ \frac{dn_D}{d\eta} = \frac{\left(\frac{\partial f_w}{\partial S_w} - v\right) H n_D + S_g \Phi}{M}. \end{cases} \quad (7.23)$$

7.4.2 Experimentos numéricos

Os experimentos numéricos deste capítulo buscam soluções de ondas viajantes através de órbitas definidas por (7.23). Neste caso, a obtenção destas órbitas ocorre num espaço de fase bidimensional, com as variáveis S_w e n_D . Adotamos, aqui, o mesmo problema de Riemann dado por (7.19). Nas simulações adotamos o valor de $\epsilon = \epsilon_{S_w}$ com base no estudo que fizemos da magnitude de dos valores da difusão (Seção 7.2). Adotamos, neste exemplo, o valor máximo de ϵ observado no gráfico da Figura 17, ou seja, $\epsilon = 3.361 \cdot 10^{-4}$.

A Figura 20 mostra a solução analítica e numérica deste caso. A Figura 20(a) mostra o espaço de fase do sistema de EDOs (7.23), nele é possível a existência de uma conexão entre os estados $(-)$ e $(+)$. A Figura 20(b) mostra o perfil da solução da EDO na variável viajante η . Na A Figura 20(c) vemos a solução numérica do sistema de EDPs (7.8), em concordância com a solução esperada analiticamente por ondas viajantes.

Figura 20 – Solução para o problema de Riemann (7.19) com $\epsilon = 3.361 \cdot 10^{-4}$ e $K_c = 0.001$. (a) Orbitas no espaço de fase associado a (7.23). (b) Saturação de água e textura da espuma pela posição em ondas viajantes. (c) Onda viajante na solução numérica de (7.8).



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

7.5 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Observamos que, com as duas simplificações que adotamos para a pressão capilar, os resultados obtidos pelo estudo analítico de ondas viajantes coincidem com os resultados obtidos numericamente. Além disso, o resultado da Figura 20 mostra uma queda abrupta na textura da espuma na mesma região em que há o choque da saturação de água.

Este fenômeno é frequentemente referido na literatura como proveniente de erros na aproximação numérica [103, 32]. Contudo, esse efeito também é observado como um resultado físico para modelos de balanço populacional de espuma em equilíbrio local [104, 37].

Com isso, conseguimos obter soluções analíticas para o modelo cinético de primeira

ordem com simplificação da capilaridade. Todavia, mesmo com estas simplificações, os resultados se mostram coerentes e fisicamente relevantes no estudo do escoamento de espumas.

8 CONCLUSÕES

Propomos um estudo de um modelo cinético de primeira ordem que considera a concentração de surfactante variável e efeitos capilares. Verificamos que a solução obtida pelo estudo analítico deste modelo, desconsiderando a pressão capilar, apresenta um comportamento diferente do que é observado numericamente. Além disso, a solução analítica também apresentou propriedades não físicas. Essa divergência poderia ser tanto devido ao método numérico empregado, quanto à técnica de redução do sistema de EDOs. Isso nos motivou a buscar por possíveis simplificações no modelo, sem desconsiderar completamente os efeitos da capilaridade.

Como o método numérico já havia sido validado para um modelo sem surfactante, desconsideramos a concentração de surfactante nesta segunda análise. Ao fazer isso, o sistema de EDOs resultante para ondas viajantes torna-se mais simples, possibilitando a análise das soluções no espaço de fase do sistema inteiro. Assim, evitamos o uso da técnica de redução que pode ter resultado em falhas no estudo com surfactante. Desta forma, eliminamos duas possíveis causas dos erros identificadas na primeira etapa.

Propusemos então, analisar o comportamento de um modelo mais simples, no qual a concentração de surfactante é desconsiderada, e a pressão capilar é simplificada de duas formas diferentes, com coeficientes de difusão constantes. Ambas as simplificações resultaram em soluções analíticas condizentes com os experimentos numéricos. Além disso, as soluções analíticas apresentaram perfis da textura de espuma, refletindo resultados físicos relatados na literatura.

REFERÊNCIAS

- 1 DATAPHYSICS INSTRUMENTS. *Surfactants & critical micelle concentration (CMC)*. Disponível em: <<https://www.dataphysics-instruments.com/knowledge/understanding-in-terfaces/surfactants-cmc>>. Acesso em: 25 ago. 2020.
- 2 HEMATPUR, H.; MAHMOOD, S. M.; NASR, N. H.; ELRAIES, K. A. Foam flow in porous media: Concepts, models and challenges. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, v. 53, p. 163–180, 2018. ISSN 1875-5100.
- 3 DHOLKAWALA, Z. F.; SARMA, H. K.; KAM, S. I. Application of fractional flow theory to foams in porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 57, n. 1-2, p. 152–165, 2007.
- 4 LAKE, L. W. *Enhanced oil recovery*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1989.
- 5 CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. Philadelphia, PA: SIAM, 2006. v. 2.
- 6 CHAPIRO, G.; MAILYBAEV, A. A.; SOUZA, A.; MARCHESIN, D.; BRUINING, J. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational Geosciences*, v. 16, p. 799–808, 2012.
- 7 CHAPIRO, G.; BRUINING, J. Combustion enhance recovery of shale gas. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 127, p. 179–189, 2015.
- 8 ABERNETHY, E. R. Production increase of heavy oils by electromagnetic heating. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Petroleum Society of Canada, v. 15, n. 03, 1976.
- 9 PAZ, P. Z. S.; HOLLMANN, T. H.; KERMEN, E.; CHAPIRO, G.; SLOB, E.; ZITHA, P. L. J. Em heating-stimulated water flooding for medium–heavy oil recovery. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 119, n. 1, p. 57–75, 2017.
- 10 WILLMAN, B.; VALLEROY, V. V.; RUNBERG, G. W.; CORNELIUS, A. J.; POWERS, L. W. Laboratory studies of oil recovery by steam injection. *Journal of Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 13, n. 07, p. 681–690, 1961.
- 11 WILLHITE, G. P. Over-all heat transfer coefficients in steam and hot water injection wells. *Journal of Petroleum technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 19, n. 05, p. 607–615, 1967.
- 12 KOVSCEK, A. R.; RADKE, C. J. Fundamentals of foam transport in porous media. In: SCHRAMM, L. L. (Org.). *Foams: Fundamentals and applications in the petroleum industry*. Washington, D.C.: ACS Publications, 1994. cap. 3, p. 115–163.
- 13 ZITHA, P. L. J.; NGUYEN, Q. P.; CURRIE, P. K.; BUIJSE, M. A. Coupling of foam drainage and viscous fingering in porous media revealed by x-ray computed tomography. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 64, n. 3, p. 301–313, 2006.
- 14 KAM, S. I. Improved mechanistic foam simulation with foam catastrophe theory. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, v. 318, n. 1, p. 62–77, 2008. ISSN 0927-7757.

- 15 ASHOORI, E.; MARCHESIN, D.; ROSSEN, W. Roles of transient and local equilibrium foam behavior in porous media: Traveling wave. *Colloids and Surfaces A: Physico-chemical and Engineering Aspects*, v. 377, n. 1, p. 228–242, 2011.
- 16 THORAT, R.; BRUINING, H. Foam flow experiments. I. Estimation of the bubble generation-coalescence function. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 112, n. 1, p. 53–76, 2016.
- 17 AGÊNCIA NACIONAL DO PETRÓLEO. *Estudo sobre Aproveitamento do Gás Natural do Pré-Sal*. Disponível em: <<http://www.anp.gov.br/arquivos/estudos/aproveitamento-gn-pre-sal.pdf>>. Acesso em: 25 set. 2020.
- 18 MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. *Acordo de Paris*. Disponível em: <<https://www.mma.gov.br/clima/convencao-das-nacoes-unidas/acordo-de-paris>>. Acesso em: 25 set. 2020.
- 19 EUROPEAN COMMISSION. *Paris Agreement*. Disponível em: <https://ec.europa.eu/clima/policies/international/negotiations/paris_en>. Acesso em: 25 set. 2020.
- 20 MA, K.; REN, G.; MATEEN, K.; MOREL, D.; CORDELIER, P. Modeling techniques for foam flow in porous media. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 20, n. 03, p. 453–470, 2015.
- 21 ROSSEN, W. R. Foams in enhanced oil recovery. *Foams: theory, measurements and applications*, Marcel Dekker: New York, v. 57, p. 413–464, 1996.
- 22 HIRASAKI, G. J.; MILLER, C. A.; SZAFRANSKI, R.; LAWSON, J. B.; AKIYA, N. Surfactant/foam process for aquifer remediation. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON OILFIELD CHEMISTRY, 14., 1997, Houston, TX. *Conference Proceedings*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers. p. 471–480.
- 23 WANG, S.; MULLIGAN, C. N. An evaluation of surfactant foam technology in remediation of contaminated soil. *Chemosphere*, Elsevier, v. 57, n. 9, p. 1079–1089, 2004.
- 24 SIMJOO, M.; ZITHA, P. L. J. Modeling of foam flow using stochastic bubble population model and experimental validation. *Transport in Porous Media*, v. 107, n. 3, p. 799–820, 2015.
- 25 COLIN, A.; Giermanska-Kahn, J.; LANGEVIN, D.; DESBAT, B. Foaming properties of modified ethoxylated nonionic surfactants. *Langmuir*, ACS Publications, v. 13, n. 11, p. 2953–2959, 1997.
- 26 HIRASAKI, G. J.; LAWSON, J. B. Mechanisms of foam flow in porous media: apparent viscosity in smooth capillaries. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 25, n. 02, p. 176–190, 1985.
- 27 KOVSCEK, A.; CHEN, Q.; GERRITSEN, M. Modeling foam displacement with the local-equilibrium approximation: theory and experimental verification. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 15, n. 01, p. 171–183, 2010.
- 28 BRETHERTON, F. P. The motion of long bubbles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 10, n. 2, p. 166–188, 1961.

- 29 WONG, H.; RADKE, C. J.; MORRIS, S. The motion of long bubbles in polygonal capillaries. part 2. drag, fluid pressure and fluid flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 292, p. 95–110, 1995.
- 30 ISLAM, M. R.; ALI, S. M. Numerical simulation of foam flow in porous media. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 29, n. 4, p. 47–51, 1990.
- 31 AFSHARPOOR, A.; LEE, G. S.; KAM, S. I. Mechanistic simulation of continuous gas injection period during surfactant-alternating-gas (SAG) processes using foam catastrophe theory. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 65, n. 11, p. 3615–3631, 2010.
- 32 FARAJZADEH, R.; EFTEKHARI, A. A.; HAJIBEYGI, H.; KAHROBAEI, S.; MEER, J. M. Van der; VINCENT-BONNIEU, S.; ROSSEN, W. R. Simulation of instabilities and fingering in surfactant alternating gas (SAG) foam enhanced oil recovery. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, Elsevier, v. 34, p. 1191–1204, 2016.
- 33 ASHOORI, E.; MARCHESIN, D.; ROSSEN, W. Dynamic foam behavior in the entrance region of a porous medium. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, v. 377, n. 1, p. 217–227, 2011.
- 34 SIMJOO, M.; DONG, Y.; ANDRIANOV, A.; TALANANA, M.; ZITHA, P. L. Novel insight into foam mobility control. *SPE Journal*, OnePetro, v. 18, n. 3, p. 416–427, 2013.
- 35 JANSSEN, M. T. G.; PILUS, R. M.; ZITHA, P. L. J. A comparative study of gas flooding and foam-assisted chemical flooding in bentheimer sandstones. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 131, n. 1, p. 101–134, 2020.
- 36 JANSSEN, M. T. G.; MENDEZ, F. A. T.; ZITHA, P. L. J. Mechanistic modeling of water-alternating-gas injection and foam-assisted chemical flooding for enhanced oil recovery. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, ACS Publications, v. 59, n. 8, p. 3606–3616, 2020.
- 37 KOVSCEK, A. R.; PATZEK, T. W.; RADKE, C. J. A mechanistic population balance model for transient and steady-state foam flow in boise sandstone. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 50, n. 23, p. 3783–3799, 1995.
- 38 VOLPERT, A. I.; VOLPERT, V. A.; VOLPERT, V. A. *Traveling wave solutions of parabolic systems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994. v. 140.
- 39 DAKE, L. P. *Fundamentals of reservoir engineering*. Amsterdam, Nederland: Elsevier, 1983.
- 40 BROOKS, R. H.; COREY, A. T. Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, ASCE, v. 92, n. 2, p. 61–90, 1966.
- 41 GENUCHTEN, M. T. van. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Science Society of America Journal*, v. 44, n. 5, p. 892–898, 1980.
- 42 HASSANIZADEH, S. M.; GRAY, W. G. Toward an improved description of the physics of two-phase flow. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 16, n. 1, p. 53–67, 1993.

- 43 ABREU, E.; VIEIRA, J. Computing numerical solutions of the pseudo-parabolic buckley–leverett equation with dynamic capillary pressure. *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, v. 137, p. 29–48, 2017.
- 44 ABREU, E. Numerical modelling of three-phase immiscible flow in heterogeneous porous media with gravitational effects. *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, v. 97, p. 234–259, 2014.
- 45 ABREU, E.; BUSTOS, A.; FERRAZ, P.; LAMBERT, W. A relaxation projection analytical–numerical approach in hysteretic two-phase flows in porous media. *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 79, n. 3, p. 1936–1980, 2019.
- 46 HASSANIZADEH, S. M.; GRAY, W. G. Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 29, n. 10, p. 3389–3405, 1993.
- 47 MITRA, K.; KÖPPL, T.; POP, I.; DUIJN, C. van; HELMIG, R. Fronts in two-phase porous media flow problems: The effects of hysteresis and dynamic capillarity. *Studies in Applied Mathematics*, Wiley Online Library, v. 144, n. 4, p. 449–492, 2020.
- 48 REYNOLDS, C. A.; BLUNT, M. J.; KREVOR, S. Multiphase flow characteristics of heterogeneous rocks from co 2 storage reservoirs in the united kingdom. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 54, n. 2, p. 729–745, 2018.
- 49 MOHAMMAD, R. S.; TAREEN, M. Y. K.; MENGEL, A.; SHAH, S. A. R.; IQBAL, J. Simulation study of relative permeability and the dynamic capillarity of waterflooding in tight oil reservoirs. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, Springer, p. 1–6, 2020.
- 50 CANCÈS, C.; PIERRE, M. An existence result for multidimensional immiscible two-phase flows with discontinuous capillary pressure field. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, SIAM, v. 44, n. 2, p. 966–992, 2012.
- 51 KHODAYARI-SAMGHABADI, S.; MOMENI-MASULEH, S. H. Implicit-modal discontinuous galerkin scheme for two-phase flow with discontinuous capillary pressure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 40, n. 4, p. B1131–B1160, 2018.
- 52 BASTIAN, P. A fully-coupled discontinuous galerkin method for two-phase flow in porous media with discontinuous capillary pressure. *Computational Geosciences*, Springer, v. 18, n. 5, p. 779–796, 2014.
- 53 DUIJN, C. V.; NEEF, M. D. Similarity solution for capillary redistribution of two phases in a porous medium with a single discontinuity. *Advances in water resources*, Elsevier, v. 21, n. 6, p. 451–461, 1998.
- 54 ZITHA, P. L. J. A new stochastic bubble population model for foam in porous media. In: SPE/DOE SYMPOSIUM ON IMPROVED OIL RECOVERY, 20., 2006, Tulsa, OK. *Conference Proceedings*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers.
- 55 CEDRO, J. B.; QUISPE, R. V.; COAQUIRA, M. C.; LOZANO, L. F.; CHAPIRO, G. Estudo de um modelo cinético para escoamento de espuma em meios porosos. In: IBERO-LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 40., 2019, Natal, RN. *Proceedings of the Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Natal, RN. v. 1. ISSN 2675-6269.

- 56 LOZANO, L. F.; CHAPIRO, G.; ZAVALA, R. Q.; CEDRO, J. B. Analysis of foam flow model without capillary effects. A ser submetido em 2020.
- 57 BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. *Transactions of the AIME*, Society of Petroleum Engineers, v. 146, 1942.
- 58 COLLINS, R. E. Flow of fluids through porous materials. Petroleum Publishing, Tulsa, OK, 1976.
- 59 ROSSEN, W. R.; ZHOU, Z. H. Modeling foam mobility at the limiting capillary pressure. *SPE Advanced Technology Series*, v. 3, n. 1, p. 146–153, 1995.
- 60 ZHOU, Z.; ROSSEN, W. R. Applying fractional-flow theory to foam processes at the “limiting capillary pressure”. *SPE Advanced Technology Series*, Society of Petroleum Engineers, v. 3, n. 01, p. 154–162, 1995.
- 61 ROSSEN, W. R.; ZEILINGER, S. C.; SHI, J. X.; LIM, M. T. Simplified mechanistic simulation of foam processes in porous media. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 4, n. 03, p. 279–287, 1999.
- 62 BEAR, J. *Modeling phenomena of flow and transport in porous media*. Nederland: Springer, 2018. v. 31.
- 63 MUALEM, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources research*, Wiley Online Library, v. 12, n. 3, p. 513–522, 1976.
- 64 LOMELAND, F.; EBELTOFT, E.; THOMAS, W. H. A new versatile relative permeability correlation. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF THE SOCIETY OF CORE ANALYSTS. *Proceedings of the International Symposium of the Society of Core Analysts*. Toronto, ON: CiteSeerX, 2005.
- 65 CHIERICI, G. L. Novel relations for drainage and imbibition relative permeabilities. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 24, n. 3, 1984.
- 66 DARCY, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Paris: Victor Dalmont, 1856.
- 67 MUSKAT, M.; MERES, M. W. The flow of heterogeneous fluids through porous media. *Physics*, American Institute of Physics, v. 7, n. 9, p. 346–363, 1936.
- 68 LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).
- 69 WIKIPEDIA. *Surface tension*. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary_pressure>. Acesso em: 25 set. 2020.
- 70 CASSIE, A. B. D.; BAXTER, S. Wettability of porous surfaces. *Transactions of the Faraday society*, Royal Society of Chemistry, v. 40, p. 546–551, 1944.
- 71 HIRASAKI, G. J. Wettability: fundamentals and surface forces. *SPE Formation Evaluation*, Society of Petroleum Engineers, v. 6, n. 2, p. 217–226, 1991.
- 72 BARENBLATT, G. I.; ENTOV, V. M.; RYZHIK, V. M. Theory of fluid flows through natural rocks. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1989.

- 73 HIRASAKI, G. J. *A Review of the Steam Foam Process Mechanisms*. 1989. Society of Petroleum Engineers. SPE 19518.
- 74 BIKERMAN, J. J. *Foams*. New York: Springer-Verlag, 1973. (Applied Physics and Engineering, v. 10).
- 75 HEMATPOUR, H.; MAHMOOD, S.; AKBARI, S.; ASL, A. Foam modeling approaches in enhanced oil recovery: A review. *Indian Journal of Science and Technology*, v. 7, n. 22, p. 1–8, 2016.
- 76 WANG, C.; LI, H. A. Stability and mobility of foam generated by gas-solvent/surfactant mixtures under reservoir conditions. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, Elsevier, v. 34, p. 366–375, 2016.
- 77 EVANS, D. F.; WENNERSTRÖM, H. *The Colloidal Domain: Where physics, chemistry, biology, and technology meet*. USA: Wiley-VCH, 1999. (Advances in Interfacial Engineering).
- 78 BARROS, F. F. C.; QUADROS, C. P.; JÚNIOR, M. R. M.; PASTORE, G. M. Surfactina: propriedades químicas, tecnológicas e funcionais para aplicações em alimentos. *Química Nova*, SciELO Brasil, v. 30, n. 2, p. 409–414, 2007.
- 79 MA, K.; REN, G.; MATEEN, K.; MOREL, D.; CORDELIER, P. Literature review of modeling techniques for foam flow through porous media. In: SPE IMPROVED OIL RECOVERY SYMPOSIUM, 2014, Tulsa, OK. *Conference Proceedings*. Tulsa, OK: OnePetro, 2014.
- 80 FEJOLI, R. F.; ROMERO, O. J. Modelagem computacional da injeção de espumas em reservatórios de petróleo. *Latin American Journal of Energy Research*, v. 1, n. 1, p. 1–9, 2014.
- 81 FARAJZADEH, R.; ANDRIANOV, A.; KRASSTEV, R.; HIRASAKI, G.; ROSSEN, W. R. Foam–oil interaction in porous media: implications for foam assisted enhanced oil recovery. *Advances in colloid and interface science*, Elsevier, v. 183, p. 1–13, 2012.
- 82 KILE, D. E.; CHIOU, C. T. Water solubility enhancements of DDT and trichlorobenzene by some surfactants below and above the critical micelle concentration. *Environmental Science & Technology*, ACS Publications, v. 23, n. 7, p. 832–838, 1989.
- 83 ZHANG, Z. F.; FREEDMAN, V. L.; ZHONG, L. *Foam Transport in Porous Media – A Review*. Richland, WA, 2009.
- 84 LIONTAS, R.; MA, K.; HIRASAKI, G. J.; BISWAL, S. L. Neighbor-induced bubble pinch-off: novel mechanisms of in situ foam generation in microfluidic channels. *Soft Matter*, Royal Society of Chemistry, v. 9, n. 46, p. 10971–10984, 2013.
- 85 KHATIB, Z. I.; HIRASAKI, G. J.; FALLS, A. H. Effects of capillary pressure on coalescence and phase mobilities in foams flowing through porous media. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 3, n. 03, p. 919–926, 1988.
- 86 COAQUIRA, M. C. *Estudo teórico de injeção de espuma em meios porosos*. 72 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.

- 87 TROGUS, F. J.; SOPHANY, T.; SCHECHTER, R. S.; WADE, W. H. Mobility of foam in heterogeneous media: Flow parallel and perpendicular to stratification. *SPE Journal*, v. 7, p. 203–212, 2002.
- 88 ZITHA, P. L. J.; DU, D. X. A new stochastic bubble population model for foam flow in porous media. *Transport in Porous Media*, v. 83, n. 3, p. 603–621, 2010.
- 89 FALLS, A. H.; MUSTERS, J. J.; RATULOWSKI, J. The apparent viscosity of foams in homogeneous bead packs. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 4, n. 02, p. 155–164, 1989.
- 90 SIMJOO, M.; ZITHA, P. L. J. Modeling and experimental validation of rheological transition during foam flow in porous media. *Transport in Porous Media*, Springer, v. 131, n. 1, p. 315–332, 2020.
- 91 PERSOFF, P.; RADKE, C. J.; PRUESS, K.; BENSON, S. M.; WITHERSPOON, P. A. A laboratory investigation of foam flow in sandstone at elevated pressure. *SPE Reservoir Engineering*, OnePetro, v. 6, n. 03, p. 365–372, 1991.
- 92 LEVERETT, M. C. Capillary behavior in porous solids. *Transactions of the AIME*, Society of Petroleum Engineers, v. 142, n. 01, p. 152–169, 1941.
- 93 ROSSEN, W. R.; BRUINING, J. Foam displacements with multiple steady states. *SPE Journal*, v. 12, n. 1, p. 5–18, 2007.
- 94 BRUINING, J.; DUIJN, C. V. Uniqueness conditions in a hyperbolic model for oil recovery by steamdrive. *Computational Geosciences*, Springer, v. 4, n. 1, p. 65–98, 2000.
- 95 LOZANO, L. F.; ZAVALA, R. Q.; CHAPIRO, G. Mathematical properties of the foam flow in porous media. *Computational Geosciences*, Springer, v. 25, n. 1, p. 515–527, 2021. ISSN 1420-0597.
- 96 LAMBERT, W.; ALVAREZ, A.; LEDOINO, I.; TADEU, D.; MARCHESIN, D.; BRUINING, J. Mathematics and numerics for balance partial differential-algebraic equations (PDAEs). *Journal of Scientific Computing*, Springer, v. 84, n. 2, p. 1–56, 2020.
- 97 CRANK, J.; NICOLSON, P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, v. 43, n. 1, p. 50–67, 1947.
- 98 NEWTON, I. *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. London, UK: Ex officina Pearsoniana, 1711. 1-22 p.
- 99 RAPHSON, J. *Analyfis æquationum universalis: seu ad æquationes algebraicas refovendas methodus generalis, & expedita, ex nova infinitarum serierum methodo, deducta ac demonstrata*. London, UK: Typis T. B. prostant venales apud A. & I. Churchill, 1702. v. 1.
- 100 MORTON, K. W.; MAYERS, D. F. *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- 101 YAMASHITA, W. M. S.; TAKAHASHI, L. T.; CHAPIRO, G. Traveling wave solutions for the dispersive models describing population dynamics of aedes aegypti. *Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, v. 146, p. 90–99, 2018.

102 SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

103 ROSSEN, W. R. Numerical challenges in foam simulation: a review. In: SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION. *Conference Proceedings*. New Orleans, LA, 2013.

104 KAM, S. I.; NGUYEN, Q. P.; LI, Q.; ROSSEN, W. R. Dynamic simulations with an improved model for foam generation. *SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 12, n. 1, p. 35–48, 2007.