UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

Luciano José Clarimundo

Introduzindo a ideia de séries numéricas nos ensinos fundamental e médio

Juiz de Fora
2020

Luciano José Clarimundo

Introduzindo a ideia de séries numéricas nos ensinos fundamental e médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Clarimundo, Luciano José.
Introduzindo a ideia de séries numéricas nos ensinos fundamental e médio / Luciano José Clarimundo. – 2020.
95 f. : il.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2020.

1. Séries Numéricas. 2. Convergência. 3. Divergência. 4. Geometrizar. 5. Infinito. I. Mazorche, Sandro Rodrigues, orient. II. Título.

Luciano José Clarimundo

Introduzindo a ideia de séries numéricas nos ensinos fundamental e médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 31 de agosto de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr Sandro Rodrigues Mazorche - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Universidade Federal de São João Del Rei

Professora Dra. Valeria Mattos da Rosa
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho aos meus pais: Domingos Lucindo Clarimundo e Terezinha da Silva Clarimundo. Este sonho cemeçou a ser realizado no dia em que vocês me levaram à uma escola pela primeira vez. E à Marta, por estar sempre por perto quando o sonho foi virando realidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me proporcionar a oportunidade de poder estar realizando este trabalho, depois de tanto tempo após a conclusão da graduação no curso de Matemática Licenciatura, da UFJF.

Aos meus pais, seu Domingos e dona Terezinha, por serem meus maiores exemplos e apoio necessários nos momentos em que mais precisei.

À minha companheira de anos, Maria Marta, por ser a pessoa que mais viu este trabalho nascer e crescer. Obrigado por toda paciência, incentivo e confiança de que tudo daria certo.

Aos meus irmãos, primos e amigos, pela torcida para que tudo desse certo.

Aos alunos que tive e aos que tenho nesses 20 e poucos anos de magistério, a cada aula aprendo um pouco mais com cada um de vocês.

Aos professores do PROFMAT, deixo minha gratidão.

Aos colegas de mestrado que me ajudaram nesta jornada, com exemplos de força, incentivo, ensinamento, companheirismo, perseverança e determinação. Foram 2 anos de felicidades. Começamos e terminamos juntos: Bianca, Carol, Felipe, Isabella, Lima, Miler, Roberth, Rosilene, Thales e Viviane, mestres e amigos para vida toda.

À Universidade Federal de Juiz de Fora, por me proporcionar a chance de obter mais uma formação e à Prefeitura Municipal de Juiz de Fora, pelo tempo que me disponibilizou para estudar.

E deixo um agradecimento especial ao meu orientador, professor doutor Sandro Mazorche, pelas ideias, pelo tempo disponibilizado, por acreditar que eu poderia desenvolver este trabalho.

A todos, muito obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Cantar e cantar e cantar a beleza de ser um eterno aprendiz”
(GONZAGUINHA, 1982).

RESUMO

Este trabalho apresenta algumas ideias de problemas e atividades que possam estar ajudando aos professores de Ensinos Fundamental e Médio a introduzirem conceitos e teorias de Séries Numéricas, bem como as ideias de convergência, divergência e a percepção do infinito. Através de construções simples de retângulos, dos cálculos de suas áreas e perímetros, mostramos como podemos efetuar determinados cálculos sem ter que entrar nas formalidades das definições e fórmulas. Apresentamos também noções básicas de séries definidas por somatórios, construções geométricas simples que sugerem a ideia de convergência e, de maneira bem suave, mostramos a divergência da Série Harmônica. No final mostramos algumas atividades que podem estar complementando essas ideias, atividades que são contextualizações do cotidiano e outras em que são usados conceitos básicos do estudo de Matemática, como Potenciação, Radiciação, Áreas e Perímetros da Circunferência e Teorema de Pitágoras. No Ensino Fundamental as atividades que envolvem séries finitas e as que mostram convergência podem ser aplicadas como complementação e enriquecimento dos conteúdos estudados. No Ensino Médio o trabalho pode ser usado para extrair exemplos de introdução aos estudos de Sequências e Séries Numéricas, Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

Palavras-chave: Séries Numéricas. Convergência. Divergência. Geometrizar. Infinito.

ABSTRACT

This work presents some ideas of problems and activities that may be help elementary and high school teachers to exhibit concepts and theories of numerical series, as well as ideas of convergence, divergence and perception of the infinite. Through simple constructions of rectangles, calculations of their areas and periods, we show how we can make calculations without having to get into the formalities of definitions and formulas. We also present the basics of series applied by summation, simple geometric constructions that suggest an convergence idea and, in a very smooth way, showing the divergence of the Harmonic series. In the end we show some activities that may be complement these ideas, activities that are daily contextualizations and others that are used basic concepts of the study of Mathematics, such as Potentiation, Radiciation, Areas and Circumference Perimeters and Pythagorean Theorem. In Elementary Education activities that involve finite grades and show convergence can be applied as a complement and improvement of content studied. In high school, this work can be used to extract introduction examples studies of Sequences and Numerical Series, Arithmetic Progression and Progression Geometric.

Keywords: Numerical Series. Convergence. Divergence. Geometrize. Infinite.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
PIM	Princípio de Indução Matemática

LISTA DE SÍMBOLOS

$\cong$	Aproximado
$\subset$	Contido
$\Leftrightarrow$	Equivalente
$\Rightarrow$	Implica
∞	Infinito
$\in$	Pertence
$\sum$	Somatório

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em matemática usamos o termo série para designar a soma, ou somatório, de todos os termos de uma sequência. Existem séries de finitos termos (quando se é possível contar todos os termos da sequência que gera a série, por maior que seja a quantidade desses termos), e existem séries de infinitos termos (quando, de acordo com a definição da sequência que gera a série, fica impossível contar todos os seus termos). O estudo de séries matemáticas nos leva à ideia de abstração, percepção de fórmulas e padrões que se generalizam ao logo de observações e experimentos, nos dando noções intuitivas de indução matemática e nos propiciando fórmulas.

Inserir conceitos e exemplos de séries no Ensino Fundamental é importante para facilitar a introdução de futuros estudos de sequências e limites, no Ensino Médio e Superior, respectivamente. Somar infinitos termos e encontrar um resultado fixo (um número real qualquer) é algo intrigante. Mostrar a fórmula da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica sem exemplificar situações problemas antes pode não ser o melhor caminho para a aprendizagem do aluno. Daí me veio a ideia de apresentar um estudo que possa ser utilizado por professores, do Ensino Fundamental e Médio, introduzindo conceitos de séries, noções de convergência e divergência e a exploração inicial de fórmulas, procurando sempre aproveitar conceitos geométricos e teorias de matemática já conhecidos pelos alunos.

A teoria de série numérica é estudada apenas no Ensino Médio, dentro do conceito de Sequências, nos tópicos Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). No Ensino Fundamental não é abordado o assunto, os livros didáticos não trazem problemas que podem sugerir a noção de somas sucessivas, muito menos de somas de infinitos termos. Assim, conceitos de convergência ou divergência não são percebidos. Aliás, somente no Ensino Médio, quando estudam a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, com $-1 < q < 1$, é que os alunos são apresentados à ideia de que é possível somar intermináveis termos e nunca ultrapassar um determinado número real.

O nosso trabalho se baseia em apresentar alternativas para a introdução dos conceitos de séries numéricas, ainda no Ensino Fundamental, aproveitando conteúdos já estudados, como áreas e perímetros de figuras planas, operações entre frações, potenciação, radiciação, razão e proporção e Teorema de Pitágoras, mostrando ideias de construções geométricas que levam às percepções de fórmulas básicas de somas finitas, infinitas, convergentes ou divergentes. Apresentamos também o conceito de somatório, que não é inserido no Ensino Médio, mas que pode ser explorado em casos específicos e não complexos.

No capítulo 2 damos uma noção básica do conceito de somatório, que usamos neste trabalho, falamos da importância de se usar o símbolo $\sum$ (somatório) para facilitar e abreviar escritas, e exemplificamos alguns casos. Depois tratamos de conceitos teóricos que envolvem as séries numéricas estudadas no Ensino Médio, já que elas são fundamentadas nas Progressões Aritméticas e Geométricas (PA e PG). Definimos PA e PG, deduzimos os termos gerais e daí implicamos nas fórmulas das somas dos termos da PA finita, da PG finita e da PG infinita de razão entre -1 e 1.

Também no capítulo 2 citamos o conceito de Princípio de Indução Matemática (PIM), um tópico mais voltado para o professor (já que poucos livros de Ensino Médio abordam este assunto), para que possamos mostrar a validação dos termos gerais da PA e da PG para todos os números naturais. Depois, para provar que a soma dos cubos dos números naturais consecutivos é igual ao quadrado da soma dos números naturais consecutivos, usamos o PIM novamente.

No capítulo 3 começamos a mostrar as séries através de construções geométricas. O conceito de área de retângulo, praticamente conhecido por todos alunos dos Ensino Fundamental e Médio, está muito inserido neste capítulo, sendo base da construção dos métodos que levam às expressões que facilitam cálculos de séries formadas por números naturais consecutivos, números ímpares consecutivos ou números pares consecutivos. E também é base na construção de séries cujos termos são números que formam progressões geométricas. Fechamos este capítulo com uma expressão que facilita a soma de cubos de números naturais consecutivos.

De acordo com orientações e diretrizes determinadas no documento que regulamenta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (1), a Matemática:

> Precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 221).

Procurando seguir essa orientação, no capítulo 4 buscamos, através de construções geométricas, mostrar a convergência de séries conhecidas, de infinitos termos, no intuito de construir expressões matemáticas que facilitem o cálculo de uma soma ou mostre a convergência da série.

Ainda no capítulo 4 mostramos exemplos de séries desenvolvidas através do conceito de somatório, mostrando a ideia de somas infinitas e explorando conceitos básicos do estudo de frações. A ideia foi transformar uma série qualquer em uma soma de várias outras séries, já conhecidas, como uma PG. Fechamos esse capítulo mostrando a famosa Série Harmônica, um exemplo clássico de divergência que dificilmente é mencionado nos livros de ensinos básicos de Matemática.

O conceito de números na BNCC (2):

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática.

> Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, p. 268).

Para ajudar no processo da construção da noção de números, situações significativas que iremos propor serão construções geometrizadas de somas e séries, primeiramente com números naturais e depois racionais, inteiros e reais, assim vamos introduzindo as ampliações dos campos numéricos. Usaremos proporcionalidade frequentemente, para fazer as escalas das construções geométricas, e todo conhecimento de operações e equivalência entre frações será muito utilizado.

A BNCC diz:

> No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras. (BRASIL, 2018, p. 268).

Uma vez que os alunos já estejam familiarizados com as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão entre números naturais e racionais, os problemas que introduziremos são no intuito de os levarem às percepções de indução para observarem a lógica ou a convergência ou divergência de um resultado, utilizando e desenvolvendo meios próprios de se obterem respostas.

Vale ressaltar que nossa intenção foi elaborar um trabalho que possa auxiliar ou servir como material de pesquisa para professores que queiram mais do que apenas apresentar fórmulas prontas aos alunos para o estudo de séries importantes que surgem no Ensino Médio, como Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), um material que apresente exemplos de problemas que levem à ideias de convergência ou divergência e, consequentemente, a noção de infinito.

Ainda na BNCC:

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. (BRASIL, 2018, p. 269).

Nossa ideia é exatamente essa: propiciar problemas geométricos que sejam relacionados com séries, mostrando de maneira visível e de "fácil percepção", (cada aluno no seu tempo, é claro), a convergência ou não de uma série numérica.

No estudo de séries usamos frequentemente expressões algébricas para representá-la e sobre isso, a BNCC afirma:

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas... (BRASIL, 2018, p. 270).

Em nosso trabalho vamos usar, constantemente, expressões matemáticas que generalizam a convergência de séries matemáticas. Por exemplo: a soma dos números ímpares é sempre igual a um quadrado perfeito, o que pode ser generalizado em n^2, onde n representa a quantidade de números ímpares envolvidos na soma.

Atividades que envolvam construções geométricas podem levar a percepção de conceitos desejados e obtenção de resultados por cálculos diversos; que os alunos possam desenvolver esses conceitos através dos problemas sugeridos. A Base Nacional Comum Curricular ainda pede:

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária. (BRASIL, 2018, p. 269).

Ordenar números de uma série numérica pode levar a uma maneira mais "tranquila" de observar sua convergência, transformando-a num conjunto de outras séries conhecidas, como PG, por exemplo; ou trocando criteriosamente alguns de seus termos (números) por outros e, em consequência, conseguir observar a sua divergência, comparando-a com a nova série formada. Para colocar os alunos diante de tarefas que envolvam medições não naturais, podemos considerar um quadrado de lado inteiro e, a partir dele, construir um outro quadrado cujos vértices sejam pontos médios desse primeiro quadrado. Assim, a medida do lado do segundo quadrado será um número irracional, ou seja, vamos estar colocando os alunos diante de um problema de construção de um segmento irracional, impossível de ser medido, mas possível e fácil de ser construído.

Finalizamos este trabalho com uma série de atividades no capítulo 5, apresentando problemas de contextualizações de conceitos que tratamos ao longo de toda dissertação. Alguns prolemas estão relacionados a séries finitas e outros a series infinitas, sendo o último problema um exemplo clássico que mostra a convergência da soma das áreas e a divergência da soma dos perímetros de um mesmo grupo de circunferências.

2 CONCEITOS TEÓRICOS

Vamos apresentar aqui conceitos importantes no estudo de séries e que utilizaremos em nosso trabalho. Começaremos falando de Séries Numéricas, dando alguns exemplos, depois apresentaremos as definições de Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e terminaremos dando uma noção básica do conceito de Indução Matemática.

2.1 SÉRIES NUMÉRICAS

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de números reais. Chamamos de série numérica a soma de todos os termos a_n. Quando n cresce infinitamente, teremos um número infinito de termos a_n. A expressão $(a_n)_{n\geq 1}$, com $n \in \mathbb{N}$, significa os termos $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ..., a_n,\ ...$ da sequência.

Por exemplo, se $n = 7$, temos a sequência a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7, ou seja, uma sequência de 7 termos. A soma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = S_7$ é o sétimo termo da série formada com os termos da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Se somássemos apenas dois termos, $a_1 + a_2 = S_2$, teríamos o segundo termo da série. Obviamente, com um termo teríamos $a_1 = S_1$, que é o primeiro termo da série.

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4\\
&S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5\\
&S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6\\
&S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7\\
&\vdots\\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + ... + a_n
\end{aligned}
$$

Os números S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, ... , S_n, ... formam uma sequência das somas parciais da série.

Em matemática usamos o símbolo $\sum$ (letra grega denominada sigma) para representar uma série.

Escrevendo $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ estamos representando a soma de todos os termos a_i, com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., n$, ou seja, com i variando de 1 até n.

Vamos desenvolver a série $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ nos seguintes casos:

a) $a_i = i^2$

$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 =$

$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385;$

b) $a_i = 2i + 1$

$\displaystyle\sum_{i=5}^{50}(2i+1) = (2.5+1) + (2.6+1) + (2.7+1) + ... + (2.50+1) =$

$= 11 + 13 + 15 + ... + 101 = 2576;$

c) $a_i = \frac{1}{i}$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60};$

d) $a_i = 2^i$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126.$

Existem séries cujos números de termos são infinitos, ou seja, não tem fim. Usamos o símbolo ∞ (infinito) para representar uma quantidade infinita de “números”, “objetos”, “termos”, etc. Dizer que um número natural n tende ao infinito, ou varia de 1 até $+\infty$ (lê-se mais infinito), é o mesmo que dizer que n assume todos os valores naturais. Usamos a expressão $n \to \infty$ para representar ”n tende ao infinito”.

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \frac{5}{32} + ... = 10$$

é infinita e, quanto mais termos adicionarmos a ela, mais perto do número 10 será o valor da soma parcial. Dizemos, então, que essa série ***converge*** para o número 10.

Mais à frente, ao estudarmos o conceito de Progressão Geométrica, veremos o porque dessa série convergir a 10. Quando a série é convergente, é comum igualarmos ela ao número para qual ela converge.

A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ...$$

não tem as somas parciais como resultados que se aproximam de um número real fixo, como a série do exemplo anterior. Aqui, quanto mais números adicionarmos, maior será o valor da soma parcial. Dizemos, então, que essa série não é convergente, e usamos o termo ***divergente*** para classificá-la. Essa série é a famosa ***Serie Harmônica***, da qual falaremos no capítulo 4.

Calcular o valor de uma série pode, muitas vezes, ser complicado, talvez por envolver cálculos bem complexos para alunos de Ensino Fundamental ou Médio. Por isso, ao longo dos anos, matemáticos desenvolveram fórmulas que possam facilitar determinados cálculos. Dois tipos de séries que aparecem em vários problemas de matemática, e que são estudados no Ensino Médio, são as séries cujos termos formam progressões aritméticas ou geométricas. Muito do que iremos ver neste trabalho são séries que são exemplos dessas progressões. Embora a nossa intenção é dar uma ideia diferente para a introdução do estudo de séries, conhecer conceitos de progressões aritméticas e geométricas nos será útil quando formos buscar uma outra abordagem de resolução de alguns problemas.

2.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

Definição de PA

Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante real. A essa constante real damos o nome de razão da PA, representando-a pela letra minúscula r.

Como exemplo, observe a sequência (5, 12, 19, 26, 33, ...), que é uma PA de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $r = 7$. Note que o segundo termo, $a_2 = 12$ é igual ao primeiro termo $a_1 = 5$ mais a razão $r = 7$, ou seja, $12 = 5 + 7$. O mesmo vale para o terceiro termo $a_3 = 19$, que é igual a soma de $a_2 = 12$ mais a razão $r = 7$, ou seja, $19 = 12 + 7$. E isso vale para os demais termos da sequência.

Termo geral da PA

Sendo $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ os termos das respectivas posições $1, 2, 3, ..., n$, temos:

$$
\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 + r\\
&a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r\\
&a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r\\
&a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r\\
&a_6 = a_5 + r = a_1 + 4r + r = a_1 + 5r\\
&\vdots\\
&a_{20} = a_1 + 19r\\
&\vdots\\
&a_{100} = a_1 + 99r\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Generalizando temos:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r} \tag{2.1}$$

que é a expressão do termo geral da PA de primeiro termo a_1 e razão r.

Soma dos termos da PA de n termos

A série formada com os termos de uma PA é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Para determinarmos uma expressão para essa soma, observamos antes os seguintes detalhes:

$$a_n + a_1 = a_1 + (n-1)r + a_1 = 2a_1 + (n-1)r$$

e

$$a_{n-1} + a_2 = a_1 + (n-2)r + a_1 + r = 2a_1 + (n-1)r$$

Note que a soma do último termo com o primeiro termo é igual a soma do penúltimo termo com o segundo termo. Verifique que a soma do antepenúltimo termo com o terceiro termo também é igual, e assim por diante.

Portanto, a soma dos termos equidistantes ao termo central da sequência é constante. Usando essa informação, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (I)$$

Escrevendo essa soma de trás pra frente, temos:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 \qquad (II)$$

Somando as equações (I) e (II), vem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como os resultados das somas entre parênteses são sempre os mesmos, podemos concluir que todas as parcelas da soma S_n são iguais a $(a_1 + a_n)$. Então:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n),$$

onde a parcela $(a_1 + a_n)$ aparece n vezes. Segue então que:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n.$$

Dividindo a equação toda por 2, temos:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}} \qquad (2.2)$$

que é a soma dos termos de uma PA de n termos.

2.3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Definição de PG

Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é resultado da multiplicação do termo anterior por uma constante real. A essa constante real damos o nome de razão da PG, representando-a pela letra minúscula q.

Como exemplo observe a sequência (2, 6, 18, 54, ...), que é uma PG de primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$. Note que o segundo termo, $a_2 = 6$ é igual ao primeiro termo $a_1 = 2$ multiplicado pela razão $q = 3$, ou seja, $6 = 2 \cdot 3$. O mesmo vale para o terceiro termo $a_3 = 18$, que é igual ao produto do segundo termo $a_2 = 6$ pela razão $q = 3$, ou seja, $18 = 6 \cdot 3$. E isso vale para os demais termos da sequência.

Termo geral da PG

Sendo $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ os termos das respectivas posições $1, 2, 3, ..., n$, e $q \in \mathbb{R}$, temos:

$$
\begin{aligned}
&a_1\\
&a_2 = a_1 \cdot q\\
&a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2\\
&a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3\\
&a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4\\
&a_6 = a_5 \cdot q = (a_1 \cdot q^4) \cdot q = a_1 \cdot q^5\\
&\vdots\\
&a_{30} = a_{29} \cdot q = (a_1 \cdot q^{28}) \cdot q = a_1 \cdot q^{29}\\
&\vdots\\
&a_{52} = a_{51} \cdot q = (a_1 \cdot q^{50}) \cdot q = a_1 \cdot q^{51}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Generalizando, temos:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \tag{2.3}$$

que é a expressão do termo geral da PG de primeiro termo a_1 e razão q.

Se $q = 0$ a sequência será uma PG com todos os termos, a partir do segundo, iguais a zero. Por exemplo, a sequência $(-3, 0, 0, 0, 0...)$. Se a razão $q = 1$, teremos uma sequência que é uma PG constante. Exemplo: (5, 5, 5, 5, 5, ...). Note que uma PG constante pode também ser vista como uma PA de razão 0.

Soma dos termos da PG finita A soma formada com os termos de uma PG é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Para determinar uma expressão que facilite calcular o valor dessa soma, vamos analisar tês situações: $q = 0$, $q = 1$, e $q \neq 0$ e $q \neq 1$.

1) Se $q = 0$, a PG é $(a_1, 0, 0, 0, 0, ..., 0)$, donde segue que

$$S_n = a_1$$

2) Se $q = 1$, a PG é $(a_1, a_1, a_1, ..., a_1)$, sequência de n termos iguais, ou seja,

$$S_n = a_1 \cdot n$$

3) Se $q \neq 0$ e $q \neq 1$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (I)$$

Multiplicando a equação por q, vem:

$$S_n \cdot q = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) \cdot q,$$

ou seja,

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q.$$

Então:

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \qquad (II)$$

Fazendo $(II) - (I)$, segue que:

$$S_n \cdot q - S_n = (a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n),$$

isto é,

$$S_n \cdot q - S_n = a_n \cdot q - a_1 = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1 = a_1.q^n - a_1,$$

ou seja,

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1) \qquad (III)$$

Como $q \neq 1$, então $(q - 1) \neq 0$. Dividindo a equação (III) por $(q - 1)$, temos:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}} \qquad (2.4)$$

que é a soma dos termos de uma PG finita de razão q, com $q \neq 0$ e $q \neq 1$.

Note na fórmula da soma de PG de $q \neq 0$ e $q \neq 1$ que $q^n = q^{n-1} \cdot q$. Então:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (q^{n-1} \cdot q - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_n.q - a_1}{q - 1}$$

Assim as duas fórmulas nos dão a soma dos termos de uma PG finita, para $q \neq 0$ e $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_n.q - a_1}{q - 1}$$

Soma dos termos da PG infinita

Se $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$, quando n cresce muito, ou seja, n tende a infinito, q^n tende a 0 ($n \longrightarrow +\infty \ \Rightarrow$ q$^n \longrightarrow 0$).

Substituindo $q^n = 0$ na fórmula anterior da soma, onde n tende ao infinito, temos:

$$S_{n\to\infty} = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1}$$

Então, a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, com $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$ é:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}} \tag{2.5}$$

Para chegarmos às fórmulas dos termos gerais das progressões Aritmética e Geométrica utilizamos exemplos particulares e, depois, generalizamos as ideias observadas. Em níveis de Ensino Fundamental ou Médio essa prática, de particularizar ideias e depois generalizar, é totalmente aceitável. Porém, para provar que de fato as fórmulas dos termos gerais valem para todos os números naturais, usamos a Indução Matemática, que é um axioma usado em cursos superiores de Matemática para provar que uma fórmula é válida para todos os números naturais. Em nosso trabalho, em algumas situações, vamos utilizar a Indução Matemática para mostrar a validade de algumas fórmulas, mas desde já deixamos claro que essa parte é uma informação mais direcionada ao professor, como pesquisa e até recordação, já que esse conceito matemático dificilmente é inserido em livros de matemática de educação básica.

2.4 NOÇÕES BÁSICAS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

O quarto Axioma de Peano[1], o qual recebe o nome de Axioma da Indução, diz que:

Seja X um conjunto de números naturais, ou seja, $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e $n \in X$ implica $n + 1 \in X$, para todo $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$ (8).

Esse axioma afirma que se um conjunto X qualquer é subconjunto do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, se o número 1 é um de seus elementos e se para qualquer número n que esteja nesse conjunto implicar que o seu sucessor $n + 1$ também esteja em X, então esse conjunto é igual ao conjunto $\mathbb{N}$. Ele é utilizado em matemática para demonstrar que uma determinada proposição é válida para todos os números naturais.

Dizemos que estamos demonstrando alguma sentença ou fórmula por ***Indução Matemática*** quando usamos o quarto Axioma de Peano na demonstração. Estudamos muito sobre essa teoria, durante o curso de mestrado, em (6, 7, 9).

---

[1] Axiomas de Peano são um conjunto de axiomas para os números naturais apresentado pelo matemático italiano do século XIX Giuseppe Peano.

Veja dois exemplos de sua aplicação:

1) Mostre, por Indução Matemática, a fórmula do termo geral da PA:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

onde a_1 é o primeiro termo da PA, r é a razão e n é o número de termos.

Solução:

i) Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1-1) \cdot r$, que é verdadeiro. Então a expressão é válida para $n = 1$.

ii) Suponha que a expressão seja válida para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ou seja, que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Quero mostrar que a expressão é válida para $n+1$, ou seja, que

$$a_{n+1} = a_1 + ((n+1)-1) \cdot r$$

Por definição temos $a_{n+1} = a_n + r$ (cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com a razão).

Usando a hipótese $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, temos:

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1) \cdot r + r = a_1 + (n-1+1) \cdot r = a_1 + ((n+1)-1) \cdot r$$

Portanto, o termo geral $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) Mostre, por Indução Matemática, a fórmula do termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

onde a_1 é o primeiro termo da PG, q é a razão e n é o número de termos.

Solução:

i) Para n = 1, temos $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$, que é verdadeiro. Então a expressão é válida para $n = 1$.

ii) Suponha que a expressão seja válida para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ou seja, que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Quero mostrar que a expressão é válida para $n+1$, ou seja, que

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^{((n+1)-1)}$$

Por definição temos $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior com a razão).

Usando a hipótese $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}$$

Portanto, o termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

As séries que aparecerão nos capítulos seguintes são oriundas de Progressão Aritmética ou Progressão Geométrica, outras são exemplos de expressões que instigaram matemáticos ao longo de anos, algumas são fascinantes pela beleza dos resultados.

3 SÉRIES FINITAS

Nesse capítulo vamos aprender alguns exemplos clássicos de séries matemáticas famosas e mostrar algumas maneiras diferentes, alternativas às fórmulas, que os professores podem estar utilizando para calcular suas somas. Nossa intenção é mostrar construções concretas que possam auxiliá-los na introdução de estudos de sequências como Progressões Aritméticas e Geométricas e, consequentemente, as somas de seus termos, que são séries, usando muitas vezes conceitos básicos de Matemática. Esses problemas podem ser inseridos no Ensino Fundamental, onde as ideias de somas em séries quase nem são abordadas.

Nos exemplos que seguem são abordados assuntos que são estudados nos sextos e sétimos anos do Ensino Fundamental, como definição de números naturais, cálculo da área do retângulo, representações e operações básicas com frações, áreas de retângulos e cálculo de potências de números naturais. Aproveitando o momento de inserção desses conceitos, podemos abordar exemplos de cálculos e/ou problemas que possam levar às ideias de padronização de resultados, generalizações e introdução de fórmulas.

3.1 SOMANDO NÚMEROS NATURAIS CONSECUTIVOS

Números naturais são números utilizados para se fazer a contagem de pessoas, objetos, coisas inteiras... Em outras palavras, números naturais são números inteiros e não negativos. O conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$. Escrevemos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}$$

O menor número natural é o 0 e não exite um número natural que seja maior do que todos os outros, ou seja, sendo $n \in \mathbb{N}$, existe sempre o número $n + 1 \in \mathbb{N}$, que é chamado de sucessor de n. Portanto, o conjunto dos números naturais é infinito.

Um dos primeiros contatos que temos com a matemática quando começamos a estudar é efetuar operações de adição, subtração, multiplicação ou divisão envolvendo os números naturais. Porém, o conceito de somar vários números naturais em série quase não é abordado no Ensino Fundamental. Então, nossa ideia é apresentar maneiras de introduzir esse conceito nas aulas, buscando fórmulas através de situações concretas.

3.1.1 Construindo a soma de números naturais consecutivos, de primeiro termo igual a 1

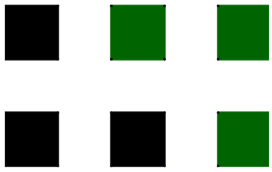
Calcule a soma dos n primeiros números naturais, ou seja, $1+2+3+4+5+6+...+n$.

Facilitar o entendimento de problemas como esse seria procurar exemplos semelhantes com uma quantidade menor de números. Inicialmente, em vez de somar números naturais de 1 a

100, sugerimos que sejam mencionadas somas menores e, delas, tentar observar algum padrão. Vamos começar com as somas: $1 + 2$; $1 + 2 + 3$ e $1 + 2 + 3 + 4$.

A soma $1 + 2$ pode ser entendida como a soma dos quadradinhos pretos da figura 1, onde colocamos um quadradinho preto na primeira linha e dois quadradinhos pretos na segunda linha. Juntando os quadradinhos pretos e verdes dá um retângulo 2×3 (linhas $\times$ colunas).

Figura 1 – Retângulo 2×3



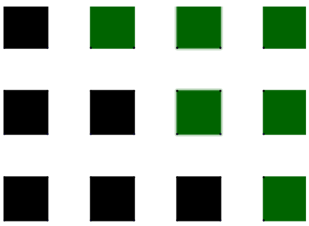
Fonte: Elaboração do autor (2020)

Os quadradinhos pretos são metade do total de quadradinhos desse retângulo, ou seja, metade dos quadradinhos agrupado em linhas e colunas 2×3, que dá 3. A quantidade de quadradinhos pretos é a soma:

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{2}$$

Já a soma $1 + 2 + 3$, de modo análogo a soma anterior, pode ser vista na figura 2, onde colocamos um quadradinho preto na primeira linha, dois quadradinhos pretos na segunda linha e três quadradinhos pretos na terceira linha. O total de quadradinhos pretos representa a soma $1 + 2 + 3$, que é metade dos quadradinhos agrupado em linhas e colunas 3×4, que dá 6.

Figura 2 – Retângulo 3×4



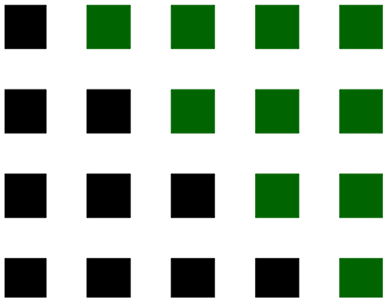
Fonte: Elaboração do autor (2020)

A quantidade de quadradinhos pretos é a soma:

$$1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{3 \cdot (3 + 1)}{2}$$

Veja agora a soma $1 + 2 + 3 + 4$, representada pelos quadradinhos pretos na figura 3, onde colocamos um quadradinho preto na primeira linha, dois quadradinhos pretos na segunda linha, três quadradinhos pretos na terceira linha e quatro quadradinhos pretos na quarta linha. Os quadradinhos pretos são metade da quantidade de quadradinhos agrupados em linhas e colunas 4×5, que dá soma é 10.

Figura 3 – Retângulo 4×5



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Assim, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{4 \cdot (4 + 1)}{2}$$

Note que nos três casos as somas pedidas são iguais a metade da multiplicação do número de linhas de cada retângulo pelo seu consecutivo. Observe também que a quantidade de parcelas da soma coincide com o número de linhas dos retângulos formados por quadradinhos pretos e verdes e a quantidade de número de colunas é igual a quantidade de linhas acrescido de 1 unidade. Então, é razoável pensarmos que, prosseguindo do mesmo modo, teremos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{5 \cdot (5 + 1)}{2},$$

que é igual a 15.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{6 \cdot (6 + 1)}{2},$$

que é igual a 21.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = \frac{7 \cdot (7 + 1)}{2},$$

que é igual a 28.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = \frac{8 \cdot (8 + 1)}{2},$$

que é igual a 36.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{9 \cdot (9 + 1)}{2},$$

que é igual a 45.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2},$$

que é igual a 55.

$$\vdots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + ... + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = \frac{20 \cdot (20 + 1)}{2},$$

que é igual a 210.

$$\vdots$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = \frac{100 \cdot (100 + 1)}{2},$$

que é igual a 5050.

Então, para calcular a soma dos n primeiros números naturais consecutivos, basta imaginarmos um retângulo de n linhas e $n + 1$ colunas, onde metade do produto de n por $n + 1$ nos dá a soma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n$. Em outras palavras, a soma é igual a metade da área de um retângulo de lados n e $n + 1$. Podemos então concluir que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Com a expressão encontrada fica fácil calcular qualquer soma de naturais consecutivos partindo do número 1 até um número n. Mostrar a expressão pronta, sem um exemplo prático, pode dificultar a compreensão e aceitação da mesma pelos alunos. A ideia é ir aumentando os desenhos até que a percepção da "fórmula" apareça.

A construção dessas figuras pode ser feita com cartolinas, de duas cores diferentes. No início o professor pode mostrar somas com quantidades menores de parcelas e depois propiciar aos alunos tempo para que eles possam, cada um à sua maneira, concluir a fórmula acima.

Se nos depararmos com uma soma de números naturais consecutivos, mas de primeiro termo diferente de 1, como procedermos para efetuar os cálculos? Bem, se for uma soma partindo do número 2, ou seja, $2 + 3 + 4 + ... + n$, basta calcularmos $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ e depois subtrair 1. Se for $3 + 4 + 5 + ... + n$, primeiro calculamos $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ e depois subtraímos $1 + 2$. E assim por diante. Vamos exemplificar e entender melhor esses cálculos no próximo tópico desta seção.

3.1.2 Construindo a soma de números naturais consecutivos, de primeiro termo diferente de 1

Calcule o valor da expressão $135 + 136 + 137 + ... + 250$

Aqui cabe ao professor dar um tempo aos alunos para que eles discutam uma estratégia para o cálculo, sempre alertando para que usem, se for necessário, a fórmula encontrada no exemplo anterior de maneira adaptada. Discutindo entre si é bem provável que os alunos encontrem uma ou mais soluções. Depois, o professor pode apresentar, se for o caso, a solução a seguir:

Note que:

$$135 + 136 + 137 + ... + 250 =$$

$$= (1 + 2 + 3 + ... + 250) - (1 + 2 + 3 + ... + 134) =$$

$$= \frac{250 \cdot (250 + 1)}{2} - \frac{134 \cdot (134 + 1)}{2} =$$

$$= 31375 - 9045 =$$

$$= 22330$$

Podemos generalizar essa ideia para soma de naturais consecutivos quaisquer, onde o primeiro termo não é o número 1, ou seja, queremos encontrar um resultado que facilite o calculo de $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + ... + (n + k)$, com $n > 1$ e $k \geq 1$.

Na expressão o número n aparece $k + 1$ vezes. Então a soma é:

$$n \cdot (k + 1) + 1 + 2 + 3 + ... + k = n \cdot (k + 1) + \frac{(1 + k) \cdot k}{2} =$$

$$= (k + 1) \cdot \left(n + \frac{k}{2}\right) = \frac{(k + 1) \cdot (2n + k)}{2}$$

Na soma $135+136+...+250$ temos $n = 135$ e $n+k = 250$. Então $k = 250-135 = 115$. Usando a expressão encontrada, fica:

$$\frac{(115 + 1) \cdot (2 \cdot 135 + 115)}{2} = \frac{116 \cdot (270 + 115)}{2} = \frac{116 \cdot 385}{2} = 22330$$

É bom sempre ressaltar que este trabalho se baseia em mostrar maneiras alternativas de se enxergar e resolver problemas que normalmente são apresentados como exemplos ou exercícios para a fixação de uma determinada teoria ou fórmula. No exemplo da soma $135 + 136 + 137 + ... + 250$, o que fizemos foi apenas uma outra maneira de se calcular a soma dos termos de uma PA de razão 1. Usando a fórmula da soma de PA, vista no capítulo anterior, bastaria efetuar a soma $135 + 250$ (soma do primeiro com o último termo), multiplicar o resultado pela quantidade de termos, que é $250 - 135 + 1 = 116$ e, depois, dividir tudo por 2, ou seja:

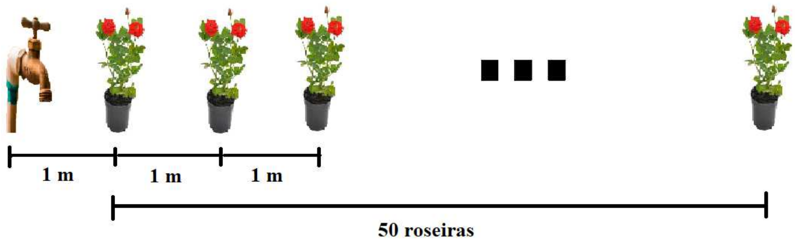
$$135 + 136 + 137 + ... + 250 = (1 + 2 + 3 + ... + 250) = \frac{(135 + 250) \cdot 116}{2} = 22330$$

Vamos a seguir mostrar alguns problemas onde aparecem situações de somas de números naturais consecutivos. As vezes essa soma nem está tão evidente, mas com algumas manobras algébricas, fatorações ou equivalências fica mais claro percebê-la.

3.1.3 O problema do jardineiro, um balde e 50 roseiras

Um jardineiro tem que regar 50 roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea, com cada roseira distando 1 metro da roseira anterior (figura 4). Para isso ele dispõe de um único balde que tem que ser enchido numa torneira localizada na mesma vereda, na distância de 1 metro antes da primeira roseira. Cada balde cheio de água é suficiente para regar apenas uma roseira. Enchendo o balde na torneira, quantos metros o jardineiro terá de andar para regar todas as roseiras e deixar o balde junto à torneira? (Adaptado (4)).

Figura 4 – Uma toneira e cinquenta roseiras.



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Solução:

Para regar a primeira roseira, o jardineiro anda 1 metro para a direita, depois volta mais 1 metro até a torneira. Para regar a segunda roseira, ele anda 2 metros para a direita e depois volta 2 metros até a torneira. Até aí, ele se deslocou $1 + 2$ metros para a direita, e voltou $1 + 2$ metros. Para regar a terceira roseira ele anda 3 metros para a direita e volta 3 metros, totalizando $1 + 2 + 3$ metros andados para a direita e voltando igualmente $1 + 2 + 3$ metros.

Esse padrão segue até ele regar a quinquagésima roseira. Então ele andará $1+2+3+...+50$ metros para a direita e voltará também $1 + 2 + 3 + ... + 50$ metros. Logo, para saber o total de metros andados pelo jardineiro, basta calcularmos a soma dos números naturais de 1 até 50 e multiplicar o resultado por 2, pois o tanto que ele andar para a direita, ele voltará até a torneira.

Temos:

$$\frac{50 \cdot (50 + 1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

Portanto, o jardineiro andará $1275 \cdot 2 = 2550$ metros, ou seja, 2 km e 550 metros.

Neste problema a soma de números naturais consecutivos, iniciando do número 1, apareceu logo na montagem da solução. Quando isso não acontece, muitas vezes é fácil manobrar algebricamente a expressão e transformá-la em algo conhecido. É o que faremos no exemplo do próximo tópico.

3.1.4 O problema do total de refeições servidas em um mês para hóspedes de uma pensão

Em uma pensão estão hospedadas 5 pessoas no $1°$ dia de um determinado mês. No dia 2, mais 5 pessoas serão hospedadas. No dia 3, mais 5. E assim segue, sucessivamente, sendo

5 pessoas hospedadas por dia, até o dia 30. Quantas refeições serão servidas a esses hóspedes, nesses 30 dias, sabendo que todos eles farão duas refeições diárias?

No primeiro dia estão hospedados 5 pessoas, então serão servidas 10 refeições, pois cada um desses hóspedes fará 2 refeições. No segundo dia, com a chegada de mais 5 hóspedes, serão 10 pessoas que farão 20 refeições. No terceiro dia chegam outros 5 hóspedes, totalizando 15 pessoas que farão 30 refeições. Até aí, o total de refeições servidas em três dias é $10 + 20 + 30$. Note que todos os termos dessa soma são múltiplos de 10. Note também que no 1° dia são servidas $10 \cdot 1 = 10$ refeições; no 2° dia temos $10 \cdot 2 = 20$ refeições; no 3° dia temos $10 \cdot 3 = 30$ refeições. Seguindo essa lógica concluiremos que no 30° dia serão servidas $10 \cdot 30 = 300$ refeições.

Portanto, o total de refeições servidas em um mês será: $10+20+30+...+300$. Colocando o número 10 em evidência, temos: $10 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 30)$.

A expressão entre parênteses é a soma dos números naturais de 1 a 30, que já vimos como pode ser calculada. Então, temos:

$$10 \cdot \left(\frac{30 \cdot (30+1)}{2}\right) = 10 \cdot 465 = 4650$$

Portanto, serão servidas 4650 refeições em 30 dias.

Até aqui vimos questões que envolvem soma dos números naturais consecutivos. E problemas que envolvam apenas naturais ímpares ou naturais pares? É o que veremos nas próximas seções.

3.2 SOMANDO NÚMEROS NATURAIS ÍMPARES CONSECUTIVOS

Dizemos que um número natural é ímpar quando a divisão dele por 2 deixa resto 1. O menor número natural ímpar é o 1 e não existe um número natural que seja maior do que todos os outros números naturais. Assim, o conjunto dos números naturais ímpares é infinito.

Existem problemas que envolvem séries cujos termos são números naturais ímpares. Será que podemos facilitar a resolução desses problemas através de uma expressão matemática? é o que veremos na próxima subseção.

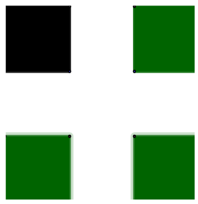
3.2.1 **Construindo a soma de números naturais ímpares consecutivos**

Qual a soma dos n primeiros números naturais ímpares?

Queremos encontrar uma expressão que facilite o cálculo de $1+3+5+7+9+11+13+ ... + k$, sendo k o n-ésimo número natural ímpar. A ideia também é visualizar a situação através de desenhos. Para isso vamos formar sempre retângulos quadrados com os quadradinhos pretos e verdes, começando com 1 quadradinho preto (quadrado de lado 1) e ir acrescentando, a cada nova figura, uma linha e uma coluna com quadradinhos nas cores contrárias a dos quadradinhos da última linha e última coluna da figura anterior.

Note, na figura 5, que temos 1 quadradinho preto e 3 quadradinhos verdes, o que dá um total de 4 quadradinhos. Os 4 quadradinhos estão dispostos de maneira que formem um retângulo 2×2.

Figura 5 – 2×2

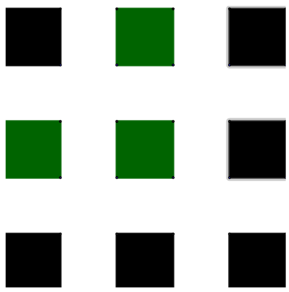


Fonte: Elaboração do autor (2020)

Portanto, a soma $1 + 3$ é igual a área de um retângulo 2×2, ou seja, $1 + 3 = 2 \cdot 2 = 2^2$.

A soma 1+ 3 + 5 pode ser verificada na figura 6:

Figura 6 – 3×3



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Temos 1 + 5 quadradinhos pretos e 3 quadradinhos verdes, o que dá um total de $1+5+3 = 1+3+5 = 9$ quadradinhos. Note que os 9 quadradinhos estão dispostos de maneira que formem um retângulo 3×3.

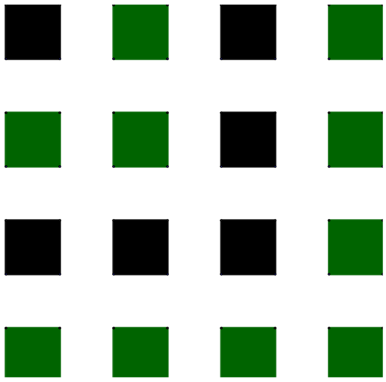
Portanto, a soma $1+3+5$ é igual a área de um retângulo 3×3, ou seja, $1+3+5 = 3{\cdot}3 = 3^2$.

Representamos a soma $1 + 3 + 5 + 7$ na figura 7.

Temos $1 + 5$ quadradinhos pretos e $3 + 7$ quadradinhos verdes, o que dá um total de $1 + 5 + 3 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ quadradinhos. Note que os 16 quadradinhos estão dispostos de maneira que formem um retângulo 4×4.

Portanto, a soma $1+3+5+7$ é igual a área de um retângulo 4×4, ou seja, $1+3+5+7 = 4 \cdot 4 = 4^2$.

Figura 7 – Retângulo 4×4



Fonte: Elaboração do Autor (2020)

Percebemos que uma soma com duas parcelas gera um retângulo 2×2, uma de três parcelas gera um retângulo 3×3 e uma soma de quatro parcelas gera um retângulo 4×4. É razoável pensarmos que, aumentando o número de parcelas, teremos retângulos 5×5, 6×6, 7×7 e assim por diante. Então, temos:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \cdot 5 = 5^2 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 \cdot 6 = 6^2 = 36$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7 \cdot 7 = 7^2 = 49$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8 \cdot 8 = 8^2 = 64$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 9 \cdot 9 = 9^2 = 81$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 10 \cdot 10 = 10^2 = 100$$

$$\vdots$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + ... + 31 = 16 \cdot 16 = 16^2 = 256$$

Novamente a intuição nos leva a acreditar que a soma $1+3+5+7+9+11+13+...+k$, de n parcelas, é sempre igual ao quadrado do número de linhas do retângulo $n \times n$ que essas parcelas formam. Podemos perceber, através dos desenhos, que o número de linhas dos retângulos são iguais ao número de parcelas de cada soma. Então:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + ... + k = n \cdot n = n^2,$$

onde k é o n-ésimo termo da soma, ou seja, n é o número de parcelas da soma.

Para determinar n não é difícil pois, sendo k ímpar, $k + 1$ é par. Então, de 1 até $k + 1$, se escrevêssemos todos os números naturais, teríamos obviamente $\frac{k+1}{2}$ números ímpares. Logo, a relação de n e k é dada por:

$$n = \frac{k+1}{2} \Leftrightarrow k = 2n - 1$$

Conhecer expressões como essa podem ajudar a despertar nos alunos o interesse pela beleza dos resultados em Matemática. A ideia dessa questão é mostrar que muitas vezes observar um padrão de resultados pode facilitar na resolução, bem mais do que sair efetuando cálculos. Na subseção seguinte damos dois exemplos de aplicação desse resultado.

3.2.2 Exemplos de somas de números naturais ímpares

Vamos ver duas aplicações da soma de números naturais consecutivos. Calcule a soma:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999$.

A última parcela da soma é $k = 999$. Então o número de parcelas é

$$n = \frac{999 + 1}{2} = \frac{1000}{2} = 500.$$

Segue então que a soma pedida é igual a $n^2 = 500^2 = 250000$, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999 = 250000;$$

b) dos trinta primeiros números ímpares consecutivos.

O resultado depende apenas do número de termos, que é 30. Então, a soma é:

$$30^2 = 900.$$

Depois de encontrarmos uma expressão que facilite a soma de números naturais ímpares, vamos também procurar uma que facilite a soma dos números naturais pares. É o que faremos na próxima seção.

3.3 SOMANDO NÚMEROS NATURAIS PARES CONSECUTIVOS

Dizemos que um número natural é par quando a divisão dele por 2 deixa resto 0. O menor número natural par é o 0 e não existe um número natural par que seja maior do que todos os outros números naturais. Assim, o conjunto dos números naturais pares é infinito. Observe que, obviamente, ou um número natural é ímpar ou é par.

Existem problemas que envolvem séries cujos termos são números naturais pares. Assim como fizemos para os números naturais ímpares, vamos procurar desenvolver uma expressão matemática que facilite a soma dos números naturais pares consecutivos.

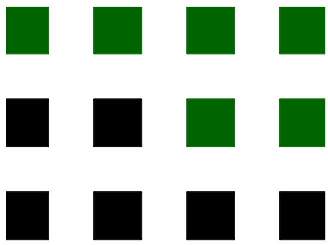
3.3.1 Construindo a soma de números naturais pares consecutivos

Qual a soma dos n primeiros números naturais pares?

Análogo ao que foi feito na soma dos n primeiros números naturais ímpares consecutivos, agora queremos uma expressão que nos possibilite calcular o valor da expressão $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + ... + k$, com k sendo o n-ésimo número natural par.

A soma $2 + 4$ pode ser representada pelos quadradinhos pretos da figura 8. Nela escrevemos uma linha com 2 quadradinhos pretos e uma outra linha com 4 quadradinhos pretos, que são os termos da soma, depois completamos com os quadradinhos verdes que juntos formam, de cabeça para baixo, uma figura semelhante a formada pelos quadradinhos pretos. Observe que todos os quadradinhos, pretos e verdes, formam um retângulo de 3 (linhas) $\times$ 4 (colunas). Os quadradinhos pretos formam metade desse retângulo.

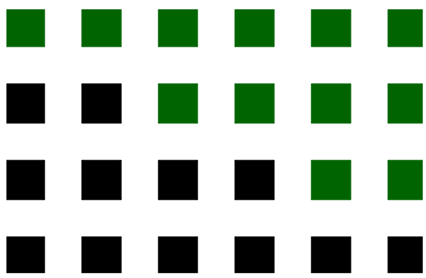
Figura 8 – Retângulo 3×4



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Já a soma $2 + 4 + 6$ fica representada pelos quadradinhos pretos da figura 9, que são metade dos quadradinhos que formam um retângulo 4×6. A figura tem uma linha com 2 quadradinhos pretos, uma outra linha com 4 quadradinhos pretos e uma terceira linha com 6 quadradinhos pretos. Os quadradinhos verdes formam uma figura semelhante de cabeça para baixo.

Figura 9 – Retângulo 4×6

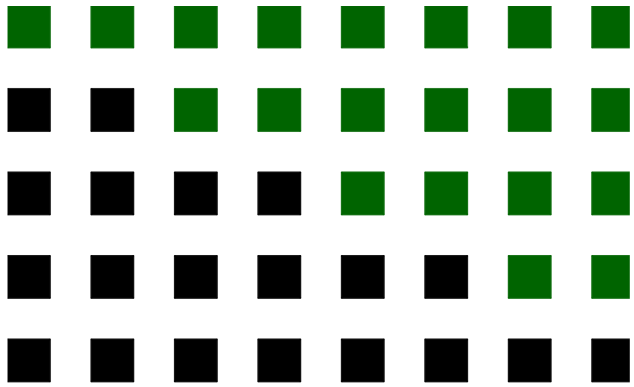


Fonte: Elaboração do autor (2020)

A soma $2 + 4 + 6 + 8$ está representada na figura 10 pelos quadradinhos pretos, que são metade do retângulo formado por todos os quadradinhos. Montamos a figura colocando 2 quadradinhos pretos em uma linha, 4 quadradinhos pretos em uma outra linha, 3 quadradinhos pretos numa terceira linha e 4 quadradinhos pretos numa quarta linha. E novamente completamos com os quadradinhos verdes que, juntos, formam uma figura semelhante de cabeça para baixo.

Observe, em todos os casos, que o número de colunas da figura é igual a última parcela da soma e o número de linhas é igual ao consecutivo do número de parcelas da soma (1 unidade

Figura 10 – Retângulo 5×8



Fonte: Elaboração do autor (2020)

a mais). A soma dos quadradinhos pretos é igual a metade do retângulo formado com todos os quadradinhos.

Assim, no primeiro caso, temos:

$$2 + 4 = \frac{(2+1) \cdot 4}{2} = (2+1) \cdot 2$$

No segundo caso:

$$2 + 4 + 6 = \frac{(3+1) \cdot 6}{2} = (3+1) \cdot 3$$

No terceiro caso:

$$2 + 4 + 6 + 8 = \frac{(4+1) \cdot 8}{2} = (4+1) \cdot 4$$

Generalizando esse raciocínio, através de mais construções, podemos concluir que:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + ... + k = (n+1) \cdot n$$

$$ou$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + ... + k = n \cdot (n+1)$$

onde k é a n-ésima parcela da soma.

Sabemos que existem k números naturais de 1 até k, sendo metade desses números ímpares e metade pares. Então, na série $2 + 4 + 6 + 8 + ... + k$ temos $\frac{k}{2}$ números pares. Assim, a quantidade de termos n da série é dada por $n = \frac{k}{2}$, o que equivale dizer que $k = 2n$.

Na subseção seguinte damos alguns exemplos de aplicação desse resultado.

3.3.2 Exemplos de somas de números naturais pares

Calcule a soma $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 1000$.

A última parcela é 1000, logo $k = 1000$. Então, $n = \frac{1000}{2} = 500$. A soma é:

$$500 \cdot (500 + 1) = 500 \cdot 501 = 250500$$

Portanto, a soma $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 10000 = 250500$.

Vamos calcular a soma dos quarenta primeiros números pares consecutivos.

Neste caso, já foi dado o número de termos, que é $n = 40$. Então, a soma é:

$$40 \cdot (40 + 1) = 40 \cdot 41 = 1640$$

Observação: Nos exemplos de letra ***(a)*** das subseções 3.2.2 e 3.3.2 calculamos as somas $1+3+5+...+999$ e $2+4+6+...+1000$ e obtemos como respostas, respectivamente, 250000 e 250500. Se juntarmos as duas expressões em uma só temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ... + 1000 = 250000 + 250500 = 500500.$$

Esse resultado concide, obviamente, com o resultado que encontraremos se usarmos a expressão $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ encontrada na subseção 3.1.1. Teríamos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 1000 = \frac{1000 \cdot (1000 + 1)}{2} = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500$$

Para terminar, qual o valor de $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 199 - 200 + 201$?

Observando a expressão notamos que ela é a diferença entre a soma dos números ímpares de 1 até 201 e a soma dos números pares de 2 até 200, ou seja, a expressão é igual a:

$$S = (1 + 3 + 5 + ... + 201) - (2 + 4 + 6 + ... + 200)$$

A quantidade de números ímpares que existem de 1 até 201 é $\frac{201+1}{2} = \frac{202}{2} = 101$. Assim, a soma dos números ímpares é $101^2 = 10201$.

A quantidade de números pares que existem de 2 até 200 é $\frac{200}{2} = 100$. Portanto, a soma dos números pares é $100 \cdot 101 = 10100$. Então, o valor de S é: $S = 10201 - 10100 = 101$.

Todas as séries que vimos até aqui são exemplos de séries montadas considerando termos que formam Progressões Aritméticas. A soma de números naturais consecutivos é uma série composta com termos que formam uma Progressão Aritmética de razão igual a 1. As somas de números ímpares consecutivos e números pares consecutivos são séries compostas por termos que formam Progressões Aritméticas de razões iguais a 2. Na próxima seção vamos ilustrar séries de números naturais que sejam Progressões Geométricas.

3.4 CONSTRUINDO A SOMA DE NÚMEROS NATURAIS EM UMA PG DE PRIMEIRO TERMO 1 E RAZÃO 2

Nos exemplos vistos até aqui as sequências que dão origem às séries são Progressões Aritméticas, onde os termos, a partir do segundo, são relacionados com os termos anteriores somando um número natural fixo. Vamos observar agora uma situação em que os termos são relacionados com o termo anterior por uma multiplicação.

Determine o valor da soma $1+2+4+8+16+32+...+k$, de n termos, com $k=2^{n-1}$.

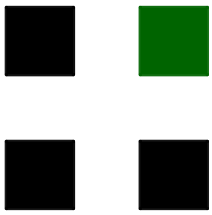
Repare que cada termo, a partir do segundo, tem valor igual ao dobro do termo anterior. Note que com $n=1$, temos $k=2^{1-1}=2^0=1$, que é o primeiro termo da série. Para $n=2$, temos $k=2^{2-1}=2^1=2$, que é o segundo termo. Se $n=3$ temos $k=2^{3-1}=2^2=4$, ou seja, quando somamos 3 termos dessa série, o último deles é o número 4.

A ideia é ilustrar essa questão a fim de facilitar o entendimento da fórmula pelos alunos.

Temos $S_1=1$.

Na figura 11 os quadradinhos pretos representam a soma $S_2=1+2$. Colocamos 1 quadradinho preto na primeira linha e 2 quadradinhos pretos na segunda linha, depois completamos com 1 quadradinho verde no intuito de formar um retângulo 2×2. O primeiro 2 é o número de termos da soma e o segundo 2 é o último termo da soma. Observe que os quadradinhos pretos, juntos com o quadradinho verde, formam um retângulo 2×2.

Figura 11 – $1+2$



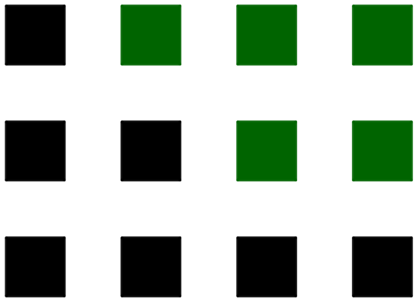
Fonte: Elaboração do Autor (2020)

Assim, podemos verificar que a soma $1+2$, representada pelos quadradinhos pretos, é igual a área de um retângulo 2×2, menos um quadradinho verde. Então:

$$S_2=1+2=2\cdot 2-1=2^2-1$$

Ilustramos a soma $S_3=1+2+4$ na figura 12. Nela colocamos 1 quadradinho preto na primeira linha, 2 quadradinhos pretos na segunda linha e 4 quadradinhos pretos na terceira linha. Depois completamos com quadradinhos verdes até formarmos um retângulo 3×4 (3 representa o número de termos da soma e 4 é o último termo da soma). Juntando os quadradinhos pretos e verdes temos um retângulo 3×4.

Figura 12 – $1 + 2 + 4$



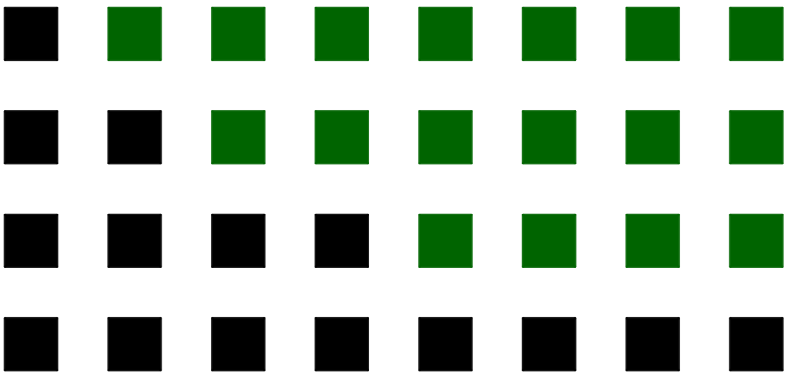
Fonte: Elaboração do Autor (2020)

A soma $S_3 = 1 + 2 + 4$, representada pelos quadradinhos pretos, é igual a área do retângulo 3×4, menos 5 quadradinhos verdes. Então:

$$S_3 = 1 + 2 + 4 = 3 \cdot 4 - 5 = 3 \cdot 2^2 - (2^2 + 1) = 3 \cdot 2^2 - 2^2 - 1 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 2^3 - 1$$

Veja a soma $S_4 = 1 + 2 + 4 + 8$ na figura 13, onde colocamos 1 quadradinho preto na primeira linha, 2 quadradinhos pretos na segunda linha, 4 quadradinhos pretos na terceira linha e 8 quadradinhos pretos na quarta linha. Depois completamos com quadradinhos verdes até formarmos um retângulo 4×8 (4 representa o número de termos da soma e 8 representa o último termo).

Figura 13 – $1 + 2 + 4 + 8$



Fonte: Elaboração do Autor (2020)

Juntando todos os quadradinhos temos um retângulo 4×8. Os quadradinhos pretos representam a soma $S_4 = 1 + 2 + 4 + 8$. Note que essa soma é igual a área do retângulo 3×4, menos 17 quadradinhos verdes. Então:

$$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 = 4 \cdot 8 - 17 = 2 \cdot 2 \cdot 2^3 - (2^4 + 1) = 2 \cdot 2^4 - 2^4 - 1 = 2^4 - 1$$

Prosseguindo com essas contruções, vamos observar que:

$$S_5 = 2^5 - 1$$

$$S_6 = 2^6 - 1$$

$$S_7 = 2^7 - 1$$

$$S_8 = 2^8 - 1$$

$$\vdots$$

$$S_n = 2^n - 1$$

Portanto, a soma $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + k$, de n termos, com $k = 2^{n-1}$ é:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + k = 2^n - 1$$

Observação: a série $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + k$, de n termos, com $k = 2^{n-1}$ é a soma dos termos de uma PG finita de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 2$. Usando a fórmula da soma dos termos da PG finita, vista no capítulo 2, subseção 2.3, temos:

$$S = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

O que fizemos neste tópico foi mostrar, de maneira ilustrada, a soma dos termos de uma PG de razão 2. Caso o primeiro termo fosse $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$, e a razão continuasse sendo 2, bastaria colocar o número natural a em evidência que a série $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + k$ apareceria.

Exemplo: Calcule a soma $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 16384$.

O último termo é 16384. Assim:

$$k = 2^{n-1} = 16384 \;\Leftrightarrow\; k = 2^{n-1} = 2^{14}$$

Então

$$n - 1 = 14 \;\Rightarrow\; n = 15$$

Logo, concluímos que a série tem 15 termos. A soma é:

$$S_{15} = 2^{15} - 1 = 32768 - 1 = 32767$$

Portanto $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 16384 = 32767$

Vimos que a construção geométrica de uma séries cujos termos formam uma PG de razão 2 é relativamente simples, pois ela gera uma fração de denominador 1. E se os termos da série formassem uma PG de razão 3? É o que veremos na próxima seção.

3.5 CONSTRUINDO A SOMA DE NÚMEROS NATURAIS EM UMA PG DE PRIMEIRO TERMO 1 E RAZÃO 3

Nos exemplos das seções anteriores vimos séries cujos termos, a partir do segundo, têm valores iguais ao dobro dos termos anteriores. Vamos agora calcular o valor de uma série em que os termos, a partir do segundo, têm valores iguais ao triplo dos termos anteriores.

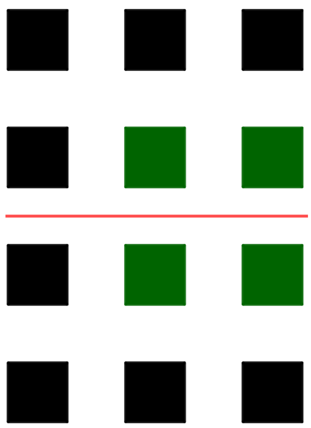
Vamos determinar o valor da soma $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + ... + k$, de n termos, com $k = 3^{n-1}$.

Repare que cada termo, a partir do segundo, tem valor igual ao triplo do termo anterior. Note que com $n = 1$, temos $k = 3^{1-1} = 3^0 = 1$, que é o primeiro termo da série. Para $n = 2$, temos $k = 3^{2-1} = 3^1 = 3$, que é o segundo termo. Se $n = 3$ temos $k = 3^{3-1} = 3^2 = 9$, ou seja, quando somamos 3 termos dessa série, o último deles é o número 9.

Temos $S_1 = 1$.

A soma $S_2 = 1 + 3$ está representada abaixo da linha vermelha, na figura 14, pelos quadradinhos pretos. Montamos a figura colocando 1 quadradinho preto em uma linha e 3 quadradinhos pretos em outra linha (1 e 3 são os termos da soma), depois completamos com os quadradinhos verdes até formarmos um retângulo 2×3, onde 2 representa o número de termos da soma e 3 é o último termo da soma (parte abaixo da linha vermelha). Depois formamos uma figura semelhante, de cabeça para baixo, acima da linha vermelha.

Figura 14 – Soma $1 + 3$



Fonte: Elaboração do Autor (2020)

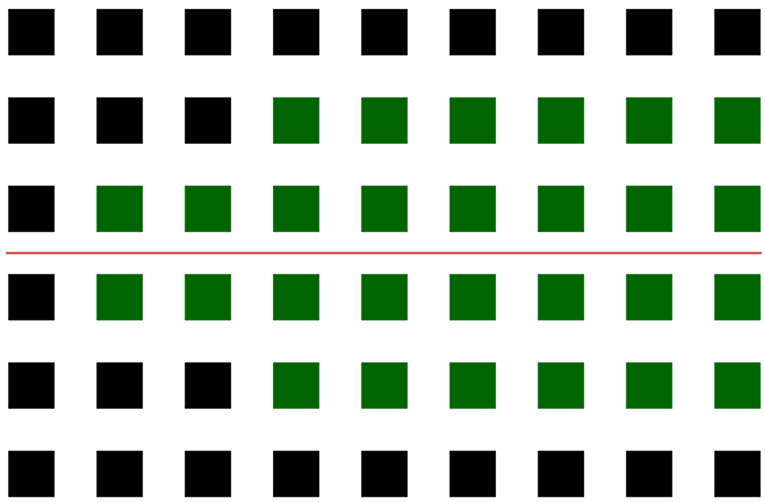
Os quadradinhos pretos que representam a soma $S_2 = 1 + 3$ formam uma área igual a metade da área de um retângulo 3×4, menos 2 quadradinhos verdes (parte abaixo da linha vermelha).

Então, temos:

$$S_2 = 1 + 3 = \frac{4 \cdot 3}{2} - 2 = \frac{4 \cdot 3 - 4}{2} = \frac{4 \cdot 3 - (3 + 1)}{2} = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = \frac{3^2 - 1}{2}$$

Já a soma $S_3 = 1 + 3 + 9$ pode ser vista na figura 15 pelos quadradinhos pretos que estão abaixo da linha vermelha. Montamos a figura colocando 1 quadradinho preto em uma linha, 3 quadradinhos pretos em outra linha e 9 quadradinhos pretos numa terceira linha (1, 3 e 9 são os termos da soma), depois completamos com os quadradinhos verdes até formarmos um retângulo 3×9, onde 3 representa o número de termos da soma e 9 é o último termo da soma (parte abaixo da linha vermelha). Depois formamos uma figura semelhante, de cabeça para baixo, acima da linha vermelha.

Figura 15 – Soma $1 + 3 + 9$



Fonte: Elaboração do Autor (2020)

Os quadradinhos pretos formam uma área igual a metade da área de um retângulo 6×9, menos 14 quadradinhos verdes (parte abaixo da linha vermelha).

Então temos:

$$S_3 = 1 + 3 + 9 = \frac{6 \cdot 9}{2} - 14 = \frac{6 \cdot 9 - 28}{2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^2 - (3^3 + 1)}{2} = \frac{2 \cdot 3^3 - 3^3 - 1}{2} = \frac{3^3 - 1}{2}$$

A ilustração da próxima soma $S_4 = 1 + 3 + 9 + 27$ já se torna complexa demais por envolver $8 \cdot 27 = 216$ quadradinhos. Mas, seguindo a lógica das duas construções, segue:

$$S_4 = \frac{3^4 - 1}{2}$$

$$S_5 = \frac{3^5 - 1}{2}$$

$$S_6 = \frac{3^6 - 1}{2}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

Portanto, a soma $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + ... + k$, de n termos, com $k = 3^{n-1}$ é:

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + ... + k = \frac{3^n - 1}{2}$$

Observação: a série $S = 1+3+9+27+81+243+...+k$, de n termos, com $k = 3^{n-1}$ é a soma dos termos de uma PG finita de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 3$. Usando a fórmula da soma dos termos da PG finita, vista no capítulo 2, subseção 2.3, temos:

$$S = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Novamente mostramos uma ilustração para a soma dos termos de uma PG, agora de razão 3. Caso o primeiro termo fosse $a \in N$, $a \neq 1$, e a razão continuasse sendo 3, bastaria colocar o número natural a em evidência que a série $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + ... + k$ apareceria.

Exemplo: Calcule a soma $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ... + 6561$.

O último termo é 6561. Assim: $k = 3^{n-1} = 6561 \;\Leftrightarrow\; k = 3^{n-1} = 3^8$.

Então $n - 1 = 8 \;\Rightarrow\; n = 9$

Logo, concluímos que a série tem 9 termos. A soma é:

$$\frac{3^9 - 1}{2} = \frac{19683 - 1}{2} = \frac{19682}{2} = 9841$$

Portanto $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ... + 6561 = 9841$

De maneira análoga ao que fizemos para progressões geométricas de razões $q = 2$ ou $q = 3$, podemos construir a soma dos n números naturais em uma PG de primeiro termo 1 e razão 4, ou razão 5, ou 6, etc. Porém, as construções são bem mais complexas, envolvendo, no caso de razão 4, construções de três retângulos simétricos. No caso de razão 5 teremos de construir quatro retângulos simétricos. E assim segue sucessivamente. Por isso, não recomendamos construções para os casos de razão $q \geq 4$.

O professor, baseado nos dois resultados desenvolvidos, pode introduzir a informação de que o padrão segue e que:

Sendo $k = q^{n-1}$, onde $q \geq 2$, $q \in N$, e q é a razão da PG que é formada pelos n termos da série, temos:

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + ... + k = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Multiplicando a expressão acima por a_1, sendo $a_1 \in N$, $a_1 \geq 2$, temos:

$$a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + ... + k) = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Portanto:

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + ... + k = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Nas ilustrações que fizemos, mostramos séries formadas por progressões geométricas cujos termos são números naturais, onde chegamos à uma fórmula. Porém, vale ressaltar que essa fórmula também é válida para toda série em que os termos sejam números reais e que a razão seja $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ e $q \neq 0$. A fórmula encontrada é a soma dos termos da PG finita.

Até aqui mostramos algumas ilustrações de séries finitas cujos termos são números naturais. Agora vamos geometrizar séries finitas cujos termos são potências de números naturais. Será que podemos encontrar uma expressão que facilite o cálculo da soma de cubos de números naturais? É o que veremos na próxima seção.

3.6 SOMANDO CUBOS DE NÚMEROS NATURAIS CONSECUTIVOS

Vamos procurar uma expressão que facilite o cálculo da série cujos termos são potências cúbicas de números naturais.

Calcule o valor de $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + ... + n^3$.

Quanto maior for o valor de n, mais complicado fica para se fazer esse cálculo. Então, vamos seguir nossa regra de analisar situações com valores menores.

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 1^3 = 1$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$$n = 5 \quad \Rightarrow \quad S_5 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

$$n = 6 \quad \Rightarrow \quad S_6 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441$$

Note que os resultados são sempre números quadrados perfeitos. E mais ainda, todos os resultados são quadrados de somas de números naturais de 1 até n. Veja:

$$1 = 1^2$$

$$9 = 3^2 = (1 + 2)^2$$

$$36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$

$$100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

$$225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

$$441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$$

Assim. podemos concluir que:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2$$

Como já vimos que

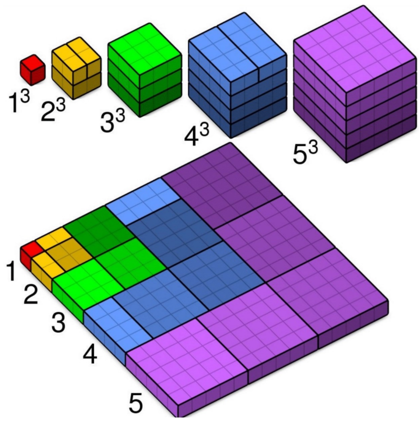
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

temos:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

Para visualizar essa expressão, podemos utilizar cubos de aresta 1, ilustrados na figura 16.

Figura 16 – Soma de cubos



Fonte: Caravana da Matemática UFJF

Com um cubo, temos volume igual a 1 e área superior 1. Aí se mostra que $1^3 = 1^2$.

Com 8 cubos de aresta 1 formamos um cubo maior de aresta 2 (cubo amarelo). Juntando 1 cubo vermelho e os 8 cubos amarelos de aresta 1, temos um volume $1^3 + 2^3 = 9$.

Colocando os 8 cubos amarelos de aresta 1 em um mesmo plano e juntando a eles o único cubo vermelho, formamos um retângulo 3 x 3, ou seja, de área 9. Isso mostra que, com a mesma quantidade de cubos de aresta 1, montamos um volume igual a 9 e uma área igual a 9. Então, temos que $1^3 + 2^3 = 3^2 = (1+2)^2$.

Com 27 cubos de aresta 1 formamos um cubo de aresta 3 (cubo verde). Juntando 1 cubo vermelho, 8 cubos amarelos de aresta 1 e os 27 cubos verdes de aresta 1, temos um volume $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$.

Colocando os 27 cubos verdes de aresta 1 em um mesmo plano e juntando a eles o único cubo vermelho e os 8 cubos amarelos de aresta 1, formamos um retângulo 6 x 6, ou seja, de área 36. Isso mostra que, com a mesma quantidade de cubos de aresta 1, montamos um volume igual a 36 e uma área igual a 36. Segue então que $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2 = (1+2+3)^2$.

Prosseguindo com esse raciocínio, vamos chegar à expressão:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2$$

Como $1+2+3+4+...+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, a soma dos cubos pode ser escrita da seguinte forma:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

3.6.1 Exemplos de somas de cubos de números naturais consecutivos

a) Calcule $1^3+2^3+3^3+4^3+...+100^3$.

Neste caso, temos $n = 100$. Então a soma é:

$$\left(\frac{100\cdot(100+1)}{2}\right)^2 = 5050^2 = 25502500$$

O legal dessa expressão é que transformamos somas de vários cubos em uma única potência quadrada, o que facilita demais os cálculos.

b) Qual o valor de $10^3+11^3+12^3+...+20^3$?

Para resolver essa questão basta observar que ela é igual a soma dos cubos de 1 à 20 menos a soma dos cubos de 1 à 9. Então:

$$10^3+11^3+12^3+13^3+...+20^3 =$$

$$= (1^3+2^3+3^3+13^3+...+20^3) - (1^3+2^3+3^3+13^3+9^3) =$$

$$= (1+2+3+...+20)^2 - (1+2+3+...+9)^2 =$$

$$= \left(\frac{(1+20)\cdot 20}{2}\right)^2 - \left(\frac{(1+9)\cdot 9}{2}\right)^2 =$$

$$= 210^2 - 45^2 = (210+45)\cdot(210-45) = 255\cdot 165 = 42075$$

Para finalizar essa seção, vamos usar a Indução Matemática para mostrar a veracidade da expressão $1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3 = (1+2+3+4+...+n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$ temos $1^3 = 1^2$.

ii) Suponha que a expressão seja válida para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ou seja, que $1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3 = (1+2+3+4+...+n)^2$. Queremos mostrar que a expressão é válida para $n+1$, ou seja, que:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3+(n+1)^3 = (1+2+3+4+...+n+(n+1))^2$$

Temos:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+...+n^3+(n+1)^3 = (1+2+3+4+...+n)^2+(n+1)^3$$

pela hipótese de indução. Como

$$1+2+3+4+...+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

temos que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^2 \cdot (n+1) = (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) =$$

$$= (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2} = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + (n+1))^2$$

Assim, mostramos que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + (n+1))^2$$

ou seja, que a expressão é válida para $n + 1$.

Portanto $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Todas as séries deste capítulo apresentam um número finito de termos, mesmo que seja um número muito grande. No próximo capítulo vamos mostrar alguns exemplos de séries cujos números de termos são infinitos. Apresentaremos então, através de construções geométricas ou manobras algébricas, as ideias de convergência e divergência.

4 SÉRIES INFINITAS

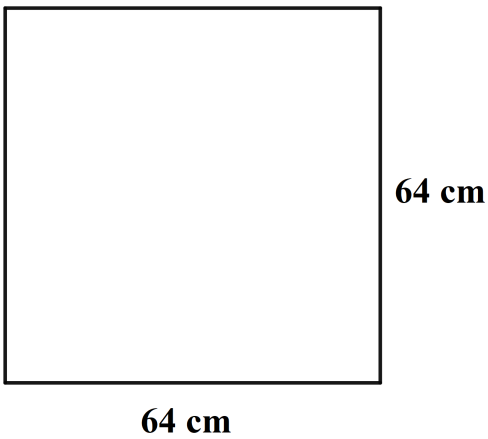
Existem séries em que os seus cálculos são mais complexos, mas que podem ser facilmente calculadas através de alguns procedimentos algébricos e/ou visualizações geométricas. Os exemplos que seguem mostram como podemos calcular valores de determinadas séries, através de construções geométricas apropriadas ou escrevendo-as de maneira que possamos identificá-las como sendo séries conhecidas, PA ou PG, por exemplo. Depois tentaremos buscar uma interpretação geométrica para tais séries.

4.1 UMA CONVERGÊNCIA DE INFINITAS ÁREAS DE RAZÃO 1/2

Calcule o valor da série $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Uma forma de mostrar essa questão geometricamente é considerando cada um dos termos da soma como sendo uma área. Para isso, construiremos um quadrado $64\ cm \times 64\ cm$. Usaremos uma escala de $32\ cm = 1\ u.c.$ (unidade de comprimento). A construção desse quadrado é facilmente feita com cartolina. O quadrado, representado na figura 17, de acordo com a escala definida, fica com lados $2\ u.c. \times 2\ u.c.$ e, obviamente, com área $4\ u.a.$ (unidade de área).

Figura 17 – Cartolina que representa a área $4u.a.$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

A ideia é fazer com que os alunos preencham esse quadrado colando pedaços de outras cartolinas de cores diferentes (ou colorindo com lápis de diversas cores) nas formas de retângulos de áreas iguais aos termos da série.

A vantagem da medida 64 é que com ela fica fácil efetuar divisões por 2 várias vezes, facilitando a construção de retângulos com as áreas representadas na tabela 1 a seguir.

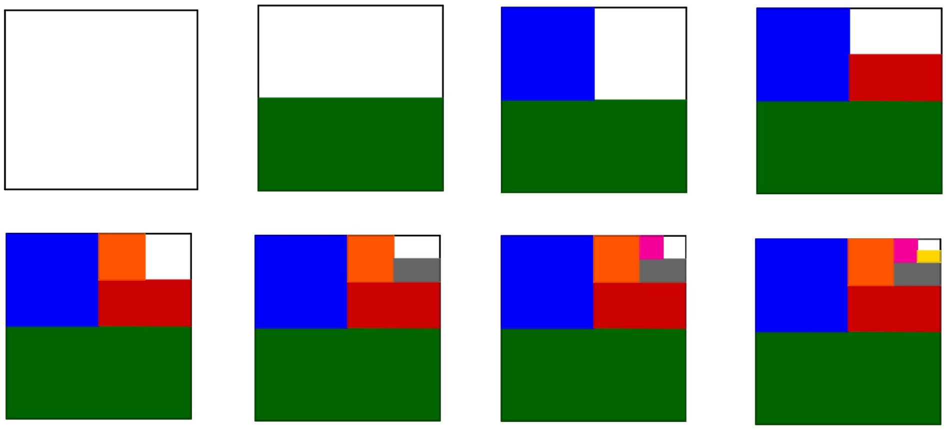
Tabela 1 – Áreas iguais aos termos da série $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$

ÁREAS ($u.a$)	**BASE** ($u.c.$) $\times$ **ALTURA** ($u.c.$)	**RETÂNGULO**
2	$2 \cdot 1$	$64\ cm \times 32\ cm$
1	$1 \cdot 1$	$32\ cm \times 32\ cm$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 1$	$16\ cm \times 32\ cm$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$16\ cm \times 16\ cm$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$	$8\ cm \times 16\ cm$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$8\ cm \times 8\ cm$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$	$8\ cm \times 4\ cm$
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$	$4\ cm \times 4\ cm$
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8}$	$2\ cm \times 4\ cm$
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16}$	$2\ cm \times 2\ cm$
$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32}$	$2\ cm \times 1\ cm$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32}$	$1\ cm \times 1\ cm$

Fonte: Elaboração do autor (2020)

A figura 18 nos mostra o processo de preenchimento da cartolina branca (quadrado 2×2). O retângulo verde tem área 2, o azul tem área 1, o vermelho tem área $\frac{1}{2}$, o laranja tem área $\frac{1}{4}$, o cinza tem área $\frac{1}{8}$, o lilás tem área $\frac{1}{16}$, o amarelo tem área $\frac{1}{32}$ ...

Figura 18 – Cada retângulo de uma cor representa um termo da série dada.



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Como o retângulo branco tem área 4, as demais áreas estão na tabela 2.

Tabela 2 – Retângulo branco de área 4 implica nas áreas das demais cores.

CORES	Branco	Verde	Azul	Vermelho	Laranja	Cinza	Lilás	Amarelo
ÁREAS	4	2	1	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Fonte: Elaboração do autor

À medida que vão preenchendo o retângulo inicial $2\ u.m. \times 2\ u.m.$ com retângulos cada vez menores, é possível que os alunos percebam que o espaço a ser preenchido nunca terá fim. Desde o primeiro retângulo colado, o de medida $2\ u.m. \times 1\ u.m.$, é fácil perceber que ele tem metade da área a ser preenchida. E assim segue para todos os demais retângulos.

Uma vez que é sempre possível diminuir pela metade a área de um retângulo qualquer e sempre terá lugar para um novo retângulo dentro do retângulo inicial, então esse processo de construção parece não ter fim. Por maior que seja a quantidade de quadrados colados dentro do retângulo inicial, a soma de suas áreas estará limitada dentro do espaço de $4\ u.a.$, chegando cada vez mais próximo de 4. Dizemos então que, somando infinitas áreas, o resultado será $4\ u.a.$. Escrevemos:

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 4$$

Essa construção pode ser usada pelo professor antes de introduzir a soma dos termos de uma PG infinita e, depois de estudar o tema, mostrar o cálculo usando a fórmula. A série tem primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Então:

$$S = \frac{a_1}{q-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

E se a razão não fosse $\frac{1}{2}$? Buscando uma escala adequada, podemos construir algo parecido para uma soma de razão $\frac{1}{3}$. É o que veremos na próxima seção.

4.2 UMA CONVERGÊNCIA DE INFINITAS ÁREAS DE RAZÃO 1/3

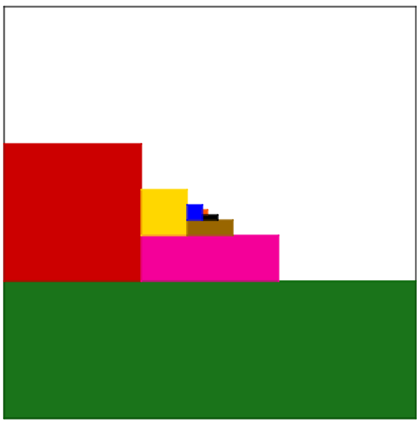
Qual o valor da série $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + ...$?

Novamente vamos construir uma figura geométrica em que possamos colocar cada termo da soma representado por uma área. Note que os termos diminuem na razão $1/3$. Fazendo como no exemplo anterior, vamos partir de um retângulo e ir colando nele outros retângulos cujas áreas estejam na proporção dos termos da série. Partindo de um retângulo de medidas $81\ cm$ por $81\ cm$, vamos ter pelo menos quatro possibilidades de divisões exatas por 3. A escolha do número 81 é estratégica por isso, para que as construções de retângulos de áreas menores sejam feitas com valores inteiros.

Usaremos agora uma escala de $81\ cm = 1\ u.c.$ Assim, uma cartolina na qual esteja desenhado um retângulo $81\ cm \times 81\ cm$ terá uma área $1\ u.c. \times 1\ u.c. = 1\ u.a.$ Nesse retângulo vamos colando os retângulos de áreas representadas na tabela 3.

Na figura 19 colocamos os retângulos coloridos no retângulo inicial de medidas $1\ u.c \times 1\ u.c.$

Figura 19 – Cada área, uma cor



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Tabela 3 – Áreas das cores na escala $81\ cm = 1\ u.c.$

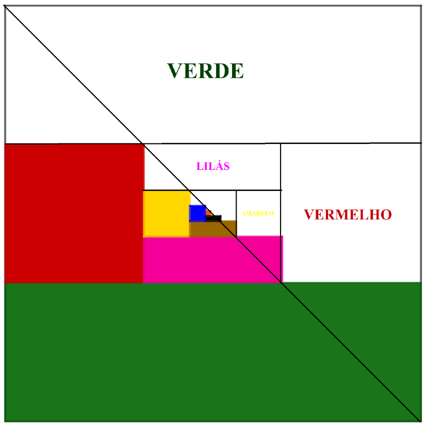
CORES	**ÁREAS** ($u.a$)	**BASE** ($u.c.$) $\times$ **ALTURA** ($u.c.$)	**RETÂNGULO**
Branco	1	$1 \cdot 1$	$81\ cm \times 81\ cm$
Verde	$\frac{1}{3}$	$1 \cdot \frac{1}{3}$	$81\ cm \times 27\ cm$
Vermelho	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$27\ cm \times 27cm$
Lilás	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}$	$27\ cm \times 9\ cm$
Amarelo	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$	$9\ cm \times 9\ cm$
Marrom	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27}$	$9\ cm \times 3\ cm$
Azul	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27}$	$3\ cm \times 3\ cm$
Preto	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81}$	$3\ cm \times 1\ cm$
Laranja	$\frac{1}{6561}$	$\frac{1}{81} \cdot \frac{1}{81}$	$1\ cm \times 1\ cm$

Fonte: Elaboração do autor (2020)

A ordem de colagem dos retângulos coloridos no retângulo branco é do maior para o menor. À medida que os retângulos vão sendo colados, a área total colorida vai se aproximando da área que permanece branca. Usando a ideia de simetria, podemos visualizar essa aproximação de igualdade na figura 20, onde traçamos a diagonal do quadrado inicial e destacamos, na parte branca, figuras semelhantes às figuras coloridas.

Note que as áreas de cores verde, vermelha, lilás e amarela têm, sem exceção, pedaços de áreas semelhantes na parte que permanece branca. Veja também que temos figuras semelhantes acima e abaixo da diagonal. E isso continua acontecendo para as demais cores, de áreas cada vez menores. Assim, a soma (ou reunião) da parte colorida aproxima-se da metade da área do retângulo inicial branco, de área $1\ u.a.$

Figura 20 – Simetria



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Então, podemos dizer que a soma das infinitas áreas é igual a $\frac{1}{2}$, ou seja,

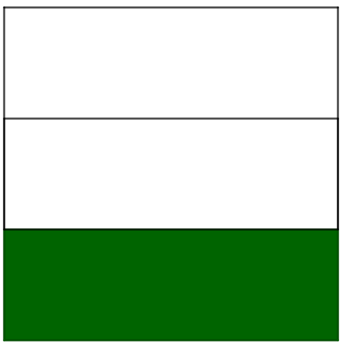
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + ... = \frac{1}{2}$$

No Ensino Médio, durante o estudo de soma dos termos da PG infinita de razão $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$, após mostrar essa construção, é bom calcular a mesma soma usando a fórmula. A série tem primeiro termo $a_1 = \frac{1}{3}$ e razão $q = \frac{1}{3}$. Então:

$$S = \frac{a_1}{q - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Podemos usar construções alternativas para comparar ou mostrar equivalências de frações, muito presente nesta questão. Podemos visualizar na figura 21 que o retângulo verde tem $\frac{1}{3}$ do tamanho (área) do retângulo branco.

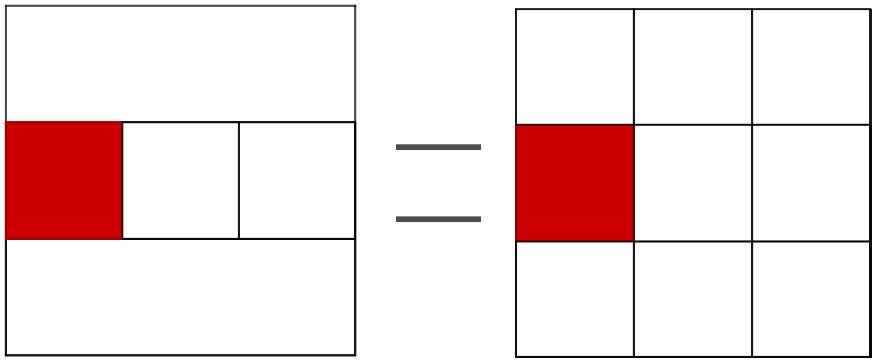
Figura 21 – Área verde ocupa $\frac{1}{3}$ da área branca



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Veja também na figura 22 que o retângulo vermelho tem $\frac{1}{3}$ do tamanho do retângulo verde e $\frac{1}{9}$ do tamanho do retângulo branco.

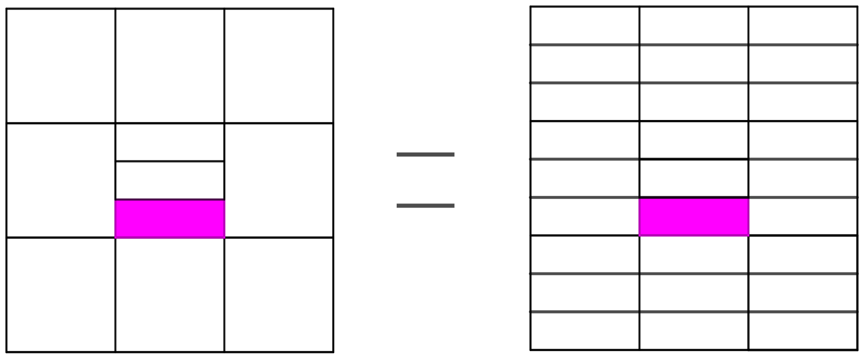
Figura 22 – $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{1}{9}$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na figura 23 vemos que o retângulo lilás tem $\frac{1}{3}$ do retângulo vermelho e $\frac{1}{27}$ do retângulo branco.

Figura 23 – $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{9}$ é igual a $\frac{1}{27}$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Na seção seguinte vamos mostrar séries definidas através do símbolo de somatório.

4.3 USANDO GEOMETRIA PARA OBSERVAR UMA CONVERGÊNCIA

Vamos desenvolver a expressão $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}}$ para o caso de $a = 2$:

Temos:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{2}{2^{2-1}} + \frac{3}{2^{3-1}} + \frac{4}{2^{4-1}} + \frac{5}{2^{5-1}} + \frac{6}{2^{6-1}} + \frac{7}{2^{7-1}} + \frac{8}{2^{8-1}} + \frac{9}{2^{9-1}} + \frac{10}{2^{10-1}} + ... =$$

$$= \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \frac{6}{2^5} + \frac{7}{2^6} + \frac{8}{2^7} + \frac{9}{2^8} + \frac{10}{2^9} + ... =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{32} + 7 \cdot \frac{1}{64} + 8 \cdot \frac{1}{128} + 9 \cdot \frac{1}{256} + 10 \cdot \frac{1}{512} + ...$$

Mostrar essa convergência utilizando meios geométricos pode ser interessante. A ideia, novamente, é ir colando áreas de valores iguais aos termos da série, dentro de um retângulo de área igual ao número para qual a série converge. Então, tomado um quadrado de lados 2 por 2, vamos preenchendo-o com retângulos cujas as áreas sejam os termos da série

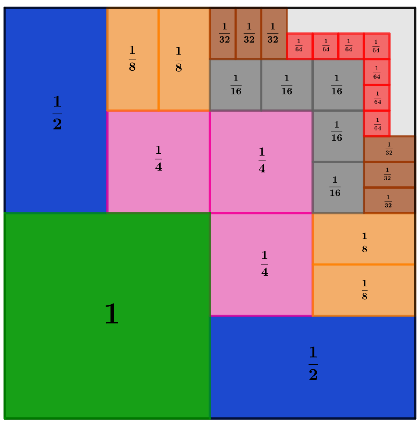
$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{32} + 7 \cdot \frac{1}{64} + 8 \cdot \frac{1}{128} + 9 \cdot \frac{1}{256} + 10 \cdot \frac{1}{512} + ...$$

Temos que colar 1 retângulo de área 1, mais 2 retângulos de áreas $\frac{1}{2}$, mais 3 retângulos de área $\frac{1}{4}$, mais 4 retângulos de áreas $\frac{1}{8}$, mais 5 retângulos de áreas $\frac{1}{16}$ e assim por diante. Quanto menores forem as áreas dos retângulos e mais quantidades de retângulos formos acrescentando, mais perto de fechar a figura vamos nos aproximando, ou seja, estamos caminhando para atingir a área do retângulo de fora, que é 4. Como sempre podemos construir áreas cada vez menores, por não existir o "menor de todos os tamanhos", sempre poderemos acrescentar mais um retângulo dentro do retângulo inicial. Isso nos dá uma ideia intuitiva de que a soma converge para 4.

Para as construções dessas áreas podemos usar a escala $32\ cm = 1\ u.c.$ Os alunos precisarão construir: 1 retângulo de medidas $32\ cm \times 32\ cm$, 2 retângulos de medidas $32\ cm \times 16\ cm$, 3 retângulos de medidas $16\ cm \times 16\ cm$, 4 retângulos de medidas $16\ cm \times 8\ cm$, 5 retângulos de medidas $8\ cm \times 8\ cm$, 7 retângulos de medidas $8\ cm \times 4\ cm$, 8 retângulos de medidas $4\ cm \times 4\ cm$, e assim por diante. Em consequência da escala definida, ele estará construindo os termos da série que estamos analisando.

Para que a percepção da convergência apareça, é importante que o professor oriente o local adequado para que cada retângulo seja colado no retângulo inicial. Colando-os corretamente, o resultado nos dá a figura 24:

Figura 24 – Cada área uma cor



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Construções como essa podem facilitar a visualização de somas infinitas que convergem para um número real qualquer. Concluímos então que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$.

Na subseção seguinte vamos mostrar essa mesma convergência de um outro modo, usando manipulações algébricas.

4.4 USANDO PG PARA MOSTRAR UMA CONVERGÊNCIA

Vamos agora, usando meios algébricos, observar a convergência de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$.

A ideia que usaremos nesta subseção utiliza conceitos de Progressão Geométrica. Então, enquanto a construção da subseção anterior pode ser usada para introduzir o conceito de somas infinitas, o modo de resolução que apresentamos agora é uma aplicação desse conceito, após a soma dos infinitos termos de uma PG de razão $q \neq 0$, $-1 < q < 1$ já ter sido estudado. Como já vimos, temos:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{16} + 6 \cdot \frac{1}{32} + 7 \cdot \frac{1}{64} + 8 \cdot \frac{1}{128} + 9 \cdot \frac{1}{256} + 10 \cdot \frac{1}{512} + ...$$

Escrevendo essa soma de uma forma mais adequada, temos:

$$\begin{aligned}
S = 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ... + \\
&+ \frac{1}{512} + ... + \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que a primeira linha é $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, a segunda linha é $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, a terceira é $S_3 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ e assim por diante. Então temos:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + ... = \sum_{j=0}^{+\infty} S_j$$

Assim vemos que S é uma soma de somatórios. Podemos escrever então que a soma S é igual:

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

Por outro lado, a soma S pode ser entendida da seguinte forma: em todas as linhas temos uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$. O que varia é o 1° termo. Usando a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, que vimos anteriormente, podemos calcular o valor de cada linha, ou seja, para qual número real cada uma das somas convergem.

A primeira linha

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ...$$

de primeiro termo 1 converge para

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 = 2$$

A segunda linha,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ...$$

de primeiro termo $\frac{1}{2}$ converge para

$$S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

A terceira linha,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ...$$

de primeiro termo $\frac{1}{4}$ converge para

$$S_3 = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

A quarta linha,

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ...$$

de primeiro termo $\frac{1}{8}$ converge para

$$S_4 = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

Novamente, seguindo o padrão, vemos que

$$S_5 = \frac{1}{8},\ S_6 = \frac{1}{16},\ S_7 = \frac{1}{32},\ S_8 = \frac{1}{64},\ S_9 = \frac{1}{128},\ S_{10} = \frac{1}{256},\ ...$$

Então $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} + ...$, ou seja,

$$S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + ...$$

Note que S é uma soma de infinitos termos de uma PG de primeiro termo 2 e razão $q = \frac{1}{2}$. Novamente, usando a fórmula da soma, temos:

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Portanto

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$$

E se na expressão $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}}$, a fosse um outro número natural, maior do que 2? É o que veremos na próxima subseção.

4.5 GENERALIZANDO UMA IDEIA

Já calculamos o valor de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}}$ para $a = 2$, ou seja, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$. E se calcularmos $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}}$ para $a = 3$, $a = 4$, $a = 5$? Podemos esperar resultados semelhantes?

Vamos observar o caso de $a = 3$. Temos:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{3^{1-1}} + \frac{2}{3^{2-1}} + \frac{3}{3^{3-1}} + \frac{4}{3^{4-1}} + \frac{5}{3^{5-1}} + \frac{6}{3^{6-1}} + \frac{7}{3^{7-1}} + \frac{8}{3^{8-1}} + \frac{9}{3^{9-1}} + \frac{10}{3^{10-1}} + ... =$$

$$= \frac{1}{3^0} + \frac{2}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + \frac{7}{3^6} + \frac{8}{3^7} + \frac{9}{3^8} + \frac{10}{3^9} + ... =$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + 5 \cdot \frac{1}{81} + 6 \cdot \frac{1}{243} + 7 \cdot \frac{1}{729} + 8 \cdot \frac{1}{2187} + 9 \cdot \frac{1}{6561} + 10 \cdot \frac{1}{19683} + ...$$

Mostrar a convergência dessa série usando a construção geométrica, como fizemos no caso de $a = 2$, não é recomendável, nem tanto pelo fato dela convergir para um número não inteiro, mas também pelo fato de que dividir áreas em três partes iguais é bem menos trivial do que dividir em duas partes iguais. Entretanto, a manipulação algébrica, que foi usada, é sempre bem vinda, já que os cálculos são padronizados. Então, escrevendo a soma S de uma maneira mais adequada, temos:

$$\begin{aligned} S = 1 &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{2187} + \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{6561} + \frac{1}{19683} + ...+ \\ &+ \frac{1}{19683} + ...+ \\ &\vdots \end{aligned}$$

Análogo ao que foi feito no caso de $a = 2$, temos que essa soma é:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + ... = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \right)$$

Todas as linhas da soma são progresões geométricas infinitas de razões $q = \frac{1}{3}$. Essas somas convergem, respectivamente, para os números $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}, \frac{1}{486}, \cdots$

Então S é a soma dos termos da PG infinita de primeiro termo $\frac{3}{2}$ e razão $q = \frac{1}{3}$. Logo:

$$S = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162} + \frac{1}{486} + ... = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3/2}{2/3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Portanto

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4}$$

Usando raciocínio análago e desenvolvendo a expressão $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}}$ para outros valores de a, temos:

$$a = 4 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n-1}} = \frac{16}{9}$$

$$a = 5 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^{n-1}} = \frac{25}{16}$$

$$a = 6 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{6^{n-1}} = \frac{36}{25}$$

$$a = 7 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{7^{n-1}} = \frac{49}{36}$$

Notamos então que os resultados seguem um padrão:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4 = \left(\frac{2}{2-1}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{3-1}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n-1}} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{4-1}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^{n-1}} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{5-1}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{6^{n-1}} = \frac{36}{25} = \left(\frac{6}{6-1}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{7^{n-1}} = \frac{49}{36} = \left(\frac{7}{7-1}\right)^2$$

Novamente pela percepção, devido a repetição do padrão de respostas, para $|a| > 1$ vale a expressão

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}} = \left(\frac{a}{a-1}\right)^2$$

e para $|a| \leq 1$ temos que a soma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}}$ diverge.

Problema: Qual o valor de $1 + \frac{2}{15} + \frac{3}{225} + \frac{4}{3375} + \frac{5}{50625} + ...$?

É só observar que a expressão é o mesmo que:

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15^2} + 4 \cdot \frac{1}{15^3} + 5 \cdot \frac{1}{15^4} + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{15^{n-1}} = \left(\frac{15}{15-1}\right)^2 = \frac{225}{196}$$

Vamos finalizar essa seção mostrando mais uma convergência, onde a variável n do numerador da fração está elevada ao quadrado.

4.6 APLICANDO PG EM MAIS UMA CONVERGÊNCIA

Vamos desenvolver a expressão $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{a^{n-1}}$ para $a = 2$.

Temos:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} =$$

$$= \frac{1^2}{2^{1-1}} + \frac{2^2}{2^{2-1}} + \frac{3^2}{2^{3-1}} + \frac{4^2}{2^{4-1}} + \frac{5^2}{2^{5-1}} + \frac{6^2}{6^{1-1}} + \frac{7^2}{2^{7-1}} + \frac{8^2}{2^{8-1}} + \frac{9^2}{2^{9-1}} + \frac{10^2}{2^{10-1}} + ... =$$

$$= \frac{1}{2^0} + \frac{4}{2^1} + \frac{9}{2^2} + \frac{16}{2^3} + \frac{25}{2^4} + \frac{36}{2^5} + \frac{49}{2^6} + \frac{64}{2^7} + \frac{81}{2^8} + \frac{100}{2^9} + ... =$$

$$1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{8} + 25 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{32} + 49 \cdot \frac{1}{64} + 64 \cdot \frac{1}{128} + 81 \cdot \frac{1}{256} + 100 \cdot \frac{1}{512} + = ...$$

Escrevendo essa soma de maneira adequada, temos:

$$\begin{aligned}
S = 1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ...+ \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note que temos em todas as linhas somas de PGs infinitas de razões $q = \frac{1}{2}$. Temos uma de primeiro termo 1, três de primeiro termo $\frac{1}{2}$, cinco de primeiro termo $\frac{1}{4}$, sete de primeiro termo $\frac{1}{8}$, nove de primeiro termo $\frac{1}{16}$, e assim por diante.

Usando o conceito de soma dos termos da PG infinita, estudado no capítulo 2, podemos calcular os valores de todas essas progressões.

Chamando de S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ... as PGs de respectivos primeiros termos 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ... , temos:

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$S_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$S_5 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$S_6 = \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}$$

$$S_7 = \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + ... = \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{32}$$

A percepção nos diz que, seguindo esse padrão, teremos:

$$S_8 = \frac{1}{64},\ S_9 = \frac{1}{128},\ S_{10} = \frac{1}{256}\ ...$$

Então:

$$S = S_1 + 3 \cdot S_2 + 5 \cdot S_3 + 7 \cdot S_4 + 9 \cdot S_5 + 11 \cdot S_6 + 13 \cdot S_7 + ... =$$

$$= 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 11 \cdot \frac{1}{16} + ... =$$

$$= 3 + \left(2 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{16} + ...\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...\right) =$$

$$= 3 + 2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{16} + ...\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...\right) =$$

$$= 3 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + 1 = 3 + 2 \cdot 4 + 1 = 3 + 8 + 1 = 12$$

Portanto, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = 12$$

Observação: Note que usamos o resultado $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$, da subseção **??**, para concluir o último cálculo.

Terminaremos este capítulo mostrando, na próxima seção, a divergência de uma série muito famosa em Matemática, intitulada Série Harmônica, que é a série infinita cujos termos são os inversos dos números naturais.

4.7 SÉRIE HARMÔNICA

Desenvolva a expressão $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

A expressão acima é igual a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + ...$$

Essa série, muito famosa em Matemática, é chamada de ***Série Harmônica***.

Será que é possível fazer uma construção como nos exemplos anteriores e concluir a convergência da Série Harmônica, se de fato ela for convergente?

Primeiro veja que essa série difere das anteriores por não ter o mesmo padrão de sequência relacionando os seus termos. Então, pode ser que ela não convirja. Vamos tentar mostrar isso usando comparações de frações.

Se formos tentar espremer essa série dentro de um retângulo de área qualquer, como fizemos nos exemplos anteriores, vamos perceber que ela extrapola os limites da área do retângulo, qualquer que seja o seu tamanho. Então a estratégia será outra, tentar mostrar que essa série cresce infinitamente, na medida que n cresce.

Sabemos que fixado o numerador de uma fração, quanto maior o seu denominador, menor será o seu valor. Assim, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Então:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Do mesmo modo, como $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$, temos:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

Observando que $\frac{1}{9} > \frac{1}{16}$, $\frac{1}{10} > \frac{1}{16}$, $\frac{1}{11} > \frac{1}{16}$, $\frac{1}{12} > \frac{1}{16}$, $\frac{1}{13} > \frac{1}{16}$, $\frac{1}{14} > \frac{1}{16}$ e $\frac{1}{15} > \frac{1}{16}$, temos:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

Seguindo esse raciocínio, vamos observar que esse padrão segue infinitamente:

$$\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + ... + \frac{1}{32} > \underbrace{\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + ... + \frac{1}{32}}_{16 \ parcelas}$$

$$\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\frac{1}{35}+...+\frac{1}{64}>\underbrace{\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{64}}_{32\ parcelas}$$

$$\frac{1}{65}+\frac{1}{66}+\frac{1}{67}+...+\frac{1}{128}>\underbrace{\frac{1}{65}+\frac{1}{66}+\frac{1}{67}+...+\frac{1}{128}}_{64\ parcelas}$$

Somando os valores dessas inequações, temos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...>$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+...$$

$$=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+32\cdot\frac{1}{64}+64\cdot\frac{1}{128}+128\cdot\frac{1}{256}+...$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot k,$$

onde $k \in N$ e $k \longrightarrow +\infty$

Quanto mais k cresce, maior será o valor de

$$1+\frac{1}{2}\cdot k$$

Isso mostra que a expressão $1+\frac{1}{2}\cdot k$ diverge.

Portanto,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+...>1+\frac{1}{2}\cdot k \longrightarrow +\infty,$$

ou seja, a soma dos infinitos termos da Série Harmônica é sempre maior que $1+\frac{1}{2}\cdot k$, independente do valor natural que k assuma. Então a Série Harmônica é divergente.

Assim, com essa bela demonstração da divergência da Série Harmônica, terminamos este capítulo, sabedores de que existem séries de infinitos termos que convergem e que existem séries de infinitos termos que divergem. No capítulo seguinte finalizamos este trabalho apresentando atividades que contextualizam conceitos vistos até aqui e que são sugestões de problemas para serem aplicados em salas de aula, como introdução ao tema de séries, mais especificamente para o Ensino Fundamental, ou como complementação do estudo de Sequências e Séries, no Ensino Médio.

5 ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Vimos nos capítulos 3 e 4 situações problemas que nos remetem às séries finitas, que envolvem somas de números naturais consecutivos, ou só os pares, ou só os ímpares; e séries infinitas que convergem ou divergem. Neste capítulo vamos propor alguns problemas para serem implantados em sala de aula, onde ideias e conceitos já estudados até aqui estejam inseridos.

As atividades das seções 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 podem ser aplicadas em aulas depois do estudo das construções da soma dos números naturais consecutivos e da soma dos números ímpares consecutivos, que vimos no capítulo 3, seções 3.1 e 3.2. Com recortes de pequenos quadradinhos de cartolinas, de duas cores diferentes (podem ser preto e verde), a ideia é fazer com que os alunos cheguem às conclusões de que

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

e que

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + k = n^2$$

onde n é o número de termos da série e $k = 2n - 1$.

Uma primeira aula de 50 minutos é suficiente para que as atividades de recortes das cartolinas e manipulações dos quadradinhos sejam feitas pelos alunos, que poderão estar separados em grupos de 4 ou 5 pessoas, para que possam desenvolver as atividades e discutir os cálculos que levem às conclusões dos resultados. Numa segunda aula de 50 minutos as contextualizações desses conceitos podem ser inseridas nas resoluções dos problemas das seções 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4.

O problema da seção 5.5 pode ser inserido em aula após a realização da atividade do capítulo 3, seção 3.4, quando vimos como calcular a soma de números naturais cujos termos formam uma PG de razão 2. Com algumas manobras algébricas, o problema em questão vai praticamente se reduzir à aplicação de que

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + k = 2^n - 1$$

onde n é o número de termos da série e $k = 2^{n-1}$. Uma aula de 50 minutos, com a turma dividida em grupos de 5 ou 6 alunos, é suficiente para a realização desta atividade.

Os problemas das seções 5.6, 5.7 e 5.8 são contextualizações dos conceitos vistos no capítulo 4, onde aparecem séries de infinitos termos, que podem convergir para um número real qualquer ou podem divergir, como no caso da Série Harmônica.

Após a aplicação da atividade da seção 4.1, na qual foi usada a observação geométrica para verificar a convergência de

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 4$$

o que pode ser feito em duas aulas de 50 minutos, a atividade das seção 5.6 pode ser inserida em uma outra aula de 50 minutos para observar uma convergência de série infinita.

Para aplicação da atividade da seção 5.7, mais duas aulas de 50 minutos são suficientes para construir os quadrados, efetuar os cálculos e conseguir os resultados. A divisão da turma em grupos de 5 ou 6 alunos facilita o diálogo e acelera as atividades.

Já a atividade da seção 5.8 tem que ser aplicada após o estudo da atividade da seção 4.7, onde mostramos a divergência da Série Harmônica. Em uma aula de 50 minutos o professor pode comentar sobre essa série e mostrar sua divergência. Depois, em mais duas aulas de 50 minutos pode construir as circunferências da seção 5.8, efetuar os cálculos das áreas e perímetros de cada circunferência e calcular as somas parciais das áreas e dos perímetros.

5.1 RESOLVENDO UM PROBLEMA DE PA

Questão: Determine no quadro abaixo:

a) o primeiro elemento da 31^a linha.

b) a soma dos elementos da 31^a linha.

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
3 & 5 & & & \\
7 & 9 & 11 & & \\
13 & 15 & 17 & 19 & \\
21 & 23 & 25 & 27 & 29
\end{array}$$

Questão retirada de (8).

Pré-requisitos: Conhecimento e aplicação de um dos produtos notáveis: multiplicação da soma pela diferença de dois termos.

Métodos de resolução: Primeiramente o professor deve fornecer tempo aos alunos para que tentem encontrar as respostas por várias tentativas e métodos. Mesmo que alguém consiga completar o quadro até chegar à resposta, o que não é recomendável devido ao enorme trabalho que gera, tudo é válido. Depois o professor deve acrescentar questões para a discussão, como as que seguem:

- Qual a característica comum entre os números que aparecem no quadro?

- Qual a relação de cada linha com o número de termos que ela possui?

- Será que tem um jeito mais fácil e menos trabalhoso de determinar a solução sem ir completando o quadro até chegar à 31^a linha?

- E se quiséssemos informações sobre a 100^a linha, será que valeria a pena usar o procedimento de completar os números no quadro?

- Há algo que nós estudamos que possa encurtar ou facilitar os cálculos?

Como esse trabalho é fundamentado em sequências e séries conhecidas, é importante sugerir aos alunos que tentem identificar e usar séries já estudadas. O professor pode dar algumas dicas:

- Procure identificar, na ordem em que os números são apresentados, uma sequência conhecida.

- Olhando somente os primeiros números de cada linha, notamos alguma sequência conhecida? E se olharmos os últimos números de cada linha, qual sequência enxergamos?

- E se olharmos todos os números como uma sequência só?

Com essa última pergunta os alunos deverão perceber que aparece a sequência dos números naturais ímpares, sobre a qual já falamos neste trabalho:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...$$

Sozinhos, em grupos ou com a ajuda do professor, eles poderão perceber que temos, ao final de cada linha, um total de números escritos na sequência igual as somas parciais dos termos da sequência dos números naturais.

Ao final da primeira linha temos apenas o número 1 escrito, ou seja, apenas 1 termo.

1

Ao final da segunda linha temos um total de $1 + 2$ números escritos: o número 1 na primeira linha e os números 3 e 5 na segunda linha.

1
3 5

Ao final da terceira linha temos um total de $1 + 2 + 3$ números escritos: o 1 na primeira linha, os números 3 e 5 na segunda linha e os números 7, 9 e 11 na terceira linha.

1
3 5
7 9 11

E assim segue infinitamente. Note, por exemplo, que ao fazermos o cálculo $1+2+3+4+5$ estamos calculando o total de termos que aparecem no quadro ao final da quinta linha.

1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
21	23	25	27	29

Concluímos então que o primeiro termo da sexta linha é o 16^o termo da sequência

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...,$$

ou seja, ele aparece após $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ termos já terem sidos escritos.

Assim, o primeiro termo da 31^a linha aparece depois de $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 30$ termos, que já vimos como calcular. Essa soma é

$$\frac{30 \cdot (30 + 1)}{2} = 465$$

Então, o 1^o termo da 31^a linha é o 466^o termo da sequência

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...$$

Assim, se fossemos escrever todos os números naturais que vem antes do número que procuramos, iríamos ter que escrever 465 números ímpares e, obviamente, 465 números pares, ou seja, $465 + 465 = 930$ números naturais. Logo, o número que procuramos é o 931.

Portanto, o primeiro termo da 31^a é o número 931, que é a resposta da letra ***a*** da questão.

Para que os alunos respondam a letra ***b*** cabe inserir algumas perguntas:

- Quantos termos tem na 31^a linha?

- Qual sequência é formada na 31^a linha?

- Já vimos como calcular a soma dos termos de sequências desse tipo?

A sequência da 31^a linha tem 31 termos, começa com o número 931 e vai crescendo como uma PA de razão 2. Precisamos saber qual o último termo dessa linha, ou seja, o 31^o termo da PA (931, 933, 935, ...)

Note que se escrevermos os 60 números naturais que vem em sequência ao número 931, vamos estar escrevendo 30 números pares e 30 números ímpares, sendo que o último desses números é o número que procuramos.

Como $931 + 60 = 991$, o 31^0 termo da sequência (931, 933, 935, ...) é o 991.

Assim, a soma pedida na letra ***b*** é

$$931 + 932 + 933 + ... + 991$$

Já vimos como se calcula a soma dos números ímpares consecutivos, partindo do número 1, o que não é o caso. Mas podemos calcular a soma dos ímpares consecutivos de 1 à 991, menos a soma dos ímpares consecutivos de 1 à 929, que dá a soma pedida.

Repare que

$$931 + 932 + 933 + ... + 991 =$$

$$= (1 + 3 + 5 + ... + 991) - (1 + 3 + 5 + ... + 929)$$

A soma $1 + 3 + 5 + ... + 991$ tem 496 termos e a soma $1 + 3 + 5 + ... + 929$ tem 465 termos. Então:

$$= (1 + 3 + 5 + ... + 991) - (1 + 3 + 5 + ... + 929) =$$

$$= 496^2 - 465^2 = (496 + 465) \cdot (496 - 465) = 961 \cdot 31 = 29791$$

Observação: Para calcular o valor de $496^2 - 465^2$ usamos o produto da soma pela diferença $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, que é um dos produtos notáveis. Calcular os valores das potências, nesse caso, seria bem mais trabalhoso.

Conclusão: Esta questão é uma aplicação direta da soma dos números naturais consecutivos, de primeiro termo igual a 1, e da soma dos números ímpares consecutivos. Procuramos resolvê-la sem usar os conceitos de termo geral e soma dos termos de uma Progressão Aritmética, apenas usando os resultados vistos no capítulo 3. Assim, esta atividade, que é um exemplo típico das que aparecem em provas das Olimpíadas de Matemática, pode ser inserida em séries do Ensino Fundamental, no 8^o ou 9^o anos, como uma introdução aos conceitos de Séries e Sequências Numéricas.

5.2 USANDO SÉRIES NO CAMPEONATO BRASILEIRO DE FUTEBOL

Questão: O campeonato brasileiro de futebol é disputado por 20 times. Nele, quaisquer dois times jogam entre si no primeiro turno, uma única vez. Depois todos os jogos são repetidos no segundo turno.

a) Quantos jogos acontecem no primeiro turno?

b) Quantos jogos acontecem até o fim do campeonato?

Pré-requisitos: Não tem necessidade dos alunos terem conhecimentos prévios de conceitos específicos de matemática, estando eles cursando uma série posterior ao 6^o ano do Ensino Fundamental, para serem apresentados e realizarem esta atividade.

Métodos de resolução: Este problema aparece no intuito de mostrar uma aplicação de séries de números naturais. Ele pode ser pensado de várias maneiras diferentes e, consequentemente, ser resolvido por raciocínios distintos. Aqui apresentamos três modos de resolução, deixando sempre o leque aberto, é claro, para que mais opções de resolução apareçam.

Uma das maneiras de resolver o problema seria observar que em cada rodada acontecem 10 jogos (cada jogo tem 2 times) e, como cada time joga contra outros 19 times (ele enfrenta, obviamente, 1 adversário por rodada), são 19 rodadas. Então, o total de jogos de um turno é $10 \cdot 19 = 190$.

Uma outra maneira de pensar seria combinar 20 elementos em grupos de 2 elementos, pois cada jogo reúne 2 times.

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{2 \cdot 18!} = 10 \cdot 19 = 190$$

E a ideia de séries, onde ela entra?

Pois é, o trabalho é centrado na ideia de observar problemas e situações onde séries matemáticas estão inseridas. Neste caso aparece a soma dos números naturais consecutivos de primeiro termo igual a 1.

Sugiro ao professor que defina os 20 clubes. Um exemplo: Botafogo, Fluminense, Flamengo, Vasco, Corinthians, Palmeiras, São Paulo, Santos, Guarani, Atlético (MG), Cruzeiro, Grêmio, Internacional, Bahia, Vitória, Atlético (PR), Coritiba, Sport(PE), Náutico e Goiás. Depois, é contar a quantidade de jogos que cada clube faz e somar tudo.

O Botafogo joga contra 19 adversários. Vamos somar à esse número a quantidade de jogos que o Fluminense faz, que também é 19. Note que o jogo "Botafogo x Fluminense" foi contado duas vezes, na soma dos jogos do Botafogo e também na soma dos jogos do Fluminense. Então, ao somarmos todos os jogos que tiveram participação de Botafogo ou Fluminense, temos que descontar esse jogo a mais. A soma é $19 + 19 - 1$, ou seja, $19 + 18$ jogos.

Mesmo raciocínio cabe ao juntarmos os jogos do Flamengo aos jogos já contados de Botafogo e Fluminense. Os jogos "Botafogo x Flamengo" e "Fluminense x Flamengo" já estão na contagem, então a soma dos jogos com participações de Botafogo, Fluminense ou Flamengo é $(19 + 18) + 19 - 2$, ou seja, $19 + 18 + 17$.

De maneira análoga veremos que o total de jogos que envolvem Botafogo, Fluminense, Flamengo ou Vasco é $19 + 18 + 17 + 16$.

Seguindo esse raciocínio chegaremos à conclusão que, ao juntarmos os jogos do último time da lista, no caso o Goiás, estes já estarão contados. Assim, o número a ser acrescentado na hora de somar os jogos do Goiás será o 0. Então, a soma de todos os jogos do primeiro turno do campeonato é:

$$19 + 18 + 17 + 16 + ... + 1 + 0$$

Ou melhor:

$$19 + 18 + 17 + 16 + ... + 1$$

Essa é a soma dos números naturais ímpares de 1 a 19, que vimos no capítulo 3. O seu valor é:

$$\frac{19 \cdot (19 + 1)}{2} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 19 \cdot 10 = 190$$

Portanto, no primeiro turno acontecem 190 jogos. Como no segundo turno tudo se repete, o total de jogos até o fim do campeonato é $190 \cdot 2 = 380$ jogos.

Observe que, com 20 times, o total de jogos de um turno, com todos jogando contra todos, é igual a soma de todos os naturais de 1 a 19. Vamos generalizar essa ideia:

Num campeonato com n times, todos jogando contra todos apenas uma vez, o total de jogos é dado por:

$$1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)$$

Essa soma tem $n-1$ termos, todos naturais consecutivos, indo do 1 até o $n-1$. Então, o seu valor é:

$$\frac{(1+(n-1))\cdot(n-1)}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Portanto, com n times, no chamado sistema de pontos corridos, em um turno o total de jogos é:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Observações:

1) Se o número de times do campeonato fosse 21 e não 20, no mesmo regulamento de pontos corridos (todos contra todos), o primeiro raciocínio do cálculo do total de jogos utilizado nesta seção pode induzir ao erro, cuidado! Teríamos: 10 jogos por rodada, cada time joga contra outros 20 times, assim aconteceriam $20\cdot 10=200$ jogos. Temos que lembrar que cada time fica fora de uma rodada, e como ele joga em 20 rodadas, seriam necessárias 21 rodadas para serem realizados todos os jogos. O total correto é, portanto, $21\cdot 10=210$ jogos.

2) Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado em problemas como:

a) Em uma reunião estiveram presentes 12 pessoas e todas cumprimentaram as demais com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados?;

b) Quantas duplas de vôlei podem ser formadas com 10 jogadores?

Conclusão: Nesta questão mostramos como existem vários modos de se resolver um mesmo problema de matemática, ao mesmo tempo que mostramos uma contextualização do conceito de séries numéricas dentro de um tema bem popular no Brasil, que é o futebol.

5.3 ECONOMIZANDO, EM REAIS, VALOR IGUAL A DATA DO DIA

Questão: João resolveu juntar um pouquinho de dinheiro por dia, durante 1 ano. Para ter controle de quanto estava juntando sem perder a conta, resolveu criar uma regra: juntar, por dia, valor igual a data correspondente. Por exemplo: guardar 1 real no 1^o dia do mês, 2 reais no 2^o dia, 3 reais no 3^o dia, e assim por diante, durante todos os meses do ano. Se o ano em que ele resolveu juntar esse dinheiro não é um ano bissexto, quantos reais ele juntou?

Pré-requisitos: Qualquer aluno dos Ensino Fundamental pode realizar esta atividade, que vem em sequência da apresentação da atividade da seção 3.1.1 (Construindo a soma de números naturais consecutivos, de primeiro termo igual a 1).

Métodos de resolução: Algumas questões podem ser levantadas na resolução deste problema:

- João juntará a mesma quantidade de dinheiro todos os meses?

- E se o ano em que questão fosse bissexto?

Qualquer aluno dos Ensinos Fundamental ou Médio pode resolver este problema. O professor pode reservar um tempo para que eles discutam em grupo como resolver a questão. É bem provável que eles identifiquem a soma dos números naturais consecutivos, que já estudamos neste trabalho.

Nos meses janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro, todos de 31 dias, João juntará, em cada um, $1 + 2 + 3 + ... + 31$ reais. Essa soma é:

$$S_{31} = \frac{31 \cdot (31+1)}{2} = \frac{31 \cdot 32}{2} = 31 \cdot 16 = 496$$

Nos meses abril, junho, setembro e novembro, todos de 30 dias, ele juntará, em cada um, $1 + 2 + 3 + ... + 30$ reais. A soma dá:

$$S_{30} = \frac{30 \cdot (30+1)}{2} = \frac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 31 = 465$$

No mês de fevereiro, que tem 28 dias, ele juntará $1 + 2 + 3 + ... + 28$, que dá:

$$S_{28} = \frac{28 \cdot (28+1)}{2} = \frac{28 \cdot 29}{2} = 14 \cdot 29 = 406$$

Assim, ele juntará 496 reais em 7 meses, 465 reais em 4 meses e 406 reais em 1 mês. O total S acumulado em um ano será: $S = 7 \cdot 496 + 4 \cdot 465 + 1 \cdot 406 = 3472 + 1860 + 406 = 5838$. Portanto, João juntará 5838 reais no ano.

Uma questão que pode ser colocada para a turma é: e se o ano fosse bissexto, quantos reais ele juntaria?

Conclusão: Essa questão é uma contextualização de um problema onde é aplicada a soma dos números naturais consecutivos. Basta o aluno observar o número de termos, multiplicar pelo seu consecutivo e dividir o resultado por 2. Contextualizar problemas ajuda na aceitação de fórmulas e resultados.

5.4 ENCONTRANDO A FRAÇÃO IRREDUTÍVEL

Questão: Qual o valor de

$$\frac{1 + 3 + 5 + ... + (2k-1)}{(2k+1) + (2k+3) + (2k+5) + ... + (2k + (2k-1))},$$

onde $k \in \mathbb{N}$?

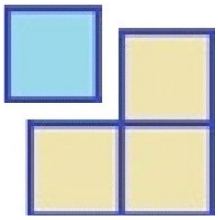
Pré-requisitos: Estudo de Frações e Produtos Notáveis. Esta atividade pode ser inserida em sala de aula na 1^o ano do Ensino Médio, onde os alunos já foram apresentados as fórmulas, expressões algébricas e equações.

Métodos de resolução e construções geométricas:

Primeiro é preciso entender a expressão, que varia de acordo com os valores de k. Para $k = 1$, temos que o último termo do numerador é $2k - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, o primeiro termo do denominador é $2k+1 = 2\cdot 1+1 = 3$ e o último termo de denominador é $2k+(2k-1) = 2\cdot 1+(2\cdot 1-1) = 3$. Na verdade esses cálculos nos mostram que o denominador tem apenas um termo que é o 3. Logo, a expressão fica, para $k=1$ igual a $\frac{1}{3}$.

Podemos visualizar a fração $\frac{1}{3}$ na figura 25. Temos 1 quadradinho azul para 3 quadradinhos amarelos.

Figura 25 – $1/3$



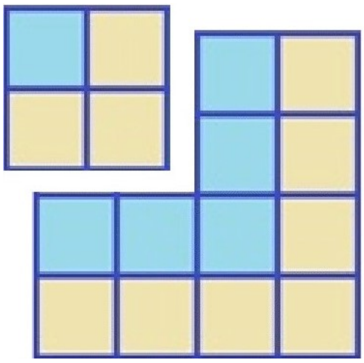
Fonte: Elaboração do Autor (2020)

Para $k=2$, temos que o último termo do numerador é $2k-1 = 2\cdot 2-1 = 3$, o primeiro termo do denominador é $2k+1 = 2\cdot 2+1 = 5$ e o último termo de denominador é $2k+(2k-1) = 2\cdot 2+(2\cdot 2-1) = 7$. Logo, a expressão fica, para $k=2$ igual a

$$\frac{1+3}{5+7}$$

Podemos visualizar essa fração na figura 26. A área ocupada por $1+3$ quadradinhos é igual a $1/3$ da área ocupada por $5+7$ quadradinhos.

Figura 26 – $1+3 = \frac{1}{3}\cdot(5+7)$



Fonte: Elaboração do Autor (2020)

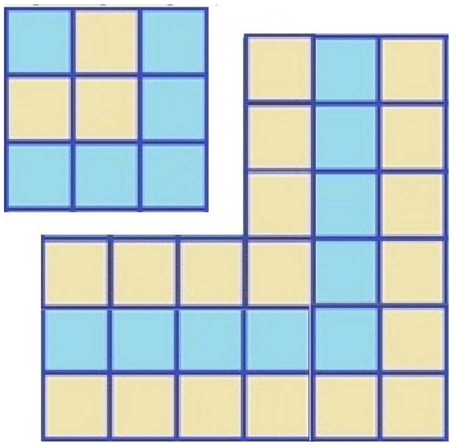
Para $k=3$, temos que o último termo do numerador é $2k-1 = 2\cdot 3-1 = 5$, o primeiro termo do denominador é $2k+1 = 2\cdot 3+1 = 7$ e o último termo de denominador é $2k+(2k-1) = 2\cdot 3+(2\cdot 3-1) = 11$. Logo, a expressão fica, para $k=3$ igual a

$$\frac{1+3+5}{7+9+11}$$

.

Visualizando, na figura 27, vemos que a área ocupada por $1 + 3 + 5$ quadradinhos é igual a $1/3$ da área ocupada por $7 + 9 + 11$ quadradinhos.

Figura 27 – $1{+}3{+}5 = \frac{1}{3}{\cdot}(7{+}9{+}11)$



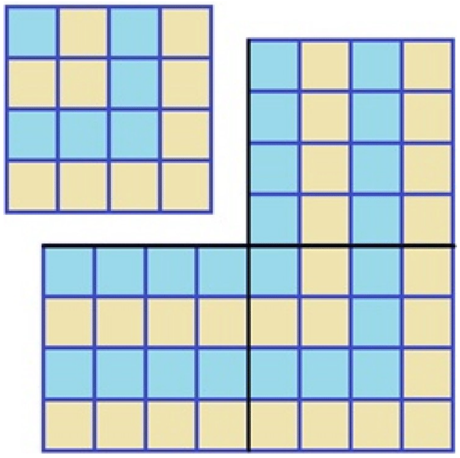
Fonte: Elaboração do Autor (2020)

Para $k = 4$, temos que o último termo do numerador é $2k - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$, o primeiro termo do denominador é $2k + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ e o último termo de denominador é $2k + (2k - 1) = 2 \cdot 4 + (2 \cdot 4 - 1) = 15$. Logo, a expressão fica, para $k = 4$ igual a

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7}{9 + 11 + 13 + 15}$$

Visualizando, na figura 28, vemos que a área ocupada por $1 + 3 + 5 + 7$ quadradinhos é igual a $1/3$ da área ocupada por $9 + 11 + 13 + 15$ quadradinhos.

Figura 28 – $1 + 3 + 5 + 7 = \frac{1}{3} \cdot (9 + 11 + 13 + 15)$



Fonte: Caravana da Matemática UFJF

Em todos os casos a soma do numerador é igual a $1/3$ da soma do denominador. Então, podemos concluir, novamente usando a percepção, que esse processo continuará infinitamente. Logo, todas as frações serão iguais a $1/3$, independente de quantos termos teremos. Portanto:

$$\frac{1+3+5+...+(2k-1)}{(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+...+(2k+(2k-1))}=\frac{1}{3}$$

Aplicando a expressão da soma dos números naturais ímpares consecutivos, começando do 1, tanto no numerador como no denominador da fração, podemos mostrar a veracidade desta informação.

Note que o número de parcelas do numerador é sempre igual ao número de parcelas do denominador. Pois veja:

No numerador temos que $2k-1$ é ímpar, então $2k-1+1=2k$ é par. Metade desse número nos dá a quantidade de parcelas da soma, ou seja, k.

No denominador, para saber a quantidade de parcelas, basta saber quantos números há de 1 até $2k-1$, que é o cálculo feito no numerador. Logo, temos também k parcelas.

Assim, a soma no numerador é:

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2$$

Já a soma no denominador é:

$$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+...+(2k+(2k-1))=$$

$$=2k\cdot k+(1+3+5+...+(2k-1))=2k^2+k^2=3k^2$$

Portanto:

$$\frac{1+3+5+...+(2k-1)}{2k+1+2k+3+2k+5+...+2k+(2k-1)}=\frac{k^2}{3k^2}=\frac{1}{3}$$

Para finalizar, vamos, como exemplo, calcular o valor da expressão:

$$\frac{1+3+5+...+99}{101+103+105+...+199}$$

Temos 50 termos no numerador e 50 termos no denominador. A soma do numerador vai de 1 até 99 e a soma do denominador vai de 101 até 199. Assim, os requisitos para que a fração seja equivalente a $\frac{1}{3}$ são válidos. Então:

$$\frac{1+3+5+...+99}{111+13+15+...+199}=\frac{1}{3}$$

Observação: Note que, somando os termos do numerador ($50^2=2500$) e somando os termos do denominador ($100^2-50^2=(100+50)\cdot(100-50)=150\cdot 50=7500$) teremos a fração $\frac{2500}{7500}$, que é equivalente a $\frac{1}{3}$.

Conclusão: Esta questão mostra uma aplicação da soma dos números naturais consecutivos, de primeiro termo igual a 1, explora conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações.

5.5 CALCULANDO O SALÁRIO DE UM JOGADOR DE FUTEBOL

Questão: Um clube grande do futebol brasileiro fez uma proposta para contratar um craque do futebol europeu. O jogador pediu um salário mensal de 100 mil reais. O clube, achando alto esse valor, desistiu da contratação. Então o jogador, na intenção de continuar a negociação, propôs o seguinte: "Aceito receber apenas 4 reais nos dois primeiros dias de cada mês, 8 reais nos terceiros e quartos dias, 16 reais no quinto e sexto dias e assim sucessivamente, sempre na condição de que esse valor seja dobrado a cada dois dias, até o 30^o dia do mês". Os dirigentes do clube, que se apegaram no valor de 4 reais, aceitaram de imediato essa nova proposta.

a) Quem foi mais esperto nessa negociação, o jogador ou o clube?

b) Em todos os meses do ano o salário do jogador será sempre o mesmo?

c) Quanto ficou sendo o salário médio mensal do jogador?

d) Em algum mês o jogador saiu perdendo nessa negociação?

e) Quantos reais o jogador receberá de salários por ano sem contar 13^o?

Pré-requisitos: Estudo de potências. A atividade pode ser aplicada logo após a apresentação da seção 3.4, do capítulo 3.

Solução:

A ideia aqui é fazer com que os alunos identifiquem nesta questão conceitos ou exemplos já estudados neste trabalho.

Com exceção do mês de fevereiro, que tem 28 dias, em todos os outros meses o jogador terá direito a 14 dobras em seu salário, já que o mesmo dobra a cada 2 dias. No mês de fevereiro essa dobra acontecerá apenas 13 vezes. Repare que, num mês de 30 ou 31 dias, ele recebe 4 reais nos 2 primeiros dias e mais 14 salários que são dobras dos salários anteriores (30 dias formam 15 duplas de dias). Então, em 11 meses do ano, o jogador receberá: $4 + 8 + 16 + 32 + ... + k$, onde k é o 15^0 termo da soma em cada mês.

Note que multiplicando o primeiro termo, 4, por 2, temos o segundo termo; multiplicando 4 por 2^2, temos o terceiro termo; multiplicando 4 por 2^3, temos o quarto termo; e assim por diante. Então, para acharmos o valor de k, que é o 15^o termo da soma, basta multiplicar o primeiro termo 4 por 2^{14}, ou seja, $k = 4 \cdot 2^{14} = 65536$

Logo, o salário S do jogador será a série

$$S = 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ... + 65536$$

Colocando 4 em evidência na série acima, temos:

$$S = 4 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 16384)$$

A série entre parênteses é a soma dos 15 primeiros termos de uma PG de primeiro termo igual a 1 e razão 2, que vimos na seção 3.4. O seu valor é:

$$2^{15} - 1 = 32768 - 1 = 32767$$

Assim, o salário do jogador será, em todos os meses diferentes de fevereiro:

$$S = 4 \cdot 32767 = 131068$$

No mês de fevereiro ele receberá $k = 4 \cdot 2^{13} = 32768$ reais, pois neste mês, por ter 1 ou 2 dias a menos (tem ano que é bissexto), o salário sofrerá uma dobra a menos.

Vamos então responder cada pergunta desse problema:

a) O jogador levou vantagem na negociação, já que em 11 meses ele recebeu mais do que havia pedido inicialmente, que era um salário de 100 mil reais.

b) Não, no mês de fevereiro o salário dele será menor.

c) O jogador recebeu R\$ $131\,068,00$ em 11 meses e R\$ $32\,768,00$ em 1 mês. Assim, o seu salário médio será:

$$\frac{131\,068 \cdot 11 + 32\,768 \cdot 1}{12} = \frac{1\,441\,748 + 32\,768}{12} = \frac{1\,474\,516}{12} = 122\,876,\ 33$$

Portanto o salário médio mensal do jogador será R\$ $122\,876,33$.

d) No mês de fevereiro ele recebeu menos do que a pedida inicial, que era 100 mil reais por mês. Em fevereiro ele recebeu R\$ $67\,232,00$ a menos.

e) No ano o jogador recebeu R\$ $1\,474\,516,00$.

Conclusão: Esta questão é uma aplicação direta da soma dos números naturais cujos termos formam uma Progressão Geométrica de primeiro termo 1 e razão 2. Apenas deduzindo uma expressão para o seu cálculo, atividade da seção 3.4, e com algumas manobras algébricas, é possível resolver essa questão sem as formalidades das teorias de Progressões Geométricas.

5.6 UM PARADOXO DE ZENÃO

Questão: Um atleta, inicialmente no km 0 de uma estrada, corre até o km 16. Em seguida ele dá meia volta e retorna correndo metade do percurso. Depois, novamente dá meia volta e percorre metade do trecho anterior. E segue assim sucessivamente. Qual a soma das distâncias percorridas por esse atleta se ele continuar correndo desta forma infinitamente?

Pré-requisitos: Conceitos básicos de operações com frações. Após a aplicação da atividade da seção 4.1, do capítulo 4, onde mostramos a convergência de uma série infinita, a inserção desta atividade para os 7^o e 8^o anos do Ensino fundamental pode ser feita.

Solução:

De acordo com os dados do problema, o atleta irá correr 16 km para a direita, depois 8 km para a esquerda, depois 4 km novamente para a direita, depois 2 km de novo para a esquerda, e assim sucessivamente. Então ele correrá, em km: $16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$

Essa é uma soma de infinitos termos. No capítulo 4, seção 4.1, vimos que a soma $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$ converge para 4. Então:

$$16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...=16+8+4+4=32$$

Portanto, a distânica a ser percorrida pelo atleta, se ele continuar correndo infinitamente, será 32 km.

Conclusão: Na prática, o atleta nunca atingirá a distância de 32 km, pois só no infinito essa marca seria alcançada.

5.7 CONSTRUINDO INFINITOS QUADRADOS

Questão: (Adaptado (8)) Considere um quadrado Q_1 de lado 1. A partir dele é construído um quadrado Q_2, cujos vértices são pontos médios dos lados de Q_1, depois é construído um quadrado Q_3 de vértices nos pontos médios de Q_2, e assim segue sucessivamente, até a construção de um quadrado Q_n. Sendo S_n a soma das áreas dos n primeiros quadrados, responda:

a) quais os valores de S_1, S_2, S_3 e S_4?

b) é possível construir o quadrado Q_n de tal modo que $S_n > 1,9$?

c) é possível construir o quadrado Q_n de tal modo que $S_n > 2$?

d) é possível construir o quadrado Q_n de tal modo que $S_n = 2$?

e) se n for cada vez maior, os quadrados Q_n têm áreas cada vez menores. Assim, a soma S_n se aproxima de qual número?

Pré-requisitos: Para resolver questões como essa os alunos precisarão já ter tido contato com conceitos básicos de geometria plana, com cálculo de áreas de polígonos, sobretudo do quadrado e do triângulo, e Teorema de Pitágoras. Além disso, precisarão saber operar com frações, potências e radicais. Esses conceitos já são introduzidos no 9^o ano do Ensino Fundamental.

A construção da figura é fundamental para a visualização do problema. Aí surge uma questão: como ter precisão nas contruções dos quadrados interiores que têm números irracionais nas medidas de seus lados?

Uma solução para essa questão seria utilizar o Desenho Geométrico para ilustrar as figuras, mas nem todas as escolas oferecem uma disciplina voltada exclusivamente para a construção de figuras geométricas, com régua e compasso, o que seria de grande utilidade no estudo da Geometria Euclidiana. E poucos livros didáticos de Matemática de Ensinos Fundamental e Médio oferecem noções básicas de Desenho Geométrico. Infelizmente.

Se tiverem conhecimentos de como encontrar o ponto médio de um segmento, os alunos podem perfeitamente construir os quadrados interiores, mesmo os de lados irracionais, com bastante precisão, usando régua e compasso, ou usando as diagonais.

Uma outra opção de construção das figuras seria usar o aplicativo de Matemática GeoGebra. Mas, para usar esse aplicativo, os alunos teriam que ter mais entrosamento com tópicos de matemática que são mais comumente vistos no Ensino Médio, como plano cartesiano, representação de pontos, ponto médio de um segmento, distância de dois pontos. Além disso, infelizmente nem toda comunidade escolar da rede pública está bem equipada com um serviço de internet de boa qualidade.

Para os alunos que não têm conhecimento de conceitos básicos de Desenho Geométrico, nem contato com o GeoGebra, podemos construir os quadrados usando papel milimetrado, como já foi feito neste trabalho antes.

Métodos de resolução e construções geométricas:

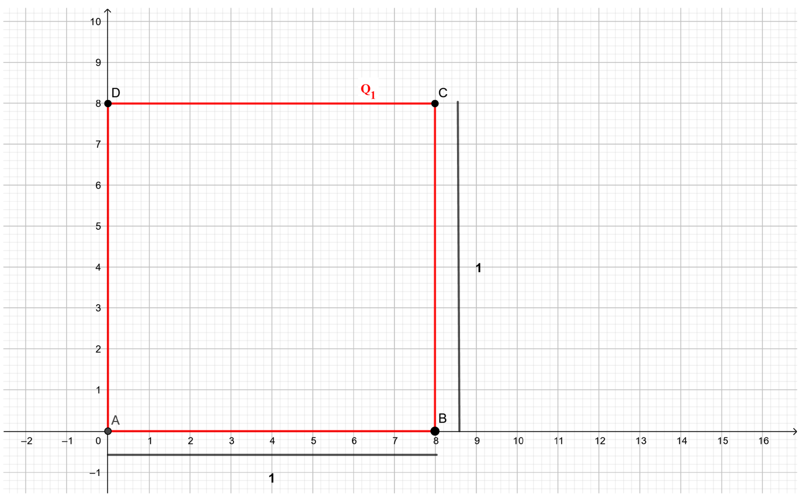
Para tais construções são necessárias folhas de papéis milimetrados, lápis, régua e borracha. A escala para a construção dos quadrados é $8\ cm = 1$.

Separando a turma em grupos de 5 ou 6 alunos, o professor deve orientá-los para que façam as atividades de construções dos quadrados Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, e quantos mais quadrados quiserem, efetuem os cálculos das medidas dos lados dos quadrados, das áreas de cada quadrado e das somas parciais das áreas.

1^o passo: construção do quadrado Q_1, cálculo da sua área e valor de S_1:

Em uma papel quadriculado, com os eixos horizontal (x) e vertical (y) previamente marcados, os alunos podem começar desenhando um quadrado $8\ cm$ x $8\ cm$. Para isso, basta que marquem no plano cartesiano determinado pelos eixos x e y os pontos $A = (0, 0), B = (8, 0), C = (8, 8)$ e $D = (0, 8)$. Usaremos, neste caso, uma escala de $8\ cm = 1$ (não vamos usar as abreviações $u.c.$ e $u.a.$ para indicar, respectivamente, *unidade de comprimento* e *unidade de área* neste problema, pois a questão não cita nenhuma grandeza de medida). Este quadrado será o quadrado Q_1, ilustrado na figura 29, e daremos o nome de A_1 ao valor da sua área.

Figura 29 – Q_1 tem área $A_1 = 1$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

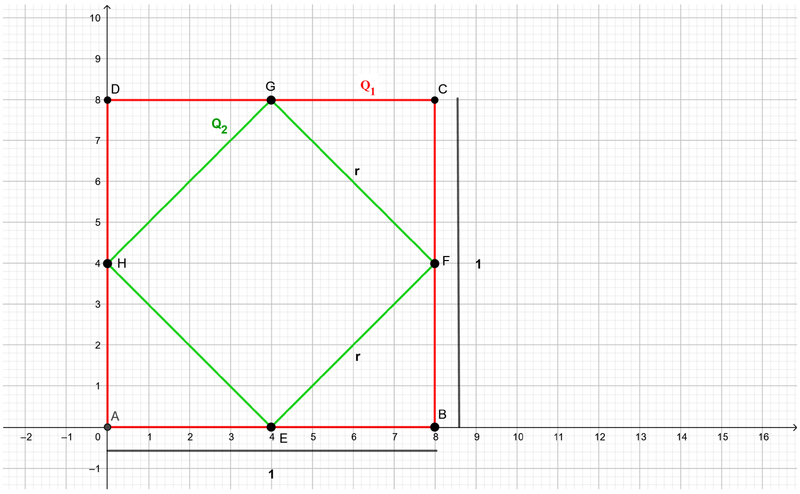
Então: $A_1 = 1 \cdot 1 = 1$

Como S_n é a soma das áreas dos n primeiros quadrados, então S_1 é a área de apenas 1 quadrado, ou seja, é a área do quadrado A_1. Então: $S_1 = A_1 = 1$

2^o passo: construção do quadrado Q_2, cálculo da sua área e valor de S_2:

Os pontos médios dos lados do quadrado Q_1 são os pontos $E = (4, 0)$, $F = (8, 4)$, $G = (4, 8)$ e $H = (0, 4)$. No papel quadriculado fica fácil de percebê-los até mesmo sem saber corretamente suas coordenadas. Ligando esses pontos temos o segundo quadrado, denominado Q_2, de área A_2 (figura 30).

Figura 30 – Q_2 tem área $A_2 = \frac{1}{2}$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

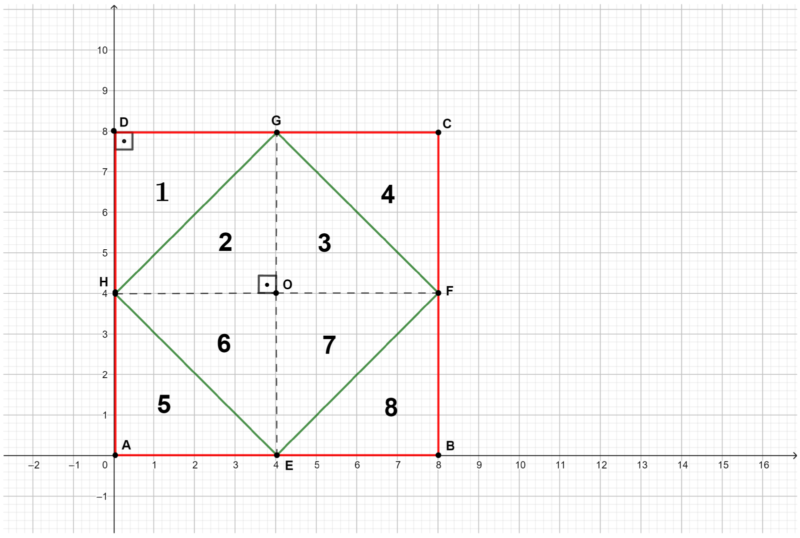
Para calcular o valor da área A_2 do quadrado Q_2 precisamos elevar ao quadrado a medida do seu lado. Note que o lado de Q_2 é também hipotenusa de um triângulo equilátero de catetos iguais a $\frac{1}{2}$. Então, sendo $r > 0$ a medida do lado do quadrado Q_2, o Teorema de Pitágoras afirma que:

$$A_2 = r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Podemos, também, mostrar que a área A_2 é metade da área A_1 dividindo o quadrado Q_1 em quatro partes iguais, traçando as semirretas $\overline{HF}$ e $\overline{GE}$, que formam 90^o (figura 31). Observe que o polígono $HOGD$ é quadrado, pois todos os seus quatro lados têm medidas iguais a metade da medida do lado do quadrado $ABCD$ (Q_1). Como $\overline{HG}$ é diagonal de $HODG$, o triângulo HGD, de número 1, tem área igual ao triângulo HOG, de número 2. De forma análoga mostramos as igualdades das áreas das seguintes duplas de triângulos: 3 e 4; 5 e 6; e 7 e 8.

Segue, então, que a soma das áreas dos triângulos 2, 3, 6 e 7 é igual a soma das áreas dos triângulos 1, 4, 5 e 8, ou seja, ao construirmos o quadrado Q_2 estamos dividindo o quadrado Q_1 em duas partes iguais: a interna ao quadrado Q_2 e a externa ao quadrado Q_2. Isso mostra que a área de Q_2 é metade da área de Q_1. Logo $A_2 = \frac{A_1}{2} = \frac{1}{2}$.

Figura 31 – Mostrando que $A_2 = \frac{A_1}{2}$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Como S_2 é a soma das áreas dos dois primeiros quadrados, ou seja, de Q_1 e Q_2, temos:

$$S_2 = A_1 + A_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Atente-se para o fato de que, ao calcularmos a área do quadrado Q_2, não foi necessário determinar o valor da medida do seu lado, pois a área já apareceu antes. Mas, para determinar a medida do lado do próximo quadrado, o Q_3, vamos precisar saber esse valor. Temos:

$$r^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3^o passo: construção do quadrado Q_3, cálculo da sua área e valor de S_3:

O quadrado Q_3 é formado com os pontos médios dos lados de Q_2. No papel quadriculado é fácil perceber que esses pontos são: $I = (2, 2), J = (6, 2), K = (6, 6)$ e $L = (2, 6)$ (figura 32).

Para calcular a área de Q_3 notamos que a medida do seu lado é também a medida da hipotenusa de uma triângulo equilátero de catetos iguais a:

$$\frac{r}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

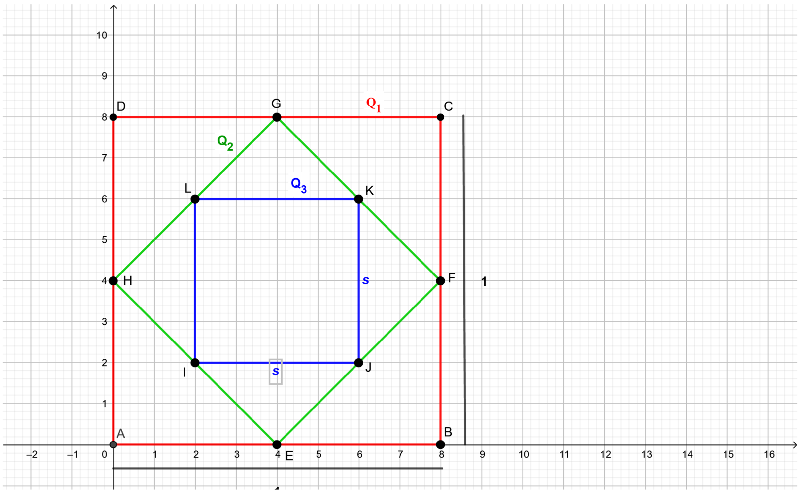
Sendo $s > 0$ a medida do lado do quadrado Q_3, a sua área A_3 é:

$$A_3 = s^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Como S_3 é a soma das áreas dos três primeiros quadrados, ou seja, de Q_1, Q_2 e Q_3, temos:

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Figura 32 – Q_3 tem área $A_3 = \frac{1}{4}$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

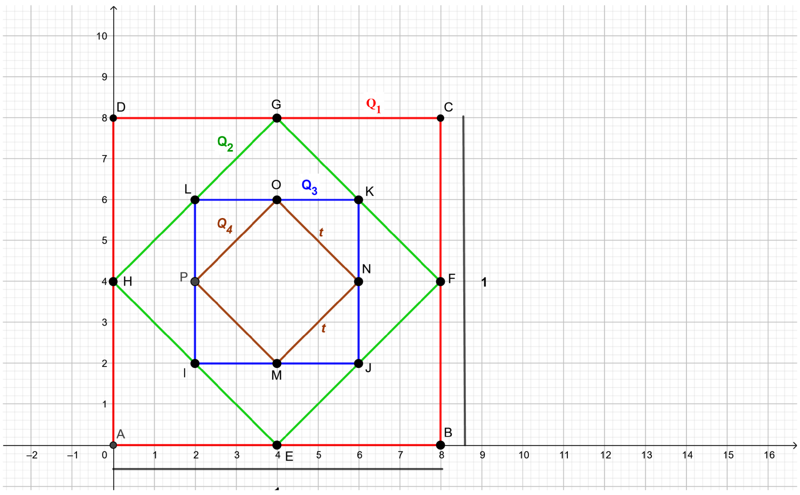
O valor de s, que iremos precisar no cálculo seguinte, é:

$$s^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

4^o passo: construção do quadrado Q_4, cálculo da sua área e valor de S_4:

O quadrado Q_4 é formado ligando os pontos médios de Q_3 (figura 33).

Figura 33 – Q_4 tem área $A_4 = \frac{1}{8}$



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Sendo $t > 0$ a medida do lado de Q_4, t também será a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a:

$$\frac{s}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A área A_4 será:

$$A_4 = t^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

A medida S_4, que é a soma das áreas dos quadrados Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, é:

$$S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

5^o passo: respondendo as questões:

a) As somas parciais são: $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{3}{2}$, $S_3 = \frac{7}{4}$ e $S_4 = \frac{15}{8}$.

b) Seguindo o procedimento de construções dos quadrados e calculando as áreas e as somas parciais, vamos encontrar:

$$A_5 = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad S_5 = \frac{31}{16}$$

$$A_6 = \frac{1}{32} \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{63}{32}$$

$$A_7 = \frac{1}{64} \quad \Rightarrow \quad S_7 = \frac{123}{64}$$

$$A_8 = \frac{1}{128} \quad \Rightarrow \quad S_8 = \frac{255}{128}$$

$$A_9 = \frac{1}{256} \quad \Rightarrow \quad S_9 = \frac{511}{256}$$

$$A_{10} = \frac{1}{512} \quad \Rightarrow \quad S_{10} = \frac{1023}{512}$$

Note que

$$S_5 = \frac{31}{16} = 1,9375$$

Portanto, é sim possível construir o quadrado Q_n tal que $S_n > 1,9$. Para isto basta fazer $n = 5$, pois o quadrado Q_5 tem área $A_5 = \frac{31}{16}$, o que torna $S_5 = 1,9375$.

c) À medida que fomos calculando os valores das áreas A_1, A_2, A_3, A_4, dos respectivos quadrados Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, pudemos observar um padrão de resultados e, então, concluímos os valores das áreas de A_5 à A_{10}. Observando todos estes valores, percebemos que eles estão representados na sequência:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$$

Qual a soma dos infinitos termos dessa sequência?

Vimos no exemplo do capítulo 4, subseção **??**, que:

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 4$$

Adicionando -2 em ambos os lados dessa igualdade, temos:

$$\left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...\right) - 2 = 4 - 2$$

Então:
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2$$

Portanto, quanto mais áreas adicionarmos nessa soma, ou seja, quanto mais quadrados construirmos, mais próximo de 2 o valor S_n se aproxima.

Assim, não tem como construir um quadrado Q_n de tal forma que torne $S_n > 2$.

d) Para que S_n seja 2 seria necessário construirmos infinitos quadrados, mas na prática isso é impossível. Então, não é possível construir um quadrado Q_n tal que $S_n = 2$

Atenção: Uma coisa é fazer S_n se aproximar tanto quanto quisermos de 2, isso é possível, basta aumentarmos a quantidade de termos que iremos somar da sequência formada com os valores das áreas (a construção geométrica na prática vai se tornando cada vez mais difícil, embora saibamos pela teoria que ela sempre será possível de ser feita); outra coisa é fazer S_n ser 2, o que é impossível, pois não podemos escrever infinitos termos na soma das áreas.

e) Essa pergunta já foi respondida na letra c, onde vimos que com n cada vez maior, S_n se aproxima cada vez mais de 2.

Identificando S_n como soma dos termos da PG de razão $q \neq 1$, com $-1 < q < 1$:

Uma outra maneira de verificar que $S_n \to 2$, à medida que n cresce infinitamente, é usando a fórmula dos termos da PG infinita, de razão q, com $-1 < q < 1$.

Sendo S o valor para o qual S_n converge quando $n \to \infty$, temos:
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$
$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Usando a ideia de limite para mostrar a convergência de S_n:

Uma outra maneira de mostrarmos que S_n se aproxima de 2, quando n cresce infinitamente, é observando a lógica dos valores parciais de S_n, representados na sequência:
$$\left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, ...\right)$$

Note que em todos as frações os valores dos numeradores são sempre 1 unidade a menos do que o dobro dos valores dos denominadores. E esses denominadores são potências de 2. Assim, podemos escrever:
$$S_n = \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n}$$

Se n cresce muito, ou seja, $n \longrightarrow \infty$, temos:
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2 - 0 = 2$$

Essa última explicação, que envolve conceitos de limites de uma sequência, estudado somente no Ensino Superior, em disciplinas de Cálculo, não precisa ser mostrada aos alunos. Citei ela no trabalho para mostrar ao professor uma outra forma de se chegar ao resultado.

Conclusão:

O objetivo dessa questão é apresentar uma construção concreta que ilustra a ideia da convergência de uma série de infinitos termos. À medida que vão calculando as somas parciais das áreas, os alunos tendem a perceber a sua convergência para o número 2, pois pode-se notar que os numeradores das somas parciais estão sempre uma unidade a menos do que o dobro dos valores dos denominadores.

Outra pretensão nossa com a proposta deste exercício é reforçar conceitos já estudados no 9^o ano do Ensino Fundamental, melhorar e fixar tópicos de geometria plana e perceber a existência de números irracionais. O professor pode aproveitar para explorar estes conceitos durante a aplicação desta atividade.

5.8 SOMANDO ÁREAS E PERÍMETROS DE CÍRCULOS DE RAIOS $r_n = \frac{1}{n}$

Questão: Considere infinitos círculos C_n de raios $r_n = \frac{1}{n}$. Na figura 34 temos a representação dos círculos C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 e C_7, nas respectivas cores vermelho, verde, azul, amarelo, lilás, marrom e cinza. Sendo P_n e A_n, respectivamente, o perímetro e a área do círculo C_n, determine:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P_n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$

Figura 34 – Círculos de raios $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Pré-requisitos: Para essa questão ser bem compreendida, os alunos deverão já ter visto conceitos de potenciação, múltiplos e divisores de um número natural, mínimo múltiplo comum (mmc), máximo divisor comum (mdc), operações com frações, regra de três simples, área do círculo e perímetro (comprimento) de circunferência. Esses conceitos são estudados nos 6^o e 7^o anos do Ensino Fundamental.

Também são usadas aqui noções básicas de convergência e divergência, que são temas de estudo deste trabalho. Aproveitar resultados já visto nesta dissertação é a intenção. Saber construir circunferências com o compasso também é um conceito interessante para visualizar melhor a questão.

Portanto, a partir do 8^o do Ensino Fundamental esta proposta de atividade já pode ser inserida pelo professor em aulas para mostrar a ideia de somas que convergem ou que divergem. No Ensino Médio ela pode ser inserida como uma atividade complementar e até de visualização de situações de convergência e divergência.

Métodos de resolução e construções geométricas:

Para tais construções são necessárias folhas de papéis cartolina, lápis, régua, compasso e barbantes. A escala para as medidas dos raios das circunferências é $30\ cm = 1$.

Separando a turma em grupos de 5 ou 6 alunos, o professor deve orientá-los para que façam as atividades de construções das circunferências C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 e quantos mais circunferências quiserem.

1^o passo: Construindo as circunferências e definindo uma escala adequada para a unidade.

Podemos começar a resolver esse problema construindo as circunferências (figura 34) em folhas de cartolina. A escolha da escala que usaremos para a unidade é importante e tem que ser bem adequada, pois temos na ilustração, além da circunferência C_1 de raio $r = 1$, circunferências C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 e C_7 de raios, respectivamente, iguais a $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$ e $1/7$. Para que os raios dessas circunferências sejam, em centímetros, números inteiros, é preciso que a unidade (em centímetro) seja um número divisível por 2, 3, 4, 5, 6 e 7. O menor múltiplo comum (mmc) entre esses valores seria o 210, mas construir uma concernência de raio 210 é inviável numa folha de cartolina. Então, tirando o número 7 desse grupo, o mmc$(2, 3, 4, 5, 6) = 60$, que ainda é um número grande. Tirando o número 4 do grupo, temos mmc$(2, 3, 5, 6) = 30$. Construir em folha de cartolina circunferência de raio 30 é possível e até certo ponto bem fácil de se fazer. Assim, usando a escala de 30 cm = 1, vamos ter precisão na construção de 5 das circunferências (C_1, C_2, C_3, C_5 e C_6) e uma boa aproximação para o cálculo do raio da circunferência C_4, que é igual a $30/4 = 7,5$. A divisão $30/7 \cong 4,3$. Podemos então usar a aproximação $4,3$ para construir a circunferência C_7.

Portanto, usando a escala 30 cm = 1, as construções das circunferências C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 e C_7 podem ser feitas seguindo os valores da tabela 4:

Tabela 4 – Circunferências de raios $r_n = \frac{1}{n}$ na escala 30 cm = 1

CIRCUNFERÊNCIAS	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
RAIO $r = \frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
RAIOS EM CM	30	15	10	$7,5$	6	5	$4,3$

Fonte: Elaboração do autor (2020)

Se o professor achar interessante, ele pode construir outras circunferências de raios ainda menores, como as circunferências C_8, que teria, dentro da escala, raio $3,75$ cm, a C_9, de raio aproximado $3,3$ cm e a C_{10}, de raio 3 cm.

2^o passo: resolvendo as questões:

a) Sabemos que o perímetro P de uma circunferência de raio r é $P = 2\pi r$. Então:

No círculo C_1 (vermelho) temos:

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$$

No círculo C_2 (verde) temos:

$$r_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P_2 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

No círculo C_3 (azul) temos:

$$r_3 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P_3 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

No círculo C_4 (amarelo) temos:

$$r_4 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad P_4 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

No círculo C_5 (lilás) temos:

$$r_5 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad P_5 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

No círculo C_6 (marrom) temos:

$$r_6 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad P_6 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

No círculo C_7 (cinza) temos:

$$r_7 = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad P_7 = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{7} = \frac{2\pi}{7}$$

E assim segue infinitamente os demais perímetros:

$$P_8 = \frac{\pi}{4} \qquad P_9 = \frac{2\pi}{9} \qquad P_{10} = \frac{\pi}{5} \qquad \ldots$$

Segue então que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} + \ldots =$$

$$= 2\pi + \pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{7} + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi}{5} + \ldots =$$

$$= 2\pi \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + ...\right)$$

A soma entre parênteses é a ***Série Harmônica***, que vimos na seção 4.7. Essa série diverge, ou seja, podemos tornar o seu valor tão grande quanto quisermos, bastando para isso acrescentarmos a ela mais termos. Então, como 2π é constante, a soma dos perímetros também diverge.

Logo, é impossível existir um cumprimento que seja igual a soma dos infinitos perímetros das infinitas circunferências.

b) Sabemos que a área A de uma circunferência de raio r é dada por $A = \pi r^2$. Então, temos:

No círculo C_1 (vermelho) temos:

$$r_1 = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

No círculo C_2 (verde) temos:

$$r_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

No círculo C_3 (azul) temos:

$$r_3 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad A_3 = \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{9} = \frac{\pi}{9}$$

No círculo C_4 (amarelo) temos:

$$r_4 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad A_4 = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{16} = \frac{\pi}{16}$$

No círculo C_5 (lilás) temos:

$$r_5 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad A_5 = \pi \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{25} = \frac{\pi}{25}$$

No círculo C_6 (marrom) temos:

$$r_6 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad A_6 = \pi \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{36} = \frac{\pi}{36}$$

No círculo C_7 (cinza) temos:

$$r_7 = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad A_7 = \pi \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \pi \cdot \frac{1}{49} = \frac{\pi}{49}$$

E assim segue infinitamente:

$$a_8 = \frac{\pi}{64} \qquad A_9 = \frac{\pi}{81} \qquad A_{10} = \frac{\pi}{100} \qquad \cdots$$

Segue então que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10} + ... =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{25} + \frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{49} + \frac{\pi}{64} + \frac{\pi}{81} + \frac{\pi}{100} + ... =$$

$$= \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + ...\right)$$

A soma entre parênteses é conhecida como o famoso ***Problema da Basileia***. Em 1735 o grande matemático Leonhard Euler[1] demostrou que seu valor converge para o número irracional

$$\frac{\pi^2}{6}$$

(A demonstração deste resultado envolve cálculos mais elaborados e pode ser encontrada, por exemplo, em (3)).

Então, como π é constante, a soma das áreas é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + ...\right) =$$

$$= \pi \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{6}$$

Sabemos que $\pi \cong 3,14$. Então, a soma das áreas converge para:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cong \frac{(3,14)^3}{6} \cong \frac{30,96}{6} \cong 5,16$$

Portanto, diferente do que acontece com a soma dos perímetros, é possível construir. aproximadamente, um espaço cuja área comporte a soma das infinitas áreas das infinitas circunferências. Para isso, basta construir, por exemplo, um retângulo de área $5,2$.

Conclusão:

Este problema nos mostra que podemos construir muito mais circunferências, tanto quanto quisermos, seguindo o padrão da figura 33, que ainda assim a soma de todas as áreas jamais alcançará o valor $5,16$. Se os raios forem medidos em metros, por exemplo, a soma das áreas de todas as circunferências sempre será menor do que a área de um retângulo de $5,16\ m^2$.

Além das circunferências ilustradas no problema, várias outras podem ser construídas, de acordo com a vontade e necessidade didática do professor. As circunferências C_{10}, C_{15} e C_{30}, que no problema têm respectivos raios $r_{10} = \frac{1}{10}$, $r_{15} = \frac{1}{15}$ e $r_{30} = \frac{1}{30}$ são, também, pela escala adotada, possíveis de serem construídas. Seus respectivos raios na construção seriam 3 cm, 2 cm

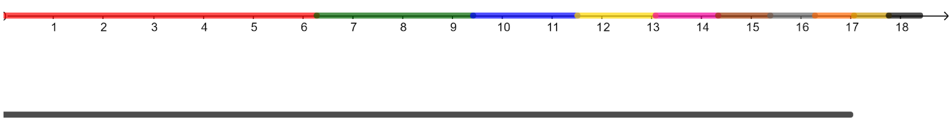
[1] Leonhard Euler (Basileia, 15 de abril de 1707 – São Petersburgo, 18 de setembro de 1783) foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos, contribuiu muito para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática, como o Cálculo e a Teoria dos Grafos.

e 1 cm. Outras circunferências que podem ser feitas: C_8, que na construção tem raio $3,75$ cm; C_{12}, com raio $2,5$ cm; C_{20}, de raio $1,5$ cm e C_{25}, raio $1,2$ cm.

Por outro lado, é impossível conseguir um tamanho de linha capaz de ter um comprimento igual à soma dos perímetros de todas as infinitas circunferências.

Usando pedaços de barbantes para contornar as circunferências, no intuito de calcular os seus perímetros, os alunos podem ir anotando os resultados e fazendo aproximações necessárias. Eles devem esticar, em fila, os diversos pedaços de barbantes que representam os comprimentos das circunferências, de maneira que o final de um barbante coincida com o início do barbante seguinte, para que a soma desses comprimentos seja comparada com o comprimento de um barbante ainda não cortado (figura 35).

Figura 35 – Comparando vários comprimentos de crircunferências com o comprimento de um barbante não cortado



Fonte: Elaboração do autor (2020)

Quanto mais circunferências forem construídas, mais barbantes serão necessários para contorná-las e é bem provável que os alunos percebam que o barbante ainda não cortado será insuficiente para ter um comprimento igual a soma dos comprimentos dos barbantes que representam os perímetros das circunferências.

É importante o professor destacar que não existe o processo de "desencurvar" uma circunferência em Geometria, o que fazemos é uma aproximação da mesma por polígonos, inscritos ou circunscritos. Fazemos também outras construções com régua e compasso para encontrar um valor aproximado para π.

Assim, ao contrário do que acontece com a soma das áreas, fica ilustrada a ideia de divergência de uma soma infinita. Portanto, a soma dos perímetros das infinitas circunferências é divergente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho apresentamos uma alternativa para a introdução do conteúdo Séries Numéricas que, quando estudado pela primeira vez, pode gerar dúvidas e, às vezes, incompreensões aos alunos. Nosso intuito foi contribuir com ideias e sugestões aos professores quando forem falar de somas em séries, finitas ou infinitas.

Procuramos ilustrar situações que sugerem expressões que generalizam resultados de somas finitas, na intenção de despertar nos alunos o interesse pela beleza, a lógica e a importância da Matemática. Também procuramos despertá-los para a noção da existência do finito e do infinito. Como o estudo de sequências numéricas acontece no Ensino Médio, a ideia da soma dos termos de uma sequência praticamente não é abordada na maioria dos livros didáticos do Ensino Fundamental. Mostramos neste estudo que usando pré-requisitos básicos do conhecimento dos alunos é possível realizar atividades que introduzem as ideias de séries convergentes e séries divergentes ainda no Ensino Fundamental.

A noção de divergência é intuitiva quando estamos lidando dentro do conjunto dos números naturais, quando percebemos facilmente que quanto mais números acrescentarmos em uma série, maior será o seu resultado. Essa mesma intuição não pode ser levada para o conjunto dos números racionais, pois, dependendo dos termos que compõem a série infinita, ela pode divergir ou convergir.

Sempre me foi intrigante o fato de somar infinitos termos e ver o resultado da soma se aproximar de um número real fixo, muitas vezes peguei a calculadora e fui somando as frações, aproximando resultados, conferindo o que a fórmula me respondia. Como professor observo a mesma inquietação nos meus alunos. Assim percebi, ao longo de anos lecionando, que precisamos de exemplos diferentes, de alternativas ao que os livros sugerem, de material de pesquisa para aprofundar nosso conhecimento e para buscar situações que possam contribuir para uma melhor assimilação do conteúdo pelos alunos.

Em mais de 25 anos como professor de Matemática dos Ensino Fundamental e Médio sei o quanto é importante termos materiais para pesquisar sobre vários temas que, geralmente, são abordados de maneira semelhante em vários livros, de diferentes autores, que escrevem sobre Matemática para o ensino básico. Muitas vezes até nós professores precisamos de respostas, relembrar conceitos e teorias e ter acesso a conteúdos diferentes, para podermos estar sempre nos atualizando e adaptando o conteúdo nas diversas modalidades de ensino em que atuamos.

Assim, diante dessas situações e em consequência de anos de estudos, de muita pesquisa, dos 2 anos de aprendizado no Mestrado PROFMAT, é que surge este trabalho, com o qual pretendemos contribuir um pouco na introdução do estudo de Séries Numéricas e deixar um legado de observações, experiências e sugestões sobre o tema aos nossos colegas professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

[2] BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

[3] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[4] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática volume único**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2005.

[5] GONZAGUINHA. O que é o que é? In: GONZAGUINHA. **Caminhos do coração**. São Bernardo do Campo: EMI-Odeon, 1982. 1 disco sonoro. Lado A, Faixa 1.

[6] LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[7] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio - Volume 2**. 7^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[9] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

APÊNDICE A – Fórmulas e resultados desenvolvidos neste trabalho

Soma dos n primeiros números naturais consecutivos:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Soma dos n primeiros números naturais ímpares consecutivos:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Soma dos n primeiros números naturais pares consecutivos:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n \cdot (n+1)$$

Soma dos cubos dos n primeiros números naturais:

$$1^3 + 2 + 3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

Soma dos n termos da PG de $a_1 = 1$ e razão $q = 2$

$$1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Soma dos n termos da PG de $a_1 = 1$ e razão $q = 3$

$$1 + 3 + 9 + 27 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Um resultado de somatório

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^{n-1}} = \left(\frac{a}{a-1}\right)^2, \ com\ a \neq 1$$

.

Série Harmônica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + ... \ divergente.$$