

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**Pedro Henrique Gasparetto Lugão**

**Modelagem e simulação da dinâmica populacional do mosquito *Aedes aegypti***

Juiz de Fora

2020

**Pedro Henrique Gasparetto Lugão**

**Modelagem e simulação da dinâmica populacional do mosquito *Aedes aegypti***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lugão, Pedro Henrique Gasparetto.

Modelagem e simulação da dinâmica populacional do mosquito *Aedes aegypti*  
/ Pedro Henrique Gasparetto Lugão. – 2020.

55 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

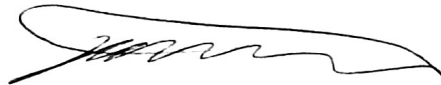
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de  
Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Dinâmica populacional. 3. Modelagem  
Matemática. 4. Métodos numéricos. 5. *Aedes aegypti*. I. Chapiro, Grigori, orient.  
II. Título.

PEDRO HENRIQUE GASPARETTO LUGÃO

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA DINÂMICA POPULACIONAL DO MOSQUITO Aedes  
Aegypti

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.



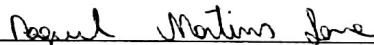
---

Prof. Dr. Grigori Chapiro  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF



---

Prof. Dr. Lucy Tiemi Takahashi  
UFJF



---

Prof. Dr. Raquel Martins Lana  
Fundação Oswaldo Cruz

Juiz de Fora, 19 de fevereiro de 2020.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família que sempre me deu apoio mesmo que eu não pudesse estar presente em todos os momentos. Em especial à minha mãe e minha irmã, pela amizade e acolhimento que sempre me deram.

Agradeço aos meus amigos que me acompanharam nessa jornada, desde os que passaram por toda essa experiência comigo até aqueles que estiveram presentes nos demais momentos, de descontração ou desabafos.

Ao professor Grigori pela orientação e motivação ao longo desse último ano, sem as quais esse projeto não seria possível.

Aos demais professores de ambos os departamentos, de Ciência da Computação e Matemática, que estiveram presentes em diferentes momentos da minha formação. Todos contribuíram de diferentes formas para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a todos envolvidos nos projetos que participei, desde o GET até o PICME, que me deram um vislumbre do que de fato é a vida acadêmica e me mostraram um caminho que espero continuar seguindo.

Agradeço ao professor Fábio e ao Samuel do Instituto de Ciências Biológicas pela colaboração no projeto sempre fornecendo informações fundamentais a respeito do *Aedes aegypti*.

Agradeço ainda à Monalisa pela colaboração e companhia ao longo desse percurso partilhando os problemas e soluções. Por fim, agradeço ao Willian, por ter fornecido o material inicial e trabalhos que foram uma base para a pesquisa aqui realizada.

*[...] any model is at best a useful fiction—there never was, or ever will be, an exactly normal distribution or an exact linear relationship. Nevertheless, enormous progress has been made by entertaining such fictions and using them as approximations.*

(George E. P. Box)

## RESUMO

Busca-se desenvolver neste trabalho modelos computacionais e matemáticos para a ecologia do mosquito *Aedes aegypti*. O trabalho justifica-se pelo impacto crescente da disseminação de doenças transmitidas pela espécie. Espera-se que os modelos possam contribuir no fornecimento de informações para tomada de decisões no controle da dengue, zika e chikungunya. Em um primeiro momento, desenvolve-se um modelo matemático baseado em ideias propostas na literatura e fatores biológicos já conhecidos. Parâmetros como taxa de emergência dos mosquitos e mortalidade serão propostos como variáveis no tempo e no espaço a partir dos conhecimentos biológicos sobre o *Ae. aegypti* presentes na literatura. Uma análise adicional será feita em cima de alguns parâmetros para obter valores com base em dados experimentais. Propõe-se em seguida trabalhar com o modelo matemático numericamente. Será utilizado o método de volumes finitos para a obtenção de resultados teóricos a respeito da proliferação e comportamento dos mosquitos em uma área urbana modelada com base na cidade de Juiz de Fora. Os resultados mostram como a dependência de fatores climáticos é essencial para que o modelo represente melhor a realidade, e sugere novos caminhos a serem seguidos como o estudo da aplicação de inseticidas na área urbana. Embora esta aplicação já possa ser visualizada na implementação atual, fica como um trabalho futuro a mensuração dos parâmetros relativos às substâncias utilizadas nesta técnica de controle.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais. Dinâmica populacional. Modelagem matemática. Métodos numéricos. *Aedes aegypti*.

## ABSTRACT

This work aims to report a descriptive research on the *Aedes aegypti* mosquito behavior through computational simulations. The motivation for this work comes from the crescent impact of the species in society. We hope that a realistic simulation can provide information that helps decision taking in the control of dengue, zika and chikungunya. Initially, a mathematical model is developed based on the literature and known biological factors. Parameters like maturation rate and mortality are proposed as time and spatial variables based on biological knowledge about the *Ae. aegypti* mosquito found in the literature. An additional analysis will be made in some parameters to fit the model using experimental data. After that, we propose to work in the model numerically. The finite volume method will be used to obtain theoretical results in respect to the proliferation and behaviour of mosquitoes in an urban area modeled on the city of Juiz de Fora. The final results show how the climate factors dependence is essential to model's realism, and guide us to new paths like the study of insecticide application in urban area. While the application can already be seen with the current implementation, the measurement of the parameters of the used substances in this technique is proposed as a future work.

Keywords: Partial differential equations. Populational dynamics. Mathematical modelling. Numerical methods. *Ae. aegypti*.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Principais fases de vida do <i>Ae. aegypti</i> . . . . .	17
Figura 2 - Mapa da região central de Juiz de Fora (esquerda), o correspondente modelo computacional (centro) e os resultados numéricos da dispersão dos mosquitos (direita) . . . . .	19
Figura 3 - Taxa de mortalidade da fase aquática e de transição entre fase aquática e móvel em função da temperatura. . . . .	19
Figura 4 - Gráfico da distribuição normal com média 27 e raio 9 onde T representa a temperatura em °C . . . . .	23
Figura 5 - Gráfico da distribuição de <i>plateau</i> com média 27 e raio 9, onde T representa a temperatura em °C . . . . .	23
Figura 6 - Gráfico da distribuição baseada na função erro, onde P representa um valor de precipitação em mm . . . . .	23
Figura 7 - Mapa de parte de Nova Iguaçu - RJ obtido pelo Google Maps, com destaque para as regiões consideradas no experimento de Honório <i>et al.</i> [15] . . . . .	30
Figura 8 - Volume de controle na formulação por volumes finitos. . . . .	37
Figura 9 - Gráficos de $-\log(h) \times \log(E)$ , onde $h$ é a diferença entre $\Delta x$ de duas discretizações e $E$ é o erro calculado entre as discretizações. . . . .	43
Figura 10 - Estado inicial da fase alada em um domínio homogêneo (a) e resultados após 7 dias (b). . . . .	43
Figura 11 - Mapa da região central da cidade de Juiz de Fora (a) e capacidade de suporte $k$ variando no espaço (b). . . . .	44
Figura 12 - Estado inicial da fase alada em bairro de Juiz de Fora (a) e resultados após 365 dias (b). . . . .	45
Figura 13 - Evolução das populações no tempo. . . . .	45
Figura 14 - Evolução das populações no tempo com aplicação de inseticida. . . . .	46
Figura 15 - Média dos dados de população relativa de larvas encontradas por Monaghan <i>et al.</i> [24] entre os anos 2006 e 2008 em Miami. . . . .	46
Figura 16 - Precipitações diárias totais (a) e temperaturas diárias médias (b) na cidade de Juiz de Fora em 2019, fornecido pelo INMET. . . . .	47
Figura 17 - Evolução da população de mosquitos na fase alada ao longo de 2019 na região central da cidade de Juiz de Fora (sem aplicação de inseticidas) . . . . .	48
Figura 18 - Evolução da população das 3 fases ao longo de 2019 em escala logarítmica (sem aplicação de inseticidas) . . . . .	49
Figura 19 - Distribuição espacial da fase aquática (a) e alada (b) no dia 2 de agosto . . . . .	49
Figura 20 - Evolução da população alada sujeita a três situações diferentes: sem inseticidas, com inseticidas e janelas abertas, com inseticidas e janelas fechadas com uma única aplicação em 01/03. . . . .	50

Figura 21 - Evolução da população alada sujeita a três situações diferentes: sem inseticidas, com inseticidas e janelas abertas, com inseticidas e janelas fechadas com aplicações periódicas de 7 em 7 dias a partir de 07/01. . . . . 51

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Valores constantes para os parâmetros . . . . .	21
Tabela 2	– Valores de multiplicadores utilizados para cada parâmetro em relação a cada um dos tipos de região considerados . . . . .	26
Tabela 3	– Número de armadilhas encontradas com ovos contaminados pela substância rubídio em cada região considerada [15] e valores obtidos pela simulação a partir da metodologia descrita após o processo de <i>fitting</i> . . . . .	30
Tabela 4	– Médias e desvios padrões obtidos por 100 execuções do algoritmo genético . . . . .	31
Tabela 5	– Análise de convergência com norma L2 . . . . .	42
Tabela 6	– Análise de convergência com norma L1 . . . . .	42
Tabela 7	– Valores de parâmetros utilizados para a simulação da ação dos inseticidas nas situações com janelas abertas e fechadas. . . . .	50
Tabela 8	– Comparação dos valores das integrais das funções descritas na Figura 21 representando 3 diferentes situações na evolução populacional da fase alada. Inclui-se ainda um valor de porcentagem da população em relação ao maior valor (sem a aplicação de inseticidas) para melhor comparação. . . . .	51

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Delta t$	Varição no tempo
$\Delta x$	Varição no espaço (x)
$\Delta y$	Varição no espaço (y)
$\nabla \cdot ( \ )$	Operador divergente
$\nabla( \ )$	Operador gradiente
$\Delta( \ )$	Operador laplaciano
$M(x, y, t)$	Densidade da fase alada em ponto do espaço e tempo
$A(x, y, t)$	Densidade da fase aquática em ponto do espaço e tempo
$E(x, y, t)$	Densidade dos ovos em ponto do espaço e tempo
$D$	Taxa de difusão
$\gamma$	Taxa de emergência para fase alada
$k$	Capacidade de suporte
$e$	Taxa de oviposição
$\mu_i$	Taxa de mortalidade natural
$h_i$	Taxa de mortalidade por inseticida

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
1.1	OBJETIVOS . . . . .	13
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO . . . . .	14
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	15
2.1.1	<b>Modelagem do crescimento populacional</b> . . . . .	15
2.1.2	<b>Modelagem do transporte por difusão</b> . . . . .	16
2.1.3	<b>Aspectos biológicos do <i>Aedes aegypti</i></b> . . . . .	17
2.1.4	<b>Revisão bibliográfica</b> . . . . .	18
2.2	MODELO PROPOSTO . . . . .	20
2.3	DESCRIÇÃO DOS PARÂMETROS . . . . .	22
2.3.1	<b>Taxa de mortalidade</b> . . . . .	22
2.3.2	<b>Taxa de emergência</b> . . . . .	24
2.3.3	<b>Taxa de eclosão</b> . . . . .	24
2.3.4	<b>Coefficiente de oviposição</b> . . . . .	24
2.3.5	<b>Modelagem do transporte por difusão</b> . . . . .	25
2.3.6	<b>Dependências espaciais dos parâmetros</b> . . . . .	26
2.3.7	<b>Modelagem da dispersão de inseticida</b> . . . . .	27
2.4	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	28
<b>3</b>	<b>AJUSTE DE PARÂMETROS</b> . . . . .	<b>29</b>
3.1	DIFUSÃO E MORTALIDADE . . . . .	29
3.2	CAPACIDADE DE SUPORTE . . . . .	31
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	34
<b>4</b>	<b>RESOLUÇÃO NUMÉRICA</b> . . . . .	<b>35</b>
4.1	DISCRETIZAÇÃO DO MODELO PELO MÉTODO DE VOLUMES FINI- TOS . . . . .	36
4.2	DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	38
4.3	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA . . . . .	40
4.4	SIMULAÇÃO DO MODELO COM PARÂMETROS CONSTANTES . . . . .	42
4.5	SIMULAÇÃO DO MODELO COMPLETO E DISCUSSÕES . . . . .	46
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>52</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>53</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Dengue, zika e chikungunya são problemas frequentes no âmbito da saúde pública brasileira. Durante o ano de 2019 foram registrados 1.544.987 casos prováveis de dengue no país [9], em comparação com 238.389 em 2018 [10]. O mapa da distribuição da dengue pelo mundo visto no trabalho de Bhatt *et al.* [4] mostra como o Brasil é um dos países mais afetados pela doença. A disseminação de tais doenças é principalmente causada pelo vetor, o mosquito *Aedes aegypti*, que é muito bem adaptado a áreas urbanas e principalmente ao clima do Brasil, como discutido por Barreto e Teixeira [3] e Teixeira [27].

Esse trabalho busca estudar o comportamento do *Ae. aegypti* em área urbana por meio de técnicas matemáticas e computacionais. O estudo envolve a modelagem da dinâmica populacional dos insetos levando em consideração fatores climáticos para descrever a distribuição espacial e temporal dos mesmos. As simulações e ajustes de parâmetros no modelo são feitos computacionalmente utilizando técnicas como programação genética e volumes finitos. Todo este ferramental desenvolvido nos permite tentar abordar técnicas de controle populacional, e isto será apresentado em uma aplicação final dessa dissertação.

Existem diversas formas de combate à proliferação de mosquitos transmissores de doenças. Algumas delas são descritas por Ferguson [14], como o uso de inseticidas, modificações genéticas nos mosquitos, e infecção pela bactéria *Wolbachia*.

Yamashita *et al.* [34] buscam estudar a ação de adulticidas (inseticidas para a fase alada, normalmente aplicados na forma de “fumacê”) em regiões reais como bairros das cidades de Juiz de Fora e Rio de Janeiro.

Modificações genéticas podem incluir desde a esterilização de mosquitos (machos estéreis não gerariam crias mas ocupariam um dos ciclos gonotróficos das fêmeas, diminuindo a reprodução) a modificações que influenciam a taxa de machos/fêmeas dos mosquitos gerados na reprodução (gerando uma população de apenas machos e levando os mosquitos à extinção). Dufourd e Dumont [11], por exemplo, buscam modelar o controle de mosquitos por meio da inserção de mosquitos machos estéreis, e para isso utilizam modelos de EDPs.

Thomé *et al.* [28] estudam como otimizar o uso conjunto de mosquitos estéreis e inseticidas em relação aos custos monetários e sociais. A partir de uma modelagem levando em consideração apenas aspectos temporais, os autores concluem que a utilização das duas técnicas com determinadas proporções são essenciais para minimizar os custos. A técnica de modificação de mosquitos apresenta-se como mais custosa, mesmo sendo mais eficiente.

*Wolbachia* é uma bactéria que é capaz de infectar mosquitos e é transmitida para as crias de uma fêmea infectada [16]. Além disso, uma fêmea não infectada não é capaz de se reproduzir com um macho infectado, se assemelhando à técnica de esterilização. A principal vantagem da bactéria é que, como descrito por Walker *et al.* [33], ela torna o mosquito menos eficaz como vetor de doenças. Baseando-se em uma modelagem em EDPs, Almeida *et al.* [2] estudam a

difusão espacial dos mosquitos buscando otimizar a localização de onde deverão ser liberados mosquitos infectados com a bactéria *Wolbachia*.

Ferguson [14] ainda destaca a dificuldade em eliminar o mosquito transmissor da dengue em relação ao, por exemplo, transmissor da malária. Segundo o autor, isso se deve principalmente ao comportamento mais adaptado à área urbana do *Ae. aegypti*. Faltam evidências rigorosas que suportem o uso de uma técnica de combate mais eficaz. Nesse sentido, simulações computacionais (como a presente nesse trabalho) representam um esforço experimental que pode motivar a implementação de políticas públicas não apenas como uma resposta a epidemias, mas como também de forma preventiva.

## 1.1 OBJETIVOS

Traçamos então três objetivos primários:

- Desenvolvimento de um modelo matemático com base no de Yamashita *et al.* [34] que busca considerar novas dependências temporais e espaciais conforme as observadas na literatura e explicar como atribuir o valor de cada parâmetro utilizado..
- Ajuste de parâmetros do modelo desenvolvido, principalmente aqueles que são difíceis de serem medidos em laboratório, como coeficiente de difusão (que diz respeito à movimentação dos mosquitos) e capacidade de suporte (que reflete a capacidade do meio de abrigar larvas e pupas). Para atingir o objetivo, realizamos dois estudos. No primeiro utilizamos dados encontrados por Horório *et al.* [15] para encontrar valores que definam a dispersão e a mortalidade de mosquitos em uma cidade por meio de um algoritmo genético. No segundo trabalho utilizamos equilíbrios de soluções de ondas viajantes e dados de Massad *et al.* [23] para estimar a capacidade de suporte de um ambiente urbano.
- Implementação e validação de um método numérico para a obtenção de soluções para o modelo desenvolvido com os parâmetros já definidos. Para realizar tal objetivo utilizamos o método de volumes finitos em um esquema de Crank-Nicolson implementado no *software* MATLAB. A implementação será validada por meio de um estudo numérico e testes com os parâmetros constantes.

Com os três objetivos concluídos, partimos para uma simulação de 1 ano da dispersão dos mosquitos em uma região da cidade de Juiz de Fora. Para a simulação, passamos a considerar variações espaciais e temporais, e utilizamos as informações espaciais para discutir a localização dos focos de mosquitos e tratar o problema de dispersão de adulticidas nas casas com janelas abertas ou fechadas.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, é exposto o modelo desenvolvido no trabalho, especificando suas principais diferenças em relação aos modelos estudados e discutindo como diversos parâmetros podem ser modelados com base em informações na literatura. A seguir, no Capítulo 3 é feita a formulação de alguns problemas inversos a respeito dos parâmetros a serem utilizados. Possíveis soluções e discussões também serão apresentadas buscando fundamentar o modelo desenvolvido. No Capítulo 4 vemos como utilizar a técnica de volumes finitos para obter resolução numérica, avaliando a implementação e demonstrando a aplicação com uma simulação de uma região real no período de 1 ano. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos algumas conclusões e propostas de trabalhos futuros.



## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo buscamos descrever aspectos iniciais da modelagem da dinâmica populacional do *Aedes aegypti*. Após passar por alguns aspectos introdutórios temos uma base para apresentar o modelo proposto e descrever cada parâmetro e sua forma de obtenção em uma formulação inicial.

### 2.1 INTRODUÇÃO

Começamos introduzindo algumas ideias com equações diferenciais e aspectos biológicos do mosquito a serem considerados no trabalho. Seguimos então para uma breve revisão bibliográfica com o objetivo de descrever o que é feito na literatura e motivar as alterações realizadas neste trabalho.

#### 2.1.1 Modelagem do crescimento populacional

É bastante comum a modelagem de crescimento populacional por meio de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Segundo Krebs [17], uma população com um período de reprodução prolongado ou contínuo e com indivíduos que se reproduzem mais de uma vez durante a vida pode ter seu crescimento modelado por meio da EDO:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P, \quad (2.1)$$

onde  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  representa a população em um instante de tempo  $t$  e  $\alpha$  uma taxa de reprodução instantânea. Em alguns contextos é útil introduzir a ideia de capacidade de suporte, que representa a quantidade máxima de população que um ecossistema permite suportar. Desta forma, a taxa de crescimento passa a ser influenciada pela distância entre a população atual e o máximo suportado:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{P}{K}\right) P, \quad (2.2)$$

onde  $k$  é a população máxima suportada pelo ambiente. Esta equação é chamada de equação logística.

Encontramos no trabalho de Krebs [17] algumas críticas à equação logística. Dentre elas há o fato de que algumas populações assumem um comportamento periódico em seu crescimento, que poderia estar associado a um atraso da reação do ambiente em relação ao crescimento populacional fazendo a população oscilar em torno de sua capacidade de suporte. Outro fator é que muitas espécies possuem um ciclo de vida bem mais complexo, com fases (como ovos e larvas) que possuem propriedades diferentes e podem reagir de diferentes modos à capacidade de suporte do meio.

### 2.1.2 Modelagem do transporte por difusão

Enquanto a modelagem por EDOs pode ser utilizada ao considerar a variação temporal de uma população, podemos adicionar variáveis espaciais aos modelos para podermos considerar a densidade populacional em cada ponto de uma região. Com isso, passamos a utilizar equações diferenciais parciais (EDPs) na modelagem da movimentação dos mosquitos.

O transporte por difusão é um fenômeno que pode ser modelado por meio de EDPs. Tal fenômeno pode ser visto desde na dispersão de um soluto em um fluido [31] até na propagação do calor em uma superfície [6]. O princípio básico é que um material tende a se mover de onde está mais concentrado para uma região onde está menos concentrado. A mesma ideia é usada para descrever o movimento Browniano, que se caracteriza pela movimentação aleatória de partículas em um fluido. Assumimos em nossos modelos que o mosquito assume uma movimentação aleatória que pode ser descrita pela modelagem a seguir.

Inicia-se a modelagem considerando uma função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que mede a densidade de uma substância em um ponto do espaço (de dimensão  $n$ ). Assim, ao integrar a função no espaço obtém-se uma medida de massa da substância na região de interesse. Um princípio de conservação nos diz que a variação da massa em uma região é dada apenas pelo fluxo da substância que entra ou sai pela fronteira. Considerando  $R$  uma superfície fechada e  $\partial R$  a sua fronteira orientada positivamente, o princípio pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_R u dA = - \oint_{\partial R} F \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.3)$$

onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial representando o fluxo do objeto estudado.

O sinal negativo se deve ao fato da normal  $\mathbf{n}$  apontar para fora da superfície. Pelo Teorema da Divergência de Gauss, o lado direito da equação pode ser substituído pela integral do divergente do fluxo na região. Ainda, considerando a função  $u$  como contínua, obtemos:

$$\iint_R \frac{\partial u}{\partial t} dA = - \iint_R \operatorname{div} F dA \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \iint_R \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} F \right) dA = 0. \quad (2.5)$$

Tem-se como resultado visto em [21] que, se a integral de uma função contínua é igual a 0 em um domínio arbitrário, a mesma se iguala a 0 em qualquer ponto. Assim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} F. \quad (2.6)$$

Agora, como se trata de um processo difusivo, é válido considerar que o fluxo da substância deve ser proporcional ao gradiente da concentração. Deve ter ainda sentido oposto ao mesmo, uma vez que o fluxo vai em direção à região de menor concentração:

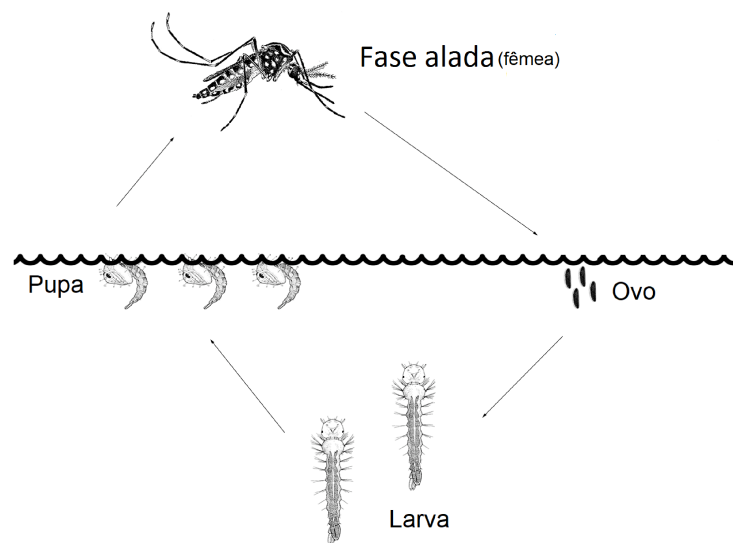
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(-D\nabla u) = D\Delta u. \quad (2.7)$$

A última igualdade é obtida considerando  $D$  constante no espaço. A equação encontrada é conhecida na literatura por equação do calor ou equação da difusão [13].

### 2.1.3 Aspectos biológicos do *Aedes aegypti*

O ciclo de vida do mosquito pode ser descrito por 4 fases principais: ovo, larva, pupa e alada, como visualizado na Figura 1. Tendo em vista que apenas os mosquitos fêmea sugam sangue humano e botam ovos, é comum a representação de apenas as fêmeas nos modelos.

Figura 1 - Principais fases de vida do *Ae. aegypti*.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nota: Ilustrações de Christophers [7].

Enquanto a espécie necessita apenas de carboidratos extraídos de alimentos como néctar e pólen para sobreviver, as fêmeas também necessitam de proteína para a postura dos ovos e fazem uso do sangue humano para suprir esta necessidade. O ovo eclode em contato com a água a partir de dois dias (podendo resistir por meses até estar em boas condições para eclosão), e a larva se desenvolve e alimenta-se submersa, indo para a superfície apenas para respirar. Após um tempo, a larva se desenvolve em pupa e fica na superfície até emergir para a fase alada (cerca de 8 dias após a eclosão). No último estado, o mosquito pode percorrer entre 65 e 800 metros por semana. Mais informações a respeito deste tema são encontradas nos trabalhos de Christophers [7] e Valle *et al.* [30].

É válido destacar que muitos modelos simplificam o ciclo de vida do mosquito unindo fases com características semelhantes. Levando em consideração aspectos espaciais é imprescindível a separação da fase alada das demais, por ser a única capaz de se movimentar livremente. Na nossa modelagem são consideradas também uma fase aquática (composta pelas pupas e larvas) e uma fase que compreende os ovos, capazes de sobreviver em diferentes condições mas

só eclodindo em contato com água.

Uma revisão de diversos modelos da dinâmica populacional dos mosquitos é feita por Lana *et al.* [18]. Pode-se observar a utilização das 4 fases atribuindo diferentes aspectos como capacidade de suporte em fases distintas e alguns parâmetros variáveis em um modelo de EDOs.

#### 2.1.4 Revisão bibliográfica

O trabalho de Takahashi *et al.* [26] é um dos primeiros a introduzir a modelagem por EDPs para a dinâmica populacional do *Ae. aegypti*, considerando uma movimentação difusiva (aleatória) e uma advectiva (guiada pelo vento). Para isto, faz uso do modelo composto pelas equações

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(vM) + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - (\mu_2 + \gamma) A, \quad (2.9)$$

com as variáveis  $M$  representando a população dos mosquitos fêmeas na fase móvel (mosquitos adultos) e  $A$  representando os mosquitos na fase imóvel (ovos, larvas ou pupas). Consideram-se ainda os parâmetros  $D$  (coeficiente de difusão),  $v$  (velocidade),  $\gamma$  (taxa de transição entre fase imóvel e móvel),  $r$  (taxa de oviposição) e os coeficientes de mortalidade  $\mu_1$  e  $\mu_2$  para as fase móvel e imóvel, respectivamente .

Takahashi *et al.* [26] utilizam um método numérico para estudar soluções de onda viajante (uma solução analítica que representa a conexão entre equilíbrios distintos de um sistema). A partir dos equilíbrios encontrados os autores concluem que o modelo representa bem o fenômeno de invasão biológica.

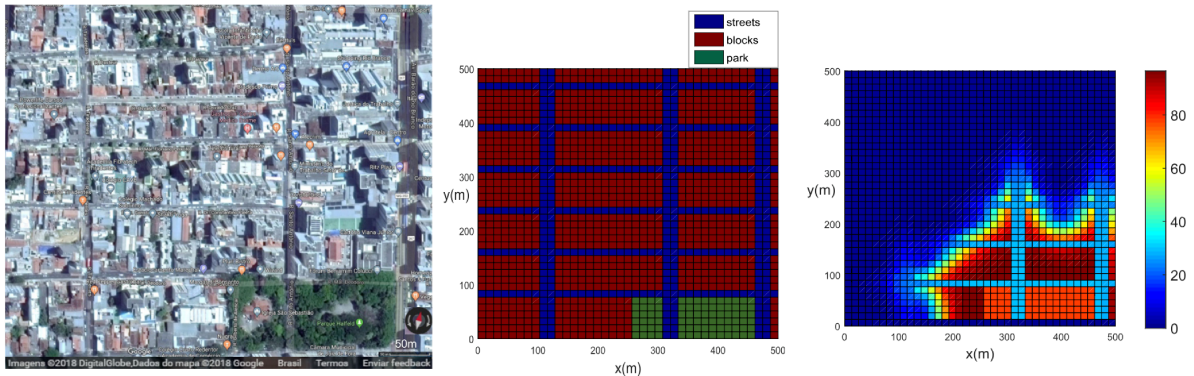
O trabalho de Yamashita *et al.* [35] dá continuidade ao trabalho de Takahashi *et al.* [26] construindo um método para provar a existência de soluções de ondas viajantes no modelo anterior.

Yamashita *et al.* [34] expandem o modelo de Takahashi *et al.* [26] considerando um espaço bidimensional e adicionando um fator de mortalidade por inseticida em ambas as fases. São obtidos ainda resultados numéricos como o apresentado na Figura 2.

Esperam-se que fatores externos como temperatura, precipitação e direção do vento possam influenciar no ciclo de vida do *Ae. aegypti*, desde o desenvolvimento embrionário até a dispersão da fase adulta. Apesar disso, são poucos os trabalhos que consideram de fato variações no modelo de dinâmica populacional a partir dessas variações climáticas.

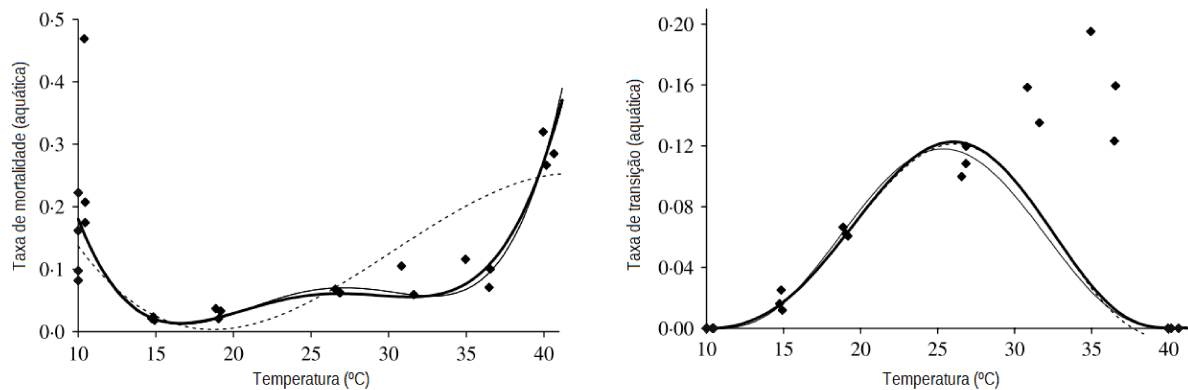
Yang *et al.* [37] estudam como os parâmetros da modelagem como mortalidade e transição entre fases aquática e móvel podem ser influenciados pela variação de temperatura. Para isto, os autores tomam como base um modelo em EDOs com duas fases: a aquática que compreende as fases larva e pupa (deixando a fase ovo implícita no desenvolvimento de parâmetros) e a mó-

Figura 2 - Mapa da região central de Juiz de Fora (esquerda), o correspondente modelo computacional (centro) e os resultados numéricos da dispersão dos mosquitos (direita)



Fonte: Yamashita *et al.* (2018) [34].

Figura 3 - Taxa de mortalidade da fase aquática e de transição entre fase aquática e móvel em função da temperatura.



Fonte: Yang *et al.* (2009) [37].

Nota: Cada linha busca aproximar os pontos encontrados por polinômios de diferentes graus.

vel que corresponde ao mosquito adulto fêmea, considerando que sempre haverá um mosquito macho para possibilitar a reprodução. Os autores ainda realizam experimentos controlados em laboratório para estimar valores em diferentes temperaturas, como visto na Figura 3. Mesmo desconsiderando variação dos parâmetros pela temperatura, outros trabalhos utilizam valores base descritos por Yang *et al.* [37] para simulações computacionais.

Buscando entender como a velocidade do vento pode influenciar na movimentação de mosquitos, Cummins *et al.* [8] modelam por meio de um comportamento difusivo-advectivo como ocorre a formação das “plumas de odor”, que guiam os mosquitos até o seu alimento. Este trabalho apresenta informações a respeito do comportamento dos mosquitos que justificam alguns aspectos supostos no modelo de Takahashi *et al.* [26], enquanto coloca outros em questionamento:

- Os mosquitos não interagem entre si na movimentação e, na falta de informação sobre

localização do alimento, eles assumem um comportamento denominado *plume-finding behavior*. Uma das hipóteses é que este é um movimento aleatório, justificando o comportamento difusivo suposto.

- O vento influencia na descoberta das plumas de odor pelos mosquitos, incentivando uma movimentação em sua direção. Apesar disso, o transporte passivo do mosquito pelo vento (movimento advectivo) é pouco comum.

Considerando os fatores aqui expostos, o trabalho descrito nesse trabalho busca utilizar as informações fornecidas por Cummins *et al.* [8] para realizar pequenas modificações no modelo e o trabalho de Yang *et al.* [37] para motivar a inclusão de dependências climáticas nos parâmetros utilizados.

O modelo proposto estende o de Yamashita *et al.* [34] para desenvolver uma modelagem e implementação computacional que melhor reflita a realidade, considerando alguns aspectos biológicos que sugerem alterações na formulação do modelo.

## 2.2 MODELO PROPOSTO

Na modelagem da dinâmica populacional do *Ae. aegypti*, o modo como as fases do ciclo de vida são consideradas em um modelo não seguem um padrão bem definido [18][34]. Por meio de testes iniciais foi observado que a união do ovo e as fases aquáticas leva a erros por não conseguir refletir a diferença do comportamento ao longo de um ano, tendo em vista a alta capacidade de sobrevivência do ovo [7] em relação às demais fases. Ainda, a dependência de fatores climáticos encontrada nos parâmetros [37] é algo que, ao ser ignorado, torna o modelo incapaz de refletir a periodicidade dos surtos de mosquitos observada na realidade. O modelo desenvolvido busca resolver principalmente estes dois problemas, introduzindo também valores para os parâmetros bem diferentes dos propostos por Yamashita *et al.* [34] com base em aspectos biológicos estudados por Christophers [7] que, no Capítulo 3, serão ajustados por meio de dados experimentais.

Consideramos neste modelo três fases do ciclo de vida dos mosquitos: a densidade da fase alada (móvel) do mosquito fêmea  $M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a densidade da fase aquática (larvas e pupas)  $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e a densidade da fase ovo  $E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , todas consideradas em um domínio espacial bidimensional medido em metros e um domínio temporal medido em dias. Propõe-se esta divisão por conta das peculiaridades da fase ovo que devem ser consideradas no modelo. O ovo pode ser considerado, por exemplo, com mortalidade bem inferior às mortalidades das demais fases, uma vez que resiste por um longo tempo até obter condições ideais para eclodir. Enquanto as larvas e pupas possuem diferenças, neste modelo foi optado pela união destas fases em uma fase alada por fim de simplificação. Assim, propomos o seguinte modelo:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla M) + \gamma A - (\mu_1 + h_1) M, \quad (2.10)$$

Tabela 1 – Valores constantes para os parâmetros

Parâmetro	Símbolo	Valor base/dimensão [7, 30]
Taxa de emergência	$\gamma$	0,125/dia
Taxa de oviposição	$r$	15/dia
Taxa de eclosão	$e$	0,25/dia
Mortalidade da fase alada	$\mu_1$	0,1
Mortalidade da fase aquática	$\mu_2$	0,1
Mortalidade dos ovos	$\mu_3$	0
Mortalidade induzida	$h_i$	0
Coefficiente de difusão	$D$	$111m^2/dia$
Capacidade de suporte	$k$	$100/m^2$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

$$\frac{\partial A}{\partial t} = e \left(1 - \frac{A}{k}\right) E - (\mu_2 + h_2 + \gamma) A, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = rM - (\mu_3 + h_3 + e) E, \quad (2.12)$$

onde representamos o coeficiente de difusão com  $D$ , a taxa de emergência da fase aquática para fase adulta com  $\gamma$ , a capacidade de suporte da fase aquática com  $k$ , a taxa de eclosão de ovos com  $e$  (ajustada para representar a eclosão de mosquitos fêmeas), a taxa de oviposição com  $r$ , a taxa de mortalidade natural de uma determinada fase com  $\mu_i$ , e a taxa de mortalidade causada pelo uso de inseticidas em cada fase com  $h_i$ .

As seguintes simplificações são feitas em relação ao modelo proposto por Yamashita *et al.* [34], motivadas por um melhor entendimento do comportamento biológico dos mosquitos. Primeiramente, o movimento advectivo (ação do vento) não influencia diretamente no movimento dos mosquitos [8]. Note que também limitamos o uso da capacidade de suporte à fase aquática, o que se deve ao “efeito *Gilett*”, discutido por Valdez *et al.* [29], onde é observado um retardamento da eclosão de ovos à medida que a população larval aumenta, supostamente por causa da competição intraespecífica. Tal efeito é descrito como o principal na limitação populacional do mosquito, justificando a remoção da capacidade de suporte nas demais fases para fim de simplificação.

Com base nas informações coletadas dos trabalhos de Christophers [7] e Valle *et al.* [30] a respeito dos aspectos biológicos do mosquito, fomos capazes de estimar alguns dos parâmetros dispostos na Tabela 1. Enquanto a capacidade de suporte  $k$  é uma estimativa inicial que não corresponde completamente ao modelo implementado (será melhor estudado na Capítulo 3, relativo ao ajuste dos parâmetros com dados experimentais), os demais parâmetros serão melhor explorados nas próximas seções, tornando a Tabela 1 apenas uma referência de valores base que poderiam ser utilizados se fôssemos ignorar a variação temporal.

## 2.3 DESCRIÇÃO DOS PARÂMETROS

Buscando a obtenção de simulações mais realistas, é importante notar que o crescimento populacional de mosquitos na vida real muitas vezes assume um comportamento periódico. O modelo descrito com parâmetros constantes resulta em uma solução de onda viajante entre equilíbrios, como descrito por Yamashita *et al.* [35]. Tal solução não reflete o comportamento real da população a longo prazo por ser possível observar variações na população após a solução alcançar um equilíbrio.

A periodicidade na aparição de mosquitos é obtida principalmente devido a variações climáticas que ocorrem durante o ano. A população tende a decair durante períodos frios e crescer durante o verão. Como apresentado por Yang *et al.* [37], alguns dos parâmetros usados no modelo dependem da temperatura ambiente. Consideramos ainda o fato que dias chuvosos resultam em mais áreas de postura de ovos para os mosquitos, e tentaremos incluir uma dependência na precipitação para parâmetros como taxa de oviposição.

Primeiramente, vamos tomar algumas funções auxiliares para a construção das dependências. Observa-se que a variável  $T \in \mathbb{R}$  é utilizada para representar a temperatura em °C, e a variável  $P \in \mathbb{R}$  representa valores de precipitação em mm.

- Uma distribuição normal  $\Gamma_{\mu}^R(T) = e^{-\frac{(T-\mu)^2}{2R}}$  com  $\mu$  representando o valor onde  $\Gamma_{\mu}^R(\mu) = 1$  e  $R$  representando o raio de decaimento, que seria um valor aproximado em que  $\Gamma_{\mu}^R(\mu + R)$  e  $\Gamma_{\mu}^R(\mu - R)$  começam a se aproximar de 0. Veja exemplo na Figura 4
- Uma distribuição  $\bar{\Gamma}_{\mu}^R(T) = e^{-\frac{(T-\mu)^8}{(2R)^5}}$  com um *plateau*, com  $R$  definindo os pontos  $\mu + R$  e  $\mu - R$  onde o *plateau* começa a crescer. Veja exemplo na Figura 5
- Uma distribuição  $\Phi(P) = \frac{\operatorname{erf}(\frac{P-10}{40})+0.3}{1.2}$  que se baseia na função erro para colocar diferentes valores de precipitação entre 0 e 1. Veja exemplo na Figura 6

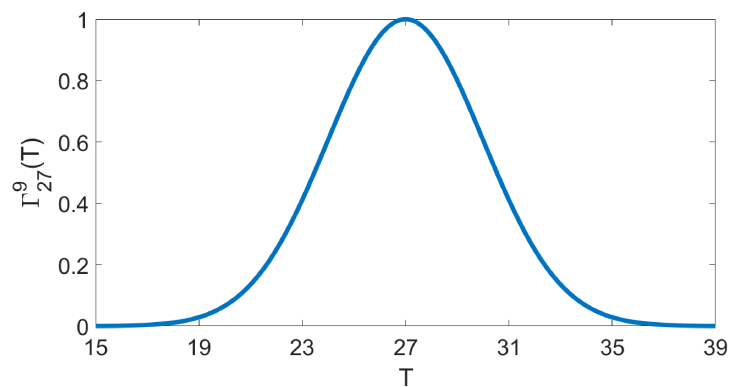
A partir de agora discutiremos cada parâmetro do modelo e como ele pode ser transformado de constante para variável de acordo com parâmetros encontrados na literatura. Durante a discussão, serão apresentados os parâmetros variáveis em função de valores base, diferenciados por meio de uma barra superior. Por exemplo,  $\gamma$  é a função  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de taxa de emergência com dependência na temperatura, e  $\bar{\gamma}$  é um valor constante base que segue o que foi apresentado na Tabela 1.

### 2.3.1 Taxa de mortalidade

A partir de Christophers [7] sabe-se que temperaturas próximas de 27°C são ideais para o desenvolvimento dos mosquitos, e temperaturas acima de 35°C ou abaixo de 18°C resultam

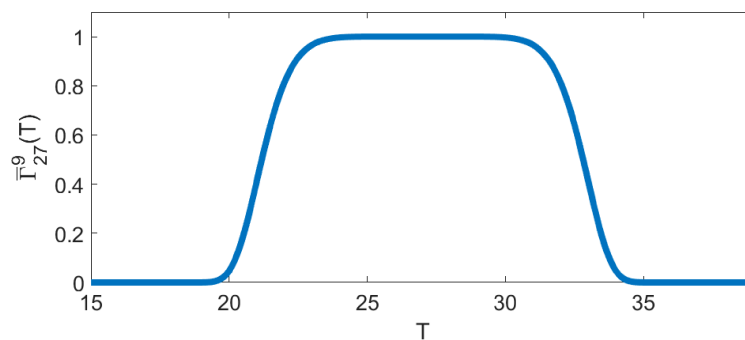


Figura 4 - Gráfico da distribuição normal com média 27 e raio 9 onde T representa a temperatura em °C



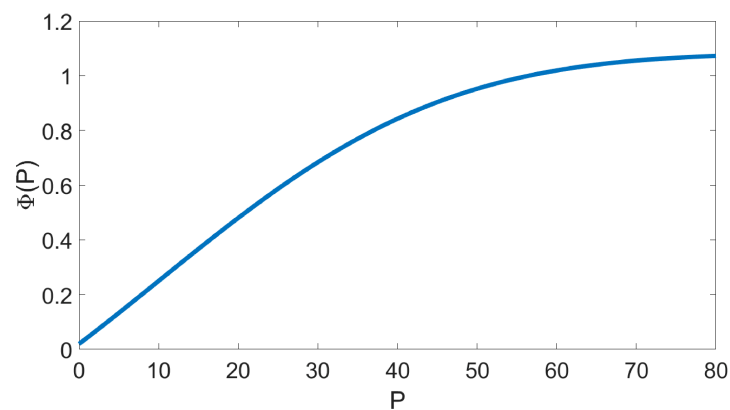
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5 - Gráfico da distribuição de *plateau* com média 27 e raio 9, onde T representa a temperatura em °C



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 6 - Gráfico da distribuição baseada na função erro, onde P representa um valor de precipitação em mm



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

em uma maior mortalidade. Assim, utilizaremos a função  $\bar{\Gamma}_{27}^9$  para regular a taxa de mortalidade em cada fase:

$$\mu_i(T) = (2 - \bar{\Gamma}_{27}^9(T)) \cdot \bar{\mu}_i. \quad (2.13)$$

Cada fase possui um valor base  $\bar{\mu}_i$  diferente. Para as fases alada e aquática, consideramos  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0.1$ , de acordo com Nelson [25]. Para garantir uma mortalidade comparativamente inferior para os ovos, tomemos  $\bar{\mu}_3 = 0$ .

### 2.3.2 Taxa de emergência

Considerando novamente 27°C como uma temperatura ideal, modelamos a taxa de emergência sabendo que usualmente o mosquito leva 8 dias da eclosão à emergência na fase alada. Assim, tomamos um valor base  $\bar{\gamma} = \frac{1}{8} = 0,125$ . Usando ainda a função  $\Gamma_{27}^9$ , obtemos uma dependência temporal que se assemelha ao que foi proposto empiricamente por Yang *et al.* [37]:

$$\gamma(T) = \Gamma_{27}^9 \cdot 0,125. \quad (2.14)$$

### 2.3.3 Taxa de eclosão

Após dois dias da oviposição o ovo já é capaz de eclodir. Consideraremos que este fenômeno ocorre exatamente após essas 48 horas (ignorando um possível tempo de espera por condições ideais) e considerando apenas mosquitos fêmeas, temos um valor base  $\bar{e} = 0,25$ . Usaremos uma ideia semelhante às anteriores para formular a dependência da taxa de eclosão na temperatura:

$$e(T) = \Gamma_{27}^9 \cdot 0,25. \quad (2.15)$$

### 2.3.4 Coeficiente de oviposição

Temos que um mosquito fêmea normalmente realiza oviposição 5 vezes durante sua vida, com o número de ovos variando entre 100 e 200. Considerando um tempo de vida de 30 dias, podemos considerar que o número de ovos colocados por dia varia entre 15 e 30.

Sabendo que a precipitação favorece a oviposição (uma vez que aumenta a quantidade de criadouros), utilizamos a função  $\Phi(P)$  em conjunto com  $\Gamma_{27}^9$  para construir a função de oviposição:

$$r(T, P) = 15 + 15 \cdot \Gamma_{27}^9(T) \cdot \Phi(P). \quad (2.16)$$

### 2.3.5 Modelagem do transporte por difusão

Embora o coeficiente de difusão seja um parâmetro fundamental na modelagem espacial, é difícil obter o seu valor de modo similar aos anteriores. Sabe-se apenas que a distância percorrida semanalmente pelos mosquitos da espécie *Ae. aegypti* pode variar entre os valores médios de 65m e 800m (dependendo da disponibilidade de áreas de oviposição) [30]. No Capítulo 3, ajustaremos esse parâmetro a partir de dados experimentais. Por hora, utilizaremos as estimativas citadas como um ponto de partida através de um método analítico.

Para tentar aproximar o coeficiente de difusão analiticamente, consideremos uma simplificação da Equação (2.10) em um espaço unidimensional e com apenas o termo difusivo no membro direito:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}. \quad (2.17)$$

Se tomarmos como condição inicial um Delta de Dirac centrado em  $x = 0$ , obtemos a seguinte solução:

$$M(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right). \quad (2.18)$$

Para um  $t > 0$  fixo, a função é uma distribuição gaussiana, maior do que 0 em todo seu domínio, de  $-\infty$  a  $\infty$ . Para dar um sentido físico a isto, consideremos que a presença de mosquitos pode ser observada em um raio  $R(t)$  onde a integral de  $-R(t)$  a  $R(t)$  se iguala à 0,9 (90% da área inicial, que também é a área abaixo da curva em qualquer instante). Encontramos a função  $R(t)$  da forma:

$$\int_{-R(t)}^{R(t)} M(x, t) dx = 0,9 \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow \int_{-R(t)}^{R(t)} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) dx = 0,9 \quad (2.20)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-R(t)}^{R(t)} e^{\left(\frac{-x}{\sqrt{4Dt}}\right)^2} dx = 0,9 \quad (2.21)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(y) \right) \Big|_{-\frac{R}{\sqrt{4Dt}}}^{\frac{R}{\sqrt{4Dt}}} = 0,9 \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{4Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(-\frac{R}{\sqrt{4Dt}}\right) \right) = 0,9 \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{4Dt}}\right) = 0,9 \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow R(t) = \operatorname{erf}^{-1}(0.9)\sqrt{4Dt}. \quad (2.25)$$

Assim, podemos obter dois valores distintos para  $D$  considerando tanto  $R(7 \text{ dias}) = 65 \text{ m}$  quanto  $R(7 \text{ dias}) = 800 \text{ m}$ :

$$D_{min} = 111,54 ; D_{max} = 16.897,00. \quad (2.26)$$

Finalmente, poderíamos definir que uma precipitação elevada resultaria em uma difusão menor, resultando na seguinte relação:

$$D(P) = D_{min} \cdot \frac{P}{80} + D_{max} \cdot \left(1 - \frac{P}{80}\right). \quad (2.27)$$

### 2.3.6 Dependências espaciais dos parâmetros

É válido questionar se, visando considerar a distribuição espacial de mosquitos, não seria necessário lidar com as peculiaridades de diferentes regiões que se desenvolvem dentro do ambiente urbano. Parques, casas e ruas, por exemplo, apresentam-se como diferentes paisagens para o desenvolvimento de mosquitos e seria interessante captar essas áreas distintas no processo de modelagem.

Seguindo ideias propostas por Yamashita *et al.* [34], tratamos essa heterogeneidade estabelecendo diferentes valores de parâmetros para cada tipo de região. Definimos então alguns multiplicadores que são utilizados para ajustar parâmetros em cada região sem desconsiderar a variação temporal. Sendo assim, tomando um parâmetro qualquer  $param(T, P)$ , ele será considerado em um ponto do mapa do tipo  $X$  com um novo valor dado pelo produto entre o multiplicador do tipo  $X$  e o valor  $param(T, P)$ .

O valor de cada multiplicador pode ser encontrado na Tabela 2, e suas escolhas foram motivadas por suposições a respeito da viabilidade de cada tipo de região para o crescimento e movimentação dos mosquitos.

Tabela 2 – Valores de multiplicadores utilizados para cada parâmetro em relação a cada um dos tipos de região considerados

Parâmetro	Casas	Parques	Ruas
D	0,2	1	1
$\mu_i$	1	1	2
r	1	0,8	0,2
k	1	0,8	0,3

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

### 2.3.7 Modelagem da dispersão de inseticida

Para simular a dispersão de um adulticida (inseticida que influencia na fase alada) em uma cidade, fazemos suposições a respeito do comportamento de inseticidas e sua penetração em diferentes estruturas de uma cidade.

Consideramos que os inseticidas são liberados na rua em um tempo inicial  $T_i$  com uma concentração  $H_0$ . Tomamos que o decaimento do seu efeito no ponto de liberação pode ser dado como exponencial. De tal modo, definimos  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que representa a mortalidade induzida pelo inseticida na fase alada em cada instante de tempo (medido em dias).

$$h(t) = \begin{cases} H_0 e^{-\psi(t-T_i)}, & \text{se } T_i \leq t < T_f \\ 0, & \text{se } t \geq T_f \text{ ou } t < T_i \end{cases}, \quad (2.28)$$

onde  $\psi$  é uma taxa de decaimento temporal e  $T_f$  um ponto no tempo onde a concentração do inseticida já se mostra insignificante e pode ser tomada como zero.

Agora, consideremos que o ponto estudado não é um ponto de liberação, mas sim o meio de um parque ou uma casa. Em um primeiro cenário, vamos considerar que as casas estão com janelas abertas, de tal modo que a difusão do inseticida para dentro da casa acontece com maior intensidade do que em um segundo cenário, com as janelas fechadas. Em ambos os casos, tomemos a função  $d(x, y)$  que retorna a distância para o ponto de liberação mais próximo (ou para simplificar, a rua mais próxima). Desse modo,  $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  agora representa a mortalidade induzida pelo inseticida na fase alada em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo. Note que  $x$  e  $y$  são medidos em metros e  $t$  em dias.

$$h(x, y, t) = \begin{cases} H_0 e^{-\phi(x,y)d(x,y)} e^{-\psi(t-T_i)}, & \text{se } T_i < t < T_f \\ 0, & \text{se } t \geq T_f \text{ ou } t < T_i \end{cases}. \quad (2.29)$$

Na expressão acima,  $\phi(x, y)$  representa o decaimento espacial da região, e pode variar entre parques, casas com janelas abertas ou casas com janelas fechadas.

Uma comparação entre os dois cenários, onde as casas mantêm as janelas abertas ou fechadas, pode nos trazer informações qualitativas a respeito da evolução da população de mosquitos de modo a convencer a população o quão benéfico é abrir as janelas quando o inseticida está sendo liberado na rua. É comum as pessoas fecharem as janelas quando veem o veículo que libera inseticida, e poucos estudos realizam essa comparação. Esta aplicação do modelo é discutida no Capítulo 4.

## 2.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Algumas das modificações realizadas no modelo de Yamashita *et al.* [34] são simplificações diretas, como a remoção do termo advectivo e o uso da capacidade de suporte em apenas uma fase, mas ao mesmo tempo contribuem para uma maior capacidade de refletir a realidade, uma vez que retiramos fatores que não parecem influenciar no ciclo de vida do mosquito (e podem trazer efeitos colaterais indesejados ao serem considerados). A separação da fase imóvel em aquática e ovos ainda é uma modificação simples, mas que permite refletir melhor as mortalidades distintas entre as fases.

Sem dúvidas as modificações que mais aumentam a complexidade do modelo são as dependências temporais e espaciais adicionadas nos parâmetros, mas que se mostram essenciais quando queremos obter uma periodicidade entre os surtos populacionais. Sem as dependências climáticas seria impossível obter a variação observada na realidade entre estações mais quentes e mais frias, e as dependências espaciais (já utilizadas em menos parâmetros por Yamashita *et al.* [34]) são fatores importantes a serem considerados em um ambiente tão heterogêneo como o urbano.

Vale destacar, entretanto, que devido à natureza de alguns parâmetros (difíceis de se obter em laboratório), os valores a serem utilizados no modelo ainda são meio incertos, principalmente em relação ao parâmetro de difusão  $D$  e a capacidade de suporte  $k$ . No Capítulo 3 expomos dois estudos que visam estimar valores para estes parâmetros a partir de dados experimentais. De todo modo, o modelo exposto até então possui o seu valor como uma proposta inicial mais refinada da dinâmica populacional do *Aedes aegypti*, com uma abertura para o ajuste de cada parâmetro e definição de valores base que melhor reflitam cada tipo de situação.

### 3 AJUSTE DE PARÂMETROS

Neste capítulo apresentamos dois estudos que possibilitam a obtenção de três dos parâmetros descritos no Capítulo 2 a partir de dados experimentais. Na primeira seção serão estimados os coeficientes de difusão e a taxa de mortalidade, enquanto na segunda seção será estimada a capacidade de suporte.

#### 3.1 DIFUSÃO E MORTALIDADE

O trabalho de Honório *et al.* [15] busca entender como se dá o processo de movimentação dos mosquitos em um ambiente urbano de um ponto de vista experimental. Tendo como área de estudo uma região na cidade de Nova Iguaçu - RJ, é feita a soltura de mosquitos marcados com uma substância química no centro de uma região urbana. Ao longo de 7 dias são coletados ovos de mosquitos em uma região em um raio de 800m a partir da soltura, e tais ovos são identificados pela presença de rubídio. A identificação positiva da substância indica que um dos mosquitos soltos inicialmente passou pela região, tornando possível analisar a distância percorrida pelos insetos no intervalo de uma semana.

Usamos os dados coletados por Honório *et al.* [15] para encontrar estimativas para a difusão e mortalidade dos mosquitos. Para tal, simplificamos o modelo considerando apenas a Equação (2.10) (fase alada) sem a geração de novos indivíduos pela fase aquática ( $\gamma = 0$ ). Isso se justifica pelo fato dos dados obtidos no experimento serem referentes apenas à uma população inicial liberada no centro da região destacada na Figura 7. Assim, temos o seguinte modelo:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\nabla^2 M - \mu M, \quad (3.1)$$

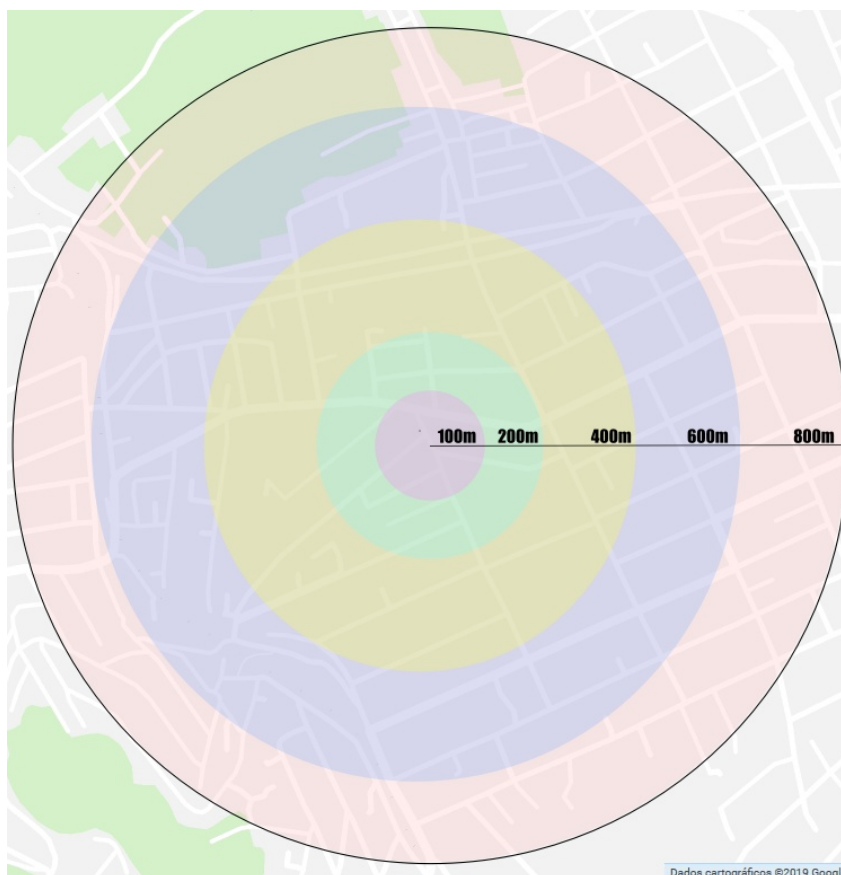
com condição inicial  $M(x, y, 0) = M_0 \cdot \delta(x, y)$ , onde  $\delta(x, y)$  é um delta de Dirac e  $M_0$  é o número de mosquitos soltos no centro da região.

Os dados coletados pelo experimento podem ser vistos na Tabela 3, e serão utilizados no procedimento de *fitting* pela seguinte metodologia: primeiro, a Equação (3.1) é resolvida analiticamente com  $D$  e  $\mu$  como valores indefinidos; a solução é então integrada em cada uma das áreas observadas pelo experimento; cada valor de integral obtido é multiplicado por uma constante  $\alpha$  que indica a probabilidade dos mosquitos encontrados na área terem depositado ovos nas armadilhas. Os valores obtidos  $R$  em função de  $D$ ,  $\mu$  e  $\alpha$  são então comparados com os dados experimentais  $S$ .

Buscando encontrar  $D$ ,  $\mu$  e  $\alpha$ , minimizamos o erro  $\sum_{i=1}^5 ((R_i - S_i)w_i)^2$  (usando diferentes pesos  $w_i$  para cada região) utilizando um algoritmo genético [12] no MATLAB. Para tal, fazemos uso da seguinte solução analítica de (3.1):

$$M(x, y, t) = \frac{M_0}{4t\pi D} e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt} - \mu t}. \quad (3.2)$$

Figura 7 - Mapa de parte de Nova Iguaçu - RJ obtido pelo Google Maps, com destaque para as regiões consideradas no experimento de Honório *et al.* [15]



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de imagens do *Google Maps* (2019).

Tabela 3 – Número de armadilhas encontradas com ovos contaminados pela substância rubídio em cada região considerada [15] e valores obtidos pela simulação a partir da metodologia descrita após o processo de *fitting*.

Distância	Experimental [15]	Analítico
0 - 100 m	0	1,56
100 - 200 m	2	4,52
200 - 400 m	12	15,77
400 - 600 m	20	19,63
600 - 800 m	17	17,74

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Seguem ainda os parâmetros para o algoritmo genético:

- Função de crossover: aritmética
- Função de mutação: *Adaptive feasible*
- Função de seleção: Torneio de tamanho 4



- Limites inferiores e superiores:

- $0 < D < 30000$

- $0 < \mu < 1$

- $0 < \alpha < 0.1$

Os limites utilizados foram escolhidos para facilitar a busca por um mínimo local realista para o problema. Por definição todos os parâmetros devem ser positivos e  $\mu$  é intuitivamente menor que 1. Os limites superiores para  $D$  e  $\alpha$  foram escolhidos empiricamente de modo a limitar o espaço da busca e torná-la mais eficiente.

Utilizamos ainda o conjunto de pesos  $w = (1, 1, 5, 10, 10)$  na função de erro previamente descrita. Tais erros foram escolhidos para garantir que o algoritmo dê atenção especial ao decaimento que ocorre nas últimas duas áreas e menos importância ao valor nulo no centro (que poderia forçar uma difusão extremamente alta tendo em vista que o valor no centro nunca se anula pelo movimento difusivo).

Devido à natureza aleatória do algoritmo genético, foram realizadas 100 execuções, das quais foram obtidas as médias e o desvio padrão de cada um dos parâmetros. Os resultados se encontram na Tabela 4. Embora um desvio padrão relativamente alto tenha sido observado, isso se justifica por se tratar de um sistema biológico complexo. Nota-se ainda que, como visto na Tabela 3, os valores médios foram suficientes para um *fitting* aceitável em relação aos dados experimentais.

Tabela 4 – Médias e desvios padrões obtidos por 100 execuções do algoritmo genético

Parâmetro	Média	Desvio padrão (%)
$D$	18.969	2.660,30 (14%)
$\mu$	0,1177	0,0314 (26%)
$\alpha$	0,0642	0,0140 (21%)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Por fim, resta observar que os experimentos foram realizados em agosto de 1999, um período relativamente seco graças ao inverno. Tal hipótese se confirma com os dados pluviométricos fornecidos pela Prefeitura do Rio de Janeiro [1]. Assim, podemos atualizar a difusão máxima no modelo para  $D_{max} = 18969$  e seguir com parâmetros mais realistas para o período seco.

### 3.2 CAPACIDADE DE SUPORTE

Não é por acaso que a forma mais comum de se prevenir uma infestação de mosquitos é o controle de áreas de risco por meio de limpeza dos chamados “focos de dengue”, ou criadouros. O surto populacional em uma região está diretamente associada à existência de criadouros,

áreas que abrigam a fase aquática. Em nosso modelo, o tamanho que um criadouro pode atingir (e conseqüentemente, seu impacto na população alada) é modelado pela capacidade de suporte. De um modo geral, a capacidade de suporte em uma modelagem populacional reflete fatores limitantes do cenário onde uma dada população habita, que retardam o crescimento da mesma na medida que aproxima do valor definido pelo parâmetro. No modelo, essa limitação foi justificada pelo "efeito *Gillett*" [29], e o valor da capacidade de suporte precisa refletir a densidade máxima da fase aquática em uma região quando levamos em consideração tal efeito.

Sendo assim, torna-se imprescindível para a boa calibragem de um modelo a escolha de bons valores para a capacidade de suporte. Trabalhos como o de Lana *et al.* [19] mostram como é possível ajustar um modelo populacional em respeito ao tempo com apenas um parâmetro livre, a capacidade de suporte. O mesmo trabalho indica como diferentes regiões de uma cidade podem possuir diferentes capacidades de suporte e fornece uma metodologia para o cálculo da mesma a partir dos pontos de equilíbrio do sistema de EDOs. Primeiramente, são obtidas as expressões para os pontos de equilíbrio em função de seus parâmetros. Tendo a capacidade de suporte como o único parâmetro desconhecido, é possível isolá-la e obter uma expressão em função de parâmetros conhecidos e a população de mosquitos adultos no ponto de equilíbrio (que pode ser estimada empiricamente). O uso de tal metodologia seria interessante nem que seja para obter um valor médio da capacidade de suporte em uma cidade para poder variá-lo através de aspectos visuais do mapa (como descrito na Subseção 2.3.6).

Como tratamos nesse trabalho com um sistema de EDP, utilizaremos a técnica de ondas viajantes como estudada por Yamashita *et al* [35] para encontrar pontos de equilíbrio e empregar a metodologia de Lana *et al.* [19] descrita anteriormente.

Inicialmente, consideremos o modelo descrito pelas equações (2.10), (2.11) e (2.12) de um ponto de vista unidimensional. Vamos considerar apenas o eixo  $x$ , uma vez que a dispersão descrita pelo modelo bidimensional possui uma simetria radial que nos permite observar o que acontece em apenas uma reta que passa pelo centro de simetria e garantir que o comportamento é semelhante. Buscando ainda simplificar ao máximo a formulação, tomemos todos os parâmetros constantes, e daí teremos:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \gamma A - (\mu_1 + h_1)M, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = e \left(1 - \frac{A}{k}\right) E - (\mu_2 + h_2 + \gamma)A, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = rM - (\mu_3 + h_3 + e)E. \quad (3.5)$$

Uma versão análoga a este sistema (para 2 fases) foi estudada por Yamashita *et al.* [35], onde também foi demonstrada a existência de soluções de ondas viajantes. Enquanto um estudo mais aprofundado da existência da solução para 3 fases não será feito neste trabalho, transformaremos o sistema acima para encontrar os pontos de equilíbrio de uma possível solução de onda

viajante. Assim, transformamos as coordenadas de  $(x, t)$  para  $(\xi, t)$ , onde  $\xi = x - ct$  é uma variável viajante com velocidade de propagação  $c$ . A partir da substituição, temos as seguintes igualdades, obtidas pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial M(\xi, t)}{\partial t} = M_t - cM_\xi, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial M(\xi, t)}{\partial x} = M_\xi, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 M(\xi, t)}{\partial x^2} = M_{\xi\xi}. \quad (3.8)$$

Para as variáveis  $A(\xi, t)$  e  $E(\xi, t)$ , as igualdades são análogas. Assim, o sistema é reescrito como:

$$M_t - cM_\xi = DM_{\xi\xi} + \gamma A - (\mu_1 + h_1)M, \quad (3.9)$$

$$A_t - cA_\xi = e \left(1 - \frac{A}{k}\right) E - (\mu_2 + h_2 + \gamma)A, \quad (3.10)$$

$$E_t - cE_\xi = rM - (\mu_3 + h_3 + e)E. \quad (3.11)$$

Buscamos a solução estacionária desse sistema, quando  $M_t = A_t = E_t = 0$  e a variável  $t$  não influencia mais na solução. Assim, prosseguimos a manipulação das expressões acima zerando tais derivadas, tomando  $M(\xi, t) = m(\xi)$ ,  $A(\xi, t) = a(\xi)$ ,  $E(\xi, t) = e(\xi)$ , usando  $'$  para indicar derivada em  $\xi$  e introduzindo a variável  $h(\xi) = m'(\xi)$ .

$$m'(\xi) = h(\xi), \quad (3.12)$$

$$h'(\xi) = -\frac{c}{D}h(\xi) - \frac{\gamma}{D}a(\xi) + \frac{1}{D}(\mu_1 + h_1)m(\xi), \quad (3.13)$$

$$a'(\xi) = -\frac{e}{c} \left(1 - \frac{a(\xi)}{k}\right) e(\xi) + \frac{1}{c}(\mu_2 + h_2 + \gamma)a(\xi), \quad (3.14)$$

$$e'(\xi) = -\frac{r}{c}m(\xi) + \frac{1}{c}(\mu_3 + h_3 + e)e(\xi). \quad (3.15)$$

O sistema acima possui dois equilíbrios:  $(m, h, a, e) = (0, 0, 0, 0)$  e  $(m, h, a, e) = (m^*, 0, a^*, e^*)$ . Atentamos especialmente à expressão de  $m^*$ :

$$m^* = \frac{k(-(\mu_3 + h_3 + e)(\mu_2 + h_2 + \gamma)(h_1 + \mu_1) + e\gamma r)}{r(\mu_1 + h_1)e}. \quad (3.16)$$

Podemos obter um valor de  $m^*$  a partir de estimativas da literatura de densidade média de mosquitos em uma região. Deste modo, é possível isolar  $k$  na expressão acima para obter, a partir de valores base para os demais parâmetros, uma estimativa numérica para a capacidade de suporte da fase aquática.

Encontramos no trabalho de Massad *et al.* [23] uma tentativa de estimar o número de mosquitos em uma área urbana a partir do número de casos de dengue registrados em um período. Embora o experimento trate de um caso local, usaremos o mesmo para obter uma estimativa de um valor de densidade populacional para uma área urbana. Os valores estimados oscilaram em torno de 100.000 mosquitos em uma área de aproximadamente  $4.000.000m^2$ , resultando em uma densidade de 0.025 mosquitos por  $m^2$ . Utilizando os valores de referência na Tabela 1 e o valor para  $m^*$  encontrado, obtemos  $k = 0,02018$ . É válido destacar a dificuldade em definir os melhores valores de referências para o cálculo, de modo que só conseguimos obter uma estimativa que tenta representar toda a distribuição temporal e espacial de cada parâmetro.

### 3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Enquanto o parâmetro  $k = 0,02018$  se difere bastante do que foi proposto inicialmente como valor de referência na Tabela 1, o novo valor tem uma base experimental para justificá-lo. Se trata ainda de um valor médio para representar toda uma área urbana e, embora variemos o seu valor espacialmente por meio dos multiplicadores descritos no Capítulo 2, não estabelecemos uma dependência temporal na sua variação. Trabalhos como o de Lana *et al.* [18] demonstram que, apesar da variação na capacidade de suporte prover uma maior capacidade de ajuste (principalmente por representar mais um parâmetro livre), modelos com capacidade de suporte constante no tempo são capazes de acompanhar a variação temporal da população do mosquito.

Para o parâmetro de difusão, foi interessante ver que o resultado obtido se aproxima do que foi proposto no Capítulo 2 para os períodos secos. Dados mais representativos permitiriam o ajuste também em períodos chuvosos, mas a proximidade dos valores nos permite supor que o pequeno ajuste no limite superior para o parâmetro é o suficiente para a capacidade de simulação do modelo de um ponto de vista qualitativo.

Até este ponto foi desenvolvido um modelo teórico com um pequeno ajuste em alguns parâmetros de interesse. Apesar de não serem todos os parâmetros ajustados, podemos considerar que trabalhamos os essenciais para conseguir regular a movimentação e limitar o crescimento da população de mosquitos. Embora os demais parâmetros tenham o seu papel no refinamento dos momentos de crescimento e decréscimo populacional (e por conta disso exigem dados mais precisos e mais poder computacional), já temos material suficiente para avaliar o poder de simulação qualitativo no modelo.

Assim, o Capítulo 4 focará na implementação do modelo proposto e análise de alguns problemas e resultados obtidos durante as simulações.

## 4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA

Propõe-se neste trabalho a utilização de um método de volumes finitos para a resolução do modelo desenvolvido. Para isto, são usados como material de referência os livros de LeVeque [20] e Versteeg e Malalasekera [32]. Neste capítulo, além da apresentação do método e de como ele será aplicado, é também desenvolvida uma validação por meio de análise numérica e testes iniciais com os parâmetros constantes. Finalizamos apresentando resultados e discussões a respeito de uma simulação numérica da evolução populacional do mosquito ao longo de 1 ano na região central de Juiz de Fora, MG. A simulação ainda nos permite avaliar como eficácia de inseticidas se difere quando as janelas das moradias em uma região estão abertas ou fechadas.

Assim como os demais métodos numéricos, o método de volumes finitos se baseia em discretizar o domínio de uma equação diferencial para resolvê-la. Entretanto, a principal diferença é a maneira que a função é considerada nessa discretização. Tomemos como exemplo um problema simples de convecção unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad C \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (4.2)$$

onde  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  depende de  $x$ , uma variável espacial, e  $t$ , uma variável temporal. A função pode representar, por exemplo, a densidade populacional, onde  $C$  seria vista como a velocidade que toda a população se movimenta no eixo  $x$ .

Para trabalhar nessa discretização, consideremos que o valor da função aproximada  $\bar{u}$  é na verdade a média da função em uma região, chamada de volume de controle (VC), ao redor de cada ponto na discretização espacial ( $x_i$ ):

$$\bar{u}(x_i, t_j) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_j) dx. \quad (4.3)$$

Para incluir a função aproximada na EDP, basta integrar a Equação 4.1 no que chamaremos de volume de controle (a região no domínio espacial relativa a cada ponto da discretização):

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx = -(Au) \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x} [Au(x_{i-1/2}, t) - Au(x_{i+1/2}, t)]. \quad (4.6)$$

Para remover a derivada no tempo, integramos em  $t$ :

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x_i, t) dt = \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{t_j}^{t_{j+1}} Au(x_{i-1/2}, t) dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} Au(x_{i+1/2}, t) dt \right] \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow \bar{u}(x_i, t_{j+1}) - \bar{u}(x_i, t_j) = \frac{1}{\Delta x} (F^{i-1/2} - F^{i+1/2}). \quad (4.8)$$

Utilizamos a letra  $F$  para nos referir às integrais do lado direito da equação por representarem a noção de fluxo. Nesse sentido, os volumes finitos refletem o comportamento conservativo descrito na Subseção 2.1.2. A variação da quantidade de matéria em uma região depende apenas do fluxo do material em sua fronteira. Para o cálculo deste fluxo, é possível aproximar o valor da integral da seguinte forma:

$$F^i = \int_{t_j}^{t_{j+1}} Au(x_i, t) dt \approx \Delta t \cdot ((1 - \theta)Au(x_i, t_j) + \theta Au(x_i, t_{j+1})). \quad (4.9)$$

Sabe-se que, pelo teorema do valor médio, algum  $\theta \in [0, 1]$  resultará em exatamente o valor da integral procurado. Como não é possível descobrir qual é esse  $\theta$  em qualquer caso, opta-se por escolher algum valor fixo para utilizar na obtenção de solução. Sobre isso, podemos ressaltar alguns valores comuns:  $\theta = 0$  utiliza o valor no tempo atual, resultando em um método explícito;  $\theta = 1$  considera o valor no tempo ainda a ser calculado, se caracterizando como um método implícito;  $\theta = 0.5$  é bastante comum como o método de Crank-Nicolson e é considerado mais estável que os anteriores.

Enquanto o modo que a função será calculada nos pontos  $x_{i+1/2}$  e  $x_{i-1/2}$  fica ainda em aberto pela formulação (podendo ser, por exemplo, uma combinação entre pontos vizinhos conhecidos), é possível isolar  $\bar{u}(x_i, t_{j+1})$  na expressão desenvolvida anteriormente para a obtenção de um método numérico. Mais detalhes a respeito da formulação unidimensional podem ser vistos no trabalho de Leveque [20]. A seguir, será desenvolvida uma formulação bidimensional semelhante para o modelo do Capítulo 2.

#### 4.1 DISCRETIZAÇÃO DO MODELO PELO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

Utilizamos uma formulação por volumes finitos bidimensional para obter uma expressão de  $\partial M / \partial t$  na forma de EDO, e usamos um esquema de Crank-Nicolson para esta e demais equações ao desenvolver um método numérico de resolução. Vale notar que o desenvolvimento é feito considerando os parâmetros constantes. Uma simples adaptação na implementação permite variar os parâmetros em tempo de execução.

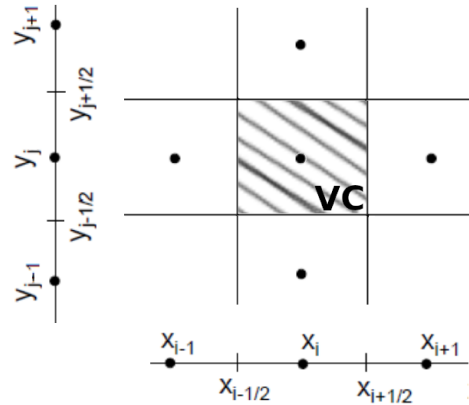
Primeiramente, integramos a Equação (2.10) em um volume de controle de centro  $(x_i, y_i)$  limitado pelas faces intermediárias vistas na Figura 8.

Considerando  $\bar{F}$  como o valor médio de  $F$  obtido pelo Teorema do Valor Médio no volume de controle, obtemos:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial M}{\partial t} dy dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [\nabla \cdot (D \nabla M) + \gamma A - (\mu_1 + h_1) M] dy dx; \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \Delta x \Delta y = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \nabla \cdot (D \nabla M) dy dx + [\gamma \bar{A} - (\mu_1 + h_1) \bar{M}] \Delta x \Delta y. \quad (4.11)$$

Figura 8 - Volume de controle na formulação por volumes finitos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Analisando apenas o termo de difusão, temos:

$$D(M_{ij}) = \iint_{VC} \nabla \cdot (D \nabla M) dy dx = \iint_{VC} \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \quad (4.12)$$

$$= \iint_{VC} \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial M}{\partial x} dx dy + \iint_{VC} \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \quad (4.13)$$

$$= \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[ D \frac{\partial M}{\partial x} \right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[ D \frac{\partial M}{\partial y} \right]_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dx \quad (4.14)$$

$$= \left[ D \frac{\partial \bar{M}}{\partial x} \right]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta y + \left[ D \frac{\partial \bar{M}}{\partial y} \right]_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \Delta x. \quad (4.15)$$

Finalmente, para obter uma expressão para  $D(M_{ij})$  consideramos que  $D$  é constante no espaço e

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial x} \Big|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = \frac{\bar{M}(x_{i+1}, y_j) - \bar{M}(x_i, y_j)}{\Delta x} - \frac{\bar{M}(x_i, y_j) - \bar{M}(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x} \quad (4.16)$$

$$= \frac{\bar{M}(x_{i+1}, y_j) - 2\bar{M}(x_i, y_j) + \bar{M}(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial y} \Big|_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} = \frac{\bar{M}(x_i, y_{j+1}) - \bar{M}(x_i, y_j)}{\Delta y} - \frac{\bar{M}(x_i, y_j) - \bar{M}(x_i, y_{j-1})}{\Delta y} \quad (4.18)$$

$$= \frac{\bar{M}(x_i, y_{j+1}) - 2\bar{M}(x_i, y_j) + \bar{M}(x_i, y_{j-1})}{\Delta y}. \quad (4.19)$$

Assim, temos a primeira equação do modelo na forma de uma EDO. Agora o sistema possui apenas equações para a derivada no tempo. Note que notações como  $M(x_i, y_j)$  não incluem a variável temporal, porque até este ponto consideramos um tempo fixo. Agora, usaremos a notação  $M_{ij}^t$  para indicar a solução calculada em  $(x_i, y_j, t)$ .

Aproximamos as funções contínuas  $M(x, y, t)$ ,  $E(x, y, t)$ ,  $A(x, y, t)$  pelas funções de grau (*step function*)  $\bar{M}(x, y, t)$ ,  $\bar{E}(x, y, t)$ ,  $\bar{A}(x, y, t)$  que são constantes em cada volume de controle e iguais às médias das funções originais nessas regiões. Assim, integrando também a Equação (2.11) e a Equação (2.12) temos o sistema:

$$\frac{\partial \bar{M}_{ij}^t}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x \Delta y} D(\bar{M}_{ij}^t) + \gamma \bar{A}_{ij}^t - (\mu_1 + h_1) \bar{M}_{ij}^t = F_1(\bar{M}_{ij}^t, \bar{A}_{ij}^t), \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \bar{A}_{ij}^t}{\partial t} = e \left( 1 - \frac{\bar{A}_{ij}^t}{K} \right) \bar{E}_{ij}^t - (\mu_2 + h_2 + \gamma) \bar{A}_{ij}^t = F_2(\bar{A}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_{ij}^t}{\partial t} = r \bar{M}_{ij}^t - (\mu_3 + h_3 + e) \bar{E}_{ij}^t = F_3(\bar{M}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t). \quad (4.22)$$

Agora, usando o método de Crank-Nicolson, obtemos definições implícitas para os valores de  $\bar{M}$ ,  $\bar{A}$  e  $\bar{E}$  no tempo seguinte ( $t+1$ ) considerando que se sabe os valores no tempo atual ( $t$ ):

$$\bar{M}_{ij}^{t+1} = \bar{M}_{ij}^t + \frac{\Delta t}{2} (F_1(\bar{M}_{ij}^t, \bar{A}_{ij}^t) + F_1(\bar{M}_{ij}^{t+1}, \bar{A}_{ij}^{t+1})), \quad (4.23)$$

$$\bar{A}_{ij}^{t+1} = \bar{A}_{ij}^t + \frac{\Delta t}{2} (F_2(\bar{A}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t) + F_2(\bar{A}_{ij}^{t+1}, \bar{E}_{ij}^{t+1})), \quad (4.24)$$

$$\bar{E}_{ij}^{t+1} = \bar{E}_{ij}^t + \frac{\Delta t}{2} (F_3(\bar{M}_{ij}^t, \bar{E}_{ij}^t) + F_3(\bar{M}_{ij}^{t+1}, \bar{E}_{ij}^{t+1})). \quad (4.25)$$

A cada passo de tempo precisamos resolver um sistema de equações não lineares envolvendo valores das 3 funções considerando todo o domínio espacial da função  $M$ . Note que as equações são acopladas pelo termo difusivo  $D(\bar{M}_{ij}^t)$ . Em nossa formulação, optamos pelo uso do método de Newton para a resolução de sistemas não lineares descrito por Broyden [5]. Tal escolha é justificada por estarmos tratando de uma não linearidade quadrática, e a informação de primeira ordem utilizada pelo método de Newton é suficiente para uma convergência rápida. Utilizamos como ponto inicial do método os valores das funções no tempo atual.

## 4.2 DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO

O código implementado foi desenvolvido em MATLAB e executado por uma máquina com um processador *Intel Core i7-4770* e 16GB de memória RAM. Com esta configuração e com a máquina dedicada à execução do código, os testes foram realizados em poucos minutos. Outro ponto a ser observado a respeito da implementação da formulação proposta é o uso da condição de fronteira de Neumann, considerando que o fluxo na fronteira do domínio espacial (representado por uma malha computacional limitada, portanto com fronteira) é nulo. Com isso em mente, podemos começar a apresentar alguns detalhes da solução desenvolvida.

Inicialmente, nos baseando na implementação feita por Yamashita [36], assumimos que a implementação possui como entrada um mapa quadriculado atribuindo valores a diferentes regiões para indicar que se tratam uma rua, bloco de casas ou uma área com bastante vegetação.



Os estados iniciais da densidade populacional das fases do *Ae. aegypti* são também dados de entrada, em matrizes com as mesmas dimensões que o mapa definido anteriormente.

Apesar da formulação por Crank-Nicolson descrita anteriormente, a implementação foi realizada tentando flexibilizar o modelo. Para isto, é introduzido um parâmetro  $\theta$  que serve como um peso para a combinação entre uma resolução implícita e explícita. O método de Crank-Nicolson é definido por  $\theta = 0,5$  (atribuindo pesos iguais as formulações explícita e implícita). Outros valores intermediários entre 0 e 1 também são possíveis, atribuindo um peso  $\theta$  à formulação implícita e  $(1 - \theta)$  à explícita. De qualquer forma, nos mantemos à formulação de Crank-Nicolson utilizando  $\theta = 0,5$  neste trabalho.

Após a leitura dos dados de entrada, o algoritmo define os parâmetros associados ao comportamento do método como  $\theta$ , as dimensões do espaço,  $\Delta t$  e o tempo final. Daí, o algoritmo entra em um ciclo onde redefine os parâmetros do sistema a cada passo de tempo (para garantir a variação temporal) e calcula o estado das variáveis no tempo seguinte. O Algoritmo 1 descreve resumidamente o funcionamento do código, que simplesmente itera no tempo resolvendo o sistema não linear resultante da discretização por Crank-Nicolson.

---

**Algoritmo 1:** Resolução numérica

---

**Entrada:** Mapa,  $M_0$ ,  $A_0$ ,  $E_0$

**Saída:** M, A, E

**início**

$t = 0, \theta = 0.5, \Delta t = 0.5, t_f = 365;$

$M = M_0, A = A_0, E = E_0;$

**enquanto**  $t < t_f$  **faça**

        parâmetros = definirParâmetros(Mapa,t);

        M, A, E = resolverSistema(M, A, E,  $\theta$ , parâmetros);

$t = t + \Delta t;$

**fim enquanto**

**retorna** M, A, E

**fim**

---

Considerando que a malha espacial discretizada possui  $n \cdot m$  pontos, representamos o sistema como uma aplicação  $F : \mathbb{R}^{3nm} \rightarrow \mathbb{R}^{3nm}$  (uma vez que envolve todos os pontos espaciais nas três fases em um determinado espaço de tempo). É então construída a matriz Jacobiana do sistema (obtida analiticamente) e a resolução se dá por meio do algoritmo iterativo para o método de Newton descrito no Algoritmo 2.

Ao final da simulação, é possível gerar gráficos da população total ao longo do tempo, bem como os estados finais da densidade populacional de cada uma das fases. A geração de animações representando o processo de dispersão também foi desenvolvida.

---

**Algoritmo 2:** Método de Newton para sistemas não lineares
 

---

**Entrada:**  $F, X_0$ .**Saída:**  $X$  tal que  $F(X) \approx 0$ **início**     $X = X_0$ ;    **repita**         $dF = \text{calcularJacobiano}(X)$ ;         $\text{passo} = -dF^{-1} \cdot F(X)$ ;         $X = X + \text{passo}$ ;    **até**  $\|\text{passo}\| < 10^{-6}$ ;**fim**

## 4.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Inicialmente iremos expor alguns conceitos de convergência de métodos numéricos e ordem de convergência, que são avaliados para o método implementado. Para esta exposição, consideramos, por exemplo, um problema de valor inicial (PVI) cuja solução é uma função  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, u \right) = 0, \quad (4.26)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (4.27)$$

onde  $\mathcal{F}$  é um funcional que define uma relação entre  $u$  e suas derivadas no espaço (variável  $x$ ) e tempo (variável  $t$ ).  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a condição inicial considerada no PVI.

Para a obtenção de uma solução computacional, utilizamos uma malha discreta com um espaçamento  $k = \Delta x = \Delta t$ , onde  $\Delta x$  é distância entre os pontos no espaço e  $\Delta t$  a distância entre os pontos no tempo. Indexamos os pontos dessa malha por meio dos subíndices  $i$  e  $j$ , de modo que  $x_i = i \cdot \Delta x$  e  $t_j = j \cdot \Delta t$ .

Consideramos um método numérico que nos dá uma solução  $U_k(x_i, t_j)$  em cada ponto  $(x_i, t_j)$  da malha. Assim, o erro em torno de um ponto pode ser calculado por:

$$E_k(x_i, t_j) = U_k(x_i, t_j) - u(x_i, t_j). \quad (4.28)$$

Considerando uma função erro  $E_k$  estendida em todo o domínio, podemos definir que um método é convergente quando

$$\|E_k(\cdot, t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow 0 \quad \forall t. \quad (4.29)$$

Em outras palavras, para um método ser considerado convergente a sequência de funções  $(U_k)$  deve convergir para uma função  $u$  que é solução da equação.

Vale ainda notar que se utilizarmos uma norma onde o espaço de funções considerado é completo (norma do supremo no espaço de funções contínuas, por exemplo), podemos concluir

que a sequência de funções ( $U_k$ ) converge para algum  $u$  quando  $k \rightarrow 0$  observando se a mesma é uma sequência de Cauchy ( $\|U_k(\cdot, t) - U_n(\cdot, t)\| \rightarrow 0$ ). Note que o fato desse limite  $u$  ser a solução dessa equação se relaciona com o fato do método ser consistente (que não será explorado nesse trabalho).

Dizemos que um método numérico é de ordem  $p$  quando a sua função de erro associada é  $O(k^p)$ , ou seja:

$$\|E_k(\cdot, t)\| < Ck^p \text{ para algum } C \in \mathbb{R}, \text{ ou} \quad (4.30)$$

$$\|U_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| < Ck^p \text{ para algum } C \in \mathbb{R} \quad (4.31)$$

Se assumimos que esse método numérico é convergente, podemos estimar sua ordem de convergência da seguinte forma: se o método é de ordem  $p$  e tomamos  $k > n$ , teremos:

$$\begin{aligned} \|U_k(\cdot, t) - U_n(\cdot, t)\| &< \|U_k(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| + \|U_n(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \\ &< Ck^p + Cn^p \\ &< 2Ck^p, \end{aligned} \quad (4.32)$$

que pode ser simplificado aplicando logaritmo em ambos os lados da inequação:

$$\log(\|U_k(\cdot, t) - U_n(\cdot, t)\|) < \log(2C) + p \log(k). \quad (4.33)$$

Essa informação nos diz que em um gráfico  $\log \times \log$  relacionando a norma da diferença entre discretizações e  $k$  temos a ordem de convergência  $p$  como um limitante superior para a inclinação da reta.

Agora, partiremos para o estudo da convergência do método implementado. Para isto, utilizamos esquema de volumes finitos previamente descrito simulando um período de 1 dia. Usando os valores constantes presentes na Tabela 1, a convergência é analisada decrementando o passo de tempo  $\Delta t$  e refinando a malha espacial ( $1m \times 1m$ ) controlando os valores de  $\Delta x$  e  $\Delta y$  simultaneamente. A análise proposta nesta seção também pode ser vista no trabalho de Lugão e Chapiro [22].

Para o estudo da convergência do método, fizemos uso de cinco discretizações do espaço e tempo para a execução do método:

- 1: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,5$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,1$ .
- 2: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,25$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,05$ .
- 3: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,125$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,025$ .
- 4: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,0625$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,0125$ .
- 5: Malha espacial :  $\Delta x = \Delta y = 0,03125$ . Discretização no tempo:  $\Delta t = 0,00625$ .

Indicamos por  $E_{ij}$  a norma do erro entre as funções no tempo  $t = 1$  calculadas nas discretizações  $i$  e  $j$ , considerando apenas pontos comuns a todas as malhas espaciais. Realizando tal cálculo para  $M(x, y, t)$ ,  $A(x, y, t)$  e  $E(x, y, t)$ , obtemos os resultados indicados nas tabelas 5 e 6, com as normas L2 e L1, respectivamente.

Tabela 5 – Análise de convergência com norma L2

	$E_{12}$	$E_{23}$	$E_{34}$	$E_{45}$
$M$	0,2390	0,2628	0,0692	0,0115
$A$	0,6383	0,0803	0,0467	0,0055
$E$	2,6127	0,3379	0,2033	0,0724

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 6 – Análise de convergência com norma L1

	$E_{12}$	$E_{23}$	$E_{34}$	$E_{45}$
$M$	0,6839	0,3662	0,1277	0,0335
$A$	1,9143	0,2408	0,1402	0,0164
$E$	7,8378	1,0136	0,6099	0,2173

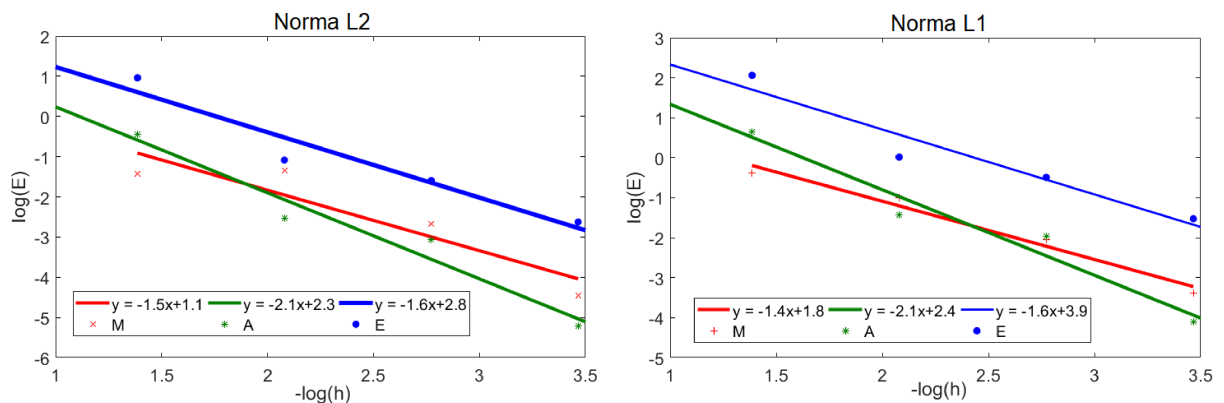
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Observando os dados da tabela é difícil tirar alguma conclusão a não ser que, em sua maioria, os erros tendem a diminuir quando refinamos as malhas. Com apenas 5 malhas consideradas, o padrão de redução do erro não é claro. Sendo assim, buscamos aproximar os pontos de erro em um gráfico de escala logarítmica para utilizar as ideias de análise de convergência propostas anteriormente. Utilizando nas figuras 9(a) e 9(b) os eixos  $-\log(h)$ , com  $h$  sendo a diferença entre as malhas, e  $\log(E)$ , com  $E$  sendo o erro entre as soluções. Aproximamos os pontos indicados pela tabela por meio de mínimos quadrados linear a fim de observar o que o coeficiente da reta pode nos dizer a respeito da ordem de convergência. O esquema proposto com Crank-Nicolson é um método numérico de segunda ordem. Com a média dos coeficientes em ambas as normas se aproximando de -2 (o sinal negativo só aparece por conta da inversão no eixo  $-\log(h)$ , utilizado para a visualização de um decrescimento no gráfico), apenas com estes pontos já é possível observar uma convergência próxima da quadrática.

#### 4.4 SIMULAÇÃO DO MODELO COM PARÂMETROS CONSTANTES

Para simular o processo de dispersão, iniciamos os testes em um domínio homogêneo em relação aos valores de parâmetros descritos na Tabela 1. Simulamos um período de 7 dias em um mapa de  $500m \times 500m$  e 1.600 pontos (onde cada ponto representa uma região de  $12,5m$ )

Figura 9 - Gráficos de  $-\log(h) \times \log(E)$ , onde  $h$  é a diferença entre  $\Delta x$  de duas discretizações e  $E$  é o erro calculado entre as discretizações.

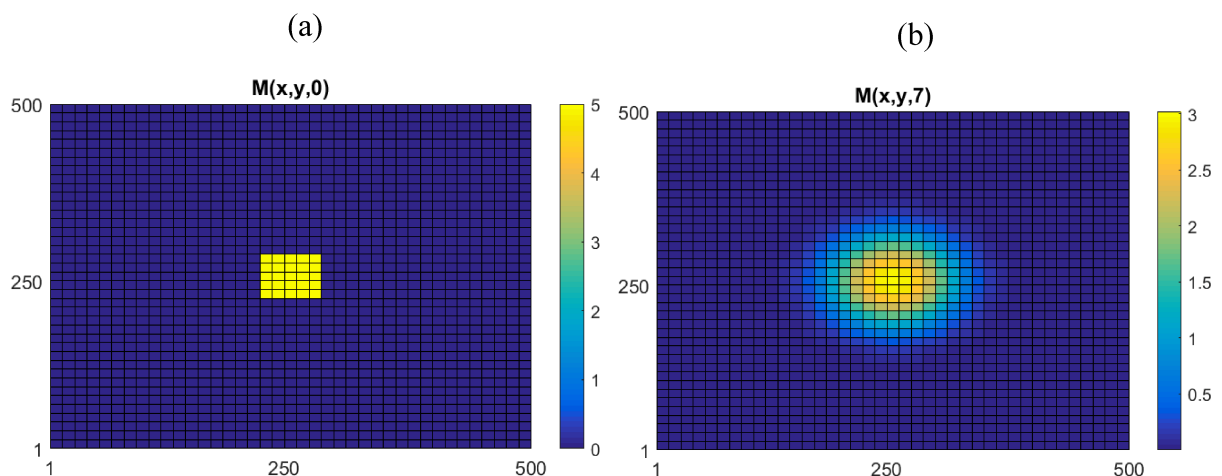


Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

com uma distribuição inicial de mosquitos na fase alada vista na Figura 10(a) e as demais fases nulas.

Vale notar que uma região espacial com as dimensões descritas resulta em um sistema de 4.800 variáveis (1.600 pontos em cada fase) a ser resolvida por passo de tempo. Sistema este que, devido ao acoplamento das variáveis com seus vizinhos e a fase anterior, é representado por uma matriz esparsa (fato que pode ser utilizado para economizar memória na construção das estruturas).

Figura 10 - Estado inicial da fase alada em um domínio homogêneo (a) e resultados após 7 dias (b).

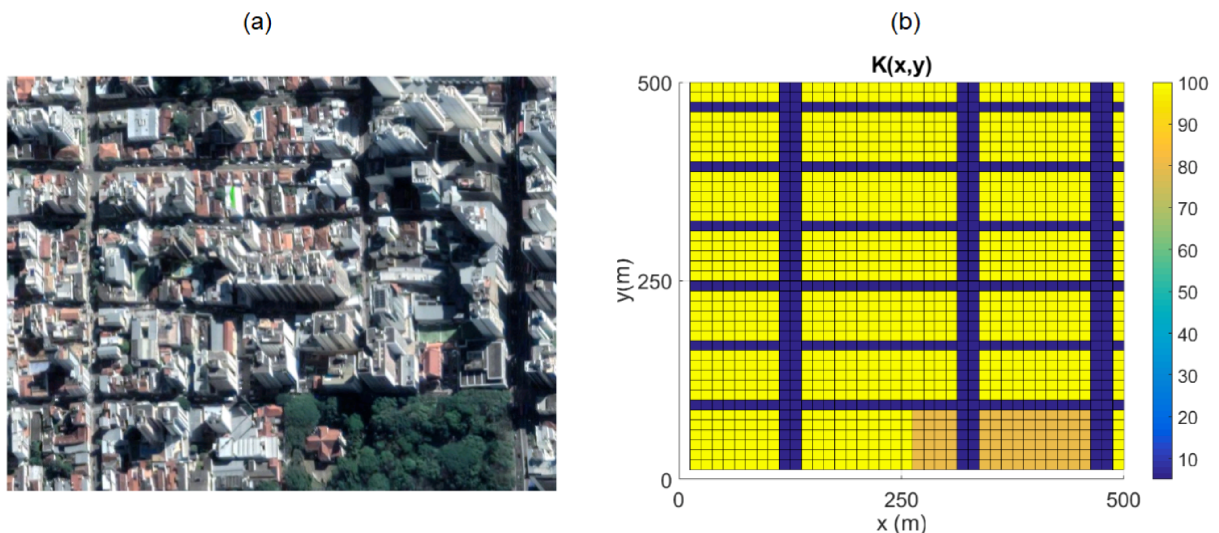


Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os resultados obtidos na Figura 10(b) indicam a existência de mosquitos a 62,5m de distância da posição atual, indicando um alcance realista para o processo de dispersão (no caso onde  $D = 111m^2/dia$ ).

Agora, simulamos um período de 365 dias. Devido à estabilidade provida pelo método semi-implícito, alcançamos bons resultados com um passo de tempo de 0,5, enquanto no método explícito seria necessário um passo de tempo inferior a 0,004 dias para a obtenção de resultados interessantes. Nota-se que, nesta simulação, fazemos uso de um mapa simulando um bairro ( $500m \times 500m$ ) da cidade de Juiz de Fora conforme utilizado por Yamashita *et al.* [34]. Nesta seção, mostraremos resultados publicados por Lugão e Chapiro [22] antes do trabalho feito na Seção 2.3. Deste modo, desconsideramos as variações temporais e espaciais, diferenciando regiões como parque, rua e casas apenas pela capacidade de suporte da fase aquática. Tal variação pode ser vista da Figura 11(b), semelhante à que foi utilizada por Yamashita *et al.* [34], definida a partir do mapa visto na Figura 11(a).

Figura 11 - Mapa da região central da cidade de Juiz de Fora (a) e capacidade de suporte  $k$  variando no espaço (b).



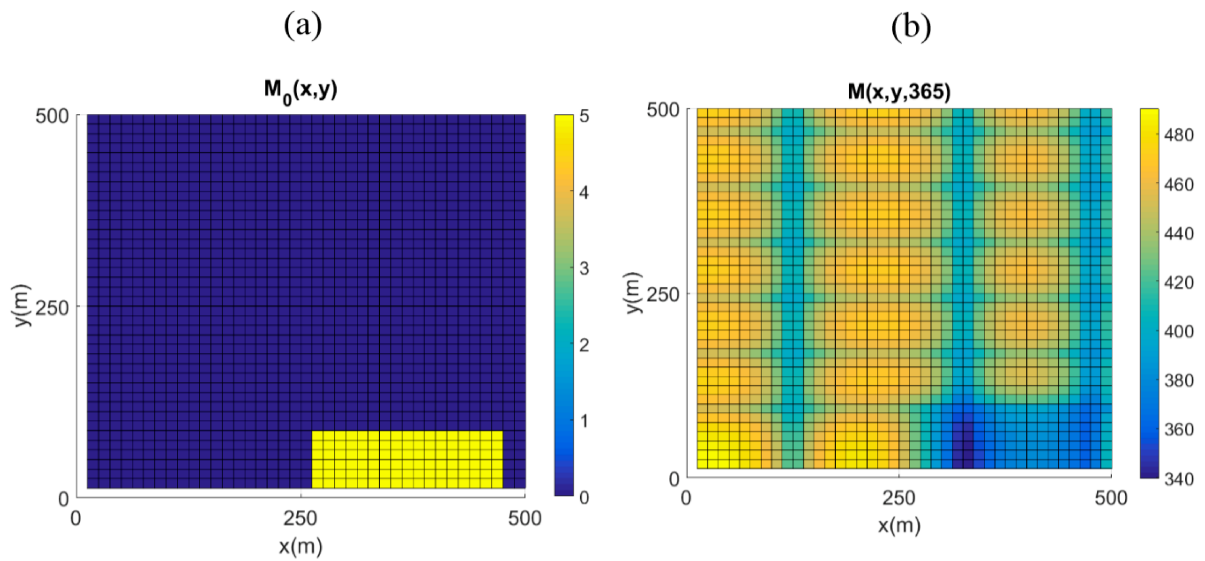
Fonte: Elaborado pelo autor com imagens do *Google Maps* (2019).

Resultados foram encontrados a partir de uma condição inicial  $M_0 = A_0$  visto na Figura 12(a) e  $E_0 = 0$ . Encontramos após a simulação de 365 dias a situação apresentada na Figura 12(b).

Note que o resultado mostra como a capacidade de suporte da fase aquática conseguiu controlar o crescimento da fase alada em diferentes locais da cidade. Calculamos ainda a população total por dia multiplicando a densidade em cada ponto por sua área e realizando um somatório. A Figura 13 mostra que as três populações estabilizam após um tempo, mesmo que apenas a população aquática esteja sendo inicialmente limitada.

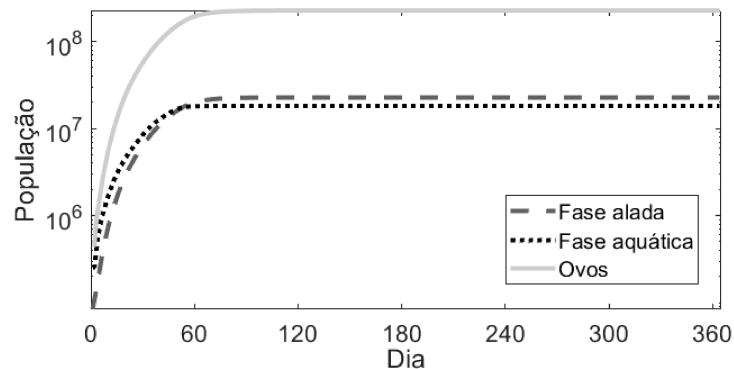
Com o objetivo de realizar alguns testes com o uso de inseticida, simulamos o espalhamento de inseticida nas ruas da cidade com um acréscimo de 1 no fator de mortalidade. Entretanto, vale notar que tal número não possui exatamente um embasamento experimental, podendo não representar completamente a ação do inseticida. De todo modo, consideramos uma situação

Figura 12 - Estado inicial da fase alada em bairro de Juiz de Fora (a) e resultados após 365 dias (b).



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

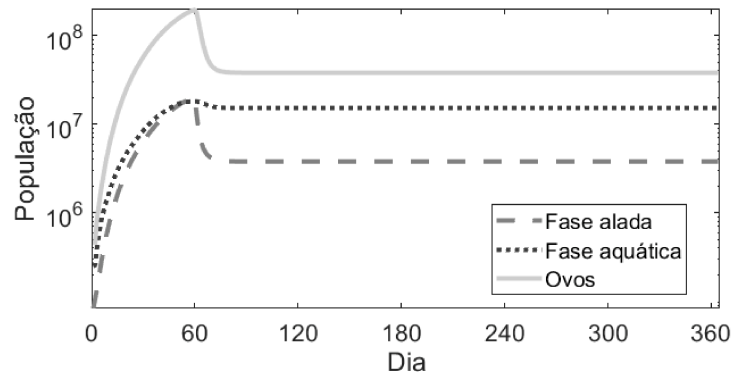
Figura 13 - Evolução das populações no tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

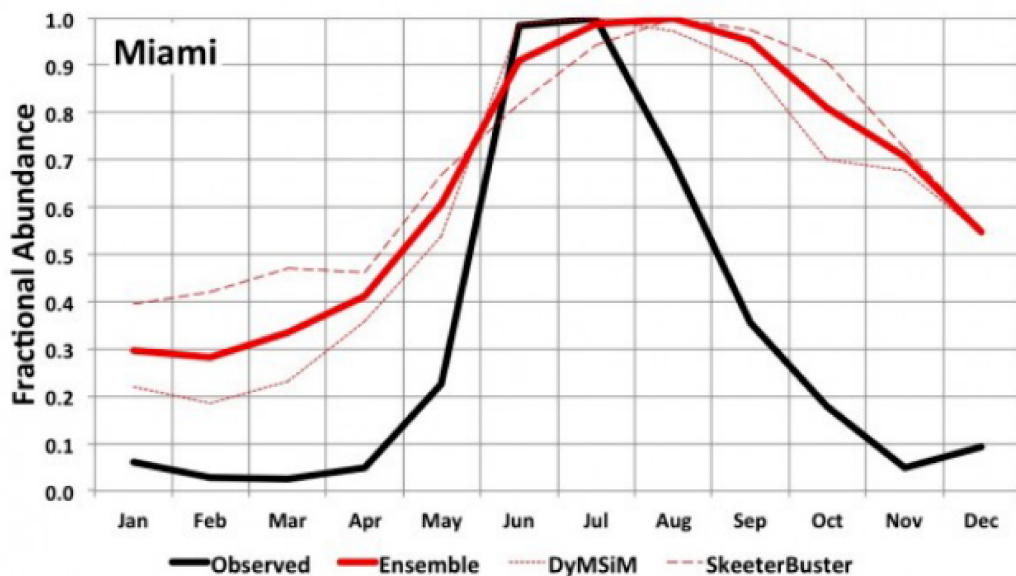
hipotética onde, a partir do 60º dia do ano (quando, segundo a simulação, foi observado que a população atinge seu limite) ocorreria a liberação do inseticida de forma constante em todas as ruas da cidade, atingindo com uma proporção menor o interior de casas ( $h_1 = 0,3$ ) e parques ( $h_1 = 0,6$ ). Notamos na Figura 14 que com essa configuração a solução do sistema sofre uma transição para um novo equilíbrio com estas novas influências à mortalidade. Supomos que, com a modificação do código para considerar variação temporal, o comportamento será análogo à troca de equilíbrios ocorrida neste caso, mas com um novo equilíbrio sendo definido a cada instante.

Figura 14 - Evolução das populações no tempo com aplicação de inseticida.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 15 - Média dos dados de população relativa de larvas encontradas por Monaghan *et al.* [24] entre os anos 2006 e 2008 em Miami.



Fonte: Monaghan *et al.* (2016) [24].

Nota: As diferentes linhas vermelhas representam métodos distintos para simulação, e a linha preta representa o que foi observado por meio de coleta.

#### 4.5 SIMULAÇÃO DO MODELO COMPLETO E DISCUSSÕES

Monaghan *et al.* [24] nos fornecem dados sobre a variação populacional da fase larva do mosquito em duas cidades dos Estados Unidos durante o período de 3 anos. Entretanto, vale notar que a apresentação dos dados se limita apenas à informação temporal de cada cidade, informando para cada mês do ano a média das populações encontradas naquele mês nos 3 anos observados, número este também normalizado pelo maior valor encontrado nos 12 meses representados. Um exemplo dos dados apresentados pode ser visto na Figura 15, que representa a evolução da população na cidade de Miami considerando os anos de 2006 a 2008. Embora os

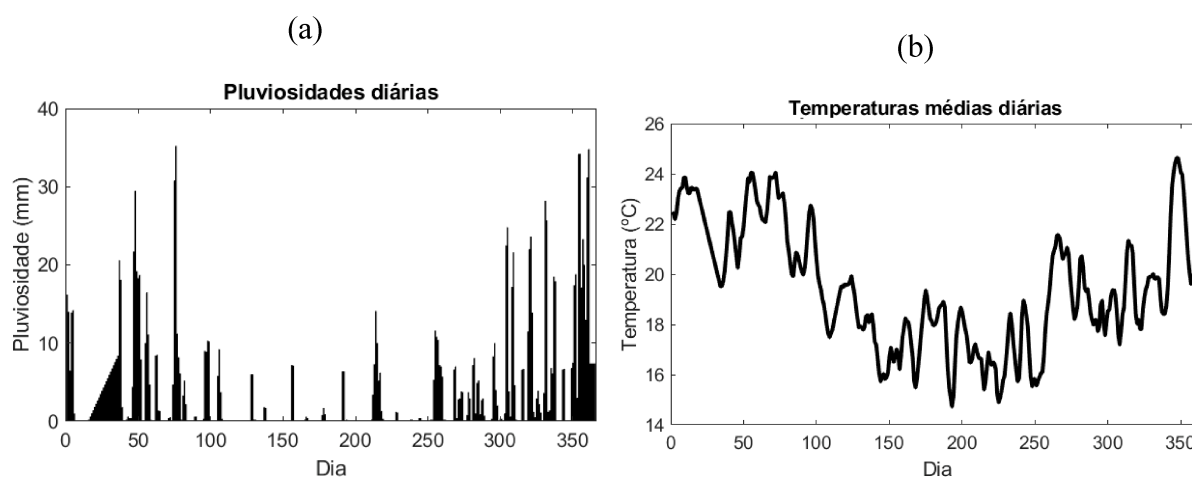


dados sejam limitados, nos mostram o tipo de variação populacional esperada o longo de um ano, onde as estações mais quentes apresentam um surto populacional, que decai com a vinda das estações frias. Destaca-se que os dados se referem a uma região no hemisfério norte, onde o verão entre junho e setembro.

Tomando agora os parâmetros variáveis como descritos no Capítulo 2 (e ajustados no Capítulo 3), realizamos simulações na mesma região representada na Figura 11, com as condições iniciais utilizadas na Seção 4.5.

Foram utilizados dados climáticos fornecidos pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET) para a cidade de Juiz de fora. Os dados dizem respeito à temperatura média e precipitações diárias ao longo de 2019, e podem ser visualizados nas figuras 16(a) e 16(b).

Figura 16 - Precipitações diárias totais (a) e temperaturas diárias médias (b) na cidade de Juiz de Fora em 2019, fornecido pelo INMET.

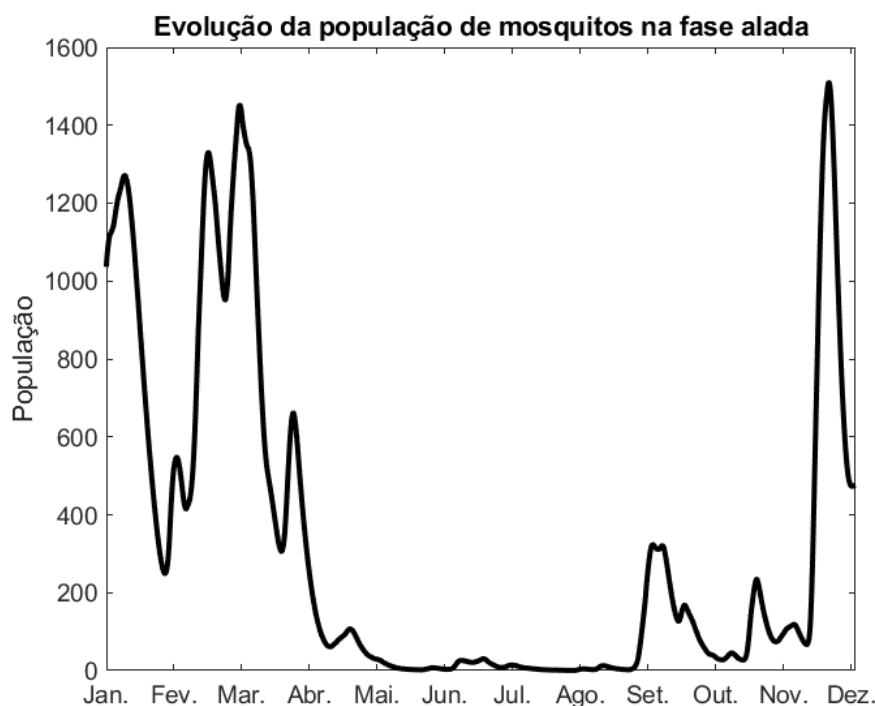


Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados do INMET (2019).

Inicialmente, em um experimento sem a aplicação de inseticidas, já é possível ver uma dependência temporal análoga ao visto por Monaghan *et al.* [24], onde nos meses com temperatura elevada há uma maior população e nos meses frios a população da fase alada quase se anula. Na Figura 17 é possível ver a evolução da fase alada ao longo da simulação de 1 ano. Para facilitar a visualização, podemos tomar o gráfico em escala logarítmica, como visto na Figura 18. Utilizar o gráfico com escala logarítmica facilita a inclusão das duas outras fases, demonstrando como, apesar do frio muitas vezes diminuir a população do inseto na forma alada, o mesmo se mantém vivo por meio das demais fases que controlam a população em períodos menos favoráveis.

A respeito da heterogeneidade espacial podemos notar que, graças aos parâmetros escolhidos, é possível observar os focos de mosquitos em casas, e que em períodos frios é raro encontrar mosquitos ao ar livre. Na Figura 19 temos a distribuição espacial no dia 2 de agosto, durante o inverno. A maior difusão e a maior mortalidade no parque o torna uma área bem

Figura 17 - Evolução da população de mosquitos na fase alada ao longo de 2019 na região central da cidade de Juiz de Fora (sem aplicação de inseticidas)



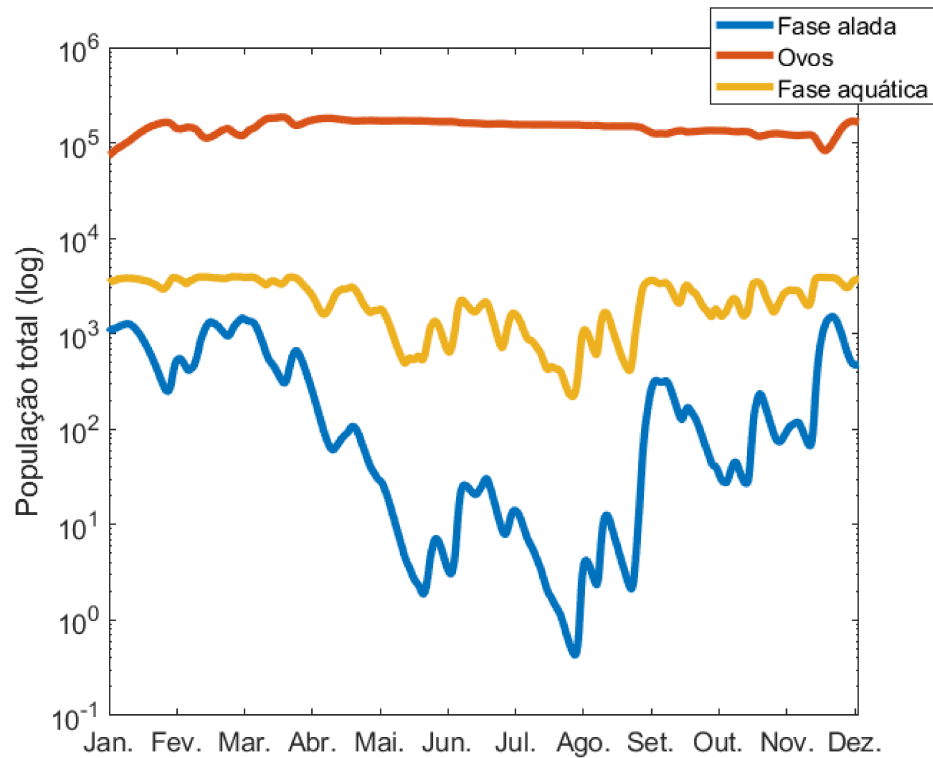
Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

menos propensa a ter focos de mosquitos. Além disso, a distribuição espacial da fase aquática demonstra que, mesmo com a diminuição considerável dos mosquitos na fase alada de um modo geral, ainda existe uma saturação na fase aquática que, assim que as condições forem favoráveis, vão se converter em um novo surto de população alada.

A concentração dos mosquitos dentro das casas nos remete a um problema muito enfrentado pelas prefeituras durante os períodos de combate ao *Ae. aegypti*: durante a aplicação de adulticida nas ruas da cidade, alguns moradores mostram-se propensos a fechar as janelas para impedir que o “fumacê” entre na casa. Esta prática, embora pareça uma forma dos moradores se prevenirem de substâncias tóxicas, pode acabar por diminuir o efeito da técnica de controle populacional (a ação sugerida neste caso seria deixar as janelas abertas e evitar o contato direto com o inseticida durante o seu tempo de decaimento). Por meio do modelo implementado e suposições a respeito da ação do inseticida, buscamos agora comprovar esta hipótese.

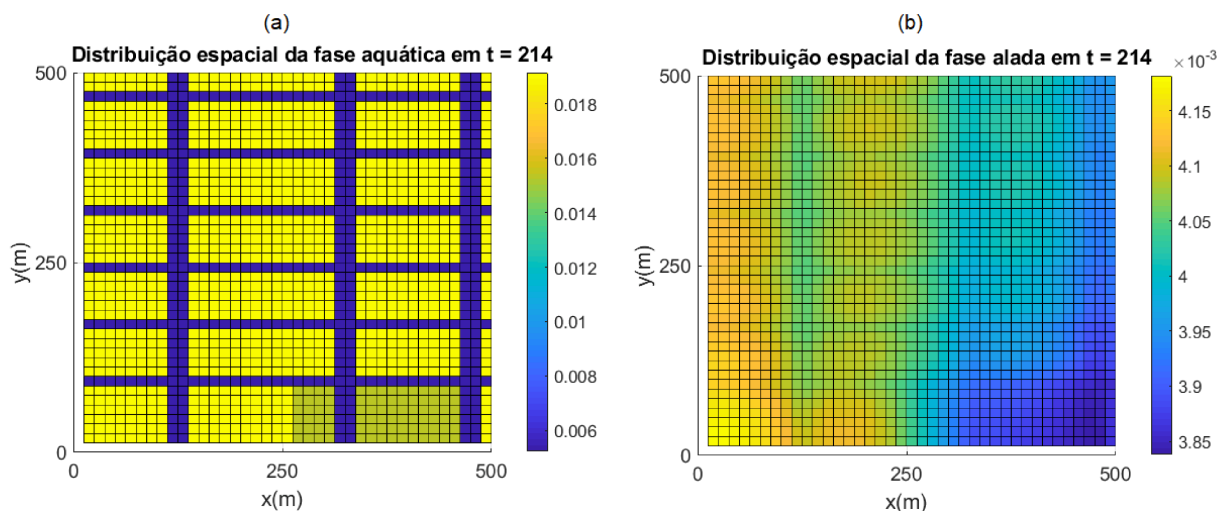
Observamos inicialmente o uso de inseticida no mês de março, onde existem alguns picos na população alada. Embora carecendo de dados quantitativos, podemos fazer algumas suposições sobre o inseticida para obter resultados de caráter qualitativo. Assim, precisamos definir 3 parâmetros: uma mortalidade (induzida pelo inseticida) inicial  $H_0$ , uma taxa de decaimento no tempo  $\psi$  e uma taxa de decaimento no espaço  $\phi$ . A taxa de decaimento no espaço varia entre parques e casa, e por conta disso definimos  $\phi_{casa}$  e  $\phi_{parque}$ . Consideramos os valores

Figura 18 - Evolução da população das 3 fases ao longo de 2019 em escala logarítmica (sem aplicação de inseticidas)



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 19 - Distribuição espacial da fase aquática (a) e alada (b) no dia 2 de agosto



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

expostos na Tabela 7.

O parâmetro de decaimento temporal utilizado garante que o inseticida faça um efeito

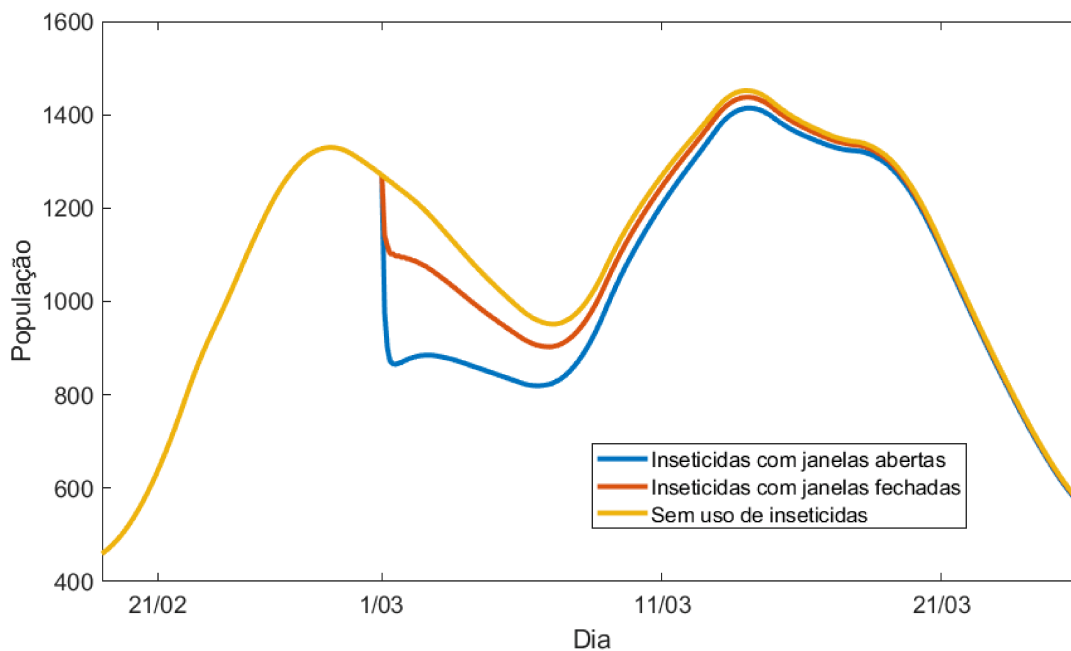
Tabela 7 – Valores de parâmetros utilizados para a simulação da ação dos inseticidas nas situações com janelas abertas e fechadas.

	$H_0$	$\psi$	$\phi_{casa}$	$\phi_{parque}$
Janelas abertas	20	14	0,02	0,01
Janelas fechadas	20	14	0,1	0,01

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

próximo de zero em questão de poucas horas. O valor base de  $H_0 = 20$  é próximo do utilizado por Yamashita *et al.* [34], e os valores de decaimento espaciais foram testados até a obtenção de um perfil adequado, sem embasamento experimental. Utilizando tais valores em uma única aplicação realizada no dia 01 de março, observamos a evolução populacional da fase alada em 3 casos diferentes: sem inseticidas, com inseticida e janelas abertas, e com inseticida e janelas fechadas. Os resultados são apresentados na Figura 20.

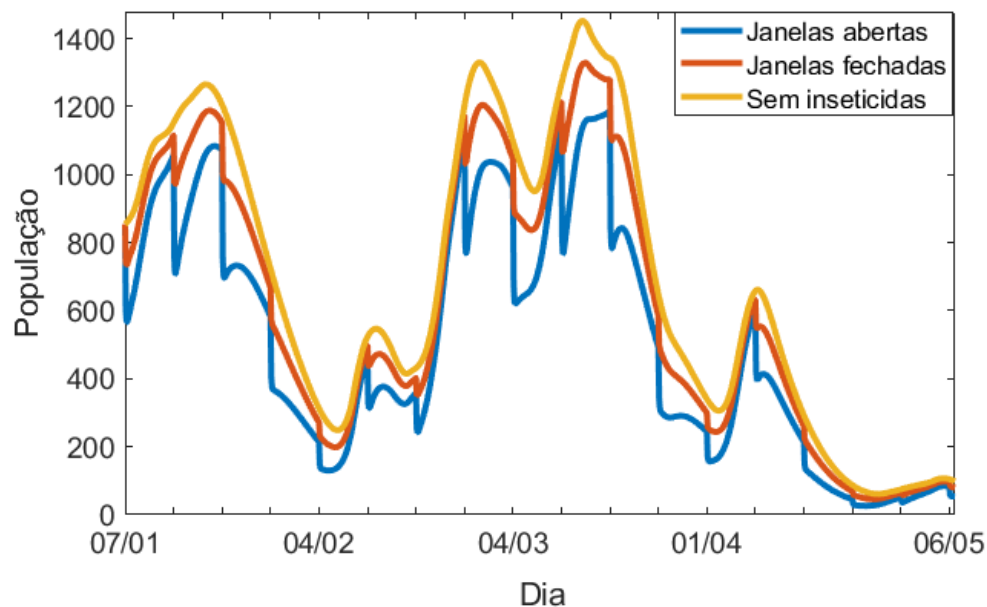
Figura 20 - Evolução da população alada sujeita a três situações diferentes: sem inseticidas, com inseticidas e janelas abertas, com inseticidas e janelas fechadas com uma única aplicação em 01/03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Enquanto a intensidade do decaimento possa ser questionada e ajustada experimentalmente em trabalhos futuros, já é possível observar que o modelo nos permite perceber a recuperação da população ao longo do tempo após a aplicação de inseticida, sugerindo a necessidade da periodicidade na aplicação. Assim, realizamos um experimento com aplicações de 7 em 7 dias em um maior período de surto populacional (durante o primeiro semestre). Obtemos dessa forma as evoluções descritas pela Figura 21.

Figura 21 - Evolução da população alada sujeita a três situações diferentes: sem inseticidas, com inseticidas e janelas abertas, com inseticidas e janelas fechadas com aplicações periódicas de 7 em 7 dias a partir de 07/01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Com estes resultados, podemos comparar de um modo geral como o inseticida afetou a população de mosquitos com as janelas abertas e fechadas. Observamos na Tabela 8 os valores das integrais das funções descritas na Figura 21. Este resultado não apenas sugere que a hipótese sobre a importância de manter as janelas abertas é válida, como também demonstra o potencial do modelo em obter resultados aplicados com uma dependência em fatores espaciais que muitas vezes não podem ser refletidos pela modelagem tradicional de EDOs.

Tabela 8 – Comparação dos valores das integrais das funções descritas na Figura 21 representando 3 diferentes situações na evolução populacional da fase alada. Inclui-se ainda um valor de porcentagem da população em relação ao maior valor (sem a aplicação de inseticidas) para melhor comparação.

	População total (% do maior valor)
Sem inseticidas	121.610 (100%)
Janelas fechadas	109.450 (90%)
Janelas abertas	92.202 (75,82%)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

## 5 CONCLUSÕES

As principais contribuições desse trabalho estão nos três objetivos apresentados na Seção 1.1. Foi proposto um modelo temporal e espacial para a análise da distribuição populacional do *Ae. aegypti* em área urbana, e foram expostas duas metodologias para encontrar parâmetros a serem utilizados no modelo proposto, mas que podem ser generalizadas e replicadas com novos dados experimentais e modelos. A implementação numérica tornou possível uma validação qualitativa do modelo e dos parâmetros encontrados.

A aplicação demonstrada no Capítulo 4 trouxe discussões a respeito do efeito da aplicação de aduictidas em uma cidade na forma de "fumacê" (prática empregada por muitas cidades brasileiras) e demonstrou o potencial do modelo na análise da distribuição temporal e espacial do mosquito levando em consideração fatores climáticos. Entretanto, ressaltamos que os resultados encontrados ainda carecem de validação experimental, principalmente em relação ao efeito do inseticida nos mosquitos e sua penetração nos bairros.

Um próximo passo em andamento o estudo do comportamento e efeito dos inseticidas, que poderia acrescentar ao modelo maior poder de previsibilidade e, conseqüentemente, gestão de técnicas de controle populacional. Quando melhor ajustada, a função de inseticida pode ser essencial na demonstração de como a localização e a periodicidade da liberação do inseticida podem influenciar no efeito da técnica de controle.

Ressalta-se ainda a necessidade de um estudo mais aprofundado na variação temporal e espacial dos parâmetros por meio de problemas inversos, estudo este que exige o acesso a dados mais precisos da distribuição de ao menos uma das fases do *Aedes aegypti* em um espaço urbano, permitindo assim o ajuste e a validação do modelo.

De todo modo, concluí-se que o trabalho realizado trouxe um avanço positivo em relação ao aumento do realismo do modelo, e é possível vislumbrar novos caminhos a serem seguidos para aprimorá-lo ainda mais.

## REFERÊNCIAS

- [1] Alerta Rio (Prefeitura do Rio de Janeiro). <http://www.sistema-alerta-rio.com.br>, 2020. Accessed 2020-01-20.
- [2] L. Almeida, A. Haddon, C. Kermorvant, A. Léculier, Y. Privat, M. Strugarek, N. Vauchelet, and J. Zubelli. Optimal release of mosquitoes to control dengue transmission. Technical report, Apr. 2019. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02115805/file/mosquitosCemracs-preprint.pdf>.
- [3] M. L. Barreto and M. G. Teixeira. Dengue in Brazil: epidemiological situation and contribution to a research agenda. *Estudos Avançados*, 22(64):53–72, Dec 2008.
- [4] S. Bhatt, P. W. Gething, O. J. Brady, J. P. Messina, A. W. Farlow, C. L. Moyes, J. M. Drake, J. S. Brownstein, A. G. Hoen, O. Sankoh, et al. The global distribution and burden of dengue. *Nature*, 496(7446):504, 2013.
- [5] C. G. Broyden. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, 19(92):577–593, 1965.
- [6] G. Chapiro, A. A. Mailybaev, A. J. De Souza, D. Marchesin, and J. Bruining. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion. *Computational geosciences*, 16(3):799–808, 2012.
- [7] S. R. Christophers. *Aedes aegypti: The yellow fever mosquito*. CUP Archive, 1960.
- [8] B. Cummins, R. Cortez, I. M. Foppa, J. Walbeck, and J. M. Hyman. A spatial model of mosquito host-seeking behavior. *PLoS computational biology*, 8(5):e1002500, 2012.
- [9] S. de Vigilância em Saúde. Monitoramento dos casos de arboviroses urbanas transmitidas pelo aedes(dengue, chikungunya e zika), semanas epidemiológicas 01 a 52, Maio 2019.
- [10] S. de Vigilância em Saúde. Monitoramento dos casos de dengue, febre de chikungunya e doença aguda pelo vírus zika até a semana epidemiológica 52 de 2018, Maio 2019.
- [11] C. Dufourd and Y. Dumont. Impact of environmental factors on mosquito dispersal in the prospect of sterile insect technique control. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(9):1695–1715, 2013.
- [12] A. E. Eiben, J. E. Smith, et al. *Introduction to evolutionary computing*, volume 53. Springer, 2003.
- [13] L. C. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*. American Mathematical Society, 2010.
- [14] N. M. Ferguson. Challenges and opportunities in controlling mosquito-borne infections. *Nature*, 559(7715):490, 2018.
- [15] N. A. Honório, W. d. C. Silva, P. J. Leite, J. M. Gonçalves, L. P. Lounibos, and R. Lourenço-de Oliveira. Dispersal of *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus* (Diptera: Culicidae) in an urban endemic dengue area in the State of Rio de Janeiro, Brazil. *Memórias do Instituto Oswaldo Cruz*, 98(2):191–198, 2003.

- [16] J. Koiller, M. Da Silva, M. Souza, C. Codeço, A. Iggidr, and G. Sallet. Aedes, wolbachia and dengue. Technical report, INRIA, January 2014.
- [17] C. J. Krebs. *Ecology: The experimental analysis of distribution and abundance*. Harper & Row, 1978.
- [18] R. M. Lana, T. G. Carneiro, N. A. Honório, and C. T. Codeço. Seasonal and nonseasonal dynamics of *Aedes aegypti* in Rio de Janeiro, Brazil: Fitting mathematical models to trap data. *Acta tropica*, 129:25–32, 2014.
- [19] R. M. Lana, M. M. Morais, T. F. M. de Lima, T. G. de Senna Carneiro, L. M. Stolerman, J. P. C. dos Santos, J. J. C. Cortés, Á. E. Eiras, and C. T. Codeco. Assessment of a trap based *Aedes aegypti* surveillance program using mathematical modeling. *PLoS one*, 13(1):e0190673, 2018.
- [20] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- [21] E. L. Lima. Análise no Rn. *Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro*, 2002.
- [22] P. H. G. Lugão and G. Chapiro. Modelagem e simulação da dinâmica populacional do *Aedes aegypti* em cenário urbano. In *Anais do XXII encontro nacional de modelagem computacional*, 2019.
- [23] E. Massad, M. Amaku, F. A. B. Coutinho, C. J. Struchiner, L. F. Lopez, A. Wilder-Smith, and M. N. Burattini. Estimating the size of *Aedes aegypti* populations from dengue incidence data: Implications for the risk of yellow fever outbreaks. *Infectious Disease Modelling*, 2(4):441–454, 2017.
- [24] A. J. Monaghan, C. W. Morin, D. F. Steinhoff, O. Wilhelmi, M. Hayden, D. A. Quattrochi, M. Reiskind, A. L. Lloyd, K. Smith, C. A. Schmidt, et al. On the seasonal occurrence and abundance of the zika virus vector mosquito *Aedes aegypti* in the contiguous united states. *PLoS currents*, 8, 2016.
- [25] M. J. Nelson. *Aedes aegypti: Biology and ecology*. PAHO, 1986.
- [26] L. T. Takahashi, N. A. Maidana, W. C. Ferreira, P. Pulino, and H. M. Yang. Mathematical models for the *Aedes aegypti* dispersal dynamics: travelling waves by wing and wind. *Bulletin of mathematical Biology*, 67(3):509–528, 2005.
- [27] M. G. Teixeira. Controle do dengue: importância da articulação de conhecimentos transdisciplinares. *Interface-Comunicação, Saúde, Educação*, 12:442–444, 2008.
- [28] R. C. Thomé, H. M. Yang, and L. Esteva. Optimal control of *Aedes aegypti* mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide. *Mathematical Biosciences*, 223(1):12–23, 2010.
- [29] L. D. Valdez, G. J. Sibona, and C. Condat. Impact of rainfall on *Aedes aegypti* populations. *Ecological Modelling*, 385:96–105, 2018.
- [30] D. Valle, D. N. Pimenta, and R. V. da Cunha. *Dengue: teorias e práticas*. SciELO-Editora FIOCRUZ, 2015.



- [31] B. P. Van Milligen, P. Bons, B. A. Carreras, and R. Sanchez. On the applicability of fick's law to diffusion in inhomogeneous systems. *European journal of physics*, 26(5):913, 2005.
- [32] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Pearson education, 2007.
- [33] T. Walker, P. Johnson, L. Moreira, I. Iturbe-Ormaetxe, F. Frentiu, C. McMeniman, Y. Leong, Y. Dong, J. Axford, P. Kriesner, A. Lloyd, S. Ritchie, O. S.L., and A. Hoffmann. The wMel wolbachia strain blocks dengue and invades caged *Aedes aegypti* populations. *Nature*, 476(7361):450, 2011.
- [34] W. M. Yamashita, S. S. Das, and G. Chapiro. Numerical modeling of mosquito population dynamics of *Aedes aegypti*. *Parasites & vectors*, 11(1):245, 2018.
- [35] W. M. Yamashita, L. T. Takahashi, and G. Chapiro. Traveling wave solutions for the dispersive models describing population dynamics of *Aedes aegypti*. *Mathematics and Computers in Simulation*, 146:90–99, 2018.
- [36] W. M. S. Yamashita. *Modelagem física e computacional da dinâmica populacional do mosquito Aedes aegypti*. PhD thesis, UFJF, 2018.
- [37] H. Yang, M. Macoris, K. Galvani, M. Andrighetti, and D. Wanderley. Assessing the effects of temperature on the population of *Aedes aegypti*, the vector of dengue. *Epidemiology & Infection*, 137(8):1188–1202, 2009.