UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Bianca dos Santos Paixão

Pontos Periódicos de Funções Afins por Partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no Ensino Médio

Juiz de Fora

2020

Bianca dos Santos Paixão

Pontos Periódicos de Funções Afins por Partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Paixão, Bianca dos Santos.
Pontos Periódicos de Funções Afins por Partes e o Teorema de Li e Yorke : uma introdução no Ensino Médio / Bianca dos Santos Paixão. – 2020.
99 f. : il.

Orientadora: Ana Tércia Monteiro Oliveira
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2020.

1. Pontos fixos. 2. Pontos periódicos. 3. Teorema de Li e Yorke. I. Oliveira, Ana Tércia Monteiro, orient. II. Título.

Bianca dos Santos Paixão

Pontos Periódicos de Funções Afins por Partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 07 de agosto de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Ana Tércia M. Oliveira

Prof.ª Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Ana Tércia M. Oliveira

Prof. Dr. Luis Fernando Crocco Afonso
Universidade Federal de Juiz de Fora

Ana Tércia M. Oliveira

Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior
Universidade Federal do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças e guiado meus passos até aqui. Concluir o mestrado é a realização de um sonho pessoal, que sem Ele não seria possível.

Agradeço a minha mãe Aparecida e aos meus irmãos Beatriz e Miquéias, que sempre me apoiaram nas minhas decisões e me incentivaram nesses anos de estudo. O amor de vocês me fortalece.

Ao meu pai Antônio (*in memoriam*), por ter me ensinado valores que carrego comigo em todos os momentos. A alegria e leveza com que conduzia a vida sempre será exemplo para mim. Saudades eternas!

Ao meu amado esposo Flávio, pelo apoio e compreensão. Só você sabe o quanto foi longa e árdua essa caminhada, obrigada por ter estado ao meu lado e não ter me deixado desistir.

Aos meus colegas da turma PROFMAT-2018, que vivenciaram comigo momentos de estudo, alegrias e de tensão. Em especial, à Viviane e Rosilene, que foram grandes companheiras e incentivadoras. Sem dúvidas nossa turma será inesquecível.

A todos os professores deste curso, pelo empenho e dedicação na transmissão de seus conhecimentos, fundamentais para minha formação.

À minha orientadora, Prof. Drª. Ana Tercia Monteiro Oliveira, por toda a paciência, carinho e empenho com os quais sempre me orientou neste trabalho. Muito obrigada por ser essa profissional de excelência e levar com tanto comprometimento o seu trabalho.

Enfim, a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram nesse momento tão importante da minha vida, o meu muito obrigada!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho, abordamos os conceitos de ponto fixo e de ponto periódico de um sistema dinâmico discreto. Mais especificamente, utilizamos ferramentas fundamentais da Análise Real, como o Teorema do Valor Intermediário, para garantir a existência de tais pontos num sistema dinâmico unidimensional. Apresentamos também o Teorema de Li e Yorke, que afirma que a existência de um ponto periódico de período 3 num sistema dinâmico garante a existência de pontos periódicos de qualquer período. Finalizamos com um ”Caderno de Atividades” que aborda tal conteúdo na dinâmica de funções afins e funções afins por partes. Trata–se de um material destinado aos alunos do Ensino Médio, que, além de contemplar as competências e habilidades propostas na BNCC, auxilia o professor a trabalhar de forma investigativa e participativa os conteúdos propostos nessa etapa escolar.

Palavras-chave: Pontos fixos. Pontos periódicos. Teorema de Li e Yorke.

ABSTRACT

In this paper, we discuss the concepts of fixed points and periodic points of a discrete dynamical system. More specifically, we use fundamental tools of Real Analysis, such as the Intermediate Value Theorem, to guarantee the existence of such points in a unidimensional dynamical system. We also present the Li and Yorke Theorem, which states that the existence of a periodic point of period 3 in a dynamical system guarantees the existence of periodic points of any period. The paper ends with an ”Activity Book” that addresses such content in the dynamics of affine functions and piecewise affine functions. This “Activity Book”, intended for high school students, contemplates the competences and skills proposed at CNCB (Common National Curriculum Base) and helps the teacher to work the contents proposed in an investigative and participatory way.

Keywords: Fixed points. Periodic points. Li and Yorke’s theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nesse primeiro capítulo apresentamos o objetivo, a justificativa e a estrutura desse trabalho. Essa dissertação traz primeiramente uma formalização matemática e em seguida uma proposta metodológica para a sala de aula, com o propósito de explorar noções básicas de sistemas dinâmicos e motivar o interesse pela área.

1.1 OBJETIVO

O objetivo geral desse trabalho é apresentar um referencial teórico e didático que possibilite, tanto aos alunos do ensino básico quanto aos do ensino superior, o desenvolvimento de capacidades investigativas na área da matemática, e que permita também aos professores da Educação Básica visualizarem a conexão entre os conceitos trabalhados em sala de aula e alguns fundamentos matemáticos das áreas de Análise e Sistemas Dinâmicos.

1.2 JUSTIFICATIVA

A dificuldade dos alunos em relação à aprendizagem matemática é evidenciada nas diversas avaliações em nível nacional ou internacional, bem como no cotidiano escolar. Sabemos que muitos fatores estão envolvidos nesse fato, dentre eles a metodologia de ensino e a motivação do próprio aluno.

> Para os alunos, a principal razão do insucesso na disciplina de Matemática resulta desta ser extremamente difícil de compreender. No seu entender, os professores não a explicam muito bem nem a tornam interessante. Não percebem para que serve nem porque são obrigados a estudá-la. Alguns alunos interiorizam mesmo desde cedo uma auto-imagem de incapacidade em relação à disciplina. Dum modo geral, culpam-se a si próprios, aos professores, ou às características específicas da Matemática (PONTE, 1994, p. 2).

Diante desse quadro, há necessidade de promover mudanças no ensino e na abordagem dos conteúdos matemáticos, buscando novas formas de ensino que tornem a matemática mais interessante e dinâmica. O professor pode ter papel fundamental nesse processo, sendo um organizador da aprendizagem.

> Numa perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, 1998, p. 38).

A seleção de conteúdos e a dinâmica em sala de aula também contribuem para o desenvolvimento do aluno. A Matemática nesse nível escolar tem um papel formativo e instrumental, contribuindo para que o aluno estruture o pensamento e o raciocínio dedutivo, perceba as técnicas e estratégias a serem aplicadas em outras áreas do conhecimento e nas atividades profissionais, reconhecendo também a matemática como ciência, com suas características estruturais específicas. Enfim, é necessário apresentar ao aluno informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo e aperfeiçoando-se ao longo da vida (BRASIL, 2000).

Uma forma de motivar o interesse dos discentes pelo conhecimento e proporcionar uma melhora significativa no desempenho dos mesmos é promover um contato com a pesquisa científica, incentivando a prática investigativa em sala de aula nos vários níveis de conhecimento matemático. "A prática pedagógica de investigações matemáticas tem sido recomendada por diversos estudiosos como forma de contribuir para uma melhor compreensão da disciplina em questão." (PARANÁ, 2008, p.67). Essa é uma metodologia onde há a participação efetiva do aluno na realização das atividades, fazendo com que ele aprenda de forma progressiva. Esse processo construtivo do saber é fundamental para a aprendizagem matemática.

> Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, testam-se essas conjecturas, algumas das quais, perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente corretas, poderão ser aperfeiçoadas. Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática. (PONTE, 2003, p.2).

Sendo o professor o orientador e intermediador desse processo, faz-se necessário possuir uma formação matemática sólida, para que auxilie seu aluno a construir esse conhecimento de forma eficaz e significativa. Por isso, este trabalho faz uma abordagem que evolui de conceitos básicos a conteúdos matemáticos mais elaborados.

Essa ponte entre o conhecimento da educação básica e a formação sólida do professor, contribui para o constante aperfeiçoamento e a reestruturação de práticas pedagógicas.

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para

> verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002, p. 5).

Neste trabalho, ao propormos o estudo de funções afins por partes no ensino médio através da abordagem de alguns conceitos básicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos, com enfoque nos pontos periódicos de funções reais de uma variável real, almejamos trabalhar de uma forma diferenciada as propostas da BNCC relacionadas ao estudo de funções definidas por uma ou mais sentenças polinomiais do 1º grau.

Nossos livros da educação básica carecem desse tipo de abordagem. Isso faz com que os alunos não questionem, não desenvolvam a observação e a investigação na relação entre equações e seus gráficos. É necessário inovar no ensino desse conteúdo, oferecendo uma abordagem que facilite a compreensão por parte do aluno.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p.121).

Independente do ponto de partida, todo processo de investigação resulta em diversos questionamentos, que orientados na direção certa, produzem conhecimento. Cabe ao aluno um papel ativo no processo de investigação e ao professor ser um orientador desse processo, adequando o nível de ensino e incentivando os seus discentes a compreenderem o verdadeiro sentido da matemática.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 2 abordamos alguns conceitos e resultados básicos sobre o conjunto dos números reais, funções e continuidade de funções. No Capítulo 3 trazemos os conceitos de ponto fixo e de ponto periódico de um sistema dinâmico $f : I \subset \mathbb{R} \to I$ e utilizamos o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de tais pontos. No Capítulo 4 apresentamos o Teorema de Li e Yorke, que nos dá condições suficientes para que um sistema dinâmico f tenha pontos periódicos de todos os períodos. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos uma proposta didática, o Caderno de Atividades, bem como o referencial teórico que reforça a utilização dessa proposta. O Caderno de Atividades está associado ao processo investigativo na construção do conhecimento, consolidação e fixação de alguns conteúdos expostos nesse trabalho.

2 CONCEITOS BÁSICOS E DEFINIÇÕES

Nesse capítulo trazemos os pré-requisitos necessários para uma melhor compreensão do Capítulo 3. A teoria sobre o conjunto dos números reais, o conceito de funções, de funções afins, de funções afins por partes e de funções contínuas são comumente trabalhados nos cursos de graduação em Matemática, mais especificamente nas disciplinas de Cálculo I e Análise Real, o que nos fez optar por uma breve exposição sobre tais conteúdos.

2.1 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

É conhecido que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo, veja Bartle (1982). Nesta seção, relembraremos algumas definições e propriedades relacionadas à completeza de $\mathbb{R}$. Inicialmente, relembramos algumas notações que representam subconjuntos especiais de $\mathbb{R}$, chamados intervalos:

(1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

(2) $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

(3) $[a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

(4) $(a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

(5) $(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$

(6) $(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$

(7) $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$

(8) $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

(9) $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.

Definição 2.1 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é limitado inferiormente quando existir $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq a$ para todo $a \in A$. Neste caso, chamamos r de uma cota inferior de A.*

De forma análoga, dizemos que A é limitado superiormente quando existir $s \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq s$ para todo $a \in A$. Neste caso, s é dita uma cota superior de A.

Definição 2.2 *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é dito limitado se A for limitado inferiormente e superiormente.*

Proposição 2.1 *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é limitado se, e somente se, existem $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $A \subseteq [r, s]$.*

Prova.

($\Rightarrow$) Se A é limitado, pelas Definições 2.2 e 2.1, existem $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $r \leq a$ e $a \leq s$, $\forall a \in A$. Portanto, $r \leq a \leq s$, $\forall a \in A$, isto é, $A \subseteq [r, s]$.

($\Leftarrow$) Se existem $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $A \subseteq [r, s]$, então $\forall a \in A$, $r \leq a \leq s$, ou seja, $r \leq a$ e $a \leq s, \forall a \in A$. Assim, pela Definição 2.1, A é limitado inferiormente por r e superiormente por s. Logo, pela Definição 2.2, A é limitado.

Definição 2.3 *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Um número real r_0 é chamado de ínfimo de A se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $r_0 \leq a$, para todo $a \in A$;

(ii) Se $r \in \mathbb{R}$ e $r \leq a$, para todo $a \in A$, então $r \leq r_0$.

Denotamos $r_0 = \inf A$.

Note que $\inf A$ é a maior das cotas inferiores de A.

Proposição 2.2 . *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Se $r \in \mathbb{R}$ e $r \leq a$, para todo $a \in A$, então $r \leq r_0$.

(b) Se $r_0 < r$, então existe $a \in A$ tal que $a < r$.

Prova.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Suponha $r_0 < r$. Caso não exista $a \in A$ tal que $a < r$, então $r \leq a$, para todo $a \in A$. Assim, por hipótese, $r \leq r_0$. Contradição. Logo, existe $a \in A$ tal que $a < r$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq a$, para todo $a \in A$. Se $r > r_0$, então existe $a_0 \in A$, tal que $a_0 < r$. Contradição. Logo, $r \leq r_0$.

Definição 2.4 . *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Um número real s_0 é chamado de supremo de A se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $a \leq s_0$, para todo $a \in A$;

(ii) Se $s \in \mathbb{R}$ e $a \leq s$, para todo $a \in A$, então $s_0 \leq s$.

Denotamos $s_0 = \sup A$.

Analogamente, $\sup A$ é a menor das cotas superiores de A.

Proposição 2.3 . *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Se $s \in \mathbb{R}$ e $a \leq s$, para todo $a \in A$, então $s_0 \leq s$.

(b) Se $s < s_0$, então existe $a \in A$ tal que $s < a$.

Prova.

A prova segue de forma análoga à demonstração da Proposição 2.2.

Axioma do Supremo. Todo subconjunto não vazio e limitado superiormente possui um supremo.

Proposição 2.4 *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e limitado inferiormente possui um ínfimo.*

Prova.

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio, limitado inferiormente e r uma cota inferior de A. Por definição, $r \leq a, \forall a \in A$, e portanto $-r \geq -a$, para todo $a \in A$.

Considere $B = \{-a; a \in A\}$. Então, B é não vazio e limitado superiormente. Assim, pelo Axioma do Supremo, B possui supremo. Mostraremos que $\inf A = -\sup B$.

Seja $b = \sup B$. Então $b \geq -a, \forall a \in A$. Logo, $-b \leq a$, para todo $a \in A$, o que implica que $-b$ é cota inferior de A.

Seja t uma cota inferior de A, isto é, $t \leq a, \forall a \in A$. Daí, $-t \geq -a$, $\forall a \in A$. Logo, $-t$ é cota superior de B. Pela definição de supremo, $-t \geq b$, e portanto, $t \leq -b$. Assim, $-b$ é a maior das cotas inferiores de A. Logo, $\inf A = -\sup B$.

2.2 FUNÇÕES

Definição 2.5 *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função f de A em B (representada por $f : A \to B$) é uma associação que a cada elemento x do conjunto A faz corresponder exatamente um elemento do conjunto B, designado por $f(x)$ e chamado de imagem de x pela função f. Nessas condições, o conjunto A é chamado o domínio da função f (denotado por $Dom(f)$), o conjunto B é chamado o contradomínio da função f e o conjunto $\{f(x); x \in A\}$ é chamado o conjunto imagem da função f (denotado por $Im(f)$). A notação $f : A \to B$ significa que f é uma função de A em B.*

O nosso propósito é abordar alguns aspectos dinâmicos de certas funções reais de uma variável real $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo contido em $\mathbb{R}$.

Definição 2.6 *Sejam I um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e $f : I \to \mathbb{R}$. O gráfico de f é o subconjunto do plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,*

$$Gr(f) = \{(x, f(x)); x \in I\}.$$

Definição 2.7 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(I) \subset J$. A função $g \circ f : I \to \mathbb{R}$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, é chamada a composta de g com f e o símbolo $\circ$ representa a operação de composição.*

Em particular, considere $f : I \to I$, onde I é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. De posse da Definição 2.7, utilizaremos a seguinte notação $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f \circ f^1(x)$, e assim sucessivamente, $f^n(x) = f \circ f^{n-1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.8 *Sejam I, J subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e $f : I \to J$. A função f é dita crescente em $I_1 \subset I$ se para quaisquer $x_1, x_2 \in I_1$*

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ sempre que } x_1 < x_2.$$

Definição 2.9 *Sejam I, J subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$ e $f : I \to J$. A função f é dita decrescente em $I_1 \subset I$ se para quaisquer $x_1, x_2 \in I_1$*

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ sempre que } x_1 < x_2.$$

2.3 FUNÇÃO AFIM

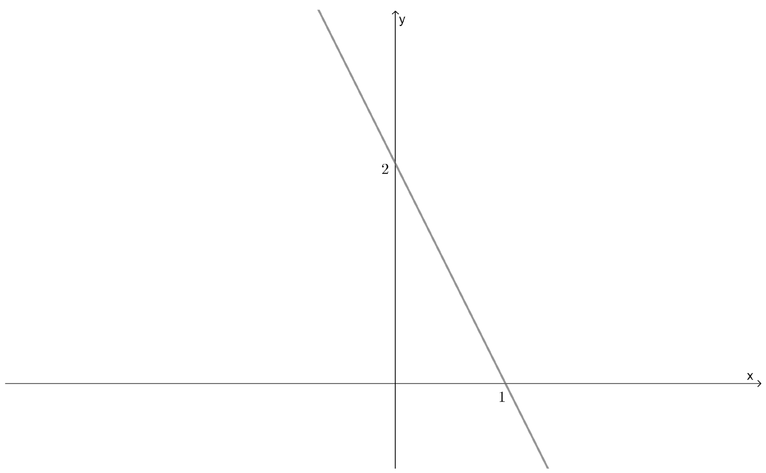
Definição 2.10 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada função afim quando a cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado $f(x) = ax + b$.*

No caso $b = 0$, f é chamada de função linear.

É conhecido que o gráfico de uma função afim é uma reta em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1 *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 2$.*

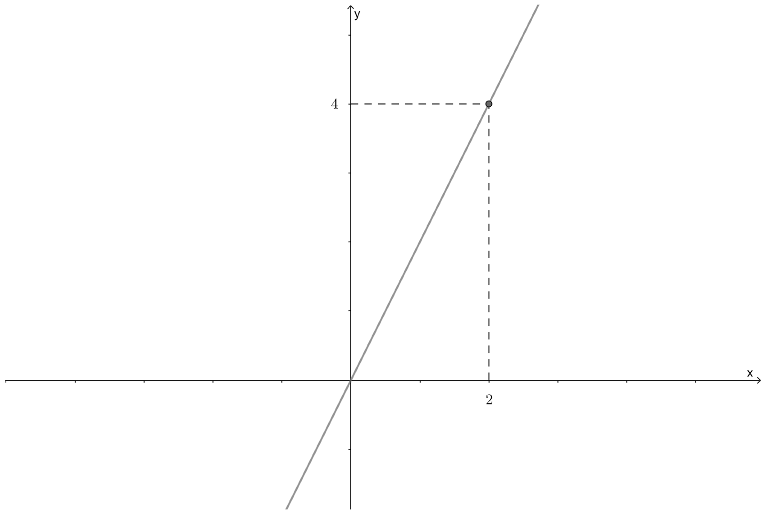
Figura 2.1 – Gráfico de f



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Exemplo 2.2 *Considere* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x.$

Figura 2.2 – Gráfico de f



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Proposição 2.5 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax + b$.*Então:*

(i) f *é crescente se, e somente se,* $a > 0$.

(ii) f *é decrescente se, e somente se,* $a < 0$.

Prova.

(i)
($\Rightarrow$) Por hipótese, $f(0) < f(1)$. Assim,

$$b < a + b \Rightarrow b - b < (a + b) - b \Rightarrow a > 0.$$

($\Leftarrow$) Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$. Como $a > 0$,

$$ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

(ii) Análoga à demonstração de (i).

2.4 FUNÇÃO AFIM POR PARTES

Definição 2.11 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Diremos que f é uma função afim por partes se existirem $n \in \mathbb{N}$ e $I_1, I_2, I_3, ..., I_n$ intervalos em $\mathbb{R}$, dois a dois disjuntos, tais que:*

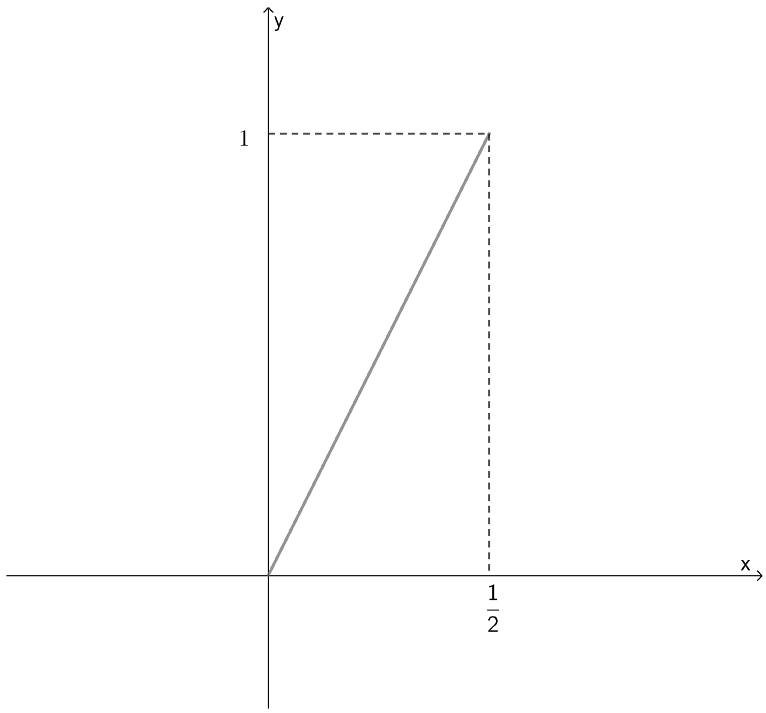
(i) $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

(ii) Para todo $k \in \{1, ..., n\}$ existem $a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_k \neq 0$, tais que $f(x) = a_k x + b_k$, para todo $x \in I_k$.

Nos Exemplos 2.3 e 2.4 a seguir temos os gráficos da restrição da função linear $x \mapsto 2x$ ao intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e da função afim $x \mapsto -2x + 2$ restrita ao intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, que conjuntamente definem a função afim por partes do Exemplo 2.5.

Exemplo 2.3 *Considere* $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$.

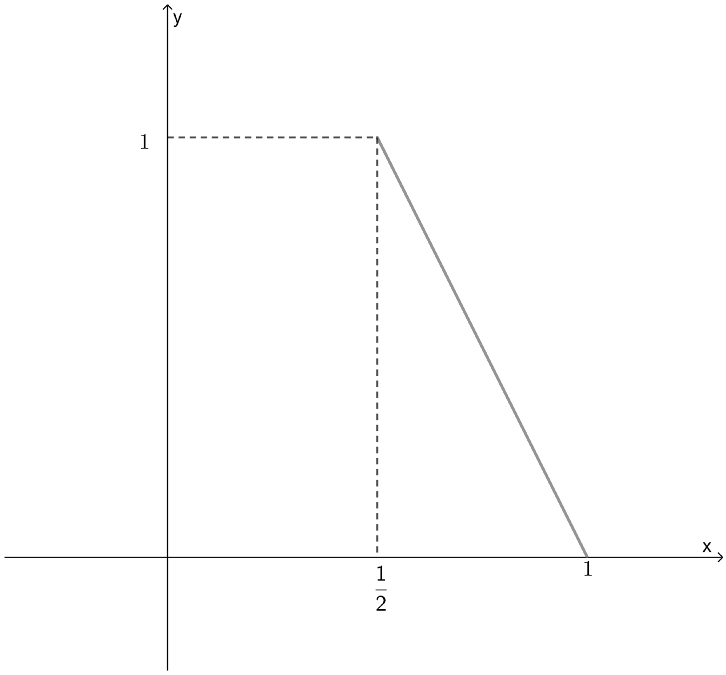
Figura 2.3 – Gráfico de g



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Exemplo 2.4 *Considere* $h : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$, $h(x) = -2x + 2$.

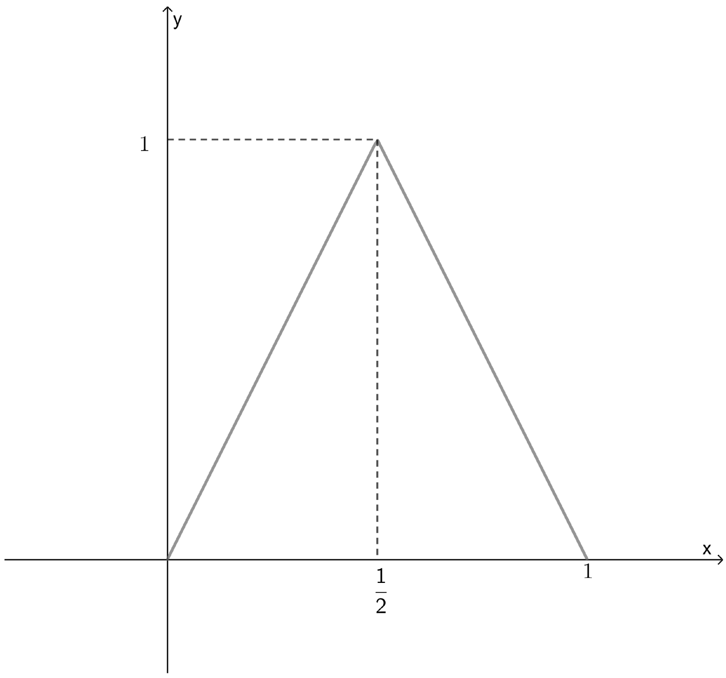
Figura 2.4 – Gráfico de h



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Exemplo 2.5 *Considere* $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$.

Figura 2.5 – Gráfico de f



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

2.5 FUNÇÃO CONTÍNUA

Antes de trabalharmos Função Contínua fazemos uma breve abordagem sobre sequência de números reais, que será útil em seguida. Sugerimos Lima (2017) para um estudo mais detalhado.

Definição 2.12 *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o $n-$ésimo termo da sequência.*

Utilizamos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para indicar a sequência cujo $n-$ésimo termo é x_n.

Definição 2.13 *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um número real a quando para todo número real $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um natural n_0 tal que*

$$x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon), \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Escreve-se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

Proposição 2.6 *Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, com a, b números reais, então*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + y_n = a + b$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$.

Prova.

(i) Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_n \in \left(a - \tfrac{\epsilon}{2}, a + \tfrac{\epsilon}{2}\right), \text{ sempre que } n \geq n_1 \text{ e } y_n \in \left(b - \tfrac{\epsilon}{2}, b + \tfrac{\epsilon}{2}\right), \text{ sempre que } n \geq n_2.$$

Daí,

$$|x_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ para todo } n \geq n_1 \text{ e } |y_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ para todo } n \geq n_2.$$

Tome $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$. Então,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0,$$

isto é,

$$x_n + y_n \in (a + b - \epsilon, a + b + \epsilon) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + y_n = a + b$.

(ii) Veja Lima (2017).

Definição 2.14 *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em a se, para todo $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que*

$$f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \text{ sempre que } x \in I \cap (a - r, a + r).$$

Proposição 2.7 *(Critério Sequencial) f é contínua em a se, e somente se, para qualquer sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de I tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Prova.

($\Rightarrow$) Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de I tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\epsilon > 0$. Como f é contínua em a, $\exists r > 0$ tal que

$$f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \text{ sempre que } x \in I \cap (a - r, a + r).$$

Entretanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - r, a + r)\ \forall n \geq n_0$. Assim,

$$f(x_n) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon), \forall n \geq n_0.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

($\Leftarrow$) Suponha que f não é contínua em a. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo n natural, $\exists\ x_n \in I \cap \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ de modo que $f(x_n) \notin (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$. Consequentemente, temos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para a. Porém, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f(a)$. Logo, a recíproca está provada.

Exemplo 2.6 *A função $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ é contínua em $a = \frac{1}{2}$.*

De fato, seja $\epsilon > 0$. Tome $r = \frac{\epsilon}{2}$ e considere $x \in [0, 1] \cap \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right)$.

Para $x \in [0, 1] \cap \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\right]$, isto é, $\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ e $x \geq 0$, temos:

$$f(x) = 2x \ \text{ e } \ 1 - \epsilon < 2x \leq 1$$
$$\Rightarrow f(x) \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) = \left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) - \epsilon, f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \epsilon\right).$$

Para $x \in [0, 1] \cap \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right)$, temos

$$\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \text{ e } x \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 - 2x \ \text{ e } \ -1 - \epsilon < -2x < -1$$

$$\Rightarrow 1 - \epsilon < 2 - 2x < 1 \Rightarrow f(x) \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) = \left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) - \epsilon, f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \epsilon\right).$$

Logo, f é contínua em $\frac{1}{2}$.

Proposição 2.8 *Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in I$, então $f + g$ e $f \cdot g$ também o são.*

Prova.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em I, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. A continuidade de f e g em a garante, de acordo com a Proposição 2.7, que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a) \text{ e } \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(a).$$

Segue das Propriedades de Operação com Sequências que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)+g(x_n)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} f(x_n) + \lim_{n\to+\infty} g(x_n) \\
&= f(a)+g(a) \\
&= (f+g)(a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(f\cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to+\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) \\
&= (\lim_{n\to+\infty} f(x_n)) \cdot (\lim_{n\to+\infty} g(x_n)) \\
&= f(a)\cdot g(a) \\
&= (f\cdot g)(a)
\end{aligned}$$

Portanto, novamente pela Proposição 2.7, $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em a.

Definição 2.15 *Diz-se que f é contínua em I se f é contínua em todo $a \in I$. Além disso, se f é contínua em seu domínio diremos que f é contínua.*

Exemplo 2.7 *Considere a constante $\gamma \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \gamma$.*

Então, f é contínua.

Prova.

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais convergindo para x_0. Assim, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência constante $(\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$, e portanto, converge para $\gamma = f(x_0)$. Logo, f é contínua em x_0 para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Portanto, f é contínua.

Exemplo 2.8 *Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$.*

Então, f é contínua.

Prova.

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ convergindo para x_0. Então, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que, por propriedade de convergência de sequências, converge para $ax_0 = f(x_0)$. Logo, f é contínua em x_0 para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.9 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax + b$.

Então, f *é contínua.*

Prova.

Segue da Proposição 2.8, dos Exemplos 2.7 e 2.8.

3 SISTEMAS DINÂMICOS

A área de Sistemas Dinâmicos é um ramo da Matemática que estuda e investiga processos em movimento. Tais processos estão presentes em várias áreas. O movimento das estrelas e galáxias, por exemplo, é um sistema dinâmico, que tem sido estudado durante séculos por milhares de matemáticos e cientistas. O mercado de ações, o clima no planeta, o crescimento e o decrescimento populacional e o movimento de um pêndulo também são exemplos de sistemas dinâmicos que sofrem alterações com o tempo.

Mas, o que matemáticos e cientistas procuram na pesquisa de sistemas dinâmicos? Como esses sistemas retratam movimentos e mudanças com o passar do tempo, tais pesquisadores visam descrever e prever os movimentos de cada sistema em tempos futuros muito distantes.

Há dois modelos principais de sistemas dinâmicos: o sistema dinâmico contínuo e o sistema dinâmico discreto. Neste trabalho nos restringiremos aos sistemas dinâmicos discretos.

3.1 SISTEMA DINÂMICO DISCRETO

Um sistema dinâmico discreto em um conjunto I é uma função $f : I \to I$. Ao iniciarmos com um ponto $x_0 \in I$, que corresponde ao instante zero, $f(x_0) \in I$ representará o estado de x_0 uma unidade de tempo depois.

Definição 3.1 *(Órbita) Considere o sistema dinâmico $f : I \to I$ e $x_0 \in I$. Chamamos de órbita de x_0 em relação ao sistema f o conjunto*

$$O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), f^4(x_0), ...\}$$

Um dos objetivos do pesquisador da área é investigar o comportamento da órbita de cada ponto do conjunto no qual está definido o sistema. Em particular, determinar os pontos de acumulação de $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ e pesquisar a presença de pontos fixos ou periódicos no sistema são questionamentos fundamentais na análise do mesmo.

Daqui em diante, direcionamos esse trabalho à existência de pontos fixos e de pontos periódicos de um sistema dinâmico discreto em um subconjunto de $\mathbb{R}$.

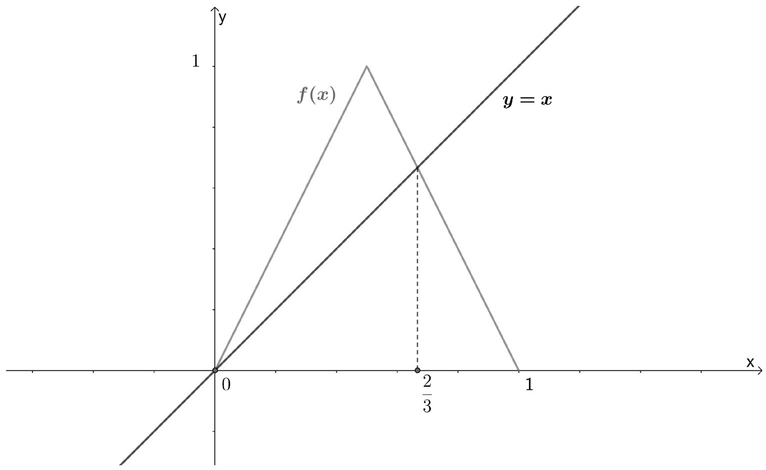
3.2 PONTOS FIXOS E PONTOS PERIÓDICOS

Definição 3.2 *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e $f : I \to I$. Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto fixo de f, se $f(x_0) = x_0$.*

Geometricamente, x_0 ser um ponto fixo de f significa que o gráfico de f e a reta $y = x$ se intersectam no ponto (x_0, x_0).

Exemplo 3.1 *A função* $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ *tem 2 pontos fixos,* $x = 0$ *e* $x = \frac{2}{3}$.

Figura 3.1 – Pontos fixos de f



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

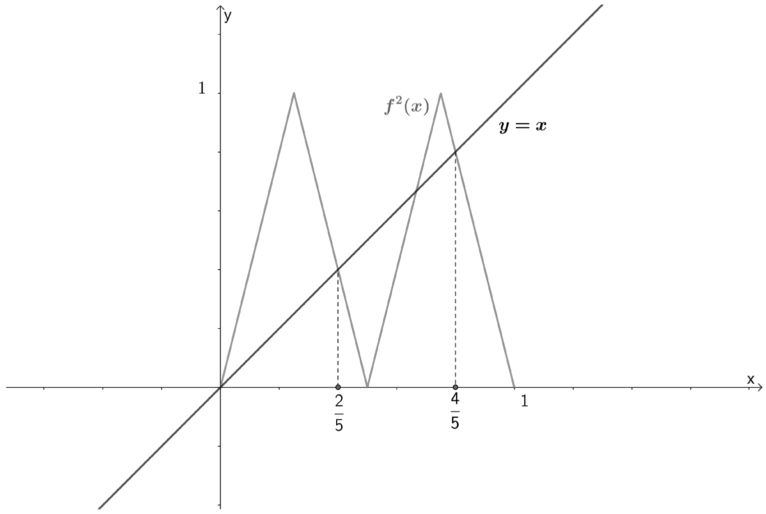
Definição 3.3 *Sejam* $I \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* k *um número natural e* $f : I \to I$*. Dizemos que* x_0 *é um ponto periódico de* f *de período* k *se,* $f^k(x_0) = x_0$ *e* $f^n(x_0) \neq x_0$*, para todo* $n < k$.

Quando k=1, temos $f(x_0) = x_0$. Sendo assim, identificamos que o ponto fixo é um caso particular de ponto periódico.

Exemplo 3.2 *Seja* f *dada no Exemplo 3.1. A seguir, o gráfico de* f^2 *nos auxilia a perceber que* f *tem 2 pontos periódicos de período 2,* $x = \frac{2}{5}$ *e* $x = \frac{4}{5}$*. Aplicando duas vezes a composição de funções em* f*, obtemos a lei de formação de* f^2 *e seu respectivo gráfico.*

$$f^2 : [0,1] \to [0,1],\ f^2(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2-4x, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 4x-2, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4x, & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

Figura 3.2 – Pontos periódicos de período 2 de f



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Note que $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ são pontos fixos que satisfazem a equação $f^2(x) = x$, porém não são pontos periódicos de período 2.

3.3 O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Teorema 3.1 *(Caso particular) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Prova.

Considere $A = \{\ x \in [a,b]\ ;\ f(x) < 0\}$. Então, $a \in A$ e $A \subset [a,b]$ e, portanto, A é não vazio e limitado superiormente por b. Pelo Axioma do Supremo, existe $c = \sup(A)$ e consequentemente $a \leq c \leq b$.

Afirmação, $f(c) = 0$.

Suponhamos que $f(c) > 0$. Como f é contínua em $[a,b]$, dado $\epsilon = f(c)$, existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \in (f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon) \text{ sempre que } x \in [a,b] \cap (c - r, c + r),$$

isto é,

$$0 < f(x) < 2\epsilon, \text{ para todo } x \in [a,b] \cap (c - r, c + r). \quad \text{(i)}$$

Note que $c \neq a$ pois $f(c) > 0$ e $f(a) < 0$. Assim,

$$c \in (a,b], \text{ o que implica, } [a,b] \cap (c - r, c) \neq \emptyset.$$

De (i),

$$f(x) > 0, \text{ para todo } x \in [a,b] \cap (c-r,c),$$

e, consequentemente, $c - r$ é uma cota superior de A. Contradição, pois c é a menor das cotas superiores de A. Portanto, $f(c) \leq 0$.

Suponhamos agora $f(c) < 0$. Por continuidade, dado $\epsilon = -f(c)$ existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \in (f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon) \text{ sempre que } x \in [a,b] \cap (c-r,c+r),$$

isto é,

$$-2\epsilon < f(x) < 0, \text{ para todo } x \in [a,b] \cap (c-r,c+r).$$

Note que $c \neq b$, pois $f(c) < 0$ e $f(b) > 0$. Então, $c \in [a,b)$ e consequentemente,

$$[a,b] \cap (c,c+r) \neq \emptyset \text{ e } f(x) < 0, \text{ para todo } x \in [a,b] \cap (c,c+r).$$

Contradição, pois c é uma cota superior de A. Logo, $f(c) = 0$.

Teorema 3.2 *(Teorema do Valor Intermediário). Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a) < \gamma < f(b)$, então existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = \gamma$.*

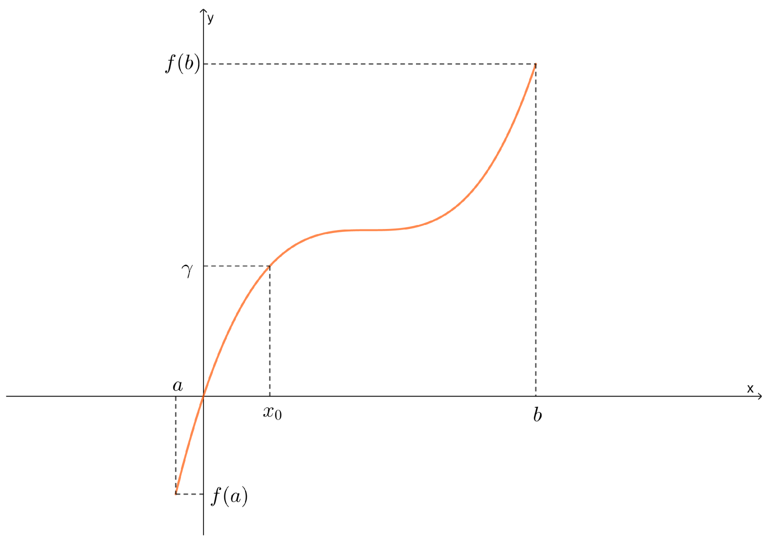
Prova.

Considere $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - \gamma$. Como g é contínua em $[a,b]$ e $g(a) < 0 < g(b)$, basta aplicar o Teorema 3.1 para obter $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = \gamma$.

■

Na Figura 3.3 apresentamos a interpretação geométrica do Teorema do Valor Intermediário.

Figura 3.3 – Teorema do Valor Intermediário

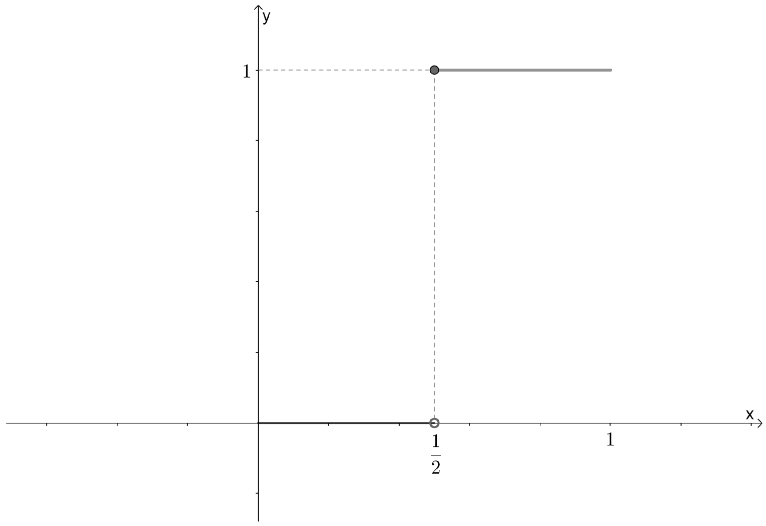


Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

A continuidade de f é fundamental para a validade do Teorema do Valor Intermediário, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.3 *Considere a função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Figura 3.4 – Gráfico de f



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

A função f não é contínua em $[0,1]$, pois não é contínua em $\frac{1}{2}$. Se tomarmos qualquer número real γ , com $f(0) = 0 < \gamma < 1 = f(1)$, não é possível encontrar $x \in (0,1)$ tal que $f(x) = \gamma$. Logo, a conclusão do Teorema do Valor Intermediário não é satisfeita pela função f.

3.4 O TEOREMA DO PONTO FIXO

Teorema 3.3 *(Teorema do Ponto Fixo) Seja* $f : [0,1] \to [0,1]$ *uma função contínua. Então existe* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$, *ou seja,* f *possui pelo menos um ponto fixo.*

Prova.

Se $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$, a tese do teorema está satisfeita. Portanto, vamos supor que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$.

Consideremos a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida no intervalo $[0,1]$. Então,

$$g(1) = f(1) - 1 < 0 < f(0) - 0 = g(0).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $g(x_0) = 0$. Portanto, $f(x_0) = x_0$, como queríamos provar.

4 O TEOREMA DE LI E YORKE

Em 1964 o matemático Oleksandr Mykolaiovych Sharkovskii publicou num jornal ucraniano um notável teorema, conhecido como o Teorema de Sharkovskii. Neste trabalho, Sharkovskii reordena o conjunto dos números naturais e prova que se uma função contínua tem um ponto periódico de período n então terá pontos periódicos de qualquer período menor que n na nova ordenação. Na ordenação de Sharkovskii o número 3 é o maior natural e, consequentemente, se uma função contínua tem um ponto periódico de período 3 então terá pontos periódicos de qualquer período.

Em 1975 Tien-Yien Li e James A. Yorke publicaram um caso particular do Teorema de Sharkovskii no trabalho ”Period three implies chaos”. Li e Yorke provaram que se um sistema dinâmico contínuo possui um ponto periódico de período 3, então também possui um ponto periódico de período n, para todo n natural.

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados prévios seguidos da demonstração do Teorema de Li e Yorke.

Proposição 4.1 *Sejam $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ intervalos em $\mathbb{R}$ tais que $I \subset J$ e $f : J \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(I) \supset J$, então f tem um ponto fixo em I.*

Prova.

Como $I \subset J$, $c \leq a \leq b \leq d$. Por hipótese, $f(I) \supset J$, e como $J \supset I$, temos $I \subset f(I)$. Logo, existem $\alpha, \beta \in I$ tais que $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$.

Se $\alpha = a$ ou $\beta = b$, a demonstração está concluída. Suponhamos $\alpha \neq a$ e $\beta \neq b$. Como $\alpha, \beta \in I$, temos $a < \alpha \leq b$ e $a \leq \beta < b$.

Consideremos a função contínua $h(x) = f(x) - x$. Assim,

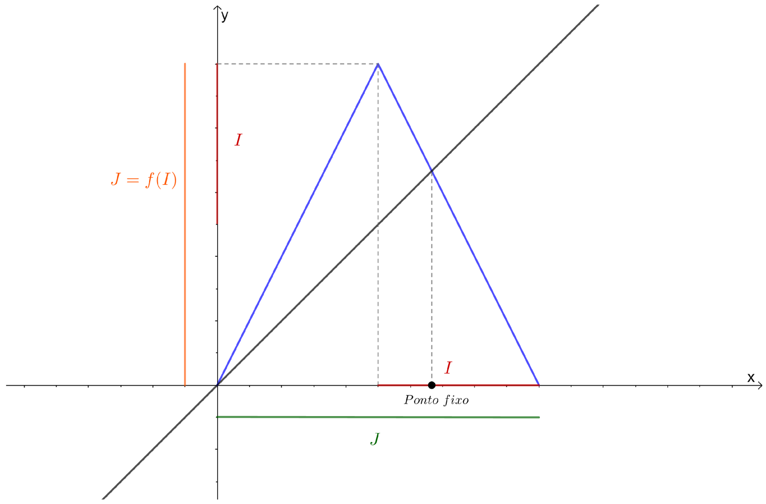
$$h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \alpha < 0 < b - \beta = f(\beta) - \beta = h(\beta)$$

e pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in I$ tal que $h(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$.

■

A Figura 4.1 ilustra a situação descrita na Proposição 4.1.

Figura 4.1 – Ilustração da Proposição 4.1



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Proposição 4.2 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para qualquer intervalo $J = [c, d]$, com $J \subset f([a, b])$, existe um intervalo $I' = [a_0, b_0] \subset [a, b]$ tal que $f(I') = J$.*

Prova.

Como $J = [c, d] \subset f([a, b])$, existem $p, q \in [a, b]$ tais que $c = f(p)$ e $d = f(q)$. Suponhamos $p < q$.

Tome $a_0 = \sup \{x \in [p, q] \,; f(x) \leq c\}$ e tome $b_0 = \inf \{x \in [a_0, q] \,; f(x) \geq d\}$.

Afirmação 1: $f(a_0) = c$.

Primeiramente, note que $a_0 \in [p, q]$. Além disso, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $[p, q]$ tal que $f(x_n) \leq c$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a_0$. Assim, por continuidade , $f(a_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) \leq c$.

Suponha $f(a_0) < c$. Então, $a_0 \in (p, q)$ e existe $r > 0$ tal que

$$(a_0 - r, a_0 + r) \subset (p, q) \text{ e } f(x) < c, \forall x \in (a_0 - r, a_0 + r).$$

Consequentemente, $a_0 = \sup \{x \in [p, q] \,; f(x) \leq c\} \geq a_0 + r$. Absurdo. Logo, $f(a_0) = c$.

Analogamente, $f(b_0) = d$.

Note que o intervalo $I' = [a_0, b_0] \subset [p, q] \subset [a, b]$.

Afirmação 2: $f(I') = J$.

Mostremos primeiramente a inclusão $(f(I') \subset J)$. Seja $z \in f(I')$. Então, existe $x \in I' = [a_0, b_0]$ tal que $f(x) = z$. Se $f(x) < c$, teríamos, pela definição de a_0, $x < a_0$. Absurdo. Se $f(x) > d$, teríamos, pela definição de b_0, $x > b_0$. Absurdo novamente. Logo, $c \leq f(x) \leq d$, e portanto, $z \in J$.

Agora, vejamos a inclusão $(J \subset (f(I'))$. Seja $z \in J$. Se $z = c$ ou $z = d$, sabemos que

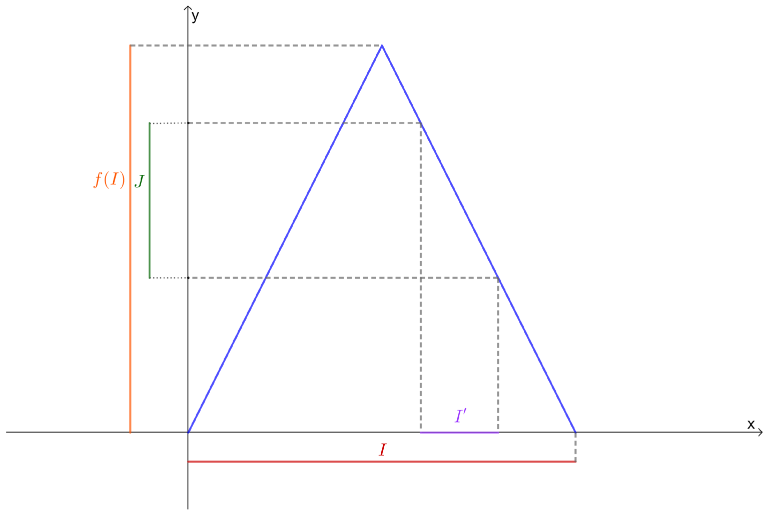
$z = f(a_0)$ ou $z = f(b_0)$ respectivamente.

Suponha que $z \in (c, d)$ e considere $g = f_{|I'}$. Então, $g : I' \to J$ é contínua. Como $g(a_0) = c < z < d = g(b_0)$, o Teorema do Valor Intermediário nos garante que existe $x \in (a_0, b_0)$ tal que $g(x) = z$, e portanto, $f(x) = z$. Logo, $z \in f(I')$.

■

A Figura 4.2 ilustra a situação descrita na Proposição 4.2.

Figura 4.2 – Ilustração da Proposição 4.2



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Proposição 4.3 *Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua e $I_0, I_1, ..., I_{n-1}$ intervalos fechados contidos em $[a, b]$ tais que*

$$f(I_0) \supset I_1,\ f(I_1) \supset I_2,\ ...,\ f(I_{n-2}) \supset I_{n-1},\ f(I_{n-1}) \supset I_0.$$

Então, existe $p_0 \in I_0$ tal que

$$f^n(p_0) = p_0 \text{ e } f^k(p_0) \in I_k, \text{ para todo } k = 1, 2, ..., n-1.$$

Prova.

Como

$$f(I_0) \supset I_1,\ f(I_1) \supset I_2,\ ...,\ f(I_{n-2}) \supset I_{n-1},\ f(I_{n-1}) \supset I_0,$$

aplicando a Proposição 4.2,

$$\begin{gathered}
I_0 \subset f(I_{n-1}) \Rightarrow \exists\, I'_{n-1} \subset I_{n-1} \text{ tal que } f(I'_{n-1}) = I_0; \\
I'_{n-1} \subset I_{n-1} \subset f(I_{n-2}) \Rightarrow \exists\, I'_{n-2} \subset I_{n-2} \text{ tal que } f(I'_{n-2}) = I'_{n-1}; \\
I'_{n-2} \subset I_{n-2} \subset f(I_{n-3}) \Rightarrow \exists\, I'_{n-3} \subset I_{n-3} \text{ tal que } f(I'_{n-3}) = I'_{n-2}; \\
... \\
I'_1 \subset I_1 \subset f(I_0) \Rightarrow \exists\, I'_0 \subset I_0 \text{ tal que } f(I'_0) = I'_1.
\end{gathered}$$

Assim,

$$f(I_0') = I_1' \subset I_1;$$
$$f^2(I_0') = f(I_1') = I_2' \subset I_2;$$
$$f^3(I_0') = f(I_2') = I_3' \subset I_3;$$
$$...$$
$$f^{n-1}(I_0') = f(I_{n-2}') = I_{n-1}' \subset I_{n-1};$$
$$f^n(I_0') = f(I_{n-1}') = I_0 \supset I_0'.$$

Consequentemente, pela Proposição 4.1,

$$\exists\, p_0 \in I_0' \subset I_0 \text{ tal que } f^n(p_0) = p_0,$$

e além disso,

$$f^k(p_0) \in I_k' \subset I_k, \text{ para todo } k = 1, 2, ..., n-1.$$

∎

Teorema 4.1 *(O Teorema de Li e Yorke). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f tem um ponto periódico de período 3, então f tem pontos periódicos de qualquer período.*

Prova.

Seja x_0 um ponto periódico de f de período 3 com órbita $\{x_0, x_1, x_2\}$ tal que $x_0 < x_1 < x_2$. Assim, $f(x_1) = x_0$ ou $f(x_1) = x_2$. Sem perda de generalidade, suponhamos $f(x_1) = x_0$. Então, $f(x_0) = x_2$ e $f(x_2) = x_1$.

Considere os intervalos $I_0 = [x_0, x_1]$, $I_1 = [x_1, x_2]$ e $I = [x_0, x_2]$.

Afirmação: $f(I_1) \supset I_0$, $f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_0) \supset I_0$.

Mostremos primeiramente a inclusão $(f(I_1) \supset I_0)$.

Seja $y \in I_0$. Então, $x_0 \leq y \leq x_1 \Rightarrow f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in I_1 = [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = y$. Logo, $y \in f(I_1)$.

Agora vejamos a inclusão $(f(I_0) \supset I)$.

Seja $z \in I$. Então, $x_0 \leq z \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq z \leq f(x_0)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in I_0 = [x_0, x_1]$ tal que $f(x) = z$. Logo, $z \in f(I_0)$.

Visto que $f(I_0) \supset I$, segue $f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_0) \supset I_0$.

Pela Proposição 4.1, como $f(I_0) \supset I_0$, f tem um ponto fixo em I_0.

A seguir, provaremos que f tem um ponto periódico de período n para qualquer natural $n \geq 2$.

Seja $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Tome $J_0 = J_1 = ... = J_{n-2} = I_0$ e $J_{n-1} = I_1$. Então,

$$f(J_k) \supset J_{k+1}, \quad \forall k = 0, 1, 2, ..., n-2$$
$$\text{e } f(J_{n-1}) \supset J_0.$$

Assim, pela Proposição 4.3, existe $p_0 \in J_0 = I_0$ tal que

$$f^n(p_0) = p_0 \text{ e } f^k(p_0) \in J_k, \ \ \forall k = 1, 2, ..., n-1$$

isto é,

$$f^n(p_0) = p_0,$$
$$f^k(p_0) \in I_0, \ \forall k = 1, 2, ..., n-2 \text{ e } f^{n-1}(p_0) \in I_1.$$

Afirmação: p_0 é um ponto periódico de período n.

Suponhamos que p_0 não seja um ponto periódico de período n. Como $f^n(p_0) = p_0$, p_0 é um ponto periódico de período menor do que n, e consequentemente, $f^{n-1}(p_0) \in \{p_0, f(p_0), f^2(p_0), ..., f^{n-2}(p_0)\}$. Então,

$$\begin{aligned} f^{n-1}(p_0) \in I_0 \cap I_1 &\Rightarrow f^{n-1}(p_0) = x_1 \\ \Rightarrow p_0 = f^n(p_0) &= f(f^{n-1}(p_0)) = f(x_1) = x_0 \\ &\Rightarrow f(p_0) = f(x_0) = x_2 \notin I_0. \end{aligned}$$

Contradição com $f^k(p_0) \in I_0, \ \forall k = 1, 2, ..., n-2$.

Logo, p_0 é um ponto periódico de período n.

■

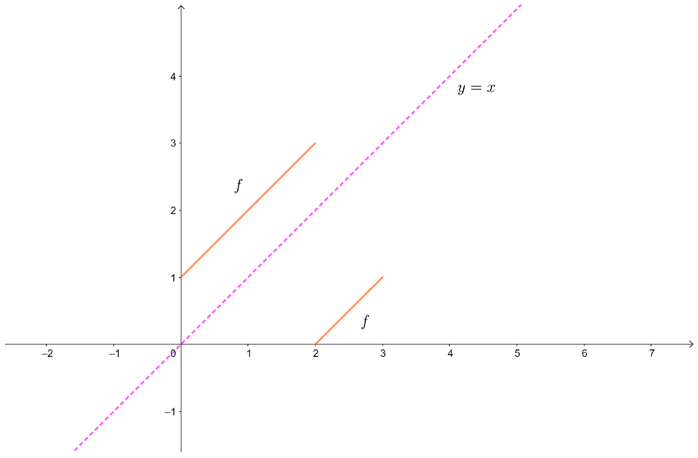
Note que o teorema acima se adapta facilmente para funções contínuas de $[a, b]$ em $[a, b]$, com a, b números reais.

A seguir, veremos que a continuidade de f é fundamental para a conclusão do Teorema de Li e Yorke.

Exemplo 4.1 *Considere a função* $f : [0, 3] \to [0, 3]$*, dada por* $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x < 2 \\ x-2, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$.

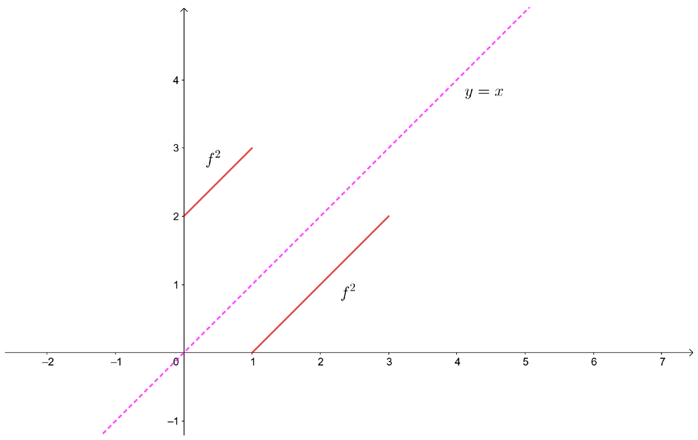
Note que f é uma função descontínua sem pontos fixos e sem pontos periódicos de período 2. Porém, todos os pontos de $[0, 3]$ são pontos periódicos de período 3.

Figura 4.3 – Gráfico de f



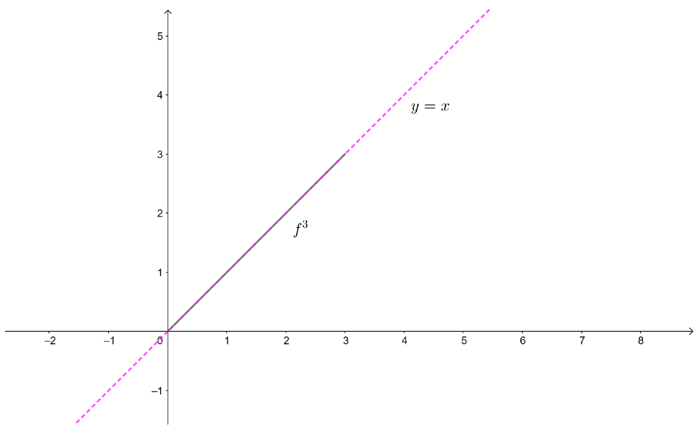
Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Figura 4.4 – Gráfico de f^2



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

Figura 4.5 – Gráfico de f^3



Fonte: Elaborada pelo autor(2020)

5 PROPOSTA DIDÁTICA

O ensino da matemática no ensino médio tem ganhado novos rumos, baseado nas propostas apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em ambos os documentos se percebe a necessidade de uma boa seleção de conteúdos e metodologias para que esses tenham um caráter formativo do pensamento matemático.

> Partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdo a ser trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p.70).

Segundo a BNCC (2018), no Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias deve promover ações que ampliem o letramento matemático já iniciado no ensino fundamental. Isso será feito estimulando processos mais elaborados de reflexão e de abstração a partir dos novos conhecimentos específicos. Ainda segundo esse documento,

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. (BRASIL, 2018, p.529).

Diante de tais necessidades, apresentamos como proposta didática, um Caderno de Atividades, que se encontra no preâmbulo deste trabalho.

O Caderno de Atividades é um produto educacional que aborda o conceito de ponto fixo e de ponto periódico de um sistema dinâmico discreto, a partir de conteúdos próprios do Ensino Médio. O objetivo geral das atividades é contribuir para que o conhecimento do aluno seja construído progressivamente, de forma investigativa e significativa. Esse tipo de metodologia gera observações, discussões e possibilita a aplicação de diversos conceitos matemáticos já conhecidos pelos alunos.

Assim, dentre as várias competências e habilidades propostas na BNCC, trabalhamos nessa proposta didática as competências específicas que destacam a resolução e elaboração de problemas e o processo de investigação.

As habilidades de Resolver e Elaborar Problemas presentes na BNCC abrangem tanto os problemas cotidianos para os estudantes quanto os problemas próprios da Matemática. Assim, o professor deve estar preparado para desenvolver situações-problema que tenham significado nas atividades do dia a dia do aluno e ao mesmo tempo, possa ajudar ao aluno a relacionar conceitos e procedimentos matemáticos, apresentando as soluções com argumentos consistentes.

> A elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (BRASIL, 2018, p. 536).

As habilidades relacionadas aos processos de investigação são importantes na formação matemática dos estudantes, pois além de ajudá-lo a formular hipóteses, construir argumentos, a investigação auxilia o aluno a ver a matemática como ciência.

> Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados. Igualmente significa caracterizar a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação. (BRASIL, 2018, p. 240).

Nesse sentido, a proposta do Caderno de Atividades é trabalhar conceitos básicos da área de pesquisa matemática Sistemas Dinâmicos, utilizando conteúdos abordados no Ensino Médio, procurando explorá-los melhor e motivar o interesse pela área. O nosso propósito é motivar os alunos ao questionamento, à observação crítica e à investigação na relação entre as expressões algébricas e as representações gráficas de uma função.

> É interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos decrescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo da cinemática, em Física. É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes. (BRASIL, 2006, p.72)

Almejamos que nossos alunos tenham uma sólida base matemática, que vejam conexão entre os conteúdos e experimentem a matemática como ciência viva. Para isso, precisamos de aulas mais interessantes, que despertem a curiosidade, para que o próprio aluno faça suas descobertas sobre o conteúdo abordado. O professor assume então uma postura de articulador dos saberes, incentivando seus alunos no processo de ensino-aprendizagem. É necessário inovar no ensino para avançar no conhecimento.

6 CONCLUSÃO

As noções de ponto fixo e ponto periódico são muito importantes no estudo de Sistemas Dinâmicos. A partir do Teorema do Valor Intermediário, garantimos a existência de pontos fixos em funções contínuas do tipo $f : I \subset \mathbb{R} \to I$ que pode ser facilmente visualizado através de simples análise gráfica de f.

Quanto à existência de pontos periódicos de todos os períodos, não é tão simples visualizar apenas com o gráfico de f. Porém, o Teorema de Li e Yorke é uma forte ferramenta que reduz nossa análise ao gráfico de f^3, ou seja, a existência de um ponto periódico de período 3 garante a existência de pontos periódicos de todos os períodos.

O conceito de pontos periódicos de um sistema dinâmico discreto é um conceito relativamente simples que envolve diversos conteúdos abordados no Ensino Médio como função, conjunto imagem, composição de funções, gráfico de funções, equações e suas interpretações gráficas, entre outros. Assim, tal conceito pode ser abordado no Ensino Médio de forma investigativa, que propicie ao aluno um aprofundamento dos conteúdos envolvidos e uma perspectiva diferente do modelo de ensino usual.

Mediante o exposto, apresentamos como proposta didática um “Caderno de Atividades” que está anexado a este trabalho e envolve o estudo de pontos periódicos. É uma sequência didática pela qual o aluno é incentivado a observar, testar e até mesmo conjecturar, tendo participação ativa em todo o processo. É um material que traz novidades na forma de abordar o conteúdo de funções afins e funções afins por partes, incentivando também o uso de tecnologias na pesquisa feita pelos alunos.

De uma forma geral, buscamos nesse trabalho, contribuir com professores e alunos da Educação Básica e da graduação em Licenciatura em Matemática, trazendo como proposta ao ensino de matemática a motivação aos alunos da educação básica à iniciação à pesquisa de conceitos simples da área de Sistemas Dinâmicos ou de outras áreas da Matemática, para que tenham a percepção da Matemática como ciência presente em tudo que nos cerca.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. **Introduction to real analysis**. 4. ed. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1982.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** – 5ª a 8ª série. Brasília, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. v. 2, Brasília: MEC/SEF, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIEGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. **As atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. SEM-SPCE, Lisboa, p. 5 – 24, 2002.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. **The American Mathematical Monthly**, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.

LIMA, E. L. **Análise Real**: Funções de Uma Variável. Coleção Matemática Universitária. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MENDONÇA, M. G. Puntos Periódicos de Funciones Continuas. **Revista de Educación Matemática**, v.14, n.3, p. 26-34. 1999.

MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de Cálculo**. Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PARANÁ. Secretaria do Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica** - Matemática. Curitiba: SEED/DEB-PR, 2008.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, n.2, p.93-169, 2003.

PONTE, J. P. Matemática: Uma disciplina condenada ao insucesso? **NOESIS**, n. 32, p. 2. 1994.

SANTANA, G. O. **O Teorema de Sarkoviskii e seu recíproco**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

APÊNDICE A – CADERNO DE ATIVIDADES

CADERNO DE ATIVIDADES

Versão

do professor

1. APRESENTAÇÃO

O caderno de atividades, a seguir, refere-se ao produto educacional vinculado à dissertação de mestrado intitulada “Pontos Periódicos de Funções Afins por Partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no Ensino Médio” do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Sociedade Brasileira de Matemática. Nessa dissertação, foram apresentados alguns fundamentos matemáticos das áreas de Análise e Sistemas Dinâmicos. Mais especificamente, abordou-se o conceito de ponto fixo e de ponto periódico de um sistema dinâmico discreto. Assim, a proposta desse produto educacional é fazer uma abordagem básica de tais conceitos ao nível de ensino médio.

Para isso, em atividades preliminares são tratados os conceitos de Função Afim, Função Afim por Partes, Função Contínua e Função Composta. A partir daí, desenvolve-se a noção de Ponto Fixo trabalhando a relação entre a notação algébrica e a representação gráfica e por fim, é explorada a obtenção de pontos periódicos.

Os conteúdos propostos estão vinculados à componente curricular do 1.º ano do Ensino Médio, presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse Caderno de Atividades pode ser utilizado para consolidar e aprofundar conteúdos já trabalhados ou introduzir novos.

O objetivo geral das atividades desse caderno é contribuir para que o conhecimento do aluno seja construído progressivamente, de forma investigativa e significativa. A metodologia proposta gera observação, discussões e possibilita a aplicação de diversos conceitos matemáticos já conhecidos pelos alunos. O professor assume então uma postura de articulador dos saberes, incentivando seus alunos no processo de ensino-aprendizagem.

Em cada sequência de atividades, apresentamos os objetivos específicos, as habilidades e competências a serem trabalhadas, os recursos necessários e algumas observações. Porém, cada professor pode adaptá-la de acordo com a necessidade da turma, trabalhando o caderno num todo ou em partes, modificando ou acrescentando as atividades.

2. ORIENTAÇÕES GERAIS E ESPECÍFICAS

A maioria das atividades a seguir tem uma proposta investigativa, em que os alunos formarão os conceitos a partir de suas observações e conjecturas. Assim, é de extrema importância o papel do professor como incentivador, acompanhando de perto esse processo.

Os erros fazem parte do processo de aprendizagem. É importante corrigi-los com paciência, através de questionamentos e suposições, ajudando o aluno a identificá-los, lembrando sempre que cada aluno tem um tempo específico de aprendizagem.

Para que o processo flua, é essencial valorizar as diferentes maneiras de resolver os problemas e contribuir para a troca de informações entre os alunos, bem como entre o aluno e o professor.

No caderno do aluno há dicas do uso do software GeoGebra, da calculadora e da planilha eletrônica. Tais recursos serão úteis para uma melhor visualização das atividades e contribuirão para que se desenvolvam num tempo desejável.

O material foi elaborado seguindo as orientações da BNCC. Para facilitar a organização, as competências específicas e as habilidades utilizadas da BNCC, estão listadas a seguir:

BNCC	
Competência específica	**Habilidade** (relacionada a competência)
3 - Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais
4 - Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação	(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento

matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
5 - Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Abaixo estão as orientações específicas das atividades.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	FUNÇÕES AFINS
Número(s) da(s) atividade(s)	1 e 2
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT301), (EM13MAT401) , (EM13MAT501)
Objetivos	Representar pontos no plano cartesiano; Identificar as representações algébrica e gráfica da função afim; Representar graficamente um conjunto de dados contido em tabelas.
Conteúdos	Plano cartesiano; construção de gráfico de funções afins; lei de formação de uma função afim.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades.
Observação	-

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	FUNÇÕES AFINS
Número(s) da(s) atividade(s)	3 e 4
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT302), (EM13MAT401) , (EM13MAT501), (EM13MAT510)
Objetivos	Representar graficamente a função afim; Compreender a relação dos coeficientes de uma função afim com o seu gráfico; Verificar a interdependência entre as representações algébrica e gráfica.
Conteúdos	Construção e análise de gráfico; coeficientes da função afim; observação de padrões em gráficos e tabelas.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades.
Observação	-

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	FUNÇÕES AFINS
Número(s) da(s) atividade(s)	5 e 6
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT301), (EM13MAT302), (EM13MAT401) , (EM13MAT501), (EM13MAT510)
Objetivos	Representar graficamente a função afim; Relacionar o gráfico de uma função afim com sua lei de formação; Realizar interseção entre gráficos; Introduzir a noção de ponto fixo; Determinar os pontos fixos de uma função afim.
Conteúdos	Gráfico de uma função afim; observação de padrões em gráficos e tabelas; ponto fixo de uma função.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades, laboratório de informática, data show ou celular (uso do GeoGebra).
Observação	Sugerimos que o professor apresente o GeoGebra aos alunos numa aula prévia.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	FUNÇÕES AFINS POR PARTES
Número(s) da(s) atividade(s)	7 e 8
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT302), (EM13MAT401) , (EM13MAT404), (EM13MAT510)
Objetivos	Representar graficamente uma função definida por partes; Identificar domínio e imagem; Analisar a função afim por partes através de sua lei de formação e seu gráfico.
Conteúdos	Gráfico de uma função afim por partes; domínio e imagem.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades, laboratório de informática, data show ou celular (uso do GeoGebra).
Observação	O professor pode apresentar outros exemplos.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES
Número(s) da(s) atividade(s)	9 e 10
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT301), (EM13MAT404) , (EM13MAT501), (EM13MAT510)
Objetivos	Introduzir a noção de composição de funções e investigar a evolução de composições sucessivas.
Conteúdos	Composição de funções; análise de tabelas.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades
Observação	-

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	SISTEMAS DINÂMICOS NO ENSINO MÉDIO
Número(s) da(s) atividade(s)	11, 12 e 13
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT301), (EM13MAT302), (EM13MAT404), (EM13MAT501), (EM13MAT510)
Objetivos	Definir sistema dinâmico discreto; Definir e investigar as órbitas dos pontos.
Conteúdos	Função afim; função afim por partes; composição de funções.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades e calculadora.
Observação	O professor pode apresentar uma planilha eletrônica como uma alternativa para cálculos.

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS	
Seção	SISTEMAS DINÂMICOS NO ENSINO MÉDIO
Número(s) da(s) atividade(s)	14 e 15
Competências BNCC	3, 4 e 5
Habilidades BNCC	(EM13MAT301), (EM13MAT302), (EM13MAT404), (EM13MAT501), (EM13MAT510)
Objetivos	Investigar a existência de pontos periódicos de uma função com o auxílio do GeoGebra.
Conteúdos	Construção e análise de gráficos; função afim por partes; função identidade; composição de funções, ponto fixo e pontos periódicos.
Recurso(s) necessário(s)	Caderno de atividades e GeoGebra.
Observação	As orientações de construção das atividades 14 e 15 estão de acordo com a versão do GeoGebra para computadores. No caso, do uso do aplicativo, o professor pode passar as orientações necessárias.

SISTEMAS DINÂMICOS

NO ENSINO MÉDIO

Prezado (a) aluno (a),

O presente material trata-se de um Caderno de Atividades que será muito útil para aprofundar seus conhecimentos sobre funções. Este caderno te colocará em contato com conceitos ainda pouco explorados, porém compreensíveis, no Ensino Médio.

Para organizar melhor nosso trabalho, dividimos nosso caderno em seções: Funções Afins, Funções Afins por partes, Composição de funções e Sistemas Dinâmicos no Ensino Médio.

Faremos experimentos direcionados a uma revisão, aprofundamento e introdução de alguns assuntos via Funções Afins. Veja alguns dos tópicos importantes que iremos trabalhar:

- Esboço e análise de gráficos de Funções Afins;
- Coeficiente angular e linear;
- Ponto Fixo;
- Função Afim por partes;
- Domínio e Imagem;
- Composição de funções;
- Órbita de um ponto;
- Pontos periódicos.

Convidamos você a se iniciar como um(a) investigador(a) da área da matemática, tendo como principal objeto de pesquisa a dinâmica das funções afins. Você tem como ferramentas todos os recursos de funções já aprendidos. Se algo não estiver claro, procure revisar e pesquisar para esclarecer suas dúvidas. É de extrema importância que você esteja em interação com seu professor e colegas, seja para sanar alguma dificuldade encontrada, seja para mostrar suas conclusões.

Fique atento as dicas e observações ao longo do texto. Iremos explorar recursos além do quadro, lápis e papel.

Bom trabalho!

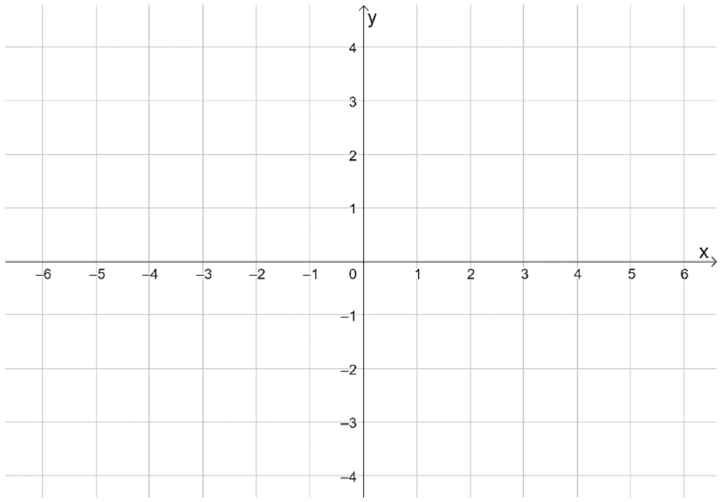
FUNÇÕES AFINS

ATIVIDADE 1

Preencha as tabelas a seguir, represente os pontos encontrados no plano cartesiano e em seguida ligue esses pontos:

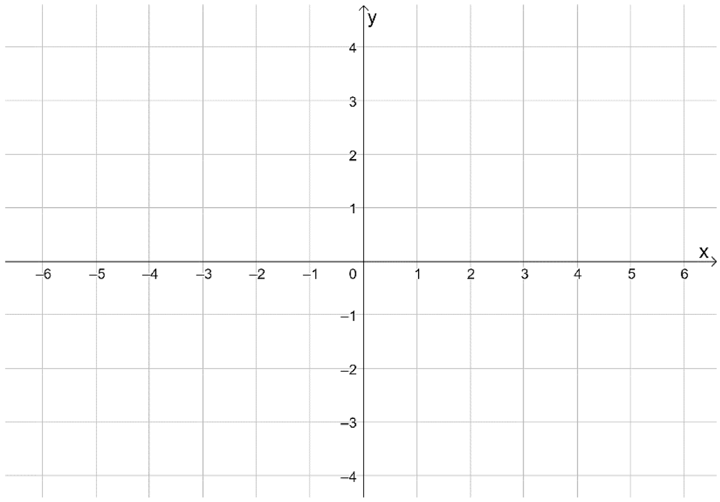
a)

$y = 2x$		
x	y	(x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		



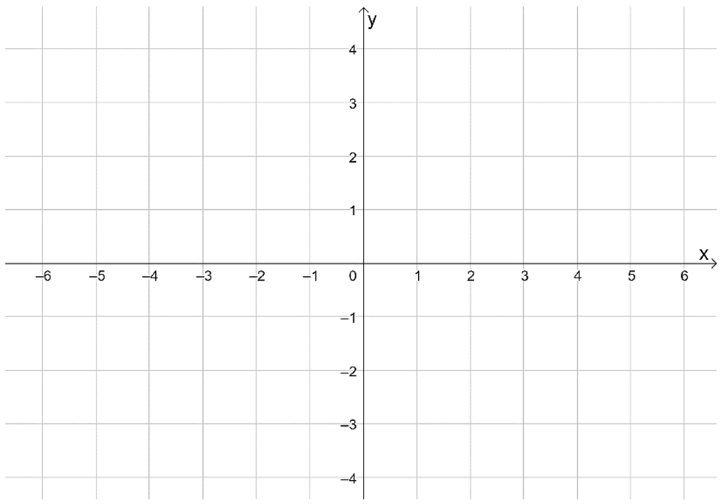
b)

$y = 2x + 3$		
x	y	(x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		



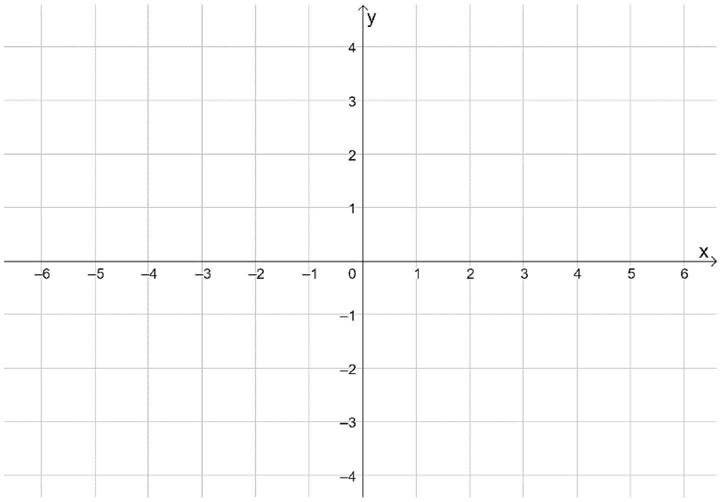
c)

$y = -3x$		
x	y	(x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		



d)

$y = -3x + 5$		
x	y	(x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		



Lembre-se : f(x) = y

Você acaba de construir gráficos de funções afins, que são do tipo $f\,(x) = ax + b$. Vamos a alguns questionamentos:

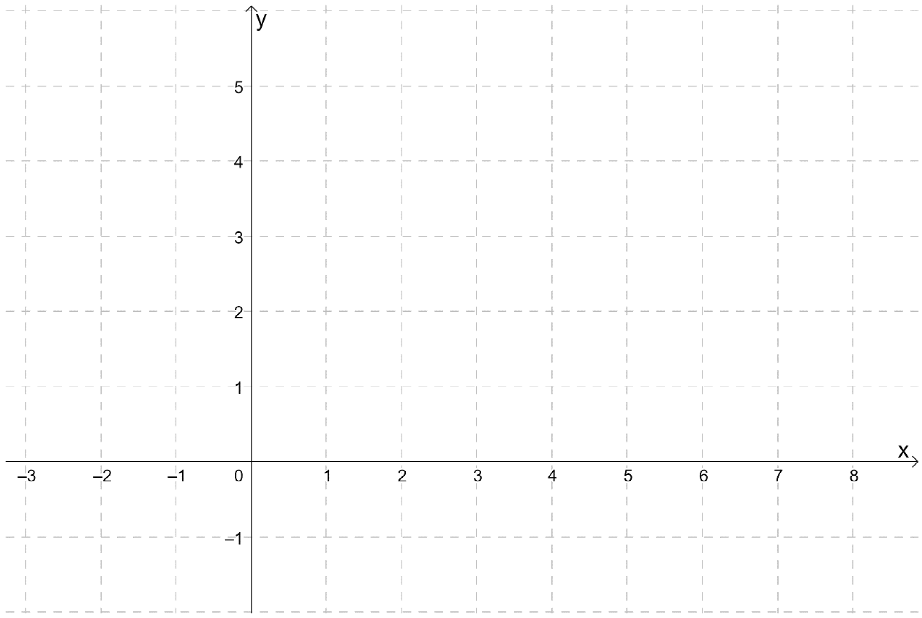
i) Ligando os pontos (x, y) obtidos nas tabelas, obtemos os gráficos das funções $y = 2x$, $y = 2x + 3$, $y = -3x$ e $y = -3x + 5$. Que objeto geométrico representa esses gráficos?

ii) Observe a tabela do item 1a). A medida que os valores de x foram aumentando, o que aconteceu com os valores de y obtidos?

iii) Já na tabela do item 1d), a medida que os valores de x foram aumentando, o que aconteceu com os valores de y obtidos?

ATIVIDADE 2

No plano cartesiano abaixo, pinte de azul a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que ou igual a 0 e menor que 1 $(0 \leq x < 1)$ e pinte de verde a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que ou igual a 1 e menor que ou igual a 2 $(1 \leq x \leq 2)$.



Represente no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções abaixo nas regiões que se pede:

a) $\mathbf{y = 2x}$ na região em que $\mathbf{0 \leq x < 1}$.

b) $\mathbf{y = -3x + 5}$ na região em que $\mathbf{1 \leq x \leq 2}$.

Vamos a novos questionamentos:

i) Que objeto geométrico obtemos na representação gráfica do item (a)?

ii) Que objeto geométrico obtemos na representação gráfica do item (b)?

iii) A junção das representações gráficas acima é uma reta?

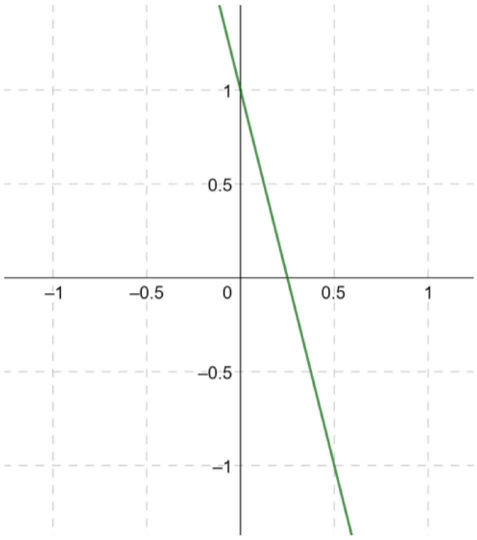
iv) A junção das representações gráficas é o gráfico de alguma função? Por quê?

ATIVIDADE 3

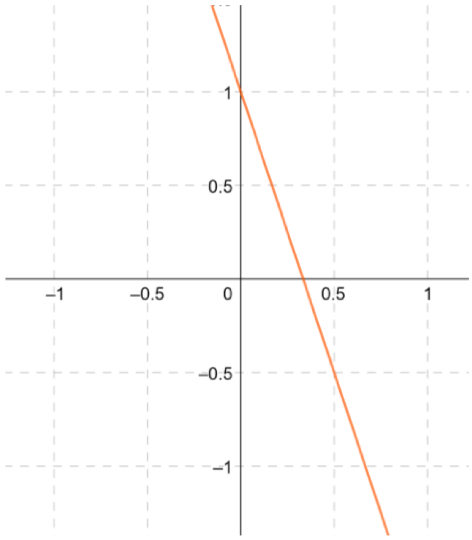
Abaixo temos os gráficos das seguintes funções afins:

(a) $y = -4x + 1$	**(e)** $y = x + 1$
(b) $y = -3x + 1$	**(f)** $y = 2x + 1$
(c) $y = -2x + 1$	**(g)** $y = 3x + 1$
(d) $y = -x + 1$	**(h)** $y = 4x + 1$

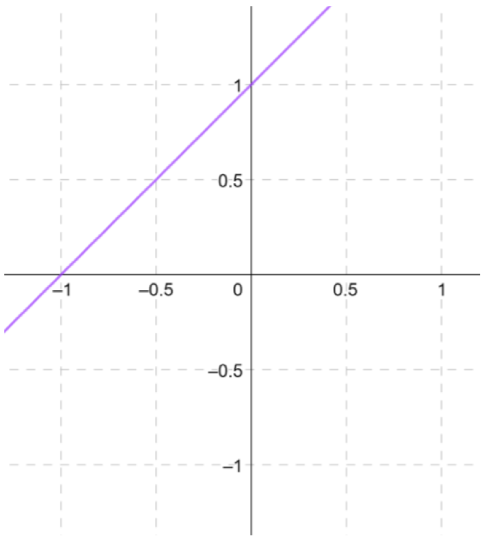
i) Identifique o gráfico de cada função.



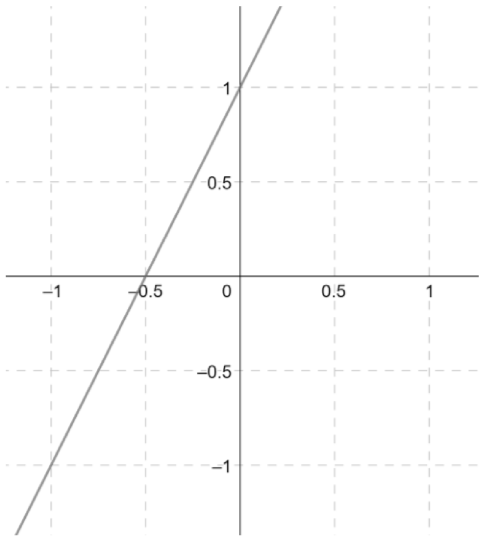
( )



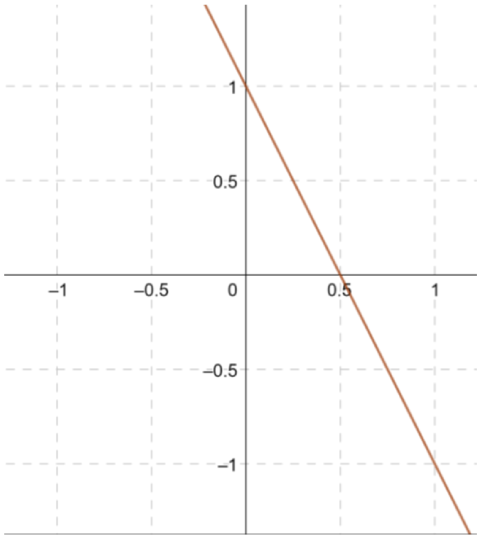
( )



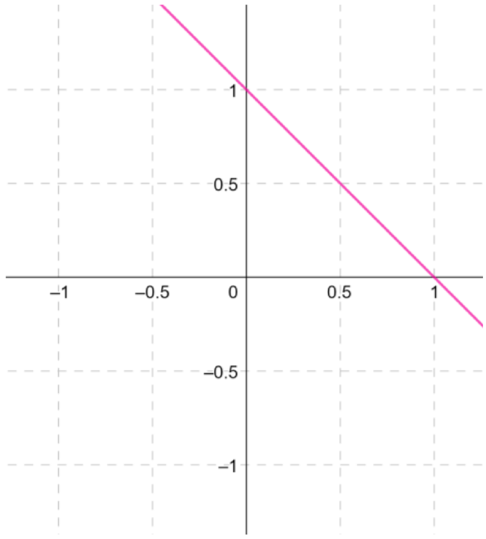
( )



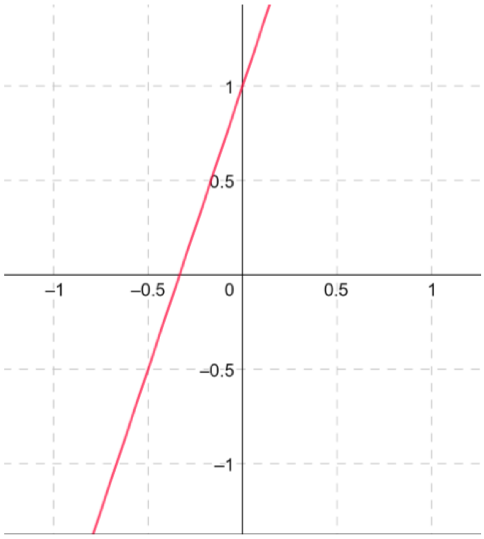
( )



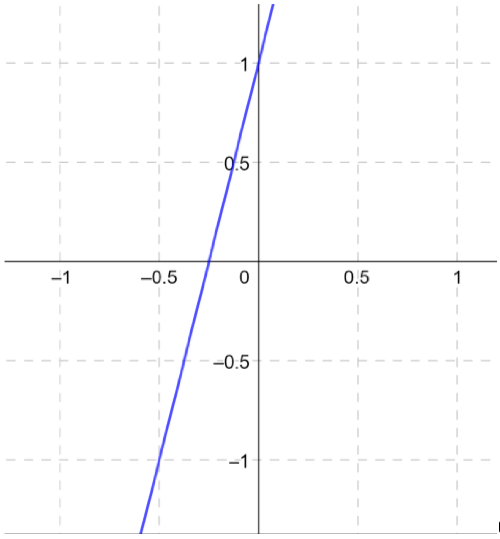
( )



( )

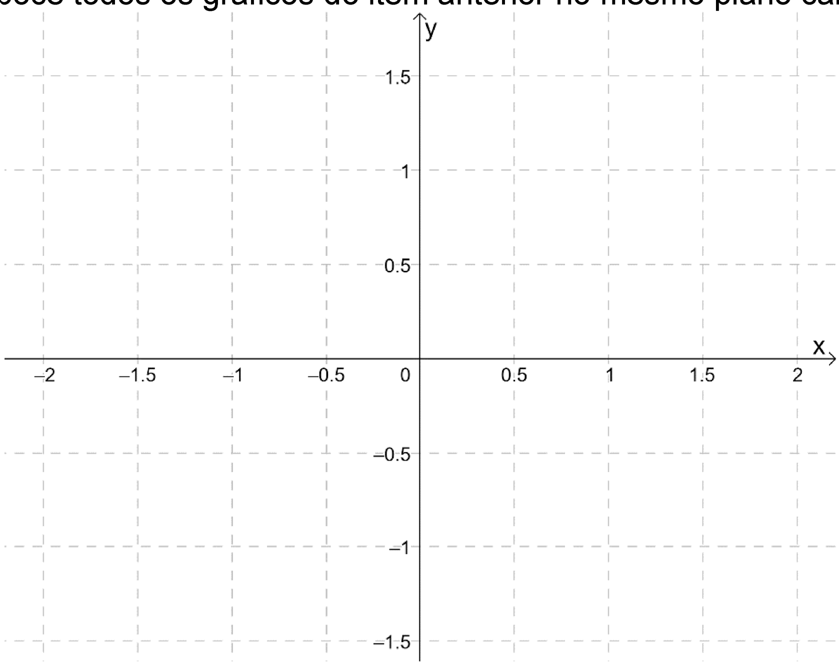


( )



( )

ii) Esboce todos os gráficos do item anterior no mesmo plano cartesiano.



iii) Lembrando que numa função afim $\boldsymbol{y = ax + b}$, $\boldsymbol{a}$ é chamado de **coeficiente angular** da função e $\boldsymbol{b}$ é chamado de **coeficiente linear**, determine os coeficientes das funções acima.

Função	Coeficiente angular	Coeficiente linear

iv) Analisando os coeficientes angulares das funções e seus gráficos simultaneamente no mesmo plano (item ii) , o que podemos concluir sobre a relação entre os coeficientes angulares e as posições relativas entre os gráficos?

____

____

v) Podemos afirmar que:

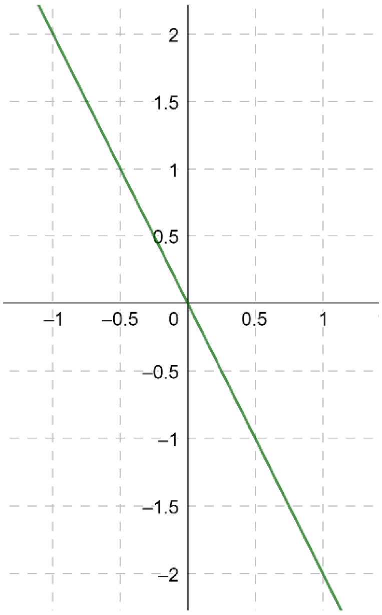
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = -4x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez maiores, então os valores de $f(x)$ ___________________________________.
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = -3x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez maiores, então os valores de $f(x)$ ___________________________________.
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = -2x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez ____________________, então os valores de $f(x)$ são cada vez maiores.
- ✓ Sobre a função $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{-x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez ____________________, então os valores de $f(x)$ são cada vez maiores.
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez maiores, então os valores de $f(x)$ ____________________________________.
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez ____________________, então os valores de $f(x)$ são cada vez maiores.
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez maiores, então os valores de $f(x)$ ____________________________________.
- ✓ Sobre a função $\boldsymbol{f(x) = 4x + 1}$, à medida que tomamos valores de x cada vez ____________________, então os valores de $f(x)$ são cada vez maiores.

ATIVIDADE 4

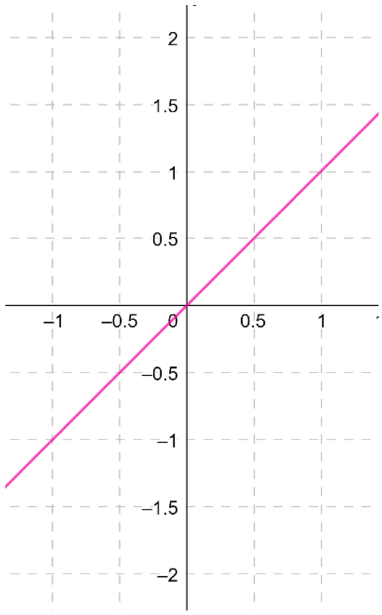
A seguir temos os gráficos das funções afins:

(a) $y = -2x$	**(e)** $y = x$
(b) $y = -2x + 1$	**(f)** $y = x - 1$
(c) $y = -2x + 2$	**(g)** $y = x - 2$
(d) $y = -2x + 3$	**(h)** $y = x - 3$

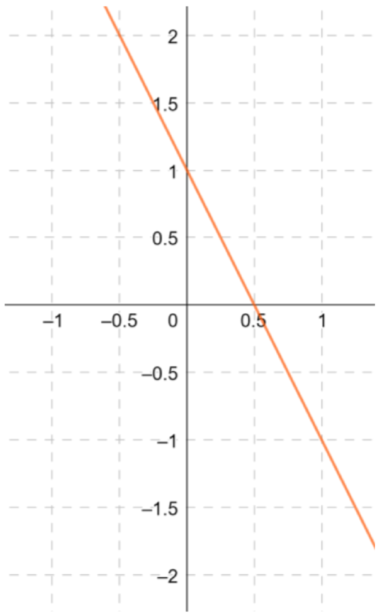
i) Identifique o gráfico de cada função.



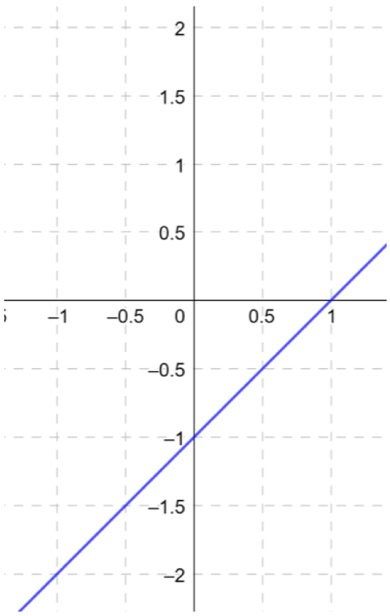
(   )



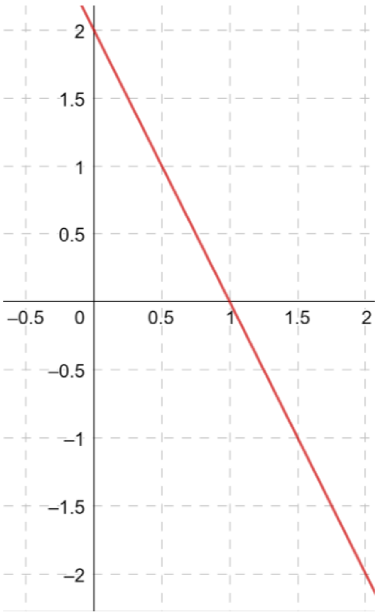
(   )



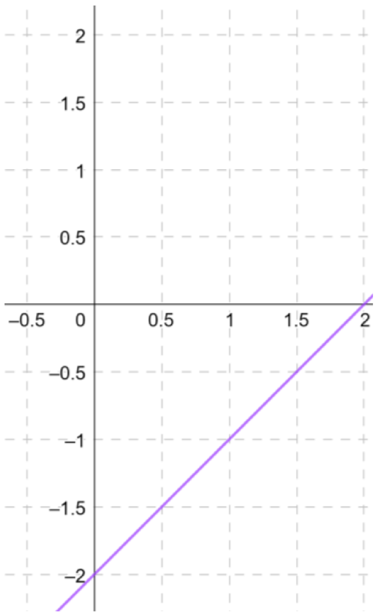
(   )



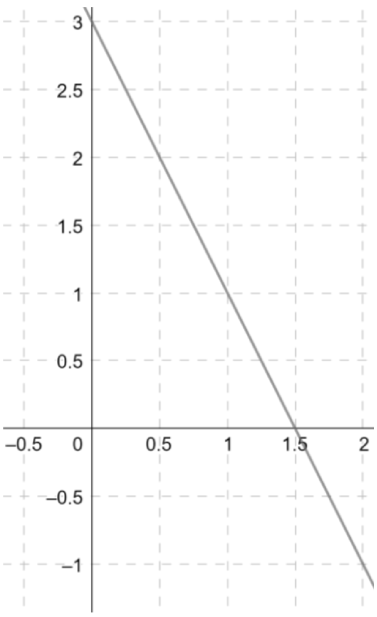
(   )


2
1.5
1
0.5
–0.5
0
0.5
1
1.5
2
–0.5
–1
–1.5
–2

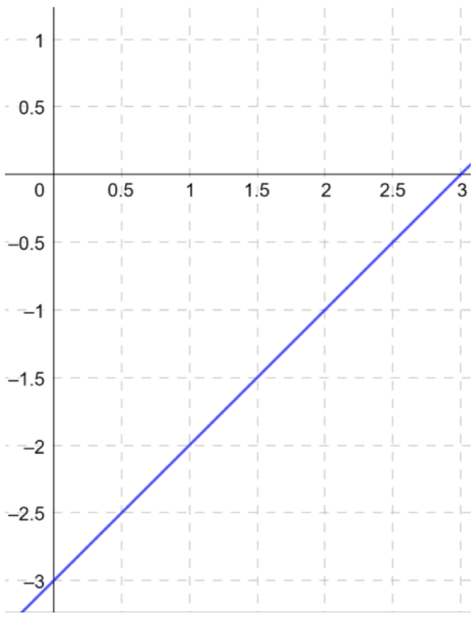
(　　)


2
1.5
1
0.5
–0.5
0
0.5
1
1.5
2
–0.5
–1
–1.5
–2

(　　)


3
2.5
2
1.5
1
0.5
–0.5
0
0.5
1
1.5
2
–0.5
–1

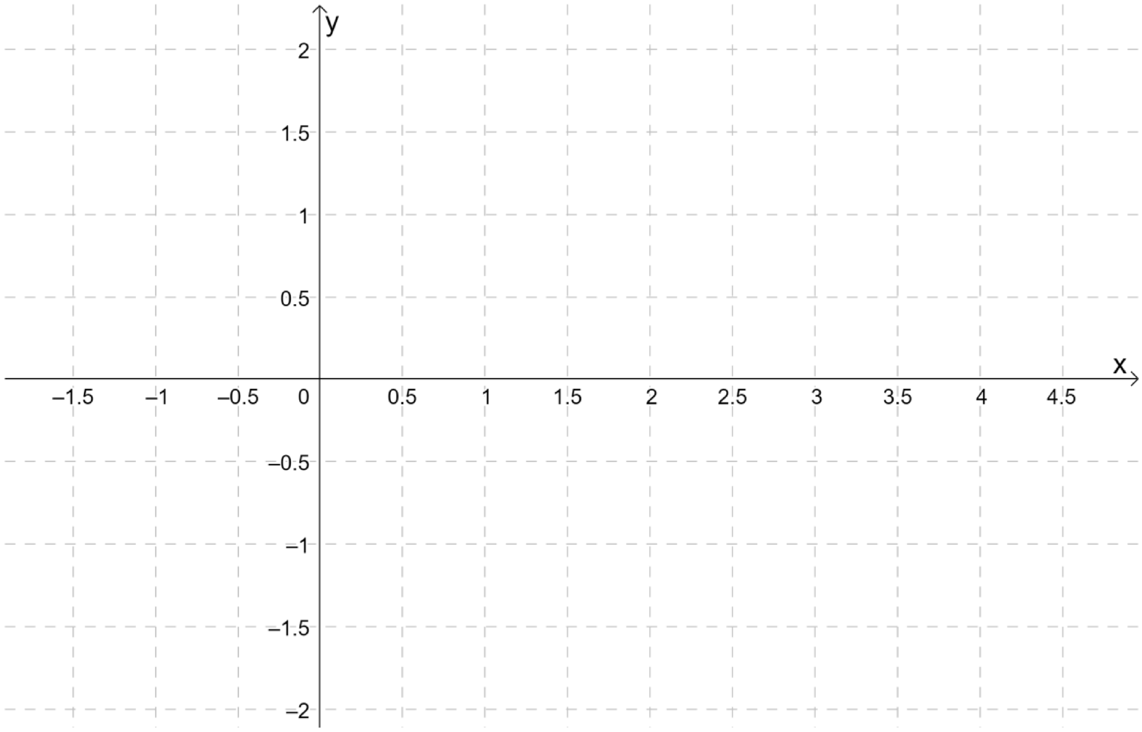
(　　)


1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
–0.5
–1
–1.5
–2
–2.5
–3

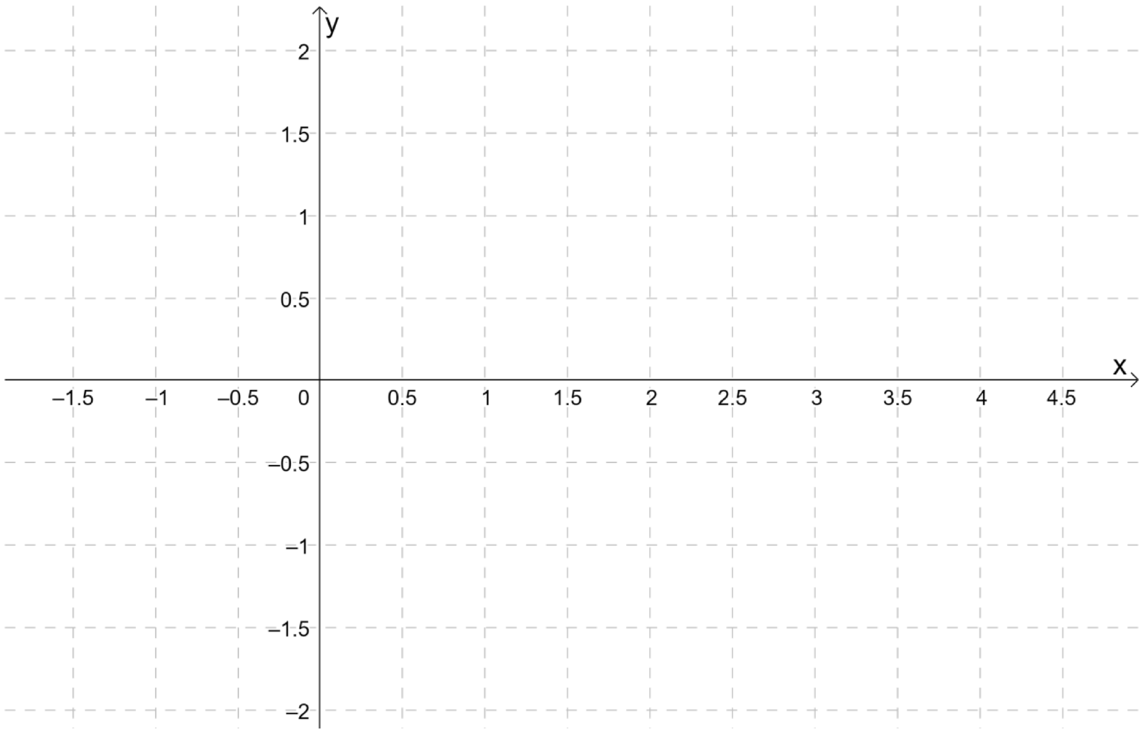
(　　)

ii) Esboce os gráficos das funções acima com mesmo coeficiente angular no mesmo plano cartesiano:

Coeficiente angular: ________



Coeficiente angular: ________



iii) Determine os coeficientes lineares das funções acima.

Função	Coeficiente linear

iv) Analisando as funções com mesmo coeficiente angular e seus gráficos simultaneamente no mesmo plano, o que podemos concluir sobre a relação entre os coeficientes lineares e as posições relativas entre os gráficos?

____

____

____

Imagem disponível em: https://pt.vecteezy.com/

TIRE SUAS PRÓPRIAS CONCLUSÕES

- **Entre as funções com o mesmo coeficiente linear, à medida que os coeficientes angulares aumentam podemos observar que seus gráficos** ____

- **Entre as funções com o mesmo coeficiente angular, à medida que os coeficientes lineares aumentam podemos observar que seus gráficos** ____

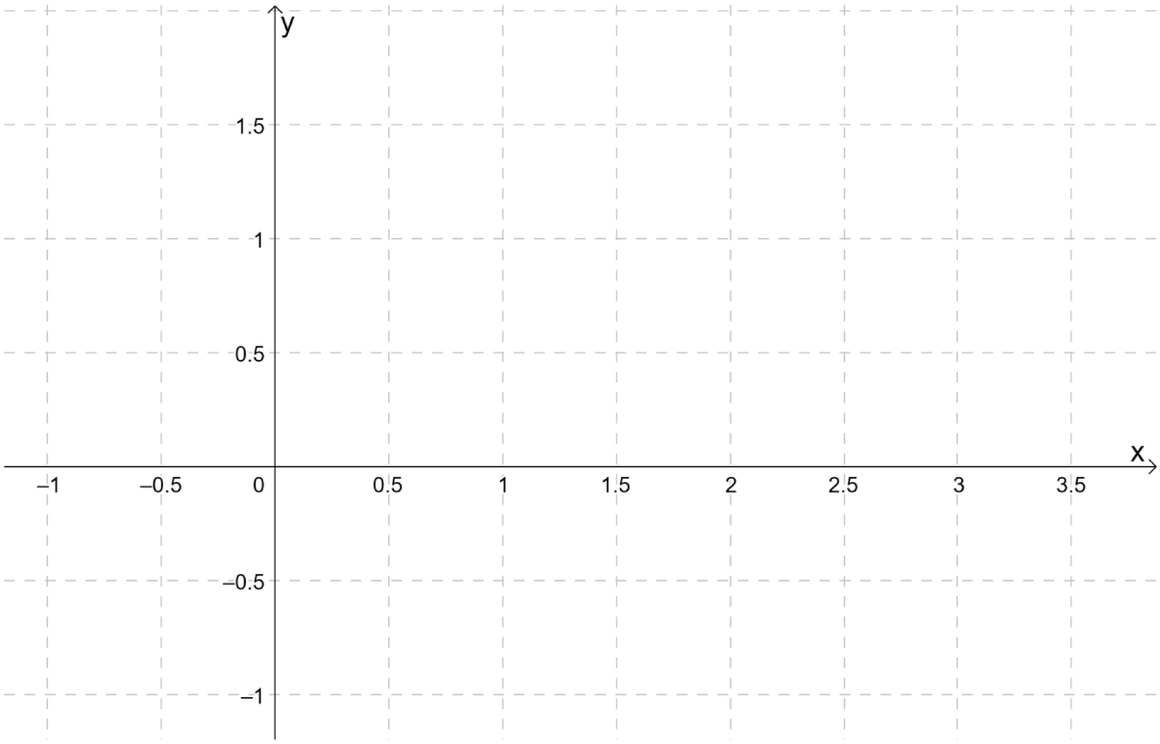
Dica: As atividades 5 e 6 a seguir podem ser desenvolvidas com o auxílio do software / aplicativo GeoGebra.	 Imagem disponível em: https://www.prof-edigley alexandre.com/

ATIVIDADE 5

Considere as seguintes funções trabalhadas na Atividade 3:

(a) $y = -4x + 1$	(e) $y = x + 1$
(b) $y = -3x + 1$	(f) $y = 2x + 1$
(c) $y = -2x + 1$	(g) $y = 3x + 1$
(d) $y = -x + 1$	(h) $y = 4x + 1$

i) Esboce novamente no mesmo plano cartesiano seus gráficos e o gráfico da função $\mathbf{y = x}$.



ii) Podemos observar que as funções cujos gráficos intersectam o gráfico da função $\mathbf{y = x}$ são

iii) Marque esses pontos de intersecção com o gráfico da função $\mathbf{y = x}$ no plano cartesiano acima (item i) e determine suas coordenadas na tabela abaixo.

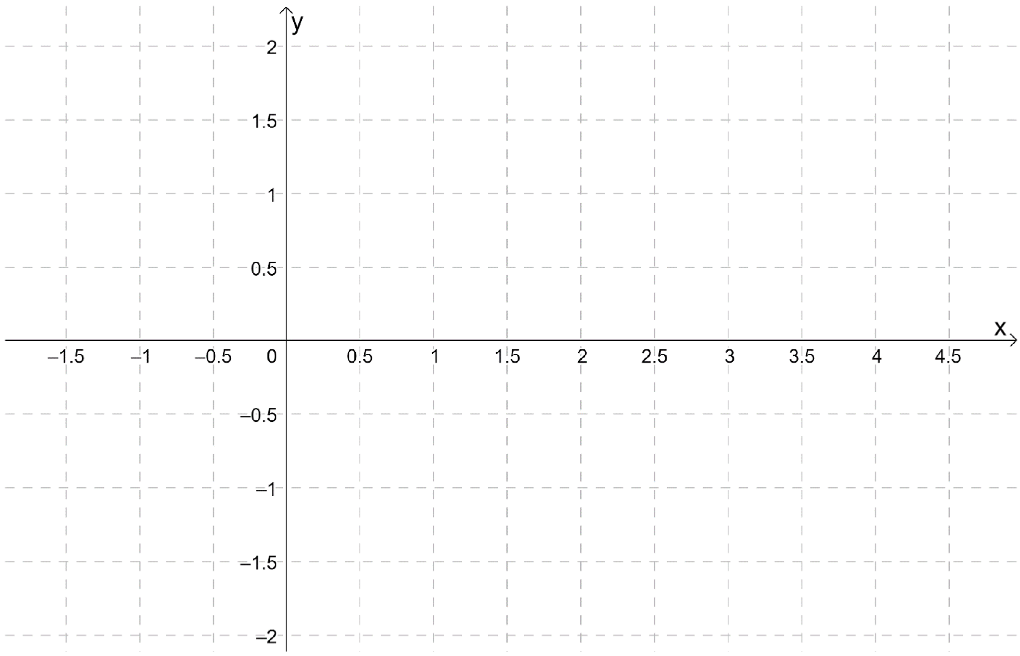
Função	Ponto de intersecção com o gráfico de $y = x$
(a) $y = -4x + 1$	
(b) $y = -3x + 1$	
(c) $y = -2x + 1$	
(d) $y = -x + 1$	
(e) $y = x + 1$	
(f) $y = 2x + 1$	
(g) $y = 3x + 1$	
(h) $y = 4x + 1$	

iv) Há algum gráfico que não intersecta o gráfico da função $\mathbf{y = x}$? De que função?

Considere as seguintes funções trabalhadas na Atividade 4:

(a) $y = -2x$	(e) $y = x$
(b) $y = -2x + 1$	(f) $y = x - 1$
(c) $y = -2x + 2$	(g) $y = x - 2$
(d) $y = -2x + 3$	(h) $y = x - 3$

v) Esboce no mesmo plano cartesiano seus gráficos e o gráfico da função $\mathbf{y = x}$.



vi) Podemos observar que as funções cujos gráficos intersectam o gráfico da função $\mathbf{y = x}$ são

---

---

vii) Há gráficos que não intersectam o gráfico da função $\mathbf{y = x}$? De quais funções?

Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

Após os experimentos da Atividade 5 lançamos o seguinte desafio:

- **Todas as funções afins são tais que seus gráficos intersectam o gráfico de $y = x$?**

- **Você é capaz de listar todas as funções afins cujos gráficos NÃO intersectam o gráfico de $y = x$?**

ATIVIDADE 6

Ainda com as seguintes funções trabalhadas na Atividade 3:

(a) $y = -4x + 1$	(e) $y = x + 1$
(b) $y = -3x + 1$	(f) $y = 2x + 1$
(c) $y = -2x + 1$	(g) $y = 3x + 1$
(d) $y = -x + 1$	(h) $y = 4x + 1$

i) Resolva as equações abaixo:

$-4x + 1 = x$	$x + 1 = x$
$-3x + 1 = x$	$2x + 1 = x$
$-2x + 1 = x$	$3x + 1 = x$
$-x + 1 = x$	$4x + 1 = x$

ii) Compare as soluções das equações acima com as coordenadas dos pontos marcados no plano cartesiano na Atividade 5 item iii). Quais são as suas conclusões?

____

____

CURIOSIDADE

Imagem disponível em: https://www.evatecnica.com.br/noticias/2018/11/hora-da-curiosidade-e-v-a-tecnica

Dizemos que um ponto p é ponto fixo de uma função f se p for solução da equação $f(x) = x$.

iii) Agora que você já sabe o que é um ponto fixo, determine os pontos fixos das funções que estamos trabalhando.

Função	Ponto fixo
$y = -4x + 1$	
$y = -3x + 1$	
$y = -2x + 1$	
$y = -x + 1$	
$y = x + 1$	
$y = 2x + 1$	
$y = 3x + 1$	
$y = 4x + 1$	

DESAFIO

Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

Após os experimentos da Atividade 6, o desafio é:

- **Como você encontraria os pontos fixos de uma função sem fazer contas?**

____

____

FUNÇÕES AFINS POR PARTES

Em muitas situações práticas, a Matemática se aplica através da modelagem de situações–problema de várias áreas, que recaem na análise de alguma função definida por mais de uma sentença, cada qual num intervalo diferente. Neste caso, dizemos que tal função está definida por partes.

Nosso próximo propósito é mergulharmos na análise de Funções Afins por Partes.

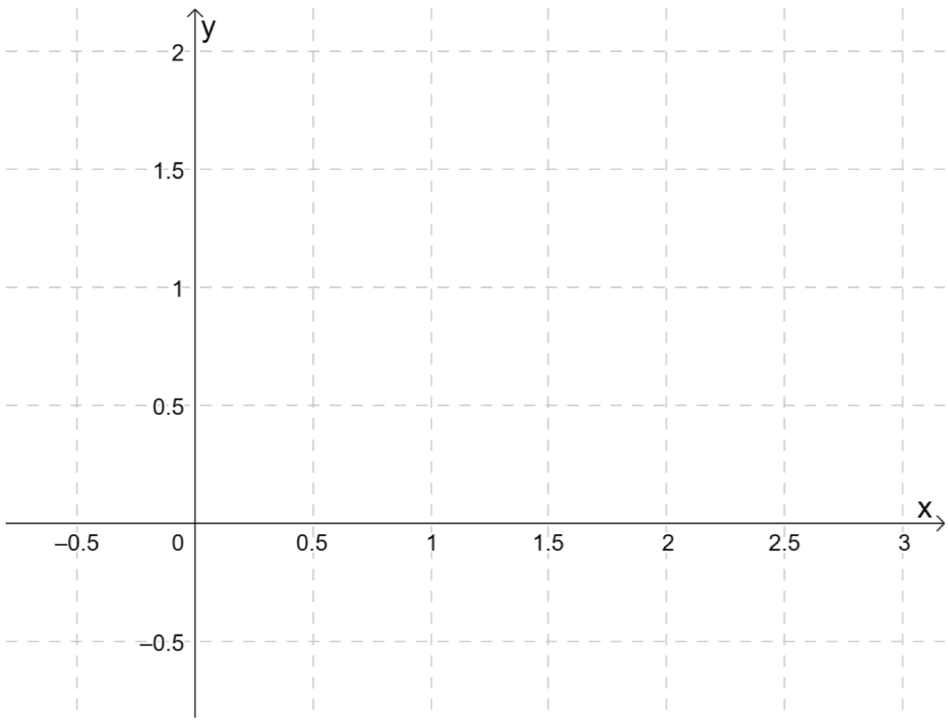
ATIVIDADE 7

i) No plano cartesiano abaixo, pinte de **azul** a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que ou igual a 0 e menor que ou igual a $\frac{1}{2}$ $\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$ e pinte de **verde** a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que $\frac{1}{2}$ e menor que ou igual a 1 $(\frac{1}{2} < x \le 1)$.

ii) Represente no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções abaixo na região que se pede:

a) $\mathbf{y} = \mathbf{2x}$ na região azul em que $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

b) $\mathbf{y} = -\mathbf{2x} + \mathbf{2}$ na região verde em que $\frac{1}{2} < x \le 1$.



Parabéns!

Você acabou de construir o gráfico de uma Função Afim por Partes! Essa função, em especial, é chamada de Função Tenda.

iii) Que sentença melhor define essa função?

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -2x + 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & se\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x & se\ \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

Domínio e Imagem

O domínio de uma função f é o conjunto dos valores de x para os quais a expressão de $f(x)$ está definida.

DICA

Para determinar o domínio de uma função a partir de seu gráfico, basta projetá-lo no eixo x. O conjunto obtido no eixo x com essa projeção é o domínio da função.

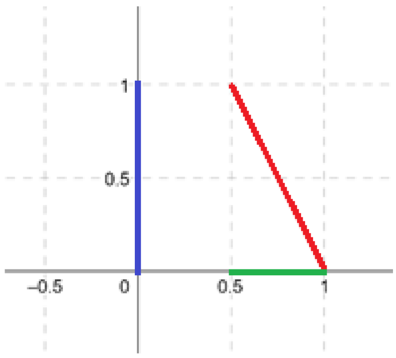
A imagem de uma função f é o conjunto de todos os valores de $f(x)$ que obtemos ao substituir todos os valores de x do domínio na expressão da função f.

DICA

Uma das maneiras de obter a imagem de uma função é projetar o seu gráfico no eixo y. O conjunto obtido no eixo y com essa projeção é a imagem da função.

Como exemplo, abaixo temos o gráfico de uma função em vermelho. Em verde, temos a projeção do gráfico no eixo x. E portanto, o domínio dessa função é o intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Em azul, temos a projeção do gráfico no eixo y. Assim, a imagem dessa função é o intervalo $[0,1]$.

Figura 1: Projeções nos eixos cartesianos



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

iv) Qual seria o domínio da Função Tenda vista no item i)?

a) $\mathbb{R}$
b) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
c) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$
d) $[0,1]$

v) De acordo com o gráfico visto no item ii), o conjunto imagem da Função Tenda é:

a) $\mathbb{R}$
b) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
c) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$
d) $[0,1]$

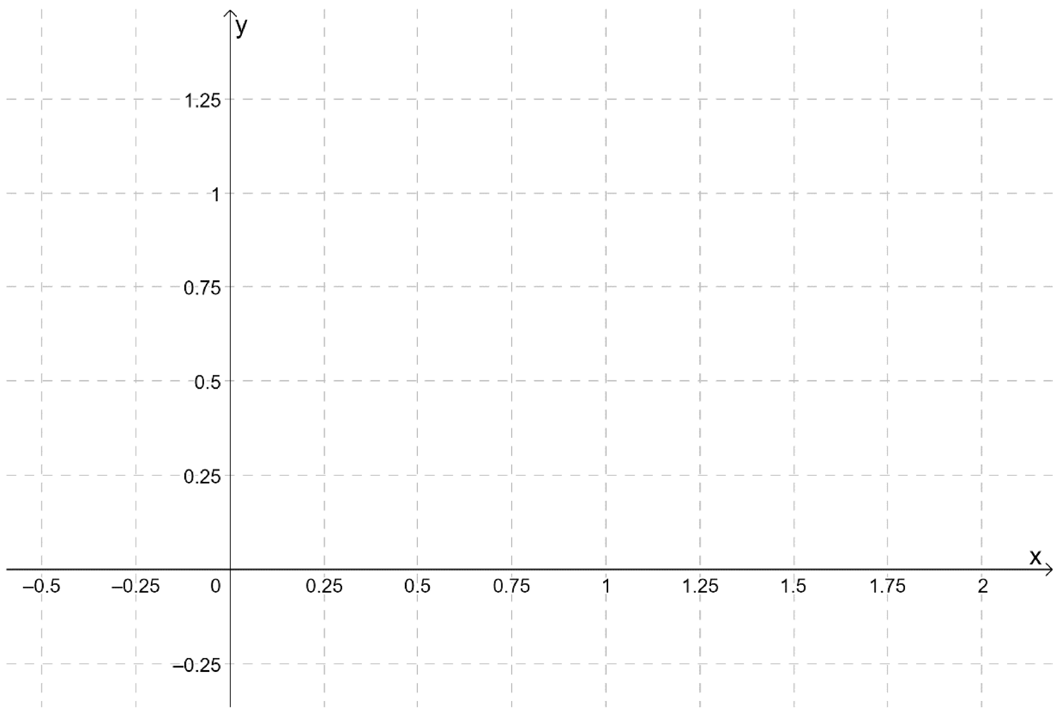
Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

A Função Tenda tem pontos fixos? Se sim, quantos? Como você chegou a essa conclusão?

ATIVIDADE 8

i) No plano cartesiano abaixo,

- Pinte de azul a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que ou igual a 0 e menor que ou igual a $\frac{1}{4}$ $\left(0 \leq x \leq \frac{1}{4}\right)$;
- Pinte de verde a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que $\frac{1}{4}$ e menor que $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)$;
- Pinte de amarelo a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que ou igual a $\frac{1}{2}$ e menor que ou igual a $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}\right)$;
- Pinte de vermelho a região dos pontos do plano que têm a primeira coordenada maior que $\frac{3}{4}$ e menor que ou igual a 1 $\left(\frac{3}{4} < x \leq 1\right)$;



ii) Construa, no plano cartesiano do item anterior, o gráfico da seguinte Função Afim por Partes:

$$g(x) = \begin{cases} 4x, & se\ 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2 - 4x, & se\ \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \\ 4x - 2, & se\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4 - 4x, & se\ \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

iii) Com o auxílio do gráfico do item ii), responda:

1. Qual é o domínio de g? ______________________________
2. Qual é a imagem de g? ______________________________
3. Qual é o maior valor do conjunto imagem de g? ______________________
4. Qual é o menor valor do conjunto imagem de g? ______________________
5. g tem pontos fixos? ______________________________
6. Quantos? ______________________________
7. Determine $g(0)$ e $g(1)$. ______________________________

➡ DICA ⬅

Para construir o gráfico de Funções Afins por Partes, além do papel milimetrado, você pode usar o GeoGebra. Basta inserir na entrada de comandos o código:

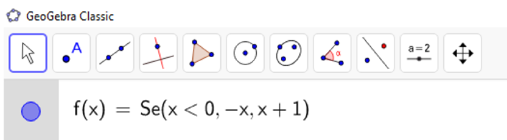
Se(<Condição>, <Então>, <Senão>), ou

Se(<Condição>, <Então>, Se(<Condição>, <Então>))

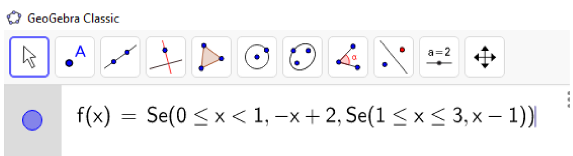
preenchendo os dados da função desejada.

Veja os exemplos:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & se\ x < 0 \\ x+1, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

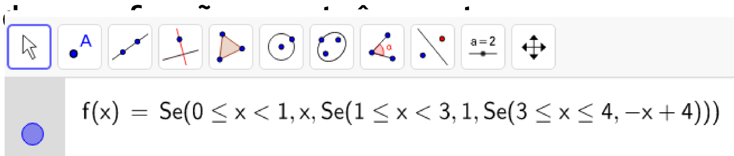


$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & se\ 0 \leq x < 1 \\ x-1, & se\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Para cada nova sentença, basta acrescentar Se(<Condição>, <Então>). Veja um exemplo

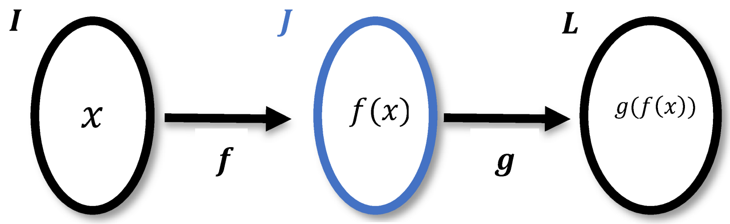
$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ 1 \leq x < 3 \\ -x+4, & se\ 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Considere duas funções $\mathbf{f}: \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ e $\mathbf{g}: \mathbf{J} \to \mathbf{L}$.

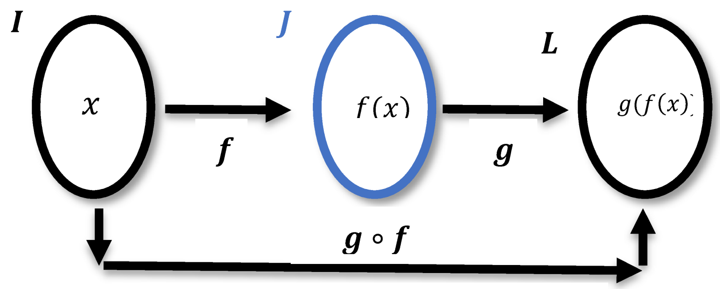
Figura 2: Funções f e g



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Note que f associa a um valor $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$ o valor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{J}$. E como $\mathbf{g}$ associa a cada valor de $\mathbf{J}$ um valor em $\mathbf{L}$, em particular, $\mathbf{g}$ associa ao valor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{J}$ o valor $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \in \mathbf{L}$. Assim, podemos construir uma nova função, que chamamos de função composta de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, e representamos por $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$. Essa nova função tem como domínio o conjunto $\mathbf{I}$, contradomínio o conjunto $\mathbf{L}$ e associa a cada valor $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$ o valor $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ em $\mathbf{L}$.

Figura 3: $g \circ f$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Observe que para isso dar certo basta que o contradomínio de f esteja contido no domínio de g.

Neste caderno de atividades estamos interessados em trabalhar com funções do tipo $\mathbf{f}: \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ e construir a função composta de f com f.

EXEMPLO

Considere a função $\mathrm{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x} + 1$. Então,

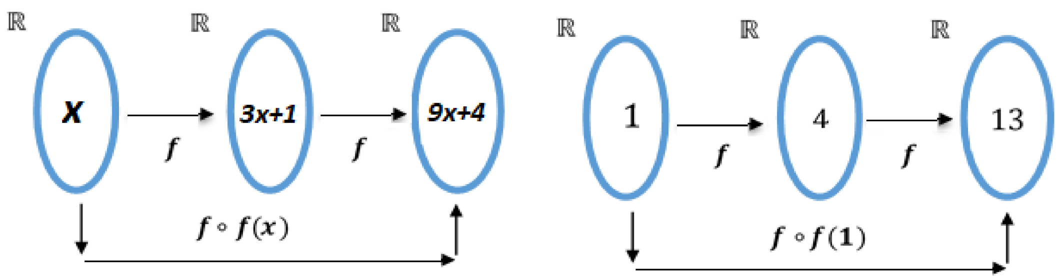
$$\mathrm{f} \circ \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) = 3\mathrm{f}(\mathrm{x}) + 1 = 3(3\mathrm{x} + 1) + 1 = 9\mathrm{x} + 3 + 1 = 9\mathrm{x} + 4.$$ Logo,

$$\mathrm{f} \circ \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 9\mathrm{x} + 4.$$

Em particular, podemos escolher qualquer valor do domínio de f e encontrar sua imagem por $\mathrm{f} \circ \mathrm{f}$. No caso de $\mathrm{x} = 1$, obtemos

$$\mathrm{f} \circ \mathrm{f}(1) = 9 \cdot 1 + 4 = 13.$$

Figura 4: $f \circ f(x)$

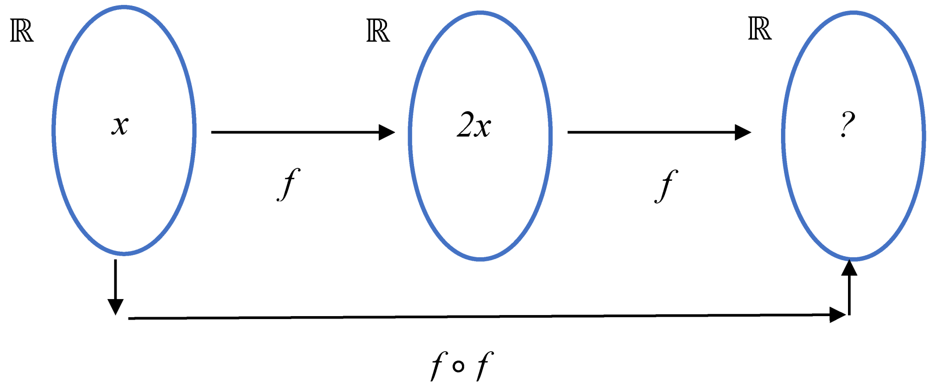


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

ATIVIDADE 9

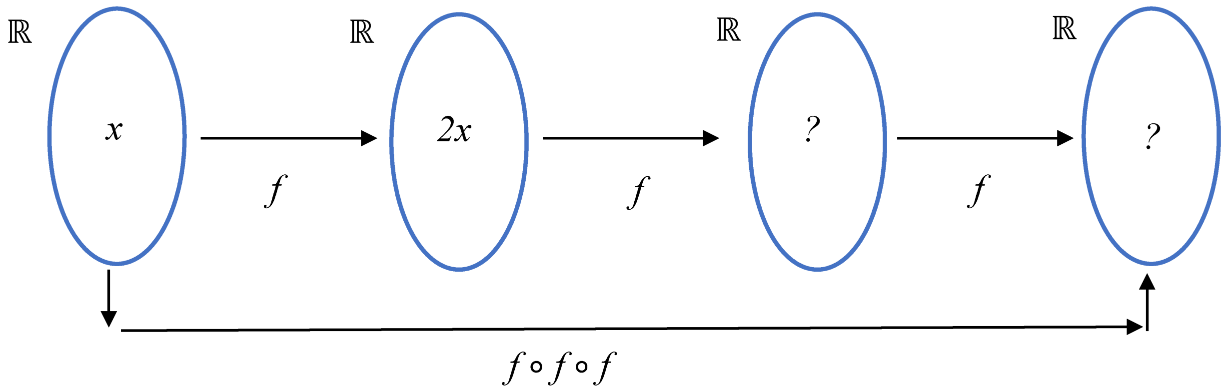
Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$.

i) Complete o diagrama, determinando $f \circ f(x)$.



$f \circ f(x) =$ __________________.

ii) Complete o diagrama, determinando $f \circ f \circ f(x)$.



$f \circ f \circ f(x) =$ __________________.

DESAFIO

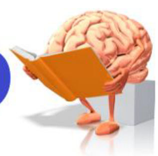


Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

Continuando a Atividade 9, você deduziria?

$f \circ f \circ f \circ f(x) =$

$f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) =$

$f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) =$

$f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) =$

$f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) =$

$f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) =$

$f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) =$

ATIVIDADE 10

i) Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Registre os dados da tabela abaixo.

x	$f(x) = -3x + 5$	$f \circ f(x) =$ $f(f(x)) =$	$f \circ f \circ f(x) =$ $f(f(f(x))) =$	$f \circ f \circ f \circ f(x) =$ $f(f(f(f(x)))) =$
-2				
$-\frac{5}{4}$				
-1				
0				
1				
$\frac{5}{4}$				
2				

ii) Faça suas observações sobre os registros da tabela anterior.

A sucessão dos valores $f(-2)$, $f \circ f(-2)$, $f \circ f \circ f(-2)$, $f \circ f \circ f \circ f(-2)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $f(2)$, $f \circ f(2)$, $f \circ f \circ f(2)$, $f \circ f \circ f \circ f(2)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $f(-1)$, $f \circ f(-1)$, $f \circ f \circ f(-1)$, $f \circ f \circ f \circ f(-1)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $f(1)$, $f \circ f(1)$, $f \circ f \circ f(1)$, $f \circ f \circ f \circ f(1)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $f\left(-\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f\left(-\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f \circ f\left(-\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f \circ f \circ f\left(-\frac{5}{4}\right)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f \circ f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f \circ f \circ f\left(\frac{5}{4}\right)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $f(0)$, $f \circ f(0)$, $f \circ f \circ f(0)$, $f \circ f \circ f \circ f(0)$, nessa ordem, é:

	Crescente
	Decrescente
	Constante
	Alterna entre valores positivos e negativos

iii) **Considere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Registre os dados da tabela abaixo.**

x	$g(x) = 3x + 5$	$g \circ g(x) =$ $g(g(x)) =$	$g \circ g \circ g(x) =$ $g(g(g(x))) =$	$g \circ g \circ g \circ g(x) =$ $g(g(g(g(x)))) =$
-2				
$-\frac{5}{2}$				
-1				
0				
1				
$\frac{5}{2}$				
2				

iv) Faça suas observações sobre os registros da tabela anterior.

A sucessão dos valores $g(-2)$, $g \circ g(-2)$, $g \circ g \circ g(-2)$, $g \circ g \circ g \circ g(-2)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $g(2)$, $g \circ g(2)$, $g \circ g \circ g(2)$, $g \circ g \circ g \circ g(2)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $g(-1)$, $g \circ g(-1)$, $g \circ g \circ g(-1)$, $g \circ g \circ g \circ g(-1)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $g(1)$, $g \circ g(1)$, $g \circ g \circ g(1)$, $g \circ g \circ g \circ g(1)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $g\left(-\frac{5}{2}\right)$, $g \circ g\left(-\frac{5}{2}\right)$,$g \circ g \circ g\left(-\frac{5}{2}\right)$, $g \circ g \circ g \circ g\left(-\frac{5}{2}\right)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $g\left(\frac{5}{2}\right)$,$g \circ g\left(\frac{5}{2}\right)$, $g \circ g \circ g\left(\frac{5}{2}\right)$ $g \circ g \circ g \circ g\left(\frac{5}{2}\right)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

A sucessão dos valores $g(0)$, $g \circ g(0)$, $g \circ g \circ g(0)$, $g \circ g \circ g \circ g(0)$, nessa ordem, é:

- [ ] Crescente
- [ ] Decrescente
- [ ] Constante
- [ ] Alterna entre valores positivos e negativos

v) Usando as tabelas anteriores, compare as sucessões a seguir e tire suas conclusões.

- $g(-2)$, $g \circ g(-2)$, $g \circ g \circ g(-2)$, $g \circ g \circ g \circ g(-2)$
  $f(-2)$, $f \circ f(-2)$, $f \circ f \circ f(-2)$, $f \circ f \circ f \circ f(-2)$

- $g(1)$, $g \circ g(1)$, $g \circ g \circ g(1)$, $g \circ g \circ g \circ g(1)$
  $f(1)$, $f \circ f(1)$, $f \circ f \circ f(1)$, $f \circ f \circ f \circ f(1)$

- $g\left(-\frac{5}{2}\right)$, $g \circ g\left(-\frac{5}{2}\right)$, $g \circ g \circ g\left(-\frac{5}{2}\right)$, $g \circ g \circ g \circ g\left(-\frac{5}{2}\right)$
  $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f \circ f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f \circ f \circ f \circ f\left(\frac{5}{4}\right)$

Um sistema dinâmico é um conjunto no qual cada elemento se move, com o passar do tempo, segundo uma regra específica. O movimento das estrelas e planetas no espaço é um exemplo clássico de sistema dinâmico que tem sido estudado por matemáticos e cientistas nos últimos séculos.

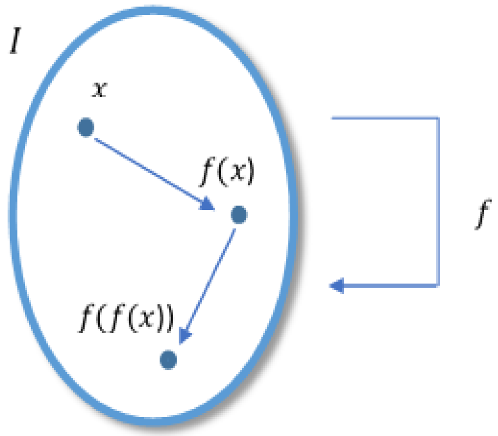
Figura 5: Sistema Solar

Imagem disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/leis-kepler.htm

O objetivo do estudo de sistemas dinâmicos é descrever a trajetória de cada elemento ao longo do tempo. No caso do nosso exemplo, o interesse está em descrever o movimento das estrelas e planetas por anos, décadas e até mesmo séculos.

Em linguagem matemática, um sistema dinâmico é uma função $f: I \to I$, segundo a qual para cada elemento x do conjunto I, $f(x)$ representa a posição de x uma unidade de tempo depois, $f \circ f\ (x)$ representa a posição de x duas unidades de tempo depois, $f \circ f \circ f(x)$ representa a posição de x três unidades de tempo depois, e assim sucessivamente.

Figura 6



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Para simplificar a escrita adotaremos a seguinte notação:

$\boldsymbol{x = f^0(x)}$ – posição *inicial* de x;

$\boldsymbol{f(x) = f^1(x)}$ – posição de x *uma unidade* de tempo depois;

$\boldsymbol{f \circ f(x) = f^2(x)}$ – posição de x *duas unidades* de tempo depois;

$\boldsymbol{f \circ f \circ f(x) = f^3(x)}$ – posição de x *três unidades* de tempo depois;

$\boldsymbol{f \circ f \circ f \circ f(x) = f^4(x)}$ – posição de x *quatro unidades* de tempo depois;

e assim sucessivamente.

Finalmente, chamamos de ***órbita de*** $\boldsymbol{x}$ o conjunto

$$\boldsymbol{O(x) = \{x, f(x), f^2\,(x), f^3\,(x),\ f^4\,(x), f^5\,(x), \ldots\}.}$$

Note que a órbita de x descreve a trajetória de x no conjunto *I*.

Nosso próximo passo é iniciarmos nossas primeiras investigações sobre alguns sistemas dinâmicos. Como iniciantes, trabalharemos com sistemas determinados por funções afins e funções afins por partes.

Hora da pesquisa...

ATIVIDADE 11

Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}$.

a) Determine as órbitas dos seguintes elementos de $\mathbb{R}$**:**

$O(-3) =$ ______________________________

$O(-1{,}5) =$ ______________________________

$O(0) =$ ______________________________

$O(0{,}25) =$ ______________________________

$O(1) =$ ______________________________

b) Qual é a posição de $x = -1{,}5$ uma unidade de tempo depois?

____

c) Qual é a relação entre $O(-3)$ e $O(-1{,}5)$?

____

d) Qual é a diferença entre a órbita de 0 e as demais órbitas descritas acima?

____

e) Qual é o comportamento da órbita de 0,25 conforme o tempo aumenta?

____

f) Qual é o comportamento da órbita de -3 conforme o tempo aumenta?

____

g) f tem ponto (s) fixo (s)? Qual (is)?

____

h) Caso f tenha pontos fixos, determine suas órbitas.

____

ATIVIDADE 12

Considere o sistema dinâmico em $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = -2x + 2}$.

a) Determine as órbitas dos seguintes elementos de $\mathbb{R}$**:**

$O(-3) =$ ______________________________

$O(-1{,}5) =$ ______________________________

$O(0) =$ ______________________________

$O\left(\frac{2}{3}\right) =$ ______________________________

$O(1) =$ ______________________________

b) Qual é a posição de $x = 1$ uma unidade de tempo depois?

____

c) Qual é a relação entre $O(0)$ e $O(1)$?

____

d) Qual é a diferença entre a órbita de $\frac{2}{3}$ e as demais órbitas descritas acima?

____

e) Qual é o comportamento da órbita de 1 conforme o tempo aumenta?

____

f) Qual é o comportamento da órbita de -3 conforme o tempo aumenta?

____

g) f tem ponto (s) fixo (s)? Qual (is)?

____

h) Caso f tenha pontos fixos, determine suas órbitas.

____

ATIVIDADE 13

Considere o sistema dinâmico em $[0,1]$, $f:[0,1] \to [0,1]$, **tal que**

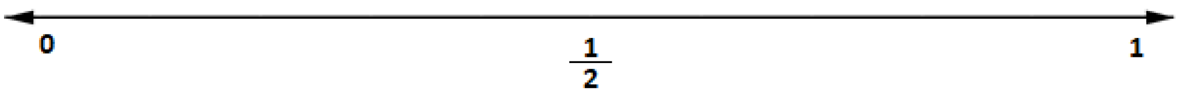
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

a) Determine alguns elementos das órbitas de x_0 conforme tabela abaixo:

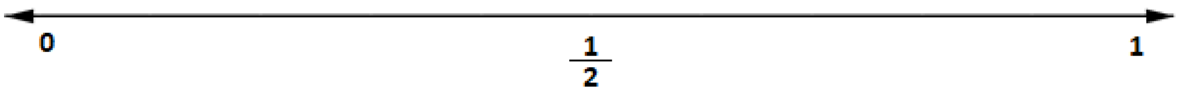
x_0	$f(x_0)$	$f^2(x_0)$	$f^3(x_0)$	$f^4(x_0)$	$f^5(x_0)$	$\dots$
0						$\dots$
$\frac{1}{2}$						$\dots$
1						$\dots$
$\frac{1}{3}$						$\dots$
$\frac{1}{5}$						$\dots$
$\frac{2}{5}$						

b) Marque e identifique na reta real os elementos encontrados em cada órbita acima.

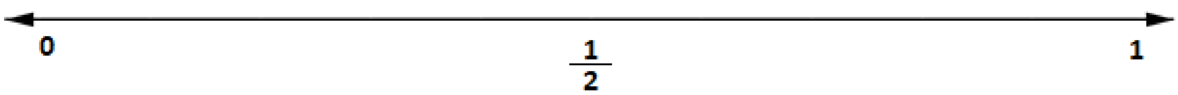
$O(0)$



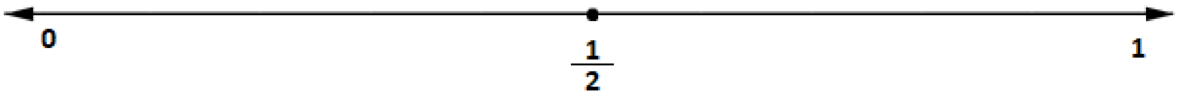
$O\left(\frac{1}{2}\right)$



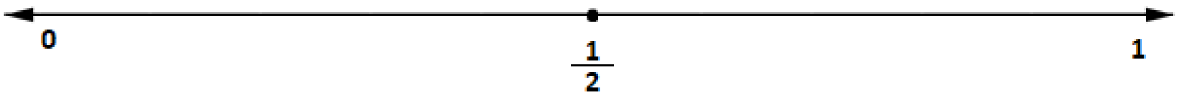
$O(1)$



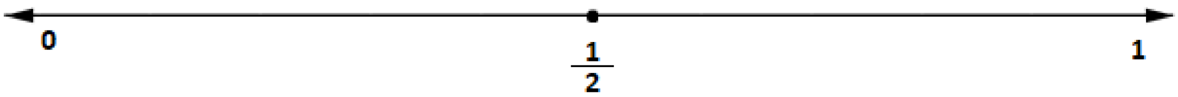
$\boldsymbol{O}\left(\frac{1}{3}\right)$



$\boldsymbol{O}\left(\frac{1}{5}\right)$



$\boldsymbol{O}\left(\frac{2}{5}\right)$



c) Qual é a posição de $\boldsymbol{x_0 = 0}$ depois de 365 unidades de tempo?

---

d) Há algum instante em que a órbita de $\boldsymbol{x_0 = 1}$ e a órbita de $\boldsymbol{x_0 = \frac{1}{2}}$ se encontram? Justifique.

---

e) Há algum elemento x no intervalo $(0,1)$ que em alguma unidade de tempo depois se encontra na posição 0? Justifique.

---

f) Há algum elemento x no intervalo $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ que em alguma unidade de tempo depois se encontra na posição 0? Justifique.

---

g) Entre as órbitas, $O(0), O\left(\frac{1}{2}\right), O(1), O\left(\frac{1}{3}\right), O\left(\frac{1}{5}\right)$ e $O\left(\frac{2}{5}\right)$,

- quais retratam que o elemento inicial x_0 permanece na mesma posição com o passar do tempo?

- quais retratam que o elemento inicial x_0 sai de sua posição inicial e algumas unidades de tempo depois retorna à posição inicial x_0?

- quais retratam que o elemento inicial x_0 sai de sua posição inicial e depois de algumas unidades de tempo permanece numa certa posição ?

ATIVIDADE 14
PONTOS PERIÓDICOS

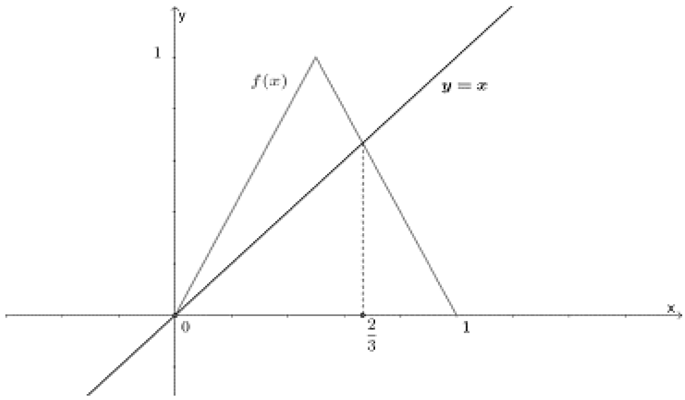
Na Atividade 6 trabalhamos com o conceito de ponto fixo de uma função f e descobrimos duas maneiras de determinar esses pontos:

1ª) Através da resolução da equação $f(x) = x$.

2ª) Através do gráfico de f. Basta intersectar o gráfico de f com a reta $y = x$. A primeira coordenada de cada ponto de intersecção encontrado é um ponto fixo.

Veja que na nossa conhecida "Função Tenda", o gráfico intersecta a reta $y = x$ quando $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. Assim, $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$ são os pontos fixos da "Função Tenda".

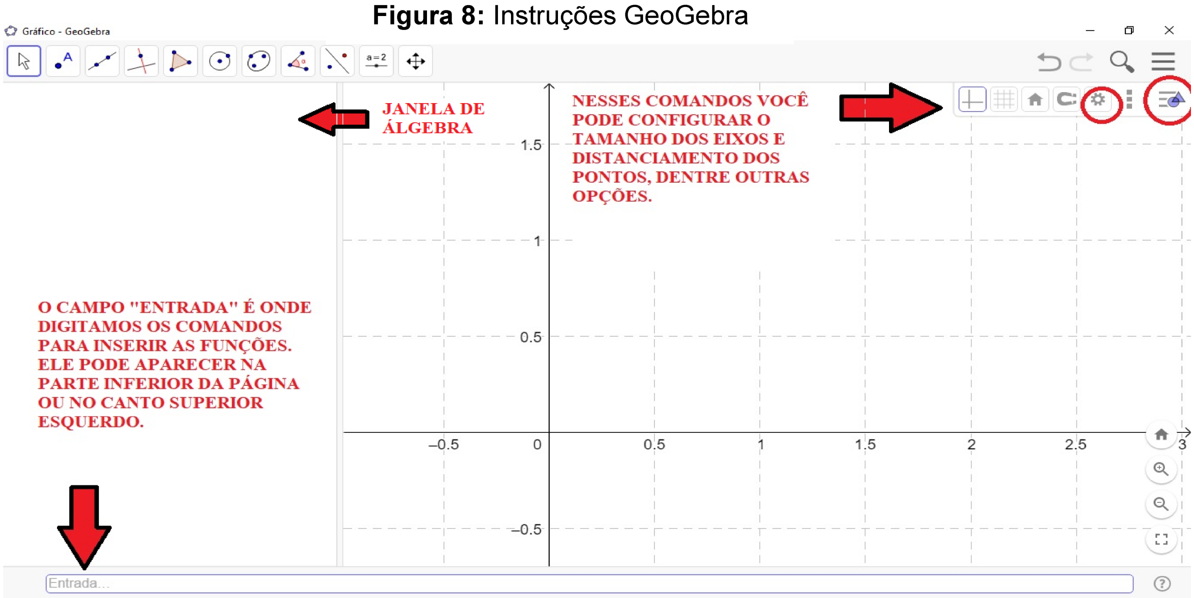
Figura 7: Função Tenda



Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir complicaremos um pouco mais nossa pesquisa! Para nos auxiliar, utilizaremos o software/aplicativo GeoGebra. Veja como é a tela inicial do software GeoGebra e algumas instruções.

Figura 8: Instruções GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Dada uma função f, vamos nos dedicar a encontrar os pontos fixos da função $f^2 = f \circ f$. Mas, esses pontos fixos da função f^2, não poderão ser pontos fixos da função f. Esses pontos encontrados serão chamados de ***pontos periódicos de f de período* 2**.

Em linguagem matemática, dizemos que um ponto p é um ponto periódico de f de período 2 quando $f^2(p) = p$ e $f(p) \neq p$.

Comecemos o nosso experimento com a Função Tenda!

Se representarmos por f a Função Tenda, para descobrirmos os pontos fixos de f^2 precisaremos do gráfico de $f^2 = f \circ f$.

Esboçaremos primeiro o gráfico de f. Lembre que a Função Tenda tem a seguinte lei

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ -2x + 2, & \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}}$$

Assim, na caixa de Entrada do GeoGebra **insira o comando abaixo**

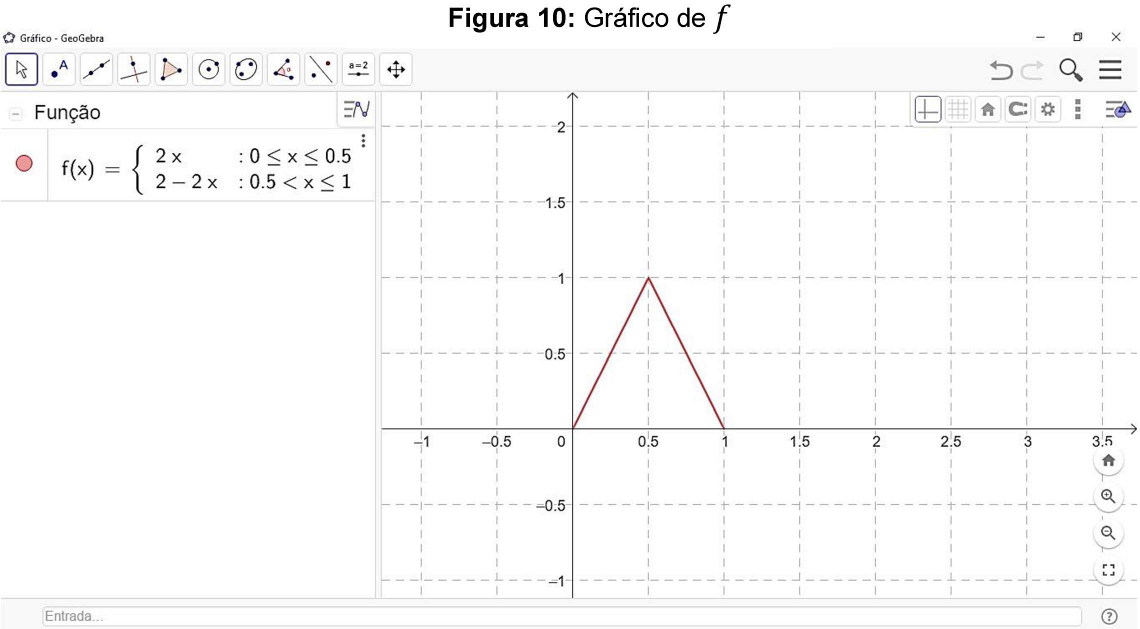
Figura 9: Comando de f no GeoGebra

```
f(x) = Se( 0<=x<=1/2, 2x,Se( 1/2<x<=1, 2-2x ) )
```

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

e **aperte ENTER**, para obter o gráfico de f.

Figura 10: Gráfico de f



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

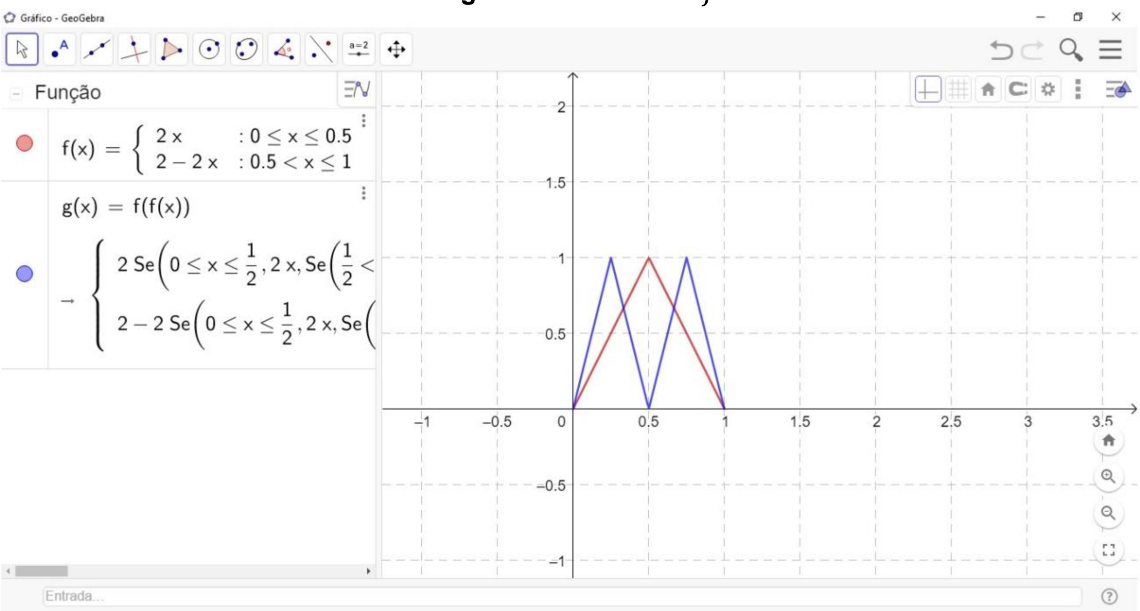
Para o gráfico de f^2, **insira o comando a seguir na caixa de Entrada**

Figura 11: Comando de f^2 no GeoGebra

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

e **aperte ENTER**.

Figura 12: Gráfico de f^2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Note que, na Figura 12, o gráfico de f está em vermelho e o gráfico de de f^2 está em azul.

OS PONTOS PERIÓDICOS DE PERÍODO 2

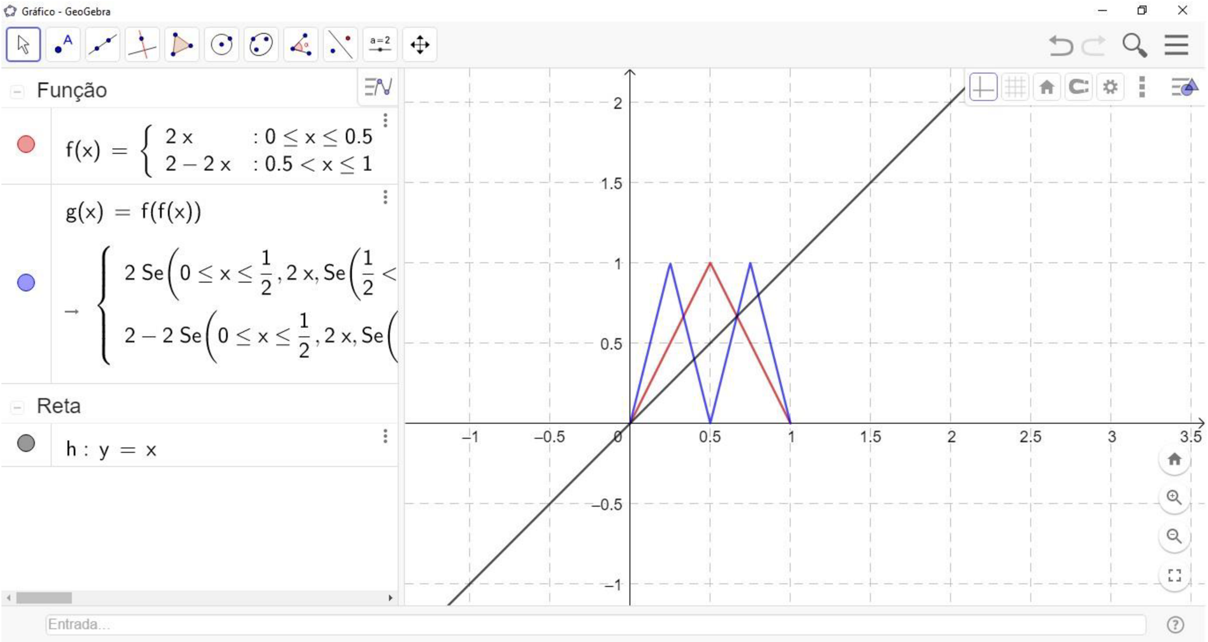
Coloque o próximo comando na caixa de Entrada do GeoGebra:

Figura 13: Comando da reta y=x no GeoGebra

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Obtemos a reta $y = x$.

Figura 14: Gráfico de $y = x$ intersectando o gráfico de f^2



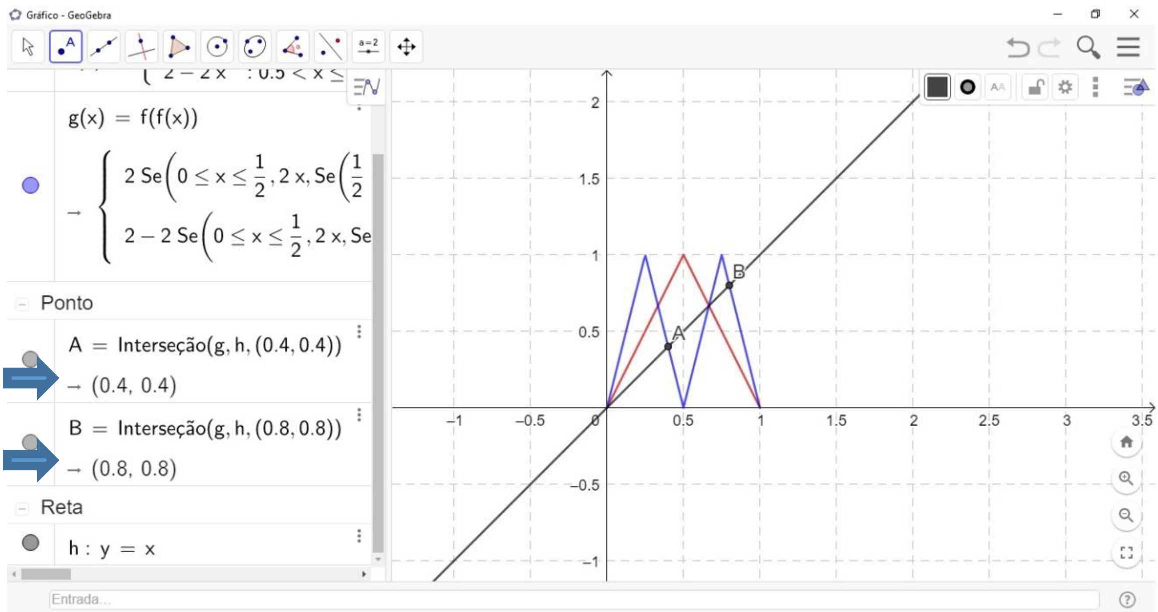
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Em seguida, **podemos marcar os pontos** que pertencem à reta e ao gráfico de f^2, mas não pertencem ao gráfico de f.

Aperte o botão indicado pelo ponto A

e dê um clique com o cursor do mouse nos pontos procurados.

Figura 15: Pontos de intersecção dos gráfico de $y = x$ e de f^2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Note na Figura 15, que os pontos A e B são os pontos procurados e a primeira coordenada de cada um deles nos dá os pontos periódicos de período 2 de f. Essas coordenadas estão na Janela de Álgebra, indicadas pelas setas.

Continue com o GeoGebra aberto e responda:

i) Quantos pontos fixos a Função Tenda tem?

---

ii) Quantos pontos periódicos de período 2 a Função Tenda tem?

---

iii) Quais são os pontos fixos da Função Tenda?

---

iv) Quais são os pontos periódicos de período 2 da Função Tenda? Consulte a Janela de Álgebra do GeoGebra.

Os pontos periódicos de período 3

A seguir, repetiremos o processo para encontrar os pontos fixos da função $f^3 = f \circ f \circ f$. Mas, esses pontos fixos da função f^3, não poderão ser pontos fixos da função f e não poderão ser pontos fixos da função f^2. Esses pontos encontrados serão chamados de ***pontos periódicos de f de período 3.***

Em linguagem matemática, dizemos que um ponto p é um ponto periódico de f de período 3 quando $f^3(p) = p$, $f^2(p) \neq p$ e $f(p) \neq p$.

Novamente com o GeoGebra, façamos os gráficos da Função Tenda f, da função f^2 e de $y = x$, conforme fizemos acima.

1. Em seguida, **obtenha o gráfico da função f^3** com o seguinte comando na Caixa de Entrada:

Figura 16: Comando de f^3 no GeoGebra

p(x) = f(f(f(x)))

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

2. **Marque no GeoGebra** os pontos que pertencem à reta $y = x$ e ao gráfico de f^3, mas não pertencem ao gráfico de f e ao gráfico de f^2.

3. Quantos pontos periódicos de período 3 a Função Tenda tem?

4. Quais são os pontos periódicos de período 3 da Função Tenda?

CURIOSIDADE

Imagem disponível em: https://www.evatecnica.com.br/noticias/2018/11/hora-da-curiosidade-e-v-a-tecnica

Em linguagem matemática, dizemos que um ponto p é um ponto periódico de f de período n quando

$$f^n(p) = p,\; f^{n-1}(p) \neq p,\; f^{n-2}(p) \neq p,\; f^{n-3}(p) \neq p, \dots, f^2(p) \neq p \text{ e } f(p) \neq p.$$

DESAFIO 1

PONTOS PERIÓDICOS

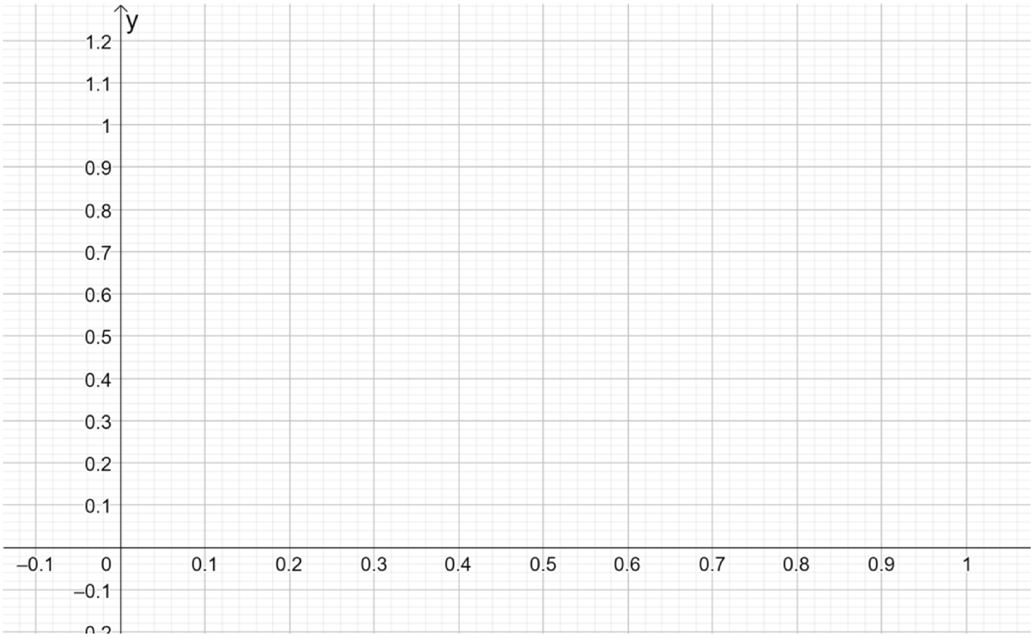
Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

Continue o processo acima e determine os pontos periódicos de f de período 4 e os pontos periódicos de f de período 5.

DESAFIO 2
PONTOS PERIÓDICOS

Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

Através do GeoGebra podemos observar um certo padrão nos gráficos de f, f^2 e f^3. Você seria capaz de fazer abaixo o esboço do gráfico *de* f^6? Tente!!!



DESAFIO 3
PONTOS PERIÓDICOS

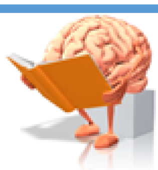


Imagem disponível em: https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/12/13/a-historia-do-cerebro/

f tem pontos periódicos de todos os períodos n?

ATIVIDADE 15
O TEOREMA DE LI E YORKE

I – Faça no GeoGebra o gráfico da função $g: [0,2] \to [0,2]$,

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

II – Em seguida, obtenha no GeoGebra os gráficos de $g^2(x) = g(g(x))$, $g^3(x) = g(g(g(x)))$ **e** $y = x$.

III – Consultando os gráficos construídos, responda:

a) g tem pontos fixos? Quantos? ______________________________

b) g tem pontos periódicos de período 2? Quantos? ______________________

c) g tem pontos periódicos de período 3? Quantos? ______________________

IV – Comparando a Função Tenda da Atividade 14 com a função g dessa atividade, marque a melhor opção em cada item abaixo:

a) É possível esboçar o gráfico da função de forma contínua sem o tirar o lápis do papel na:

- [ ] Função Tenda
- [ ] Função g
- [ ] Função Tenda e Função g

b) Tem ponto fixo.

- [ ] Função Tenda
- [ ] Função g
- [ ] Função Tenda e Função g

c) Tem ponto periódico de período 2.

- [ ] Função Tenda
- [ ] Função g
- [ ] Função Tenda e Função g

d) Tem ponto periódico de período 3.

☐ Função Tenda
☐ Função g
☐ Função Tenda e Função g

e) Tem ponto periódico de qualquer período que escolhermos.

☐ Função Tenda
☐ Função g
☐ Função Tenda e Função g

V -

Imagem disponível em: https://pt.vecteezy.com/

TIRE SUAS PRÓPRIAS CONCLUSÕES

____

____

____

____

CURIOSIDADE

Imagem disponível em: https://www.evatecnica.com.br/noticias/2018/11/hora-da-curiosidade-e-v-a-tecnica

A descoberta de Li e Yorke

Em 1975, dois matemáticos, Li e Yorke, depois de muitos experimentos e muita pesquisa, provaram que se o gráfico de uma função f puder ser esboçado continuamente sem tirar a ponta do lápis do papel e se f tiver um ponto periódico de período 3, então essa mesma f terá pontos periódicos de qualquer período.

Porém, o que Li e Yorke não sabiam era que, onze anos antes, em 1964, um matemático ucraniano chamado Sharkovskii havia provado um resultado mais forte. Sharkovskii organizou os números naturais da seguinte forma:

3	5	7	9	11	...	...	...	...
3×2	5×2	7×2	9×2	...	...	...	...	...
3×2^2	5×2^2	7×2^2	9×2^2	...	...	...	...	...
3×2^3	5×2^3	7×2^3	9×2^3	...	...	...	...	...
3×2^4	5×2^4	7×2^4	9×2^4	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	2^2	2	1

Em seguida, ele criou uma nova regra para comparar os números naturais:

- Se dois números naturais estiverem na mesma linha da tabela, será considerado maior o número que estiver mais à esquerda.
- Se dois números naturais estiverem em linhas diferentes da tabela, será considerado maior o número que estiver na linha mais acima.

Nessa nova regra, por exemplo,

- 5×2^2 é maior que 9×2^2;
- 9×2^5 é maior que 17×2^5;
- 17×2^5 é maior que 17×2^8;
- 17×2^8 é maior que 25×2^{13};
- 3 é maior que todos os números naturais;
- 1 é menor que todos os números naturais.

Finalmente, Sharkovskii provou que se o gráfico de uma função f puder ser esboçado continuamente e se f tiver um ponto periódico de período n, então f terá pontos periódicos de qualquer período menor que n, segundo a nova regra.

Exemplos

- Se f tem um ponto periódico de período 5×2^2 então f tem um ponto periódico de período 9×2^2.
- Se f tem um ponto periódico de período 17×2^8 então f tem um ponto periódico de período 25×2^{13}.
- Se f tem um ponto periódico de período 3 então f tem pontos periódicos de qualquer período.

Esse último exemplo é exatamente o que Li e Yorke obtiveram em suas pesquisas 11 anos depois. Naquela época os pesquisadores não tinham a internet como ferramenta auxiliar na divulgação de seus resultados científicos.

Conhecendo essas descobertas conseguimos responder muitas perguntas nas Atividades 14 e 15!!!

Um desafio adicional...

Que bom que você chegou até aqui. Esperamos que tenha gostado e quem sabe esteja motivado a investigar ainda mais esse imenso universo da matemática.

Se quiser testar um pouco mais o seu conhecimento, forme dupla ou grupo com os colegas e brinque com o **“Cadê o par que estava aqui?”,** um jogo de cartas envolvendo os conceitos de funções. Basta pedir ao seu professor as cartas.

Seguem abaixo as regras.

Jogo: “Cadê o par que estava aqui”?

Regras:

Retire uma carta do baralho e divida o restante das cartas entre os jogadores. Cada jogador deverá unir as cartas em suas mãos com os seus pares (caso esteja em posse deste) e retirar tais pares fora. Assim, ficará somente com as cartas sem pares na mão. Após essas etapas, o jogo será iniciado. O primeiro a jogar é o jogador que está à direita de quem distribuiu as cartas. Esse jogador deverá puxar uma carta do jogador a sua esquerda. Se a carta que puxou fizer par com alguma que tiver nas mãos, o jogador formará o par e descartará do jogo, senão ele colocará a carta entre as suas. A seguir, o outro participante de seu lado direito lhe puxará uma carta, e assim por diante. O primeiro jogador que casar todas as suas cartas ganha o jogo e o último jogador que sobrar perde. Este jogador que sobrar terá na mão a carta que coincide com a carta guardada.

Observações:

Sobre os pares de cartas do jogo: Os pares, a serem formados, envolvem os assuntos abordados nesse Caderno de Atividades.

Sobre as regras: São as mesmas do conhecido jogo de cartas “fedor”. Mínimo de 2 jogadores.

REFERÊNCIAS

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**: Educação é a base. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. V. 2, Brasília: MEC/SEF, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

PAIXÃO, Bianca dos Santos. **Pontos Periódicos de Funções Afins por Partes e o Teorema de Li e Yorke: uma introdução no Ensino Médio**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz Fora, Juiz de Fora, 2020.

ANEXO

JOGO DE CARTAS: “Cadê o par que estava aqui”?.

DICA PARA IMPRESSÃO DAS CARTAS:

Para ter cartas mais resistentes, imprimir em papel cartão branco. No verso da folha, imprimir a estampa, isso ajuda a evitar transparência das cartas e as deixa visualmente melhor.

CARTAS FRENTE E VERSO

1

"Se o gráfico de uma função f puder ser esboçado continuamente sem tirar a ponta do lápis do papel e se f tiver um ponto periódico de período 3, então essa mesma f terá pontos periódicos de qualquer período que escolhermos".

Essa descoberta foi feita pelos matemáticos:

1

LI,

YORKE e SHARKOVSKII

2

O gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

com $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2}x + 3}$ corta o eixo das ordenadas (eixo y) no ponto ...

2

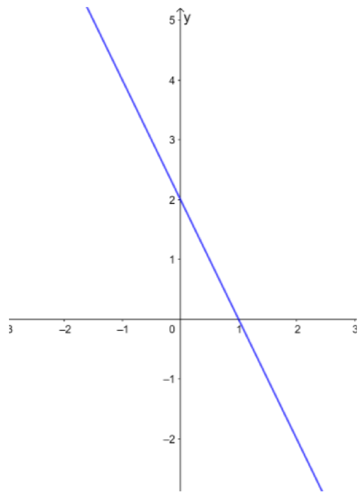
$$(0, 3)$$

3

O gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$\boldsymbol{f(x) = -2x + 2}$ corta o eixo das abscissas em $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ e o eixo das ordenadas em $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$ Uma representação do seu gráfico é:

3



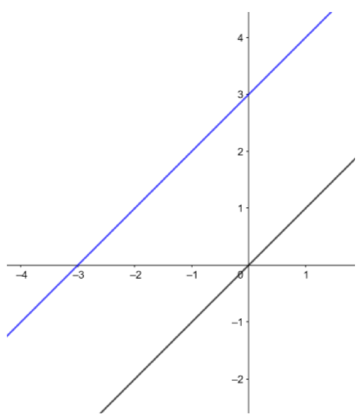
4

O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

com $f(x) = x + 3$ corta o eixo das abscissas (eixo x) em $(-3, 0)$ e o eixo das ordenadas (eixo y) em $(0, 3)$. Essa função não tem ponto fixo.

Uma representação do seu gráfico é:

4



5

Uma representação do gráfico de

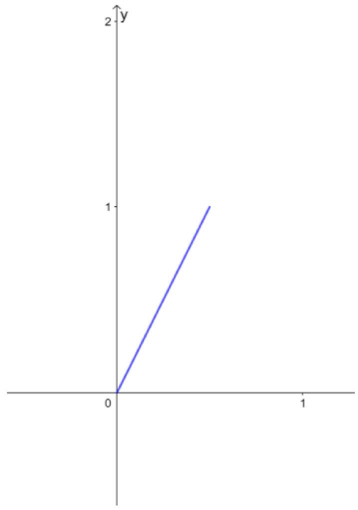
$f\colon \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0, 1]$,

tal que

$f(x) = 2x$,

é:

5



6

Uma representação do gráfico de

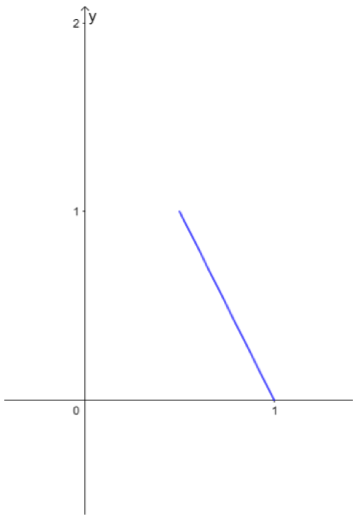
$f\colon \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0, 1]$,

tal que

$f(x) = -2x + 2$,

é:

6



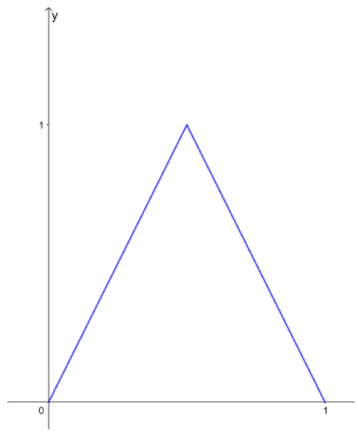
7

Algumas funções são chamadas funções afins por partes. Um exemplo é a função g, também conhecida como Função Tenda:

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Sua representação gráfica é:

7

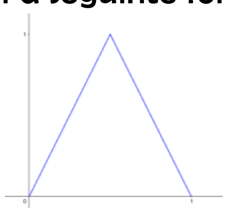


8

Se o gráfico da função

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

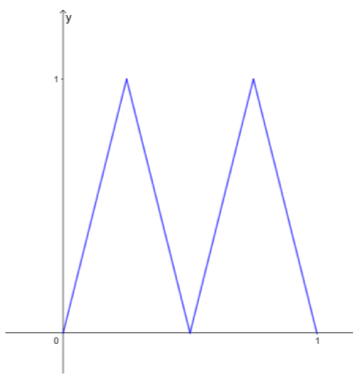
tem a seguinte forma



então o gráfico de $g(g(x))$ ou $g^2(x)$ ...

8

...tem a forma abaixo



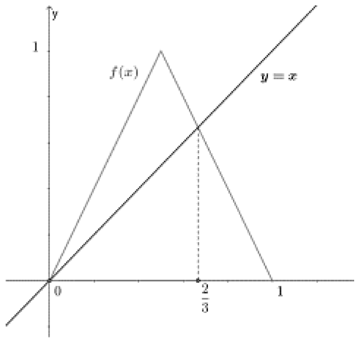
9

Podemos encontrar os pontos fixos de uma função, intersectando o gráfico dessa função com a reta $y = x$. A primeira coordenada de cada ponto de intersecção encontrado é um ponto fixo. Observe no gráfico os pontos fixos da função $g(x)$, onde

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

9

Gráfico de $g(x)$



Pontos fixos:

$$x = 0 \; e \; x = \frac{2}{3}$$

10

O ponto fixo da função

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$f(x) = 2x - 3$,

é:

10

$$x = 3$$

11

Uma representação gráfica de

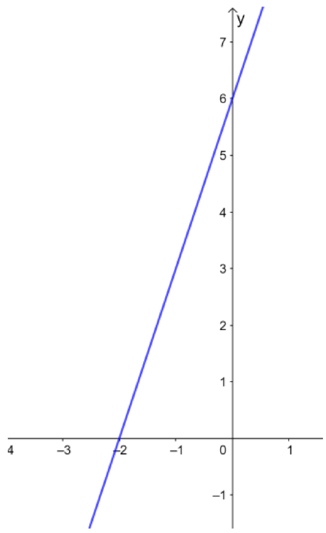
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

tal que

$f(x) = 3x + 6$,

é:

11



12

O gráfico da função

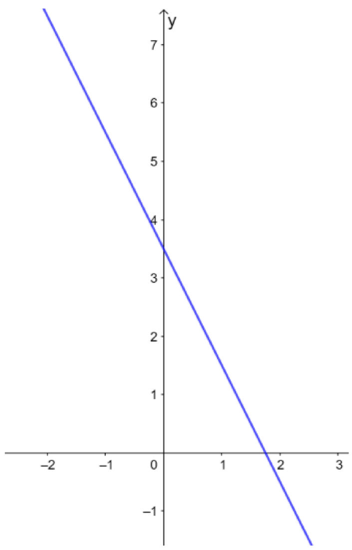
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

onde

$f(x) = -2x + \frac{7}{2}$,

é:

12



13

O gráfico da função

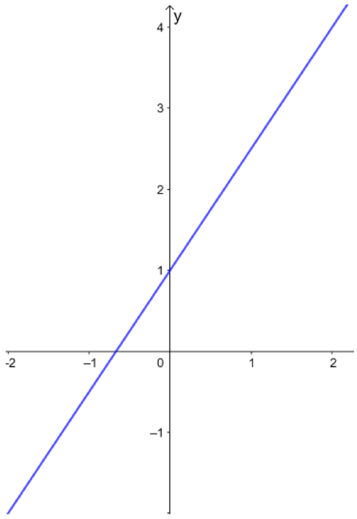
$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

onde

$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{2}x + 1}$,

é:

13



14

Seja a função

$g: [0,2] \rightarrow [0,2]$,

$g(x) = \begin{cases} 2 - 2x, 0 \leq x < 1 \\ x - 1, 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Dado o ponto $\boldsymbol{x_0 = 0}$, a órbita desse ponto é:

14

$\boldsymbol{O(x_0)}$
$\boldsymbol{= \{0, 2, 1, 0, 2, \dots\}}$

Observe que $x_0 = 0$ é um ponto periódico de período 3.

15

Seja a função

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

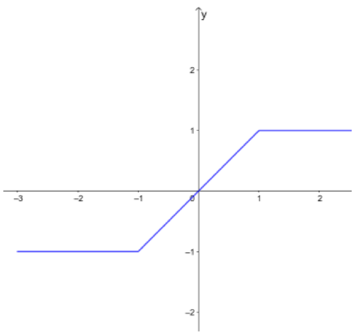
$\boldsymbol{f(x) = x + 2}$

Quais são os coeficientes angular e linear dessa função?

15

O coeficiente angular de f **é 1** e o coeficiente linear **é 2.**

16



16

Seja a função

$f(x) = \begin{cases} -1, -3 \leq x < -1 \\ x, -1 \leq x \leq 1 \\ 1, 1 < x \leq 3 \end{cases}$

Uma representação do gráfico dessa função é:

17

Seja a função
$h(x) = 2x + 1$

Ela tem apenas um ponto fixo. O ponto fixo é:

17

$x = -1$ é o ponto fixo da função
$h(x) = 2x + 1$

18

Sejam

f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que
$f(x) = x + 3$ e
$g(x) = 2x - 5$.
Então, $g \circ f(x) = \ldots$

18

$g \circ f(x) = 2x + 1$

19

Seja

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que
$f(x) = 3x$.
Então a órbita de $x_0 = 1$ por essa função é:

19

$O(x_0)$
$= \{1, 3, 9, 27, \ldots\}$

20

Qual a função em que **todos** os pontos do seu domínio são pontos fixos?

20

Função Identidade