

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Integrais de caminho e o índice Ibovespa

João Vitor Frossard

JUIZ DE FORA
FEVEREIRO, 2018

Integrais de caminho e o índice Ibovespa

JOÃO VITOR FROSSARD

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Mestrado em Física

Orientador: Albert Carlo Rodrigues Mendes

Co-orientador: Flávio Iassuo Takakura

JUIZ DE FORA
FEVEREIRO, 2018

INTEGRAIS DE CAMINHO E O ÍNDICE IBOVESPA

João Vitor Frossard

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM FÍSICA.

Aprovada por:

Albert Carlo Rodrigues Mendes
Professor Doutor - UFJF

Everton Murilo Carvalho de Abreu
Professor Doutor - UFRRJ

Marcelo Byrro Ribeiro
Professor Doutor - UFRJ

JUIZ DE FORA
19 DE FEVEREIRO, 2018

Dedico este trabalho a todos aqueles que, como eu, desejam desbravar áreas que estão fora da sua zona de conforto.

Resumo

Com o recente desenvolvimento da econofísica, subárea da física que lida com problemas econômicos, tornou-se possível utilizar ferramentas de teoria quântica de campos (TQC) para resolver diversos problemas em economia e finanças, bem como utilizá-las para entender melhor os fenômenos em sistemas econômicos.

Nosso objetivo neste trabalho é utilizar estas ferramentas para buscar novos entendimentos acerca da distribuição de retornos de índices econômicos e a possibilidade de previsão destes retornos como, por exemplo, os retornos do índice Ibovespa da bolsa de valores brasileira.

Dentre as diversas ferramentas utilizadas na TQC uma das mais importantes são as integrais de caminho. Devido à alta aplicabilidade desta ferramenta e das suas características, ela é utilizada nas mais diversas áreas da física, sobretudo em teoria de campos à temperatura finita e no estudo de fenômenos fora do equilíbrio.

Baseado em teorias que tratam fenômenos fora do equilíbrio apresenta-se um formalismo de integrais de caminho que nos permite escrever a probabilidade de transição entre dois pontos distintos de um processo estocástico e a relacionamos com distribuições de probabilidade bem conhecidas na literatura como a distribuição truncada de Lévy.

Esta probabilidade de transição é então aplicada para prever os retornos do índice Ibovespa da bolsa brasileira mostrando um bom acordo entre a previsão teórica e os dados históricos obtidos da Bovespa.

Palavras-chave: Teoria quântica dos campos. Integrais de caminho. Econofísica. Previsão de índices econômicos.

Área de conhecimento: Teoria de partículas e campos.

Abstract

Due it to the new development of econophysics, a field of physics that deal with economical problems, it became possible to apply some of the tools used in quantum field theory to solve many problems in economics and finance, as well as to use them to better understand the phenomena in economical systems.

Our goal in this work is to use those tools to search for a new understanding about the evolution of economical indexes and the capability to predict them, as we will see, for example, in the Ibovespa index of Brazilian stock market.

Among those useful tools of quantum field theory the most important one are the path integral. Due to the high applicability, they are used in several physical theories, especially in field theories at finite temperature and in the study of non-equilibrium phenomena.

The issue is based on theories that deal with non-equilibrium phenomena, we will present in this work a path integral formalism that allows us to write the transition probability between two different points of stochastic process and relate it with a well-known probability density function: the truncated Lévy flights.

This transition probability is applied to predict the returns of the Ibovespa index of the Brazilian stock market with a good agreement between the theoretic prediction and the historical data obtained from Bovespa.

Keywords: Quantum theory of fields. Path integrals. Econophysics. Economic indexes forecasting.

Knowledge area: Theory of fields and particles.

Agradecimentos

Ao Deus Incrriado, Pai de Todas as Luzes, por ser meu alvo mais elevado.

Ao meu pai, Paulo Marcos Castro Debellis, pelo exemplo de homem e ser humano.

À minha mãe, Regina Gomes Frossard, por me motivar em tudo e com tudo.

À minha avó, Maria da Glória Gomes, por ter me ensinado a nunca desistir.

À minha irmã, Ana Carolina Frossard de Paula, que desde criança me ensinou muito sobre ciência.

À minha namorada, Thaís da Silva Lovisi, por ter me ensinado que depois da noite mais escura sempre nasce o dia mais brilhante.

Ao meu tio, Roberto Campos Frossard, o mais original físico da família.

Ao meu amigo de infância, Miguel Jorge da Silva Fortes, por ser um irmão que esteve e está sempre comigo.

À minha muito amada madrinha, Conceição Luiza Bispo, por ter sido quem foi e é até hoje.

Aos meus colegas de curso e em particular Isis, João Paulo, Maxwell, Francisco Abreu, Francisco Figueiredo e Geissy por serem grandes companheiros de caminhada nessa vida difícil que é a pós-graduação.

Aos meus fraternos amigos Edgar, Marisa, Marcelo, Tânia, Vera, Antônio, Lúcia, Diego, Leonardo e Vivian por terem me ensinado a buscar a verdade e somente a verdade.

Ao meu orientador, Albert Carlo Rodrigues Mendes, por sua diligência e sempre constante presteza.

Ao meu co-orientador, Flávio Iassuo Takakura, por seus comentários, conselhos e ponderações fantásticos.

Ao nosso colaborador, Paulo Belletato, por sempre fazer as melhores perguntas que me trouxeram grandes descobertas.

Ao meu professor, Jens Karl Heinz Mund, que me ensinou que teoria quântica de campos pode ser muito divertido.

À memória do professor Wilson Oliveira por ser grande exemplo de professor e mestre.

Ao grande professor e economista Paulo César Coimbra Lisboa por ter me ensinado, dentre diversas coisas, que opções é como um cassino.

Aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu e Prof. Dr. Marcelo Byrro Ribeiro pelas magníficas colocações sobre o trabalho e muito pertinentes comentários e correções.

À UFJF por ter contribuído a minha formação e por ser esse ambiente de rico desenvolvimento científico e intelectual.

À CAPES por todo o aporte financeiro.

A todos a minha mais sincera e profunda gratidão.

J.V. Frossard

“Não estimes o dinheiro nem mais, nem menos do que ele vale: é um bom servidor e um péssimo amo.” - Alexandre Dumas Filho

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
1 Introdução	11
1.1 Considerações preliminares	11
1.2 Objetivos	12
1.3 Estruturação do trabalho	12
1.4 Metodologia de trabalho	12
2 Distribuições estatísticas	14
2.1 Distribuição gaussiana	14
2.1.1 Momentos da distribuição gaussiana	14
2.1.2 Assimetria e curtose	16
2.1.3 Função geratriz de momentos	17
2.1.4 Função geradora dos cumulantes	18
2.2 Teorema central do limite	20
2.3 Distribuições estáveis	21
2.4 Distribuições não-gaussianas: A distribuição de Lévy	22
2.5 Distribuições não-gaussianas: A distribuição truncada de Lévy	25
3 Integrais de caminho	29
3.1 Construção das integrais de caminho	29
3.2 Matriz densidade	31
3.3 Fontes externas	32
3.4 Partícula em um banho térmico	34
3.5 Funções de Green de não-equilíbrio	38
3.6 Teoria de perturbações para funções de Green de não-equilíbrio	44
3.7 Partícula em um banho térmico no formalismo de integrais de caminho	46
3.8 Equação de Fokker-Planck e equação de Langevin	51
3.9 Integrais de caminho e a distribuição truncada de Lévy	54
4 Revisão de conceitos de economia	57
4.1 Mercados eficientes	57
4.2 Possibilidade de arbitragem	58
4.3 Como o índice Ibovespa e DJIA são calculados?	59
4.4 Previsão de índices usando séries temporais	60
4.4.1 Médias móveis simples	61
4.4.2 Médias móveis autorregressivas	61
4.5 Previsão de índices usando a distribuição normal	62
5 Previsão de índices de ações	65
5.1 Introdução a previsão de índices usando integrais de caminho	65
5.2 Método para disposição dos dados	66
5.3 Ajuste para o índice DJIA	67

5.4	Ajuste para o índice Ibovespa	70
5.5	Relação entre ambos ajustes	71
6	Conclusões e perspectivas futuras	74

Lista de Figuras

3.1	Gráfico que mostra o contorno fechado de $-\infty$ até ∞ . Extraído de H. Kleinert, página 1221, [14].	41
4.1	Ajuste dos dados do índice Ibovespa entre os anos de 1968 e 2016 usando um programa próprio do software Wolfram Mathematica [©] . Gráfico gerado usando o software Gnuplot [©] . O gráfico em azul são os dados do índice e o gráfico em vermelho são os dados do nosso ajuste gaussiano.	63
5.1	Gráfico referente aos dados Dow Jones de 1900 a 2016 usando o nosso modelo como ajuste. Gráfico gerado através do software Gnuplot [©] . Os dados em vermelho correspondem ao nosso ajuste calculado através de um programa do Wolfram Mathematica [©] e a curva em azul corresponde aos dados do mercado.	69
5.2	Gráfico referente aos dados do índice Ibovespa de 1968 a 2016 usando o nosso modelo como ajuste. Gráfico gerado através do software Gnuplot [©] . O gráfico em azul corresponde aos dados do mercado e os dados em vermelho correspondem ao nosso ajuste cujos cálculos foram feitos através de um programa no Wolfram Mathematica [©]	70
5.3	Gráfico referente aos ajustes dos índices Ibovespa [verde], Dow Jones [vermelho] e Gaussiano [azul].	72

Lista de Tabelas

5.1	Trecho da tabela com a disposição dos dados do índice Ibovespa de 1968 a 2016. Apresenta-se dados diários, tomados sequencialmente ao longo dos dias, em que se calcula a diferença de logaritmos de retornos, x , através da equação (5.1) e calcula-se os valores de retornos normalizados, y , através da equação (5.2). Essa tabela apresenta apenas um trecho da tabela que inclui todos os dados reais do mercado.	67
5.2	Trecho da tabela com a disposição dos dados do índice Dow Jones de 1900 a 2016. Apresenta-se dados diários tomados sequencialmente ao longo dos dias com o respectivo cálculo para a diferença de logaritmos, eq. (5.1), e os retornos normalizados diários, eq. (5.2). Essa tabela apresenta apenas um trecho da tabela que inclui todos os dados reais do mercado.	68
5.3	Tabela com os parâmetros do ajuste dos dados do índice industrial Dow Jones. Parâmetros ajustados, para o índice DJIA, através da equação (3.144). O valor de S corresponde à quão bem o modelo se ajusta aos dados, conforme eq. (4.5).	69
5.4	Tabela com os parâmetros do ajuste dos dados do índice Ibovespa. Parâmetros ajustados, para o índice Ibovespa, através da equação (3.144). O valor de S corresponde à quão bem o modelo se ajusta aos dados, conforme eq. (4.5).	71

1 Introdução

1.1 Considerações preliminares

Este trabalho se insere num ramo bastante novo e pouco explorado no Brasil: a econofísica. Ciência esta que visa aplicar as técnicas e sobretudo a capacidade interpretativa e descritiva dada pelos físicos aos fenômenos do mercado financeiro e da economia. Devido a grande gama de problemas que podem ser tratados e analisados é comum isolarmos um pequeno campo de estudo.

Os autores que trabalham com esta área costumam considerar determinado campo de estudo para ser analisado. Portanto, à já vasta área explorada pela Física, inclui-se, com isto, diversas outras áreas novas: análise macroeconômica, distribuição populacional, índices de pobreza/riqueza/educação, distribuição de renda, sistemas financeiros, mercados de futuros, mercados estrangeiros, previsões de *crashes* em bolsas mundiais e muitos outros ramos de estudo.

Diante de tão grande possibilidade fica claro a necessidade de nos atermos a uma parte deste vasto campo e nele trabalhar. Este é um primeiro ponto importante sobre o presente trabalho. Ele se insere no contexto da aplicação de técnicas de física teórica para o mercado financeiro, com especial ênfase nos índices de ações. Esta aplicação fará uso da técnica de integrais de trajetória.

Dedicamos uma parte deste a apresentar a técnica de integrais de trajetória de forma clara e fornecendo as principais fórmulas e ferramentas necessárias. Dedicamos outra parte deste trabalho a fazer uma previsão teórica dos retornos do índice Ibovespa e do índice Dow Jones através da técnica de integrais de trajetória a partir de dados históricos, coisa esta que, até onde sabemos, não foi feita utilizando-se esta técnica.

1.2 Objetivos

Nosso objetivo principal neste trabalho é obter uma previsão teórica do índice Ibovespa, principal indicador da bolsa brasileira, e comparar os resultados obtidos com os dados históricos tomados neste período. Também compararemos essa previsão com uma previsão análoga do índice Dow Jones, indicador análogo ao Ibovespa para a bolsa americana.

1.3 Estruturação do trabalho

Para alcançarmos o objetivo mencionado precisamos realizar uma série de passos importantes que serão descritos brevemente a seguir.

No capítulo 1 nos dedicaremos a fazer algumas introduções ao trabalho como um todo, estruturação do mesmo e metodologia.

No capítulo 2 apresentaremos algumas distribuições estatísticas de grande relevância para o estudo de mercados financeiros, entre elas a distribuição truncada de Lévy que é fundamental neste estudo.

No capítulo 3 iremos apresentar de uma forma simples, porém didática, as técnicas de integrais de caminho e apresentaremos os principais resultados, necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 4 apresentamos alguns conceitos importantes em finanças e um método bastante utilizado na previsão dos índices financeiros.

No capítulo 5 iremos nos dedicar a obter uma previsão para os retornos do índice Ibovespa através da técnica de integrais de caminho e compararemos tal previsão com os dados históricos e as técnicas mais comumente utilizadas.

No capítulo 6 apresentaremos as conclusões e considerações finais do trabalho.

1.4 Metodologia de trabalho

Nossa metodologia de trabalho se divide em quatro etapas:

- Fornecer uma introdução teórica a técnica das integrais de caminho como uma forma

de revisão da bibliografia;

- Apresentar alguns aspectos importantes sobre o mercado financeiro, bem como as teorias clássicas de finanças;
- Aplicar o método das integrais de caminho na solução de um problema financeiro prático que é a determinação dos retornos do índice Ibovespa;
- Conclusões e perspectivas futuras para esse campo de estudo.

2 Distribuições estatísticas

Esse capítulo é de grande importância para o entendimento do que se pretende fazer no capítulo 5: realizar uma previsão dos retornos do principal índice da bolsa brasileira através de um tipo de distribuição estatística. Começaremos com uma distribuição largamente conhecida na literatura [1, 2].

2.1 Distribuição gaussiana

Essa distribuição tem como função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.1)$$

em que x assume valores reais, $\mu > 0$ e $\sigma > 0$. Define-se, a partir desta equação, a chamada densidade de probabilidade acumulada:

$$F_{<}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x'-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx'. \quad (2.2)$$

Indicamos o sub-índice $<$ ao se tratar de uma distribuição de probabilidade acumulada para valores menores que um dado x . Chamamos de função de distribuição acumulada à esquerda. Pode-se construir a função de distribuição acumulada para valores maiores que um dado x , a saber:

$$F_{>}(x) = 1 - F_{<}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left[-\frac{(x'-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx', \quad (2.3)$$

a que chamamos função de distribuição acumulada à direita.

2.1.1 Momentos da distribuição gaussiana

Uma característica importante das distribuições são os seus **momentos**. Os momentos de uma distribuição carregam diversas informações relevantes para as estudarmos.

Por essa razão apresentamos, primeiramente, momentos da mais simples distribuição: a distribuição gaussiana. Esses momentos são calculados na forma de valores esperados, na forma como segue:

$$m_t = E(X^t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^t f(x) dx, \quad (2.4)$$

em que $f(x)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição normal. Diz-se que este valor esperado acima é o valor do t -ésimo momento da distribuição normal. A título de exemplo, mostramos abaixo os quatro primeiros momentos da distribuição normal:

$$m_1 = E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu, \quad (2.5)$$

$$m_2 = E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu^2 + \sigma^2, \quad (2.6)$$

$$m_3 = E(X^3) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu(\mu^2 + 3\sigma^2), \quad (2.7)$$

$$m_4 = E(X^4) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4. \quad (2.8)$$

Uma fórmula muito útil para se fazer estes cálculos pode ser encontrada em [3]. Através destes momentos conseguimos calcular quatro características importantes da distribuição gaussiana. As duas primeiras são a média e a variância:

$$\bar{X} = E(X) = \mu \quad (2.9)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2. \quad (2.10)$$

A primeira grandeza, chamada de **média** da distribuição, nos diz em torno de qual ponto no espaço essa distribuição está localizada. A segunda grandeza, a **variância**, quando calcula-se sua raiz quadrada, fornece o **desvio padrão**:

$$\sqrt{Var(X)} = \sigma. \quad (2.11)$$

O desvio padrão, quanto menor for, mais concentrada está a probabilidade em torno da média da distribuição. Em outras palavras, quanto menor for o desvio padrão, mais estreita será a distribuição gaussiana. No caso limite onde o desvio padrão tende a zero,

na distribuição gaussiana, a mesma degenera em uma delta de Dirac.

2.1.2 Assimetria e curtose

Dando continuidade ao nosso estudo da distribuição gaussiana analisaremos mais duas características da distribuição, os parâmetros β e κ :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{E[X - E(X)]^3}{\sigma^3} = \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 3E(X)E(X)^2 - E(X)^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{\mu^3 - 3\mu\sigma^2 - 3\mu^3 + 3\mu\sigma^2 + 3\mu^3 - \mu^3}{\sigma^3} = 0.\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{E[(X - E(X))^4]}{\{E[(X - E(X))^2]\}^2} = \frac{E[X^4 - 4X^3E(X) + 6X^2E(X)^2 - 4XE(X)^3 + E(X)^4]}{\{E(X^2) - E(X)^2\}^2} \\ &= \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E(X)^2 - 4E(X)^4 + E(X)^4}{E(X^2)^2 - 2E(X^2)E(X)^2 + E(X)^4} \\ &= \frac{\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 - 4\mu^4 - 12\mu^2\sigma^2 + 6\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 - 4\mu^4 + \mu^4}{\mu^4 + 2\mu^2\sigma^2 + \sigma^4 - 2\mu^4 - 2\mu^2\sigma^2 + \mu^4} \\ &= \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3.\end{aligned}\quad (2.13)$$

O primeiro parâmetro, β , é um parâmetro de **assimetria** da distribuição. No caso de ser nulo, diz-se que a distribuição é simétrica. Esse é o caso da distribuição gaussiana. O segundo parâmetro é chamado **curtose** e mede o achatamento da distribuição. No caso da distribuição gaussiana ele vale exatamente 3.

Em comparação com a distribuição gaussiana, as distribuições que possuem menor curtose são menos achatadas e possuem probabilidade pequena quando a variável aleatória assume valores grandes ou pequenos. Essas distribuições são chamadas de **platicúrticas**. Distribuições platicúrticas possuem “caudas leves” ou seja, caem mais rápido para zero que a distribuição gaussiana.

Por outro lado distribuições que possuem uma maior curtose são mais achatadas e possuem probabilidade grande quando a variável aleatória assume valores grandes ou pequenos. Essas distribuições são chamadas de **leptocúrticas**. Distribuições leptocúrticas possuem “caudas pesadas”. Diz-se, então, que distribuições leptocúrticas tem maior peso nas caudas que a distribuição gaussiana e, por isso, elas caem para zero mais lentamente

que a distribuição gaussiana.

Finalmente distribuições cuja curtose seja bastante próxima de 3 (ou seja, cuja forma é bem próxima à forma da gaussiana) são chamadas de **mesocúrticas**.

2.1.3 Função geratriz de momentos

Calculamos os momentos da distribuição gaussiana utilizando cálculos de integrais das variáveis multiplicadas pela densidade de probabilidade da distribuição gaussiana. Além de ser um cálculo significativamente trabalhoso há distribuições mais gerais cuja densidade de probabilidade não possui expressão analítica [4, 5].

Por essa razão é comum escrevermos uma função que seja capaz de gerar todos os momentos através de derivadas sucessivas. Essa função é chamada de **função geratriz de momentos**. É possível definir a função geratriz através da **função característica da distribuição**. Definimos a função característica como sendo a transformada de Fourier da sua função densidade de probabilidade:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx, \quad (2.14)$$

sendo $f(x)$ a função densidade de probabilidade da distribuição normal. Essa é uma integral gaussiana que pode ser calculada pelo método de completar quadrados o que nos dará:

$$\phi(t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{1}{2}(\sigma t)^2}. \quad (2.15)$$

Essa é a função característica da distribuição gaussiana. Há o caso de distribuições mais gerais que somente sua função característica pode ser conhecida dado que a função densidade de probabilidade não possui forma analítica, como é o caso das distribuições truncadas de Lévy que veremos mais à frente neste texto [4].

A relação que há entre a função geratriz de momentos, denotada por $M(t)$, e a função característica da distribuição, $\phi(i)$, é dada pela equação:

$$M(t) = \phi(-it) = e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \quad (2.16)$$

Note que $M(t) = \phi(-it)$ relaciona a função geratriz de momentos, $M(t)$, com a função característica de uma distribuição qualquer. O termo à direita da equação (2.16) é exclusivo para a distribuição gaussiana.

É através desta função que se geram os momentos da distribuição. O n -ésimo momento da distribuição pode ser gerado através do cálculo da seguinte derivada:

$$m_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} [M(t)] \right|_{t=0}. \quad (2.17)$$

A título de exemplificação da simplicidade dessa forma de cálculo mostraremos como se calcula os dois primeiros momentos da distribuição gaussiana, os quais poderão ser comparados com os cálculos via integrais gaussianas (2.5) e (2.6).

$$m_1 = \left. \frac{d}{dt} [e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}] \right|_{t=0} = \mu e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + \sigma^2 t e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Big|_{t=0} = \mu, \quad (2.18)$$

$$m_2 = \left. \frac{d^2}{dt^2} [e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}] \right|_{t=0} = \mu^2 + \mu\sigma^2 t + \sigma^2 + \mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2 \Big|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2. \quad (2.19)$$

O que ilustra quão mais eficiente é essa técnica em comparação ao cálculo direto via integrais.

2.1.4 Função geradora dos cumulantes

Além da função geratriz de momentos, já mencionada, há outra função geradora que é de grande importância em teoria da probabilidade [6]. Essa função é chamada **função geradora dos cumulantes**.

Em algumas aplicações é mais vantajoso utilizar os **cumulantes** de uma distribuição do que os seus momentos. Essa forma alternativa de análise é, sobretudo, extremamente útil em problemas que necessitam de expansões em séries de potências das distribuições de probabilidade. Neste caso os termos que multiplicam as potências são os cumulantes de n -ésima ordem.

Essa função geradora de cumulantes é definida como sendo o logaritmo natural da

função geratriz de momentos:

$$K(t) = \ln [M(t)] = \ln [E(e^{tX})]. \quad (2.20)$$

Para o caso da distribuição gaussiana já calculamos a função geratriz de momentos na subseção anterior e teremos:

$$K(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2, \quad (2.21)$$

a função geradora dos cumulantes da distribuição normal. Pode-se escrever essa função como a seguinte série de Taylor:

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} = c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} + \dots \quad (2.22)$$

Os termos que multiplicam as potências são chamados de **cumulantes**. O n-ésimo cumulante é definido como sendo:

$$c_n = \left. \frac{d^n}{dt^n} [K(t)] \right|_{t=0}. \quad (2.23)$$

Para o caso da distribuição normal teremos os seguintes cumulantes:

$$c_1 = \left. \frac{d}{dt} [K(t)] \right|_{t=0} = \mu + \sigma^2 t \Big|_{t=0} = \mu, \quad (2.24)$$

$$c_2 = \left. \frac{d^2}{dt^2} [K(t)] \right|_{t=0} = \sigma^2, \quad (2.25)$$

em que μ representa a média da distribuição e σ^2 sua variância. Notemos que como a função geradora dos cumulantes para a distribuição gaussiana é um polinômio de grau dois, todos os cumulantes de ordem superior a dois são nulos. Essa é uma característica única da distribuição gaussiana que não é partilhada por outras distribuições mais gerais.

2.2 Teorema central do limite

Pelos motivos e características mencionados acima, a distribuição gaussiana é uma das mais importantes e úteis na prática. Serve para modelar uma grande gama de problemas e, principalmente, serve como um “teste” para diversos tipos de amostras. Esse teste é ilustrado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 (Teorema central do limite). *Seja X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com cada uma das variáveis X_i tendo uma distribuição de probabilidade arbitrária conhecida $P(x_1, \dots, x_n)$ com média μ_i e variância finita σ_i^2 então:*

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{N}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad (2.26)$$

quando n tende a infinito.

Prova: *Pode ser encontrada, com detalhes, em [7].*

Neste teorema Z_n é chamado de média amostral e $N(0, 1)$ denota uma distribuição gaussiana de média nula e variância unitária, também chamada de **distribuição normal padrão**.

Esse importante resultado é chamado **teorema central do limite** e ele diz que, quando as hipóteses do mesmo são satisfeitas, a variável aleatória média amostral converge como distribuição para uma distribuição gaussiana padrão de média nula e variância 1 quando o número de variáveis aleatórias tende a infinito.

Devido a este resultado, há muitas situações em que se buscam distribuições de probabilidade mais gerais (como trataremos logo abaixo) que para um número grande de dados a mesma tenderá a uma distribuição gaussiana. Isso é uma forma, muito comum e útil, de teste para dados empíricos, sobretudo em finanças.

Outro comentário importante acerca deste teorema é que há a necessidade da variância das variáveis aleatórias ser finita. Caso a variância diverja, o teorema central do limite não se aplica. Essa é a única condição que tem que ser satisfeita de forma rigorosa. Há outras versões deste teorema que afrouxam as outras condições [4] (serem independentes e identicamente distribuídas), mas em nenhuma versão dele há qualquer afrouxamento

acerca da condição de finitude da variância.

2.3 Distribuições estáveis

Sejam duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 independentes e ambas distribuídas segundo uma distribuição gaussiana. Sem perda de generalidade podemos impor que a distribuição gaussiana possua média nula:

$$p(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.27)$$

Queremos estudar qual é a densidade de probabilidade da variável X que é a soma:

$$X = X_1 + X_2. \quad (2.28)$$

Começamos escrevendo a densidade de probabilidade da variável X

$$P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 p(X_1) \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 p(X_2) \delta(X - X_1 - X_2). \quad (2.29)$$

É mais simples trabalhar usando a função característica de (2.29) que é simplesmente a transformada de Fourier:

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dX P(X) e^{ipX}, \quad (2.30)$$

inserindo a equação (2.29) em (2.30) vamos encontrar:

$$\begin{aligned} \phi_X(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 p(X_1) \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 p(X_2) e^{ipX} \delta(X - X_1 - X_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dX_1 p(X_1) e^{-ipX_1} \int_{-\infty}^{\infty} dX_2 p(X_2) e^{-ipX_2} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dX_1 p(x_1) e^{-ipX_1} \right]^2 = [\phi_g(p)]^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

pois a distribuição de probabilidade $p(X_i)$ é a mesma para ambas as variáveis aleatórias. O índice g denota a função característica da distribuição gaussiana de uma única variável aleatória ao passo que o índice X denota a função característica da soma de variáveis

aleatórias. Usando o resultado (2.15) podemos escrever:

$$\phi_X(p) = e^{-\sigma^2 p^2}. \quad (2.32)$$

Para obter qual será a distribuição de probabilidade da variável X precisamos calcular a transformada de Fourier inversa de (2.32)

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi_X(p) e^{-ipX} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\sigma^2 p^2 - ipX} = \frac{e^{\sigma^2 \left(\frac{iX}{\sigma^2}\right)^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\sigma^2 \left(p - \frac{iX}{2\sigma^2}\right)^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{X^2}{4\sigma^2}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}} e^{-\frac{X^2}{4\sigma^2}}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

que também é distribuição gaussiana só que com a mudança de escala:

$$\sigma^2 \rightarrow 2\sigma^2. \quad (2.34)$$

Quando uma soma de variáveis aleatórias tem como resultado uma variável aleatória que está distribuída da mesma forma que todas as demais, a menos de uma mudança de escala, diz-se que essa distribuição é **estável**. Distribuições estáveis são as que possuem maior uso em aplicações práticas, sobretudo em finanças. A subseção seguinte é destinada a apresentar uma forma geral para distribuições estáveis.

2.4 Distribuições não-gaussianas: A distribuição de Lévy

Uma distribuição que generaliza a distribuição gaussiana e que é muito útil em finanças é a chamada **distribuição de Lévy**. Ela foi apresentada pela primeira vez no artigo de Paul Lévy [8] e foi utilizada para estudar dados financeiros pela primeira vez por Mandelbrot [9], que mostrou que o preço de determinados produtos não seguiam uma distribuição gaussiana mas sim uma distribuição mais geral que mais tarde viria a ser chamada de distribuição de Lévy.

Essa distribuição possui forma analítica bastante complicada para a função densidade de probabilidade sendo, portanto, comumente expressa pela sua função característica:

$$\tilde{L}_{\sigma^2}^{\lambda}(p) \equiv \exp \left[-\frac{(\sigma^2 p^2)^{\lambda/2}}{2} \right]. \quad (2.35)$$

De modo que a distribuição de Lévy propriamente dita será dada por:

$$L_{\sigma^2}^{\lambda}(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipz} \tilde{L}_{\sigma^2}^{\lambda}(p). \quad (2.36)$$

A forma analítica da expressão (2.36) foi obtida, conforme podemos encontrar em [4], e é dada por:

$$\ln[L_{\sigma^2}^{\lambda}(z)] = \begin{cases} i\mu z - \sigma|z|^{\lambda} \left[1 - i\beta \frac{z}{|z|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) \right] & , \text{ se } \lambda \neq 1, \\ i\mu z - \sigma|z| \left[1 + i\beta \frac{z}{|z|} \frac{2}{\pi} \ln(|z|) \right] & , \text{ se } \lambda = 1, \end{cases} \quad (2.37)$$

Notemos que essa função densidade de probabilidade, para a distribuição de Lévy, é muito mais complicada que a distribuição gaussiana. A distribuição de Lévy, equação (2.37), se reduz a distribuição gaussiana, equação (2.16), no limite $\lambda = 2$. Neste caso teremos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2} \tilde{L}^{\lambda}(z) = e^{i\mu z - \sigma z^2}, \quad (2.38)$$

que é a função característica da distribuição gaussiana. A distribuição de Lévy, eq. (2.37), é a distribuição de probabilidade mais geral possível que ainda é estável [8, 4].

Ao passo que a distribuição gaussiana possui dois parâmetros, a saber: média (μ) e variância (σ^2); a distribuição de Lévy mais geral possível possui quatro parâmetros: média (μ), variância (σ^2), escala (λ) e assimetria (β). Em muitas aplicações é utilizado um parâmetro $\beta = 0$, o que retira toda a assimetria da distribuição. Esse é o caso da distribuição que apresentamos no início desta seção, equação (2.35).

Como uma forma de entender melhor essa distribuição calcularemos o seu primeiro momento:

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z L_{\sigma^2}^{\lambda}(z) dz = \frac{d}{dp} \left[\tilde{L}_{\sigma^2}^{\lambda}(p) \right] \Big|_{p=0} = \left[\lambda \sigma p |p|^{\lambda-2} \left(-e^{-\sigma|p|^{\lambda}} \right) \right] \Big|_{p=0} = 0. \quad (2.39)$$

Assim sendo a variância da distribuição de Lévy pode ser calculada como sendo, apenas, o segundo momento, conforme fazemos abaixo:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \langle z^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 L_{\sigma^2}^{\lambda}(z) = - \frac{d^2}{dp^2} \left[\tilde{L}_{\sigma^2}^{\lambda}(p) \right] \Big|_{p=0} \\
&= - \frac{d}{dp} \left[\lambda \sigma p |p|^{\lambda-2} \left(-e^{-\sigma|p|^{\lambda}} \right) \right] \Big|_{p=0} \\
&= \frac{\lambda \sigma |p|^{\lambda} e^{-\sigma|p|^{\lambda}} \left(\lambda \sigma |p|^{\lambda} - L + 1 \right)}{p^2} \Big|_{p=0} \rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

que diverge para qualquer valor $\lambda < 2$. Conforme argumenta Kleinert, [14], todos os momentos de ordem superior a 2 são infinitos para $\lambda < 2$. Esse é um grave problema para a modelagem de dados financeiros usando distribuições de Lévy pelo fato de que, para a maioria das aplicações, a variância é finita.

Além disso, se a variância for infinita, o teorema central do limite, (2.26), não pode ser aplicado. Para muitos tipos de mercados e dados financeiros, como é o caso do índice S&P 500 da bolsa americana, os dados tendem a uma distribuição gaussiana quando o número de dados usados na análise é muito grande.

A última característica importante a ser explorada das distribuições de Lévy é seu comportamento quando o valor de z é muito grande. Esse comportamento é conhecido na literatura como “queda em lei de potência”. Kleinert, [14], realiza esse cálculo e o resultado é:

$$L_{\sigma^2}^{\lambda}(z) \rightarrow \frac{\sigma^{\lambda}}{2\pi\lambda} \sin(\pi\lambda/2) \Gamma(1+\lambda) \frac{\lambda}{|z|^{\lambda+1}}. \tag{2.41}$$

O comportamento “lei de potência” está demonstrado pelo termo $|z|^{-\lambda-1}$ e essa característica da distribuição é mantida até para valores realmente grandes da variável z . Em determinadas aplicações essa característica pode ser importante e isso constitui uma violação ao teorema central do limite que é interessante na prática.

2.5 Distribuições não-gaussianas: A distribuição truncada de Lévy

Conforme mencionamos na sessão anterior a distribuição de Lévy (digamos, pura) possui momentos divergentes de ordem maior que dois. A variância, relacionada ao segundo momento, também é infinita para os casos em que $\lambda > 2$. Esse fato implica que o teorema do limite central não pode ser aplicado na sua forma mais forte (2.26). Além disso esse fato também acarreta distorções nas análises dos dados reais que possuem variância finita [10].

É nesse contexto, buscando uma alternativa à distribuição de Lévy, que os autores Mantegna e Stanley em seu artigo [11] conseguiram construir uma distribuição baseada na distribuição de Lévy que possuía variância finita (e momentos de ordem superior também finitos). Essa distribuição ficou conhecida por **distribuição truncada de Lévy**.

Ela recebeu este nome pelo fato de se realizar um truncamento da densidade de probabilidade na forma:

$$P_{\text{truncada}}(x) \equiv \begin{cases} cL(x), & -\alpha < x < \alpha; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.42)$$

com $L(x)$ sendo uma distribuição de Lévy, c é uma constante de normalização e para algum parâmetro α conhecido como **parâmetro de truncamento**. Esse parâmetro está associado ao ponto a partir de qual a distribuição será nula ou não.

Com esse truncamento consegue-se uma distribuição que tem variância finita porém paga-se o preço da distribuição não ser mais infinitamente divisível, ou seja, a convolução de um produto de funções características deixa de ser o produto das convoluções individuais [12].

Para contornar esse problema, Koponen [13] forneceu um truncamento alternativo à distribuição de Lévy que, além de garantir a finitude da variância, também garantia a divisibilidade infinita. Essa distribuição é comumente apresentada como sendo a seguinte função característica:

$$L_{\sigma^2}^{(\lambda, \alpha)}(p) \equiv e^{-H(p)}, \quad (2.43)$$

com $H(p)$ fazendo um papel semelhante ao hamiltoniano utilizado nas funções de partição da física estatística. Porém essa equação dependerá do momento em uma forma mais complicada:

$$H(p) = \sigma^2 \frac{(\alpha^2 + p^2)^{\lambda/2} \cos[\lambda \tan^{-1}(p/\alpha)] - \alpha^\lambda}{\alpha^{\lambda-2}\lambda(1-\lambda)}. \quad (2.44)$$

Aqui α tem a mesma interpretação de antes, como sendo o ponto a partir do qual a distribuição será nula, λ é um parâmetro de escala e a distribuição converge pra gaussiana no limite $\lambda \rightarrow 2$ e, por fim, σ^2 é a variância da distribuição.

Essa é a apresentação da distribuição truncada de Lévy na forma dada por Kleinert, [14], página 1347, em sua versão com parâmetro de assimetria nulo. Há outras formas de se apresentar essa distribuição. Porém elas diferem apenas na forma como as constantes são nomeadas e como as constantes aparecerem na equação, como por exemplo em [15] e [16]. A forma funcional original desta distribuição foi obtida por Koponen [13], como mencionado.

Sendo a equação (2.43) uma função característica teremos, ao usar a equação (2.44), a seguinte expressão para a distribuição truncada de Lévy:

$$L_{\sigma^2}^{(\lambda, \alpha)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left\{ -\sigma^2 \frac{(\alpha^2 + p^2)^{\lambda/2} \cos[\lambda \arctan(p/\alpha)] - \alpha^\lambda}{\alpha^{\lambda-2}\lambda(1-\lambda)} + ipx \right\}, \quad (2.45)$$

Em contraste com a gaussiana, que tinha apenas dois, essa tem três parâmetros. O parâmetro λ está associado à proximidade dessa distribuição com a gaussiana, ou seja, quanto mais próximo de 2 é esse parâmetro, mais rápido ela tenderá à uma gaussiana no limite em que z vai ao infinito.

Já o parâmetro σ pode ser interpretado como a variância da distribuição e está intimamente relacionada com o segundo momento, de forma bastante análoga ao caso gaussiano.

Finalmente o parâmetro α está relacionado com o “peso” das caudas da distribuição. Os três parâmetros estão relacionados com a curtose da distribuição (que pode ser obtida, por exemplo, através dos dados) da seguinte forma:

$$\kappa = \frac{(2-\lambda)(3-\lambda)}{\sigma^2 \alpha^2}. \quad (2.46)$$

A integral (2.45) não é analítica e, portanto, para a maioria das aplicações práticas utiliza-se um método numérico para se integrar essa equação. Há, também, uma alternativa ao cálculo da integral da equação (2.45). Essa alternativa consiste em escrever uma expansão em cumulantes, de modo análogo ao que fizemos para a distribuição gaussiana:

$$H(p) = \frac{1}{2}c_2p^2 - \frac{1}{4!}c_4p^4 + \dots, \quad (2.47)$$

que só apresenta termos pares pelo fato dessa expressão ser simétrica. No caso da distribuição assimétrica, teremos que colocar tanto os cumulantes pares quanto os momentos ímpares. Conforme Koponen [13] mostrou, existe a distribuição truncada de Lévy assimétrica, porém não será útil em nosso trabalho e por isso não a introduzimos aqui.

As constantes c_i são chamadas de **cumulantes** e a expansão que fizemos é bastante análoga à expansão de cumulantes para a distribuição gaussiana. Ocorre que, no caso da distribuição normal, temos apenas dois cumulantes (para termos de primeira e segunda ordem, respectivamente). Aqui temos uma série de potências para termos pares. Isso traz novas características e informações para a distribuição que possui uma expansão em cumulantes como essa. Os cumulantes são mostrados a seguir [14]:

$$c_2 = \sigma^2, \quad (2.48)$$

$$c_4 = \sigma^2 (2 - \lambda) (3 - \lambda) \alpha^{-2}, \quad (2.49)$$

⋮

$$c_{2n} = \sigma^2 \frac{\Gamma(2n - \lambda)}{\Gamma(2 - \lambda)} \alpha^{2-2n}. \quad (2.50)$$

Esses cumulantes, ao dependerem dos parâmetros da distribuição, crescem muito rapidamente quando aplicados aos dados reais. Isso faz com que não seja interessante utilizar muitos cumulantes de ordem superior, pois eles capturam informações estatísticas que variam muito rápido, o que não dá para ser extraído dos dados.

Embora seja uma distribuição de variância finita e que segue o teorema do limite central, ela converge muito lentamente à distribuição gaussiana, conforme mostrado em [13].

Para a maioria das aplicações práticas utiliza-se os cumulantes c_2 e c_4 ou, possivelmente, o cumulante seguinte c_6 . Para o caso do nosso trabalho preferimos utilizar a distribuição truncada de Lévy escrita na forma (2.45) e calcular a integral que aparece na expressão numericamente. Essa forma de cálculo nos mostrou ser mais eficiente e mais direta.

A expressão que mostramos como sendo a distribuição truncada de Lévy, equação (2.45), é de enorme importância em análise de dados financeiros, sobretudo na análise de índices de bolsas de valores e na precificação de opções (conforme [15, 16, 17, 18]) e será a expressão chave para o nosso estudo e análise de dados no capítulo 5.

3 Integrais de caminho

3.1 Construção das integrais de caminho

Essa ferramenta foi originalmente introduzida por Feynman [19] em sua tese de doutorado baseando-se num trabalho anterior de Dirac [20]. Na época essa abordagem consistiu em uma técnica alternativa à Mecânica Quântica de Schrödinger. Mais tarde, Feynman e outros cientistas generalizaram essas ideias para as teorias de campos. Hoje se tornou uma ferramenta obrigatória ao teórico de campos. Boas referências para se estudar esse formalismo são as notas de aula do professor Moyses Nussenzveig [21], as notas de aula do professor Armando [22] e o livro de Feynman, Hibbs e Styer [23]. A referência definitiva em integrais de caminho é o livro de H. Kleinert [14].

Suponhamos que uma partícula parte de um ponto A num instante de tempo t_a e quer chegar em um instante de tempo t_b num ponto B. A trajetória que a partícula segue é dada pela função $x(t)$ que está fixa nos extremos $x(t_a) = x_a$ e $x(t_b) = x_b$.

Se a partícula está sujeita às leis clássicas a trajetória real da partícula, denotada por $\bar{x}(t)$, é dada pela primeira variação da ação clássica [23]. Esse é o chamado “princípio de ação mínima”.

Se, por outro lado, a partícula está sujeita às leis quânticas, já não é mais possível afirmar que a trajetória que minimiza a ação é a trajetória real da partícula. Esses conceitos de trajetória real não estão bem definidos em mecânica quântica. Sendo assim nos resta determinar a **probabilidade** da partícula sair no instante de tempo t_a na posição x_a e alcançar a posição x_b no instante de tempo t_b .

Feynman [19] foi o primeiro a perceber que cada trajetória, no campo da teoria quântica, tinha uma fase dada pela própria ação clássica. A seguir, ele conseguiu construir uma soma contínua (portanto, uma integral) que varra todas as trajetórias possíveis da partícula e interpretou essa integral como sendo a probabilidade mencionada acima.

Ele denotou essa probabilidade por $K(b, a)$ muitas vezes denominado de **kernel** (ou

propagador) e mostrou que ela é dada por:

$$K(b, a) = \int_a^b e^{(i/\hbar)S[b,a]} \mathcal{D}x(t), \quad (3.1)$$

a qual passou a ser chamada de **integral de trajetória**, com $S[b, a]$ a ação clássica da partícula. A interpretação do “elemento de integração”, $\mathcal{D}x(t)$, neste caso, difere um pouco do sentido usual na integral de Riemann. No caso atual da integral de trajetória estamos realizando uma soma sobre todas as possíveis trajetórias $x(t)$ que são funções de um parâmetro real t , o tempo. Por essa razão essas integrais também são conhecidas como **integrais funcionais**.

Para trazer mais clareza à notação utilizada e entendimento ao assunto apresentamos, seguindo o viés do livro de Feynman [23], a forma do kernel como integral de trajetória da partícula livre é:

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{3/2} \int \cdots \int \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \epsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i+1})^2 \right\} dx_1 \cdots dx_{N-1}. \quad (3.2)$$

Essa expressão nos mostra que quando ϵ tende a zero, independentemente de qual é ação clássica da partícula, o kernel é um produto infinito de integrais em um número infinito de possíveis trajetórias. No caso da partícula livre, as integrais que aparecem são todas gaussianas. Calculando uma delas, aplicando o produto e depois tomando o limite encontramos:

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im (x_b - x_a)^2}{2\hbar (t_b - t_a)} \right\}. \quad (3.3)$$

Feynman et al mostrou [23] que o kernel satisfaz a equação de Schrödinger portanto serve como uma ferramenta paralela à função de onda para descrever o sistema quântico. Nosso interesse, nas seções seguintes, é utilizar o método das integrais de trajetória para escrever diversas características de interesse em sistemas tanto no equilíbrio quanto fora dele. Esse resultado será fundamental na discussão que segue.

3.2 Matriz densidade

Antes de irmos ao t3pico de nosso maior interesse que 3e o estudo de fen3omenos fora do equil3brio, precisamos primeiramente apresentar alguns conceitos 3teis nessa discuss3o. As pr3ximas se33es se dedicam a fazer uma an3lise geral, apresentando os principais resultados, do que se conhece como a f3sica estat3stica de equil3brio utilizando o formalismo de integrais de caminho.

Da f3sica estat3stica sabemos que a fun33o de parti33o [24] definida por:

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right) = \sum_n e^{-E_n/k_B T}, \quad (3.4)$$

nos d3 importantes informa33es do sistema, como por exemplo a entropia, energia m3dia e os potenciais termodin3micos. Por3m, essa quantidade n3o determina toda a informa33o do sistema quando este est3 no equil3brio termodin3mico (ou em situa33es de quase-equil3brio).

Para descrever o sistema de forma completa precisamos conhecer a chamada **matriz densidade** que 3 definida da seguinte forma:

$$\rho(x_b, x_a) \equiv Z^{-1} \langle x_b | e^{-\beta \hat{H}} | x_a \rangle, \quad (3.5)$$

em que $\beta = 1/k_B T$, sendo $k_B = 1,38065(26) \times 10^{-23} \text{ J/K}$ [25], a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta. Os termos diagonais dessa matriz s3o chamados de **densidade de part3culas** e s3o dados por:

$$\rho(x_a) \equiv Z^{-1} \langle x_a | e^{-\beta \hat{H}} | x_a \rangle. \quad (3.6)$$

Essa defini33o da densidade de part3culas nos permite escrever valores esperados de fun33es da posi33o como sendo:

$$\langle f(\hat{x}) \rangle = \int dx \rho(x) f(x), \quad (3.7)$$

ou seja a densidade de part3culas determina o valor esperado t3rmico de observ3veis locais (observ3veis estes que dependem da posi33o). Caso esse operador tamb3m dependa dos

momentos aí precisaremos utilizar a matriz densidade pois os elementos fora da diagonal passam a ser importantes.

3.3 Fontes externas

Nosso próximo passo na construção que temos feito é incluir a presença de fontes externas ao sistema físico que está em equilíbrio térmico. A possibilidade de se incluir fontes externas em sistemas no equilíbrio é uma propriedade poderosa e importante do formalismo de integrais de caminho que estamos adotando.

Consideraremos um oscilador harmônico forçado cuja ação clássica total é dada por:

$$A = A_\omega + A_j = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{M}{2} (\dot{x}^2(t) - \omega^2 x^2(t)) + x(t) j(t) \right], \quad (3.8)$$

em que $j(t)$ representa a fonte externa que atua no sistema e é acoplada linearmente a posição. A equação de movimento desse sistema é dada por:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = j(t), \quad (3.9)$$

que pelo fato da ação ser quadrática em x e \dot{x} permite separar a ação em um termo clássico e um termo de flutuação [21]:

$$A = A_{j,cl} + A_{0,cl} + A_{fl} = A_{cl} + A_{fl}, \quad (3.10)$$

em que o índice cl indica a parte clássica, fl indica a parte de flutuação e o índice 0 indica que é a ação na ausência de fontes externas. A parte clássica já foi resolvida e se encontra na literatura [14] e [26]. Essa expressão é dada por:

$$A_{cl} = \frac{M\omega}{2 \sin[\omega(t_b - t_a)]} \left[(x_a^2 + x_b^2) \cos[\omega(t_b - t_a)] - 2x_b x_a \right] + \frac{1}{\sin[\omega(t_b - t_a)]} \int_{t_a}^{t_b} dt \{ x_a \sin[\omega(t_b - t)] + x_b \sin[\omega(t - t_a)] \} j(t). \quad (3.11)$$

O segundo termo corresponde a solução da equação não-homogênea que se utiliza da

seguinte função de Green:

$$G_{\omega^2}(t, t') = \frac{\sin[\omega(t_b - t_>)] \sin[\omega(t_< - t_a)]}{\omega \sin[\omega(t_b - t_a)]}, \quad (3.12)$$

em que $t_>$ e $t_<$ denotam, respectivamente, o maior e menor valor de t' e t .

Pode-se, então, escrever o nosso problema como uma trajetória clássica sujeita à uma pequena flutuação mensurada pela ação A_{fl} . Fazendo essa pequena variação da trajetória clássica e calculando as integrais que aparecem com o uso do fato de que a trajetória é nula nas extremidades, encontramos:

$$A_{fl} = -\frac{1}{2M} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' j(t) G_{\omega^2}(t, t') j(t'), \quad (3.13)$$

logo usando a solução para a função de Green teremos uma integral de caminho na presença de uma fonte externa dada por:

$$\begin{aligned} (x_b t_b | x_a t_a)_\omega^j &= \int \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{M}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) + jx \right] \right\} \\ &= \exp \left[\frac{i}{\hbar} A_{cl} \right] F_{\omega, j}(t_b, t_a), \end{aligned} \quad (3.14)$$

com A_{cl} dado pela equação (3.11) e $F_{\omega, j}(t_b, t_a)$ definido por

$$\begin{aligned} F_{\omega, j}(t_b, t_a) &= F_\omega(t_b, t_a) e^{iA_{j, fl}/\hbar} = \sqrt{\frac{M}{2\pi i \hbar}} \sqrt{\frac{\omega}{\sin[\omega(t_b - t_a)]}} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{\hbar M \omega \sin[\omega(t_b - t_a)]} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' \sin[\omega(t_b - t)] \sin[\omega(t' - t_a)] j(t) j(t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Estamos interessados em calcular amplitudes de probabilidade como uma integral de caminho da seguinte forma:

$$(x_b \hbar \beta | x_a 0)_\omega^j = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar \beta} d\tau \left[\frac{M}{2} (\dot{x}^2(\tau) - \omega^2 x^2(\tau)) + j(\tau) x(\tau) \right] \right\}, \quad (3.16)$$

que se obtém da equação (3.14) com a mudança de variáveis:

$$t_a = 0, \quad t_b = \hbar\beta, \quad \tau = -it. \quad (3.17)$$

Seguindo os passos de Kleinert, conforme vemos na seção 3.7 do seu livro [14], obtemos que a função de partição para o oscilador harmônico na presença de uma fonte externa com essa mudança nas variáveis temporais é:

$$Z_\omega[j] = Z_\omega[0] \exp\left(-\frac{1}{\hbar} A_e^j\right), \quad (3.18)$$

com

$$A_e^j = -\frac{1}{4M\omega} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\hbar\beta} d\tau' \frac{\cosh[\omega|\tau - \tau'| - \omega\hbar\beta/2]}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)} j(\tau) j(\tau'), \quad (3.19)$$

obtida a partir da função de Green:

$$G_{\omega^2, e}^P(\tau, \tau') = \frac{1}{2\omega} \frac{\cosh[\omega|\tau - \tau'| - \omega\hbar\beta/2]}{\sinh(\omega\hbar\beta/2)}, \quad |\tau| \in [0, \hbar\beta]. \quad (3.20)$$

3.4 Partícula em um banho térmico

A discussão precedente é importante para podermos construir uma teoria que descreva o acoplamento de uma partícula quântica com um banho térmico. Consideraremos que o banho térmico é composto por um número N de osciladores harmônicos cada um com massa M_i e frequência de oscilação Ω_i como vemos em [27, 28].

É por essa razão que calculamos a função de partição de um único oscilador na presença de fonte externas. Ela é dada por:

$$Z_i \equiv \oint \mathcal{D}X_i(\tau) \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M_i}{2} (\dot{X}_i^2 + \Omega_i^2 X_i^2)\right]\right\} = \frac{1}{2 \sinh(\hbar\beta\Omega_i/2)}, \quad (3.21)$$

e acoplando o banho térmico linearmente a partícula escrevemos a seguinte integral de

caminho para a probabilidade de transição

$$(x_b, \hbar\beta | x_a, 0) = \prod_i \oint \mathcal{D}X_i(\tau) \int_{x(0)=x_a}^{x(\hbar\beta)=x_b} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \sum_i \left[\frac{M_i}{2} (\dot{X}_i^2 + \Omega_i^2 X_i^2) \right] \right\} \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 + V(x(\tau)) - \sum_i c_i X_i x_i \right] \right\} \frac{1}{\prod_i Z_i}. \quad (3.22)$$

Conforme procedemos na seção 3.3 é possível calcular a integral na variável X_i que separa a integral de caminho em um termo de oscilador harmônico na variável da partícula, $x(\tau)$, e um termo de ação para o banho térmico:

$$(x_b \hbar\beta | x_a 0) = \int_{x(0)=x_a}^{x(\hbar\beta)=x_b} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 + V(x(\tau)) \right] - \frac{1}{\hbar} A_{banho}[x] \right\}, \quad (3.23)$$

com:

$$A_{banho}[x] = \frac{-1}{2} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\hbar\beta} d\tau' x(\tau) \alpha(\tau - \tau') x(\tau'), \quad (3.24)$$

e com $\alpha(\tau - \tau')$, exatamente como fizemos na seção anterior, dado por:

$$\alpha(\tau - \tau') = \sum_i \frac{c_i^2}{M_i} G_{\Omega_i^2, e}^P(\tau - \tau') = \sum_i \frac{c_i^2}{2M_i\Omega_i} \frac{\cosh[\Omega_i|\tau - \tau'| - \Omega_i\hbar\beta/2]}{\sinh(\Omega_i\hbar\beta/2)}. \quad (3.25)$$

A expansão em séries de Fourier desse coeficiente pode ser obtida através das **frequências de Matsubara**:

$$\alpha(\tau - \tau') = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_i \frac{c_i^2}{M - i\omega_m^2 + \omega_i^2} \right] e^{-i\omega_m(\tau - \tau')}. \quad (3.26)$$

O termo entre colchetes nessa expressão recebe o nome de α_m , que são os coeficientes da expansão de Fourier. Caso queiramos uma expansão contínua é comum definir a **densidade espectral do banho**:

$$\rho_B(\omega') \equiv 2\pi \sum_i \frac{c_i^2}{2M_i\Omega_i} \delta(\omega' - \Omega_i), \quad (3.27)$$

o que nos permite escrever:

$$\alpha(\tau - \tau') = \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \rho_b(\omega') \frac{\cosh[\omega'|\tau - \tau'| - \omega'\hbar\beta/2]}{\sinh(\omega'\hbar\beta/2)}, \quad (3.28)$$

cujos coeficientes da expansão são dados por:

$$\alpha_m = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \rho_B(\omega') \frac{2\omega'}{\omega_m^2 + \omega'^2}. \quad (3.29)$$

É comum subtrair o primeiro termo, α_0 , e inverter o sinal dos demais para que possamos fazê-los positivo-definidos:

$$\alpha_m = \alpha_0 - g_m = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho_B(\omega')}{\omega'} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 + \omega'^2}\right), \quad (3.30)$$

cuja expansão em Fourier, eq. (3.26), se separa como:

$$\alpha(\tau - \tau') = \alpha_0 \delta^P(\tau - \tau') - g(\tau - \tau'), \quad (3.31)$$

com:

$$g(\tau - \tau') = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_m(\tau-\tau')} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \tau' - n\hbar\beta). \quad (3.32)$$

E aí escrevemos, para o termo $g(\tau - \tau')$

$$g(\tau - \tau') = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(\omega_m) e^{-i\omega_m(\tau-\tau')}, \quad (3.33)$$

cujos coeficientes $g(\omega_m)$ são dados por (tanto discreto quanto contínuo):

$$g(\omega_m) = \sum_i \frac{c_i^2}{M_i} \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 + \Omega_i^2} = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho_B(\omega')}{\omega'} \frac{2\omega_m^2}{\omega_m^2 + \omega'^2}. \quad (3.34)$$

Essa discussão é necessária para que possamos escrever a ação da seguinte forma:

$$A_{banho}[x] = A_{loc} + A'_{banho}[x], \quad (3.35)$$

com A_{loc} um termo de ação que é puramente local e A'_{banho} um termo de banho modificado,

conforme apresentamos a seguir:

$$A'_{banho}[x] = \frac{1}{2} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \int_0^{\hbar\beta} d\tau' x(\tau) g(\tau - \tau') x(\tau'), \quad (3.36)$$

$$A_{loc} = -\frac{\alpha_0}{2} \int_0^{\hbar\beta} d\tau x^2(\tau), \quad (3.37)$$

esse último termo meramente muda a curvatura do potencial $V(x)$ (pois este depende de potências de x e a segunda potência está relacionada com a curvatura do potencial).

Definimos um deslocamento de frequência:

$$M\Delta\omega^2 \equiv -\alpha_0 = -2 \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho_B(\omega')}{\omega'} = -\sum_i \frac{c_i^2}{M_i\Omega_i^2}, \quad (3.38)$$

cuja ação local passa a ser:

$$A_{loc} = \frac{M}{2} \Delta\omega^2 \int_0^{\hbar\beta} d\tau x^2(\tau), \quad (3.39)$$

o que nos permite incorporar o termo da ação local para o potencial definindo um **potencial renormalizado** dado por:

$$V_{ren}(x) = V(x) + \frac{M}{2} \Delta\omega^2 x^2, \quad (3.40)$$

assim a probabilidade de transição pode ser escrita como sendo:

$$(x_b \hbar\beta | x_a 0) = \int_{x(0)=x_a}^{x(\hbar\beta)=x_b} \mathcal{D}x(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2 + V_{ren}(x(\tau)) \right] - \frac{1}{\hbar} A'_{banho}[x] \right\}. \quad (3.41)$$

A função de correlação obtida, $g(\tau - \tau')$, satisfaz a seguinte propriedade:

$$\int_0^{\hbar\beta} g(\tau - \tau') d\tau = 0. \quad (3.42)$$

3.5 Funções de Green de não-equilíbrio

Suponhamos que um sistema físico esteja no equilíbrio termodinâmico e possua um estado caracterizado pelo operador densidade como sendo:

$$\hat{\rho} = \sum_n \rho_n |n\rangle \langle n| = \sum_n e^{-E_n/T} |n\rangle \langle n|. \quad (3.43)$$

Inicialmente iremos desenvolver uma teoria de perturbações para operadores de evolução temporal em situação de não-equilíbrio. Isso é interessante pois nos permite construir um formalismo de integrais de caminho que descreva o comportamento dinâmico de uma partícula em contato com um reservatório térmico. Isso também pode ser estendido para ensembles com muitas partículas.

Em física estatística de não-equilíbrio o problema fundamental a ser resolvido é encontrar a evolução temporal de valores esperados termodinâmicos de produtos de operadores no cenário de Heisenberg, $\hat{\phi}_H$. Consideremos a mais simples ação clássica relativisticamente invariante que descreva um campo físico em D dimensões:

$$A_0 = \int dt d^D x \frac{1}{2} \left\{ [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)]^2 - [\nabla \phi(\mathbf{x}, t)]^2 - m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (3.44)$$

que não é senão a densidade lagrangiana do campo escalar real. Consideraremos que o espaço é dividido em “redes” de espaçamento ϵ num número infinito de pontos \mathbf{x} e no fim dos cálculos fazemos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Aplicando a equação de Euler-Lagrange para essa equação encontramos a equação de Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi}(\mathbf{x}, t) + (-\partial_x^2 + m^2) \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.45)$$

cuja solução pode ser expressa na forma de ondas planas num volume V finito:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{2}{\omega_{\mathbf{p}} V} \left(a_{\mathbf{p}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}} + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{i\omega_{\mathbf{p}} + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right), \quad (3.46)$$

em que:

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (3.47)$$

Definiremos o momento canônico conjugado de forma análoga à mecânica clássica:

$$\Pi(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \quad (3.48)$$

tal que vale as chamadas **relações canônicas de comutação a tempo fixo**:

$$[\Pi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\Pi(\mathbf{x}, t), \Pi(\mathbf{x}', t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0. \quad (3.49)$$

As quantidades termodinâmicas de não-equilíbrio são os valores esperados térmicos. Usando um operador densidade inicialmente arbitrário $\hat{\rho}$ podemos calcular valores esperados em relação a este operador $\hat{\rho}$. Essas médias em estados de $\hat{\rho}$ costumam ser chamadas de $\hat{\rho}$ -averages. Escrevemos:

$$\langle \phi_H(\mathbf{x}, t) \rangle_{\hat{\rho}} = Tr[\hat{\rho} \phi_H(\mathbf{x}, t)], \quad (3.50)$$

$$\langle \phi_H(\mathbf{x}, t) \phi_H(\mathbf{x}', t') \rangle_{\hat{\rho}} = Tr[\hat{\rho} \phi_H(\mathbf{x}, t) \phi_H(\mathbf{x}', t')]. \quad (3.51)$$

Devido à possibilidade de interação entre os campos, escrevemos a hamiltoniana separada em um termo livre e um termo de interação. O termo livre é escrito via transformada de Legendre da densidade lagrangiana (3.44):

$$H_0 \equiv \frac{1}{2} \int d^D x \{ [\phi(\mathbf{x}, t)]^2 + [\nabla \phi(\mathbf{x}, t)]^2 + m^2 \phi^2(\mathbf{x}, t) \}, \quad (3.52)$$

enquanto o termo de interação chamaremos de $H^{int}(t)$. Para se tratar de interações é útil usar um terceiro cenário, paralelo ao de Schrödinger e Heisenberg, conhecido como **cenário de interação**. Nesse cenário o campo interagente é escrito como sendo:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} \phi_H(\mathbf{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)}, \quad (3.53)$$

notemos que os dois campos, interagente e no cenário de Heisenberg, coincidem no instante de tempo t_0 aonde o operador densidade de partículas $\hat{\rho}$ é conhecido. Esse cenário de interação também pode ser usado para escrever o hamiltoniano de interação:

$$H_I^{int} \equiv e^{iHt} H^{int} e^{-iHt}, \quad (3.54)$$

com o hamiltoniano total sendo $H = H_0 + H^{int}$. Essa expressão é muito útil para escrevermos o operador de evolução temporal no cenário de interação:

$$\hat{U}(t, t_0) \equiv \hat{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t dt H_I^{int}(t) \right], \quad (3.55)$$

em que \hat{T} denota o operador de ordenamento temporal que ordena o produto de operadores do que está num maior tempo até o que está no menor tempo. Usando a definição do operador evolução temporal podemos escrever as $\hat{\rho}$ -averages da seguinte forma:

$$\langle \phi_H(\mathbf{x}, t) \rangle_{\hat{\rho}} = Tr \left[\hat{\rho} \hat{U}(t_0, t) \phi(\mathbf{x}, t) \hat{U}(t, t_0) \right], \quad (3.56)$$

$$\langle \phi_H(\mathbf{x}, t) \phi_H(\mathbf{x}', t') \rangle_{\hat{\rho}} = \begin{cases} Tr \left[\hat{\rho} \hat{U}(t_0, t) \phi(\mathbf{x}, t) \hat{U}(t, t') \phi(\mathbf{x}', t') \hat{U}(t', t_0) \right], & t > t'; \\ Tr \left[\hat{\rho} \hat{U}(t_0, t') \phi(\mathbf{x}, t) \hat{U}(t, t') \phi(\mathbf{x}', t') \hat{U}(t, t_0) \right], & t' > t. \end{cases} \quad (3.57)$$

Se a interação esteve atuando desde um tempo grande, digamos $t_0 \rightarrow -\infty$, teremos que reescrever as relações anteriores com o uso de um operador $\hat{S} \equiv \hat{U}(\infty, -\infty)$ da seguinte forma

$$\langle \phi_H(\mathbf{x}, t) \rangle_{\hat{\rho}} = Tr \left[\hat{\rho} \hat{S}^\dagger \hat{T} \hat{S} \phi(\mathbf{x}, t) \right], \quad (3.58)$$

$$\langle \phi_H(\mathbf{x}, t) \phi_H(\mathbf{x}', t') \rangle_{\hat{\rho}} = Tr \left[\hat{\rho} \hat{S}^\dagger \hat{T} \hat{S} \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{x}', t') \right]. \quad (3.59)$$

Definiremos um contorno fechado no plano complexo que consiste numa linha reta paralela ao eixo real que vem desde $-\infty$, ligeiramente acima do eixo, se estende até o infinito, contorna o eixo real e passa por baixo dele. Denotaremos o contorno de cima por t_+ e o de baixo por t_- tal que $x(t_+) = x_+$ e $x(t_-) = x_-$. Abaixo segue uma imagem mostrando esse contorno:

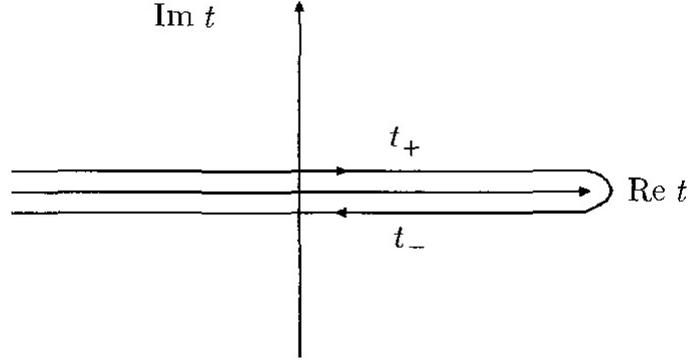


Figura 3.1: Gráfico que mostra o contorno fechado de $-\infty$ até ∞ . Extraído de H. Kleinert, página 1221, [14].

Isso nos permite escrever $\hat{T}_P (\hat{S}^\dagger \hat{S} \phi(\mathbf{x}, t))$ no lugar de $\hat{S}^\dagger \hat{T} (\hat{S} \phi(\mathbf{x}, t))$ com \hat{T}_P o operador de ordenamento de caminho.

É, então, possível construir um funcional gerador para produtos de operadores ordenados no caminho fechado. Sabemos que derivadas funcionais em relação à fonte externa $j(x)$ de termos da forma $\int j(x)\phi(x)$ fazem surgir um campo $\phi(x)$. Então precisamos de uma fonte associada ao campo $\phi(x_+)$ e outra associada ao campo $\phi(x_-)$ ou seja:

$$Z[j_P] = Tr \left(\hat{\rho} \hat{T}_P \hat{S}^\dagger \hat{S} \exp \left\{ i \left[\int d^4x j(x_+) \phi(x_+) + \int d^4x j(x_-) \phi(x_-) \right] \right\} \right), \quad (3.60)$$

em que passamos a usar notação quadridimensional: $x = (\mathbf{x}, t)$. Essa expressão pode ser reescrita no caminho fechado como um todo da seguinte forma:

$$Z[j_P] = Tr \left\{ \hat{\rho} \hat{T}_P \hat{S}^\dagger \hat{S} \exp \left[i \int d^4x j_P(x) \phi_P(x) \right] \right\}. \quad (3.61)$$

O índice P serve para distinguir entre o caminho “acima” e o caminho “abaixo” do eixo real. Como o operador \hat{S} tem que ser unitário podemos escrever a seguinte representação:

$$\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{T}_P \exp \left[-i \int_P dt H_I^{int}(t) \right], \quad (3.62)$$

o que nos dá a seguinte equação para o funcional gerador:

$$Z[j_P] = Tr \left\{ \hat{\rho} \hat{T}_P \exp \left[-i \int_P dt H_I^{int}(t) + i \int d^4x j_P(x) \phi_P(x) \right] \right\}. \quad (3.63)$$

Com isso podemos calcular a função de dois pontos:

$$G_P(x, y) = \frac{\delta}{i\delta j_P(x)} \frac{\delta}{i\delta j_P(y)} Z[j_P] \Big|_{j_P=0} = \text{Tr} \left[\hat{\rho} \hat{T}_P \hat{S}^\dagger \hat{S} \phi_P(x) \phi_P(y) \right], \quad (3.64)$$

o que nos permite concluir que:

$$G_P(x, y) = \left\langle \hat{T}_P \phi_H(x_P) \phi_H(y_P) \right\rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.65)$$

o que nos mostra que a função de dois-pontos é um valor esperado térmico fora do equilíbrio, denotado pela $\hat{\rho}$ -average acima.

Devido às possibilidades de escolhas para x_P (pois pode ser x_+ ou x_-) vemos que a função de Green G_P é, na verdade, uma matriz:

$$G_P(x, y) = \begin{pmatrix} G_{++}(x, y) & G_{+-}(x, y) \\ G_{-+}(x, y) & G_{--}(x, y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} G(x_+, y_+) & G(x_+, y_-) \\ G(x_-, y_+) & G(x_-, y_-) \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

Calculemos as componentes dessa matriz:

$$G_{-+}(x, y) = \langle \phi_H(x) \phi_H(y) \rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.67)$$

a configuração oposta possui ordenamento de caminho também oposto:

$$G_{+-}(x, y) = \langle \phi_H(y) \phi_H(x) \rangle_{\hat{\rho}} = \pm \langle \phi_H(x) \phi_H(y) \rangle_{\hat{\rho}}. \quad (3.68)$$

Sendo o sinal negativo usado em campos fermiônicos ao se restaurar a ordem original. Isso nos mostra que a distinção entre os ramos de cima e de baixo é irrelevante devido ao ordenamento de caminho. Se x e y ficam ou no ramo superior ou no ramo inferior teremos:

$$G_{++}(x, y) = \left\langle \hat{T} \phi_H(x) \phi_H(y) \right\rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.69)$$

$$G_{--}(x, y) = \left\langle \hat{\bar{T}} \phi_H(x) \phi_H(y) \right\rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.70)$$

com $\hat{\bar{T}}$ sendo o operador de anti-ordenamento temporal. Essas definições nos permitem

escrever a seguinte relação:

$$G_{++} + G_{--} = G_{+-} + G_{-+}, \quad (3.71)$$

o que nos mostra que um dos termos da matriz (3.66) não é independente dos demais. As funções de Green relevantes são as **funções de Green avançadas e retardadas** e também os termos de comutação:

$$G^R(x, y) = \Theta(x - y) \langle [\phi_H(x), \phi_H(y)]_{\mp} \rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.72)$$

$$G^A(x, y) = -\Theta(y - x) \langle [\phi_H(x), \phi_H(y)]_{\mp} \rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.73)$$

$$A(x, y) = \langle [\phi_H(x), \phi_H(y)]_{\pm} \rangle_{\hat{\rho}}, \quad (3.74)$$

$$C(x, y) = \langle [\phi_H(x), \phi_H(y)]_{\mp} \rangle_{\hat{\rho}} = G^R(x, y) - G^A(x, y). \quad (3.75)$$

A decomposição de Fourier da função de Green retardada pode ser escrita, através da discretização do espaço, da seguinte forma:

$$G^R(x, y) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{M}{\hbar V} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} G^R(t, t') \Big|_{\Omega = \omega_{\mathbf{p}}}, \quad (3.76)$$

e em forma contínua encontramos:

$$G^R(x, y) = -\Theta(x - x') \int \frac{d^D p}{2\omega_{\mathbf{p}} (2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} 2i \sin[\omega_{\mathbf{p}}(t - t')], \quad (3.77)$$

e de modo análogo teremos

$$A(x, x') = \int \frac{d^D p}{2\omega_{\mathbf{p}} (2\pi)^D} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} 2 \cos[\omega_{\mathbf{p}}(t - t')]. \quad (3.78)$$

Essas funções são tais que temos as seguintes relações

$$G^A(x, x') = \mp G^R(x, x'), \quad A(x, x') = \pm A(x', x), \quad (3.79)$$

$$C(x, x') = \mp C(x', x), \quad G(x, x') = \pm G(x', x)^*, \quad (3.80)$$

e isso nos permite expressar as componentes independentes em termos de G^A , G^R e A .

Procedendo dessa forma encontramos a seguinte matriz:

$$G_P(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A(x, y) + G^R(x, y) + G^A(x, y) & A(x, y) - G^R(x, y) + G^A(x, y) \\ A(x, y) + G^R(x, y) - G^A(x, y) & A(x, y) - G^R(x, y) - G^A(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

É mais conveniente escrever essa expressão na chamada **forma de Keldysh** através da seguinte transformação de similaridade:

$$\tilde{G} = Q G_P Q^{-1}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (Q^T)^{-1}, \quad (3.82)$$

com essa transformação de similaridade \tilde{G} se escreve como:

$$\tilde{G}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & G^A(x, y) \\ G^R(x, y) & A(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

3.6 Teoria de perturbações para funções de Green de não-equilíbrio

Na presente seção iremos desenvolver uma teoria de perturbações de um sistema interagente fora do equilíbrio usando o formalismo que construímos nas seções anteriores, principalmente o formalismo da seção 3.5. Suponhamos que a interação depende apenas dos operadores de campo ou seja:

$$\exp \left[-i \int_P dt H_I^{int}(t) \right] = \exp \left[i \int_P dt \int d^3x L^{int}(\phi_P(\mathbf{x}, t)) \right]. \quad (3.84)$$

Como, por construção, o campo ϕ_P aparece sempre que calculamos uma derivada funcional do funcional gerador, podemos escrever o funcional gerador na seguinte forma:

$$Z[j_P] = \exp \left\{ i A_P^{int} \left[\frac{\delta}{i \delta j_P} \right] \right\} Z_0[j_P], \quad (3.85)$$

com:

$$Z_0[j_P] = Tr \left\{ \hat{\rho} \hat{T}_P \exp \left[i \int_P d^4x \phi_P(x) j_P(x) \right] \right\}, \quad (3.86)$$

a função de partição livre. A função de partição que escrevemos é calculada como uma $\hat{\rho}$ -average, um valor médio entre estados de uma densidade de estados inicial arbitrária. Devido a dificuldade de se calcular esse valor esperado fora do equilíbrio (no qual $\hat{\rho}$ é arbitário) calcular-lo-emos na situação de equilíbrio pois, nesse caso, ele se reduz a um valor esperado térmico. Como os campos são quadráticos escrevemos:

$$Z_0 [j_P] = \exp \left[\frac{1}{2} \int dx dy j_P(x) G_P(x, y) j_P(y) \right], \quad (3.87)$$

isso nos mostra que a corrente j_P tem que ser escrita em uma forma matricial como uma matriz coluna (ou matriz linha) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z_0 [j_+, j_-] &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx dx' \begin{pmatrix} j_+ & -j_- \end{pmatrix} \cdot Q^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & A \end{pmatrix} \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} j_+ \\ j_- \end{pmatrix} \right] \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int dx \int dx' \left[(j_+ + j_-)(x) G^A(x, x') (j_+ - j_-)(x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (j_+ - j_-)(x) G^R(x, x') (j_+ + j_-)(x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (j_+ - j_-)(x) A(x, x') (j_+ - j_-)(x') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

A função de Green G^A é diferente de zero apenas quando $t < t'$. Usando as relações (3.79) e também notando que A é simétrico escrevemos:

$$\begin{aligned} Z_0 [j_+, j_-] &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx \int dx' \Theta(x' - x) \left[(j_+ - j_-)(x) G^R(x, x') (j_+ + j_-)(x') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (j_+ - j_-)(x) A(x, x') (j_+ + j_-)(x') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

O campo de um oscilador, ϕ , depende apenas do tempo e, por isso, as integrais serão apenas integrais temporais. Usando que:

$$A(t, t') = 2\Re[G(t, t')], \quad G(t, t') = \frac{\hbar}{2M\Omega} \frac{\cosh \left[\frac{\Omega}{2} (\hbar\beta - i|t - t'|) \right]}{\sinh \left(\frac{\hbar\Omega\beta}{2} \right)}, \quad (3.90)$$

e recolocando as constantes \hbar e k_B vamos encontrar

$$Z_0 [j_+, j_-] = \exp \left\{ -\frac{1}{2M\Omega\hbar} \int dt \int dt' \Theta(t-t') [-(j_+ - j_-)(t) i \sin[\Omega(t-t')] (j_+ + j_-)(t') + (j_+ - j_-)(t) \coth\left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T}\right) \cos[\Omega(t-t')] (j_+ - j_-)(t')] \right\}. \quad (3.91)$$

3.7 Partícula em um banho térmico no formalismo de integrais de caminho

Um grande mérito das integrais de caminho desenvolvidas por Feynman é a possibilidade de tratar sistemas interagentes e isso possibilitou o desenvolvimento da teoria de campos à temperatura finita [22].

Conforme mencionamos na sessão anterior, o objeto que mede a amplitude de probabilidade entre dois estados distintos é o chamado kernel (ou propagador). Para uma partícula clássica sujeita a um potencial $V(x)$ em uma dimensão, a probabilidade pode ser escrita como:

$$|(x_b t_b | x_a t_a)|^2 = \left| \int \mathcal{D}x(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt \left[\frac{M}{2} \dot{x}^2(t) - V(x) \right] \right\} \right|^2, \quad (3.92)$$

em que já explicitamos a expressão em forma de uma amplitude de transição entre dois estados. Podemos reescrever essa expressão em termos de duas órbitas independentes $x_+(t)$ e $x_-(t)$ a saber:

$$(x_b t_b | x_a t_a) \overline{(x_b t_b | x_a t_a)} = \int \mathcal{D}x_+(t) \mathcal{D}x_-(t) \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int dt \left[\frac{M}{2} (\dot{x}_+^2(t) - \dot{x}_-^2(t)) - (V(x_+) - V(x_-)) \right] \right\}, \quad (3.93)$$

em que a barra horizontal acima indica conjugação complexa. Essa integral pode ser reescrita em termos de um caminho fechado exatamente como fizemos na seção 3.6.

$$(x_b t_b | x_a t_a) \overline{(x_b t_b | x_a t_a)} = \int \mathcal{D}x_P(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_P dt \left[\frac{M}{2} \dot{x}_P^2(t) - V(x_P) \right] \right\}. \quad (3.94)$$

Como fizemos antes vamos supor que o banho térmico é um conjunto de oscilador

harmônicos $\phi_i(t)$ de massa e frequência M_i e Ω_i , respectivamente, todos eles no equilíbrio térmico a uma temperatura T . O acoplamento entre a partícula e o banho é linear tanto em $\phi_i(t)$ quanto em $x_P(t)$ tal que contribuirá para a integral de caminho da equação anterior, eq. (3.94), como um valor esperado térmico:

$$(x_b t_b | x_a t_a) \overline{(x_b t_b | x_a t_a)} = \int \mathcal{D}x_P(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_P dt \left[\frac{M}{2} \dot{x}_P^2(t) - V(x_P) \right] \right\} \times \\ \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{T}_P \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_i c_i \int_P dt \phi_P^i(t) x_P(t) \right] \right\}. \quad (3.95)$$

Os osciladores que compõem o banho térmico são todos independentes entre si, logo:

$$\text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{T}_P \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_i c_i \int_P dt \phi_P^i(t) x_P(t) \right] \right\} = \prod_i \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{T}_P \exp \left[\frac{i c_i}{\hbar} \int_P dt \phi_P^i(t) x_P(t) \right] \right\}, \quad (3.96)$$

Cada fator do lado direito dessa equação é da forma (3.86) com a seguinte identificação $\phi(t) = c_i \phi_i(t) / \hbar$ e também identifiquemos as fontes como sendo: $j_{\pm} = \dot{x}_{\pm}$, o que nos permite escrever a função de partição exatamente como fizemos antes o que nos dará

$$Z_0^b[x_+, x_-] = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar^2} \int dt \int dt' \Theta(t-t') [(x_+ - x_-)(t) C_b(t, t') (x_+ + x_-)(t') \right. \\ \left. + (x_+ - x_-)(t) A_b(t, t') (x_+ - x_-)(t')] \right\}. \quad (3.97)$$

$A_b(t, t')$ e $C_b(t, t')$ podem ser escritos com o uso da densidade espectral:

$$C_b(t, t') = \sum_i c_i^2 \langle [\phi_i(t), \phi_t(t')] \rangle_T = -\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \rho_b(\omega') i \sin[\omega'(t-t')], \quad (3.98)$$

$$A_b(t, t') = \sum_i c_i^2 \langle \{\phi_i(t), \phi_t(t')\} \rangle_T = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \rho_b(\omega') \coth\left(\frac{\hbar\omega'}{2k_B T}\right) \cos[\omega'(t-t')]. \quad (3.99)$$

A função espectral do banho é dada como uma combinação linear das frequências

$$\rho_b(\omega') = 2\pi \sum_i \frac{c_i^2}{2M_i \Omega_i} [\delta(\omega' - \Omega_i) - \delta(\omega' + \Omega_i)], \quad (3.100)$$

essa função é ímpar em ω' . Portanto integrais dessa função multiplicada por cossenos, em intervalos simétricos, são nulas. Por essa razão escrevemos na forma da função espectral

do banho multiplicada por uma exponencial complexa dado que, assim, não se altera a expressão original. Com isso a expressão (3.97) pode ser reescrita em termo de uma **ação efetiva**:

$$Z_0[x_+, x_-] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} A^{FV}[x_+, x_-] \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(A_D^{FV}[x_+, x_-] + A_F^{FV}[x_+, x_-] \right) \right\}, \quad (3.101)$$

em que a ação efetiva, denotada por $A^{FV}[x_+, x_-]$, foi separada em uma parte dissipativa (com subíndice D) e uma parte de flutuação (com subíndice F). A expressão para $Z_0[x_+, x_-]$ é conhecida como **funcional de influência**. Usando esse resultado na nossa expressão (3.95) e escrevendo novamente os dois ramos do caminho explicitamente encontramos

$$\begin{aligned} |(x_b t_b | x_a t_a)|^2 &= \int \mathcal{D}x_+(t) \int \mathcal{D}x_-(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{M}{2} (\dot{x}_+^2 - \dot{x}_-^2) - (V(x_+) - V(x_-)) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} A^{FV}[x_+, x_-] \right\}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Introduzindo uma função auxiliar:

$$\gamma(t - t') \equiv \frac{\Theta(t - t')}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \rho_b(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (3.103)$$

que nos permite escrever:

$$\Theta(t - t') C_b(t, t') = i\hbar M \dot{\gamma}(t - t') + i\hbar M \Delta\omega^2 \delta(t - t'), \quad (3.104)$$

com:

$$\Delta\omega^2 = -\frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\rho_b(\omega')}{\omega'} = -\frac{1}{M} \sum_i \frac{c_i^2}{M_i \Omega_i}, \quad (3.105)$$

o que denominamos de **deslocamento de frequência**. Usando (3.104) em (3.97) e integrando por partes em t' o termo que depende de $\dot{\gamma}$ será:

$$\begin{aligned} A_D^{FV}[x_+, x_-] &= -\frac{M}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' (x_+ - x_-)(t) \gamma(t - t') (\dot{x}_+ + \dot{x}_-)(t') \\ &\quad + \frac{M}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt (x_+ - x_-)(t) \gamma(t - t_b) (x_+ + x_-)(t_a), \end{aligned} \quad (3.106)$$

exatamente como fizemos na seção 3.4, o potencial sofrerá uma mudança apenas de

concavidade devido ao termo do deslocamento de frequência e aí redefinimos o potencial renormalizado e usamos o termo

$$-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt [V_{ren}(x_+) - V_{ren}(x_-)], \quad (3.107)$$

no lugar do termo que depende do potencial. Devido ao fato de ρ_b ser ímpar faremos uma expansão da densidade espectral em potências ímpares de ω' . O primeiro termo será:

$$\rho_b(\omega') \approx 2M\gamma\omega', \quad (3.108)$$

que é a **aproximação ôhmica**. Podemos usar um modelo que possui uma frequência de corte, conhecido como **modelo de Drude**, que possui a seguinte expressão para a densidade espectral:

$$\rho_b(\omega') \approx 2M\gamma\omega' \frac{\omega_D^2}{\omega_D^2 + \omega'^2}. \quad (3.109)$$

Com o auxílio dessa expressão e a seguinte integral tabelada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{a^2}{a^2 + x^2} e^{-ix} = ae^{-ia}, \quad (3.110)$$

podemos calcular $\gamma(t-t')$ a qual colocaremos um índice R para denotar que é uma quantidade retardada. O resultado é

$$\gamma_D^R(t) \equiv \Theta(t) \gamma_{\omega_D} e^{-\omega_D t}, \quad (3.111)$$

No limite da dissipação ôhmica γ_D^R , se torna um pico muito estreito em t , com $t > 0$, podemos escrever $\gamma_D^R(t) \rightarrow \gamma\delta^R(t)$. Assim teremos a ação de dissipação como sendo:

$$A_D^{FV}[x_+, x_-] = -\frac{M}{2} \gamma \int_{t_a}^{t_b} dt [(x_+ - x_-)(\dot{x}_+ + \dot{x}_-)^R] - \frac{M}{2} \gamma (x_+^2 - x_-^2)(t_a), \quad (3.112)$$

o segundo termo é apenas uma mudança na curvatura da ação que pode ser negligenciado. É útil usar a expressão para o banho:

$$A_b(t, t') = 2M\gamma k_B T K(t, t'), \quad (3.113)$$

com

$$K(t, t') = \frac{1}{2M\gamma k_B T} \sum_i c_i^2 \langle \{ \phi_i(t), \phi_i(t') \} \rangle, \quad (3.114)$$

cuja decomposição contínua de Fourier se escreve

$$K(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} K(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} = \frac{\hbar}{4M\gamma k_B T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \rho_b(\omega') \coth\left(\frac{\hbar\omega'}{2k_B T}\right) e^{-i\omega'(t-t')}. \quad (3.115)$$

No limite ôhmico a componente $K(\omega')$ se escreve como:

$$K(\omega') = K^{Ohm}(\omega') \equiv \frac{\hbar\omega'}{2k_B T} \coth\left(\frac{\hbar\omega'}{2k_B T}\right). \quad (3.116)$$

Essa função é tal que valem as propriedades:

$$K(0) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt K(t, t') = 1, \quad (3.117)$$

O uso da função $K(t, t')$ é tal que nos permite escrever a parte de flutuação da ação da seguinte maneira:

$$A_F^{FV}[x_+, x_-] = i \frac{M\gamma k_B T}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' (x_+ - x_-)(t) K(t, t') (x_+ - x_-)(t'), \quad (3.118)$$

em que usamos a simetria de $K(t, t')$ para estender o intervalo e eliminar o termo de função de Heaviside da equação para a ação de flutuação. No limite ôhmico a nossa probabilidade então será escrita como sendo:

$$\begin{aligned} |(x_b t_b | x_a t_a)|^2 = & \int \mathcal{D}x_+(t) \int \mathcal{D}x_-(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{M}{2} (\dot{x}_+^2 - \dot{x}_-^2) - (V(x_+) - V(x_-)) \right] \right. \\ & - i \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{M\gamma}{2\hbar} (x_+ - x_-)(t) (\dot{x}_+ + \dot{x}_-)^R(t) \\ & \left. - \frac{M\gamma k_B T}{\hbar^2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' (x_+ - x_-)(t) K(t, t') (x_+ - x_-)(t') \right\}. \quad (3.119) \end{aligned}$$

Essa é uma integral de caminho a caminho fechado. Eles podem ser entendidos como uma partícula que anda para frente e para trás no tempo. Por isso essa integral é chamada de “**forward-backward path integral**” (lê-se o hífen como um sinal de menos para designar bem essa característica do caminho da partícula). Fazendo duas mudanças

de variáveis:

$$x \equiv \frac{x_+ + x_-}{2}, \quad y \equiv x_+ - x_-, \quad (3.120)$$

teremos finalmente:

$$\begin{aligned} |(x_b t_b | x_a t_a)|^2 = & \int \mathcal{D}x(t) \int \mathcal{D}y(t) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[M \left(-\dot{y}\dot{x} + \gamma y \dot{x}^R \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + V \left(x + \frac{y}{2} \right) - V \left(x - \frac{y}{2} \right) \right] - \frac{M\gamma k_B T}{\hbar^2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' y(t) K(t, t') y(t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

3.8 Equação de Fokker-Planck e equação de Langevin

Consideremos a equação anterior, eq. (3.121), para grandes valores de γT . Então o terceiro termo da eq. (3.121), que corresponde às flutuações de y , assumirá uma forma diferente pois a função $K(t, t')$ possui uma forma conhecida chamada de forma de Drude, apresentada a seguir:

$$K(t, t') = \frac{1}{2\omega_D} e^{-\omega_D(t-t')}, \quad (3.122)$$

isso nos permite expandir o termo de potencial $V(x + \frac{y}{2}) - V(x - \frac{y}{2})$ em torno de $y = 0$ em potências de $y/2$:

$$\begin{aligned} V \left(x + \frac{y}{2} \right) & \approx V(x) + \frac{y}{2} V'(x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{y}{2} \right)^2 V''(x) + \frac{1}{3!} \left(\frac{y}{2} \right)^3 V'''(x), \\ V \left(x - \frac{y}{2} \right) & \approx V(x) - \frac{y}{2} V'(x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{y}{2} \right)^2 V''(x) - \frac{1}{3!} \left(\frac{y}{2} \right)^3 V'''(x), \end{aligned}$$

assim o termo de potencial assume a forma:

$$V \left(x + \frac{y}{2} \right) - V \left(x - \frac{y}{2} \right) \approx y V'(x) + \frac{y^3}{24} V'''(x), \quad (3.123)$$

retendo apenas os dois primeiros termos que não se anulam. Definiremos a quantidade

$$\eta(t) \equiv M\ddot{x}(t) + M\gamma\dot{x}^R(t) + V'(x(t)), \quad (3.124)$$

e nosso termo exponencial da equação (3.121) após uma integração por partes com extremos

fixos ($y(t_b) = y(t_a) = 0$) torna-se

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt y \eta - \frac{M\gamma k_B T}{\hbar^2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' y(t) K(t, t') y(t') \right\}. \quad (3.125)$$

A integral de caminho que aparece é gaussiana em y e por isso pode ser integrada para obtermos:

$$P[\eta] \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\omega} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' \eta(t) K(t, t')^{-1} \eta(t') \right\}, \quad (3.126)$$

com $K(t, t')^{-1}$ matriz inversa de $K(t, t')$.

A equação (3.124) pode ser entendida como uma equação diferencial estocástica a ser resolvida para alguma condição inicial arbitrária $x(t_a) = x_a$ e velocidade inicial $\dot{x}(t_a) = v_a$. A equação diferencial tem um arrasto, $\eta(t)$, que assumimos estar distribuído por uma distribuição de probabilidade gaussiana cujas funções de correlação são dadas por:

$$\langle \eta(t) \rangle_T = 0, \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle_T = \omega K(t, t'). \quad (3.127)$$

Para cada função de ruído, $\eta(t)$, a solução da equação diferencial estocástica nos dará um caminho $x_\eta(x_a, x_b, t_a)$ com posição final $x_b = x_\eta(x_a, x_b, t_b)$ e velocidade final $v_b = \dot{x}_\eta(x_a, x_b, t_b)$, todos eles sendo funcionais de $\eta(t)$. A partir disso podemos calcular a distribuição de probabilidade $P(x_b v_b t_b | x_a v_a t_a)$ ao se somar todos os caminhos possíveis.

Em vez de trabalhar com uma equação diferencial estocástica de segunda ordem pode-se trabalhar com um conjunto de equações diferenciais estocásticas de primeira ordem da forma como segue:

$$M\dot{v}(t) + M\gamma v^R(t) + V'(x(t)) = \eta(t), \quad (3.128)$$

$$\dot{x}(t) = v(t). \quad (3.129)$$

Ambas serão resolvidas com valores iniciais x_a e v_a para a posição e a velocidade, respectivamente. Para uma dada função de ruído $\eta(t)$ a posição final e a velocidade final

tem a seguinte distribuição de probabilidade:

$$P_{\eta}(xvt|x_a v_a t_a) = \delta(x_{\eta}(t - x_a)) \delta(\dot{x}_{\eta} - v_a). \quad (3.130)$$

A probabilidade total pode ser escrita como um valor esperado da equação anterior, eq. (3.130), para cada uma das funções de ruído, na forma como segue:

$$P(xvt|x_a v_a t_a) = \langle P_{\eta}(xvt|x_a v_a t_a) \rangle_{\eta}, \quad (3.131)$$

em que se define o valor esperado de um funcional arbitrário como sendo

$$\langle F[x] \rangle_{\eta} \equiv N \int \mathcal{D}x P[\eta] F[x], \quad (3.132)$$

com N sendo fixado por condições de normalização $\langle 1 \rangle = 1$. Mudando variáveis de x pra η cujo jacobiano funcional é unitário:

$$J[x] \equiv \det \begin{bmatrix} \delta\eta(t) \\ \delta x(t') \end{bmatrix} = \det [M\partial_t^2 + M\gamma\partial_t^R + v''(x(t))] = 1, \quad (3.133)$$

de modo que nossa integral se escreve

$$\langle F[x] \rangle_{\eta} \equiv N \int \mathcal{D}\eta P[\eta] F[x]. \quad (3.134)$$

Podemos entender esse movimento da partícula quântica acoplada ao banho térmico como sendo um movimento clássico perturbado por uma fonte aleatória de correlação temporal de longo alcance. Essa equação toma uma forma diferente no regime superamortecido, dada por

$$\eta(t) \equiv M\gamma\dot{x}(t) + V'(x(t)), \quad (3.135)$$

a **equação superamortecida de Langevin**. Nesse caso a probabilidade pode ser calculada. Com o auxílio da expressão (3.132) teremos o seguinte resultado:

$$P(xt|x_a t_a) = \int \mathcal{D}\eta P[\eta] \delta(\dot{x}_{\eta}(t) - v_a). \quad (3.136)$$

3.9 Integrais de caminho e a distribuição truncada de Lévy

Depois de todas as teorias e cálculos anteriores estamos em condições de demonstrar o resultado mais importante e o cerne de toda essa dissertação. Suponha que o preço de ativos siga uma equação diferencial estocástica da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = r_x + \eta(t). \quad (3.137)$$

Nessa equação, r_x é uma constante determinística, muitas vezes considerada como a taxa de juros livre de risco, e $\eta(t)$ é entendido como uma perturbação ao sistema e a sua natureza é estocástica. O movimento browniano é descrito por uma equação desse tipo cujo termo estocástico está distribuído conforme uma distribuição normal [4, 29].

No nosso caso porém, esse termo já não seguirá mais uma distribuição normal e sim uma distribuição não-gaussiana arbitrária. Nossa única exigência é que $\langle \eta(t) \rangle = 0$ o que pode ser conseguindo, mesmo em casos onde esse valor esperado não se anula, com uma redefinição na constante r_x .

Usando as ideias da seção anterior, podemos escrever a probabilidade de se evoluir de um preço x_a do ativo no instante t_a para um preço x_b do ativo no instante t_b como sendo dado pela equação (3.136)

$$P(x_b t_b | x_a t_a) = \int \mathcal{D}\eta \int \mathcal{D}x \exp \left[- \int_{t_a}^{t_b} dt \tilde{H}(\eta(t)) \right] \delta[\dot{x}(t) - \eta], \quad (3.138)$$

pois agora é a variável η que caracteriza a flutuação do sistema e usamos que:

$$P[\eta] \equiv \exp \left[- \int_{t_a}^{t_b} dt \tilde{H}(\eta(t)) \right]. \quad (3.139)$$

No caso de sistemas físicos em geral \tilde{H} denota o hamiltoniano do sistema escrito em termos da variável de ruído. Porém, para o caso de ativos financeiros, consideraremos que esse é o hamiltoniano de distribuições de probabilidade como, por exemplo, o hamiltoniano da distribuição truncada de Lévy ou qualquer outra distribuição de probabilidade geral.

Podemos expressar o funcional delta de Dirac em termos de uma integral de caminho de Fourier (um cálculo análogo ao feito para a função delta de Dirac usual) e aí encontramos:

$$P(x_b t_b | x_a t_a) = \int \mathcal{D}\eta \int \mathcal{D}x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi} \exp \left\{ \int_{t_a}^{t_b} dt [ip(t)\dot{x}(t) - ip(t)\eta(t) - \tilde{H}(\eta(t))] \right\}, \quad (3.140)$$

a integral em $\eta(t)$ é simplesmente a transformada inversa de Fourier do hamiltoniano ou seja

$$P(x_b t_b | x_a t_a) = \int \mathcal{D}x \int \frac{\mathcal{D}p}{2\pi} \exp \left\{ \int_{t_a}^{t_b} dt [ip(t)\dot{x}(t) - H(p(t))] \right\}. \quad (3.141)$$

Quando somamos sobre todos os valores de x para extremos fixos teremos um momento único em todos os caminhos (portanto a integral não será mais de caminho e sim uma integral simples em p). Isso nos dará um valor constante para p e a integral dentro da exponencial se escreve:

$$\int_{t_a}^{t_b} dt [ip(t)\dot{x}(t) - H(p(t))] = ip(x_b - x_a) - (t_b - t_a) H(p), \quad (3.142)$$

pois p é fixo e $x(t_b) = x_b$ e $x(t_a) = x_a$. Inserindo isso em (3.141) encontramos

$$P(x_b t_b | x_a t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp [ip(x_b - x_a) - (t_b - t_a) H(p)]. \quad (3.143)$$

Para uma distribuição truncada de Lévy, eq. (2.44), a integral acima não é senão a transformada inversa de Fourier da função característica da distribuição com apenas uma mudança no parâmetro σ^2 e para variáveis da diferença de preços. Com isso chegamos no importante resultado que é o cerne desse trabalho:

$$P(x_b t_b | x_a t_a) = L_{\sigma^2(t_b - t_a)}^{(\lambda, \alpha)}(x_b - x_a), \quad (3.144)$$

Pode-se argumentar que esse resultado é óbvio em se tratar de uma distribuição de probabilidade, mas isso não é verdade. Em geral, como o que fizemos no capítulo 2, estamos tratando de distribuições de probabilidade que não evoluem no tempo e, por isso, a distribuição no espaço dos x é simplesmente a transformada de Fourier inversa da função característica.

Aqui a situação é um pouco diferente: estamos com uma distribuição de probabilidade que evolui no tempo e é descrita por uma equação diferencial estocástica. Quando ambos os extremos temporais e espaciais estão fixos e considerando o hamiltoniano de uma distribuição de probabilidade mais geral que a normal, encontramos a equação (3.144). Toda a discussão do presente capítulo está voltada para se demonstrar essa relação de forma contundente. Veremos no capítulo 5 a tamanha importância desse resultado.

Mais detalhes sobre esses pontos podem ser encontrados no artigo do Kleinert [30] ou em seu livro de integrais de caminho [14].

4 Revisão de conceitos de economia

Esse capítulo, significativamente introdutório, tem a intenção de apresentar conceitos comuns à teoria econômica clássica e, sobretudo, apresentar um método tradicional de previsão dos retornos dos índices financeiros para usá-los como referência para nossos cálculos utilizando as ferramentas de integrais de caminho que desenvolvemos no capítulo anterior, capítulo 3.

4.1 Mercados eficientes

Um dos conceitos chaves em economia quando se trata de mercados financeiros é o conceito de **mercado informacionalmente eficiente**. Essa hipótese relaciona a possibilidade de se conseguir retornos acima (ou abaixo) da média do mercado com a informação histórica que o investidor dispõe. Essa hipótese possui três formas [31]

1. Mercado eficiente no sentido informacional forte é aquele mercado cujos preços refletem todas as informações disponíveis sobre ele, inclusive informações privilegiadas e dados históricos;
2. Mercado eficiente no sentido informacional semi-forte significa que o mercado absorve de forma bastante rápida as informações, porém absorve somente as informações divulgadas publicamente;
3. Mercado eficiente no sentido informacional fraco significa que o mercado só absorve rapidamente as informações oriundas dos dados históricos.

Em outras palavras mercados eficientes no sentido forte **não** permitem obter ganhos consistentes acima da média do mercado. Analogamente ao caso da física seria como um sistema termodinâmico em equilíbrio térmico: não é possível retirar qualquer trabalho útil dele.

Já os mercados eficientes no sentido semi-forte permitem-se obter ganhos consistentemente maiores que a média do mercado se se dispõe de alguma forma de informação

privilegiada. Seria análogo ao caso de sistemas termodinâmicos em situações de quase-equilíbrio.

Finalmente os mercados eficientes no sentido informacionalmente fraco são aqueles em que é possível obter ganhos acima da média com informações divulgadas publicamente, demonstrativos contábeis ou informação privilegiada. É caso análogo a um sistema físico fora do equilíbrio: pode-se retirar trabalho útil, modificar número de partículas e etc.

As ideias de mercado eficiente se baseiam em um outro ponto importante, tratado a seguir: a arbitragem.

4.2 Possibilidade de arbitragem

Suponha que um indivíduo possua um imóvel avaliado em R\$ 20.000,00 e pretenda vendê-lo por R\$ 5000,00. Se o comprador deste imóvel perceber que é possível comprar esse imóvel mais barato e vendê-lo mais caro ele estará aí interessado na compra. Suponha, por outro lado, que esse comprador consegue retirar um empréstimo no valor exato de R\$ 5.000,00.

Sendo assim o comprador retira o empréstimo, compra o imóvel e, de alguma forma, consegue revendê-lo por R\$ 20.000,00. Assim ele paga o empréstimo que pegou e auferir um lucro de R\$ 15.000,00 sem incorrer em qualquer risco.

Essa situação hipotética que construímos, principalmente devido ao fato que o comprador do imóvel auferir lucro certo com probabilidade zero de perder dinheiro, corresponde a um caso do que chamamos de **arbitragem**. Quando surge uma situação em que é possível agir dessa forma damos o nome de **possibilidade de arbitragem**.

A hipótese de mercados eficientes, apresentada na seção anterior, está intimamente ligada a esses conceitos e veremos isso melhor agora.

Suponha que um investidor em particular possua informação privilegiada sobre um determinado ativo de uma determinada empresa. Esse investidor poderá usar essa informação a seu favor para auferir lucro (embora, deixemos claro, isso corresponde ao crime de “insider trading”, aqui estamos apenas levantando uma situação hipotética). Se o mercado em que esse investidor atua for eficiente no sentido forte ele não conseguirá obter lucro consistentemente acima da média de forma alguma.

Em mercados eficientes no sentido informacional forte todas as possibilidades de arbitragem são rapidamente aproveitadas pelos investidores retornando o sistema todo para um certo “equilíbrio” de preços. Esse investidor hipotético que mencionamos só conseguirá auferir lucro em mercados eficientes no sentido semi-forte e no sentido fraco.

Por último, para encerrar essa discussão inicial, é digno de nota que a hipótese de mercado eficiente menos restritiva possível é a hipótese fraca. A hipótese mais restritiva é a hipótese forte. Pode-se encontrar mais detalhes a respeito dessas ideias nas referências [32, 33, 31].

4.3 Como o índice Ibovespa e DJIA são calculados?

O índice Ibovespa, construído desde 1968 e mantido até os dias atuais, é o principal índice de medida do desempenho da bolsa brasileira como um todo. Teve sua metodologia de cálculo modificada em 11 de setembro de 2013 e implementada em duas partes em janeiro e maio de 2014, respectivamente.

Analogamente a ele, porém em um mercado desenvolvido, existe o índice industrial Dow Jones (DJIA, “Dow Jones Industrial Average”, na sigla em inglês) o qual iremos analisar mais para frente nesse texto.

Esse índice tenta capturar o que acontece na bolsa como um todo através das variações de um conjunto de companhias bem menor do que aquelas que são de fato negociadas no mercado à vista.

Atualmente ele é composto de 59 companhias, dos mais variados segmentos. Essa estrutura é comumente chamada de “composição do índice” ou, ainda, de “carteira teórica Ibovespa”. Através das variações que ocorrem nas ações destas 59 companhias é que o índice da bolsa como um todo é medido.

Essa característica do índice é importante de ser notada pois ela serve para evitar o custo e o trabalho de se avaliar todas as 450 companhias cotadas na Bovespa ao passo que se pode avaliar apenas 59 companhias que representam, no caso da medida desse índice, todo o mercado.

Os critérios usados pela Bovespa para incluir ou não determinadas empresas na composição de seu índice são estabelecidos no “Manual de definições e procedimentos dos

índices da BM&F Bovespa” disponível em [34].

Sua forma de cálculo é relativamente simples e se vale da seguinte expressão [34]:

$$I_t = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N P_t^i Q_t^i, \quad (4.1)$$

em que I_t é o valor do índice Ibovespa no instante t , α é um parâmetro redutor para adequar os valores das ações das companhias ao valor de exibição do índice, P_t^i é o preço da i -ésima ação no instante t e Q_t^i é a quantidade presente na carteira teórica da i -ésima ação no instante t .

A expressão (4.1) nos mostra que o índice é calculado como uma soma ponderada dos preços das ações que compõem o índice pela quantidade que elas são consideradas nessa composição. O resultado dessa soma divide-se por um parâmetro divulgado e estabelecido pela própria BM&F Bovespa.

Não mencionamos muito a respeito da história do índice Dow Jones e seu método de cálculo por duas razões: primeira, nosso objetivo principal é analisar o índice brasileiro; segunda, a forma como o índice brasileiro foi construído é muito similar ao índice norte-americano e, portanto, a forma de cálculo do DJIA se assemelha muito ao do Ibovespa.

Porém é digno de nota duas considerações: o índice DJIA só possui ativos de indústrias americanas de grande porte e o índice Ibovespa inclui outros tipos de empresas não apenas de característica industrial e o índice DJIA possui dados desde anos anteriores à 1900 enquanto que o Ibovespa possui dados do ano 1968 em diante.

4.4 Previsão de índices usando séries temporais

É muito comum interpretar-se os retornos de um índice financeiro, por exemplo índice Ibovespa, como sendo uma **série temporal**. Entende-se por série temporal uma sucessão de dados, tomados à medida que o tempo passa, e dispostos em ordem cronológica (do mais antigo ao mais atual).

Assume-se, também, que uma série temporal possua uma componente estocástica que gera dados aleatórios. Além disso os dados de uma série temporal têm que ser organizados cronologicamente, onde a ordem em que os dados ocorreram é importante.

Uma primeira forma de se analisar dados financeiros é pressupor que os retornos dos índices se comportam como uma série temporal e então analisar essa série com os métodos usuais de análise de séries temporais, como por exemplo [35, 36, 37].

4.4.1 Médias móveis simples

O mais simples modelo que encontramos a respeito da previsão de séries temporais são os modelos baseados no que se chama **médias móveis**. Para entendermos como uma média móvel funciona suponha que tenhamos uma série temporal com N subconjuntos de dados dessa série. O primeiro elemento da média móvel é a média aritmética do primeiro subconjunto. O segundo elemento é a média aritmética do primeiro conjunto, subtraindo-se seu último elemento e adicionando-se o primeiro elemento do subconjunto seguinte. Assim o método se segue até completar todos os subconjuntos da série.

Em geral, em análises de índices, utilizam-se subconjuntos de lapsos temporais. Por exemplo, em dados diários, utilizam-se médias móveis de 5, 10, 20, 50 ou 100 dias. Dependendo do tamanho da média móvel utilizada ela poderá servir para perceber resultados de longo prazo ou suavizar flutuações de curto prazo.

Embora seja um método simples e facilmente implementável ele não é método mais usado nas previsões dos retornos de índices de ações. Em geral utilizam-se variações desse método, aos quais apresentamos a seguir.

4.4.2 Médias móveis autorregressivas

Esses métodos, baseados nos métodos de médias móveis, também se baseiam em métodos regressivos que são aqueles que levam em conta os dados anteriores aos dados em estudo (daí o nome de regressivos). Geralmente os dados anteriores são dados conhecidos (e independentes entre si) e quer-se estudar o impacto desses dados com os dados que são desconhecidos (e dependentes).

Nessa família de métodos talvez o mais comum (juntamente com suas variantes), e o mais usado na previsão de índices financeiros, é o método de Box-Jenkins [38, 39, 40], também conhecido pelo seu acrônimo **ARMA**, em inglês, conhecido em português pelo nome de métodos autorregressivos de médias móveis.

Esse método combina as ideias de médias móveis com as técnicas de autorregressão. Um método $ARMA(p, q)$ utiliza os p valores anteriores na análise de regressão e a média móvel obtida a partir dos últimos q valores. Há certas complicações nesse método como, por exemplo, a exigência da dependência linear entre os dados e a exigência da série temporal ser estacionária que são aquelas que flutuam ao redor de uma mesma média ao longo do tempo.

Esse último ponto é bastante complicado de se aplicar na previsão de índices de ações. O valor médio da cotação do índice, como o caso do Ibovespa, varia ao longo do tempo. Desde 1968 até os dias atuais a média do índice tomado diariamente cresceu cerca de 15 ordens de grandeza.

Por essa razão é bastante utilizado, também, o método **ARIMA** conhecido em português como métodos autorregressivos integrados de médias móveis. A diferença desse método para o anterior é que, agora, utilizam-se diferenças de preços e não os preços em si mesmos como anteriormente.

Pode-se interpretar essa diferença de preços como sendo uma discretização da ideia de derivada e, ao se considerar todo o conjunto de dados, estamos “integrando”, no sentido do cálculo integral, todos os dados. Essa é a razão do nome do método. Esses métodos são denotados por $ARIMA(p, d, q)$ em que temos p valores autorregressivos, d diferenças de preços ou valores e q últimos valores usados para médias móveis.

Esses modelos são muito baseados em processos estocásticos, que estão por trás da construção de séries temporais, e a maioria deles assumem a hipótese de normalidade dos dados: que os dados do índice que se quer modelar (no nosso caso, o Ibovespa) segue uma distribuição normal.

4.5 Previsão de índices usando a distribuição normal

Conforme mencionamos, a hipótese de normalidade dos retornos do índice Ibovespa é muito usada e, por essa razão, estamos interessados em analisar os dados sob essa abordagem. Embora as abordagens de médias móveis sejam bastante rebuscadas e forneçam bons resultados, nosso objetivo com esse texto não é fornecer aplicações desses métodos. Nesse trabalho estamos mais interessados em analisar os fundamentos das teorias econômico-

financeiras, sobretudo em seu aspecto probabilístico. E é para lançar novas luzes sobre esses assuntos, que nos baseamos em teorias de fenômenos de não-equilíbrio da Física.

Assim como um primeiro modelo probabilístico de descrição dos dados do Ibovespa assumimos que os retornos diários do índice seguem uma distribuição de probabilidades. Isto é, seja I_t a cotação do índice Ibovespa tempo t . A variável aleatória:

$$x_t = \log I_{t-1} - \log I_t, \quad (4.2)$$

está distribuída conforme uma distribuição normal.

Seguindo essa ideia podemos obter os dados do Ibovespa, desde 1968 até 2016, através do site [41] e calcular os retornos logarítmicos diários dessas cotações. Utilizaremos uma distribuição normal com média nula e variância $\sigma = 0,399$ que ajusta-se bem, ao menos, aos pequenos retornos diários. A distribuição de probabilidade será, então:

$$f(x_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_t^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.3)$$

aplicando essa distribuição para os retornos x_t diários encontramos o seguinte gráfico:

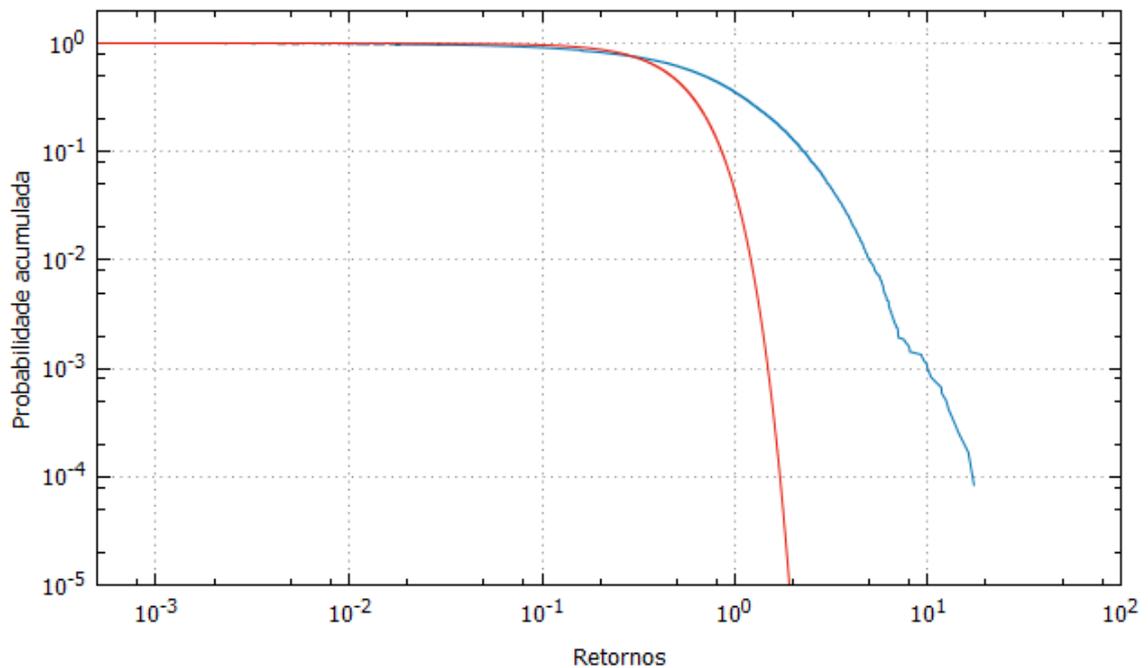


Figura 4.1: Ajuste dos dados do índice Ibovespa entre os anos de 1968 e 2016 usando um programa próprio do software Wolfram Mathematica[®]. Gráfico gerado usando o software Gnuplot[®]. O gráfico em azul são os dados do índice e o gráfico em vermelho são os dados do nosso ajuste gaussiano.

Embora o ajuste seja bom para pequenos valores dos retornos diários ele é ruim para grandes valores dos retornos diários. Veremos, mais à frente, uma justificativa para a ocorrência dessa diferença e um argumento a favor do método baseado em integrais de trajetória.

Para finalizar esse capítulo queremos calcular o quão bem o nosso ajuste concorda com os dados reais. Uma forma de fazer isso é construir a variância do erro cometido entre o ajuste aqui feito e os dados reais.

Para chegar nisso primeiramente definimos o erro absoluto, que consiste no módulo da diferença entre a probabilidade de ajuste para a probabilidade real dos dados, no i -ésimo valor da cotação índice. Matematicamente escrevemos:

$$E_i = |P_{\text{ajuste},i} - P_{\text{dados},i}|, \quad (4.4)$$

e em seguida calculamos a variância desses dados, ou seja, calculamos a média aritmética dos erros absolutos ao quadrado:

$$S = \sum_{i=0}^N \frac{E_i^2}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N |P_{\text{ajuste},i} - P_{\text{dados},i}|^2, \quad (4.5)$$

Esse procedimento é análogo à medida do erro em ajustes numéricos [42]. Usando os dados reais do mercado para a probabilidade $P_{\text{dados},i}$ e usando nosso ajuste gaussiano, calculamos a variância da diferença dos dados e encontramos:

$$S = 0,109. \quad (4.6)$$

Veremos no capítulo seguinte que esse valor da variância do erro cometido no ajuste é bastante grande em comparação ao ajuste utilizando a distribuição truncada de Lévy.

5 Previsão de índices de ações

5.1 Introdução a previsão de índices usando integrais de caminho

Nesse capítulo iremos aplicar o resultado fundamental que obtivemos na seção 3.9: a probabilidade de se partir de um ponto x_a no instante de tempo t_a e alcançar um ponto x_b no tempo t_b é dado pela distribuição truncada de Lévy da diferença $x_b - x_a$ e com uma variância que varia no tempo.

Esse resultado é absolutamente fundamental em nossas análises (o que ficará claro em breve) e só pode ser obtido no contexto das integrais de caminho em sistemas fora do equilíbrio termodinâmico.

O mais interessante disso é que se pode usar essa abordagem para analisar qualquer grandeza que possa ser medida e atribuir esses valores a x_b e x_a . A expressão (3.144) nos dará a probabilidade do sistema físico, sujeito à um processo truncado de Lévy, evoluir de x_a no instante de tempo t_a para x_b no instante de tempo t_b . Em outras palavras: teremos a probabilidade de que o processo estocástico se realize entre esses dois pontos extremos.

Particularizando essa abordagem para os preços de ativos, como no nosso caso o preço de ações cotadas em bolsas de valores, podemos utilizar essa expressão para calcular a probabilidade de ocorrências de determinadas diferenças de preços e comparar essa probabilidade obtida teoricamente com os dados empíricos obtidos a partir do mercado em análise.

Em nosso trabalho, fundamentalmente, analisaremos dois índices importantes: o índice DJIA e o índice Ibovespa. O interesse em se analisar os dois índices é para podermos comparar as previsões obtidas aqui, num mercado ainda em desenvolvimento, com um mercado estrangeiro (que no caso é o norte-americano) já desenvolvido. Veremos que o método de previsão funciona em ambos os casos.

5.2 Método para disposição dos dados

Estamos interessados em verificar se a distribuição truncada de Lévy (2.45), apresentada no capítulo 2, serve como um bom ajuste dos dados empíricos de cotações de índices financeiros.

Para o caso deste trabalho usaremos o principal índice da Bolsa de São Paulo, o Ibovespa. O primeiro passo consiste em obter os dados através do site oficial da Bovespa, [41]. Esses dados estão dispostos em todos os dias do ano, separados anualmente, desde 1968 até 2016.

Os dados foram todos compilados em uma única planilha Excel a partir do qual os dados são trabalhados separando-se o período de interesse em uma nova planilha. Mencionaremos novamente o período de interesse e os dados quando formos apresentar os gráficos referentes aos índice Ibovespa na seção 5.4.

Nessa nova planilha precisamos calcular a diferença diária dos logaritmos das cotações do índice:

$$x = \log(I_t) - \log(I_{t-1}), \quad (5.1)$$

em que t é medido em dias e I_t é a cotação do índice Ibovespa no dia t . Com essas informações calculamos os chamados **retornos normalizados**:

$$y = \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma_0}, \quad (5.2)$$

sendo σ_0 a variância de x e $\langle x \rangle$ corresponde ao valor médio da diferença dos logaritmos dos retornos diários. A seguir apresentaremos um trecho dessa tabela que mostra como os dados estão dispostos:

Cotação do Ibovespa	x	y
46206,56	0,00010942	0,14624042
47065,01	0,00799452	0,88526574
46883,57	-0,0016774	0,37999743
46517,03	-0,0034087	0,60646995
46846,87	0,00306860	0,24087144
47247,80	0,00370101	0,32360158

Tabela 5.1: Trecho da tabela com a disposição dos dados do índice Ibovespa de 1968 a 2016. Apresenta-se dados diários, tomados sequencialmente ao longo dos dias, em que se calcula a diferença de logaritmos de retornos, x , através da equação (5.1) e calcula-se os valores de retornos normalizados, y , através da equação (5.2). Essa tabela apresenta apenas um trecho da tabela que inclui todos os dados reais do mercado.

Obtendo os retornos normalizados diários (que chamamos de y , equação (5.2)) podemos dispô-los em ordem crescente e, em seguida, calcular uma probabilidade acumulada empírica à direita, ou seja, contar quantos valores são menores do que um dado valor do retorno diário e dividir o resultado dessa contagem pelo total de valores. Feito isso teremos associado à cada um dos retornos diários (agora ordenados do menor para o maior) a probabilidade deles ocorrerem.

5.3 Ajuste para o índice DJIA

Utilizaremos dados de cotações diárias do índice industrial Dow Jones de 02 de janeiro 1900 a 30 de dezembro de 2016 compreendendo um total de 29461 pontos obtidos em [43]. Os retornos normalizados diários são calculados conforme procedimentos da seção 5.2. O resultado desses cálculos são dispostos em uma planilha Excel a qual apresentamos um trecho a seguir

Cotação do Dow Jones	x	y
276,50	-0,000408186	0,09941073
275,87	-0,000990661	0,21715622
273,53	-0,003699509	0,76474192
271,65	-0,002995256	0,62237921
272,11	0,0007347930	0,13163912
271,02	-0,001743161	0,36927198

Tabela 5.2: Trecho da tabela com a disposição dos dados do índice Dow Jones de 1900 a 2016. Apresenta-se dados diários tomados sequencialmente ao longo dos dias com o respectivo cálculo para a diferença de logaritmos, eq. (5.1), e os retornos normalizados diários, eq. (5.2). Essa tabela apresenta apenas um trecho da tabela que inclui todos os dados reais do mercado.

Fizemos o ajuste da seguinte forma: calculamos, através dos dados normalizados reais, probabilidade acumulada à direita e dispomos esses dados em uma tabela cujos valores no eixo horizontal são os retornos normalizados diários e os valores no eixo vertical são as probabilidade associadas a cada retorno.

Procedemos fazendo um cálculo iterativo usando o software Wolfram Mathematica[©] em que calculamos a probabilidade de termos os mesmos retornos diários que observamos no mercado real com a diferença de agora usarmos a função teórica dada por (3.144). Também associamos a esses dados uma tabela equivalente à anterior cuja única diferença é que agora temos os dados calculados a partir do nosso modelo.

Dispusemos os dados através de um gráfico em escala log-log como esse que podemos ver abaixo:

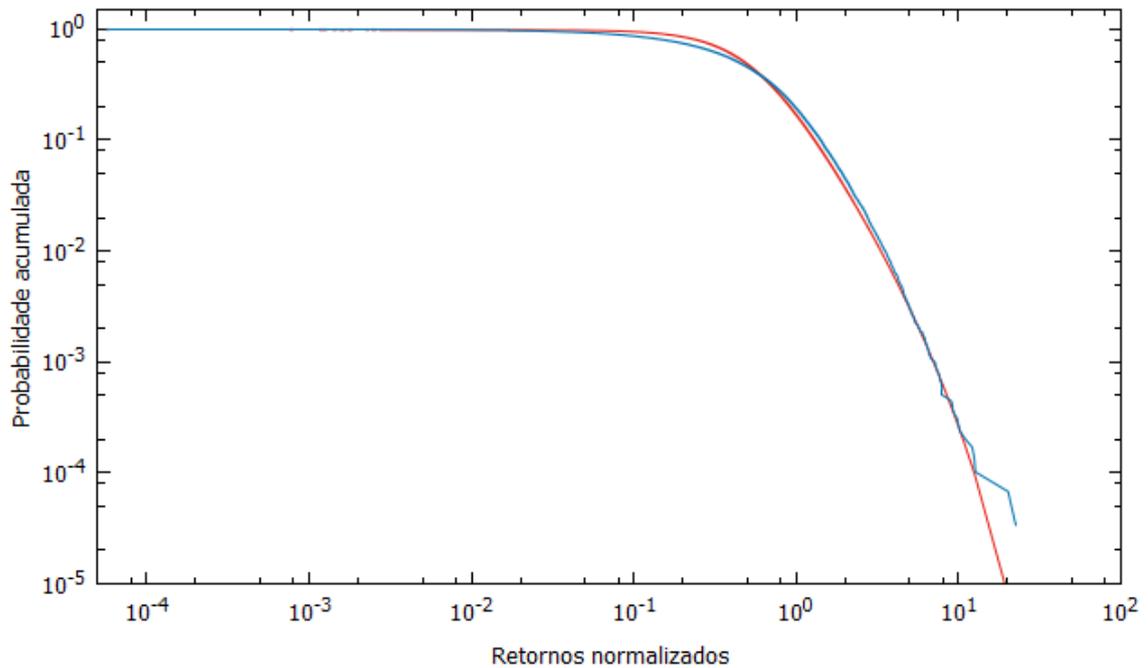


Figura 5.1: Gráfico referente aos dados Dow Jones de 1900 a 2016 usando o nosso modelo como ajuste. Gráfico gerado através do software Gnuplot[©]. Os dados em vermelho correspondem ao nosso ajuste calculado através de um programa do Wolfram Mathematica[©] e a curva em azul corresponde aos dados do mercado.

Esse gráfico foi obtido usando a expressão (3.144) com os parâmetros:

α	λ	σ	S
0,2	1,06	1,2	0,001313

Tabela 5.3: Tabela com os parâmetros do ajuste dos dados do índice industrial Dow Jones. Parâmetros ajustados, para o índice DJIA, através da equação (3.144). O valor de S corresponde à quão bem o modelo se ajusta aos dados, conforme eq. (4.5).

Vemos que o ajuste dos dados é muito próximo aos dados reais obtidos do mercado. Isso confirma o poder do método e sua capacidade de ajustar os retornos diários que ocorrem em um índice econômico.

Para verificar, também, a proximidade que nossa previsão se encontra dos dados é possível medir a variância do erro cometido nessa aproximação, conforme a equação (4.5). Para o caso do nosso método aplicado ao índice DJIA encontramos: $S = 0,001313$ conforme consta na tabela 5.3, que corresponde a um valor baixo para o erro cometido nesse ajuste.

5.4 Ajuste para o índice Ibovespa

Por se tratar de um mercado já bem consagrado e um país em desenvolvimento podemos ser levados a pensar que esse método de análise de dados usando a distribuição truncada de Lévy não seja válido para mercados de países emergentes como o Brasil.

Utilizaremos dados de cotações diárias do índice brasileiro que começam em 02 de janeiro de 1968 até 30 de dezembro de 2016 compreendendo um total de 11927 pontos. Usando os mesmos métodos da seção anterior, a mesma forma de dispor os dados, obtemos o seguinte gráfico:

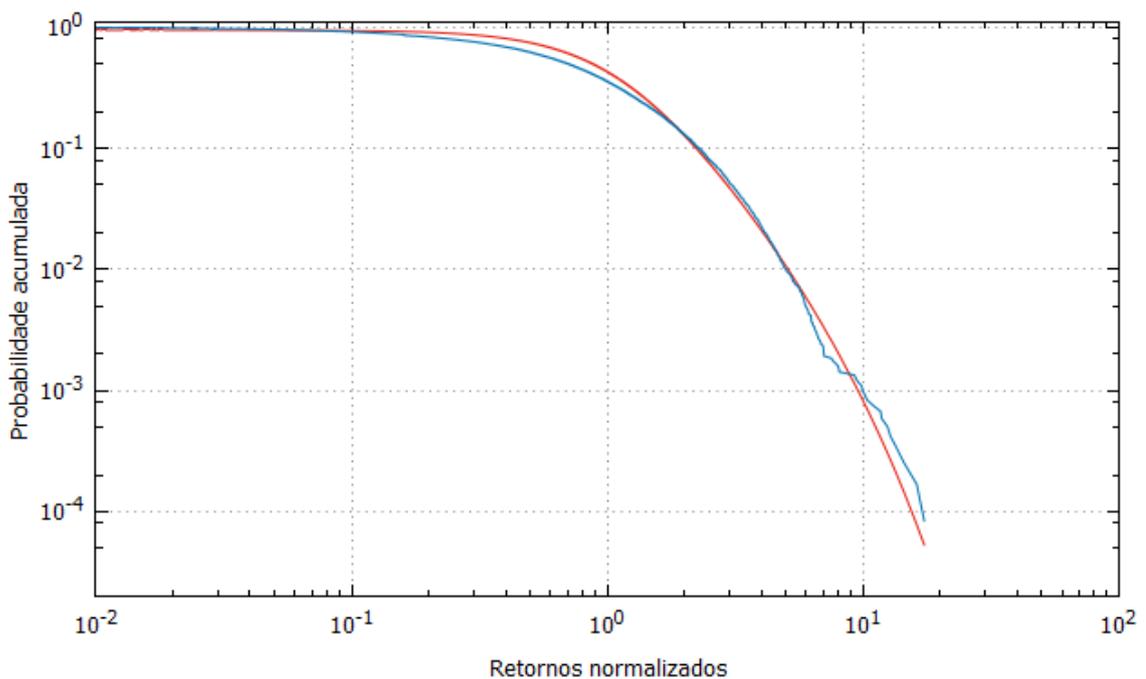


Figura 5.2: Gráfico referente aos dados do índice Ibovespa de 1968 a 2016 usando o nosso modelo como ajuste. Gráfico gerado através do software Gnuplot[©]. O gráfico em azul corresponde aos dados do mercado e os dados em vermelho correspondem ao nosso ajuste cujos cálculos foram feitos através de um programa no Wolfram Mathematica[©].

Portanto nosso método também funciona (claro que utilizando parâmetros diferentes) para o mercado de ações brasileiro. Isso é mais uma forma de ilustrar o poder do método: serve para descrever igualmente bem mercados já desenvolvidos e mercados emergentes.

Nesse gráfico fizemos o ajuste via a distribuição truncada de Lévy usando os seguintes parâmetros:

α	λ	σ	S
0,216	1,086	1,63	0,0025

Tabela 5.4: Tabela com os parâmetros do ajuste dos dados do índice Ibovespa. Parâmetros ajustados, para o índice Ibovespa, através da equação (3.144). O valor de S corresponde à quão bem o modelo se ajusta aos dados, conforme eq. (4.5).

Outros autores já obtiveram resultados semelhantes a esse porém se valendo de métodos ligeiramente diferentes conforme podemos ver em [15, 18]. Nesses trabalhos os autores se valem de um forma diferente para a distribuição truncada de Lévy e já assumem de forma imediata que os retornos diários dos índices se comportam como uma distribuição desse tipo. Os resultados obtidos por esses autores e os nossos são equivalentes e confirmam os que obtivemos.

Analisando o resultado da tabela 5.4 vemos que o ajuste usando o método da distribuição truncada de Lévy é bem mais preciso que o método gaussiano pois, no caso gaussiano, encontramos um parâmetro S , eq. (4.6), cerca de 100 vezes maior que o ajuste atual.

5.5 Relação entre ambos ajustes

É interessante explorar a relação que há entre ambos ajustes: o do Dow Jones e o do Ibovespa. Podemos plotar, através de um processo iterativo realizado com o auxílio do software Wolfram Mathematica[®], as distribuições de probabilidade associadas aos parâmetros do ajuste usado em ambos índices. Fazendo a plotagem desses dados em um mesmo gráfico e plotando também uma distribuição gaussiana a título de comparação encontramos o seguinte resultado:

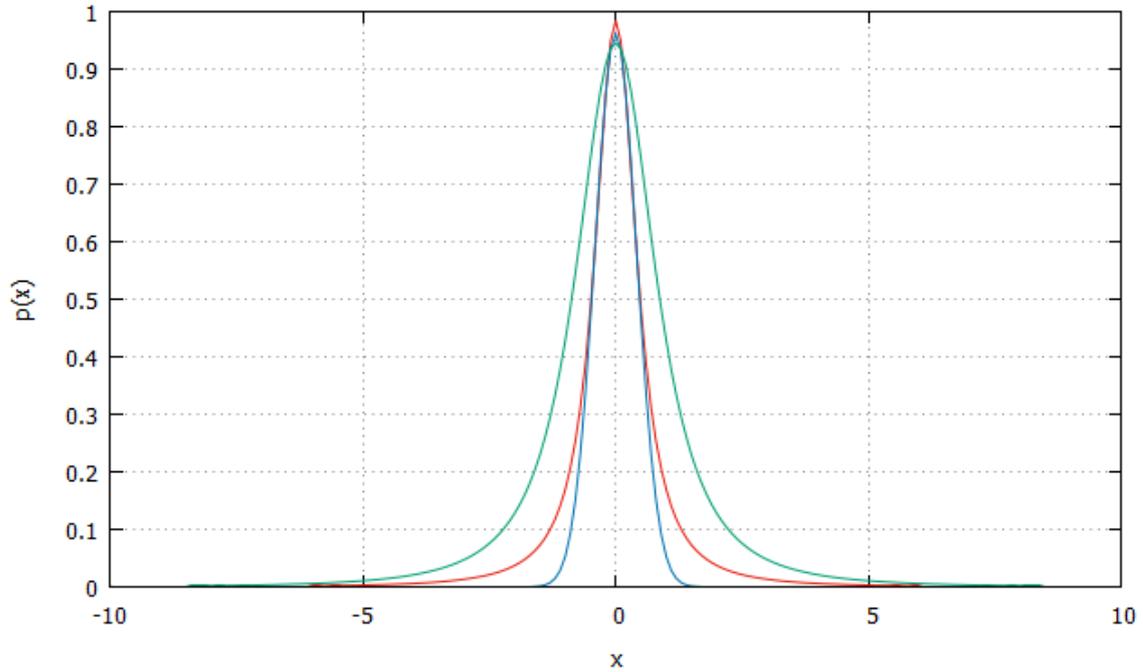


Figura 5.3: Gráfico referente aos ajustes dos índices Ibovespa [verde], Dow Jones [vermelho] e Gaussiano [azul].

É digno de nota que o ajuste gaussiano, que pressupõe a normalidade dos dados, cai muito mais rapidamente para zero do que os outros dois ajustes. Isso significa, em outras palavras, que se o mercado acionário segue uma distribuição gaussiana, os retornos diários grandes (maiores que dois, em unidades normalizadas) ocorrem com frequência raríssima.

Os dados obtidos a partir do mercado mostram que isso, na verdade, não ocorre. Embora a probabilidade de ocorrência de retornos diários grandes seja pequena (da ordem de 10^{-4}) ela é bem maior do que a probabilidade esperada através de um modelo gaussiano.

A título de exemplo, adotando uma distribuição gaussiana de variância $\sigma = 0,399$ que reproduz, ao menos, os pequenos retornos dos dados e fazendo o cálculo da probabilidade associada à um retorno normalizado igual a 10 encontramos:

$$p(10) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(0,399)^2}} \exp\left[\frac{-10^2}{2(0,399)^2}\right] = 10^{-137}, \quad (5.3)$$

ou seja uma probabilidade praticamente nula. Mas, conforme vimos no gráfico 5.2, retornos normalizados diários iguais a 10 possuem uma probabilidade aproximada de 10^{-4} de ocorrência. Se fizermos o mesmo cálculo porém usando a distribuição truncada de Lévy

encontramos uma probabilidade de: $p(10) = 2,6 \times 10^{-4}$, conforme observamos através dos dados.

Isso nos leva a crer que a distribuição de retornos normalizados diários para índices de ações não seguem uma distribuição gaussiana e sim uma distribuição truncada de Lévy. Os ajustes dos gráficos confirmam essa afirmação.

Além disso notamos que a distribuição dos dados do índice Dow Jones cai mais rapidamente pra zero (portanto é menos leptocúrtica) do que a distribuição dos dados do índice Ibovespa. Isso pode estar associado ao fato de que o mercado brasileiro ser bem menos desenvolvido que o mercado norte-americano, além da presença de períodos de grande inflação no Brasil.

A título de exemplo do problema da grande inflação temos o mercado de ações de Gana [44]. Nesse mercado, devido à forte oscilação econômica, não é possível fitar os dados reais do mercado nem mesmo utilizando a distribuição truncada de Lévy.

A discussão sobre as hipóteses assumidas para os retornos diários do mercado acionário é muito importante na precificação de opções [29] e principalmente em modelos que assumem que os dados são igualmente distribuídos por uma distribuição normal como é o caso do modelo Black-Scholes [29, 45, 46]. Diante disso existem propostas de se generalizar o modelo Black-Scholes para mercados que não seguem a distribuição normal [16] e alguns utilizando também o formalismo das integrais de caminho [30, 47, 48].

6 Conclusões e perspectivas futuras

Nosso objetivo nesse trabalho foi fornecer, em primeiro lugar, uma abordagem alternativa à previsão de índices financeiros, em particular os índices de ações como o Ibovespa e o Dow Jones.

Para que seja feita essa previsão utilizamos de dois métodos:

- Um método de ajuste dos retornos diários do índice usando distribuição gaussiana;
- Um método de ajuste dos retornos diários do índice usando uma distribuição truncada de Lévy;

e percebemos que a distribuição truncada de Lévy nos fornece um ajuste muito mais preciso dos dados do que uma distribuição gaussiana. Esse ajuste utilizando uma distribuição truncada de Lévy não pode ser justificado fora do contexto dos sistemas físicos fora do equilíbrio termodinâmico para os quais o tratamento de integrais de caminho é fundamental [14].

Podemos, então, afirmar que os retornos diários dos índices Ibovespa e DJIA não são ajustados por uma distribuição gaussiana [15, 18] e sim por uma distribuição mais geral, a distribuição truncada de Lévy. Isso, em outras palavras, pode significar que o mercado de ações tanto brasileiro quanto americano não obedecem às hipóteses de eficiência de mercado. Espera-se que um mercado eficiente tenha o comportamento, ao menos para um grande número de observações dos retornos diários, de uma distribuição gaussiana, o que verificamos que não acontece.

Uma importante consequência da quebra da hipótese gaussiana é, por exemplo, a precificação de opções que se baseia fortemente nessa hipótese [45, 49, 50, 46]. Por isso muitos modelos, derivados das integrais de caminho, foram apresentados como alternativas à precificação de opções na ausência da hipótese de normalidade dos retornos [16, 30].

Isso nos mostra o poder do método das integrais de trajetória que nos permite resolver tanto problemas de física na forma como foram usualmente concebidos para resolver como,

também, para fazer novas análises de problemas de outras áreas, como é caso de problemas econômicos e financeiros desenvolvidos nesse trabalho.

Por fim é importante ressaltar que aqui não se encerram todas as possibilidades de serem exploradas com um trabalho dessa natureza mas, ao contrário, constitui apenas uma pequena parte do que pode ser feito.

A exemplo do que ainda pode ser explorado podemos citar:

1. **Distribuições assimétricas:** Examinar o comportamento da distribuição dos retornos diários dos índices de forma assimétrica e tentar capturar se existem mais retornos negativos do que positivos ou vice-versa. Uma possibilidade de se atingir esse objetivo seria utilizar as distribuições truncadas assimétricas de Lévy, [14, 13], possibilidade esta não explorada neste trabalho.
2. **Funções de autocorrelação:** Utilizar as técnicas de funções de n-pontos da TQC para analisar a autocorrelação dos dados financeiros para um dado intervalo de tempo. Para se conseguir isso seria necessário se modificar um pouco cálculo das funções de correlação como mostradas na referência [14].
3. **Previsão de crashes:** Certos autores [15, 18] afirmam que a distribuição truncada de Lévy é uma balizadora de crises e serve como uma forma de indicá-las, no sentido de que dados que fogem da distribuição truncada de Lévy indicariam uma crise financeira. Argumenta-se que a grande crise de 2008 poderia ter sido prevista ao se utilizar esse método. Esse seria um campo importante de se analisar utilizando os dados históricos e a ocorrência passada de crises financeiras tanto locais quanto mundiais.

Além de várias outras possibilidade aqui não mencionadas por não serem de tão grande impacto quanto essas três acima. Isso nos mostra que a área a qual nos debruçamos nesse trabalho, a econofísica, é bastante frutífera e pode nos levar a obter boas e interessantes informações a respeito de sistemas econômicos que as teorias clássicas de economia não são capazes de obter.

Referências Bibliográficas

- [1] MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Applied statistics and probability for engineers*. John Wiley & Sons, 2010.
- [2] MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Livro Técnico, 1970.
- [3] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol 55. Courier Corporation, 1964.
- [4] MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] FELLER, W. *An introduction to probability theory and its applications*, vol 2. John Wiley & Sons, 2008.
- [6] KENDALL, M.G. *The advanced theory of statistics*. 2^ª Ed., Charles Griffin and Co., London, 1946.
- [7] KALLENBERG, O. *Foundations of modern probability*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [8] LÉVY, P.; BOREL, É. *Théorie de l’addition des variables aléatoires*. Paris, 1954.
- [9] MANDELROT, B. The variation of some other speculative prices. *The Journal of Business*, v. 40, n. 4, p. 393-413, 1967.
- [10] JOVANOVIĆ, F.; SCHINCKUS, C. The emergence of econophysics: A new approach in modern financial theory. *History of Political Economy*, v. 45, n. 3, p. 443-474, 2013.
- [11] MANTEGNA, R. N.; STANLEY, H. E. Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: the truncated Lévy flight. *Physical Review Letters*, v. 73, n. 22, p. 2946, 1994.
- [12] STEUTEL, V.H.; KLAAS, F. W. *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*. CRC Press, 2003.
- [13] KOPONEN, I. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the gaussian stochastic process. *Physical Review E*, v. 52, n. 1, p. 1197, 1995.
- [14] KLEINERT, H. *Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets*. World Scientific, 2009.
- [15] MARIANI, M. C.; LIU, Y. Normalized truncated Lévy walks applied to the study of financial indices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 377, n. 2, p. 590-598, 2007.

- [16] MATA CZ, A. Financial modeling and option theory with the truncated Lévy process. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, v. 3, n. 01, p. 143-160, 2000.
- [17] JAROSZE WICZ S.; MARIANI, M. C.; VARELA, M. P. B.; FERRARO, M. Truncated Lévy walks applied to the study of the behavior of market indices. 2005.
- [18] MIRANDA, L. C.; RIERA, R. Truncated Lévy walks and an emerging market economic index. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 297, n. 3, p. 509-520, 2001.
- [19] FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 20, n. 2, p. 367, 1948.
- [20] DIRAC, P. A. M. The lagrangian in quantum mechanics. 1933. This article was first published in *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, Band 3, Heft 1, p. 64-72, 1933.
- [21] NUSSENSZVEIG, M. Integrais de trajetória. *Curso Ministrado na I Escola de Verão de Partículas e Campos*, 1981.
- [22] RODRIGUES, A. F. Notas de aula: A integral de feynman: das origens às teorias de campos a temperaturas finitas. *VIII Escola do CBPF, Rio de Janeiro*, 2010. Disponível em: <http://escoladocbpf.blogspot.com.br/p/notas-das-aulas.html>. Acessado em novembro de 2016.
- [23] FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R.; STYLER, D. *Quantum mechanics and path integrals*. Dover Publications, 2010.
- [24] CHANDLER, D. *Introduction to modern statistical mechanics*. Oxford University Press, 1987.
- [25] DAUSSY, C. *et al.* Direct determination of the Boltzmann constant by an optical method. *Physical review letters*, v. 98, n. 25, p. 250801, 2007.
- [26] INGOLD, G. L. Path integrals and their application to dissipative quantum systems. *Lecture notes in Physics - New York then Berlin*, pages 1-54, 2002.
- [27] DAS, A. *Finite temperature field theory*. World Scientific, 1997.
- [28] DAS, A. *Field theory: a path integral approach*. World Scientific, 2006.
- [29] RICHMOND, P; MIMKES, J.; HUTZLER, S. *Econophysics and physical economics*. Oxford University Press, 2013.
- [30] KLEINERT, H. Option pricing from path integral for non-Gaussian fluctuations. Natural martingale and application to truncated Lévy distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 312, n. 1, p. 217-242, 2002.
- [31] JUNIOR, S.; SARAIVA, T.; IKEDA, R. H. Mercados eficientes e arbitragem: um estudo sob o enfoque das finanças comportamentais. *Revista Contabilidade & Finanças*, v. 15, n. 34, p. 97-107, 2004.
- [32] MALKIEL, B. G; FAMA, E. F. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The journal of Finance*, v. 25, n. 2, p. 383-417, 1970.

- [33] SHLEIFER, A. *Inefficient markets: An introduction to behavioural finance*. OUP Oxford, 2000.
- [34] BM&FBovespa - Manual de procedimentos para cálculo dos índices (PT-BR). Disponível em: <http://bvmf.bmfbovespa.com.br/indices/download/Manual-de-procedimentos-pt-br.pdf>. Acessado em novembro de 2016.
- [35] WOOLDRIDGE, J. M. *Introductory econometrics: A modern approach*. Nelson Education, 2015.
- [36] ENDERS, W. *Applied econometric time series*. John Wiley & Sons, 2008.
- [37] BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A. *Introduction to time series and forecasting*. Springer, 2016.
- [38] BOX, G. E. P.; PIERCE, D. A. Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American statistical Association*, v. 65, n. 332, p. 1509-1526, 1970.
- [39] REINSEL, G.; BOX, G. E.P.; JENKINS, G. M. Forecasting and control. *Time Series Analysis*, v. 3, p. 75, 1970.
- [40] REINSEL G. C.; LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. *Time series analysis: forecasting and control*. John Wiley & Sons, 2015.
- [41] BM&FBovespa - A nova bolsa. Disponível em: http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br. Acessado em novembro de 2016.
- [42] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron Books do Brasil, 1997.
- [43] S&P Indices. Disponível em: <https://us.spindices.com/indices/equity/dow-jones-industrial-average>. Acessado em março de 2017.
- [44] NCHEUGUIM, E. K.; SETH, A.-K.; JOSEPH, O.-D. The truncated Lévy flight model: A comparative analysis of its utility in modeling the S&P 500 and the Ghana stock exchange. In *Advancing Research Methodology in the African Context: Techniques, Methods, and Designs*, p. 215-233. Emerald Group Publishing Limited, 2014.
- [45] BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, p. 637-654, 1973.
- [46] HULL, J. C. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India, 2006.
- [47] LINETSKY, V. The path integral approach to financial modeling and options pricing. *Computational Economics*, v. 11, n. 1, p. 129-163, 1997.
- [48] BAAQUIE, B. E. A path integral approach to option pricing with stochastic volatility: some exact results. *Journal de Physique I*, v. 7, n. 12, p. 1733-1753, 1997.
- [49] BLACK, F. The pricing of commodity contracts. *Journal of financial economics*, v. 3, n. 1, p. 167-179, 1976.
- [50] MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, p. 41-183, 1973.