Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Dissertação de Mestrado

Renormalização em Modelos de Yukawa sem e com Campo Escalar Axial

Andreza Rairis Rodrigues

Juiz de Fora–MG, Brasil
2019

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Dissertação de Mestrado

Renormalização em Modelos de Yukawa sem e com Campo Escalar Axial

Autora: Andreza Rairis Rodrigues

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Juiz de Fora–MG, Brasil
2019

Dedico este trabalho à minha família que sempre me apoiou.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos,

- a Deus e toda minha família, principalmente aos meus pais, por estarem sempre ao meu lado e me apoiarem durante meu percurso;
- ao meu orientador Prof. Dr. Ilya L. Shapiro pela sugestão do tema deste trabalho e por todo conhecimento transmitido;
- ao Prof. Iosef L. Buchbinder pelos ensinamentos;
- aos colaboradores Vitor F. Barra e Jarme G. Joaquim por contribuirem para realização deste trabalho;
- a todos os meus amigos que me acompanharam durante o mestrado;
- à CAPES pelo apoio ao meu projeto de mestrado.

Resumo

Nós exploramos as propriedades clássicas e quânticas de um campo escalar estéril acoplado a N cópias de férmions de Dirac submetido a um campo gravitacional externo em dois modelos diferentes. Descobrimos que o potencial escalar de auto-interação de um modelo que é consistente no nível quântico, inclui potências ímpares (primeira e terceira) de um escalar. Em particular, é preciso considerar, além do acoplamento não-mínimo padrão $\xi\varphi^2 R$, um novo tipo de acoplamento da forma $f\varphi R$ com o novo parâmetro não-mínimo f. Estudamos a renormalização a um *loop* de tal teoria incluindo o novo acoplamento não-mínimo. Além disso, calculamos o potencial efetivo a um loop para o modelo com escalar estéril usando o método do grupo de renormalização e mostramos como a análise do grupo de renormalização deve ser estendida em comparação com a expressão padrão que foi derivada na década de 1980. Esta conclusão é apoiada pelo cálculo direto do potencial efetivo usando coordenadas normais de Riemann e regularização *cut-off* covariante. As características importantes da teoria clássica com um escalar estéril estão relacionadas à presença de termos qualitativamente novos na ação induzida da gravidade, provenientes dos termos ímpares.

Palavras chaves : Renormalização; modelo de Yukawa; espaço curvo.
Áreas do conhecimento : Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo; Gravitação.

Abstract

We explore the classical and quantum properties of a sterile scalar field coupled to N copies of Dirac fermions in an external gravitational field in two different models. We find that the self-interaction scalar potential of a model that is consistent at the quantum level, includes odd (first and third) powers of a scalar. In particular, one has to consider, besides the standard non-minimal coupling of the form $\xi\varphi^2 R$, the new type of non-minimal coupling of the form $f\varphi R$ with new non-minimal parameter f. We study the one-loop renormalization of such a theory including renormalization of the new non-minimal coupling. Also, we calculate the one-loop effective potential for the sterile scalar model using the renormalization group method and show how the renormalization group analysis should be extended, compared to the standard expression which was derived in 1980-ies. This conclusion is supported by the direct calculation of effective potential using normal coordinates and covariant cut-off regularization. The important features of the classical theory with a sterile scalar are related to the presence of the qualitatively new terms in the induced action of gravity, coming from the odd terms.

Keywords : Renormalization; Yukawa model; curved space.

Conteúdo

Notação e convenções

Vamos definir algumas notações e convenções que utilizaremos neste trabalho. O objetivo aqui, não é fazer demonstrações e sim apresentar as grandezas básicas da teoria.

Partimos da definição de intervalo entre dois eventos no espaço-tempo,

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1}$$

onde $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski e c é a velocidade da luz no vácuo. Esse intervalo deve ser invariante perante transformações de Lorentz.

Para os operadores diferenciais, temos a seguinte notação condensada

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\Big),$$

e, por consequência, o operador D'Alembertiano pode ser escrito como

$$\Box \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \tag{2}$$

Outra notação condensada utilizada no texto deste trabalho se refere à integral no espaço quadridimensional, escrita como

$$\int dx \equiv \int d^4x = \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{3}$$

Também utilizamos o sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = 1$, a não ser onde é dito o contrário, como na seção 1.2 onde recuperamos a dependência de $\hbar$ do funcional gerador das funções de Green para realizarmos a expansão em *loops* da ação efetiva.

No espaço-tempo curvo, a métrica plana de Minkoski é substituida por uma métrica abitrária $g_{\mu\nu}$ e para que a covariância se mantenha, a derivada parcial é substituida pela derivada covariante

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu$$

e um fator de $\sqrt{-g}$ é acrescido ao integrando, onde g é o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$.

Introdução

O campo escalar único do Modelo Padrão Mínimo (MPM) da física de partículas é o bóson de Higgs, que é complexo e pertence à representação fundamental do grupo $SU(2)$. As extensões não-mínimas do MP, como a versão supersimétrica, das Teorias da Grande Unificação, normalmente têm um setor escalar maior, mas os novos escalares são sempre representações do grupo de simetria do modelo de física de partículas correspondente. A consistência de tais modelos com relação às exigências da teoria quântica de campos é a principal ferramenta para restringir as extensões do MPM e, em particular, o setor escalar.

Ao mesmo tempo, existem outros tipos de campos escalares que são intensivamente usados na cosmologia. Tanto o *inflaton* quanto a quintessência são escalares reais que não estão relacionados as representações do grupo de simetria da física de partículas e podem ser chamados de escalares estéreis. O termo estéril é usado para o quarto neutrino que não pertence a representação do grupo $SU(2)$ e esta é a primeira vez que utilizou-se esse termo para se referir a campos escalares. Uma questão interessante diz respeito às restrições que podem ser impostas na teoria quântica sobre o potencial de auto-interação de tal campo escalar. Uma realização prática deste procedimento requer assumir a forma da interação entre as partículas elementares e escalares estéreis. No presente trabalho consideramos a versão mais simples possível de tal interação, ou seja, utilizamos um escalar estéril acoplado a N cópias do férmion massivo de Dirac através da interação de Yukawa. Consideramos também um segundo modelo com termos extras onde a interação acontece entre um campo escalar axial e os campos fermiônicos de Dirac.

É bem conhecido que a renormalização multiplicativa de um campo escalar no espaço-tempo curvo requer a introdução do acoplamento não-mínimo entre o campo escalar e a gravidade na forma $\xi\varphi^2 R$. No entanto, se o potencial clássico do campo escalar incluir o termo φ^3, pode-se esperar que a teoria renormalizada deva incluir o novo tipo de acoplamento não-mínimo proporcional a φR, com o novo parâmetro não-mínimo. Assim, chegamos ao problema de descrever a estrutura quântica da teoria com um escalar estéril. O objetivo deste trabalho é considerar os principais aspectos desse problema, como o grupo de renormalização.

Até onde sabemos, esses assuntos ainda não foram estudados na literatura.

Para estudar os novos aspectos mencionados acima, começamos usando a abordagem do *heat kernel* padrão para derivar as divergências a um *loop* no modelo para o espaço-tempo curvo. Como resultado desse cálculo, chegamos à forma mínima de um potencial de auto-interação consistente que fornece a renormalização multiplicativa do modelo. A nova característica deste potencial em comparação com um escalar usual (por exemplo, Higgs) é a presença da primeira e terceira potência do campo escalar no potencial clássico. Notamos que nos cálculos anteriores para divergências semelhantes realizados nas Refs. [1, 2, 3, 4] a presença desses termos foi reconhecida, mas as consequências desse aspecto da teoria não foram suficientemente exploradas. Outro aspecto interessante do escalar estéril acoplado a férmions através da interação de Yukawa é o possível papel dos termos ímpares na inflação.

Do lado formal da Teoria Quântica de Campos (TQC), o problema desafiador é como levar em conta o grupo de renormalização para os termos ímpares, especialmente quando se trata da derivação baseada no grupo de renormalização do potencial efetivo. A expressão padrão para o potencial efetivo advinda da equação do grupo de renormalização para ação efetiva no espaço curvo [6] (ver também desenvolvimento adicional do método do grupo de renormalização, aplicado para outros setores da ação efetiva em [7]) é válida apenas para a teoria onde as divergências têm a segunda e quarta potência do campo escalar. O potencial efetivo no modelo com interação de Yukawa foi calculado recentemente em [3, 4] para o caso especial de férmions sem massa, quando os termos ímpares no potencial escalar não são necessários e as contribuições em *loop* para o potencial podem ser derivadas com base nas expressões gerais padrão no espaço-tempo plano [8] e curvo [6, 2]. Se os férmions são massivos e existem termos ímpares, estes resultados padrões são incompletos e a derivação do grupo de renormalização do potencial efetivo deve ser modificada de alguma forma. Como de costume (veja a discussão em [10]), a derivação do grupo de renormalização é baseada na identificação do parâmetro de renormalização μ, que permite facilmente ir além da aproximação do potencial local [7, 2]. Por outro lado, tal identificação representa um pressuposto, que é sempre bom verificar, pelo menos no caso mais simples de potencial efetivo. Assim, a fim de obter uma verificação adicional do resultado completo, realizamos a derivação do potencial efetivo para um escalar estéril diretamente, usando o método que foi desenvolvido recentemente em [10] com base nas coordenadas normais de Riemann e na representação do momento local [11, 14].

A dissertação está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo descrevemos resumidamente alguns métodos que foram utilizados no desenvolvimente deste trabalho, como a expansão em *loops* e o método de Schwinger-DeWitt. No segundo capítulo, retratamos a derivação das divergências a um *loop* no modelo com um escalar estéril acoplado a N cópias de férmion. Calculamos as funções beta e gama, e o potencial efetivo a um *loop* restaurado do grupo de renormalização. No terceiro capítulo apresentamos as divergências a um *loop* para o modelo com um campo escalar axial e um escalar estéril, ambos acoplados a N férmions. Determinamos as funções beta e gama e calculamos os parâmetros renormalizados. E por último, tiramos nossas conclusões e discutimos as perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 1

O papel da ação efetiva em Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre o papel da ação efetiva na Teoria Quântica de Campos. Devemos lembrar que a ação efetiva é um objeto fundamental na construção da TQC [2, 24, 25], pois ela representa a generalização da ação clássica para o espaço-tempo curvo e é um funcional gerador das funções de correlação conectadas, como será mostrado mais adiante.

Através das funções de correlação conectadas podemos determinar qualquer outra função de correlação. Além disso, podemos descrever fenômenos físicos de uma determinada teoria quântica. Na seção 1.1 vamos reproduzir o funcional gerador das funções de Green e encontrar a relação para ação efetiva. Em 1.2 faremos a expansão da ação efetiva em termos dos *loops*. Nas seções 1.3 e 1.4 mostraremos resumidamente o método de Schwinger-DeWitt e as equações do grupo de renormalização para derivar o potencial efetivo, respectivamente.

1.1 Funcional gerador das Funções de Green

Considere uma ação inicial $S(\varphi)$, para o campo escalar $\varphi(x)$ tal que

$$S(\varphi) = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\Big[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + m^2\varphi^2\Big] + V(\varphi)\right\}, \tag{1.1}$$

onde $V(\varphi)$ é um potencial arbitrário. Podemos escrever o funcional gerador das funções de Green como

$$Z[J] = \int D\varphi \, \exp\{i(S[\varphi] + \varphi J)\}, \tag{1.2}$$

onde

$$\varphi J = \int dx \, \varphi(x) J(x) \tag{1.3}$$

é a notação condensada de DeWitt para o produto de dois campos [24] e $J(x)$ é a fonte externa do campo escalar $\varphi(x)$.

Podemos expressar a função de Green de n pontos como uma integral funcional [12]

$$\begin{aligned} G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) \rangle \\ &= \frac{\int D\varphi \, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) e^{iS[\varphi]}}{\int D\varphi \, e^{iS[\varphi]}}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

de modo que as funções de Green possam ser obtidas através da n-ésima variação funcional de $Z[J]$ em relação a $J(x)$,

$$G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{i^n Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\Big|_{J=0}. \tag{1.5}$$

Podemos então, definir o funcional gerador das funções de Green conectadas $W[J]$, como

$$e^{iW[J]} = Z[J]. \tag{1.6}$$

Desta forma, as funções de Green conectas, $G^c(x_1, x_2, ..., x_n)$, podem ser descritas como derivadas variacionais

$$G^c(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta i J(x_1)\delta i J(x_2)\cdots\delta i J(x_n)}. \tag{1.7}$$

Introduzindo a definição de campo médio através da relação

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta i J(x)} = \frac{\int D\varphi \, \varphi(x) e^{i(S[\varphi]+\varphi J)}}{\int D\varphi \, e^{i(S[\varphi]+\varphi J)}} \equiv \langle \varphi(x|J) \rangle, \tag{1.8}$$

onde faremos $\langle \varphi(x|J) \rangle = \phi(x|J)$. Ou seja,

$$\phi(x|J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \tag{1.9}$$

Sendo que esta equação deve ser resolvida de tal forma que o campo médio seja um funcional da fonte externa $J(x)$.

Finalmente, através da transformação de Legendre podemos definir um funcional que depende do campo de fundo chamado de ação efetiva [2]

$$\Gamma[\phi] = \big(W[J] - \phi J\big)\big|_{J=J(x|\phi)}. \tag{1.10}$$

Para a ação clássica que contém um termo de interação entre o campo φ e a fonte externa, a equação de movimento é

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \tag{1.11}$$

Da mesma forma podemos derivar a equação de movimento para a ação efetiva, basta variar $\Gamma[\phi]$ com respeito ao campo de fundo em ambos os lados de (1.10). Logo,

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = \frac{\delta W[J]}{\delta J}\,\frac{\delta J}{\delta\phi} - J - \phi\frac{\delta J}{\delta\phi}. \tag{1.12}$$

Substituindo a equação (1.9) em (1.12), temos

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = -J(x). \tag{1.13}$$

Assim, vemos que $\Gamma[\phi]$ na teoria quântica equivale a $S[\varphi]$ na teoria clássica. Aqui apresentamos apenas uma discussão breve, para mais detalhes ver a referência [2].

1.2 Expansão em *loops* da ação efetiva

Tendo em vista as equações (1.2) e (1.6), vamos considerar o funcional gerador das funções de Green da seguinte forma

$$Z[J] = \exp\Big\{\frac{i}{\hbar}W[J]\Big\} = \int D\varphi\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi] + \varphi J)\Big\}. \tag{1.14}$$

A quantidade $\hbar$, que antes consideramos como unidade, foi recuperada para ser usada como um parâmetro de expansão em *loops*.

Vamos incluir a ação efetiva através da equação (1.10)

$$\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}(\Gamma[\phi] + \phi J)\Big\} = \int D\varphi\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi] + \varphi J)\Big\}. \tag{1.15}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $\varphi \to \varphi + \phi$, onde ϕ é o campo de fundo e usando a equação de movimento (1.13), temos

$$\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\Big(\Gamma[\phi] + \phi J\Big)\Big\} = \int D\varphi\,\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\Big(S[\varphi+\phi] + (\varphi+\phi)J\Big)\Big\}. \tag{1.16}$$

Ou seja,

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right\} = \int D\varphi\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big(S[\varphi+\phi] - \varphi\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}\Big)\right\}. \tag{1.17}$$

Agora, expandindo a ação clássica escrita em termos do campo de fundo, $S[\varphi+\phi]$, em uma série de Taylor funcional no campo $\phi(x)$,

$$S[\varphi+\phi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\, S_n(x_1,\cdots,x_n|\phi)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n), \tag{1.18}$$

onde

$$S_n(x_1,\cdots,x_n|\phi) = \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)} \tag{1.19}$$

são as funções clássicas do vértice que dependem do campo de fundo. Para simplificar, consideramos a notação condensada de DeWitt, onde

$$\int dx_1\cdots dx_n\, S(x_1,\cdots,x_n|\phi)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \equiv S_n[\phi]\varphi^n \tag{1.20}$$

e

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \equiv \Gamma_1[\phi]. \tag{1.21}$$

Logo, podemos reescrever a equação (1.18) da seguinte forma

$$S[\varphi+\phi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\, S_n[\phi]\varphi^n. \tag{1.22}$$

Introduzindo a equação (1.22) em (1.17) obtemos

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right\} = \int D\varphi\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big[S[\phi] + \frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n[\phi]\varphi^n - \varphi\big(\Gamma_1[\phi] - S_1[\phi]\big)\Big]\right\}. \tag{1.23}$$

Fazendo agora a seguinte mudança $\varphi \to \hbar^{1/2}\varphi$ na integral funcional, temos

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right\} &= \int D\varphi\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Big[S[\phi] + \frac{\hbar}{2}S_2[\phi]\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\hbar^{\frac{n}{2}}}{n!}S_n[\phi]\varphi^n\right. \\ &\left. - \hbar^{\frac{1}{2}}\varphi\,\frac{\delta}{\delta\phi}\big(\Gamma[\phi] - S[\phi]\big)\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

É de se esperar que a ação efetiva seja composta por um termo clássico $S[\phi]$ e uma contribuição quântica $\bar{\Gamma}[\phi]$. Sendo assim, o funcional $\bar{\Gamma}[\phi]$ deve conter todas as correções quânticas para a ação clássica e podemos expandi-lo em uma série de potências em $\hbar$

$$\bar{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty}\hbar^n\bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \tag{1.25}$$

Esta expansão é conhecida como expansão em *loops*, onde o parâmetro n representa o número de *loops*. Levando em conta (1.25) podemos reescrever a fórmula (1.24) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \exp\left\{i\sum_{n=1}^{\infty}\hbar^{n-1}\bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]\right\} &= \int D\varphi\, \exp\Big\{i\Big[\frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!}S_n[\phi]\varphi^n \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}\hbar^{-\frac{1}{2}+n}\varphi\,\bar{\Gamma}_1^{(n)}[\phi]\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

O funcional presente na exponencial do lado direito da equação (1.26) representa a ação de alguma teoria na qual o propagador é definido pelo termo quadrático $\frac{1}{2}S_2[\phi]\varphi^2$ e os termos de ordem superior retratam as interações entre os campos.

Além disso, a relação (1.26) pode ser resolvida para primeira ordem em $\hbar$, onde obtemos

$$\exp\left(i\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi]\right) = \int D\varphi\, \exp\left(\frac{i}{2}S_2[\phi]\varphi^2\right) = \left(\,\mathrm{Det}\, S_2[\phi]\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.27}$$

Escrevendo a forma bilinear da ação

$$\hat{H}(x,y) = S_2[\phi] = \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\phi(y)}, \tag{1.28}$$

temos

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2}\ln\,\mathrm{Det}\,\hat{H}[\phi] = \frac{i}{2}\,\mathrm{sTr}\,\ln\hat{H}[\phi], \tag{1.29}$$

onde sTr é o super traço dado por

$$\mathrm{sTr}\,\hat{A} = \int dx\;\mathrm{str}\,A(x,x), \tag{1.30}$$

sendo $A(x,x) = A(x,y)|_{y=x}$ e $A(x,y)$ é o núcleo do operador $\hat{A} = A(x,y)\delta(x-y)$ [2]. Usamos o super traço, pois além dos campos escalares integramos campos fermiônicos. Desta forma, o cálculo da ação efetiva se reduz a calcular os super traços do operador $\hat{H}$.

Todo o conteúdo desta dissertação e do artigo [5], fruto deste trabalho, está baseado nos cálculos da ação efetiva a 1-*loop* e portanto, usamos a equação (1.29) para derivá-los.

1.3 Método de Schwinger-DeWitt

Dentro da abordagem funcional da teoria quântica de campos temos a expansão de *heat kernel* (núcleo de calor) e o formalismo de campo de fundo, que são funcionais de fontes externas arbitrárias ou o campo médio de uma configuração genérica (o campo de fundo).

No entanto, é impossível realizar o cálculo exato dos efeitos quânticos em um campo de fundo genérico. Em 1937, Fock demonstrou ser possível escrever as funções de Green como integrais sobre uma variável auxiliar, chamada tempo próprio de um núcleo, que satisfaz uma equação de calor [27]. Assim, permitindo construir aproximações que são válidas em campos de fundo genéricos. Schwinger então constatou que a abordagem usada por Fock se aplicava no contexto da renormalização e da invariância de calibre na teoria quântica de campos [23] e DeWitt estendeu o método para o espaço-tempo curvo [24]. Sendo assim, o método de Schwinger-DeWitt permite calcular a ação efetiva e sua parte divergente de forma covariante.

Começaremos pela equação que está correlacionada com as correções a 1-*loop* para a ação clássica

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \ln \, \mathrm{Det} \, \hat{H} = \frac{i}{2} \, \mathrm{Tr} \, \ln \hat{H}, \tag{1.31}$$

onde o operador $\hat{H}$ normalmente depende da métrica e de outros campos de fundo. A integração funcional é executada sobre o campo quântico, enquanto o campo de fundo desempenha o papel de parâmetro externo na integração (campo clássico). Considerando a variação da ação efetiva a 1-*loop* em relação aos parâmetros externos como

$$\delta\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \delta \, \mathrm{Tr} \, \ln \hat{H} = \frac{i}{2} \, \mathrm{Tr} \, \hat{H}^{-1} \delta \hat{H}. \tag{1.32}$$

O operador $\hat{H}^{-1}$ admite a representação de integral sobre o tempo próprio (s)

$$\hat{H}^{-1} = i \int_0^\infty ds \; e^{-is\hat{H}}. \tag{1.33}$$

Logo,

$$-\frac{1}{2} \, \mathrm{Tr} \, \delta \hat{H} \int_0^\infty ds \; e^{-is\hat{H}} = -\frac{i}{2} \, \mathrm{Tr} \, \delta \int_0^\infty \frac{ds}{s} \, e^{-is\hat{H}}. \tag{1.34}$$

Assim, o funcional $\bar{\Gamma}^{(1)}$ é dado por

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = cte - \frac{i}{2} \, \mathrm{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \, \hat{U}(x, x'; s), \tag{1.35}$$

onde a constante não é relevante e $\hat{U}(x, x'; s)$ é chamada de *heat kernel* e pode ser escrita como

$$\hat{U}(x, x'; s) = e^{-is\hat{H}}. \tag{1.36}$$

Esse operador deve satisfazer a equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial \hat{U}(x,x';s)}{\partial s} = -\hat{H}\hat{U}(x,x';s) \tag{1.37}$$

com a condição inicial $\hat{U}(x,x';0) = \delta(x,x')$. Restringimos então, o cálculo da ação efetiva a resolução da equação diferencial (1.37). Uma vez que podemos escrever o operador $\hat{H}$ como

$$\hat{H} = \hat{1}\Box + \hat{\Pi}, \tag{1.38}$$

onde incluimos o parâmetro de massa no operador $\hat{\Pi}$, podemos considerar a quantidade $\hat{U}(x,x';s)$ como um operador evolução, sendo conveniente escrevê-lo na forma da seguinte ansatz

$$\hat{U}(x,x';s) = \hat{U}_0(x,x';s)\hat{\Omega}(x,x'), \tag{1.39}$$

onde

$$\hat{U}_0(x,x';s) = -\frac{i}{(4\pi s)^{\omega}}\big[D(x,x')\big]^{1/2} e^{\frac{i\sigma(x,x')}{2s} - im^2 s} \tag{1.40}$$

e

$$\hat{\Omega}(x,x') = \sum_{k=0}^{\infty}(is)^k \hat{a}_k(x,x'). \tag{1.41}$$

$[D(x,x')]$ é o determinante de Van Vleck-Morett [29], $\sigma(x,x')$ é uma função geral e $\hat{a}_k(x,x')$ são os coeficientes de Schwinger-DeWitt. Observando a equação (1.41) é possível identificar que os coefientes $\hat{a}_k(x,x')$ têm dimensão de massa que cresce linearmente com o número k.

Para os limites de coincidência, temos

$$\hat{A}_k = \lim_{x' \to x} \hat{a}_k(x,x') = \hat{a}_k|. \tag{1.42}$$

A determinação desses coeficientes não é simples e pode ser vista no trabalho de Barvinsky e Vilovisky [19]. No entanto, podemos substiruir a equação (1.39) em (1.37), de modo que encontramos a seguinte relação de recorrência para $\hat{a}_k(x,x')$

$$(k+1)\hat{a}_{k+1} + \sigma^{\mu}\nabla_{\mu}\,\hat{a}_{k+1}\,\Delta^{-1}\Box(\Delta^{1/2}\hat{a}_k) + \hat{\Pi}\,\hat{a}_k, \qquad k = 1,2,3,\cdots. \tag{1.43}$$

Considerando o operador mais geral como [34]

$$S_2 = \hat{H} = \hat{1}\Box + 2\hat{h}^{\mu}\nabla_{\mu} + \hat{\Pi}, \tag{1.44}$$

onde

$$\begin{aligned} \Box &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu, \\ \hat{\Pi} &= \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6}R + \nabla_\mu\hat{h}^\mu + \hat{h}_\mu\hat{h}^\mu. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Podemos mostrar através das relações acima que

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R - \nabla_\mu\hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu\hat{h}^\mu, \\ \hat{S}_{\mu\nu} &= \hat{1}[\nabla_\nu, \nabla_\mu] + \nabla_\nu\hat{h}_\mu - \nabla_\mu\hat{h}_\nu + \hat{h}_\nu\hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu\hat{h}_\nu. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Assim, para o limite de coincidência, $\lim_{x'\to x}\, \hat{a}_k(x,x')$, temos os primeiros coeficientes obtidos a partir da fórmula (1.43)

$$\hat{a}_0(x,x) = \hat{1}, \tag{1.47}$$

$$\hat{a}_1(x,x) = \hat{P}, \tag{1.48}$$

$$\hat{a}_2(x,x) = \frac{\hat{1}}{180}(R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - R^2_{\alpha\beta} + \Box R) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}(\Box\hat{P}) + \frac{1}{12}\hat{S}^2_{\mu\nu}. \tag{1.49}$$

Finalmente, podemos encontrar a relação final para a ação efetiva a 1-*loop* mediante a equação (1.35)

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,\frac{D^{\frac{1}{2}}(x,x')}{(4\pi i s)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{i\sigma(x,x')}{2s} - im^2 s}\sum_{k=0}^{\infty}(is)^k\hat{a}_k(x,x'). \tag{1.50}$$

Um resultado relevante (para mais detalhes ver [19]) é que em $n = 4$ apenas os três primeiros termos de (1.41) equivalem a parte divergente da ação efetiva. Além disso, a relação para a parte divergente da ação efetiva, na regularização dimensional, deriva das divergências logarítmicas dadas por $k = 2$, tal que

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon}\int d^4x\,\sqrt{-g}\;\mathrm{tr}\,\hat{a}_2(x,x), \tag{1.51}$$

onde $\epsilon = (4\pi)^2(n-4)$.

1.4 Equações do Grupo de Renormalização

Para mostrar como obter as Equações do Grupo de Renormalização no espaço-tempo curvo seguiremos as referências [2, 12, 22, 26]. Começaremos relembrando os conceitos de renormalização e regularização [2].

As funções de correlação são normalmente determinadas por integrais divergentes no limite de momentos grandes. Por esse motivo, não é possível obter informações físicas do sistema a partir delas. Porém, podemos utilizar o processo de renormalização para cancelar as divergências. Mas, devido a essas divergências é necessário utilizar a regularização para que as integrais de trajetória divergentes passem a ter sentido físico.

A regularização se baseia em mudar a integral divergente para uma integral finita que depende de um parâmetro de regularização. Quando esse parâmetro tende a um determinado valor recuperamos a integral original. Um exemplo desse processo é a regularização dimensional que define toda a teoria em uma dimensão n do espaço-tempo, sendo n o próprio parâmetro de regularização.

Considerando $S_0[\phi_0, p_0]$ a ação da teoria fundamental (*bare theory*) e $S[\phi, p]$ a ação renormalizada podemos escrever os funcionais geradores das funções de correlação para a teoria fundamental e renormalizada,

$$\exp\{iW_0[J_0]\} = \int D\phi_0 \, \exp\{i(S_0[\phi_0, p_0] + \phi_0 J_0)\}, \tag{1.52}$$

$$\exp\{iW[J]\} = \int D\phi \, \exp\{i(S[\phi, p] + \phi J)\}, \tag{1.53}$$

onde ϕ_0 e p_0 são campos e parâmetros fundamentais, enquanto ϕ e p são renormalizados. Temos que ϕ_0 e p_0 estão conectados com ϕ e p através das transformações de renormalização e $S_0[\phi_0, p_0] = S[\phi, p]$ devido a renormalização multiplicativa. Fazendo a mudança de variável $\phi_0 \to Z_1^{\frac{1}{2}}\phi$ em (1.52) obtemos que $W_0[J_0] = W[J]$. Logo,

$$J = \mu^{(n-4)/2} Z_1^{\frac{1}{2}} J_0. \tag{1.54}$$

Agora, podemos encontrar a ação efetiva renormalizada através da transformação de Legendre. Sendo o campo médio dado por

$$\phi_0 = \frac{\delta W_0}{\delta J_0} = \frac{\delta W}{\delta J} Z_1^{\frac{1}{2}} \mu^{(n-4)/2} = \mu^{(n-4)/2} Z_1^{\frac{1}{2}} \phi, \tag{1.55}$$

obtemos a ação efetiva

$$\Gamma_0[\phi_0] = W_0[J_0] - \phi_0 J_0 = W[J] - \phi \mu^{(n-4)/2} Z_1^{\frac{1}{2}} \, \mu^{-(n-4)/2} Z_1^{-\frac{1}{2}} J = \Gamma[\phi], \tag{1.56}$$

ou seja,

$$\Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \phi_0, p_0, n] = \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n], \tag{1.57}$$

onde escrevemos explicitamente os argumentos da ação efetiva fundamental e renormalizada. Deste modo, vemos que a ação renormalizada Γ possui um parâmetro μ que não aparece na ação fundamental Γ_0. Assim, podemos escrever

$$\mu \frac{d}{d\mu}\Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0. \tag{1.58}$$

Logo,

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{dp}{d\mu}\frac{\partial}{\partial p} + \mu\int d^n x\,\sqrt{-g}\,\frac{d\phi(x)}{d\mu}\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Big]\Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0. \tag{1.59}$$

Lembrando que os termos $\mu\frac{dp}{d\mu}$ e $\mu\frac{d\phi}{d\mu}$ são calculados nos valores fixos p_0 e ϕ_0 e podem ser escritos da seguinte forma,

$$\mu\frac{dp}{d\mu} = \beta_p(n), \tag{1.60}$$

$$\mu\frac{d\phi(x)}{d\mu} = \gamma(n)\phi(x), \tag{1.61}$$

onde a quantidade $\beta_p(n)$ é chamada de função beta e $\gamma(n)$ de função gama. Usando essas notações podemos reescrever a equação (1.59),

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_p(n)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma(n)\int d^n x\,\sqrt{-g}\,\phi(x)\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Big]\Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0. \tag{1.62}$$

A relação (1.62) é denotada como equação do grupo de renormalização e pode ser usada para calcular o potencial efetivo, como será feito no próximo capítulo.

Além de remover as divergências, os processos de regularização e renormalização fazem com que as constantes de acoplamento e as massas dos campos evoluam dinamicamente e passem a depender do parâmetro de renormalização μ. Como uma consequência, a constante gravitacional em Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo curvo não será sempre a mesma, assim sendo, os fenômenos dessa teoria dependerão do parâmetro μ.

Capítulo 2

Renormalização do Modelo de Yukawa com um único escalar estéril

Vimos que a ação efetiva é um instrumento importantíssimo na teoria quântica de campos e pode ser calculada através da expansão em *loops*. Contudo, nesta expansão são encontradas funções de vértices que dependem de integrais de Feynman que divergem para valores elevados de momentos. O que quer dizer que a teoria contém divergências na região do ultravioleta. Por este motivo precisamos utilizar um procedimento para reconstruir a teoria em que estamos trabalhando de modo que as divergências não estejam mais presentes na ação efetiva e as funções de vértice sejam finitas. Este procedimento é chamado de renormalização e pode ser visto com mais detalhes em [2, 9, 13, 15].

2.1 Modelo de Yukawa com escalar estéril e divergências a um *loop*

Vamos considerar o modelo de Yukawa com um único escalar estéril real φ acoplado a N cópias de férmions Ψ. A ação clássica que iremos trabalhar é dada por

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ i\bar{\Psi}_i \left(\gamma^\mu \nabla_\mu + iM + ih\varphi\right)\delta^{ij}\Psi_j + \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2 + \xi R\varphi^2\right) \\ &- \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{g}{3!}\varphi^3 - \tau\varphi - fR\varphi\Big\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $i, j = 1, \cdots, N$, γ^μ são as matrizes de Dirac, m é a massa do campo escalar, M é a massa do campo espinorial, h é a constante de acoplamento de Yukawa, λ, g e τ são as constantes de acoplamento no setor escalar que sobrevivem no limite plano, enquanto ξ e f são os parâmetros não-mínimos do campo escalar acoplados à gravidade. Na última linha da ação (2.1) existem termos que são ímpares no campo φ, como veremos a seguir esses termos são elementos necessários para que a teoria se torne consistente.

Os termos com potências ímpares e seus parâmetros correspondentes g, τ e f não foram analisados de forma precisa nas considerações anteriores do modelo apresentados em [1, 2, 3, 4], independentemente dos termos ímpares terem sido identificados nas divergências a 1-*loop*. Para a teoria quântica de campo formal, a teoria consistente de um escalar estéril acoplado a férmions deve incluir esses termos desde o princípio e essa é a abordagem que seguiremos.

Começaremos com a ação efetiva a 1-*loop* dada pela equação (1.29),

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}. \tag{2.2}$$

Para encontrar o operador $\hat{H}$, podemos decompor os campos de matéria em campos de fundo $\varphi,\ \bar{\Psi},\ \Psi$ e parte quântica σ, $\bar{\eta}$, η,

$$\varphi \to \varphi + \sigma, \qquad \bar{\Psi}_i \to \bar{\Psi}_i + \bar{\eta}_i, \qquad \Psi_j \to \Psi_j + \eta_j. \tag{2.3}$$

As divergências a 1-*loop* são definidas pela parte bilinear da ação, que envolve o operador $\hat{H}$,

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\begin{pmatrix}\sigma & \bar{\eta}_i\end{pmatrix}\hat{H}\begin{pmatrix}\sigma \\ \eta_j\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\sigma H_{11}\sigma + \bar{\eta}_i H_{21}\sigma + \sigma H_{12}\eta_j + \bar{\eta}_i H_{22}\eta_j\Big\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ou na forma explícita

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{2i\bar{\eta}_i(\nabla\!\!\!/ + iM)\eta_j\delta^{ij} - \sigma\Box\sigma - m^2\sigma^2 + \xi R\sigma^2 \\ &- 2h(\varphi\bar{\eta}_i\eta_j + \sigma\bar{\Psi}_i\eta_j + \sigma\bar{\eta}_i\Psi_j)\delta^{ij} - \frac{\lambda}{2}\sigma^2\varphi^2 - g\varphi\sigma^2\Big\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aqui o quadrático na ação dos campos quânticos $S^{(2)}$ depende do campo gravitacional e dos campos de fundo $\bar{\Psi},\ \Psi, \varphi$. Conseguimos então, escrever o operador $\hat{H}$ como

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \xi R - \Box - m^2 - g\varphi - \frac{\lambda}{2}\varphi^2 & -2h\bar{\Psi}_j \\ -2h\Psi_i & 2i(\nabla\!\!\!/ + iM + ih\varphi)\delta^{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

A fim de reduzir o problema de derivar $\ln \mathrm{Det}\, \hat{H}$ para a forma padrão, introduzimos o operador de matriz conjugada $\hat{H}^*$,

$$\hat{H}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(i\nabla\!\!\!/ + M) \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Como vimos anteriormente a ação efetiva a 1-*loop* tem a forma $\sim$ Tr $\ln(\hat{H})$. Para calcular as divergências da ação efetiva, vamos escrevê-lo como

$$\mathrm{Tr}\,\ln(\hat{H}) \;=\; \mathrm{Tr}\,\ln(\hat{H}\hat{H}^*) - \;\mathrm{Tr}\,\ln(\hat{H}^*). \tag{2.8}$$

Note que $\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}^*$ contribui apenas para as divergências de vácuo, que já são conhecidas por um modelo arbitrário [2, 18]. Portanto, é suficiente calcular as divergências do produto $\hat{H}\hat{H}^*$, que tem a forma padrão

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{H}\hat{H}^* = \hat{1}\Box + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}, \tag{2.9}$$

onde podemos identificar os seguintes operadores

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \Box - \xi R + m^2 + g\varphi + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 & -h\bar{\Psi}_j(i\nabla\!\!\!/ - M) \\ -2h\Psi_i & \delta^{ij}\Big[\Box - \frac{1}{4}R + M^2 - h\varphi(i\nabla\!\!\!/ - M)\Big] \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\hat{h}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}h\bar{\Psi}_j\gamma^\mu \\ 0 & \frac{i}{2}h\varphi\gamma^\mu\delta^{ij} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

e

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 - \xi R + g\varphi & hM\bar{\Psi}_j \\ 2h\Psi_i & \delta^{ij}\Big[M^2 - \frac{1}{4}R + hM\varphi\Big] \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

As divergências a 1-*loop* podem ser derivadas por meio da técnica de Schwinger–DeWitt e são dadas pela expressão geral (1.51). Para obtermos os operados $\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}$ precisamos dos seguintes termos que derivam da equação (2.11),

$$\nabla_\mu\hat{h}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}h\nabla_\mu\bar{\Psi}_j\gamma^\mu \\ 0 & \frac{i}{2}h\nabla_\mu\varphi\gamma^\mu\delta^{ij} \end{pmatrix}, \quad \hat{h}_\mu\hat{h}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -h^2\bar{\Psi}_k\varphi \\ 0 & -h^2\varphi^2\delta^{ik} \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \qquad \hat{h}_\mu\hat{h}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4}h^2\bar{\Psi}_k\varphi\gamma_\mu\gamma_\nu \\ 0 & -\frac{1}{4}h^2\varphi^2\gamma_\mu\gamma_\nu\delta^{ik} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

A substituição de (2.13) em (1.46) nos leva a

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda\varphi^2}{2} + g\varphi + m^2 - \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R & hM\bar{\Psi}_k - \frac{i}{2}h(\nabla_\mu \bar{\Psi}_k)\gamma^\mu + h^2\bar{\Psi}_k\varphi \\ 2h\Psi_i & \Big[M^2 - \frac{1}{12}R + hM\varphi - \frac{i}{2}h(\nabla_\mu\varphi)\gamma^\mu + h^2\varphi^2\Big]\delta^{ik} \end{pmatrix}$$

e

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2}h\left((\nabla_\mu\bar{\Psi}_k)\gamma_\nu - (\nabla_\nu\bar{\Psi}_k)\gamma_\mu\right) + \frac{1}{4}h^2\bar{\Psi}_k\varphi\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ 0 & \Big[\frac{1}{4}R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta - \frac{i}{2}h\left((\nabla_\mu\varphi)\gamma_\nu - (\nabla_\nu\varphi)\gamma_\mu\right) + \frac{1}{4}h^2\varphi^2\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\Big]\delta^{ik} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Assim, o resultado final para a divergência a 1-*loop* é

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}_{div} &= -\frac{\mu^{D-4}}{\varepsilon}\int d^Dx\sqrt{-g}\,\bigg\{\frac{m^4}{2} - 2NM^4 + \Big[\frac{N}{3}M^2 - m^2\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\Big]R + 2Nh^2(\partial_\mu\varphi)^2 \\ &+ \frac{8N-1}{180}R^2_{\mu\nu} + \Big[\frac{5N+1}{45} - \frac{1}{6}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\Big]\Box R + \sum_k 3ih^2\bar{\Psi}_k\Big[\frac{1}{2}\nabla\!\!\!/ - iM - ih\varphi\Big]\Psi_k \\ &- \Big[\frac{1}{2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)^2 + \frac{N}{18}\Big]R^2 + \frac{1}{6}\Big(g\varphi - 8NhM\Big)\Box\varphi + \frac{1}{2}\Big(g^2 + \lambda m^2 - 24Nh^2M^2\Big)\varphi^2 \\ &+ \frac{1}{12}\Big(\lambda - 16Nh^2\Big)\Box\varphi^2 - \frac{1}{2}\Big[\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\lambda - \frac{2}{3}Nh^2\Big]R\varphi^2 + \Big(\frac{N}{24} + \frac{1}{45}\Big)R^2_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &+ (m^2g - 8NhM^3)\varphi + \Big(\frac{1}{8}\lambda^2 - 2Nh^4\Big)\varphi^4 - \Big(8NMh^3 - \frac{1}{2}\,g\lambda\Big)\varphi^3 \\ &- \Big[g\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big) - \frac{2}{3}NhM\Big]R\varphi\bigg\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde as divergências de vácuo também foram incluídas para completude.

O resultado (2.15) confirma nossas expectativas, ou seja, todos os termos ímpares que foram acrescidos na ação clássica (2.1) realmente surgem nas divergências a 1-*loop*. A razão é que, na teoria com escalar estéril, esses termos não são protegidos por nenhum tipo de simetria e, portanto, era esperado que eles aparecessem. Na medida em que temos as divergências de potência ímpar, devemos esperar as contribuições logarítmicas na parte finita correspondente da ação efetiva, em particular no potencial efetivo de um escalar estéril. Nas próximas seções, veremos que essa expectativa será confirmada. E vale a pena ressaltar que os termos ímpares podem afetar o aspecto dos fatores de forma não locais, semelhante ao que tínhamos no modelo Yukawa para os termos pares [20] e anteriormente para um escalar auto-interagente [21]. A discussão desta questão vai além da estrutura do presente trabalho e será deixada para o futuro.

2.2 Renormalização no espaço-tempo curvo

A fim de renormalizar a teoria, aplicamos o esquema de Subtração Mínima (SM) no espaço-tempo curvo [2], que consiste em absorver a parte divergente das correções radiativas nos contratermos. Os contratermos podem ser escritos como $\Delta S = -\Gamma_{div}$. Assim, a ação clássica renormalizada, $S_R = S + \Delta S$, deve ser igual à ação fundamental S_0. Desta forma, podemos escrever as relações de renormalização para os campos como

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left(1 + \frac{2Nh^2}{\epsilon}\right) \varphi, \\
\Psi_{k0} &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left(1 + \frac{3}{4\epsilon} h^2\right) \Psi_k, \\
\bar{\Psi}_{k0} &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left(1 + \frac{3}{4\epsilon} h^2\right) \bar{\Psi}_k.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Para as massas as relações de renormalização são

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \left(1 - \frac{9}{2\epsilon} h^2\right) M, \\
m_0^2 &= m^2 - \frac{g^2 + 4Nh^2m^2 + \lambda m^2 - 24Nh^2M^2}{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Para os acoplamentos pares usuais e parâmetros não-mínimos, temos

$$
\begin{aligned}
\xi_0 &= \xi - \frac{\lambda + 4Nh^2}{\epsilon} \left(\xi - \frac{1}{6}\right), \\
h_0 &= \mu^{\frac{4-D}{2}} h \left(1 - \frac{4Nh^2 + 9h^2}{2\epsilon}\right), \\
\lambda_0 &= \mu^{4-D} \left(\lambda + \frac{48Nh^4 - 8N\lambda h^2 - 3\lambda^2}{\epsilon}\right).
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

E, finalmente, para os acoplamentos ímpares e parâmetros não-mínimos,

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \mu^{\frac{4-D}{2}} \left(g + \frac{48NMh^3 - 3g\lambda - 6Nh^2g}{\epsilon}\right), \\
\tau_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left(\tau + \frac{8NhM^3 - 2N\tau h^2 - m^2g}{\epsilon}\right), \\
f_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}} \left[f + \frac{g}{\epsilon}\left(\xi - \frac{1}{6}\right) - \frac{2NhM + 6Nfh^2}{3\epsilon}\right].
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Essas expressões demonstram a renormalização não trivial dos parâmetros de acoplamento ímpares, incluindo o novo parâmetro não-mínimo f.

2.3 Cálculo do Potencial Efetivo

Na primeira parte desta seção, consideramos a equação do grupo de renormalização para o potencial efetivo e discutimos sua solução para o modelo sob consideração até a primeira ordem na curvatura escalar. Na segunda parte calculamos o potencial efetivo de forma direta através das coordenadas normais de Riemann.

2.3.1 Cálculo via Grupo de Renormalização

A forma da equação do grupo de renormalização é definida pelas correspondentes funções beta e gama que são calculadas com base nas relações de renormalização para os parâmetros e campos.

Partindo da equação (1.60) podemos escrever as funções beta da seguinte forma

$$\beta_P = \lim_{D\to 4} \mu \frac{dP}{d\mu}, \tag{2.20}$$

onde $P = \{m, M, h, \lambda, \xi, g, \tau, f\}$ são os parâmetros renormalizados. O esquema de derivação é descrito em [2] e não vamos repetir aqui, mas apenas apresentar os resultados. Como $\mu\frac{dP}{d\mu} = 0$, para o cálculo baseado nas relações (2.17), (2.18) e (2.19) obtemos as seguintes funções beta

$$\begin{aligned}
\beta_h &= \frac{(4N+9)h^3}{(4\pi)^2}, \\
\beta_M &= \frac{9h^2 M}{2(4\pi)^2}, \\
\beta_\lambda &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(8N\lambda h^2 + 3\lambda^2 - 48Nh^4\Big), \\
\beta_\xi &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(4Nh^2 + \lambda\Big)\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big), \\
\beta_g &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(3g\lambda + 6Ngh^2 - 48NMh^3\Big), \\
\beta_{m^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big[m^2\lambda + g^2 + \Big(4m^2 - 24M^2\Big)Nh^2\Big], \\
\beta_\tau &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(2N\tau h^2 + gm^2 - 8NhM^3\Big), \\
\beta_f &= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big[2Nfh^2 - g\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big) + \frac{2}{3}NMh\Big].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

As funções gama são definidas por (1.61) da seguinte forma

$$\gamma_\Phi \Phi = \lim_{D\to 4} \mu \frac{d\Phi}{d\mu}, \tag{2.22}$$

onde Φ são os campos renormalizados, $\Phi = \{\varphi,\, \Psi_k\}$. As relações (2.16) nos leva a

$$\gamma_\varphi = -\frac{2Nh^2}{(4\pi)^2}, \tag{2.23}$$

$$\gamma_{\Psi_k} = -\frac{3h^2}{4(4\pi)^2}. \tag{2.24}$$

No caso da teoria invariante conforme, devemos fazer todas as constantes dimensionais m^2, M, g, τ e f desaparecer e definir $\xi = \frac{1}{6}$. Além disso, as funções beta têm o ponto fixo conforme correspondente, como tem que ser da perspectiva geral [22, 2].

Agora, discutiremos brevemente como encontrar o potencial efetivo da equação do grupo de renormalização do $\overline{\text{SM}}$ no espaço-tempo curvo. O ponto de partida é a equação (1.62), que escreveremos com os seguintes parâmetros

$$\Big\{\, \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_P\,\frac{\partial}{\partial P} \;+\; \int d^Dx\; \gamma_\Phi \Phi\, \frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\,\Big\} \times \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, D, \mu] = 0, \tag{2.25}$$

onde assumimos a soma sobre todos os parâmetros P e os campos Φ. De agora em diante vamos definir $D = 4$.

O potencial efetivo é definido como aproximação de ordem zero na expansão derivativa para o setor escalar de Γ,

$$\Gamma[g_{\alpha\beta}, \varphi, P, \mu] \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{ -V_{eff}\big(\varphi, g_{\alpha\beta}\big) + \frac{1}{2}\,Z\big(\varphi, g_{\alpha\beta}\big)g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \,+\, \dots\Big\}. \tag{2.26}$$

Como (2.25) é uma equação homogênea linear, obtemos

$$\Big\{\, \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_P\,\frac{\partial}{\partial P} \,+\, \gamma_\varphi\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big\}V_{eff}(g_{\alpha\beta}, \varphi, P, \mu) = 0. \tag{2.27}$$

A equação (2.27) significa que a dependência funcional explícita de μ no potencial efetivo é exatamente compensada pela dependência μ do campo escalar φ e parâmetros P. No nível a 1-*loop*, a última dependência pode ser escrita na forma simples, envolvendo a dependência logarítmica de primeira ordem, como podemos ver das expressões acima para as funções beta e gama.

Vamos procurar o potencial efetivo até os termos lineares em curvatura escalar, $V_{eff} = V_0 + RV_1$, onde V_0 é o potencial efetivo do espaço plano e RV_1 é a primeira correção dependente da curvatura para V_0. Ambas funções V_0 e V_1 satisfazem a equação (2.27). Antes de resolver as equações para V_0 e V_1, levaremos em conta que, na aproximação a 1-*loop*, cada spin dá uma contribuição aditiva à ação efetiva. Portanto, podemos escrever $V_0 = V_0^{(0)} + V_0^{(\frac{1}{2})}$ e

$V_1 = V_1^{(0)} + V_1^{(\frac{1}{2})}$, onde os índices (0) e $(\frac{1}{2})$ são a contribuição média de campos quânticos escalares e espinoriais, respectivamente. As quantidades $V_0^{(0)}$ e $V_0^{(\frac{1}{2})}$ correspondem à teoria em consideração no espaço plano. Nesta seção, demonstramos como eles podem ser encontrados a partir da equação do grupo de renormalização.

Vamos começar por encontrar $V_0^{(0)}$. A equação para esta quantidade tem a forma

$$\left\{ \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_P\,\frac{\partial}{\partial P} + \;\gamma_\varphi\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} V_0^{(0)}(\varphi, P, \mu) \;=\; 0. \tag{2.28}$$

A equação (2.28) é uma equação diferencial parcial complicada com coeficientes não constantes. Antes de resolver essa equação, é útil trazer considerações qualitativas que simplifiquem a solução. O parâmetro μ pode entrar na solução para $V_0^{(0)}$ somente logaritmicamente. Como o argumento do logaritmo deve ser adimensional, a dependência de μ deve ser através do parâmetro $t = \frac{1}{2}\ln\frac{X}{\mu^2}$, em que a quantidade X tem a dimensão de massa ao quadrado. Esta quantidade pode ser construída apenas a partir dos parâmetros dimensionais da ação clássica, isto é, a partir de m, M, φ, g, τ com coeficientes adimensionais arbitrários. Em princípio, esses coeficientes devem ser fixados com a ajuda de condições apropriadas de renormalização para o potencial efetivo. No entanto, é comum supor que a forma do potencial efetivo deve ser consistente com a forma do operador $\hat{\mathcal{H}}$ (2.9) no setor escalar. Isso significa que a escolha mais natural para X é $X^{(0)} = m^2 + g\varphi + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2$. Assim, identificamos

$$t^{(0)} \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{m^2 + g\varphi + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2}{\mu^2} \tag{2.29}$$

para a contribuição do campo escalar para o potencial efetivo. Os parâmetros M e h não contribuem no setor escalar. Assim sendo $V_0^{(0)} = V_0^{(0)}(t, m^2, g, \tau, \varphi)$ e a equação (2.28) torna-se

$$\left\{ \mu\frac{\partial}{\partial\mu} \;+\; \beta_{m^2}^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial m^2} + \beta_\lambda^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + \beta_g^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial g} + \beta_\tau^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial\tau} \;+\; \gamma_\varphi^{(0)}\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} V_0^{(0)} \;=\; 0. \tag{2.30}$$

Aqui as funções $\beta_\lambda^{(0)}$, $\beta_g^{(0)}$, $\beta_{m^2}^{(0)}$, $\gamma_\varphi^{(0)}$ e $\beta_\tau^{(0)}$ são tomadas em $M = 0$ e $h = 0$. Para a contribuição do campo escalar $\gamma_\varphi^{(0)} = 0$. O próximo passo é expressar a derivada em relação a μ através da derivada em relação ao parâmetro $t^{(0)}$ definido em (2.29). Como resultado, a equação (2.30) parece

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^{(0)}} - \bar{\beta}_{m^2}^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial m^2} - \bar{\beta}_\lambda^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda} - \bar{\beta}_g^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial g} - \bar{\beta}_\tau^{(0)}\,\frac{\partial}{\partial\tau} - \;\bar{\gamma}_\varphi^{(0)}\,\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi} \right\} V_0^{(0)} \;=\; 0, \tag{2.31}$$

onde

$$\left(\bar{\beta}^{(0)}_{m^2},\ \bar{\beta}^{(0)}_{\lambda},\ \bar{\beta}^{(0)}_{g},\ \bar{\beta}^{(0)}_{\tau},\ \bar{\gamma}^{(0)}_{\varphi}\right) = \frac{1}{1-Q^{(0)}}\left(\beta^{(0)}_{m^2},\ \beta^{(0)}_{\lambda},\ \beta^{(0)}_{g},\ \beta^{(0)}_{\tau},\ \gamma^{(0)}_{\varphi}\right) \tag{2.32}$$

e

$$Q^{(0)} = 1 - \frac{\partial t^{(0)}}{\partial m^2} - \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \lambda} - \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial t^{(0)}}{\partial g}. \tag{2.33}$$

A solução para a equação (2.31) pode ser escrita da seguinte forma

$$V^{(0)}_0\,(t^{(0)},\, m^2,\, \lambda,\, g,\, \tau,\, \varphi) = V_{0\ cl}(m^2(t^{(0)}),\, \lambda(t^{(0)}),\, g(t^{(0)}),\, \tau(t^{(0)}),\, \varphi(t^{(0)})), \tag{2.34}$$

onde

$$V_{0\ cl} = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{g}{3!}\varphi^3 + \tau\varphi \tag{2.35}$$

é o potencial clássico e $m^2(t^{(0)})$, $\lambda(t^{(0)})$, $g(t^{(0)})$, $\tau(t^{(0)})$ e $\varphi(t^{(0)})$ são os parâmetros de execução $P(t^{(0)})$ e o campo escalar, que satisfazem as equações

$$\begin{aligned} \frac{dP(t^{(0)})}{dt^{(0)}} &= \bar{\beta}^{(0)}_P(t^{(0)}), \\ \frac{d\varphi(t^{(0)})}{dt^{(0)}} &= \bar{\gamma}_{\varphi}(t^{(0)}) \end{aligned} \tag{2.36}$$

com a condição inicial

$$P(t)_{|t=0} = P. \tag{2.37}$$

Da mesma forma que antes, aqui $P = \{m^2,\, \lambda,\, g,\, \tau\}$. Como trabalhamos na aproximação a 1-*loop*, todas as correções quânticas são lineares em $\hbar$, portanto podemos definir a quantidade Q (2.33) igual a zero nas expressões para funções beta e gama. Então as soluções das equações (2.36) podem ser facilmente encontradas

$$\begin{aligned} P(t^{(0)}) &= P + \beta^{(0)}_P t^{(0)}, \\ \varphi(t^{(0)}) &= \varphi + \gamma^{(0)}_{\varphi} t^{(0)} = \varphi, \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde levamos em conta que $\gamma^{(0)}_{\varphi} = 0$. As relações (2.38) juntamente com as formas explícitas para as funções $\beta^{(0)}_P$ representam a solução para o potencial efetivo $V^{(0)}_0$.

A análise do $V^{(0)}_1$ pode ser feita de maneira similar, então pulamos os detalhes. O resultado tem a seguinte forma

$$V^{(0)}_1 = V_{1\,cl}(P_1(t^{(0)}),\, \varphi(t^{(0)})) \tag{2.39}$$

com $V_{1\,cl}R = -\frac{1}{2}\xi R\varphi^2 + fR\varphi$, $P_1(t^{(0)}) = P_1 + \beta^{(0)}_{P_1}t^{(0)}$ e $\beta^{(0)}_{P_1} = (\beta^{(0)}_{\xi},\, \beta^{(0)}_{f})$. Estas relações em conjunto com (2.39) são soluções finais para contribuição dependente da curvatura para o potencial efetivo do campo escalar quântico.

Agora, vamos encontrar a contribuição quântica $\bar{V}_0^{(\frac{1}{2})} + R\bar{V}_1^{(\frac{1}{2})}$ para o potencial efetivo do campo espinorial. Neste caso, começamos com a equação (2.27) para $V_0^{(\frac{1}{2})}$ e $V_1^{(\frac{1}{2})}$ separadamente, levando-se em consideração que a consistência com a forma do operador $\hat{\mathcal{H}}$ no setor fermiônico (3.4) motiva uma escolha natural para parâmetro sem dimensão contendo o logaritmo de μ na forma

$$t^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\ln\frac{(M+h\varphi)^2}{\mu^2}. \tag{2.40}$$

Todas as outras considerações são análogas as encontradas para $V_0^{(0)}$ e $V_1^{(0)}$. E portanto, apresentaremos apenas os resultados finais para as correções quânticas,

$$\bar{V}_1^{(\frac{1}{2})} \;=\; V_{0\;cl}(P^{(\frac{1}{2})}(t^{(\frac{1}{2})}),\, \varphi(t^{(\frac{1}{2})})), \tag{2.41}$$

e

$$R\bar{V}_1^{(\frac{1}{2})} \;=\; RV_{1\,cl}(P_1^{(\frac{1}{2})}(t^{(\frac{1}{2})}),\, \varphi(t^{(\frac{1}{2})})), \tag{2.42}$$

onde os parâmetros e campos em execução têm a forma

$$\begin{aligned} P^{(\frac{1}{2})}(t^{(\frac{1}{2})}) &= \beta_P^{(\frac{1}{2})}t^{(\frac{1}{2})}, \\ \varphi(t^{(\frac{1}{2})}) &= \gamma_\varphi^{(\frac{1}{2})}t^{(\frac{1}{2})}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Aqui nós resolvemos as equações para os parâmetros e campos de execução com condições iniciais zero, já que a contribuição clássica para o potencial efetivo foi encontrada quando calculamos $V_0^{(0)}$ e $V_1^{(0)}$. As funções $\beta_P^{(\frac{1}{2})}$ e $\gamma_\varphi^{(\frac{1}{2})}$ nas relações (2.43) apresentam os parâmetros M e h, sendo os outros parâmetros m^2, λ, g, τ, ξ iguais a zero. As relações (2.41) e (2.42) definem a contribuição final para o potencial efetivo do campo espinorial quântico.

Assim, estamos em posição de apresentar uma expressão explícita para o potencial efetivo baseado no esquema de Subtração Mínima,

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= \frac{1}{2}\,m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\,\xi R\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\varphi^4 + \frac{g}{3!}\varphi^3 + \tau\varphi + fR\varphi \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2}\Big\{\Big[\frac{\lambda m^2+g^2}{2}\,t^{(0)} - 12NM^2h^2t^{(\frac{1}{2})} + C_1\Big]\varphi^2 \\
&+ \big[gm^2t^{(0)} - 8NhM^3t^{(\frac{1}{2})} + C_5\big]\varphi + \Big[\frac{Nh^2}{3}\,t^{(\frac{1}{2})} - \frac{\lambda}{2}\,\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)t^{(0)} + C_2\Big]R\varphi^2 \\
&+ \frac{1}{4!}\,\big[3\lambda^2t^{(0)} - 48Nh^4t^{(\frac{1}{2})} + C_4\big]\varphi^4 + \Big[\frac{2NMh}{3}\,t^{(\frac{1}{2})} - g\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)t^{(0)} + C_6\Big]R\varphi \\
&+ \frac{1}{3!}\,\Big[3\lambda g\,t^{(0)} - 48NMh^3t^{(\frac{1}{2})} + C_3\Big]\varphi^3\Big\}, \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

onde $t^{(0)}$ e $t^{(\frac{1}{2})}$ foram identificados em (2.29) e (2.40). As constantes $C_{1\,...\,6}$ podem ser encontradas nas condições iniciais de renormalização. Por exemplo, os dois valores bem conhecidos que correspondem às escolhas padrão no caso escalar sem massa são $C_4 = -\frac{25}{6}$ obtidos em [8] e $C_2 = -3$ obtidos em [6] (veja [2] para uma derivação mais pedagógica). Como esse cálculo dos valores de $C_{1\,...\,6}$ para a teoria massiva é bastante complicado e não há aplicações imediatas, nós o ignoramos. Vamos enfatizar que as correções quânticas na Eq. (2.44) possuem termos qualitativamente novos com potências ímpares de um campo escalar estéril, multiplicados pelos dois tipos de logs. A definição final das constantes de renormalização correspondentes $C_{3,5,6}$ requer medições independentes e pode ser alcançada somente dentro de uma estrutura experimental ou observacional apropriada.

2.3.2 Cálculo via Coordenadas Normais de Riemann

Os resultados das seções anteriores mostraram a importância dos termos ímpares no campo escalar. Isso é algo que aprendemos com as divergências derivadas da estrutura do método de Schwinger-DeWitt. Devido à importância desse cálculo quântico, parece razoável controlar seu resultado por um método qualitativamente diferente. Isto é feito na presente subseção derivando o potencial efetivo na aproximação $\mathcal{O}(R)$ - usando as coordenadas normais e a representação do momento local, de maneira similar ao que foi feito recentemente em [10], onde é possível encontrar muitos detalhes técnicos relevantes e outras referências.

Contribuição escalar

Estas coordenadas estão relacionadas com as linhas geodésicas que ligam um ponto de referência $P'(x^{\mu'})$ em outro ponto com as coordenadas $x^{\mu'} = x^\mu + y^\mu$. Para usar a representação do momento local, assumimos que $g_{\mu\nu}(P') = \eta_{\mu\nu}$. Nas proximidades deste ponto, na aproximação de curvatura linear, temos

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}(x') - \frac{1}{3} R_{\alpha\mu\beta\nu}(x') y^\mu y^\nu \, + \, \cdots \, . \tag{2.45}$$

Então, o operador bilinear no setor escalar pode ser escrito como

$$-\hat{H} \;\; = \;\; -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta^2 S_{scalar}}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(x')} \; = \Box + m^2 - \xi R + V'', \tag{2.46}$$

onde V'' é a segunda derivada do potencial clássico

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{g}{3!}\varphi^3 + \tau\varphi + fR. \tag{2.47}$$

O cálculo adicional nesta subseção essencialmente repetirá o de [10], mas com outro potencial (2.47). Incluímos esta pequena parte de revisão para tornar toda a apresentação mais consistente.

Podemos expandir o operador D'Alembertiano na equação (2.46) em coordenadas normais de Riemann

$$-\hat{H} \;\; = \;\; \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{3} R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta \partial_\mu\partial_\nu - \frac{2}{3} R^\alpha{}_\beta y^\beta \partial_\alpha + m^2 - \xi R + V'' \, + \, \cdots \, . \tag{2.48}$$

onde $\cdots$ indica termos de ordem superior na curvatura.

A principal vantagem da representação do momento local é que o cálculo pode ser realizado em espaço-tempo plano e o resultado pode ser sempre apresentado de forma covariante. Por exemplo, a equação para o propagador de um campo escalar real tem a forma

$$\hat{H} G(x,x') = -\delta^c(x,x'), \tag{2.49}$$

onde $\delta^c(x,x') = g^{-\frac{1}{4}}(x')\delta(x,x')g^{-\frac{1}{4}}(x)$ é uma função delta de Dirac covariante.

Como vamos fazer cálculos em torno da métrica simples, é mais útil trabalhar com o propagador modificado $\bar{G}(x,x')$ onde

$$\hat{H}\bar{G}(x,x') = -\delta(x,x')$$

A forma explícita de $\bar{G}(x,x')$ é conhecida [11, 14] para o caso livre quando $V'' = 0$ e para o potencial ímpar com φ constante [10]. Na medida em que seja suficiente considerar $V'' = const$ para a derivação do potencial efetivo, podemos substituir m^2 por $\tilde{m}^2 = m^2 + V''$ e obter, em primeira ordem da expansão de curvatura, a seguinte expressão:

$$\bar{G}(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \Big[\frac{1}{k^2 + \tilde{m}^2} - \Big(\xi - \frac{1}{6}\Big) \frac{R}{(k^2 + \tilde{m}^2)^2} \Big] \, + \, \cdots \, . \tag{2.50}$$

Podemos expandir $\hat{H}$ e $\bar{G}(x,x')$ até a primeira potência de curvatura escalar como

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 R + O(R^2_{...})\,,\\ \bar{G} &= \bar{G}_0 + \bar{G}_1 R + O(R^2_{...})\,.\end{aligned}$$

A partir deste ponto, os termos $\mathcal{O}(R^2_{...})$ não serão mencionados.

Como $\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H} = -\,\mathrm{Tr}\,\ln G(x,x')$, nós temos

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \bar{G}(x,x') = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\,(\hat{H}_0 + \hat{H}_1 R) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}_0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\bar{G}_0 \hat{H}_1 R). \tag{2.51}$$

Considere primeiro o potencial efetivo no espaço plano. O primeiro termo no lado direito de (2.51) inclui a contribuição de espaço plano $\bar{V}_0(\varphi)$, que pode ser definido como

$$\bar{V}_0(\varphi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln S_2(\varphi) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln S_2(\varphi = 0). \tag{2.52}$$

Aqui S_2 é a forma bilinear da ação do campo escalar clássico,

$$S_2(\varphi) \;=\; \frac{1}{2}\int d^4x \Big\{\varphi\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi + V'' + m^2\Big\}. \tag{2.53}$$

Como resultado, temos

$$\bar{V}_0(\varphi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\Big\{\frac{\Box + V'' + m^2}{\Box + m^2}\Big\}. \tag{2.54}$$

Ao contrário das seções anteriores, todos os cálculos subsequentes serão realizados na regularização *cut-off*, o que ajuda a simplificar as contas e torná-las mais explícitas. A equação (2.54) pode ser escrita no espaço de momentos. Depois de integrar nas coordenadas angulares e introduzir um *cut-off*, temos

$$\bar{V}_0(\varphi) \;=\; \frac{1}{2(4\pi)^2}\int_0^{\Omega} k^2 dk^2 \ln\Big(\frac{k^2 + V'' + m^2}{k^2 + m^2}\Big). \tag{2.55}$$

Tomando a última integral, depois de alguma álgebra obtemos

$$\begin{aligned}&\bar{V}_0(\varphi,\eta_{\mu\nu}) = \bar{V}_0^{div} + \bar{V}_0^{fin},\\ &V_0^{div} = \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big\{\Omega^2 V'' - \frac{1}{2}(V''+m^2)^2 \ln\frac{\Omega^2}{m^2}\Big\},\\ &\bar{V}_0^{fin} = \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big\{\frac{1}{2}(V''+m^2)^2\ln\Big(1+\frac{V''}{m^2}\Big) - \frac{1}{4}(V''+m^2)^2\Big\}.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Para cancelar as divergências, seguimos o esquema de subtração mínima e introduzimos um contra-termo apropriado na forma

$$\Delta V_0 = \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big\{-\Omega^2 V'' + \frac{1}{2}(V''+m^2)^2\ln\frac{\Omega^2}{\mu^2} + \frac{1}{4}(V''+m^2)^2\Big\}, \tag{2.57}$$

onde μ é o parâmetro de renormalização dimensional. Desta forma, as divergências quadráticas e logarítmicas são eliminadas e o potencial efetivo renormalizado pode ser escrito como

$$V_{eff}^{ren}(\eta_{\mu\nu},\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V + \bar{V}_0 + \Delta V_0 = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + V + \frac{(V''+m^2)^2}{64\pi^2}\,\ln\Big(\frac{V''+m^2}{\mu^2}\Big). \quad (2.58)$$

Vamos considerar as correções lineares na curvatura. A contribuição de primeira ordem é devida ao segundo termo no lado direito da Eq. (2.52). Este termo pode ser facilmente apresentado na forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\bar{G}_0\hat{H}_1 R) &= \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4x' [\bar{G}_0^{-1}(x,x')\bar{G}_1(x',x)]R \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x \int d^4x' R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x'-x)}\bar{G}_0^{-1}(k)\bar{G}_1(p) \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\, R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{G}_0^{-1}(k)\bar{G}_1(k) \quad (2.59)
\end{aligned}$$

e, portanto

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\bar{G}_0\hat{H}_1 R) = -\frac{1}{2(4\pi)^2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\int d^4x\, R \int_0^{\Omega} \frac{k^2 dk^2}{k^2+\tilde{m}^2}. \quad (2.60)$$

Depois de tirar a última integral, o resultado final é lido

$$\bar{V}(\varphi, g_{\mu\nu}) = \bar{V}_0 + \bar{V}_1 R, \quad (2.61)$$

onde $\bar{V}_0$ é dado pela Eq. (2.58) e $\bar{V}_1 = \bar{V}_1^{fin} + \bar{V}_1^{div}$, onde

$$\begin{aligned}
\bar{V}_1^{div} &= \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\Big[-\Omega^2 + (V''+m^2)\ln\frac{\Omega^2}{m^2}\Big], \\
\bar{V}_1^{fin} &= \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\Big[(V''+m^2)\ln\Big(\frac{V''+m^2}{m^2}\Big)\Big]. \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Semelhante ao caso de espaço plano, o potencial deve ser modificado pela adição de um contra-termo,

$$\Delta\bar{V}_1 = \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)\Big[\Omega^2 - (V''+m^2)\ln\frac{\Omega^2}{\mu^2}\Big]. \quad (2.63)$$

Assim, a expressão renormalizada é

$$V_{eff,1}^{ren}(g_{\mu\nu},\varphi) = -\frac{1}{2}\xi R\varphi^2 - \frac{1}{2(4\pi)^2}\Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)(V''+m^2)\ln\Big(\frac{V''+m^2}{\mu^2}\Big). \quad (2.64)$$

O potencial efetivo renormalizado completo para o setor escalar de (3.1) é a soma das expressões (2.58) e (2.64),

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{ren}(g_{\mu\nu},\varphi) &= \rho_\Lambda + \frac{1}{2}(m^2 - \xi R)\varphi^2 + V + \frac{\hbar}{2(4\pi)^2}\Big[\frac{1}{2}(V''+m^2)^2 - \Big(\xi - \frac{1}{6}\Big)R(V''+m^2)\Big] \\
&\cdot\ \ln\Big(\frac{V''+m^2}{\mu^2}\Big), \quad (2.65)
\end{aligned}$$

onde restauramos a primeira potência do parâmetro de *loop* $\hbar$ e adicionamos o termo constante cosmológico, ρ_Λ.

Contribuição fermiônica

Vamos considerar agora a contribuição fermiônica para o potencial efetivo do escalar estéril. No caso do potencial, o campo de fundo φ pode ser tratado como uma constante, portanto, denotamos $\tilde{M} = M + h\varphi$. Tomando em consideração a paridade de Grassmann do campo quântico, nas notações euclidianas

$$\Gamma_f^{(1)}[\varphi, g_{\mu\nu}] \,=\, -\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}_f, \tag{2.66}$$

onde $\hat{H}_f = i(\gamma^\mu \nabla_\mu + i\tilde{M})\delta^{ij}$. Como de costume, nós consideramos [31]

$$\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}_f = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\,(\hat{H}_f \hat{H}_f^*), \tag{2.67}$$

com $\hat{H}_f^* = i(\gamma^\mu \nabla_\mu - i\tilde{M})\delta_{jk}$. Depois de alguma álgebra, temos

$$\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}_f = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \Big(-\Box + \frac{1}{4}R - \tilde{M}^2 \Big)\delta^i_k\,. \tag{2.68}$$

O propagador fermiônico é definido a partir da relação

$$(\hat{H}_f \hat{H}_f^*)\mathcal{G}(x, x') = -\delta^c(x, x'). \tag{2.69}$$

Seguindo o mesmo esquema que foi usado no caso escalar, pode-se definir o propagador modificado

$$\mathcal{G}(x, x') \,=\, \bar{\mathcal{G}}(x, x') g^{-\frac{1}{4}}(x), \tag{2.70}$$

que satisfaz a equação

$$(\hat{H}_f \hat{H}_f^*)\bar{\mathcal{G}}(x, x') = -\delta(x, x'). \tag{2.71}$$

A partir do artigo de Bunch e Parker [11], aprendemos que $\bar{\mathcal{G}}(x, x') = \bar{\mathcal{G}}(y)$ é definido como

$$\bar{\mathcal{G}}(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} \Big[1 - \frac{1}{12} R \frac{\partial}{\partial \tilde{M}^2} \Big] (k^2 + \tilde{M}^2)^{-1} \hat{1} \tag{2.72}$$

na primeira ordem em curvatura. Portanto,

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \mathcal{G}(x, x') = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln \hat{H}_f = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\ln\,(\hat{H}_f \hat{H}_f^*). \tag{2.73}$$

Usando as mesmas considerações que utilizamos para o campo escalar, descobrimos que

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\ln\mathcal{G}(x,x') = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\ln(\hat{H}_f\hat{H}_f^*)_0 + \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\bar{\mathcal{G}}_0(\hat{H}_f\hat{H}_f^*)_1 R. \tag{2.74}$$

O primeiro termo do lado direito corresponde ao caso para o espaço plano e o segundo é a primeira ordem para contribuição da curvatura. Vamos primeiro realizar o cálculo no espaço plano, quando

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\ln(\hat{H}_f\hat{H}_f^*)_0 \;=\; \frac{1}{4}\,\mathrm{sTr}\,\ln(-\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \tilde{M}^2)\,\delta^i_k.$$

Na representação de momento isso dá

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\ln(\hat{H}_f\hat{H}_f^*)_0 \;=\; (-2N)\int_0^\Omega \frac{dk^2}{(4\pi)^2}k^2\ln\Big(\frac{1}{k^2+\tilde{M}^2}\Big),$$

que fornece a parte do espaço plano do potencial efetivo a 1-*loop*,

$$V_0^{div}(fer) \;=\; -\frac{2N}{(4\pi)^2}\Big\{\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\Omega^2}{\tilde{M}^2}\Big)\tilde{M}^4 + \frac{1}{4}\Omega^2\Big\}. \tag{2.75}$$

Para renormalizar este resultado, introduzimos um contra-termo da forma

$$\Delta V_0 = \frac{2N}{(4\pi)^2}\Big\{\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\Omega^2}{\mu^2}\Big)\tilde{M}^4 + \frac{1}{4}\Omega^2\Big\}. \tag{2.76}$$

Então,

$$V_0^{ren}(fer) = \frac{N}{(4\pi)^2}\ln\Big(\frac{\tilde{M}^2}{\mu^2}\Big)\tilde{M}^4. \tag{2.77}$$

A contribuição na primeira ordem de curvatura é

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\bar{\mathcal{G}}_0(\hat{H}_f\hat{H}_f^*)_1 R = (-2N)\int d^4x R \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{\mathcal{G}}_0^{-1}(k)\bar{\mathcal{G}}_1(k), \tag{2.78}$$

que pode ser escrito no espaço de momento como

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,\bar{\mathcal{G}}_0(\hat{H}_f\hat{H}_f^*)_1 R = -\frac{N}{6(4\pi)^2}R\int_0^\Omega dk^2\frac{k^2}{k^2+\tilde{M}^2}.$$

Assim sendo,

$$V_1^{div}(fer)R \;=\; \frac{N}{6(4\pi)^2}R\Big\{\tilde{M}^2\ln\frac{\Omega^2}{\tilde{M}^2} + \Omega^2\Big\}, \tag{2.79}$$

enquanto não há parte finita remanescente neste caso. As divergências podem ser eliminadas pela adição de um contra-termo

$$\Delta V_1 \;=\; -\frac{N}{6(4\pi)^2}\Big\{\tilde{M}^2\ln\frac{\Omega^2}{\mu^2} + \Omega^2\Big\}. \tag{2.80}$$

Finalmente, a expressão para a contribuição fermiônica tem a forma

$$V_{ren}(fer) \;=\; -\frac{N}{(4\pi)^2}\Big\{\tilde{M}^4 - \frac{1}{6}R\tilde{M}^2\Big\}\ln\Big(\frac{\tilde{M}^2}{\mu^2}\Big). \tag{2.81}$$

Resumindo as contribuições escalares (2.65) e fermiônicas (2.81), chegamos à expressão geral para o potencial efetivo do nosso modelo, que inclui um único escalar real estéril e N cópias de campos fermiônicos massivos,

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{ren}(g_{\mu\nu},\varphi) \;&=\; \rho_\Lambda + \frac{1}{2}(m^2-\xi R)\varphi^2 + V + \frac{\hbar}{2(4\pi)^2}\Big\{-2N(M+h\varphi)^4\,\ln\Big[\frac{(M+h\varphi)^2}{\mu^2}\Big]\\
&+\; \Big[\frac{1}{2}(V''+m^2)^2 - \Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R(V''+m^2)\Big]\ln\Big(\frac{V''+m^2}{\mu^2}\Big)\\
&+\; \frac{N}{3}R(M+h\varphi)^2\ln\Big[\frac{(M+h\varphi)^2}{\mu^2}\Big]\Big\}\\
&=\; \rho_\Lambda + \frac{1}{2}\,m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\,\xi R\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\varphi^4 + \frac{g}{3!}\varphi^3 + \tau\varphi + fR\varphi + \frac{\hbar}{2(4\pi)^2}\Big\{-\big(2NM^4\\
&+\; 8NM^3h\varphi + 12NM^2h^2\varphi^2 + 8NM^3\varphi^3 + 2Nh^4\varphi^4\big)\ln\Big[\frac{(M+h\varphi)^2}{\mu^2}\Big]\\
&+\; \Big[\frac{1}{2}(m^4 + m^2\lambda\varphi^2 + 2m^2g\varphi + \frac{\lambda^2\varphi^4}{4} + \lambda g\varphi^3 + g^2\varphi^2)\\
&-\; \Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)R\Big(m^2 + \frac{\lambda\varphi^2}{2} + g\varphi\Big)\Big]\ln\Big(\frac{m^2+g\varphi+\frac{1}{2}\lambda\varphi^2}{\mu^2}\Big)\\
&+\; \frac{N}{3}R(M^2+2Mh\varphi+h^2\varphi^2)\ln\Big[\frac{(M+h\varphi)^2}{\mu^2}\Big]\Big\},
\end{aligned} \tag{2.82}$$

onde os termos interativos e ímpares do potencial clássico V são definidos na Eq. (2.47). É fácil verificar a correspondência com a expressão (2.44) derivada do grupo de renormalização baseada em subtração mínima com as identificações de escala (2.29) e (2.40),

$$\begin{aligned}
V_{eff} \;&=\; \frac{1}{2}\,m^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\,\xi R\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\varphi^4 + \frac{g}{3!}\varphi^3 + \tau\varphi + fR\varphi + \frac{1}{(4\pi)^2}\Big\{\Big[\frac{\lambda m^2+g^2}{2}\,t^{(0)}\\
&-\; 12NM^2h^2t^{(\frac{1}{2})} + C_1\Big]\varphi^2 + \Big[\frac{\lambda g}{2}\,t^{(0)} - 8NMh^3t^{(\frac{1}{2})} + C_3\Big]\varphi^3\\
&+\; \big[gm^2t^{(0)} - 8NhM^3t^{(\frac{1}{2})} + C_5\big]\varphi + \Big[\frac{Nh^2}{3}\,t^{(\frac{1}{2})} - \frac{\lambda}{2}\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)t^{(0)} + C_2\Big]R\varphi^2\\
&+\; \Big[\frac{\lambda^2}{8}t^{(0)} - 2Nh^4t^{(\frac{1}{2})} + C_4\big]\varphi^4 + \Big[\frac{2NMh}{3}\,t^{(\frac{1}{2})} - g\Big(\xi-\frac{1}{6}\Big)t^{(0)} + C_6\Big]R\varphi\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Os termos ímpares que aparecem no potencial são necessários para fornecer a consistência quântica da teoria de um escalar estéril acoplado a férmions. Isso implica que a ação gravitacional induzida possui termos não polinomiais que geram consequências relevantes. A discussão sobre os aspectos quânticos relacionados a ação induzida pode ser visto no artigo que publicamos referente a este modelo [5].

O potencial efetivo (2.82) depende de um parâmetro arbitrário μ. Para fixar o valor deste parâmetro, devemos impor as condições de renormalização de uma maneira usual.

Capítulo 3

Renormalização para o caso com dois campos escalares sendo um deles axial

Neste capítulo iremos basicamente refazer os cálculos para renormalização apresentados no capítulo anterior. Porém, vamos trabalhar com a ação clássica para dois campos escalares. Como já fizemos as considerações anteriormente, aqui descreveremos o assunto de forma mais breve e apresentaremos os resultados obtidos.

3.1 Modelo com dois escalares e divergências a 1-*loop*

Agora vamos considerar um campo escalar real φ e um campo escalar axial χ também real acoplados à N cópias de campo fermiônico com massa M. Desta forma, a ação clássica que iremos trabalhar é dada por,

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\bar{\Psi}_i\left(i\nabla\!\!\!/ - M - h_1\varphi - h_2\chi\gamma^5\right)\delta^{ij}\Psi_j + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi \\
&+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi - \frac{1}{2}m_1^2\varphi^2 - \frac{1}{2}m_2^2\chi^2 + \frac{1}{2}\xi_1 R\varphi^2 + \frac{1}{2}\xi_2 R\chi^2 - \frac{\lambda_1}{4!}\varphi^4 - \frac{\lambda_2}{4!}\chi^4 \\
&- \frac{\lambda_3}{2}\varphi^2\chi^2 - \frac{g}{3!}\varphi^3 - \frac{p}{2}\varphi\chi^2 - \tau\varphi - fR\varphi\Big\},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde m_1 é a massa do campo escalar, m_2 é a massa do campo axial, M é a massa do campo espinorial, h_1 e h_2 são as constantes de acoplamento de Yukawa, λ_1, λ_2, λ_3, g, p e τ são as constantes de acoplamento no setor escalar que sobrevivem no limite do espaço-tempo plano e ξ_1, ξ_2 e f são os parâmetros não-mínimos do acoplamento do campo escalar à gravidade.

Como já vimos, a ação efetiva depende do operador $\hat{H}$. Para enontrá-lo precisamos decompor os campos em clássicos φ, χ, $\bar{\Psi}$, Ψ e contratermos quânticos σ, ρ, $\bar{\eta}$, η,

$$\varphi \to \varphi + \sigma, \qquad \chi \to \chi + \rho, \qquad \bar{\Psi}_i \to \bar{\Psi}_i + \bar{\eta}_i, \qquad \Psi_j \to \Psi_j + \eta_j. \tag{3.2}$$

A forma explícita para a parte bilinear da expansão da ação é a seguinte

$$\begin{aligned} S^{(2)} =& \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\sigma\Big[-\Box - m_1^2 + \xi_1 R - g\varphi - \lambda_3\chi^2 - \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2\Big]\sigma + \rho[-4\varphi\chi\lambda_3 - 2p\chi]\sigma \\ &+ \bar{\eta}_i[-2h_1\Psi_i]\sigma + \sigma[-4\varphi\chi\lambda_3 - 2p\chi]\rho + \rho\Big[-\Box - m_2^2 + \xi_2 R - p\varphi - \lambda_3\varphi^2 - \frac{\lambda_2}{2}\chi^2\Big]\rho \\ &+ \bar{\eta}_i[-2h_2\gamma^5\Psi_i]\rho + \sigma[-2h_1\bar{\Psi}_j]\eta_j + \rho[-2h_2\bar{\Psi}_j\gamma^5]\eta_j \\ &+ \bar{\eta}_i\Big[2(i\nabla\!\!\!/ - M - h_1\varphi - h_2\chi\gamma^5)\delta^{ij}\Big]\eta_j\Big\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Depois de alguma álgebra, obtemos os elementos da matriz $\hat{H}$

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\Box - m_1^2 + \xi_1 R - g\varphi - \lambda_3\chi^2 - \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2, \\ H_{12} &= -4\varphi\chi\lambda_3 - 2p\chi, \\ H_{13} &= -2h_1\bar{\Psi}_j\,, \\ H_{21} &= -4\varphi\chi\lambda_3 - 2p\chi, \\ H_{22} &= -\Box - m_2^2 + \xi_2 R - p\varphi - \lambda_3\varphi^2 - \frac{\lambda_2}{2}\chi^2, \\ H_{23} &= -2h_2\bar{\Psi}_j\gamma^5, \\ H_{31} &= -2h_1\Psi_i\,, \\ H_{32} &= -2h_2\gamma^5\Psi_i\,, \\ H_{33} &= 2(i\nabla\!\!\!/ - M - h_1\varphi - h_2\chi\gamma^5)\delta^{ij}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Podemos reescrever o operador $\hat{H}$ da seguinte forma,

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{H}\hat{H}^* = \hat{1}\Box + 2\hat{h}^\mu\nabla_\mu + \hat{\Pi}, \tag{3.5}$$

onde

$$\hat{H}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(i\nabla\!\!\!/ + M) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{11} &= \Box + m_1^2 + \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2 - \xi_1 R + \lambda_3\chi^2 + g\varphi, \\
\mathcal{H}_{12} &= 2p\chi + 4\lambda_3\varphi\chi, \\
\mathcal{H}_{13} &= h_1\bar{\Psi}_j(i\nabla\!\!\!/ + M), \\
\mathcal{H}_{21} &= 2p\chi + 4\lambda_3\varphi\chi, \\
\mathcal{H}_{22} &= \Box + m_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}\chi^2 - \xi_2 R + \lambda_3\varphi^2 + p\varphi, \\
\mathcal{H}_{23} &= h_2\bar{\Psi}_j\gamma^5(i\nabla\!\!\!/ + M), \\
\mathcal{H}_{31} &= 2h_1\Psi_i\,, \\
\mathcal{H}_{32} &= 2h_2\gamma^5\Psi_i\,, \\
\mathcal{H}_{33} &= \delta^{ij}\big[\Box - \frac{1}{4}R + M^2 + h_1\varphi(i\nabla\!\!\!/ + M) + h_2\chi\gamma^5(i\nabla\!\!\!/ + M)\big].
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Podemos então, identificar os elementos não nulos das matrizes $\hat{h}^\mu$ e $\hat{\Pi}$,

$$
\begin{aligned}
h^\mu_{13} &= \frac{i}{2}h_1\bar{\Psi}_j\gamma^\mu, \\
h^\mu_{23} &= \frac{i}{2}h_2\bar{\Psi}_j\gamma^5\gamma^\mu, \\
h^\mu_{33} &= \frac{i}{2}(h_1\varphi + h_2\chi\gamma^5)\gamma^\mu\delta^{ij}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Pi_{11} &= m_1^2 + \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2 - \xi_1 R + g\varphi + \lambda_3\chi^2, \\
\Pi_{12} &= 2p\chi + 4\lambda_3\varphi\chi, \\
\Pi_{13} &= h_1 M\bar{\Psi}_j\,, \\
\Pi_{21} &= 2p\chi + 4\lambda_3\varphi\chi, \\
\Pi_{22} &= m_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}\chi^2 - \xi_2 R + p\varphi + \lambda_3\varphi^2, \\
\Pi_{23} &= h_2 M\bar{\Psi}_j\gamma^5, \\
\Pi_{31} &= 2h_1\Psi_i\,, \\
\Pi_{32} &= 2h_2\gamma^5\Psi_i\,, \\
\Pi_{33} &= \delta^{ij}\Big[M^2 - \frac{1}{4}R + h_1 M\varphi + h_2 M\chi\gamma^5\Big].
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

A partir da equação (1.46) podemos obter os elementos de matriz para os operadores $\hat{P}$ e $\hat{S}_{\mu\nu}$ necessários para encontrar as divergências a 1-*loop*. As expressões intermediárias são dadas por

$$\nabla_\mu \hat{h}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{i}{2} h_1 \nabla_\mu \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} h_2 \nabla_\mu \bar{\Psi}_j \gamma^5 \gamma^\mu \\ 0 & 0 & \frac{i}{2}(h_1 \nabla_\mu \varphi + h_2 \nabla_\mu \chi \gamma^5) \gamma^\mu \delta^{ij} \end{pmatrix},$$

$$\hat{h}_\mu \hat{h}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_1^2 \bar{\Psi}_k \varphi + h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \chi \gamma^5 \\ 0 & 0 & -h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \gamma^5 \varphi + h_2^2 \bar{\Psi}_k \chi \\ 0 & 0 & (-h_1^2 \varphi^2 + h_2^2 \chi^2) \delta^{ik} \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \qquad \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}(h_1^2 \bar{\Psi}_k \varphi - h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \chi \gamma^5) \gamma_\mu \gamma_\nu \delta^{ik} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}(h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \varphi \gamma^5 - h_2^2 \bar{\Psi}_k \chi) \gamma_\mu \gamma_\nu \delta^{ik} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}(h_1^2 \varphi^2 - h_2^2 \chi^2) \gamma_\mu \gamma_\nu \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_{11} &= m_1^2 + \frac{\lambda_1 \varphi^2}{2} + g\varphi - \left(\xi_1 - \frac{1}{6}\right) R + \lambda_3 \chi^2, \\ P_{12} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi \chi, \\ P_{13} &= h_1 \bar{\Psi}_k (M + h_1 \varphi - h_2 \chi \gamma^5) - \frac{i}{2} h_1 (\nabla_\mu \bar{\Psi}_k) \gamma^\mu, \\ P_{21} &= 2p\chi + 4\lambda_3 \varphi \chi, \\ P_{22} &= m_2^2 + \frac{\lambda_2 \chi^2}{2} + p\varphi - \left(\xi_2 - \frac{1}{6}\right) R + \lambda_3 \varphi^2, \\ P_{23} &= h_2 \bar{\Psi}_k (M\gamma^5 + h_1 \varphi \gamma^5 - h_2 \chi) - \frac{i}{2} h_2 (\nabla_\mu \bar{\Psi}_k) \gamma^5 \gamma^\mu, \\ P_{31} &= 2h_1 \Psi_i\,, \\ P_{32} &= 2h_2 \gamma^5 \Psi_i\,, \\ P_{33} &= \Big[M^2 - \frac{1}{12} R + h_1 M \varphi + h_2 M \chi \gamma^5 + h_1^2 \varphi^2 - h_2^2 \chi^2 \\ &- \frac{i}{2}(h_1 \nabla_\mu \varphi + h_2 \nabla_\mu \chi \gamma^5) \gamma^\mu \Big] \delta^{ik} \end{aligned} \tag{3.11}$$

e

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\,13} &= -\frac{i}{2} h_1 \left[(\nabla_\mu \bar{\Psi}_k)\gamma_\nu - (\nabla_\nu \bar{\Psi}_k)\gamma_\mu\right] + \frac{1}{4}(h_1^2 \bar{\Psi}_k \varphi - h_1 h_2 \bar{\Psi}_k \chi \gamma^5) \left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right], \\ S_{\mu\nu\,23} &= -\frac{i}{2} h_2 \left[(\nabla_\mu \bar{\Psi}_k)\gamma^5 \gamma_\nu - (\nabla_\nu \bar{\Psi}_k)\gamma^5 \gamma_\mu\right] + \frac{1}{4}(h_1 h_2 \varphi \bar{\Psi}_k \gamma^5 - h_2^2 \bar{\Psi}_k \chi) \left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right], \\ S_{\mu\nu\,33} &= \Big[[\nabla_\nu, \nabla_\mu] - \frac{i}{2} h_1 \left[(\nabla_\mu \varphi)\gamma_\nu - (\nabla_\nu \varphi)\gamma_\mu\right] - \frac{i}{2} h_2 \left[(\nabla_\mu \chi)\gamma^5 \gamma_\nu - (\nabla_\nu \chi)\gamma^5 \gamma_\mu\right] \\ &+ \frac{1}{4}(h_1^2 \varphi^2 - h_2^2 \chi^2) \left[\gamma_\mu, \gamma_\nu\right] \Big] \delta^{ik}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Finalmente, chegamos a relação final para a divergência a 1-*loop*,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{div} &= -\frac{\mu^{D-4}}{\varepsilon}\int d^Dx\sqrt{-g}\Bigg\{\sum_k 3\bar{\Psi}_k\Big[\frac{i}{2}h_1^2\nabla\!\!\!/ - \frac{i}{2}h_2^2\nabla\!\!\!/ + h_1^2(M + h_1\varphi - h_2\chi\gamma^5)\\
&+ h_2^2(M + h_1\varphi - h_2\chi\gamma^5)\Big]\Psi_k + 2Nh_1^2(\partial_\mu\varphi)^2 - 2Nh_2^2(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{m_1^4}{2} + \frac{m_2^4}{2}\\
&- 2NM^4 + \Big[\frac{N}{3}M^2 - m_1^2\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big) - m_2^2\Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big)\Big]R + \Big(\frac{N}{24} + \frac{1}{45}\Big)R^2_{\mu\nu\alpha\beta}\\
&+ \frac{8N-2}{180}R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Big[\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big)^2 + \Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big)^2 - \frac{N}{9}\Big]R^2\\
&+ \Big[\frac{1}{45} + \frac{N}{9} - \frac{1}{6}\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big) - \frac{1}{6}\Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big)\Big]\Box R + \frac{1}{6}\Big(g + p - 8Nh_1M\Big)\Box\varphi\\
&+ \frac{1}{12}\Big(\lambda_1 + 2\lambda_3 - 16Nh_1^2\Big)\Box\varphi^2 + \frac{1}{12}\Big(\lambda_2 + 2\lambda_3 + 16Nh_2^2\Big)\Box\chi^2\\
&+ \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}Nh_1^2 - \lambda_1\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big) - 2\lambda_3\Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big)\Big]R\varphi^2 + \Big(\frac{1}{8}\lambda_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^2 - 2Nh_1^4\Big)\varphi^4\\
&+ \Big[\frac{2}{3}Nh_1M - g\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big) - p\Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big)\Big]R\varphi + (m_1^2g + m_2^2p - 8Nh_1M^3)\varphi\\
&+ \frac{1}{2}\big(g^2 + p^2 + \lambda_1m_1^2 + 2\lambda_3m_2^2 - 24Nh_1^2M^2\big)\varphi^2 + \Big(\lambda_3p - 8NMh_1^3 + \frac{1}{2}\,g\lambda_1\Big)\varphi^3\\
&+ \frac{1}{2}\big(2\lambda_3m_1^2 + \lambda_2m_2^2 + 8p^2 + 8Nh_2^2M^2\big)\chi^2 + \Big(\frac{1}{2}\lambda_3^2 + \frac{1}{8}\lambda_2^2 - 2Nh_2^4\Big)\chi^4\\
&- \frac{1}{2}\Big[\lambda_2\Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big) + 2\lambda_3\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big) + \frac{2N}{3}h_2^2\Big]R\chi^2\\
&+ \frac{1}{2}\big[\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + 8Nh_1^2h_2^2 + 32\lambda_3^2\big]\varphi^2\chi^2\\
&+ \Big(g\lambda_3 + \frac{1}{2}p\lambda_2 + 16p\lambda_3 + 8Nh_1h_2^2M\Big)\varphi\chi^2\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Mais uma vez, podemos ver que os termos ímpares no campo escalar real φ que foram acrescidos na ação clássica inicial, (3.1), aparecem no resultado final para as divergências a 1-*loop* (3.13). Sendo os termos de potências ímpares essenciais para que a teoria seja consistente.

3.2 Parâmetros de Renormalização

As relações de renormalização entre quantidades fundamentais e renormalizáveis têm a forma que segue diretamente das divergências. Para os campos, temos

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left(1+\frac{2Nh_1^2}{\epsilon}\right)\varphi,\\
\chi_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left(1-\frac{2Nh_2^2}{\epsilon}\right)\chi,\\
\Psi_{k0} &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left(1+\frac{3}{4\epsilon}(h_1^2-h_2^2)\right)\Psi_k,\\
\bar\Psi_{k0} &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left(1+\frac{3}{4\epsilon}(h_1^2-h_2^2)\right)\bar\Psi_k.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Para as massas obtemos as seguintes relações,

$$\begin{aligned}
M_0 &= \left(1-\frac{9}{2\epsilon}h_1^2-\frac{3}{2\epsilon}h_2^2\right)M,\\
m_{10}^2 &= m_1^2-\frac{g^2+p^2+4Nh_1^2m_1^2+\lambda_1m_1^2+2\lambda_3m_2^2-24Nh_1^2M^2}{\epsilon},\\
m_{20}^2 &= m_2^2-\frac{8p^2-4Nh_2^2m_2^2+\lambda_2m_2^2+2\lambda_3m_1^2+8Nh_2^2M^2}{\epsilon}.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Para os acoplamentos pares usuais e parâmetros não-mínimos,

$$\begin{aligned}
\xi_{10} &= \xi_1-\frac{\lambda_1+4Nh_1^2}{\epsilon}\left(\xi_1-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{\epsilon}\lambda_3\left(\xi_2-\frac{1}{6}\right),\\
\xi_{20} &= \xi_2+\frac{4Nh_2^2-\lambda_2}{\epsilon}\left(\xi_2-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{\epsilon}\lambda_3\left(\xi_1-\frac{1}{6}\right),\\
h_{10} &= \mu^{\frac{4-D}{2}}h_1\left(1-\frac{4Nh_1^2+9h_1^2+3h_2^2}{2\epsilon}\right),\\
h_{20} &= \mu^{\frac{4-D}{2}}h_2\left(1+\frac{4Nh_2^2+9h_2^2+3h_1^2}{2\epsilon}\right),\\
\lambda_{10} &= \mu^{4-D}\left(\lambda_1+\frac{48Nh_1^4-8N\lambda_1h_1^2-3\lambda_1^2-12\lambda_3^2}{\epsilon}\right),\\
\lambda_{20} &= \mu^{4-D}\left(\lambda_2+\frac{48Nh_2^4+8N\lambda_2h_2^2-3\lambda_2^2-12\lambda_3^2}{\epsilon}\right)\\
\lambda_{30} &= \mu^{4-D}\left(\lambda_3-\frac{\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+8Nh_1^2h_2^2+32\lambda_3^2+4N\lambda_3h_1^2-4N\lambda_3h_2^2}{\epsilon}\right).
\end{aligned}\tag{3.16}$$

E, finalmente, para os acoplamentos ímpares e parâmetros não-mínimos,

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \mu^{\frac{4-D}{2}}\left(g+\frac{48NMh_1^3-3g\lambda_1-6Nh_1^2g-6\lambda_3 p}{\epsilon}\right),\\
\tau_0 &= \mu^{\frac{4-D}{2}}\left(\tau+\frac{8Nh_1M^3-2N\tau h_1^2-m_1^2g-m_2^2p}{\epsilon}\right),\\
p_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left[p-\frac{1}{\epsilon}\Big(2\lambda_3 g+\lambda_2 p+32\lambda_3 p+16Nh_1h_2^2M-4Nh_2^2p+2Nh_1^2p\Big)\right],\\
f_0 &= \mu^{\frac{D-4}{2}}\left[f+\frac{g}{\epsilon}\Big(\xi_1-\frac{1}{6}\Big)+\frac{p}{\epsilon}\Big(\xi_2-\frac{1}{6}\Big)-\frac{2Nh_1M+6Nfh_1^2}{3\epsilon}\right]. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Como podemos ver, os resultados são semelhantes aos apresentados no capítulo 2 para o modelo que contém apenas um campo escalar estéril. As diferenças que apareceram ocorrem devido ao campo escalar axial que se manifesta na presença de termos extras contendo os novos parâmetros de interação. Logo, os resultados do segundo capítulo podem ser recuperados tomando o limite para estes parâmetros igual a zero.

3.3 Cálculo das Funções Beta e Gama

Os parâmetros renormalizados que aparecem nas funções beta definidas pela equação (2.20), para este caso são $P=\{m_1^2,\, m_2^2,\, M,\, h_1,\, h_2,\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \xi_1,\, \xi_2,\, g,\, p,\, \tau,\, f\}$. Assim, os resultados para as funções beta baseados em (3.15), (3.16) e (3.17) são dados por

$$\beta_{h_1} = \frac{(4Nh_1^3+9h_1^3+3h_1h_2^2)}{2(4\pi)^2}, \qquad (3.18)$$

$$\beta_{h_2} = -\frac{(4Nh_2^3+9h_2^3+3h_1^2h_2)}{2(4\pi)^2}, \qquad (3.19)$$

$$\beta_M = \frac{3M}{2(4\pi)^2}\Big(3h_1^2+h_2^2\Big), \qquad (3.20)$$

$$\beta_{\lambda_1} = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(3\lambda_1^2+8N\lambda_1h_1^2-48Nh_1^4+12\lambda_3^2\Big), \qquad (3.21)$$

$$\beta_{\lambda_2} = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(3\lambda_2^2-8N\lambda_2h_2^2-48Nh_2^4+12\lambda_3^2\Big), \qquad (3.22)$$

$$\beta_{\lambda_3} = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+32\lambda_3^2+8Nh_1^2h_2^2+4N\lambda_3h_1^2-4N\lambda_3h_2^2\Big), \qquad (3.23)$$

$$\beta_{\xi_1} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\Big(\lambda_1+4Nh_1^2\Big)\Big(\xi_1-\frac{1}{6}\Big)+2\lambda_3\Big(\xi_2-\frac{1}{6}\Big)\right], \qquad (3.24)$$

$$\beta_{\xi_2} = \frac{1}{(4\pi)^2}\left[\Big(\lambda_2-4Nh_2^2\Big)\Big(\xi_2-\frac{1}{6}\Big)+2\lambda_3\Big(\xi_1-\frac{1}{6}\Big)\right], \qquad (3.25)$$

$$\beta_g = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(3g\lambda_1 + 6Ngh_1^2 - 48NMh_1^3 + 6p\lambda_3\Big), \tag{3.26}$$

$$\beta_p = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(p\lambda_2 + 32\lambda_3 p - 4Nph_2^2 + 2Nph_1^2 + 2g\lambda_3 + 16NMh_1h_2^2\Big), \tag{3.27}$$

$$\beta_{m_1^2} = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big[m_1^2\lambda_1 + g^2 + p^2 + \Big(4m_1^2 - 24M^2\Big)Nh_1^2 + 2\lambda_3 m_2^2\Big], \tag{3.28}$$

$$\beta_{m_2^2} = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big[m_2^2\lambda_2 + 8p^2 + \Big(8M^2 - 4m_2^2\Big)Nh_2^2 + 2\lambda_3 m_1^2\Big], \tag{3.29}$$

$$\beta_\tau = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big(2N\tau h_1^2 + gm_1^2 + pm_2^2 - 8Nh_1M^3\Big), \tag{3.30}$$

$$\beta_f = \frac{1}{(4\pi)^2}\Big[2Nfh_1^2 - g\Big(\xi_1 - \frac{1}{6}\Big) - p\Big(\xi_2 - \frac{1}{6}\Big) + \frac{2}{3}NMh_1\Big]. \tag{3.31}$$

Os campos renormalizados que estão presentes nas funções γ definidos por (2.22), neste caso são $\Phi = \{\varphi,\, \chi,\, \Psi_k\}$. Portanto, as relações em (2.16) nos levam a

$$\gamma_\varphi = -\frac{2Nh_1^2}{(4\pi)^2}, \tag{3.32}$$

$$\gamma_\chi = \frac{2Nh_2^2}{(4\pi)^2}, \tag{3.33}$$

$$\gamma_{\Psi_k} = \frac{3}{4(4\pi)^2}(h_2^2 - h_1^2). \tag{3.34}$$

Para o modelo em questão com dois campos escalares a definição do termo $t^{(0)}$ não será a mesma da equação (2.29). A nova definição de $t^{(0)}$ apresentará um termo misto que depende da combinação das massas do campo escalar e escalar axial. Por consequência, não é possível obter todo o potencial efetivo para este modelo utilizando apenas termos do tipo $t_\varphi^{(0)}$ e $t_\chi^{(0)}$. O cálculo para este potencial efetivo está em andamento e devido à questões de tempo, não foi possível apresentar os resultados nesse trabalho, mas esperamos que logo ele possa ser publicado.

Conclusão

Como vimos nos capítulos anteriores, nos modelos com escalares estéreis interagindo com férmions, através de uma interação de Yukawa, não há proteção de simetria dos termos que são ímpares nos campos, como resultado os termos ímpares são necessários para a renormalização da teoria. Conclusões semelhantes foram feitas recentemente em [3, 4], mas estávamos tentando fazer a renormalização de uma maneira consistente que requer a inclusão dos termos ímpares no potencial clássico.

Utilizamos os contratermos a 1-*loop* para o campo escalar estéril a fim de calcular as funções do grupo de renormalização e o potencial efetivo no espaço-tempo curvo, o resultado obtido foi verificado com a derivação do potencial efetivo na aproximação $\mathcal{O}(R)$ através da regularização cut-off e das coordenadas normais de Riemann.

Na medida em que incluímos os termos ímpares na ação clássica, a ação induzida da gravidade, inclusive as constantes cosmológica e inversa de Newton, podem depender dos novos termos. Seria interessante explorar o efeito dos termos não-locais na ação induzida e o que o escalar estéril (como por exemplo, quintessência) pode produzir na ação gravitacional.

Calculamos o potencial efetivo para o primeiro modelo através do grupo de renormalização, porém para o segundo modelo não conseguimos obter todo o potencial efetivo utilizando termos como da equação (2.29). Por este motivo, seria conveniente calculá-lo de forma direta, via coordenadas normais de Riemann, em um próximo trabalho.

Bibliografia

[1] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the renormalization group equations in curved space-time with torsion,* Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1197.

[2] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).

[3] D.J. Toms, *Effective action for the Yukawa model in curved spacetime,* JHEP **1805** (2018) 139 arXiv:1804.08350.

[4] D.J. Toms, *Gauged Yukawa model in curved spacetime,* Phys. Rev. **D98** (2018) 025015, arXiv:1805.01700.

[5] V.F. Barra, I.L. Buchbinder, J.G. Joaquim, A.R. Rodrigues e I.L. Shapiro, *Renormalization of Yukawa model with sterile scalar in curved space-time,* The European Physical Journal C, 79(6), (2019) 458.

[6] I.L. Buchbinder and S.D. Odintsov, *Effective Potential In A Curved Space-time,* Sov. Phys. J. **27** (1984) 554.

[7] I.L. Buchbinder and J.J. Wolfengaut, *Renormalization Group Equations and Effective Action in Curved Space-time,* Class. Quant. Grav. **5** (1988) 1127.

[8] S.R. Coleman and E.J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking,* Phys. Rev. D7 (1973) 1888.

[9] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantum Fields,* (Wiley-Interscience, New York, 1980).

[10] F. Sobreira, B.J. Ribeiro and I.L. Shapiro, *Effective potential in curved space and cut-off regularizations,* Phys. Lett. **B705** (2011) 273, arXiv:1107.2262.

[11] T.S. Bunch and L. Parker, *Feynman Propagator in Curved Space-Time: A Momentum Space Representation.* Phys. Rev. **D20** (1979) 2499.

[12] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory.* (Addison-Wesley, New York, 1995).

[13] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory.* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1995).

[14] L. Parker and D.J. Toms, *Renormalization Group Analysis of Grand Unified Theories in Curved Space-time,* Phys. Rev. **D29** (1984) 1584.

[15] J.C. Collins, *Renormalization,* (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).

[16] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *Gravitational Interaction Effect on Behavior of the Yukawa and Scalar Effective Coupling Constants. (In Russian),* Yad. Fiz. **44** (1986) 1033;

I.L. Buchbinder, O.K. Kalashnikov, I.L. Shapiro, V.B. Vologodsky and J.J. Wolfengaut, *The Stability of Asymptotic Freedom in Grand Unified Models Coupled to R^2 Gravity,* Phys. Lett. **B216** (1989) 127;

I.L. Shapiro, *Asymptotical behavior of effective Yukawa coupling constants in quantum R^2 -gravity,* Class. Quant. Grav. **6** (1989)1197.

[17] A. Salvio and A. Strumia, *Agravity,* JHEP **1406** (2014) 080, arXiv:1403.4226.

[18] N.D. Birell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[19] A.O. Barvinsky, G.A. Vilovisky, *The generalized Schwinger-Dewitt technique in gauge theories and quantum gravity,* Phys.Repts. **119** (1985) 1.

[20] G. de Berredo-Peixoto, D. D. Pereira and I. L. Shapiro, *Universality and ambiguity in fermionic effective actions,* Phys. Rev. D **D85** (2012) 064025, arXiv:1201.2649.

[21] G. de Berredo-Peixoto, E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *On the renormalization group for the interacting massive scalar field theory in curved space,* Class. Quant. Grav. **21** (2004) 2281, hep-th/0311229.

[22] I.L. Buchbinder, *On Renormalization Group Equations in Curved Space-Time,* Theoret. Math. Phys. **61** (1984) 1215 (Teoret.mat.fiz. **61** (1984) 393).

[23] J.S. Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization,* Phys. Rev. **82**, 664-679 (1951).

[24] B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields,* (Gordon and Breach, New York, 1965).

[25] B.S. DeWitt, *The Global Approach to Quantum Field Theory,* (Oxford University Press, Oxford, 2003).

[26] D.J. Toms, *The Effective Action And The Renormalization Group Equation In Curved Space-Time,* Phys. Lett. B126 (1983) 37.

[27] V.A. Fock, *The Proper Time in Classical and Quantum Mechanics,* Phys. Izv. Akad. Nauk. USSR, **4-5**, 551-568 (1937).

[28] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro, *Renormalization Group and Decoupling in Curved Space: III. The Case of Spontaneous Symmetry Breaking,* JHEP **02** (2004) 060, hep-ph/0311190.

[29] C. Morette, *On the definition and aproximation of Feynman's path integrals,* Phys. Rev. **81**, 848-852 (1951).

[30] M. Asorey, P. M. Lavrov, B. J. Ribeiro and I.L. Shapiro, *Vacuum stress-tensor in SSB theories,* Phys. Rev. **D85** (2012) 104001, arXiv:1202.4235.

[31] G. De Berredo-Peixoto, *A Note on the heat kernel method applied to fermions,* Mod. Phys. Lett. **A16** (2001) 2463, hep-th/0108223.

[32] S.A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto, I.L. Shapiro and O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity,* Phys. Lett. **B790** (2019) 229, arXiv:1812.00460;
S. A. Franchino-Viñas, T. de Paula Netto and O. Zanusso, *Vacuum effective actions and mass-dependent renormalization in curved space,* arXiv:1902.03167.

[33] A.A. Starobinski, *A new type of isotropic cosmological models without singularity.* Phys.Lett. **B91** (1980) 99.

[34] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *Divergences and anomalies for coupled gravitational and Majorana spin 1/2 fields.* Nucl. Phys. **B191** (1981) 237.

[35] A.A. Starobinsky, *The perturbation spectrum evolving from a nonsingular initially de-Sitter cosmology and the microwave background anisotropy,* Sov. Astron. Lett. **9** (1983) 302.

[36] T.P. Netto, *Divergências de 1-loop no modelo dos Galileons,* Dissertação (Mestrado em Física). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Física, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora (2013).

[37] Q.G. Huang, *A polynomial $f(R)$ inflation model,* JCAP **1402**, 035 (2014) arXiv:1309.3514.

[38] A.R.R. Castellanos, F. Sobreira, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *On higher derivative corrections to the $R + R^2$ inflationary model,* JCAP **1812** (2018) 007, arXiv:1810.07787.

[39] T.d.P. Netto, A.M. Pelinson, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *From stable to unstable anomaly-induced inflation,* Eur. Phys. J. **C76** (2016) 544, arXiv:1509.08882.

[40] F.L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *The Standard Model Higgs boson as the inflaton,* Phys. Lett. **B659** (2008) 703, arXiv:0710.3755.

[41] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation,* Astron. Astrophys. **594** (2016) A20, arXiv:1502.02114.