

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Departamento de Matemática

*Gisele Teixeira Paula*

*Um Domínio Fundamental para o Grupo  
Modular de Eisentein-Picard agindo sobre o  
Espaço Hiperbólico Complexo*

Juiz de Fora

2014



*Gisele Teixeira Paula*

*Um Domínio Fundamental para o Grupo  
Modular de Eisentein-Picard agindo sobre o  
Espaço Hiperbólico Complexo*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática Pura (Geometria).

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Teixeira Paula, Gisele.

Um Domínio Fundamental para o Grupo Modular de Eisentein-Picard agindo sobre o Espaço Hiperbólico Complexo / Gisele Teixeira Paula. -- 2014.

64 p. : il.

Orientador: Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos  
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Geometria Hiperbólica Complexa. 2. Domínios Fundamentais.  
3. Grupos Modulares de Picard. I. de Assis Vasconcelos, Sérgio Guilherme, orient. II. Título.

*Gisele Teixeira Paula*

*Um Domínio Fundamental para o Grupo  
Modular de Eisentein-Picard agindo sobre o  
Espaço Hiperbólico Complexo*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos  
(Orientador)  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Francisco Dutenhefner  
Universidade Federal de Minas Gerais

Juiz de Fora, 11 de julho de 2014.



*A meus pais.*



## *Agradecimentos*

- A Deus, pois é Ele quem me dá forças para tudo o que necessito e quem me acalma nos momentos difíceis;
- Aos meus pais, Célia e José, e minhas irmãs, Gabriela e Rafaela, por serem uma família maravilhosa, por me apoiarem em qualquer decisão que eu tome na vida;
- Ao Roberto, pelo companheirismo, carinho e disponibilidade para consolar meu choro quando precisava e para receber meus melhores sorrisos nos momentos de vitória;
- A minha família pelo apoio, pelas orações e pela torcida que deles recebo sempre;
- Aos amigos, em especial os amigos da UFJF por acompanharem meu crescimento acadêmico, por me fazerem rir quando as coisas ficavam difíceis, pelos conselhos e até mesmo pelas conversas jogadas fora. Agradeço às meninas: Gisele Lucioli, Laila, Virginia, Thalita, Jéssica, Bell, Karla e Priscila por me acompanharem desde que era literalmente uma criança “sozinha” em uma cidade estranha no início da graduação, e também aos amigos do mestrado: Wilker, Yamashita, Pedretti, Marianna, Ceili, Rafael e Carlos pelas risadas e pelos momentos de estudos em grupo;
- Ao Professor Sérgio pela generosidade e pela paciência com que me orientou nesse e em tantos outros trabalhos, desde a primeira bolsa de monitoria até então. Agradeço a você, Sérgio, por ter sido um verdadeiro pai ao longo dos últimos 4 anos e por ter me ensinado muito do que sei em Matemática;
- Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF por tudo o que me ensinaram, sempre disponíveis e interessados em me ajudar. Agradeço também aos professores Luis Fernando Crocco Afonso e Francisco Dutenhefner, por aceitarem participar da banca examinadora de defesa da minha dissertação.



## *Resumo*

Neste trabalho, estudamos o chamado Grupo Modular de Eisenstein-Picard,  $\Gamma = PU(2, 1, \mathbb{Z}[w])$ , onde  $w = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . Este é um subgrupo de isometrias biholomorfas do espaço hiperbólico complexo, cujas entradas estão no anel  $\mathbb{Z}[w]$ . Nosso objetivo é construir um domínio fundamental para a ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e, como uma consequência dessa construção, obter uma representação para  $\Gamma$ . Existem várias formas de se obter um domínio fundamental para a ação de um grupo sobre um determinado espaço. Uma delas é por Poliedros de Dirichlet. Em nosso caso, este caminho é deixado de lado, devido ao fato de que o uso de tais poliedros gera objetos combinatoriamente complicados.

**Palavras-Chave:** Espaço Hiperbólico Complexo; Domínios Fundamentais.



# *Abstract*

In this work, we study the Eisenstein-Picard Modular Group,  $\Gamma = PU(2, 1, \mathbb{Z}[w])$ , where  $w = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . This is a subgroup of biholomorphic isometries of the complex hyperbolic space, whose entries are in the ring  $\mathbb{Z}[w]$ . Our goal is to construct a fundamental domain for the action of  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  and, as a consequence of this construction, obtain a presentation for  $\Gamma$ . There are several ways to obtain a fundamental domain for the action of a group on a particular space. One of them is by Dirichlet polyhedra. In our case, this is not the best way to obtain a fundamental domain, because it gives rise to combinatorially complicated objects.

**Key-words:** Complex Hyperbolic Space; Fundamental Domains.



# Sumário

<b>Introdução</b>	p. 1
<b>1 O Espaço Hiperbólico Complexo e suas isometrias</b>	p. 3
1.1 O Domínio de Siegel . . . . .	p. 3
1.2 As isometrias do espaço hiperbólico complexo . . . . .	p. 5
1.2.1 Ação geométrica das transformações de Heisenberg em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	p. 8
1.2.2 Esferas Isométricas e Coordenadas Geográficas. . . . .	p. 10
<b>2 O Grupo Modular de Eisenstein-Picard</b>	p. 15
2.1 O Establizador de $p_{\infty}$ . . . . .	p. 15
2.2 Geradores para $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$ . . . . .	p. 23
<b>3 Um Domínio Fundamental para <math>PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])</math></b>	p. 25
3.1 A interseção de $S_0$ com suas vizinhanças. . . . .	p. 26
3.2 O tetraedro básico $T_0$ . . . . .	p. 32
3.3 O simplexo de quatro dimensões . . . . .	p. 39
<b>4 Poliedros de Poincaré e outra representação para <math>\Gamma</math></b>	p. 45
4.1 O Teorema dos Poliedros de Poincaré . . . . .	p. 45
4.2 Uma representação para $\Gamma$ . . . . .	p. 48
4.3 Relação com grupos de Mostow. . . . .	p. 50
<b>Referências</b>	p. 55



# *Introdução*

O estudo de ladrilhamentos de certos espaços tem aplicações em matemática pura, com conexões com álgebras de Lie, teoria de números e teoria de grupos, e em matemática aplicada, onde estão ligados à teoria de codificação, na criptografia. Na ciência, de modo geral, os estudos de reticulados são feitos por meio de técnicas de física computacional.

Em espaços simétricos, como por exemplo a bola complexa, esse assunto é, particularmente, um caso desafiador, com poucos exemplos já construídos. Os primeiros exemplos, no caso da bola complexa bidimensional, são devidos a Picard ([10], [11]).

No artigo principal no qual é baseada esta dissertação, Elisha Falbel e John R. Parker constroem um domínio fundamental para a ação de  $\Gamma = PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  sobre o Espaço Hiperbólico Complexo  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e, a partir dessa construção, obtêm uma representação para  $\Gamma$ .

Domínios fundamentais existem e foram estudados com certa generalidade, por exemplo em [1]. Porém a construção de exemplos concretos não é algo fácil. Para o caso de  $\Gamma$ , não foi usado o método mais simples conhecido para a obtenção de tais domínios, os Poliedros de Dirichlet, pois este método dá origem a objetos combinatoriamente complicados. Por isso, Falbel e Parker fizeram uma diferente abordagem do problema, apresentada em [2] e nesta dissertação.

No primeiro capítulo é introduzido o Espaço Hiperbólico Complexo  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Além disso, apresentamos o grupo das transformações de Heisenberg, um subgrupo importante do grupo de isometrias de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . No fim do capítulo é feita uma interpretação geométrica de suas ações no espaço hiperbólico.

O segundo capítulo traz o principal objeto de estudo, o Grupo Modular de Eisenstein-Picard. São obtidos geradores para o grupo, a partir de geradores para o estabilizador do ponto ideal  $p_{\infty} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

No terceiro capítulo é construído um domínio fundamental para a ação de  $\Gamma$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Esse domínio fundamental é extraordinariamente simples, um simplexo de dimensão 4 com um vértice ideal ( $\Gamma$  tem somente uma cúspide) na bola complexa bidimensional  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Primeiramente, é construído o Domínio de Ford com centro em um ponto fixo parabólico,

isto é, a coleção de todos os pontos em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  que estão fora de todas as esferas isométricas dos elementos de  $\Gamma \backslash \Gamma_{\infty}$ . O Domínio de Ford é um domínio fundamental para o quociente de  $\Gamma_{\infty}$  (grupo parabólico que estabiliza o vértice ideal). Para construir nosso domínio fundamental, devemos intersectar esse domínio de Ford com um domínio fundamental de  $\Gamma_{\infty}$ . O fato de que o domínio fundamental de  $\Gamma$  assim obtido é um simplexo segue do fato de que existe uma única órbita por  $\Gamma_{\infty}$  de esferas isométricas com raio máximo e de que a fronteira do domínio de Ford consiste de faces de um tetraedro, que são  $\Gamma_{\infty}$ -equivalentes. Isto leva à escolha do domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty}$  como sendo o cone geodésico da fronteira de um desses tetraedros ao centro do Domínio de Ford.

A construção é análoga ao famoso 2-simplexo com um vértice ideal que é domínio fundamental para a ação do grupo modular clássico  $PSL(2, \mathbb{Z})$  no plano hiperbólico  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ , apresentado em [6]. Nesse caso, o domínio fundamental obtido é um triângulo hiperbólico. Além disso, ele é o cone geodésico partindo de  $\infty$  a um dos lados do respectivo Domínio de Ford. O grupo  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  é obtido a partir de uma representação de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  adjuntando-se mais um elemento.

Por fim, é mostrado no último capítulo que  $\Gamma$  admite uma representação com 2 geradores, a qual cai no mesmo modelo da família de grupos construídos por Mostow em [7]. A construção aqui apresentada usa bissetores e uma versão do Teorema de Poliedros de Poincaré. Ela envolve um estudo cuidadoso de um domínio fundamental para o subgrupo parabólico que fixa a cúspide no grupo de Heisenberg (fronteira ideal do espaço hiperbólico complexo). A face finita do poliedro obtido está contida em um bissetor, mas todas as 4 faces contendo o vértice ideal não estão contidas em um bissetor. Na verdade, elas estão contidas no cone geodésico acima de uma face de dimensão inferior. Uma outra construção de um poliedro fundamental para  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  é dada em [9]. Nesse caso, o poliedro consiste de dois simplexos com uma face em comum, e possui portanto 8 faces. A vantagem dessa construção é que todas as 8 faces estão contidas em bissetores.

Seria interessante a obtenção de uma estratégia para a construção de um domínio fundamental para  $PU(2, 1, \mathcal{O}_d)$ , onde  $\mathcal{O}_d$  é o anel dos inteiros no corpo  $\mathbb{Q}(i\sqrt{d})$  e  $d$  é um inteiro livre de quadrados. Um estudo desse tipo foi feito por Swan [12] no caso dos grupos de Bianchi  $PSL(2, \mathcal{O}_d)$ . Em [3], a mesma técnica apresentada em [2] foi usada para a obtenção de um domínio fundamental para a ação de  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[i])$  no espaço hiperbólico complexo.

# 1 O Espaço Hiperbólico Complexo e suas isometrias

## 1.1 O Domínio de Siegel

Seja  $\mathbb{C}^{2,1}$  o espaço vetorial complexo de dimensão (complexa) 3 munido da seguinte forma hermitiana de assinatura (2,1):

$$\langle z, w \rangle = w^* J_0 z,$$

onde  $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Isto significa que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é dada por uma matriz  $3 \times 3$  não singular, hermitiana (isto é,  $J_0^* = J_0$ ), com dois autovalores positivos e um negativo.

Temos que, para  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ ,  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$ ,  $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_3 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_1$ .

Como  $\langle z, z \rangle = 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_3) + |z_2|^2 \in \mathbb{R}$ , faz sentido falar em vetores negativos, positivos ou nulos. Considere os seguintes subespaços de  $\mathbb{C}^{2,1}$ :

$$V_- = \{z \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle z, z \rangle < 0\};$$

$$V_0 = \{z \in \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\}; \langle z, z \rangle = 0\};$$

$$V_+ = \{z \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle z, z \rangle > 0\}.$$

Dizemos que  $z \in \mathbb{C}^{2,1}$  é *negativo*, *positivo* ou *nulo*, se  $z$  estiver em  $V_-$ ,  $V_0$  ou  $V_+$ , respectivamente. É fácil ver que, para todo escalar complexo  $\lambda$ , vale  $\langle \lambda z, \lambda z \rangle = |\lambda|^2 \langle z, z \rangle$ . Daí segue que, para  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda z$  é negativo, positivo ou nulo se, e somente se,  $z$  o for.

Podemos então olhar para uma projeção natural  $\mathbb{P}$ , dos pontos de  $\mathbb{C}^{2,1}$  com  $z_3 \neq 0$

sobre os pontos do espaço quociente de  $\mathbb{C}^{2,1}$  pela relação de equivalência  $z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w$ , que chamamos *espaço projetivo complexo* e denotamos por  $\mathbb{CP}^2$ , dada por:

$$\mathbb{P} : \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Cada ponto da forma  $\begin{bmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$ , é dito um *levantamento* de  $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2$ , para  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ .

Para  $z \in V_-$ , podemos garantir que  $z_3 \neq 0$ , pois  $\langle z, z \rangle = z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_1 = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_3) + |z_2|^2 < 0$ .

Daí, definimos o *Espaço Hiperbólico Complexo*,  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  como sendo (em seu modelo projetivo) a imagem de  $V_-$  por  $\mathbb{P}$ . A fronteira (finita) de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é dada por  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_0)$ .

A partir daí, para cada  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , tem-se  $2\operatorname{Re}(z_1) + |z_2|^2 < 0$ .

Podemos então relacionar  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  de forma biunívoca ao *Domínio de Siegel* contido em  $\mathbb{C}^2$ , dado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2; 2\operatorname{Re}(z_1) + |z_2|^2 < 0 \right\}$$

e que tem por fronteira o parabolóide definido por  $2\operatorname{Re}(z_1) + |z_2|^2 = 0$ .

Outra parametrização muito usada de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é a parametrização por coordenadas horo-esféricas. Sabemos que para  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , temos  $2\operatorname{Re}(z_1) + |z_2|^2 = -u$ , para algum  $u \in \mathbb{R}^+$ . Assim, se escrevemos  $\zeta = z_2 \in \mathbb{C}$ , obtemos  $2\operatorname{Re}(z_1) = -|\zeta|^2 - u$ , o que implica  $z_1 = \frac{-|\zeta|^2 - u + it}{2}$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Logo, o espaço hiperbólico complexo é identificado com  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , através de

$$(\zeta, t, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \begin{bmatrix} \frac{-|\zeta|^2 - u + it}{2} \\ \zeta \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2. \quad (1.1)$$

sendo a relação inversa dada por:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \mapsto (\zeta, t, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ onde } \begin{cases} \zeta = z_2, \\ t = 2\text{Im}(z_1), \\ u = -2\text{Re}(z_1) - |\zeta|^2 \end{cases}$$

Seja  $\eta = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  e considere o ponto  $p_{\infty} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , chamado ponto no infinito.

A fronteira de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é dada por  $\mathbb{P}(V_0) \cup \{p_{\infty}\}$ . Às vezes, é útil identificar os pontos da fronteira finita de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  com os pontos de  $\eta$  e escrever  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \{\eta \times \{0\}\} \cup \{p_{\infty}\}$ .

Uma *horoesfera* baseada em  $p_{\infty}$  de altura  $u$  é a hipersuperfície  $H_u = \eta \times \{u\}$ , que limita a *horobola*  $B_u = \eta \times (u, +\infty)$ . Todas as horoesferas podem ser identificadas naturalmente com  $\eta$ , visto que  $u$  está fixado em cada uma delas.

Em coordenadas horoesféricas, as geodésicas com ponto final  $p_{\infty}$  são as linhas verticais:

$$\{(z_0, t_0, u); u \in \mathbb{R}^+\}.$$

A métrica que usamos no modelo projetivo de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é a chamada *Métrica de Bergman*, dada por

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(z, w)}{2}\right) = \frac{\langle z, w \rangle \langle w, z \rangle}{\langle z, z \rangle \langle w, w \rangle}.$$

Usamos do lado direito da equação, para definir a distância entre  $z$  e  $w$ , quaisquer levantamentos, que denotamos também por  $z$  e  $w$ , desses elementos em  $\mathbb{C}^{2,1}$  (a fórmula independe dos levantamentos de  $z$  e  $w$  escolhidos).

## 1.2 As isometrias do espaço hiperbólico complexo

Seja  $GL(\mathbb{C}^{2,1})$  o grupo de matrizes  $3 \times 3$ , inversíveis, com entradas complexas, agindo em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . O *grupo de transformações unitárias*  $U(2, 1)$  é o subgrupo de  $GL(\mathbb{C}^{2,1})$  das transformações que preservam a forma hermitiana  $J_0$ , ou seja, que satisfazem

$$\langle Az, Aw \rangle = \langle z, w \rangle, \forall z, w \in \mathbb{C}^{2,1}.$$

É claro que  $U(2, 1)$  age em  $\mathbb{C}^{2,1}$  preservando os conjuntos  $V_-, V_0$  e  $V_+$ . Seja  $I$  a matriz

identidade de  $GL(\mathbb{C}^{2,1})$  e considere o subgrupo:

$$U(1) = \{e^{i\theta}I \mid 0 \leq \theta < 2\pi\} \subset U(2,1).$$

Cada elemento de  $U(1)$  age em  $\mathbb{C}^{2,1}$  aplicando cada “reta” pela origem nela própria e portanto age como a identidade em  $\mathbb{CP}^2$ . Assim, dois elementos  $A, B \in U(2,1)$  que diferem pela multiplicação de um elemento de  $U(1)$ , isto é,  $A = e^{i\theta}B$ , definem a mesma ação em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Podemos então definir o *grupo unitário projetivo*  $PU(2,1)$  agindo em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  por:

$$PU(2,1) = \frac{U(2,1)}{U(1)}.$$

Como a métrica de Bergman é dada em termos da forma Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , é claro que cada  $A \in U(2,1)$  age isometricamente no modelo projetivo de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Logo,  $PU(2,1)$  é um subgrupo do grupo de isometrias de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Pode-se mostrar (ver [8], página 13) que toda isometria de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é holomorfa ou anti-holomorfa e, além disso, toda isometria holomorfa de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é dada por uma matriz de  $PU(2,1)$ .

Toda isometria biholomorfa de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é, portanto, um elemento  $A \in PU(2,1)$ . Tais elementos satisfazem  $A^{-1} = J_0^{-1}A^*J_0$  e sua forma geral é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{j} & \bar{f} & \bar{c} \\ \bar{h} & \bar{e} & \bar{b} \\ \bar{g} & \bar{d} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ com } a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \mathbb{C}.$$

Na página 22 de [8], Parker mostra o seguinte Lema:

**Lema 1.1.** Seja  $A \in PU(2,1)$ , dada em sua forma geral como acima. Então são equivalentes:

1.  $A$  fixa  $p_{\infty}$ ;
2.  $A$  é triangular superior;
3.  $g = 0$ .

Olharemos agora para um subgrupo importante de  $PU(2,1)$  que fixa  $p_{\infty}$ : o grupo das *Transformações de Heisenberg*.

Primeiro, seja  $(z_0, t_0) \in \eta$ . A *Translação de Heisenberg* por  $(z_0, t_0)$  é dada por

$$T_{(z_0, t_0)} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2 + it_0}{2} \\ 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toda Translação de Heisenberg por  $(0, t_0) \in \eta$  é chamada *translação vertical*.

A *Rotação de Heisenberg* por  $\theta \in [0, 2\pi]$ , que fixa a linha vertical  $\{(0, t, u_0); t \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , é dada por

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Todas as outras rotações de Heisenberg fixando  $p_{\infty}$  podem ser obtidas de  $R_{\theta}$  através de uma conjugação com uma translação de Heisenberg. Veremos em breve a ação geométrica dessas transformações em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Por fim, para um dado  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , uma *Dilatação de Heisenberg* de  $\lambda$ , fixando  $p_{\infty}$  e  $p_0 = (0, 0, 0) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é dada por

$$D_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Todas as outras dilatações de Heisenberg fixando  $p_{\infty}$  podem ser obtidas de  $D_{\lambda}$  através de uma conjugação com uma translação de Heisenberg.

Veremos, na próxima seção, que todas as rotações e translações de Heisenberg preservam cada horoesfera com base em  $p_{\infty}$ . As dilatações de Heisenberg não-triviais aplicam cada horoesfera de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  em alguma outra. O grupo gerado pelas dilatações, rotações e translações de Heisenberg é o estabilizador de  $p_{\infty}$  em  $PU(2, 1)$ . Um subgrupo importante é  $Isom(\eta)$ , gerado pelas rotações e translações de Heisenberg.

Definimos agora algumas projeções que serão úteis em nosso estudo. Começamos por  $\Pi : \eta \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $\Pi(z, t) = z$ . Usando a sequência exata (sequência de morfismos onde a imagem de cada morfismo é o núcleo do próximo)

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \eta \xrightarrow{\Pi} \mathbb{C} \rightarrow 0,$$

podemos obter a seguinte sequência exata, que relaciona os grupos  $Isom(\eta)$  e  $Isom(\mathbb{C})$ :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow Isom(\eta) \xrightarrow{\Pi_*} Isom(\mathbb{C}) \rightarrow 1.$$

Aqui,  $Isom(\mathbb{C})$  é o grupo de isometrias euclidianas de  $\mathbb{C}$  que preservam orientação. Note que os elementos de  $Isom(\mathbb{C})$  podem ser representados por matrizes em  $GL(2, \mathbb{C})$  da forma  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Basta identificarmos cada  $z \in \mathbb{C}$  com o vetor  $\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$  e, então, temos:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta}z + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A função  $\Pi_* : Isom(\eta) \rightarrow Isom(\mathbb{C})$  pode ser definida explicitamente por

$$\Pi_* : \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 e^{i\theta} & \frac{-|z_0|^2 + it_0}{2} \\ 0 & e^{i\theta} & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que  $Ker(\Pi_*) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{it_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; t_0 \in \mathbb{R} \right\}$ , que identificamos com  $\mathbb{R}$  na sequência exata anterior. Ou seja,  $Ker(\Pi_*)$  é o grupo das translações verticais de Heisenberg.

### 1.2.1 Ação geométrica das transformações de Heisenberg em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Nesta seção, queremos analisar qual é a ação de algumas transformações de Heisenberg sobre o espaço hiperbólico complexo. Usaremos a todo momento a mudança de coordenadas 1.1. Os exemplos aqui apresentados nos ajudarão a entender a ação geométrica de determinados elementos de  $PU(2, 1)$ , os quais estudaremos detalhadamente no próximo capítulo.

Começamos pela rotação de Heisenberg por  $\theta$  que fixa a linha vertical  $(0, t, u)$  (com  $u$  fixado), a qual denotaremos por  $R_{\theta}^0$ , para que fique claro que esta rotação fixa a linha vertical que passa pela origem. Temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} \\ e^{i\theta}z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Isto nos diz que  $R_\theta^0 : (z, t, u) \mapsto (e^{i\theta}z, t, u)$ . Na fronteira de  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  ( $u = 0$ ), é fácil ver que  $R_\theta^0$  fixa a altura  $t$  e faz uma rotação tradicional de  $\theta$  no plano complexo de altura  $t$ .

Note que faz sentido dizer “a rotação que fixa a linha  $(0, t, u)$ ”, no sentido em que ela é única, pois a conjugação de  $R_\theta^0$  com uma translação vertical tem a mesma ação que  $R_\theta^0$  em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ .

De fato,

$$T_{(0,t_0)} \circ R_\theta^0 \circ T_{(0,t_0)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{it_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-it_0}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Olhemos também para a ação da Translação de Heisenberg por  $(z_0, t_0) \in \eta$ . Temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2+it_0}{2} \\ 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2-u+it}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2-u+it}{2} - z\bar{z}_0 + \frac{-|z_0|^2+it_0}{2} \\ z + z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-|z+z_0|^2-u+i(t+t_0-2Im(z\bar{z}_0))}{2} \\ z + z_0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Concluimos que  $T_{(z_0,t_0)} : (z, t, u) \mapsto (z + z_0, t + t_0 - 2Im(z\bar{z}_0), u)$ , o que podemos interpretar geometricamente (novamente na fronteira) dizendo que  $T_{(z_0,t_0)}$  leva planos horizontais em planos inclinados. Essa inclinação é devida à parte imaginária de  $\bar{z}_0$  (fixo). Em particular, para translações verticais ( $z_0 = 0$ ), temos que  $T_{(0,t_0)} : (z, t, u) \mapsto (z, t + t_0, u)$ . Neste caso,  $T_{(0,t_0)}$  leva planos horizontais de altura  $t$  em planos horizontais de altura  $t + t_0$ .

Seja agora  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixo. É interessante saber qual é a ação da rotação por  $\theta$  fixando a linha vertical  $(z_0, t, u)$ , que denotamos por  $R_\theta^{z_0}$ . É claro que  $R_\theta^{z_0} = T_{z_0} \circ R_\theta^0 \circ T_{z_0}^{-1}$ , onde  $T_{z_0}$  é a translação de Heisenberg que leva  $(0, 0)$  em  $(z_0, 0)$  (mantendo  $u$  fixo). Com um simples cálculo, vê-se que

$$T_{z_0} = T_{(z_0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2}{2} \\ 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ação de  $T_{z_0}$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é dada por  $T_{z_0} : (z, t, u) \mapsto (z + z_0, t - 2\text{Im}(z\bar{z}_0), u)$ .

$$\text{Daí, } T_{z_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2}{2} \\ 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (z, t, u) \mapsto (z - z_0, t + 2\text{Im}(z\bar{z}_0), u) = T_{(-z_0, 0)} = T_{-z_0}.$$

Voltando a  $R_{\theta}^{z_0}$ , temos então:

$$\begin{aligned} R_{\theta}^{z_0} &= \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2}{2} \\ 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}_0 & \frac{-|z_0|^2}{2} \\ 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \bar{z}_0(1 - e^{i\theta}) & |z_0|^2(e^{i\theta} - 1) \\ 0 & e^{i\theta} & z_0(1 - e^{i\theta}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_{\theta}^{z_0} : (z, t, u) &\xrightarrow{T_{z_0}^{-1}} (z - z_0, t + 2\text{Im}(z\bar{z}_0), u) \xrightarrow{R_{\theta}^0} (e^{i\theta}(z - z_0), t + 2\text{Im}(z\bar{z}_0), u) \xrightarrow{T_{z_0}} \\ &\xrightarrow{T_{z_0}} (e^{i\theta}z + z_0(1 - e^{i\theta}), t + 2\text{Im}(z\bar{z}_0) - 2\text{Im}(e^{i\theta}(z - z_0)\bar{z}_0), u), \end{aligned}$$

o que nos fornece:

$$R_{\theta}^{z_0} : (z, t, u) \mapsto (e^{i\theta}z + z_0(1 - e^{i\theta}), t + 2\text{Im}(z\bar{z}_0 - e^{i\theta}(z - z_0)\bar{z}_0), u).$$

## 1.2.2 Esferas Isométricas e Coordenadas Geográficas.

Dado um elemento  $A \in PU(2, 1)$  tal que  $Ap_{\infty} \neq p_{\infty}$ , podemos definir a *esfera isométrica de A* como a hipersuperfície

$$\{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; |\langle z, p_{\infty} \rangle| = |\langle z, A^{-1}(p_{\infty}) \rangle|\}.$$

Para nosso estudo, destacamos a esfera isométrica de  $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dada por

$$S_0 = \{(z, t, u); |z|^2 + u + it = 2\}.$$

Temos na Figura 1 a representação de  $S_0$  na fronteira do espaço hiperbólico complexo, com coordenadas horoesféricas ( $u = 0$ ):

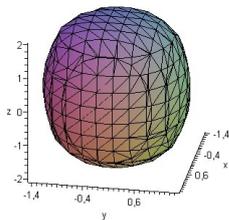


Figura 1: A fronteira da esfera isométrica de  $R$ .

Tanto  $R$  quanto  $S_0$  desempenham papéis importantes em nossa construção. Qualquer outra esfera isométrica é imagem de  $S_0$  por alguma transformação de Heisenberg.

Para  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ , já sabemos que  $Ap_\infty \neq p_\infty \Leftrightarrow g \neq 0$ .

Além disso, a esfera isométrica de  $A$  tem raio  $r = \sqrt{\frac{2}{|g|}}$  e centro  $A^{-1}(p_\infty) = (z_0, t_0, 0) = (\frac{\bar{h}}{g}, 2Im(\frac{\bar{f}}{g}), 0)$ . Ela é dada em coordenadas horoesféricas por

$$\{(z, t, u); ||z - z_0| + u + it - it_0 + 2iIm(z\bar{z}_0)| = r^2\}.$$

Para saber mais detalhes sobre a métrica levada em consideração para as definições acima, veja [8].

Definiremos agora a noção de bissetores. Dados dois pontos distintos  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , o *bissetor* equidistante de  $z_1$  e  $z_2$  é definido como:

$$B = B(z_1, z_2) = \{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}.$$

Considere a geodésica complexa  $\Sigma \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  passando por  $z_1$  e  $z_2$ . Chamamos  $\Sigma$  de *espinha complexa* do bissetor  $B$ . A *espinha (real)* do bissetor  $B$  é definida por:

$$\sigma = \sigma(z_1, z_2) = B \cap \Sigma = \{z \in \Sigma; \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}.$$

Esferas isométricas são exemplos de bissetores e, como tais, possuem uma interessante folheação por duas famílias distintas de subvariedades totalmente geodésicas. Mostow provou em [7] que um bissetor é a pré-imagem da espinha pela projeção ortogonal sobre a única linha complexa contendo a espinha. As fibras dessa projeção são linhas complexas chamadas *fatias* do bissetor. Goldman mostrou em [4] que um bissetor é a união de todos os planos Lagrangeanos totalmente reais contendo a espinha. Tais planos Lagran-

geanos são chamados *meridianos*. Juntos, as fatias e os meridianos fornecem *coordenadas geográficas* ao bissetor.

Para obter tais coordenadas, começamos escrevendo  $|z|^2 + u - it = 2e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (isto nos garante que  $\operatorname{Re}(|z|^2 + u - it) = |z|^2 + u \geq 0$  e que  $|z| \leq \sqrt{2 \cos \theta}$ ). Escrevemos também  $z$  em coordenadas polares e escolhemos seu argumento de modo que ele esteja adaptado à decomposição de  $S_0$  em meridianos. Conseguimos isto pondo  $z = re^{i\alpha + i\frac{\theta}{2}}$ , para  $r \in [-\sqrt{2 \cos \theta}, \sqrt{2 \cos \theta}]$  e  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Observamos que pode parecer mais natural manter  $r \geq 0$  e permitir que  $\alpha$  varie em  $[-\pi, \pi]$ . Como mostraremos na seguinte proposição, fizemos esta escolha de modo que os meridianos de  $S_0$  correspondessem a um  $\alpha$  fixo. Em coordenadas geográficas,  $S_0$  é dada por:

$$S_0 = \left\{ \left[ \begin{array}{c} -e^{i\theta} \\ re^{i\alpha + i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{array} \right]; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), r \in [-\sqrt{2 \cos \theta}, \sqrt{2 \cos \theta}] \right\}.$$

Um ponto de coordenadas geográficas  $(r, \theta, \alpha)$  é dado em coordenadas horoesféricas por  $(re^{i\alpha + i\frac{\theta}{2}}, -2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta) - r^2)$ .

**Proposição 1.2.** A esfera isométrica  $S_0$  com coordenadas geográficas dadas anteriormente é um bissetor. Além disso, temos:

- A espinha real de  $S_0$  é dada por  $r = 0$ ;
- As fatias de  $S_0$  são dadas por  $\theta = \theta_0$  para um  $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  fixo;
- Os meridianos de  $S_0$  são dados por  $\alpha = \alpha_0$ , para um  $\alpha_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  fixo.

*Demonstração.* Pode-se provar que todas as esferas isométricas são bissetores, visto que a métrica de Bergman é dada por uma expressão que só depende do produto hermitiano.

- A espinha real  $\sigma$  de  $S_0$  é dada pela interseção desse bissetor com a sua espinha complexa (isto é, a geodésica complexa gerada por  $p_\infty$  e  $R(p_\infty) = (0, 0, 0)$ ). Esta geodésica complexa é dada por  $z = 0$  e, daí, segue a primeira parte.

- Dado um ponto  $s = (0, -2 \sin \theta_0, 2 \cos \theta_0) \in \sigma$ , com  $r = 0$ , a fatia através desse ponto é dada pela imagem inversa da projeção ortogonal sobre a espinha complexa. Tais pontos são dados por

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} -e^{i\theta} \\ z \\ 1 \end{array} \right] \in \mathbb{P}(V_-) \right\}.$$

De fato,

$$S_0 = \left\{ \left[ \begin{array}{c} -e^{i\theta} \\ re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{array} \right]; \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), r \in [-\sqrt{2 \cos \theta}, \sqrt{2 \cos \theta}] \right\}$$

e

$$\Sigma_{S_0} = \{(z, t, u) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; z = 0\} = \left\{ \left[ \begin{array}{c} z_1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \right\}.$$

Daí, a projeção ortogonal sobre  $\Sigma_{S_0}$  satisfaz:

$$\Pi_{\Sigma_{S_0}} : \left[ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{array} \right] \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \mapsto \left[ \begin{array}{c} z_1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \in \Sigma_{S_0}.$$

Note que um ponto de  $\Sigma_{S_0}$  da forma  $(0, t, u)$  pode ser escrito na forma  $\left[ \begin{array}{c} e^{i\theta} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$ , com  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , através de coordenadas geográficas, já que estes pontos estão em  $S_0$  (basta notar que  $z = 0 \Rightarrow \frac{-u+it}{2} = e^{i\theta}$ , para algum  $\theta$  nesse intervalo).

Portanto, a fatia  $\Pi_{\Sigma_{S_0}}^{-1}(s)$ ,  $s = (0, -2 \sin \theta_0, 2 \cos \theta_0)$ , é dada por  $\left\{ \left[ \begin{array}{c} -e^{i\theta_0} \\ z \\ 1 \end{array} \right] \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \right\}$ ,

onde  $\theta_0$  está fixado.

• Os meridianos de  $S_0$  são os lugares geométricos dos pontos fixos das involuções anti-holomorfas que fixam a espinha. Para  $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , estas funções são dadas por:

$$i_{\alpha_0} : \left[ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array} \right] \mapsto \left[ \begin{array}{c} \bar{z}_3 \\ -e^{2i\alpha_0} \bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{array} \right].$$

Aplicando  $i_{\alpha_0}$  a um ponto de  $S_0$  e tomando coordenadas horoesféricas, obtemos

$$i_{\alpha_0}(re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}}, -2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta) - r^2) = (re^{2i\alpha_0+i\frac{\theta}{2}-i\alpha}, -2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta) - r^2).$$

Daí, o meridiano fixado por  $i_{\alpha_0}$  é dado por  $\alpha = \alpha_0$ .

□



## 2 O Grupo Modular de Eisenstein-Picard

Seja  $\mathcal{O}_d$  o anel dos inteiros no corpo  $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ , onde  $d$  é um inteiro positivo livre de quadrados. No caso em que  $d \equiv 1, 2 \pmod{4}$ , então  $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$  e quando  $d \equiv 3 \pmod{4}$ , então  $\mathcal{O}_d = \mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]$ .

O Subgrupo de  $PU(2, 1)$  com entradas em  $\mathcal{O}_d$  é chamado Grupo Modular de Picard de  $\mathcal{O}_d$  e denotado por  $PU(2, 1, \mathcal{O}_d)$ . Estamos interessados em  $d = 3$ . Seja  $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . Então  $\mathcal{O}_3 = \mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega; a, b \in \mathbb{Z}\}$  e o Grupo Modular de Picard neste caso é  $\Gamma = PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$ , o qual chamamos Grupo Modular de Eisenstein-Picard. O objetivo desta seção é obter geradores para  $\Gamma$ .

### 2.1 O Estabilizador de $p_\infty$

Queremos primeiramente analisar  $\Gamma_\infty = \{A \in \Gamma; Ap_\infty = p_\infty\}$ , o estabilizador de  $p_\infty$  em  $\Gamma$ . Vimos no capítulo anterior que todo elemento  $A \in \Gamma_\infty$  é triangular superior e que suas entradas da diagonal são unidades (no caso, unidades em  $\mathbb{Z}[\omega]$ ). Então  $\Gamma_\infty$  não contém dilatações e é um subgrupo de  $Isom(\eta)$ . Logo, se encaixa na sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \cap \Gamma_\infty \xrightarrow{\subset} \Gamma_\infty \xrightarrow{\Pi_*} \Pi_*(\Gamma_\infty) \longrightarrow 1.$$

Aqui, estamos denotando por  $\mathbb{R}$  o conjunto de translações verticais de Heisenberg por  $(0, t_0)$ , onde  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.1.** O estabilizador  $\Gamma_\infty$  satisfaz a sequência exata

$$0 \longrightarrow 2\sqrt{3}\mathbb{Z} \xrightarrow{\subset} \Gamma_\infty \xrightarrow{\Pi_*} \Delta(2, 3, 6) \longrightarrow 1,$$

onde  $\Delta(2, 3, 6)$  denota o grupo de simetrias que preservam orientação em  $\mathbb{Z}[\omega]$  e  $2\sqrt{3}\mathbb{Z} = \mathbb{R} \cap \Gamma_\infty$ .

*Demonstração.* Por nossa construção explícita de  $\Pi_*$  feita no capítulo anterior, vemos que para  $A \in \Gamma_\infty$ ,  $\Pi_*(A) = \begin{pmatrix} (-\omega)^m & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Então  $\Pi_*(\Gamma_\infty)$  é o grupo de simetrias que preservam orientação de  $\mathbb{Z}[\omega] \subset \mathbb{C}$ . Este é o grupo triangular  $\Delta(2, 3, 6)$ .

É fácil ver que o núcleo de  $\Pi_*$  é o conjunto das translações verticais de Heisenberg em  $\Gamma$ , isto é, as translações de Heisenberg por  $(0, 2n\sqrt{3}) \in \eta$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ . De fato,

$$A \in \text{Ker}(\Pi_*) \Rightarrow z_0 = 0 \text{ e } (-\omega)^m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{it}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  é da forma  $2n\sqrt{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Para ver isto, como estamos trabalhando com matrizes cujas entradas estão em  $\mathbb{Z}[\omega]$ , se escrevemos  $\frac{it}{2} = n + m\omega$ , onde  $n, m \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\frac{it}{2} = n - \frac{m}{2} + i\frac{m\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = m\sqrt{3}$  e  $\frac{m}{2} = n \Rightarrow m = 2n$ .

Portanto,  $t = 2n\sqrt{3}$ .

□

**Proposição 2.2.**  $\Gamma_\infty$  é gerado por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & w & -w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Temos que o grupo triangular  $\Delta(2, 3, 6) = \Pi_*(\Gamma_\infty)$  é gerado por

$$\Pi_*(P) : z \mapsto \omega z - \omega \quad \text{e} \quad \Pi_*(Q) : z \mapsto -z + 1.$$

Observe que aqui estamos usando a identificação  $z \mapsto \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ . Portanto,

$$\Pi_*(P)z = \begin{pmatrix} \omega & -\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega z - \omega \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos também:

$$\Pi_*(Q)z = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z + 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que  $\mathbb{R} \cap \Gamma_\infty = 2\sqrt{3}\mathbb{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & i\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega]); n \in \mathbb{Z} \right\}$  está contido no grupo gerado por  $P$  e  $Q$ . De fato,  $P^3 = Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e este é um gerador para  $2\sqrt{3}\mathbb{Z}$ .

Os fatos a seguir implicam que  $\Gamma_\infty$  é gerado por  $P$  e  $Q$ :

1.  $\Pi_* : \Gamma_\infty \rightarrow \Delta(2, 3, 6)$  é um homomorfismo (sobrejetor);
2.  $Ker(\Pi_*) = 2\sqrt{3}\mathbb{Z} \subset \langle P, Q \rangle$ ;
3.  $\Pi_*(\Gamma_\infty) = \langle \Pi_*(P), \Pi_*(Q) \rangle$ .

De fato, é claro que  $\langle P, Q \rangle \subset \Gamma_\infty$ . Mostremos então a inclusão  $\Gamma_\infty \subset \langle P, Q \rangle$ :

Dada  $A \in \Gamma_\infty$ , então  $\Pi_*(A) \in \Delta(2, 3, 6)$ . Daí,

$$\Pi_*(A) = \Pi_*(P)^{n_1} \Pi_*(Q)^{m_1} \dots \Pi_*(P)^{n_k} \Pi_*(Q)^{m_k} = \Pi_*(P^{n_1} Q^{m_1} \dots P^{n_k} Q^{m_k}).$$

Logo,

$$\Pi_*(A) (\Pi_*(P^{n_1} Q^{m_1} \dots P^{n_k} Q^{m_k}))^{-1} = Id \implies \Pi_*(A (P^{n_1} Q^{m_1} \dots P^{n_k} Q^{m_k})^{-1}) = Id.$$

Isto nos diz que  $A (P^{n_1} Q^{m_1} \dots P^{n_k} Q^{m_k})^{-1} \in Ker(\Pi_*) \subset \langle P, Q \rangle$ . Portanto  $A \in \langle P, Q \rangle$  e a prova está completa. □

Como primeiro passo relativo à construção do domínio fundamental para  $\Gamma$ , construiremos um domínio fundamental para o subgrupo  $\Gamma_\infty$  agindo sobre o *grupo de Heisenberg*, dado por  $\eta = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , com a operação de grupos:

$$(z_1, t_1) * (z_2, t_2) = (z_1 + z_2, t_1 + t_2 + 2Im(z_1 \bar{z}_2)).$$

Como veremos a seguir,  $\Gamma_\infty$  preserva horoesferas. Daí, um domínio fundamental para  $\Gamma_\infty$  agindo em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  é obtido tomando o feixe de geodésicas verticais (em coordenadas horoesféricas) sobre um domínio fundamental para o grupo de Heisenberg. Em outras palavras, o domínio fundamental para  $\Gamma_\infty$  agindo em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  é o cone geodésico sobre um domínio fundamental para  $\Gamma_\infty$  agindo em  $\eta$ .

Queremos descobrir qual a ação de  $P$  e  $Q$  em cada horoesfera. Para tal, usamos a identificação 1.1.

Começando por  $P$ , temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & w & -w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} + z + \omega \\ \omega z - \omega \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it + 2z + 2\omega}{2} \\ \omega z - \omega \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que

$$\begin{aligned} -|\omega z - \omega|^2 - u + it + 2i\operatorname{Im}(z) + i\sqrt{3} &= -(\omega z - \omega)(\overline{\omega z} - \overline{\omega}) - u + it + 2i\operatorname{Im}(z) + i\sqrt{3} = \\ &= -|z|^2 + z + \bar{z} - 1 - u + it + 2i\operatorname{Im}(z) + i\sqrt{3} = -|z|^2 - u + it + 2z + 2\omega. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & w & -w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|\omega z - \omega|^2 - u + it + 2i\operatorname{Im}(z) + i\sqrt{3}}{2} \\ \omega z - \omega \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $P$  age em  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  da seguinte forma:

$$P : (z, t, u) \mapsto (\omega z - \omega, t + 2\operatorname{Im}(z) + \sqrt{3}, u).$$

Analogamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|z|^2 - u + it}{2} + z + \omega \\ -z + 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|-z+1|^2 - u + i(t + 2\operatorname{Im}(z) + \sqrt{3})}{2} \\ -z + 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

o que nos dá a seguinte ação de  $Q$  sobre  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ :

$$Q : (z, t, u) \mapsto (-z + 1, t + 2\operatorname{Im}(z) + \sqrt{3}, u).$$

Estas ações preservam cada horoesfera, isto é, os pontos onde  $u$  é constante. Podemos então abandonar a dependência em  $u$  e olhar apenas para a ação de  $\Gamma_\infty$  em  $\eta$ .

Considere o triângulo equilátero  $T_*$  em  $\mathbb{C}$ , com vértices nos pontos  $0, -\omega$  e  $1$ , dado na Figura 2 a seguir. Afirmamos que a função  $\Pi_*(P)$  é a rotação (Euclideana) de  $\frac{2\pi}{3}$  em torno do centro desse triângulo,  $c = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{6}$ . Além disso,  $\Pi_*(Q)$  é a rotação (Euclideana) de  $\pi$  ao redor do ponto médio do lado de  $T_*$  unindo  $0$  e  $1$ .

De fato, já vimos que  $\Pi_*(P) : z \in \eta \mapsto (\omega z - \omega) \in \eta$ . Mostremos que  $R$ , a rotação (Euclideana) de  $\frac{2\pi}{3}$  em torno de  $c$ , tem a mesma ação que  $\Pi_*(P)$  em cada  $z \in \eta$ :

Sabemos que  $R = T_c \circ R_0 \circ T_c^{-1}$ , onde  $T_c : z \mapsto z + c$  e  $R_0^{\frac{2\pi}{3}}$  é a rotação (Euclideana) de  $\frac{2\pi}{3}$  em torno da origem. Daí,  $\forall z \in \eta$ ,

$$R(z) = T_c \circ R_0^{\frac{2\pi}{3}}(z - c) = T_c(\omega z - \omega c) = \omega z - \omega c + c = \omega z - \omega = \Pi_*(P)(z).$$

Logo,  $\Pi_*(P) = R$ .

Analogamente, para  $\Pi_*(Q) : z \mapsto -z + 1$ , motremos que  $R_1$ , a rotação (Euclideana) de  $\pi$  em torno de  $\frac{1}{2}$ , tem a mesma ação que  $\Pi_*(Q)$  em cada  $z \in \eta$ :

$$R_1(z) = T_{\frac{1}{2}} \circ R_{\pi}^0 \circ T_{\frac{1}{2}}^{-1}(z) = T_{\frac{1}{2}} \circ R_{\pi}^0(z - \frac{1}{2}) = T_{\frac{1}{2}}(-z + \frac{1}{2}) = -z + 1.$$

Observe que um domínio fundamental para  $\Pi_*(\Gamma_{\infty}) = \Delta(2, 3, 6)$  agindo em  $(C)$  é um terço do triângulo  $T_*$ . Começando por 0, podemos definir os vértices de  $T_*$  por 0,  $\Pi_*(P)(0) = -\omega$  e  $\Pi_*(P^2)(0) = 1$ . A ação de  $\Pi_*(P)$  e  $\Pi_*(Q)$  pode ser levantada para dar uma interpretação geométrica da ação de  $P$  e  $Q$ .

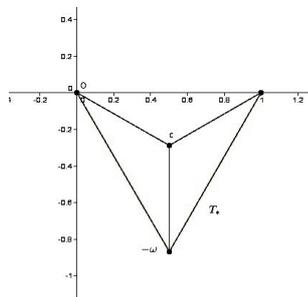


Figura 2:  $T_*$  contém 3 cópias de um domínio fundamental para  $\Delta(2, 3, 6)$ .

Para descrever geometricamente a ação de  $P$ , escrevemos  $z = c + \zeta$ . Já sabemos que

$$P : (c + \zeta, t, u) \mapsto (c + \zeta\omega, t + 2Im(\zeta) + \frac{2}{\sqrt{3}}, u).$$

Afirmamos que  $P$  é a rotação (de Heisenberg) de  $\frac{2\pi}{3}$  sobre a linha vertical que se projeta em  $c$ , seguida de uma translação vertical para cima de  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

De fato, utilizando a descrição das ações geométricas das transformações de Heisenberg dadas na seção 1.2.1 do capítulo anterior, temos que

$$T_{(0, \frac{2}{\sqrt{3}})} \circ R_{\frac{2\pi}{3}}^c : (z, t, u) \xrightarrow{R_{\frac{2\pi}{3}}^c} (\omega z + c(1 - \omega), t + 2Im(z\bar{c} - \omega\bar{c}(z - c)), u) \xrightarrow{T_{(0, \frac{2}{\sqrt{3}})}} (\omega z - \omega c + c, t + 2Im(z\bar{c} - \omega\bar{c}(z - c)), u).$$

Assim, pondo  $z = c + \zeta$ , obtemos:

$$T_{(0, \frac{2}{\sqrt{3}})} \circ R_{\frac{2\pi}{3}}^c : (c + \zeta, t, u) \mapsto (\zeta\omega + c, t + 2Im(|c|^2 + \zeta(\bar{c} - \omega\bar{c})) + \frac{2}{\sqrt{3}}, u) = \\ (c + \zeta\omega, t + 2Im(\zeta) + \frac{2}{\sqrt{3}}, u).$$

Daí, a ação de  $P$  coincide com a ação de  $T_{(0, \frac{2}{\sqrt{3}})} \circ R_{\frac{2\pi}{3}}^c$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Analogamente, podemos mostrar que  $Q$  age em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  como uma rotação de Heisenberg de  $\pi$ , fixando a linha vertical que passa por  $\frac{1}{2}$ , seguida de uma translação vertical para cima de  $\sqrt{3}$ .

De fato, já sabemos que, escrevendo  $z = \frac{1}{2} + \zeta$ , temos:

$$Q : (\frac{1}{2} + \zeta, t, u) \mapsto (\frac{1}{2} - \zeta, t + 2Im(\zeta) + \sqrt{3}, u).$$

Por outro lado,

$$T_{(0, \sqrt{3})} \circ R_{\pi}^{\frac{1}{2}} : (z, t, u) \xrightarrow{R_{\pi}^{\frac{1}{2}}} (-z + 1, t + 2Im(\frac{z}{2} + 1(z - \frac{1}{2})\frac{1}{2}), u) \xrightarrow{T_{(0, \sqrt{3})}} \\ (-z + 1, t + 2Im(\frac{1}{4} + \zeta) + \sqrt{3}, u).$$

Pondo  $z = \frac{1}{2} + \zeta$ , vemos que

$$T_{(0, \sqrt{3})} \circ R_{\pi}^{\frac{1}{2}} : (z, t, u) \mapsto (\frac{1}{2} - \zeta, t + 2Im(\zeta) + \sqrt{3}, u).$$

Concluimos que a ação de  $Q$  coincide com a de  $T_{(0, \sqrt{3})} \circ R_{\pi}^{\frac{1}{2}}$  em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

A matriz  $PQ^{-1}$ , que também é importante em nosso estudo, é dada por

$$PQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em coordenadas horoesféricas,  $PQ^{-1} : (z, t, u) \mapsto (-\omega z, t, u)$ . Temos que esta é a rotação por  $\frac{-\pi}{3} = \arg(-\omega)$  sobre o eixo vertical passando pela origem. Note que  $(PQ^{-1})^6 = Id$ .

Seja  $T$  o tetraedro afim com base em  $T_*$  e vértices  $p_0 = (0, -\sqrt{3})$ ,  $p_1 = P(p_0) = (-w, 0)$ ,  $p_2 = P^2(p_0) = (1, 0)$  e  $p_3 = P^3(p_0) = (0, \sqrt{3})$ , na fronteira de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , mostrado na figura 3.

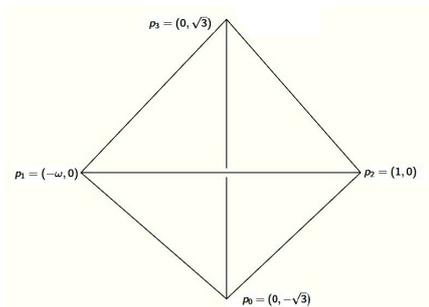


Figura 3: O tetraedro \$T\$

Temos que \$PQ^{-1}\$ fixa \$p\_0\$ e \$p\_3\$ e que \$PQ^{-1}(p\_2) = p\_1\$. Denotando as faces de \$T\$ pelas triplas ordenadas de seus vértices, isto nos dá as seguintes funções de emparelhamento para \$T\$:

$$P : (p_0, p_1, p_2) \mapsto (p_1, p_2, p_3);$$

$$PQ^{-1} : (p_0, p_2, p_3) \mapsto (p_0, p_1, p_3).$$

Analogamente, denotando os lados de \$T\$ pelos pares ordenados de seus pontos finais, os ciclos de lados dados por estas funções de emparelhamento são:

$$(p_0, p_3) \xrightarrow{PQ^{-1}} (p_0, p_3),$$

$$(p_0, p_1) \xrightarrow{P} (p_1, p_2) \xrightarrow{P} (p_2, p_3) \xrightarrow{PQ^{-1}} (p_1, p_3) \xrightarrow{P^{-1}} (p_0, p_2) \xrightarrow{PQ^{-1}} (p_0, p_1).$$

**Lema 2.3.** As imagens de \$T\$ por \$\langle P \rangle\$ são disjuntas, exceto por faces em comum, e tessalam o prisma cuja projeção vertical sob \$\Pi\$ é o triângulo \$T\_\*\$.

*Demonstração.* É claro que as faces verticais de \$T\$, \$(p\_0, p\_1, p\_3)\$ e \$(p\_0, p\_2, p\_3)\$, estão contidas nas faces verticais do prisma. Além disso, \$P(T)\$ é também um tetraedro afim, com vértices \$p\_1, p\_2, p\_3\$ e \$p\_4 = P(p\_3) = (-\omega, 2\sqrt{3})\$. As faces verticais desse tetraedro também estão contidas nas faces verticais do prisma. Os tetraedros \$T\$ e \$P(T)\$ possuem uma face comum, \$(p\_1, p\_2, p\_3)\$. Exceto por esta face, são disjuntos.

Observe que, se \$p\_k = P^k(p\_0)\$, para cada \$k \in \mathbb{N}\$, então os vértices do tetraedro \$P^k(T)\$ são \$p\_k, p\_{k+1}, p\_{k+2}\$ e \$p\_{k+3}\$, onde \$p\_k, p\_{k+1}\$ e \$p\_{k+2}\$ pertencem também a \$P^{k-1}(T)\$ e \$p\_{k+3}\$ é distinto de todos os vértices anteriores. Assim, \$P^k(T)\$ e \$P^{k-1}(T)\$ possuem uma face em comum (determinada pelos três vértices que estes possuem em comum).

Na verdade, podemos ver que os vértices \$p\_k = P^k(p\_0)\$ estão em uma sequência dada por:

$$\dots (1, k\sqrt{3}) \xrightarrow{P} (0, (k+1)\sqrt{3}) \xrightarrow{P} (-\omega, (k+2)\sqrt{3}) \xrightarrow{P} (1, (k+2)\sqrt{3}) \dots$$

Além disso, os tetraedros  $T$ ,  $P(T)$  e  $P^2(T)$  formam juntos uma parte finita do prisma, com topo e face inferior paralelos ( $(p_0, p_1, p_2)$  e  $P^3(p_0, p_1, p_2)$ ). Sendo  $P^3$  uma translação vertical, o resultado segue imediatamente.

□

Na Figura 4, fica fácil entender geometricamente o que ocorre:

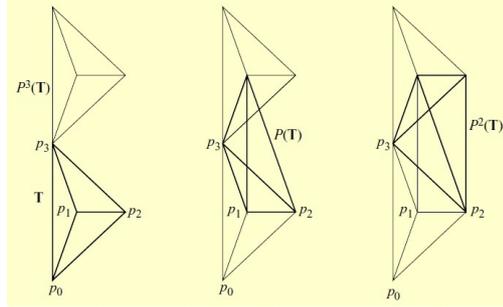


Figura 4:  $T$  tessela o prisma vertical em  $\eta$  que se projeta em  $T_*$

**Proposição 2.4.** As imagens de  $T$  sob  $\Gamma_\infty$  tessalam  $\eta$ . Além disso,  $\Gamma_\infty$  possui a seguinte representação:

$$\Gamma_\infty = \langle P, Q | (PQ^{-1})^6 = P^3Q^{-2} = Id \rangle.$$

*Demonstração.* Seja  $T_*$  o triângulo equilátero com vértices  $0, 1, -\omega$  em  $\mathbb{C}$ . O plano complexo é ladrilhado pelas imagens de  $T_*$  por  $\langle \Pi_*(P), \Pi_*(Q) \rangle$ , pois cada imagem de  $T_*$  possui três cópias de um domínio fundamental para  $\langle \Pi_*(P), \Pi_*(Q) \rangle$  em  $\mathbb{C}$ .

Como, pelo Lema 2.3, o prisma vertical que se projeta em  $T_*$  é ladrilhado pelas imagens de  $T$  por potências de  $P$ , segue que

$$\bigcup_{A \in \Delta(2,3,6)} \Pi^{-1}(AT_*) = \eta.$$

Observe que cada  $\Pi^{-1}(AT_*)$  é um prisma vertical que é tesselado por alguma imagem de  $T$  em  $\eta$ .

Portanto, as imagens de  $T$  por  $\Gamma_\infty$  cobrem  $\eta$ .

Resta verificar quais palavras em  $\Gamma_\infty$  dão origem ao mesmo tetraedro. Suponha que  $A, B \in \Gamma_\infty$  são duas de tais palavras, isto é  $A(T) = B(T)$ . Afirmamos que  $\Pi_*(A) = \Pi_*(B)$ . Com efeito, caso tivéssemos o contrário, então

$$\Pi_*(AB^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq Id,$$

o que nos dá  $z_0 \neq 0$  ou  $e^{i\theta} \neq 1$ . Portanto, teríamos

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{z}_0 e^{i\theta} & \frac{-|z_0|^2 + it_0}{2} \\ 0 & e^{i\theta} & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com  $z_0 \neq 0$  ou  $e^{i\theta} \neq 1$ , o que nos diz que  $AB^{-1}$  é uma rotação de Heisenberg por  $\theta \in (0, 2\pi)$  fixando a linha vertical pela origem, uma translação de Heisenberg por  $(z_0, t_0)$ , com  $z_0 \neq 0$  ou ainda uma composição de duas destas transformações. Mas assim teríamos  $AB^{-1}(T) \neq T \Rightarrow A(T) \neq B(T)$ .

Logo,  $\Pi_*(AB^{-1}) = Id$ , que é o único elemento do fecho normal do grupo gerado por  $\Pi_*(P^3)$ ,  $\Pi_*(Q^2)$  e  $\Pi_*((PQ^{-1})^6)$ . Como  $Ker\Pi_* = \langle P^3 \rangle \leq Z(\Gamma_\infty)$  é central, vemos que  $AB^{-1}$  é o termo correspondente no fecho normal de  $\langle P^3, Q^2, (PQ^{-1})^6 \rangle = \langle P^3 \rangle$  multiplicado por uma potência de  $P^3$ . Assim,  $AB^{-1} = P^{3k}$ . Como  $P^3$  é uma translação, segue que  $k$  deve ser igual a zero e, portanto,  $A = B$ .

Concluimos que  $T$  é um domínio fundamental para  $\Gamma_\infty$  agindo em  $\eta$ .

□

## 2.2 Geradores para $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$

Seja  $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Lembre-se que a esfera isométrica de  $R$  é  $S_0$ , dada na

Figura 1, à qual equipamos com coordenadas geográficas. Observe que  $R$  envia  $S_0$  nela mesma, mandando cada ponto  $(r, \theta, \alpha)$  em  $(r, -\theta, \alpha)$ , fixando a fatia de  $S_0$  correspondente a  $\theta = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -e^{i\theta} \\ r e^{i\alpha + i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -r e^{i\alpha + i\frac{\theta}{2}} \\ -e^{i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-i\theta} \\ r e^{i\alpha - i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde a última igualdade é obtida ao se normalizar o vetor  $\begin{bmatrix} 1 \\ -r e^{i\alpha + i\frac{\theta}{2}} \\ -e^{i\theta} \end{bmatrix}$  de modo que a última coordenada deste seja igual a 1. Isto quer dizer que  $\bar{R}(r, \theta, \alpha) = (r, -\theta, \alpha)$ .

Além disso, como  $R$  é contínua e envia  $p_\infty$  na origem de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , mantendo  $S_0$  invariante, ela permuta o interior e o exterior de  $S_0$ .

Analogamente,  $PQ^{-1}$  preserva  $S_0$  e envia cada ponto  $(r, \theta, \alpha)$  em  $(r, \theta, \alpha - \frac{\pi}{3})$ , fixando a espinha de  $S_0$ . De fato, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -e^{i\theta} \\ re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{i\theta} \\ -re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{i\theta} \\ -re^{i(\alpha+\frac{2\pi}{3})+i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{i\theta} \\ re^{i(\alpha-\frac{\pi}{3})+i\frac{\theta}{2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $PQ^{-1}(r, \theta, \alpha) = (r, \theta, \alpha - \frac{\pi}{3})$ .

**Teorema 2.5.**  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  é gerado por  $P, Q$  e  $R$ .

*Demonstração.* Mostraremos primeiramente que  $\langle P, Q, R \rangle$  possui somente uma cúspide. O fato de que  $\Gamma$  possui somente uma cúspide já é conhecido (ver [5], pág. 30). Nosso domínio Fundamental para  $\Gamma_\infty = \langle P, Q \rangle$  é o simplexo afim  $T$ , do qual os vértices estão no interior da esfera isométrica  $S_0$ . Como ela é convexa, temos que  $T$  está inteiramente contido no interior de  $S_0$ . Existe um domínio Fundamental para  $\langle P, Q, R \rangle$  no exterior da esfera  $S_0$  e dentro do domínio fundamental (em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ ) para  $\langle P, Q \rangle$ . Esta interseção toca  $\partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$  apenas em  $p_\infty$ . Então  $\langle P, Q, R \rangle$  possui somente uma cúspide.

Claramente, o grupo gerado por  $P, Q$  e  $R$  é um subgrupo de  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$ . Como ambos tem volume cofinito,  $\langle P, Q, R \rangle$  deve ter índice finito, digamos  $d$ , em  $\Gamma$ . Portanto, o estabilizador de  $p_\infty$  em  $\langle P, Q, R \rangle$  deve também ter índice  $d$  em  $\Gamma_\infty$ . Como o estabilizador de  $p_\infty$  é, em ambos,  $\langle P, Q \rangle$ , devemos ter  $d = 1$  e, daí,  $\langle P, Q, R \rangle = \Gamma$ .

□

### 3 *Um Domínio Fundamental para $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$*

O que faremos para obter um domínio fundamental para a ação de  $\Gamma$  sobre  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  é olhar inicialmente para um domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty}$  agindo sobre  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ , através do levantamento do domínio fundamental  $T$  obtido para  $\Gamma_{\infty}$  na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Sabemos que  $\Gamma = \langle P, Q, R \rangle$ , mas não há razões para se pensar que o domínio fundamental para  $\Gamma$  será a interseção do interior ou do exterior de  $S_0$  com o domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty}$ . De fato, Parker e Falbel dão um exemplo na página 264 de [2] que mostra que isto realmente não ocorre.

Na verdade, o domínio fundamental para  $\Gamma$  é obtido da interseção do exterior de  $S_0$  com um domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty}$  modificado. Para isso, é necessário que os pontos de  $S_0$  do nosso domínio estejam fora de qualquer outra esfera isométrica.

As modificações consistem em introduzir “esqueletos” totalmente geodésicos sempre que possível. Os vértices do domínio fundamental são os mesmos da interseção de  $S_0$  com  $T$ . Os lados são as geodésicas unindo estes pontos ( $p_{\infty}$  é um vértice ideal). As faces bidimensionais são totalmente geodésicas sempre que possível. Em nosso caso, como todas elas são triângulos, elas são totalmente geodésicas se, e somente se, seus três vértices estão contidos em um mesmo subespaço totalmente geodésico. Os triângulos contendo  $p_{\infty}$  são folheados por geodésicas partindo do vértice ideal e indo até o lado oposto.

Para determinar as faces bidimensionais e tridimensionais restantes, observamos que as arestas finitas (não contendo  $p_{\infty}$ ) estão todas contidas em  $S_0$ . Duas das faces bidimensionais são meridianos de  $S_0$  e as duas restantes são definidas como a interseção de  $S_0$  com imagens apropriadas dela mesma por elementos de  $\Gamma_{\infty}$ . Desse modo, garantimos o pareamento entre as faces.

Começaremos investigando a interseção de  $S_0$  com as esferas isométricas vizinhas.

### 3.1 A interseção de $S_0$ com suas vizinhanças.

Já consideramos os pontos  $p_n \in \eta, \forall n = 0, 1, 2, 3$ . Seja então  $\gamma_n$  a geodésica real passando por  $p_n$  e  $p_\infty$ , que é dada por:

$$\gamma_n(t) = \left\{ e^{\frac{t}{2}} p_n + e^{-\frac{t}{2}} p_\infty; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

A demonstração dessa formulação para a geodésica real passando por dois pontos pode ser vista em [8], página 30.

Denotemos por  $z_n$  o ponto de interseção de  $\gamma_n$  com  $S_0$ . Mostraremos agora como obter o ponto  $z_0$ . O procedimento é análogo para se obter  $z_1, z_2$  e  $z_3$ . Temos:

$$p_0 = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } p_\infty = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $\langle p_0, p_\infty \rangle = 1$ . Para poder usar a Proposição 5.1 de [8], devemos escolher levantamentos tais que  $\langle p_0, p_\infty \rangle = -1$ . Usaremos então o levantamento  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  de  $p_\infty$ . Daí, a geodésica real com pontos finais  $p_0$  e  $p_\infty$  é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \left\{ e^{\frac{t}{2}} p_0 + e^{-\frac{t}{2}} p_\infty \in \mathbb{C}^{2,1}; t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \gamma_0(t) &= \left\{ \begin{bmatrix} -e^{\frac{t}{2}} \frac{i\sqrt{3}}{2} - e^{-\frac{t}{2}} \\ 0 \\ e^{\frac{t}{2}} \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} - e^{-t} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Logo, um ponto de  $\gamma_0$  é dado em coordenadas horoesféricas por  $(0, -\sqrt{3}, 2e^{-t})$ . Esse ponto está na interseção de  $\gamma_0$  com  $S_0$  se, e somente se,  $|0 + 2e^{-t} - i\sqrt{3}| = 2$ . Temos:

$$|0 + 2e^{-t} - i\sqrt{3}| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4e^{-2t} + 3} = 2 \Leftrightarrow 4e^{-2t} = 1 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{2}.$$

Concluimos então que  $z_0 = (0, -\sqrt{3}, 1)$ .

Dados em coordenadas do Domínio de Siegel, os pontos procurados são:

$$z_0 = \begin{bmatrix} -\bar{\omega} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0, -\sqrt{3}, 1), z_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\omega \\ 1 \end{bmatrix} = (-\omega, 0, 1),$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1, 0, 1), z_3 = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0, \sqrt{3}, 1).$$

Vemos que todos estes pontos estão na horoesfera  $H_1$ . Fazendo a identificação canônica  $(z, t, 1) \mapsto (z, t, 0)$  entre  $H_1$  e  $\eta$ , podemos identificar  $z_n$  com  $p_n$ , para  $n = 0, 1, 2, 3$ . Ao invés de unir esses vértices por subspaços afins para formar o simplexo  $T$  como havíamos feito anteriormente, agora vamos uni-los por subspaços refletindo a geometria do espaço hiperbólico complexo, a fim de obter um simplexo  $T_0$  contido em  $S_0$ .

Em termos de coordenadas geográficas em  $S_0$ , esses pontos são dados pelo seguinte:

- $z_0$  tem  $r = 0$  e pertence à espinha de  $S_0$  e à fatia de  $S_0$  por  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ;
- $z_1$  tem  $r = 1$  e pertence à fatia de  $S_0$  por  $\theta = 0$  e ao meridiano de  $S_0$  correspondente a  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ;
- $z_2$  tem  $r = 1$  e pertence à fatia de  $S_0$  por  $\theta = 0$  e ao meridiano de  $S_0$  correspondente a  $\alpha = 0$ ;
- $z_3$  tem  $r = 0$  e pertence à espinha de  $S_0$  e à fatia de  $S_0$  por  $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ;

Observamos que como  $p_n = P^n(p_0), \forall n = 0, 1, 2, 3$  e os pontos  $z_n$  pertencem todos a uma mesma horoesfera, obtemos imediatamente  $z_n = P^n(z_0), \forall n = 0, 1, 2, 3$ . Alternativamente, isto poderia ser visto por um cálculo direto. Temos então que  $P^{-m}(z_n) = z_{n-m}$  está em  $P^{-m}(S_0)$ , para todo  $n - 3 \leq m \leq n$ . Isto nos dá o seguinte Lema:

**Lema 3.1.** Temos:

$$\begin{aligned} z_0 &\in S_0 \cap P^{-1}(S_0) \cap P^{-2}(S_0) \cap P^{-3}(S_0); \\ z_1 &\in P(S_0) \cap S_0 \cap P^{-1}(S_0) \cap P^{-2}(S_0); \\ z_2 &\in P^2(S_0) \cap P(S_0) \cap S_0 \cap P^{-1}(S_0); \\ z_3 &\in P^3(S_0) \cap P^2(S_0) \cap P(S_0) \cap S_0. \end{aligned}$$

**Lema 3.2.** Para cada  $m \neq n \in \{0, 1, 2, 3\}$ , seja  $\gamma_{mn} = \gamma_{nm}$  a geodésica passando por  $z_m$  e  $z_n$ . Então:

$$\begin{aligned} \gamma_{01} &\subset S_0 \cap P^{-1}(S_0) \cap P^{-2}(S_0); \\ \gamma_{12} &\subset P(S_0) \cap S_0 \cap P^{-1}(S_0); \\ \gamma_{23} &\subset P^2(S_0) \cap P(S_0) \cap S_0; \\ \gamma_{13} &\subset P(S_0) \cap S_0; \end{aligned}$$

$$\gamma_{02} \subset S_0 \cap P^{-1}(S_0);$$

$$\gamma_{03} \subset \sigma.$$

*Demonstração.* Temos:

1.  $z_0$  e  $z_3$  estão na espinha real de  $S_0$ . Assim,  $\gamma_{03}$  também deve estar contida na espinha real de  $S_0$ , já que esta é totalmente geodésica. Portanto,  $\gamma_{03} \subset S_0$ .
2.  $z_0, z_1$  e  $z_3$  estão no meridiano correspondente a  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ . Como os meridianos são subespaços totalmente geodésicos,  $\gamma_{01}$  e  $\gamma_{13}$  devem estar contidos nesse mesmo meridiano. Logo,  $\gamma_{01}, \gamma_{13} \subset S_0$ .

Aplicando  $P$ , vemos que  $P(z_0) = z_1$  e  $P(z_1) = z_2$  estão em um mesmo meridiano de  $P(S_0)$  e assim  $\gamma_{12}$  também está contida em  $P(S_0)$ . Analogamente,  $\gamma_{23} \subset P(S_0)$ .

Aplicando também  $P^{-1}$ , podemos ver que  $z_0$  e  $z_2$  estão contidos no mesmo meridiano de  $P^{-1}(S_0)$ . Daí,  $\gamma_{02} \subset P^{-1}(S_0)$ .

3.  $z_0, z_2$  e  $z_3$  estão no meridiano correspondente a  $\alpha = 0$ . Logo,  $\gamma_{02}$  e  $\gamma_{23}$  devem estar contidos nesse mesmo meridiano. Portanto,  $\gamma_{02}, \gamma_{23} \subset S_0$ .

Aplicando  $P$ , vemos que  $P(z_0) = z_1$  e  $P(z_2) = z_3$  estão em um mesmo meridiano de  $P(S_0)$  e, daí,  $\gamma_{13}$  também está contida em  $P(S_0)$ .

Aplicando também  $P^{-1}$ , podemos ver que  $z_1$  e  $z_2$  estão contidos no mesmo meridiano de  $P^{-1}(S_0)$ . Consequentemente,  $\gamma_{12} \subset P^{-1}(S_0)$ .

Aplicando  $P^{-2}$ , vemos de modo análogo que  $\gamma_{01} \subset P^{-2}(S_0)$ .

4.  $z_1$  e  $z_2$  estão na fatia de  $S_0$  correspondente a  $\theta = 0$ . Como as fatias também são subespaços totalmente geodésicos,  $\gamma_{12}$  deve estar contida nessa fatia. Logo,  $\gamma_{12} \subset S_0$ .

Aplicando  $P$  e  $P^{-1}$ , vemos, respectivamente, que  $\gamma_{23} \subset P(S_0)$  e  $\gamma_{01} \subset P^{-1}(S_0)$ .

Unindo todos esses resultados, o lema está provado.

□

Olharemos com mais atenção para a interseção de  $S_0$  e  $P^{-1}(S_0)$ .

Afirmamos que  $P^{-1}(S_0)$  é dada por  $S_{-1} = \{(z, t, u) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; |z|^2 + u - it - 2z - 2\omega = 2\}$ .

De fato, um cálculo simples nos mostra que

$$P^{-1} : (z, t, u) \mapsto (\bar{\omega}z + 1, t - 2Im(\bar{\omega}z) - \sqrt{3}, u).$$

Daí, temos que se  $(z, t, u) \in S_0$ , então

$$\left| |\bar{\omega}z + 1|^2 + u + i(t - 2\text{Im}(\bar{\omega}z) - \sqrt{3}) - 2z - 2w \right| = \left| |z|^2 - u + it \right| = 2$$

Logo,  $P^{-1}(z, t, u) \in S^{-1}$ . Isto implica que  $P^{-1}(S_0) \subset S_{-1}$ .

Reciprocamente, suponha que  $(z, t, u) \in S_{-1}$ .

Então  $P(z, t, u) = (\omega z - \omega, t + 2\text{Im}(z) + \sqrt{3}, u)$  satisfaz:

$$\left| |\omega z - \omega|^2 + u + i(t + 2\text{Im}(z) + \sqrt{3}) \right| = \left| |z|^2 + u - it - 2z - 2w \right| = 2,$$

o que nos dá  $P(z, t, u) \in S_0$ . Concluimos que  $S_{-1} \subset P^{-1}(S_0)$  e, portanto, ambos são iguais.

**Lema 3.3.** Um ponto  $(r, \theta, \alpha)$  de  $S_0$  escrito em coordenadas geográficas com  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$  não intersecta o interior de  $S_{-1}$ , desde que

$$r \leq 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, o ponto está em  $S_0 \cap S_{-1}$ .

*Demonstração.* Alterando a expressão de  $S_{-1}$  obtida acima para coordenadas geográficas, vemos que um ponto de  $S_0$  não intersecta o interior de  $S_{-1}$  se, e somente se,

$$1 \leq \left| e^{i\theta} - re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| = \left| re^{i(\alpha+\frac{\pi}{6})} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \quad (3.1)$$

De fato, todo ponto no interior de  $S_{-1}$  tem  $1 \leq \left| e^{i\theta} - re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \right|$ , pois

$$S_{-1} = \{(z, t, u) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; |z|^2 + u - it - 2z - 2w = 2\} = \{(r, \theta, \alpha); \left| e^{i\theta} + re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} - \omega \right| = 1\}.$$

A igualdade  $\left| e^{i\theta} - re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| = \left| re^{i(\alpha+\frac{\pi}{6})} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right|$  é obtida abrindo-se as expressões. Temos:

$$\begin{aligned} \left| e^{i\theta} - re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| &= (e^{i\theta} - re^{i\alpha+i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{3}})(e^{-i\theta} - re^{-i\alpha-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\pi}{3}}) \\ &= 1 - re^{-i\alpha+i\frac{\theta}{2}} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})} - re^{i\alpha-i\frac{\theta}{2}} + r^2 - re^{i(\alpha+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{3})} + e^{i(-\theta-\frac{\pi}{3})} - re^{i(-\alpha-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3})} + 1 \\ &= 2 - 2r \cos\left(-\alpha + \frac{\theta}{2}\right) + 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + r^2 - 2r \cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 + r^2 - 2r \cos\left(\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right) - 2r \cos\left(\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) + 2\cos\left(2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= r^2 - 4r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| r e^{i(\alpha + \frac{\pi}{6})} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| &= \left( r e^{i(\alpha + \frac{\pi}{6})} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right) \left( r e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{6})} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &= r^2 - 2r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{i(\alpha + \frac{\pi}{6})} - 2r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{i(-\alpha - \frac{\pi}{6})} + 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= r^2 - 4r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Além disso, a igualdade em 3.1é obtida se, e somente se, o ponto está em  $S_0 \cap S_{-1}$ .

Temos que isto é equivalente a

$$0 \leq r^2 - 4r \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - 1.$$

Esta equação de segundo grau é satisfeita pelos pontos de  $S_0$  com

$$r \leq 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$$

ou

$$r \geq 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Afirmamos que quando  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$  a segunda das soluções acima é sempre maior ou igual a  $\sqrt{2 \cos \theta}$  e, portanto, não corresponde a um ponto de  $S_0$ . Para ver isto, note que a condição  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$  implica que  $2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \geq \sqrt{3}$  e  $4 \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ . Então:

$$\begin{aligned} &2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} \geq \\ &\geq \sqrt{3} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{2 \cos \theta + 2} > \sqrt{2 \cos \theta}. \end{aligned}$$

Logo, o resultado está demonstrado.  $\square$

Podemos agora caracterizar os arcos geodésicos  $\gamma_{mn}$  em termos das coordenadas geográficas:

**Lema 3.4.** Em termos de coordenadas geográficas, temos:

- $\gamma_{01}$  consiste dos pontos de  $S_0$  com  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ,  $r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ;

- $\gamma_{12}$  consiste dos pontos de  $S_0$  com  $\theta = 0$ ,  $r = \sqrt{3} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 3\text{sen}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$  e  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$ ;
- $\gamma_{02}$  consiste dos pontos de  $S_0$  com  $\alpha = 0$ ,  $r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ;
- $\gamma_{23}$  consiste dos pontos de  $S_0$  com  $\alpha = 0$ ,  $r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$  e  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$ ;
- $\gamma_{13}$  consiste dos pontos de  $S_0$  com  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ,  $r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$  e  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0$ ;
- $\gamma_{03}$  consiste dos pontos de  $S_0$  com  $r = 0$  e  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ;

*Demonstração.* Note que:

- Como  $\gamma_{03}$  está na espinha de  $S_0$ , sua expressão em coordenadas geográficas segue diretamente (observe que  $r = 0$  em  $\sigma$  e que  $\gamma_{03}$  vai de  $z_3$ , onde  $\theta = -\frac{\pi}{3}$  até  $z_1$ , onde  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ).
- Já vimos que  $\gamma_{01}$ ,  $\gamma_{12}$  e  $\gamma_{02}$  estão em  $S_0 \cap S_{-1}$ , pelo lema 3.2. Sabemos também que  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$  para todo ponto de  $\gamma_{01}$ . Substituindo este valor no lema 3.3 e requerendo a igualdade, obtemos

$$r = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Sabemos que  $\theta = 0$  em  $z_1$  e em  $z_2$  e  $\theta = \frac{\pi}{3}$  em  $z_0$ . Daí segue a primeira parte:

Em  $\gamma_{01}$ ,  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ,  $r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ .

Em  $\gamma_{02}$ ,  $\alpha = 0$  (pois  $z_0, z_2$  estão ambos no meridiano correspondente a  $\alpha = 0$ ),  $r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  (substituímos  $\alpha = 0$  no lema 3.3) e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ .

Em  $\gamma_{12}$ ,  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$  (pois  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$  em  $z_1$  e  $\alpha = 0$  em  $z_2$ ),  $r = \sqrt{3} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 3\text{sen}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$  (substituímos  $\theta = 0$  no lema 3.3) e  $\theta = 0$  (pois  $z_1, z_2$  estão ambos na fatia correspondente a  $\theta = 0$ ).

- Sabemos que  $R : (r, \theta, \alpha) \mapsto (r, -\theta, \alpha)$ . Logo,  $R$  fixa  $z_1$  e  $z_2$  e envia  $z_0$  em  $z_3$ . Assim, para obter os resultados relativos a  $\gamma_{13}$  e  $\gamma_{23}$ , devemos substituir  $\theta$  por  $-\theta$  nas expressões de  $\gamma_{01}$  e  $\gamma_{02}$ , respectivamente.

Isto prova o Lema. □

### 3.2 O tetraedro básico $T_0$

Usando as coordenadas geográficas de  $S_0$ , o tetraedro  $T_0$  é definido pelos pontos de  $S_0$  para os quais

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}. \end{cases}$$

As figuras nos dão uma visão esquemática (Figura 5) e uma visão realista (Figura 6) de  $T_0$ .

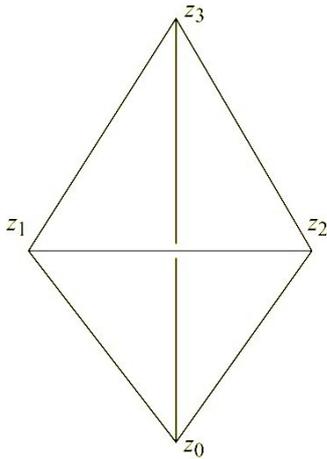


Figura 5: Visão esquemática de  $T_0$  na fronteira

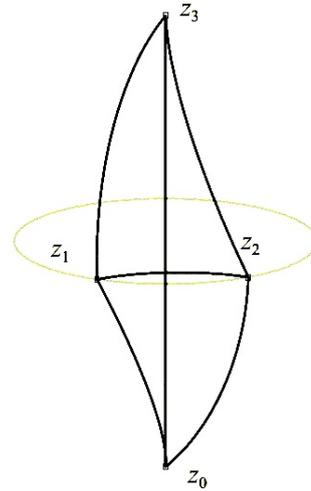


Figura 6: Visão realista de  $T_0$  na fronteira

As faces de  $T_0$  são definidas como segue:

- A face  $F_1$  de  $T_0$  é dada pela interseção com o meridiano dado por  $\alpha = 0$ . Por isso, seus pontos são parametrizados por

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

- $F_2$  é dada pela interseção de  $T_0$  com o meridiano dado por  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ . Então seus

pontos são parametrizados por

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

- $F_3$  é dada pela interseção de  $T_0$  com  $S_{-1}$ . Então seus pontos são parametrizados por

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0; \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}. \end{cases}$$

- $F_4$  é a interseção de  $T_0$  com  $P(S_0)$ . Por isto, seus pontos são parametrizados por

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 0; \\ r = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}. \end{cases}$$

É claro que as arestas de  $T_0$  são as geodésicas  $\gamma_{mn}$ , para  $m \neq n$  em  $\{0, 1, 2, 3\}$ , como definido e seus vértices são os pontos  $z_0, z_1, z_2, z_3$ . Em particular, temos:

$$\gamma_{01} = F_2 \cap F_3;$$

$$\gamma_{12} = F_3 \cap F_4;$$

$$\gamma_{02} = F_1 \cap F_3;$$

$$\gamma_{03} = F_1 \cap F_2;$$

$$\gamma_{13} = F_2 \cap F_4;$$

$$\gamma_{23} = F_1 \cap F_4;$$

$$z_0 = F_1 \cap F_2 \cap F_3;$$

$$z_1 = F_2 \cap F_3 \cap F_4;$$

$$z_2 = F_1 \cap F_3 \cap F_4;$$

$$z_3 = F_1 \cap F_2 \cap F_4.$$

**Proposição 3.5.** A involução  $R$  envia  $T_0$  nele mesmo. Além disso,  $(PQ^{-1})^{-1}(T_0) \cap T_0 = F_1$  e  $PQ^{-1}$  envia  $F_1$  em  $F_2$ . Analogamente,  $P^{-1}(T_0) \cap T_0 = F_3$  e  $P$  envia  $F_3$  em  $F_4$ .

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente das formulações dadas previamente para  $R$ ,  $PQ^{-1}$  e  $P$ .

Sabemos que  $R : (r, \theta, \alpha) \mapsto (r, -\theta, \alpha)$ . Como em  $T_0$  tem-se  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  e  $r$  e  $\alpha$  são mantidos, temos que  $R(T_0) = T_0$ .

Sabemos também que

$$(PQ^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (r, \theta, \alpha) \mapsto (r, \theta, \alpha + \frac{\pi}{3}).$$

Lembre-se que em  $T_0$  temos

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}. \end{cases}$$

Daí, concluimos que  $(PQ^{-1})^{-1}(T_0)$  é dado pelos pontos com

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}. \end{cases}$$

Assim, a interseção  $(PQ^{-1})^{-1}(T_0) \cap T_0$  é dada por

$$\begin{cases} \alpha = 0; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

Isto nos diz que  $(PQ^{-1})^{-1}(T_0) \cap T_0$  é exatamente a face  $F_1$  de  $T_0$ .

Para ver que  $(PQ^{-1})(F_1) = F_2$ , basta observar que como  $PQ^{-1} : (r, \theta, \alpha) \mapsto (r, \theta, \alpha - \frac{\pi}{3})$ , temos que

$$F_1 = \begin{cases} \alpha = 0; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \xrightarrow{PQ^{-1}} F_2 = \begin{cases} \alpha = -\frac{\pi}{3}; \\ -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; \\ 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases},$$

o que termina a prova da segunda afirmação.

A prova da segunda parte é análoga.  $\square$

Na figura 6, vemos as arestas de  $T_0$  usando coordenadas isométricas, isto é, parame-

trizamos  $S_0$  por  $(z, t)$  onde  $u = \sqrt{4 - t^2} - |z|^2$ .

**Lema 3.6.** Todos os pontos de  $T_0$  satisfazem  $r \leq 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ , ocorrendo a igualdade apenas quando  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ .

*Demonstração.* O resultado segue ao se examinar como

$$r = 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - 4 \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}$$

(na definição de  $T_0$ ) varia quando  $\alpha$  varia de  $-\frac{\pi}{3}$  a 0.

Temos que para  $\alpha = 0$ ,

$$r = \sqrt{3} \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

e quando  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ , obtemos:

$$r = \sqrt{3} \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2 \cos\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

□

**Lema 3.7.** Todos os pontos de  $T_0$  satisfazem  $u \geq 1$ , com igualdade valendo apenas nos vértices.

*Demonstração.* Sabemos que  $u$  é dado em coordenadas geográficas por  $u = 2 \cos \theta - r^2$ . Usando a limitação do Lema 3.6 e que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ , vemos que

$$u \geq 2 \cos |\theta|^2 - 4 \cos^2\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos |\theta| + \sqrt{3} \sin |\theta| - 2 = 2\sqrt{3} \sin\left(|\theta| + \frac{2\pi}{3}\right) - 2 \geq 1,$$

onde a igualdade vale, no início, quando  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$  e no final quando  $\theta \in \{0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ .

□

**Lema 3.8.** Se  $(r, \theta, \alpha) \in T_0$ , então para todo  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , temos:

$$\left| r e^{i(\alpha + \frac{\theta}{2})} - \sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})} \right| \geq 1.$$

*Demonstração.* Quando  $\theta = 0$ , temos  $|r e^{i\alpha} - \sqrt{3}| \geq 1$  (faça  $\theta = 0$  no lema 3.3). Além disso, é fácil ver geometricamente que  $|r e^{i\alpha} - \sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})}| \geq |r e^{i\alpha} - \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}|$ , para todo  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  (veja Figura 7 a seguir).

De fato,  $re^{i\alpha}$  está sempre no setor  $S$  da figura, já que  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$  e  $r \leq \sqrt{2}$ , e sua distância a qualquer um dos pontos  $\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})}$  é no mínimo igual à distância entre  $re^{i\alpha}$  e  $\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

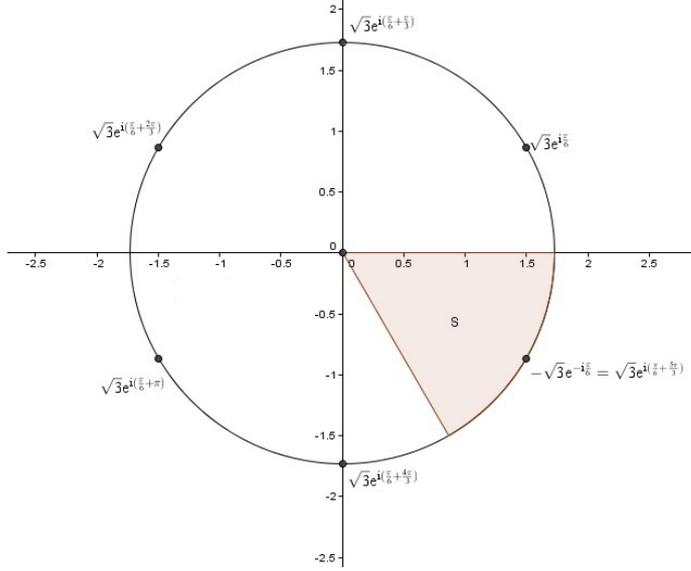


Figura 7:  $|re^{i\alpha} - \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})}| \geq |re^{i\alpha} - \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}|$

Daí, segue que o Lema vale para  $\theta = 0$ .

Fixemos agora  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$  e consideremos o plano  $re^{i\alpha}$ . A interseção desse plano com  $T_0$  é dada por

$$T_0(\theta) = \left\{ re^{i\alpha}; -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0, 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right), \left| re^{i\alpha} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{-i\frac{\pi}{6}} \right| \geq 1 \right\}.$$

Precisamos mostrar que os pontos em  $T_0(\theta)$  satisfazem  $\left| re^{i(\alpha+\frac{\theta}{2})} - \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})} \right| \geq 1$ .

Seja  $C_k$  o círculo definido por  $\left\{ \left| re^{i\alpha} - \sqrt{3}e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})} \right| = 1 \right\}$ . Um cálculo simples nos mostra que

$$\left| 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})} \right| = \left| e^{i\theta} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + i\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| > 1.$$

Como  $\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$ , vemos que  $C_k$  intersecta o disco de raio  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  no intervalo onde  $-\frac{k+1}{3} < \alpha < -\frac{k\pi}{3}$ . Em particular, para  $k = 0, 1, \dots, 5$ , o círculo  $C_k$  não intersecta o setor onde  $0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$  e  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$  e, portanto, não intersecta  $T_0(\theta)$ .

Consideremos agora o círculo  $C_0$ . Ele intersecta  $\left\{ \left| re^{i\alpha} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right) e^{-i\frac{\pi}{6}} \right| = 1 \right\}$  nos

pontos  $e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})}$  e  $2 \cos(\frac{\theta}{2}) + e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})}$ . Ambos tem módulo maior ou igual a  $2 \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})$  e, daí, pontos de  $C_0$  também tem  $|re^{i\alpha} - 2 \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}) e^{-i\frac{\pi}{6}}| < 1$  ou  $r > 2 \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})$ . Portanto,  $C_0$  não intersecta  $T_0$ . Isto nos dá o resultado para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ . Quando  $-\frac{\pi}{3} \leq \theta < 0$ , temos:

$$T_0(\theta) = \left\{ re^{i\alpha}; -\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0, 0 \leq r \leq 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{3}\right), \left| re^{i\alpha} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) e^{-i\frac{\pi}{6}} \right| \geq 1 \right\}.$$

Neste caso, o resultado segue por argumentos análogos aos feitos acima, porém substituindo  $\alpha$  por  $-\alpha - \frac{\pi}{3}$  e  $\theta$  por  $-\theta$ .

□

**Lema 3.9.** O tetraedro  $T_0$  é um simplexo tridimensional mergulhado em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

*Demonstração.* Os pontos de  $S_0$  cujas coordenadas geográficas são distintas correspondem a diferentes pontos de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Como  $T_0$  é um simplexo afim tridimensional no espaço de coordenadas geográficas, segue o lema.

□

**Lema 3.10.** Os únicos elementos de  $\Gamma_{\infty}$  que mantêm  $S_0$  invariante são as potências de  $PQ^{-1}$ .

*Demonstração.* Seja  $T \in \Gamma_{\infty}$  tal que  $T(S_0) = S_0$ . Assim,  $T$  deve ser uma rotação de Heisenberg fixando a espinha real de  $S_0$  (logo,  $T$  deve fixar  $(0, 0, 0)$ ). Temos então:

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies b = d = 0.$$

Lembramos que  $c$  deve ser unitário pois  $T$  está em  $\Gamma_{\infty}$ .

Analogamente, como  $T^{-1}(0) = 0$ , segue que  $a = 0$ .

Usando o fato de que  $T \in PU(2, 1)$  e suas entradas estão em  $\mathbb{Z}[\omega]$ , vemos imediatamente que  $T$  é uma potência de  $PQ^{-1}$ .

Observe que

$$(PQ^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } n \text{ é par, ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\omega)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se } n \text{ é ímpar.}$$

□

**Proposição 3.11.** O interior de  $T_0$  é disjunto de qualquer imagem de  $S_0$  por elementos de  $\Gamma_\infty \setminus \langle PQ^{-1} \rangle$ .

*Demonstração.* Suponha que  $(z, t, u)$  esteja em  $T_0$  e também em alguma esfera isométrica de raio  $\sqrt{2}$  e centro  $(z_0, t_0, 0) \neq (0, 0, 0)$ , isto é:

$$\{(z, t, u) \in \eta \times \mathbb{R}^+; (|z|^2 + u)^2 + t^2 = (|z - z_0|^2 + u)^2 + (t - t_0 - 2\text{Im}(z\bar{z}_0))^2 = 4\},$$

ou, usando coordenadas geográficas:

$$1 = \left| e^{i\theta} - r e^{i(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \bar{z}_0 + \frac{|z_0|^2 + it_0}{2} \right|.$$

Além disso,  $z_0$  e  $\frac{|z_0|^2 + it_0}{2}$  devem ambos estar em  $\mathbb{Z}[\omega]$ . Como  $(|z|^2 + u)^2 + t^2 = 4$  e  $u \geq 1$  (pelo lema 3.7), devemos ter  $|z| \leq 1$  e  $|z|^4 + t^2 \leq 3 - 2|z|^2$ . Analogamente,  $|z - z_0| \leq 1$  e  $|z - z_0|^4 + (t - t_0 + 2\text{Im}(z\bar{z}_0))^2 \leq 3 - 2|z - z_0|^2$ .

Daí,

$$\begin{aligned} ||z_0|^2 + it_0| &= ||z - z_0|^2 - it + it_0 - 2i\text{Im}(z\bar{z}_0) + |z|^2 + it - 2z(\bar{z} - \bar{z}_0)| \leq \\ &\leq ||z - z_0|^2 - it + it_0 - 2i\text{Im}(z\bar{z}_0)| + ||z|^2 + it| + 2|z| |(\bar{z} - \bar{z}_0)| \leq \\ &\leq \sqrt{3 - 2|z - z_0|^2} + \sqrt{3 - 2|z|^2} |z| |(\bar{z} - \bar{z}_0)| \leq 4, \end{aligned}$$

onde a igualdade na última linha vale se, e somente se,  $|z| = |z - z_0| = 1$ . Precisamos então investigar a interseção de  $S_0$  com as esferas isométricas com centro em  $(z_0, t_0, 0)$ , onde  $z_0$  e  $\frac{|z_0|^2 + it_0}{2}$  estão em  $\mathbb{Z}[\omega]$  e  $||z_0|^2 - it_0| \leq 4$ . Isto implica imediatamente que  $||z_0|^2 - it_0|$  é igual a  $2, 2\sqrt{3}$  ou  $4$ .

Suponhamos primeiramente que  $||z_0|^2 - it_0| = 2$ . Segue que  $\frac{|z_0|^2 - it_0}{2}$  é uma potência de  $-\omega$ . Isto implica que  $z_0 = (-\omega)^k$ , para  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $t_0 = \pm\sqrt{3}$ . Então:

$$1 = \left| e^{i\theta} + e^{\pm i\frac{\pi}{3}} - r e^{i(\alpha + \frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{3})} \right| = \left| r e^{i\alpha} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} \mp \frac{\pi}{6}\right) e^{-i(k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6})} \right|.$$

Se  $(r, \theta, \alpha) \in T_0$ , então devemos ter  $1 \leq \left| r e^{i\alpha} - 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi}{6}\right) e^{-i\frac{\pi}{6}} \right|$ , para ambas as opções de sinal.

Combinando isto, obtemos que  $r e^{i\alpha}$  é pelo menos tão próximo (com respeito à métrica Euclideana em  $\mathbb{C}$ ) de  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2} \mp \frac{\pi}{6}\right) e^{-i(k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6})}$  quanto de  $2 \cos\left(\frac{\theta}{2} \mp \frac{\pi}{6}\right) e^{-ik\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}}$ .

Como  $-\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 0$ , devemos ter  $k = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$  e então  $(z_0, t_0, 0) = (1, -\sqrt{3}, 0) =$

$P^{-1}(0, 0, 0)$  ou  $(z_0, t_0, 0) = (-\omega, \sqrt{3}, 0) = P(0, 0, 0)$ . Portanto,  $(r, \theta, \alpha) \in F_3$  ou  $(r, \theta, \alpha) \in F_4$ . Em particular,  $(r, \theta, \alpha)$  não está no interior de  $T_0$ .

Suponhamos agora que  $||z_0|^2 - it_0| = 2\sqrt{3}$ . Então ou  $|z_0| = \sqrt{3}$  e  $t_0 = \pm\sqrt{3}$  ou  $|z_0| = 0$  e  $t_0 = \pm 2\sqrt{3}$ .

No primeiro caso, temos  $z_0 = (1 - \omega)(\omega)^k = \sqrt{3}e^{-i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3})}$ , para algum  $k = 0, 1, \dots, 5$ . Usando os lemas 3.7 e 3.8, vemos que se  $(z, t, u) \in T_0$ , então  $|z - z_0| \geq 1$  e  $u \geq 1$ . No último caso, somente temos a igualdade nos vértices. Isto implica que  $(|z - z_0|^2 + u)^2 \geq 4$ , com desigualdade estrita, exceto nos vértices. Então os interiores dos tetraedros são disjuntos.

No segundo caso, temos  $(|z|^2 + u)^2 + t^2 = (|z|^2 + u)^2 + (t \pm 2\sqrt{3})^2 = 4$ . As únicas soluções (com  $u \geq 1$ ) são  $(0, \pm\sqrt{3}, 1)$ , isto é, os pontos  $z_1$  e  $z_3$ .

Finalmente, suponhamos  $||z_0|^2 - it_0| = 4$ . Como  $z_0, \left(\frac{|z_0|^2 - it_0}{2}\right) \in \mathbb{Z}[\omega]$ , a única possibilidade para este caso é  $|z_0| = 2$  e  $t_0 = 0$ . No entanto, sabemos que  $|z| \leq 1$  e  $|z - z_0| \leq 1$ , com igualdade somente quando  $u = 1$ . Como  $|z_0| \leq |z| + |z - z_0| \leq 2$ , vemos que  $u$  deve ser igual a 1 e, daí, o interior de  $T_0$  não intersecta tal esfera isométrica.

□

### 3.3 O simplexo de quatro dimensões

Definimos agora os tetraedros  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$ , cada um dos quais dado pelo cone geodésico de  $p_\infty$  até as faces  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$ , respectivamente. Em outras palavras, para cada  $i = 1, 2, 3, 4$ , o tetraedro  $T_i$  é definido pela união tomada sobre todos os pontos  $p \in F_i$  dos arcos geodésicos unindo  $p$  a  $p_\infty$ .

**Proposição 3.12.** Os tetraedros  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$  são simplexos tri-dimensionais mergulhados em  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup p_\infty$ .

*Demonstração.* É suficiente mostrar que a projeção vertical  $\Pi$  mapeia cada face de  $T_0$  bijetivamente sobre a sua imagem. Equivalentemente, dado um ponto em  $\partial T_0$  em coordenadas horoesféricas  $(z, t, u)$ ,  $u$  é então especificada por  $z$  e  $t$ . Como  $T_0 \subset S_0$ , temos  $u = \sqrt{4 - t^2 - |z|^2}$ .

□

Por construção, a interseção de  $T_0$  com cada um dos  $T_i$  é apenas a face correspondente  $F_i$  de  $T_0$ . Analogamente, cada par de tetraedros em  $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  se intersecta em um

subconjunto bidimensional formado pelo cone geodésico de  $p_\infty$  a uma das arestas  $\gamma_{mn}$ . Finalmente, cada tripla em  $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  se intersecta em uma geodésica unindo um dos vértices de  $T_0$  com  $p_\infty$ .

Definimos o simplexo  $D$ , de dimensão 4, pelo cone geodésico do vértice  $p_\infty$  até o tetraedro  $T_0$ . Pelo mesmo argumento da Proposição 3.12, vemos que  $D$  é um 4-simplexo mergulhado em  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2 \cup p_\infty$ . Além disso,  $D$  possui cinco faces tri-dimensionais,  $T_0, T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$ . O objetivo desta seção é mostrar que  $D$  é um domínio fundamental para  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  sobre  $\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ .

**Proposição 3.13.** O interior do domínio  $D$  está fora de todas as esferas isométricas dos elementos de  $\Gamma \setminus \Gamma_\infty$ .

*Demonstração.* Seja  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$ . Por definição, o raio da esfera isométrica de  $A$  é  $\sqrt{\frac{2}{|g|}}$  (ver [8], pág.25). Como  $g \in \mathbb{Z}[\omega]$ , afirmamos que  $|g| = 1, \sqrt{3}$  ou  $|g| \geq 2$ .

De fato, seja  $g = a + b\omega = (a - \frac{b}{2}) + i\frac{b\sqrt{3}}{2}$  onde  $a, b \in \mathbb{Z}$  e suponhamos  $|g| < 2$ , ou seja,  $\sqrt{a^2 - ab + b^2} < 2$ . O problema de encontrar os pares  $(a, b)$  tais que  $a, b \in \mathbb{Z}$  satisfaçam a essa condição é equivalente a procurar pares de inteiros no interior da região limitada pela elipse  $a^2 - ab + b^2 = 4$ , centrada na origem e com eixos rotacionados por  $\frac{\pi}{4}$ . Derivando  $a^2 - ab + b^2 = 4$  implicitamente em relação a  $a$  e a  $b$ , os pontos onde essas derivadas se anulam nos dão os valores extremos para  $a$  e  $b$  atingidos na elipse. Obtidos esses valores, podemos agora testar os pares de inteiros no interior do retângulo que contém essa elipse, com o objetivo de encontrar os pontos que nos interessam, como está representado na figura 8.

Obtemos que os pares de inteiros no interior da elipse são (note que  $(0, 0)$  não nos interessa pois  $|g| \neq 0$ ):

$$(-2, -1), (-1, 0), (-1, 1), (2, 1), (0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 0) \text{ e } (1, 1).$$

Em todos esses casos, o valor de  $|g| = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$  é 1 ou  $\sqrt{3}$ .

Suponha que  $(z, t, u)$  está na esfera isométrica de centro  $(z_0, t_0, 0)$  e raio no máximo igual a 1, isto é,  $|g| \geq 2$ . Então:

$$|z - z_0|^2 + u - it + it_0 - 2iIm(z\bar{z}_0) \leq 1.$$

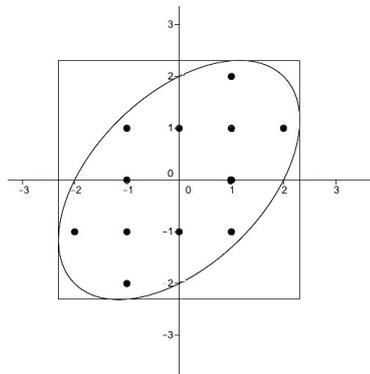


Figura 8: Pares de inteiros no interior da elipse dada.

Afirmamos que  $u \leq 1$  e, por consequência do Lema 3.7,  $(z, t, u)$  não pode pertencer ao interior de  $T_0$ . De fato, caso tivéssemos  $u > 1$ , então

$$||z - z_0|^2 + u - it + it_0 - 2i\text{Im}(z\bar{z}_0)| = (|z - z_0|^2 + u)^2 + (t - t_0 + 2\text{Im}(z\bar{z}_0))^2 \geq u^2 > 1.$$

Suponha agora que  $A \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$  possua uma esfera isométrica de raio  $\sqrt{2}$  (isto é,  $|g| = 1$ ). Os pontos  $(a, b)$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ , satisfazendo  $a^2 - ab + b^2 = 1$  são  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ . Esses pontos nos fornecem, respectivamente,  $g = -1 = (-\omega)^3$ ,  $g = -\omega$ ,  $g = \omega = (-\omega)^4$ ,  $g = 1 = (\omega)^3 = (\omega)^6 = (-\omega)^6$  e  $g = -(\omega)^2 = (-\omega)^3(-\omega)^2 = (-\omega)^5$ .

Então  $g = (-\omega)^k$ . Além disso,  $A^{-1}(p_\infty)$  é visto como um vetor de  $\mathbb{CP}^2$  da seguinte forma:

$$A^{-1}(p_\infty) = \begin{bmatrix} \frac{\bar{j}}{g} \\ \frac{\bar{h}}{g} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que  $\frac{j}{g} = j(-\bar{\omega})^k$ ,  $\frac{h}{g} = h(-\bar{\omega})^k \in \mathbb{Z}[\omega]$ , isto é,  $A^{-1}(p_\infty)$  está na  $\Gamma_\infty$ -órbita de  $R(p_\infty)$  e então nossa esfera isométrica é a imagem de  $S_0$  por um elemento de  $\Gamma_\infty$  (já que ela tem raio  $\sqrt{2}$  e seu centro é imagem de  $(0, 0, 0)$  por um elemento de  $\Gamma_\infty$ , por exemplo,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{j}{g} \\ 0 & 1 & \frac{h}{g} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ composta com alguma rotação).}$$

No caso em que  $(z, t, u)$  está no interior de  $D$ , existe  $u_1 \leq u$  tal que  $(z, t, u_1)$  pertence ao interior de  $T_0$ . Mas sabemos, da Proposição 3.11 que  $T_0$  está fora de todas as imagens de  $S_0$  por  $\Gamma_\infty$  distintas de  $S_0$ . Logo,  $u = u_1$  não pode ocorrer. Assim,  $u > u_1$  e vemos que  $(z, t, u)$  está fora de todas as esferas isométricas de raio  $\sqrt{2}$ .

Finalmente, suponha que  $A \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$  possua esfera isométrica de raio  $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$  (ou

seja,  $|g| = \sqrt{3}$  e centro  $(z_0, t_0, 0)$ . Os pontos encontrados satisfazendo  $|g| = \sqrt{3}$  são  $(-2, -1), (-1, 1), (2, 1)$  e  $(-1, 1)$  e nos fornecem, respectivamente,  $g = i\sqrt{3}(\omega) = i\sqrt{3}(-\omega)^4$ ,  $g = -i\sqrt{3}(\omega)^2 = i\sqrt{3}(-\omega)^5$ ,  $g = i\sqrt{3}(-\omega)$  e  $g = i\sqrt{3}(-\omega)^2$ . Concluimos então que  $g = i\sqrt{3}(-\omega)^k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ .

Como  $A \in PU(2, 1)$  temos  $0 = j\bar{g} + |h|^2 + g\bar{j}$ . Daí, vemos que  $|h|^2$  é divisível por 3.

Com efeito, escrevendo  $j = c + d\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ , obtemos

$$|h|^2 = i\sqrt{3} [j(-\bar{\omega})^k - \bar{j}(-\omega)^k] = i\sqrt{3} [j(-\bar{\omega})^k - \overline{j(-\bar{\omega})^k}] = -\sqrt{3} [2\text{Im}(j(-\bar{\omega})^k)].$$

Vale sempre, para  $k \in \mathbb{Z}$ , que  $\text{Im}(j(-\bar{\omega})^k) = \left( (c - \frac{d}{2}) \text{Im}(-\bar{\omega})^k + \frac{\sqrt{3}d}{2} \text{Re}(-\bar{\omega})^k \right)$  é um múltiplo (inteiro) de  $\sqrt{3}$ . Daí, segue que 3 divide  $|h|^2$ .

Então  $h$  pertence a  $i\sqrt{3}\mathbb{Z}[\omega]$ . Para ver isto, como sabemos que  $h \in \mathbb{Z}[\omega]$  e que  $3||h|^2 = (a^2 - ab + b^2)$ , basta escrevermos  $h = (a - \frac{b}{2}) + i\frac{b\sqrt{3}}{2}$  e colocarmos o termo  $i\sqrt{3}$  em evidência. Assim, as condições para que  $h \in i\sqrt{3}\mathbb{Z}[\omega]$  são equivalentes a exigir que  $3|(a + b)$  e  $3|(2a - b)$ , o que segue das hipóteses.

Em outras palavras,  $\frac{h}{g} = \frac{i\sqrt{3}(m+n\omega)}{i\sqrt{3}(-\omega)^k} = (m + n\omega)(-\bar{\omega})^k \in \mathbb{Z}[\omega]$ . Como  $g$  e  $h$  estão ambos em  $i\sqrt{3}\mathbb{Z}[\omega]$  e  $|\det(A)| = 1$ , vemos que  $j \pm 1 \in i\sqrt{3}\mathbb{Z}[\omega]$  e então  $\frac{j}{g} \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Z}[\omega]$ . Concluimos que  $\frac{|z_0|^2 - it_0 \pm \frac{2i}{\sqrt{3}}}{2} \in \mathbb{Z}[\omega]$ . Em outras palavras,  $(z_0, t_0, \pm \frac{2}{\sqrt{3}})$  está na  $\Gamma_{\infty-}$  órbita de  $R(p_{\infty}) = (0, 0, 0)$ .

Note que

$$(|z - z_0|^2 + u)^2 + (t - t_0 + 2\text{Im}(z\bar{z}_0))^2 = \frac{4}{3}.$$

Se  $u > 1$ , então:

$$(t - t_0 + 2\text{Im}(z\bar{z}_0))^2 < \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & (|z - z_0|^2 + u)^2 + (t - t_0 + 2\text{Im}(z\bar{z}_0 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}))^2 = \\ & = (|z - z_0|^2 + u)^2 + (t - t_0 + 2\text{Im}(z\bar{z}_0 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}))^2 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}\text{Im}(z\bar{z}_0) + \frac{4}{3} < \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,  $(z, t, u)$  está no interior da esfera isométrica de raio  $\sqrt{2}$  e centro  $(z_0, t_0, \pm \frac{2}{\sqrt{3}})$ , isto é, está no interior da imagem de  $S_0$  por algum elemento de  $\Gamma_{\infty}$ . Usando a Proposição 3.11, vemos que  $(z, t, u) \notin T_0$ .  $\square$

**Teorema 3.14.** O simplexo  $D$  é um domínio fundamental para  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$ .

*Demonstração.* A prova segue a demonstração para o domínio fundamental para  $PSL(2, \mathbb{Z})$  (ver [6], págs 57-60).

Primeiramente, mostraremos que toda órbita tem um ponto no interior de  $D$ . Seja  $(z, t, u) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Aplicando os elementos de  $\Gamma_{\infty}$ , podemos assumir que  $(z, t, u)$  está no domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty}$  obtido ao se estender arcos geodésicos verticais em  $D$  para  $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{p_{\infty}\}$ . Se  $(z, t, u)$  estiver no exterior de  $S_0$  ou em  $S_0$ , o ponto já está no interior de  $D$ .

Caso contrário, isto é, caso  $(z, t, u)$  esteja no interior de  $S_0$ , podemos aplicar  $R$  e obter um ponto da órbita de  $(z, t, u)$  que esteja no exterior de  $S_0$ . Daí, este ponto já está no interior de  $D$ .

Mostraremos agora que se dois pontos em  $D$  diferem por algum elemento  $A \in \Gamma$ , então eles devem estar em  $\partial D$  e são identificados por uma função de emparelhamento. Por construção, todos os pontos de  $\partial D$  são imagens de algum outro ponto de  $\partial D$  por uma função de emparelhamento.

Suponha que  $(z, t, u)$  esteja no interior de  $D$ . Como  $D$  está contido em um domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty}$ , todas as imagens de  $(z, t, u)$  por elementos de  $\Gamma_{\infty}$  estão fora de  $D$ . Além disso, pela Proposição 3.13,  $(z, t, u)$  está fora de todas as esferas isométricas de elementos de  $\Gamma \setminus \Gamma_{\infty}$ .

Considere agora  $A(z, t, u) = (z', t', u')$ , onde  $A \in \Gamma \setminus \Gamma_{\infty}$ . Sabemos que  $A$  mapeia o interior de sua esfera isométrica no interior da esfera isométrica de  $A^{-1}$ . Portanto, vemos que  $(z', t', u')$  não pode pertencer ao interior de  $D$ . Isto nos dá o resultado.

□



## 4 Poliedros de Poincaré e outra representação para $\Gamma$

Nesta seção, revisamos o Teorema de Poliedros de Poincaré. Uma descrição mais completa da motivação e do Teorema em si pode ser vista no capítulo 9 de [1]. Como já sabemos que  $\Gamma = PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  é discreto e que  $D$  é um domínio fundamental para este grupo, nós não precisamos de toda a força do Teorema de Poincaré. Na verdade, o usamos somente para estabelecer uma conexão entre a geometria da ação do grupo  $\Gamma$  e a álgebra de uma representação para esse grupo. Especificamente, os geradores de  $\Gamma$  são funções de emparelhamento de seu domínio fundamental e as relações entre eles são geradas por relações de reflexão e por relações de ciclo. No entanto, um uso direto do Teorema de Poincaré fornece outra prova de que  $\Gamma$  é discreto e tem  $D$  como domínio fundamental. Seguimos a formulação geral do Teorema de Poliedros de Poincaré dada em [7] e nos referimos a este artigo para detalhes da prova.

### 4.1 O Teorema dos Poliedros de Poincaré

Um *poliedro* é um objeto especificado por vértices, arestas e faces de maior dimensão. Assumimos que poliedros são um complexo de células homeomorfo a um polítopo, possivelmente com um número finito de faces. Em particular, existe somente uma célula com a maior dimensão  $n$  e o interior de cada célula de codimensão 2 está contido em duas células de codimensão 1. Sua realização como um complexo celular em uma variedade  $X$  é também dita um poliedro. Sejam  $D$  o poliedro (fechado) e  $E_k(D)$  o conjunto de faces de codimensão  $k$  de  $D$ . Dizemos que um poliedro é *suave* se suas faces são suaves.

Um *Poliedro de Poincaré* é um poliedro suave em uma variedade  $X$  com faces  $T_i$ , de codimensão 1, tais que vale o seguinte:

- As faces de codimensão 1 são emparelhadas por um conjunto  $\Delta$  de homeomorfismos  $A_{ij} : T_i \rightarrow T_j$  chamados funções de emparelhamento, com respeito à estrutura de células.

Assumimos que se  $A_{ij} \in \Delta$ , então  $A_{ij}^{-1} = A_{ij} \in \Delta$ .

- Para todo  $A_{ij} \in \Delta$ , com  $A_{ij}(T_i) = T_j$ , tem-se  $A_{ij}(D) \cup D = T_i$ .

*Observação:* Se  $T_i = T_j$ , isto é, alguma função de emparelhamento mapeia a face  $T_i$  sobre ela mesma, então impomos a condição de que  $A_{ii} : T_i \rightarrow T_i$  seja de ordem dois, e dizemos que  $A_{ii}$  é uma reflexão. Neste caso, a relação  $A_{ii}^2 = Id$  é dita uma *relação de reflexão*.

Considere  $T_1 \in E_1(D)$  uma face de codimensão 1 e seja  $F_1 \in E_2(D)$  uma face de codimensão 2 contida em  $T_1$ . Seja  $T'_1$  uma outra face de codimensão 1 contendo  $F_1$ . Sejam também  $T_2$  a face de codimensão 1 emparelhada a  $T'_1$  por  $A_1 \in \Delta$  e  $F_2 = A_1(F_1)$ . Novamente, existe uma única face de codimensão 1 contendo  $F_2$ , que chamaremos  $T'_2$ . Definimos recursivamente  $A_i$  e  $F_i$  de modo que  $A_{i-1} \circ \dots \circ A_1(F_1) = F_i$ .

A condição de que para cada par  $(F_1, T_1)$  exista  $r \geq 1$  tal que, na construção do parágrafo anterior,  $A_r \circ \dots \circ A_1(T_1) = T_1$  e  $A_r \circ \dots \circ A_1$  restrita a  $F_1$  seja a identidade é chamada uma *condição cíclica*. Além disso, escrevendo  $A_r \circ \dots \circ A_1 = A$ , existe um inteiro positivo  $m$  tal que  $A^m = 1$  e  $A_1^{-1}(D) \cup (A_2 \circ A_1)^{-1}(D) \cup (A_3 \circ A_2 \circ A_1)^{-1}(D) \cup \dots \cup A^{-1}(D) \cup (A_1 \circ A)^{-1}(D) \cup (A_2 \circ A_1 \circ A)^{-1}(D) \dots (A_{r-1} \circ \dots \circ A_1 \circ A^{m-1})^{-1}(D) \cup (A^m)^{-1}(D)$  é uma cópia de uma vizinhança fechada do interior de  $F_1$  por poliedros com interiores disjuntos.

A relação  $(A_r \circ \dots \circ A_1)^m = A^m$  é chamada uma *relação de ciclos*.

Chamamos de uma *Família Adjacente* em uma variedade topológica  $X$  uma família de poliedros  $\mathcal{D}$  juntamente com o conjunto de adjacências  $\mathcal{N} \subset \mathcal{D} \times \mathcal{D}$  tais que:

- Se  $(D, D') \in \mathcal{N}$ , então  $D \neq D'$  e  $(D', D) \in \mathcal{N}$ ;
- Se  $(D, D') \in \mathcal{N}$ , então  $D \cap D' \in E_1(D) \cap E_1(D')$ ;
- Se  $(D, D'), (D, D'') \in \mathcal{N}$  e  $D \cap D' = D \cap D''$ , então  $D' = D''$ ;
- Para todo  $T \in E_1(D)$ , existe  $D'$  com  $D \cap D' = e$ .

O  $\mathcal{D}$ -espaço ligado é dado pelo quociente topológico do subespaço  $\tilde{Y} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \times \{D\}$  de  $X \times \mathcal{D}$ , pela relação de equivalência  $(x, D) \equiv (x', D') \iff x = x', x \in E_1(D) \cap E_1(D')$ .

Seja  $Y$  o  $\mathcal{D}$ -espaço ligado. A projeção  $\pi : Y \rightarrow X$  é contínua. Em geral,  $Y$  pode não ser uma variedade e, mesmo se o for,  $\pi$  pode ser ramificada. A definição a seguir nos permite usar argumentos de indução intersectando famílias adjacentes com esferas.

Uma *família adjacente suave* é uma família tal que para cada face  $e \in E_k(\mathcal{D})$  e cada  $x \in e$ , existe uma vizinhança tubular da forma  $B_k \times B_{n-k}$  onde  $B_{n-k} \subset e$  é uma vizinhança de  $x$  em  $e$ . Para  $y \in B_{n-k}$ , tem-se que  $B_k \times y$  é transversal a  $e$  de modo que para  $S_k \times y$ , onde  $S_k = \partial B_k$ , a família  $\mathcal{D}$  induza (por interseções) uma família adjacente  $\mathcal{D}_e$ , que é combinatoriamente independente de  $y \in B_{n-k}$ .

Chamamos de *condição de uniformidade* o seguinte resultado, usado na demonstração do Teorema de Poincaré:

**Lema 4.1.** Se  $\pi : Y \rightarrow X$ , onde  $X$  é completo e convexo, é uma isometria local e existe  $r > 0$  tal que  $\forall y \in Y$  exista uma vizinhança de  $y$  homeomorfa sobre  $\pi$  a uma bola de raio  $r$  em  $X$ , então  $\pi$  é um recobrimento.

Enunciamos agora o Teorema dos Poliedros de Poincaré. Um esquema da prova pode ser encontrado em [2] e a prova completa em [7].

**Teorema 4.2.** Seja  $D$  um Poliedro de Poincaré com transformações de emparelhamento  $\Delta \subset Isom(X)$  em uma variedade Riemanniana simplesmente conexa  $X$  satisfazendo à condição cíclica. Seja  $\Gamma$  o grupo gerado por  $\Delta$ . Então  $\mathcal{D} = \Gamma(D)$  é uma família adjacente suave, com adjacência definida pelas funções de emparelhamento. Se existe um número positivo  $r$  tal que todo ponto no espaço ligado  $Y$  possua uma vizinhança homeomorfa por  $\pi$  a uma bola de raio  $r$ , então  $\Gamma$  é um subgrupo discreto de  $Isom(X)$  e  $D$  é um domínio fundamental para esse grupo agindo em  $X$ .

Uma representação para  $\Gamma$  é dada por:

$$\Gamma = \{\Delta; \text{relações de reflexão, relações de ciclo}\}$$

*Observações:*

- Observamos primeiramente que os emparelhamentos de um poliedro de Poincaré gera uma família adjacente suave. A adjacência é dada por  $\mathcal{N} = \{(\gamma D, \gamma \delta D); \gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta\}$ . Isto segue da suavidade do poliedro e do fato de que os ciclos são finitos. O ponto final é então provar que  $\pi : Y \rightarrow X$  é um homeomorfismo. Aqui é que as condições cíclica e de uniformidade são usadas;
- Se  $D$  é compacto, a condição de uniformidade para o espaço ligado é automática quando a condição cíclica é satisfeita;

- O Poliedro de Poincaré não-compacto típico pelo qual estamos interessados é o espaço  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  e  $D$  possui uma cúspide. A condição de uniformidade deve ser verificada nesse caso. Devemos provar que o espaço ligado em torno dessas cúspides contém a imagem inversa por  $\pi$  de uma horobola. Isto equivale a cobrir uma horobola inteira por transformações do poliedro  $D$  escolhidas cuidadosamente.

## 4.2 Uma representação para $\Gamma$

Nesta seção, usamos o Teorema de Poincaré em  $D$  para obter uma representação de  $\Gamma$ . Começamos mostrando que os geradores de  $\Gamma$  são emparelhamentos de  $D$ .

**Proposição 4.3.** As seguintes funções são emparelhamentos de  $D$ :

$$R : T_0 \rightarrow T_0$$

$$PQ^{-1} : T_1 \rightarrow T_2$$

$$P : T_3 \rightarrow T_4$$

*Demonstração.* Já vimos que  $R$  é uma função de emparelhamento. Como  $PQ^{-1}$  e  $P$  são isometrias complexas fixando  $p_{\infty}$ , basta mostrar que  $PQ^{-1}$  envia  $F_1$  em  $F_2$  e que  $P$  envia  $F_3$  em  $F_4$ . Isto segue da Proposição 3.5.

□

**Teorema 4.4.** O simplexo  $D$  é um domínio fundamental para o grupo gerado por  $R, PQ^{-1}$  e  $P$ . Além disso, uma representação para este grupo é:

$$\langle P, Q, R; R^2 = (QP^{-1})^6 = PQ^{-1}RQP^{-1}R = P^3Q^{-2} = (RP)^3 = Id \rangle.$$

Como já mostramos que  $PU(2, 1, \mathbb{Z}[\omega])$  é o grupo gerado por  $P, Q$  e  $R$ , o Teorema 4.4 nos fornece uma prova alternativa de que  $D$  é domínio fundamental para este grupo e também uma outra representação para o Grupo Modular de Eisenstein-Picard.

*Demonstração.* Pelo argumento do Teorema 2.5, a interseção do interior de  $S_0$  com um domínio fundamental para  $\Gamma_{\infty} = \langle P, Q \rangle$  contém um domínio fundamental para  $\Gamma = \langle P, Q, R \rangle$ . Seja  $\hat{D}$  o subconjunto de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$  contendo as geodésicas (completas) com um dos pontos finais em  $p_{\infty}$  e passando por  $D$  (Então  $\hat{D}$  é obtido de  $D$  extendendo-se os segmentos geodésicos usados para definir  $D$  até a fronteira).

Então fica claro da seção 2.1 que  $\hat{D}$  é um domínio fundamental para  $\Gamma_\infty$ . Intersectando  $\hat{D}$  com o exterior de  $S_0$ , obtemos  $D$ .

Para cada face bidimensional  $F$  de  $D$ , encontramos o ciclo de faces dado pelas funções de emparelhamento.

As faces com um vértice em  $p_\infty$  são enviadas em outras faces com vértice em  $p_\infty$  por funções de  $\Gamma_\infty$ . Como o simplexo  $D$  e suas faces contendo  $p_\infty$  são cones sobre  $T_0$  e suas arestas, os ciclos das arestas são os mesmos que os de  $T_0$  obtidos anteriormente. Por construção, toda horobola não-intersectando  $S_0$  é coberta por imagens de  $D$  sobre  $\Gamma_\infty$ . Os ciclos das faces contendo  $p_\infty$  são os mesmos que os ciclos dos lados de  $T_0$ , isto é:

$$(PQ^{-1})^6 = Id \text{ e } P^3 = Q^2.$$

Analogamente, os lados (unidimensionais) de  $D$  com um vértice em  $p_\infty$  possuem cada um uma vizinhança coberta por imagens de  $D$ .

Considere agora a face  $F_1$  com vértices dados pela tripla ordenada  $(z_2, z_0, z_3)$ . O ciclo dessa face é dado por:

$$(z_2, z_0, z_3) \xrightarrow{PQ^{-1}} (z_1, z_0, z_3) \xrightarrow{R} (z_1, z_3, z_0) \xrightarrow{(PQ^{-1})^{-1}} (z_2, z_3, z_0) \xrightarrow{R} (z_2, z_0, z_3).$$

Assim,  $R(PQ^{-1})^{-1}RPQ^{-1}$  é a identidade em  $F_1$ . Na verdade, com um cálculo simples pode-se verificar que  $R(PQ^{-1})^{-1}RPQ^{-1}$  é a identidade em  $\Gamma$ .

Devemos mostrar que os conjuntos  $D$ ,  $(PQ^{-1})^{-1}(D)$ ,  $(PQ^{-1})^{-1}R(D) = R(PQ^{-1})^{-1}(D)$  e  $(PQ^{-1})^{-1}RPQ^{-1}(D) = R(D)$  cobrem uma vizinhança de  $F_1$ . Isto nos fornece também uma vizinhança de  $P(F_1) = F_2$ .

A função  $PQ^{-1}$  é uma rotação em torno da espinha de  $S_0$  e, portanto, mantém  $S_0$  invariante.

Daí,  $(PQ^{-1})^{-1}(T_0)$  está também contido em  $S_0$ . A imagem de  $D$  sobre  $(PQ^{-1})^{-1}$  é o cone geodésico sobre  $(PQ^{-1})^{-1}(T_0)$ . Logo,  $D \cup (PQ^{-1})^{-1}(D)$  cobre a parte da vizinhança de  $T_\alpha$  exterior a  $S_0$ . Aplicando  $R$ , vemos que  $D \cup (PQ^{-1})^{-1}(D) \cup R(D) \cup R(PQ^{-1})^{-1}(D)$  cobre uma vizinhança de  $F_1$ , como afirmamos.

Agora considere a face  $F_3$  com vértices na tripla ordenada  $(z_2, z_0, z_1)$ . O ciclo dessa face é:

$$(z_2, z_0, z_1) \xrightarrow{P} (z_3, z_1, z_2) \xrightarrow{R} (z_0, z_1, z_2).$$

Logo,  $RP$  mapeia  $F_3$  nela mesma, com uma rotação de ordem 3. Portanto,  $(RP)^3$  é a identidade em  $F_3$ . Novamente com um cálculo simples, se vê que  $(RP)^3 = Id$  em  $\Gamma$ . Devemos mostrar que  $D, P^{-1}(D), P^{-1}R(D), P^{-1}RP^{-1}(D), P^{-1}RP^{-1}R(D) = RP(D)$  e  $P^{-1}RP^{-1}RP^{-1}(D) = R(D)$  cobrem uma vizinhança de  $F_3$ . Isto nos fornece também uma vizinhança de  $P(F_3) = F_4$ .

Para ver isto, observe primeiramente que a imagem de  $S_0$  por  $P^{-1}$  é  $S_{-1}$ . Consequentemente,  $D \cup P^{-1}(D)$  cobre uma vizinhança de  $F_3$  no interior de  $S_0$  e de  $S_{-1}$ . Mas  $S_0$  e  $S_{-1}$  são esferas isométricas de  $P^{-1}R$  e de  $(P^{-1}R)^{-1} = RP$ , respectivamente. Portanto,  $D \cup P^{-1}(D)$  e suas imagens por  $P^{-1}R$  e  $RP$  cobrem uma vizinhança de  $F_3$ .

Pelo Teorema de Poincaré, concluímos que o simplexo  $D$  é um domínio fundamental para  $\langle R, PQ^{-1}, P \rangle$ . A representação para  $\Gamma$  é obtida por relações de reflexão e de ciclo.  $\square$

### 4.3 Relação com grupos de Mostow.

Em [7], Mostow construiu uma família de grupos. Alguns deles são não-aritméticos e, na verdade, foram os primeiros exemplos de tais grupos. Em sua notação, todos os exemplos dados por Mostow são gerados por três reflexões complexas,  $R_1, R_2, R_3$ , de ordens 3, 4 ou 5. Além disso, esses grupos têm uma simetria cúbica extra, no sentido de que existe uma função  $J$ , de ordem 3 tal que  $R_{k+1} = JR_kJ^{-1}$ , onde  $k$  é dado módulo 3.

Essa função  $J$  pode não estar no grupo e, neste caso, o grupo gerado pelos  $R_k$  é um subgrupo de índice 3 do grupo gerado por  $J$  e  $R_1$ . Mostow usou domínios de Dirichlet para mostrar que aqueles grupos eram discretos e para obter representações para eles. Mas as contas desses domínios são bem complicadas.

Mostraremos agora que o Grupo Modular de Eisenstein - Picard admite uma representação de um tipo similar. Na verdade, mostraremos que ele é gerado por reflexões complexas de ordem 6 possuindo uma simetria cúbica. Começamos mostrando que  $\Gamma$  admite uma representação com 2 geradores. Nossa notação se espelha na de Mostow.

**Proposição 4.5.** As funções  $J = RP$  e  $R_1 = QP^{-1}$  geram  $\Gamma$ . Além disso, uma representação para  $\Gamma$  sobre esses geradores é dada por

$$\langle J, R_1; J^3 = R_1^6 = (JR_1^{-1}J)^4 = R_1(JR_1^{-1}J)^2R_1^{-1}(JR_1^{-1}J)^{-2} = Id \rangle.$$

*Demonstração.* Começamos por mostrar que as relações envolvendo  $J$  e  $R_1$  seguem das

relações envolvendo  $P, Q$  e  $R$ . Primeiro,

$$J^3 = (RP)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega & \omega \\ 1 & 1 & \omega \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

que tem a mesma ação que a Identidade no modelo projetivo de  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Além disso,

$$(QP^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que nos dá  $(QP^{-1})^6 = Id$ .

Temos também:

$$\begin{aligned} (JR_1^{-1}J)^2 &= RPPQ^{-1}(RP)^2PQ^{-1}RP = RPPQ^{-1}(RP)^{-1}PQ^{-1}RP = \\ &= RPPQ^{-1}P^{-1}\underline{R^{-1}PQ^{-1}RP} = RPPQ^{-1}P^{-1}\underline{PQ^{-1}R^{-1}RP} = RP^2Q^{-2}P = R, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue de  $(RP)^3 = Id$ , a igualdade dos termos sublinhados segue de um cálculo simples e a última igualdade segue de  $P^3 = Q^2$ .

Daí,  $(JR_1^{-1}J)^2 = R$ . Logo,  $(JR_1^{-1}J)^4 = R^2 = Id$  e

$$R_1(JR_1^{-1}J)^2R_1^{-1}(JR_1^{-1}J)^{-2} = (QP^{-1})R(QP^{-1})^{-1}R^{-1} = Id.$$

Deste modo, demonstramos a representação dada para  $\langle P, Q, R \rangle$ .

Usando  $(JR_1^{-1}J)^2 = R$ , podemos obter  $P$  e  $Q$  em função de  $J$  e  $R_1$ . De fato,

$$P = R^{-1}J = (JR_1^{-1}J)^{-2}J = J^{-1}R_1J^{-2}R_1 = J^{-1}R_1JR_1$$

e

$$Q = R_1P = R_1J^{-1}R_1JR_1.$$

Portanto,  $\Gamma = \langle P, Q, R \rangle = \langle J, R_1 \rangle$ .

Finalmente, mostremos que as relações envolvendo  $P, Q$  e  $R$  são consequências daquelas obtidas para  $J$  e  $R_1$ .

Temos que as relações  $R^2 = (JR_1^{-1}J)^4 = Id$ ,  $(RP)^3 = J^3 = Id$ ,  $(QP^{-1})^6 = R_1^6 = Id$

e  $(QP^{-1})R(QP^{-1})^{-1}R^{-1} = R_1(JR_1^{-1}J)^2R_1^{-1}(JR_1^{-1}J)^{-2}$  seguem imediatamente. Logo,

$$P^3Q^{-2} = (J^{-1}R_1JR_1)^3(R_1^{-1}J^{-1}R_1^{-1}JR_1^{-1})^2 = (JR_1^{-1}J)^{-2}R_1(JR_1^{-1}J)^2R_1^{-1} = Id.$$

Isto completa a prova. □

Como na Proposição 4.5, escrevemos  $R_1 = QP^{-1}$  e  $J = RP$ .

Defina  $R_2 = JR_1J^{-1} = RPQ^{-1}P^{-2}R$  e  $R_3 = J^{-1}R_1J = P^{-1}Q$ . Estas transformações são reflexões complexas de ordem 6 com um fator de reflexão  $-\bar{\omega} = e^{\frac{2\pi i}{6}}$  (ver [7], página 174). Vamos mostrar agora que  $R_1, R_2$  e  $R_3$  geram  $\Gamma$ , além de obter relações envolvendo os  $R_k$ . O formato dessas relações é motivado por Mostow em [7] (Teorema 20.1).

**Proposição 4.6.** As funções  $R_1, R_2$  e  $R_3$  geram  $\Gamma$ . Além disso, uma representação nesses geradores, com índices tomados módulo 3, é:

$$\left\langle R_1, R_2, R_3 \mid \begin{array}{l} R_k^6 = (R_1R_2R_3)^4 = Id, R_kR_{k+1}R_k = R_{k+1}R_kR_{k+1}, \forall k = 1, 2, 3. \\ (R_1R_2R_3)^{-2}R_1R_2 = (R_2R_3R_1)^{-2}R_2R_3 \end{array} \right\rangle$$

*Demonstração.* Primeiramente, observe que  $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle \leq \langle J, R_1 \rangle$ . Temos que mostrar então que  $J \in \langle R_1, R_2, R_3 \rangle$ . Com efeito,

$$J = J(JR_1^{-1}J)^4 = (J^{-1}R_1^{-1}J)(JR_1^{-1}J^{-1})R_1^{-1}(J^{-1}R_1^{-1}J) = (R_1R_2R_3)^{-2}R_1R_2.$$

Mostraremos agora a equivalência entre as representações. Começamos assumindo as relações que envolvem  $R_1, R_2$  e  $R_3$  e mostrando que elas implicam naquelas envolvendo  $R_1$  e  $J$ .

Já temos que  $R_1^6 = Id$ . Além disso, a relação  $(R_1R_2R_3)^{-2}R_1R_2 = (R_2R_3R_1)^{-2}R_2R_3$  pode ser escrita como  $R_3R_1R_2R_3 = R_1R_2R_3R_1$ , o que implica em:

$$\begin{aligned} J^{-1} &= ((R_1R_2R_3)^{-2}R_1R_2)^{-1} = R_1R_2R_3R_1 = R_1R_2R_1R_1^{-1}R_3R_1 = \\ &= R_2R_1R_2R_3R_1R_3^{-1} = R_2R_3R_1R_2, \end{aligned}$$

onde as duas primeiras igualdades são triviais, a penúltima segue das hipóteses  $R_kR_{k+1}R_k = R_{k+1}R_kR_{k+1}$ , para  $k = 1, 2, 3$  e a última segue de  $R_3R_1R_2R_3 = R_1R_2R_3R_1$ .

$$\text{Daí, } J^{-1} = R_2R_3R_1R_2 = R_1R_2R_3R_1 = R_3R_1R_2R_3.$$

De fato, já sabemos que  $J^{-1} = R_2R_3R_1R_2$  e que  $R_1R_2R_3R_1 = R_3R_1R_2R_3$ . Mas

também temos

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_3 R_1 &= R_3 R_1 R_2 R_3 \Rightarrow R_2(R_1 R_2 R_3 R_1) = R_2(R_3 R_1 R_2 R_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow R_1 R_2 R_1 R_3 R_1 = R_2 R_3 R_1 R_2 R_3 \Rightarrow R_1 R_2 R_3 R_1 = R_2 R_3 R_1 R_2. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $R_2 = J R_1 J^{-1}$  e  $R_3 = J^{-1} R_1 J$ .

Temos também que  $J^{-3} = (R_2 R_3 R_1 R_2)(R_1 R_2 R_3 R_1)(R_3 R_1 R_2 R_3) = (R_1 R_2 R_3)^4 = Id$ .  
Assim,  $J^3 = Id$ .

Observe que

$$(J R_1^{-1} J)^{-2} = (J^{-1} R_1 J^{-1})^2 = ((R_3 R_1 R_2 R_3) R_1 (R_2 R_3 R_1 R_2))^2 = (R_3 R_1 R_2)^6 = (R_3 R_1 R_2)^2.$$

Deste modo,

$$(J R_1^{-1} J)^{-4} = (R_3 R_2 R_1)^4 = Id \Rightarrow (J R_1^{-1} J)^4 = Id$$

(segue de  $R_2 R_3 R_1 R_2 = R_1 R_2 R_3 R_1 = R_3 R_1 R_2 R_3$ ) e

$$\begin{aligned} R_1 (J R_1^{-1} J)^{-2} &= R_1 R_3 R_1 R_2 R_3 R_1 R_2 = R_3 R_1 R_3 R_2 R_3 R_1 R_2 = R_3 R_1 R_2 R_3 R_2 R_1 R_2 = \\ &= R_3 R_1 R_2 R_3 R_1 R_2 R_1 = (R_3 R_1 R_2)^2 R_1 = (J R_1^{-1} J)^2 R_1. \end{aligned}$$

Logo, está demonstrado que as relações entre  $R_1, R_2$  e  $R_3$  implicam nas relações entre  $R_1$  e  $J$ . Faremos agora a recíproca, isto é, suponhamos verdadeiras as relações  $J^3 = R_1^6 = (J R_1^{-1} J)^4 = R_1 (J R_1^{-1} J)^2 R_1^{-1} (J R_1^{-1} J)^{-2} = Id$  e mostremos que elas implicam nas relações entre  $R_1, R_2$  e  $R_3$ .

Já sabemos que  $R_1^6 = Id$ . Daí,  $R_2^6 = J R_1^6 J^{-1} = Id$  (analogamente,  $R_3^6 = Id$ ).

Usando que  $J = J^{-2}$  e que  $R_1 (J R_1^{-1} J)^2 R_1^{-1} (J R_1^{-1} J)^{-2} = Id$ , obtemos também:

$$\begin{aligned} R_1 R_2 R_1 &= R_1 (J R_1 J^{-1}) R_1 = J (J^{-1} R_1 J^{-1}) (J^{-1} R_1 J^{-1}) R_1 = J (J R_1^{-1} J)^{-2} R_1 = \\ &= J R_1 (J R_1^{-1} J)^{-2} = (J R_1 J^{-1}) R_1 (J R_1 J^{-1}) = R_2 R_1 R_2. \end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} R_2 R_3 R_2 &= (J R_1 J^{-1}) (J^{-1} R_1 J) (J R_1 J^{-1}) = J^2 (J^{-1} R_1 J^{-1}) (J^{-1} R_1 J^{-1}) R_1 J^{-1} = \\ J^2 R_1 (J R_1 J)^{-2} J^{-1} &= J^{-1} R_1 J^{-1} R_1 J^{-1} J^{-1} R_1 J^{-2} = (J^{-1} R_1 J) (J R_1 J^{-1}) (J^{-1} R_1 J) = R_3 R_2 R_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_3 R_1 R_3 &= (J^{-1} R_1 J) R_1 (J^{-1} R_1 J) = (J^{-1} R_1 J^{-1}) (J^{-1} R_1 J^{-1}) R_1 J \\ &= R_1 (J R_1^{-1} J)^2 J = R_1 R_3 R_1. \end{aligned}$$

Usando que  $(J R_1^{-1} J)^4 = Id$  e  $J = J^{-2}$ , obtemos também

$$(R_3 R_2 R_1)^2 = (J^{-1} R_1 J R_1 J R_1 J^{-1})^2 = (J R_1^{-1} J)^{-6} = (J R_1^{-1} J)^{-2} \Rightarrow (R_3 R_2 R_1)^4 = Id$$

e

$$\begin{aligned} (R_1 R_2 R_3)^{-2} R_1 R_2 &= R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} R_1 R_2 = (R_2^{-1} R_1^{-1} R_1 R_2) R_3^{-1} R_2^{-1} R_1^{-1} R_3^{-1} \\ &= R_1 R_2 (R_1 R_2 R_3)^{-2} = R_1 J R_1 J^{-1} (J R_1 J^{-1} R_1^{-1} J R_1^{-1} J^{-1} J R_1^{-1} J^{-1} R_1^{-1} J R_1^{-1} J^{-1}) \\ &= R_1 J R_1 J^{-1} (J R_1^{-1} J)^2 = J. \end{aligned}$$

Analogamente,  $(R_3 R_2 R_1)^{-2} R_3 R_1 = J$ , donde  $(R_3 R_2 R_1)^{-2} R_3 R_1 = (R_1 R_2 R_3)^{-2} R_1 R_2$ .

Note que este resultado é equivalente a  $R_3 R_1 R_2 R_3 = R_1 R_2 R_3 R_1$ .

Mostra-se também que  $R_3 R_1 R_2 R_3 = R_1 R_2 R_3 R_1 = R_2 R_3 R_1 R_2$ . Daí concluímos que  $(R_3 R_1 R_2)^4 = (R_1 R_2 R_3)^4 = Id$  e está provada a equivalência entre as representações.

□

## Referências

- [1] BEARDON, Alan. F. *The Geometry of Discrete Groups*, 1a edição. New York: Springer - Verlag, 1983.
- [2] FALBEL, E.; PARKER, J. R. The geometry of the Eisenstein-Picard modular group, *Duke Math.*, **vol. 131**, no. 2, 2006, 249-289.
- [3] FALBEL, E.; FRANCISCS, G.; PARKER, J. R. The geometry of the Gauss-Picard modular group, *Math. Ann.*, **vol. 349**, 2011, 459–508.
- [4] GOLDMAN, W.M. *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Math. Monogr. New York: Oxford Univ. Press, 1999.
- [5] HOLZAPFEL, R. P. Geometry and Arithmetic around Euler Partial Differential Equations, *Math. Appl.*, **vol. 11**, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [6] LEHNER, J. *A short course in Automorphic Functions*, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- [7] MOSTOW, G. D. On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space, *Pacific J. Math.*, **vol. 86**, 1980, 171-276.
- [8] PARKER, J. R. *Notes on Complex Hyperbolic Geometry*, Department of Mathematical Sciences, University of Durham - Durham DH1 3LE, England, 2010.
- [9] PARKER, J. R. Cone metrics on the sphere and Livné's lattices, *Acta Math.*, **vol. 196**, no. 1, pp. 1-64, 2006.
- [10] PICARD, E. Sur des fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires, *Acta Math.*, **vol. 2**, 1883, 114-135.
- [11] PICARD, E. Sur des formes quadratiques ternaires indéfinies indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchisiennes correspondantes, *Acta Math.* **vol. 5**, 1884, 121-182.
- [12] SWAN, R. G. Generators and relations for certain special linear groups, *Adv. Math.*, **vol. 6**, 1971, 1-77.