

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Yulia Gorodetskaya

**Estudo de noção de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica com
aplicações na Relatividade Geral**

Juiz de Fora

2015

Yulia Gorodetskaya

Estudo de noção de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica com aplicações na Relatividade Geral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em matemática aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alexei Deriglazov

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Gorodetskaya, Yulia.

Estudo de noção de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica
com aplicações na Relatividade Geral / Yulia Gorodetskaya. – 2015.
50 f. : il.

Orientador: Alexei Deriglazov

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Geometria Diferencial de Superfície. 2. Fibrados. 3. Relatividade
Geral. I. Deriglazov, Alexei, orient. II. Título.

Yulia Gorodetskaya

Estudo de noção de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica com aplicações na Relatividade Geral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em matemática aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 28 de maio de 2015:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexei Deriglazov - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto,
Pesquisador Titular do Centro Brasileiro de Pesquisas
Físicas, Brasil

Prof. Dr. Dmitri Gitman,
Professor Titular da Universidade de São Paulo
(suplente)

Prof. Dr. Regis Castijos Alves Soares Junior,
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Laércio José dos Santos,
Universidade Federal de Juiz de Fora
(suplente)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a tudo e a todos que contribuíram para a conclusão desta dissertação.

Especial ao meu orientador, professor Alexei Deriglazov, por compartilhar sua pesquisa comigo, pelo apoio e paciência que foram fundamentais na realização do presente trabalho.

Aos professores José Abdalla Helayël-Neto, Regis Castijos Alves Soares Junior, Laércio José dos Santos e Dmitri Gitman por aceitarem o convite de fazer parte da comissão examinadora desta dissertação, e pelas correções e sugestões dadas, que ajudaram a melhorar o trabalho.

Ao coordenadora do Programa de Mestrado em Matemática Flaviana A. Ribeiro e demais professores que tive o privilégio de conhecer, por todo conhecimento oferecido.

Aos colegas do mestrado pela ajuda nos dias de estudo e por todos os momentos agradáveis compartilhados, que facilitaram o desenvolvimento da pesquisa.

Ao meu marido, Giovanni, por me ajudar a revisar o texto e pelo grande apoio e compreensão.

À CAPES pelo apoio financeiro oferecido.

RESUMO

Na geometria diferencial clássica tem-se a definição de transporte paralelo de um vetor v ao longo da curva sobre uma superfície. Esta definição pode ser descrita em termos geométricos. Se reescrita em coordenadas locais, levará à equação de transporte paralelo em termos de derivada covariante D : $Dv = 0$. Na Relatividade Geral, formulada nos termos das variáveis tridimensionais físicas, surge a equação de transporte paralelo com um termo adicional: $Dv + \frac{1}{2}v\partial_t\gamma\gamma^{-1} = 0$. Este termo é de extrema importância pois ele garante que a partícula, quando se move no campo gravitacional, não conseguirá ultrapassar a velocidade da luz. A equação com termo extra foi obtida recentemente a partir de considerações físicas. Então surge um problema interessante: entender e descrever a natureza geométrica do segundo termo nesta equação. Ou seja, nosso objetivo no presente trabalho é produzir um análogo desta equação nos quadros da geometria diferencial de superfície em \mathbb{R}^3 . Nós consideraremos uma construção geométrica a qual chamaremos superfície dinâmica no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Como veremos, a superfície dinâmica representa um exemplo de fibrado. Nesta superfície dinâmica daremos a definição geométrica de transporte paralelo e depois mostraremos como esta definição nos levará à equação com o termo extra.

Palavras-chave: Geometria Diferencial de Superfície. Fibrados. Relatividade Geral.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Determinação de evento simultâneo. A reta vertical representa a linha de universo do relógio de laboratório. Os pontos $y_{(1)}^0$ e $y_{(2)}^0$ têm intervalo nulo com x^μ . Então o ponto médio y^0 representa o evento simultâneo com x^μ	12
Figura 2 – Determinação de tempo e distância laboratórios entre os eventos x^μ e $x^\mu + dx^\mu$. Na equação (1.12) encontraremos o evento A (no ponto espacial \mathbf{x}) simultâneo com $x^\mu + dx^\mu$. Portanto, o intervalo temporal x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ coincide com o intervalo temporal entre x^μ e A . O último foi calculado em (1.13). A distância entre x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ coincide com a distância entre x^μ e A . A última foi calculada em (1.14).	12
Figura 3 – Interpretação geométrica de transporte paralelo sobre uma superfície .	18
Figura 4 – Vetores de \mathbb{R}^3 na superfície dinâmica	35
Figura 5 – Interpretação geométrica de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica simples	37
Figura 6 – Projeção do vetor \mathbf{V} no plano T_h	41
Figura 7 – Projeção dos vetores \mathbf{r}'_a no plano T_h	42
Figura 8 – Interpretação geométrica de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica	46

NOTAÇÕES

- Na Introdução são usadas notações padrão adotadas na Relatividade Geral, [1].
- Vetores são destacados em negrito.
- A um índice sobrescrito $()^i$ será designado um *índice livre* se este não for repetido no mesmo termo aditivo onde o índice aparece. *Índice livre* representa todos os valores em sua faixa. Os índices latinos i, j variam de 1 a 3. Os demais índices latinos variam de 1 a 2. Os índices gregos μ, ν tomam os valores 0, 1, 2. Quando um índice repetido é encontrado em uma expressão é implicada a somatória dos termos que variam no âmbito de todos os valores possíveis dos índices. Por exemplo, a expressão $g^{ab}y^i\partial_b x^i = 0$ (ou seja, $\sum_{b=1}^2 \left(\sum_{i=1}^3 g_{ab}y^i\partial_b x^i \right) = 0$) é uma notação abreviada para o seguinte sistema de duas equações

$$\begin{cases} g_{11}y^1\partial_1 x^1 + g_{11}y^2\partial_1 x^2 + g_{11}y^3\partial_1 x^3 + g_{12}y^1\partial_2 x^1 + g_{12}y^2\partial_2 x^2 + g_{12}y^3\partial_2 x^3 = 0 \\ g_{21}y^1\partial_1 x^1 + g_{21}y^2\partial_1 x^2 + g_{21}y^3\partial_1 x^3 + g_{22}y^1\partial_2 x^1 + g_{22}y^2\partial_2 x^2 + g_{22}y^3\partial_2 x^3 = 0 \end{cases} .$$

- Todos os nossos raciocínios neste trabalho são locais, ou seja, considerados nas proximidades de um ponto do \mathbb{R}^3 . No que segue, todas as funções são contínuas e continuamente diferenciáveis um certo número de vezes e, onde é necessário, analíticas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO. MOTIVAÇÃO FÍSICA DO PROBLEMA . .	9
1.0.1	Velocidade e aceleração tridimensionais de uma partícula na Relatividade Geral, [3]	10
2	TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE EM \mathbb{R}^3	17
2.1	DEFINIÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE	17
2.2	CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO NO ESPAÇO EUCLIDIANO \mathbb{R}^3	18
2.3	ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS E SUPERFÍCIES EM \mathbb{R}^3	22
2.3.1	Curva espacial	22
2.3.2	Superfície	22
2.3.2.1	<i>Parametrização de uma superfície</i>	22
2.3.2.2	<i>Curva sobre uma superfície. Plano tangente</i>	23
2.3.2.3	<i>Métrica</i>	24
2.3.2.4	<i>Símbolos de Christoffel</i>	25
2.3.2.5	<i>Campo vetorial ao longo de uma curva</i>	27
2.3.2.6	<i>Derivada covariante</i>	27
2.4	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO	27
3	TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA EM \mathbb{R}^3	31
3.1	SUPERFÍCIE DINÂMICA	31
3.2	CURVA DINÂMICA	32
3.3	VETORES DINÂMICOS	33
3.4	DEFINIÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA SIMPLES	36
3.5	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA SIMPLES	36
3.6	DETERMINAÇÃO DE DIREÇÕES HORIZONTAIS (PLANOS, VETORES E SUPERFÍCIES HORIZONTAIS) PARA UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA	40
3.7	DEFINIÇÃO DE CAMPO VETORIAL PARALELO (TRANSPORTE PARALELO) SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA	45

3.8	EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA	46
4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	48
	REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO. MOTIVAÇÃO FÍSICA DO PROBLEMA

Na Geometria Diferencial clássica (ou seja, na teoria que descreve as propriedades da superfície embutida no espaço euclidiano tridimensional) tem-se a definição de transporte paralelo de um vetor \mathbf{V} ao longo da curva γ sobre uma superfície. Esta definição pode ser descrita em termos geométricos. Se reescrita em coordenadas locais ξ^a ($a = 1, 2$) do plano \mathbb{R}^2 , levará à equação de transporte paralelo

$$Dv^a(t) = 0, \quad (1.1)$$

onde D é a derivada covariante ao longo da curva γ construída usando a métrica $g_{ab}(\xi)$ e $v^a(t)$ são as coordenadas do vetor \mathbf{V} em cada ponto da curva. O campo vetorial $\mathbf{V}(t)$ satisfazendo a equação (1.1) chama-se *paralelo* (covariantemente constante), [2].

Na Relatividade Geral (ou seja, na teoria que descreve as propriedades do campo gravitacional e o movimento das partículas nele) formulada nos termos das variáveis tridimensionais físicas $\mathbf{x}(t)$ (o raio-vetor da posição de uma partícula definido como uma função do tempo t) surge a equação de transporte paralelo:

$$Dv^i(t) + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \gamma^{-1} \right)^i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Comparando com (1.1) tem-se duas óbvias diferenças. Em primeiro lugar, a métrica γ em (1.2) depende de t . Em segundo, na equação (1.2) além da derivada covariante tem-se o termo adicional. Este termo é de extrema importância pois ele garante que a partícula, quando se move no campo gravitacional, não conseguirá ultrapassar a velocidade da luz, [3].

A equação (1.2) foi obtida em trabalho recente [3] a partir de considerações físicas. Então surge um problema interessante: entender e descrever a natureza geométrica do segundo termo nesta equação. Ou seja, nosso objetivo no presente trabalho é produzir um análogo da equação (1.2) nos quadros da geometria diferencial de superfície em \mathbb{R}^3 .

Consideraremos uma construção geométrica (bem preliminar) a qual chamaremos superfície dinâmica no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Como veremos adiante, a superfície dinâmica representa um exemplo de fibrado. Nesta superfície dinâmica daremos a definição geométrica de transporte paralelo e depois mostraremos como esta definição nos levará à equação (1.2).

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: nesta Introdução, seguindo [3] e analisando o movimento da partícula em um campo gravitacional, mostraremos como surge a equação de transporte paralelo (1.2) na Relatividade Geral; no Capítulo 2 nós discutiremos a equação do transporte paralelo (1.1) na superfície em \mathbb{R}^3 seguindo métodos da Geometria Diferencial clássica; no Capítulo 3 definiremos a superfície dinâmica em \mathbb{R}^3 ,

discutiremos algumas propriedades dela, daremos a definição geométrica de transporte paralelo e depois o reescreveremos em coordenadas adaptadas com a estrutura de um fibrado. Como resultado, obteremos o análogo da equação (1.2).

1.0.1 Velocidade e aceleração tridimensionais de uma partícula na Relatividade Geral, [3]

Nesta seção os índices latinos variam de 1 a 3, $(i, j, k, \dots = 1, 2, 3)$. Os índices gregos variam de 0 a 3, $(\alpha, \beta, \rho, \dots = 0, 1, 2, 3)$.

Considere um observador que usa as coordenadas x^μ do pseudo espaço de Riemann

$$\mathbf{M}^{(1,3)} = \{x^\mu, g_{\mu\nu}(x^\rho), g_{00} < 0\} \quad (1.3)$$

para descrever o movimento da partícula em campo gravitacional com métrica $g_{\mu\nu}$.

Seja os eventos x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ que correspondem à saída e chegada de uma partícula massiva. Demonstramos a seguir que velocidade e aceleração tridimensionais podem ser definidas de tal forma que a velocidade da luz representa uma grandeza independente da escolha de coordenadas e, além disso, a partícula, durante sua evolução em um campo gravitacional, não pode ultrapassar a velocidade da luz.

Relações entre dx^μ e intervalo de tempo e distância medidos em laboratório podem ser formalmente obtidas representando o intervalo em forma bloco-diagonal 1 + 3,

$$-ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 \left[\frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} (dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i) \right]^2 + \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j.$$

Isso sugere definir os intervalos infinitesimais do tempo, distância e a velocidade como se segue:

$$dt = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} (dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i) \equiv -\frac{g_{0\mu} dx^\mu}{c\sqrt{-g_{00}}}. \quad (1.4)$$

$$dl^2 = (g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}) dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad v = \frac{dl}{dt}. \quad (1.5)$$

Portanto, o fator de conversão entre intervalos do tempo mundial [4] $\frac{dx^0}{c}$ e o tempo dt medido por relógio de laboratório é

$$\frac{dt}{dx^0} = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \left(1 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{dx^i}{dx^0} \right). \quad (1.6)$$

Introduzimos também o vetor tri-velocidade

$$v^i = \left(\frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \frac{dx^i}{dx^0}, \quad (1.7)$$

ou, simbolicamente, $v^i = \frac{dx^i}{dt}$. Isto é coerente com a definição acima de v : $v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \mathbf{v}^2 = v^i \gamma_{ij} v^j$. No resultado, o intervalo adquire a forma similar à relatividade especial (mas agora nós temos $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \gamma \mathbf{v}$)

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right). \quad (1.8)$$

Esta igualdade vale em todos os sistemas de coordenadas x^μ . Consequentemente, a partícula com $ds^2 = 0$ tem a velocidade $\mathbf{v}^2 = c^2$ e esta afirmação não depende de um observador.

Notemos que os campos vetoriais (1.6), (1.7) formam uma base sem linhas coordenadas (*non-coordinate basis*, [5]).

Estes truques um tanto formais são baseados [4] na noção de eventos simultâneos em relatividade geral e na análise de limite do espaço-plano. Vamos descrever o formalismo relevante seguindo o livro [4].

Quadri-intervalo de Relatividade Especial tem direta interpretação física em dois casos: primeiro, para dois eventos que ocorram no mesmo ponto, o quadri-intervalo é proporcional a intervalo de tempo, $dt = -\frac{ds}{c}$; segundo, para eventos simultâneos, o quadri-intervalo coincide com distância $dl = ds$. Supondo que o mesmo permanece em relatividade geral, nós podemos determinar o intervalo de tempo e distância infinitesimal entre dois eventos com coordenadas x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ como se segue.

A linha de universo $y^\mu = (y^0, \mathbf{y} = \text{const})$ é associada com o relógio de laboratório no ponto espacial \mathbf{y} . Então o intervalo de tempo entre os eventos (y^0, \mathbf{y}) e $(y^0 + dy^0, \mathbf{y})$ medido pelo relógio é

$$dt = -\frac{ds}{c} = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} dy^0. \quad (1.9)$$

Notemos que, neste raciocínio de Landau-Lifshitz, é assumido que uma partícula em repouso no laboratório fica também em repouso nas coordenadas x^μ .

Considere o evento x^μ que é infinitesimalmente próximo à linha de universo ($y^0, \mathbf{y} = \text{const}$). Para encontrar o evento na linha de universo que é simultâneo com x^μ nós olhamos primeiro para os eventos $y_{(1)}^\mu$ e $y_{(2)}^\mu$ que tem intervalo nulo com x^μ , $ds(x^\mu, y_{(a)}^\mu) = 0$ (veja a Figura 1). A equação $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$ com $dx^\mu = x^\mu - y^\mu$ tem duas soluções $dx_\pm^0 = \frac{g_{0i} dx^i}{-g_{00}} \pm \frac{\sqrt{dx^i \gamma_{ij} dx^j}}{\sqrt{-g_{00}}}$, então $y_{(1)}^0 = x^0 - dx_+^0$ e $y_{(2)}^0 = x^0 - dx_-^0$. Segundo, nós calculamos o ponto médio

$$y^0 = \frac{1}{2}(y_{(1)}^0 + y_{(2)}^0) = x^0 + \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}. \quad (1.10)$$

Por definição ¹, o evento no ponto espacial \mathbf{y} com coordenada nula y^0 , (1.10), é simultâneo

¹ No limite do espaço-plano a sequência de eventos $y_{(1)}^\mu, x^\mu, y_{(2)}^\mu$ pode ser associada com emissão, reflexão e absorção de um fóton com a lei de propagação $ds = 0$. Então o ponto médio (1.10) deve ser considerado simultâneo com x^0 .

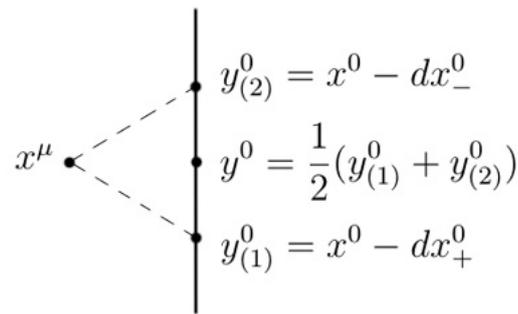


Figura 1 – Determinação de evento simultâneo. A reta vertical representa a linha de universo do relógio de laboratório. Os pontos $y_{(1)}^0$ e $y_{(2)}^0$ têm intervalo nulo com x^μ . Então o ponto médio y^0 representa o evento simultâneo com x^μ .

com o evento (x^0, \mathbf{x}) . Esse procedimento nos permite sincronizar relógios nos pontos espaciais \mathbf{x} e \mathbf{y} . De acordo com (1.10), eventos instantâneos tem diferentes coordenadas nulas e a diferença dx^0 obedece a equação

$$dx^0 + \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} = 0. \quad (1.11)$$

Considere uma partícula que propagou de x^μ para $x^\mu + dx^\mu$. Vamos calcular o intervalo de tempo e a distância entre estes dois eventos, veja a Figura 2. De acordo com (1.10), o

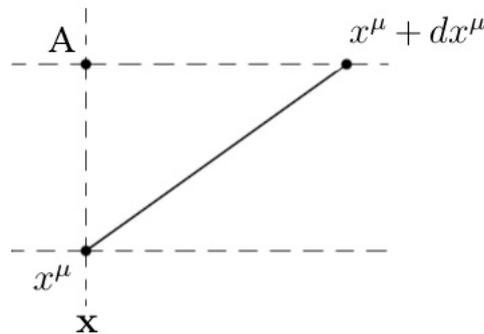


Figura 2 – Determinação de tempo e distância laboratórios entre os eventos x^μ e $x^\mu + dx^\mu$. Na equação (1.12) encontraremos o evento A (no ponto espacial \mathbf{x}) simultâneo com $x^\mu + dx^\mu$. Portanto, o intervalo temporal x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ coincide com o intervalo temporal entre x^μ e A . O último foi calculado em (1.13). A distância entre x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ coincide com a distância entre x^μ e A . A última foi calculada em (1.14).

evento

$$\left(x^0 + dx^0 + \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}}, \mathbf{x} \right), \quad (1.12)$$

no ponto espacial \mathbf{x} é simultâneo com $x^\mu + dx^\mu$. De acordo com (1.9) e (1.10) o intervalo de tempo entre os eventos x^μ e (1.12) é

$$dt = \frac{\sqrt{-g_{00}}}{c} \left(dx^0 + \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}} \right). \quad (1.13)$$

Uma vez que os eventos $x^\mu + dx^\mu$ e (1.12) são simultâneos, esta equação fornece também o intervalo de tempo entre x^μ e $x^\mu + dx^\mu$. Prosseguindo, a diferença de coordenadas entre os eventos $x^\mu + dx^\mu$ e (1.12) é $dz^\mu = (-\frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}}, dx^i)$. Como eles são simultâneos, a distância entre eles é

$$dl^2 = ds^2 = g_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu = (g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}})dx^i dx^j \equiv \gamma_{ij}dx^i dx^j. \quad (1.14)$$

Uma vez que (1.12) ocorreu no mesmo ponto espacial com x^μ , essa equação também fornece a distância entre x^μ e $x^\mu + dx^\mu$. As equações (1.13) e (1.14) coincidem com as definições formais (1.4) e (1.5) as quais foram apresentados acima.

Agora nos voltamos para definição de tri-aceleração. O formalismo (1.4)-(1.8) permanece manifestamente covariante sob o subgrupo de transformações espaciais $x^0 = x'^0$, $x^i = x^i(x'^j)$, $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \equiv a^i_j(x')$. Sob estas transformações g_{00} é uma função escalar e g_{0i} é um vetor enquanto g_{ij} e γ_{ij} são tensores. Como $g^{ij}\gamma_{jk} = \delta^i_k$, a métrica inversa de γ_{ij} é $(\gamma^{-1})^{ij} = g^{ij}$. É conveniente introduzir a derivada covariante ∇_k de um campo vetorial $\xi^i(x^0, x^k)$:

$$\nabla_k \xi^i = \partial_k \xi^i + \tilde{\Gamma}^i_{kj}(\gamma)\xi^j. \quad (1.15)$$

Os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}^i_{jk}(\gamma)$ são construídos com ajuda da métrica tridimensional $\gamma_{ij}(x^0, x^k)$ escrita na equação (1.5), onde x^0 é considerado como um parâmetro

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk}(\gamma) = \frac{1}{2}\gamma^{ia}(\partial_j \gamma_{ak} + \partial_k \gamma_{aj} - \partial_a \gamma_{jk}). \quad (1.16)$$

Como consequência, a métrica γ é covariantemente constante, $\nabla_k \gamma_{ij} = 0$.

A velocidade (1.7) se comporta como um vetor $v^i(x^0) = a^i_j(x'^k(x^0))v'^j(x^0)$. Abaixo, usaremos também a derivada covariante ∇_0 ao longo da curva $x^i(x^0)$:

$$\nabla_0 v^i = \frac{dx^k}{dx^0} \nabla_k v^i = \frac{dv^i}{dx^0} + \tilde{\Gamma}^i_{jk}(\gamma) \frac{dx^j}{dx^0} v^k. \quad (1.17)$$

Associamos com $\mathbf{M}^{(1,3)}$ a família uniparamétrica de espaços tridimensionais $\mathbf{M}^3_{x^0} = \{x^k, \gamma_{ij}, \nabla_k \gamma_{ij} = 0\}$. Note que a velocidade foi definida acima com ajuda da curva $x^i(x^0)$ parametrizada por este parâmetro.

No caso do campo estacionário $g_{\mu\nu}(x^k)$, temos a usual geometria tridimensional de Riemann $\mathbf{M}^3 = \{x^k, \gamma_{ij}(x^k)\}$ e a noção padrão de transporte paralelo. Assim, um análogo do campo vetorial constante de geometria euclidiana é o campo covariantemente constante ao longo de linha $x^i(x^0)$, $\nabla_0 \xi^i = 0$. Para o campo de velocidade, seu desvio da constância covariante é a aceleração

$$a^i = \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \nabla_0 v^i = \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{dv^i}{dx^0} + \tilde{\Gamma}^i_{jk} v^j v^k. \quad (1.18)$$

Para definir a aceleração em caso geral, $\gamma_{ij}(x^0, x^i)$, nós precisamos adotar uma noção de campo vetorial constante (equivalentemente, equação de transporte paralelo) ao longo da trajetória $x^i(x^0)$ que cruza a família $\mathbf{M}_{x^0}^3$. No espaço euclidiano, o produto escalar de dois campos constantes tem o mesmo valor em qualquer ponto. Em particular, tomando o produto escalar ao longo da linha $x^i(x^0)$, temos $\frac{d}{dx^0}(\xi, \eta) = 0$. Para os campos constantes no nosso caso é natural exigir a mesma (necessária) condição: $\frac{d}{dx^0}[\xi^i(x^0)\gamma_{ij}(x^0, x^i(x^0))\eta^i(x^0)] = 0$. Considerando que $\nabla_k \gamma_{ij} = 0$, esta condição pode ser escrita como se segue:

$$(\nabla_0 \xi + \frac{1}{2} \xi \partial_0 \gamma \gamma^{-1}, \eta) + (\xi, \nabla_0 \eta + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \partial_0 \gamma \eta) = 0.$$

Então, tomamos a equação de transporte paralelo como

$$\nabla_0 \xi^i + \frac{1}{2} (\xi \partial_0 \gamma \gamma^{-1})^i = 0. \quad (1.19)$$

Depois definimos a aceleração com respeito ao tempo físico da seguinte forma:

$$a^i = \left(\frac{dt}{dx^0} \right)^{-1} \left[\nabla_0 v^i + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \partial_0 \gamma \gamma^{-1})^i \right]. \quad (1.20)$$

Para o caso especial do campo estacionário, $g_{\mu\nu}(x^i)$, a definição (1.20) se transforma na definição de Landau e Lifshitz, veja a página 251 em [4].

Esta definição de aceleração garante que a partícula no campo gravitacional não pode ultrapassar a velocidade da luz. Para demonstrar isso, calculamos a aceleração longitudinal ($\mathbf{v} \gamma \mathbf{a}$) implícita por equação geodésica.

Vamos apresentar a equação geodésica em uma forma conveniente para nós. Se tomarmos o tempo próprio como parâmetro, a geodésica obedece ao sistema

$$\nabla_s x^\mu \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -1, \quad (1.21)$$

onde

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}). \quad (1.22)$$

Devido a esta definição, o sistema (1.21) obedece a identidade $g_{\mu\nu} x^\mu \nabla_s x^\nu = 0$.

O sistema nesta parametrização não tem sentido no caso de nosso interesse, $ds^2 \rightarrow 0$. Então o reescrevemos em parametrização arbitrária λ

$$\frac{d\lambda}{ds} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) + \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(g) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}}, \quad (1.23)$$

obtendo a equação da linha geodésica invariante de reparametrização (aqui denotamos $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$)

$$\frac{1}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \right) = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(g) \frac{\dot{x}^\alpha}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \frac{\dot{x}^\beta}{\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}}} \equiv f^\mu. \quad (1.24)$$

Vamos ver qual é a equação para aceleração (1.20) implicada por (1.24). Tome $\lambda = x^0$, então $\sqrt{-\dot{x}g\dot{x}} = \frac{dt}{dx^0} \sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}$ e parte espacial de (1.24) é

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{d}{dx^0} \frac{v^i}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} = \frac{G^i}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}}, \quad (1.25)$$

onde

$$G^i(g_{\mu\nu}, \mathbf{v}) = (c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v})f^i = -\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-2} \Gamma^{i00} - \Gamma^i_{jk} v^j v^k - 2\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \Gamma^i_{0k} v^k \quad (1.26)$$

é uma função não singular quando $v \rightarrow c$. Calculando a derivada no lado esquerdo da equação (1.25) nós completamos $\frac{dv^i}{dx^0}$ até a derivada covariante $\nabla_0 v^i$

$$\frac{d}{dx^0} \frac{v^i}{\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}} = \nabla_0 v^i - \tilde{\Gamma}^i_{jk}(\gamma) v^j v^k \frac{dt}{dx^0} + \frac{v^i}{2(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v})} \frac{d}{dx^0} (\mathbf{v}\gamma\mathbf{v}). \quad (1.27)$$

Para a derivada contida no último termo que encontramos usando a constância covariante de γ

$$\frac{d}{dx^0} [\mathbf{v}\gamma(x^0, x^i)\mathbf{v}] = 2\mathbf{v}\gamma\nabla_0\mathbf{v} + \mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla_0\gamma\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\gamma\nabla_0\mathbf{v} + \mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v}. \quad (1.28)$$

Depois (1.25) adquire a forma

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[M^i_j \nabla_0 v^j + \frac{(\mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v})}{2(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v})} v^i \right] = G^i + \tilde{\Gamma}^i_{kl} v^k v^l, \quad (1.29)$$

onde $M^i_j = \delta^i_j + \frac{v^i(\mathbf{v}\gamma)_j}{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}$. Aplicamos a matriz inversa $\tilde{M}^i_j = \delta^i_j - \frac{v^i(\mathbf{v}\gamma)_j}{c^2}$ e usamos a identidade $\tilde{M}^i_j v^j = \frac{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}{c^2} v^i$, então

$$\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[\nabla_0 v^i + \frac{(\mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v})}{2c^2} v^i \right] = \tilde{M}^i_j [G^j + \tilde{\Gamma}^j_{kl} v^k v^l]. \quad (1.30)$$

Nós completamos $\nabla_0 v^i$ até a aceleração (1.20). Então (1.30) se escreve

$$a^i = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[(\mathbf{v}\partial_0\gamma\gamma^{-1})^i - \frac{(\mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v})}{c^2} v^i \right] + \tilde{M}^i_j [G^j + \tilde{\Gamma}^j_{kl}(\gamma) v^k v^l]. \quad (1.31)$$

Contraindo isso com $(\mathbf{v}\gamma)_i$ nós usamos $(\mathbf{v}\gamma)_i \tilde{M}^i_j = \frac{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v}\gamma)_j$ e obtemos a aceleração longitudinal

$$\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \left[(\mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v}) \frac{(\mathbf{v}\gamma\mathbf{v})}{c^2} \right] + \left(1 - \frac{\mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}{c^2}\right) (\mathbf{v}\gamma)_i [G^i + \tilde{\Gamma}^i_{kl}(\gamma) v^k v^l]. \quad (1.32)$$

Isto implica $\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} \rightarrow 0$ quando $\mathbf{v}\gamma\mathbf{v} \rightarrow c^2$.

O último termo em (1.20) produz o importante fator $(\mathbf{v}\partial_0\gamma\mathbf{v})$ na equação (1.32). Como equações de movimento (1.31) e (1.32) não contêm a raiz quadrada $\sqrt{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}$ eles tem sentido até para $v > c$. Sem esse fator, nós teríamos $\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} \neq 0$ quando $\mathbf{v}\gamma\mathbf{v} \rightarrow c^2$,

de forma que a partícula em campo gravitacional possa exceder c e depois continuar a acelerar. O mesmo acontece se nós tentarmos definir aceleração usando a derivada comum em vez da derivada covariante (1.16).

Usando as equações (1.22), (1.5)-(1.7), (1.16) e as identidades

$$\gamma_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \quad \gamma_{ij}g^{j0} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \quad \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} + \frac{g_{0k}v^k}{g_{00}} = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}, \quad (1.33)$$

nós podemos apresentar o lado direito da equação (1.32) em termos da métrica inicial como se segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\gamma\mathbf{a} = & \frac{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}{2c\sqrt{-g_{00}}} \left\{ \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}} \left[\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \partial_0 g_{00} + v^k \partial_k g_{00} \right] - \partial_0 g_{00} \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-2} - \right. \\ & \left. - 2\partial_0 g_{0k} \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} v^k - \partial_0 g_{kl} v^k v^l \right\} \equiv \frac{c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}}{2c\sqrt{-g_{00}}} \left\{ \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}} v^\mu \partial_\mu g_{00} - \partial_0 g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Na última linha nós denotamos

$$v^\mu = \left(\left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1}, \mathbf{v} \right) = \left(\frac{dt}{dx^0}\right)^{-1} \frac{dx^\mu}{dx^0}. \quad (1.35)$$

Para o caso de métrica estacionária $g_{\mu\nu}(x^k)$, a equação (1.34) adquire uma forma especialmente simples:

$$\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} = -(c^2 - \mathbf{v}\gamma\mathbf{v}) \frac{v^k \partial_k g_{00}}{2g_{00}}. \quad (1.36)$$

A aceleração longitudinal tem apenas um único ponto especial, $\mathbf{v}\gamma\mathbf{a} \rightarrow 0$ quando $\mathbf{v}\gamma\mathbf{v} \rightarrow c^2$. No resultado, partículas no campo gravitacional estacionário não podem ultrapassar a velocidade da luz. Então, o mesmo é verdade no caso geral (1.34), pelo menos para a métrica com variação suficientemente lenta no tempo.

2 TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE EM \mathbb{R}^3

Neste capítulo, seguindo [9], introduzimos a definição de transporte paralelo sobre uma superfície em \mathbb{R}^3 através de definição geométrica. Em seguida, apresentamos alguns dos principais conceitos utilizados no decorrer deste trabalho. Finalizamos com a derivação de equação de transporte paralelo em coordenadas locais.

2.1 DEFINIÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE

Seja uma curva dada em uma superfície do espaço euclidiano tridimensional. Ao longo desta curva é dado um campo de vetores tangentes à superfície. Queremos decidir quando este campo vetorial poderia ser chamado paralelo.

Notemos que as regras padrão de transporte paralelo em \mathbb{R}^3 não são adequadas para este caso. Sejam P um ponto da superfície S e \mathbf{V}_p o vetor tangente à S neste ponto. Tentaremos transportar \mathbf{V}_p para outro ponto Q da superfície S de acordo com regras conhecidas do transporte paralelo em um espaço euclidiano. Para transportá-lo, é preciso construir no ponto Q o mesmo (de tamanho e direção) vetor que havia no ponto inicial P . Porém, como resultado de tal operação, um vetor tangente à superfície deixa de sê-lo. Como um simples exemplo, vamos considerar o transporte paralelo de um vetor tangente à esfera bidimensional de um pólo para um ponto no equador. De fato, se o vetor tangente à esfera em um polo tangenciou algum meridiano, então, depois do transporte paralelo no ponto da interseção deste meridiano com o equador, ele ficará perpendicular ao plano tangente da esfera. Ou seja, do ponto de vista de um “habitante” da superfície, o transporte paralelo deve parecer diferente.

Portanto, a noção de transporte paralelo é dada como se segue, seguindo a ideia de Levi-Civita (veja a pagina 394 em [13] e a pagina 366 em [14]). Sejam γ uma curva sobre uma superfície S e \mathbf{V}_M um campo vetorial de vetores tangentes à S ao longo da γ onde M são pontos da γ . Consideramos dois pontos da curva γ : o ponto P e o ponto Q de uma vizinhança do P . Então denotaremos por \mathbf{V}_P e \mathbf{V}_Q os vetores tangentes à S nestes pontos. Além disso, denotaremos por ℓ o comprimento da curva γ entre P e Q e por $T_P S$ o plano tangente à S no ponto P . Projetaremos ortogonalmente o vetor \mathbf{V}_Q no plano $T_P S$ como mostrado na Figura 3. Denotaremos a projeção do vetor \mathbf{V}_Q por $\mathbf{V}_Q|_{pr}$. Repetiremos esta operação para os vetores dados em todos os pontos $M(\ell)$ da curva γ entre os pontos P e Q . Deste jeito, obtemos a projeção da curva γ no plano tangente $T_P S$ e o novo campo vetorial $\mathbf{V}_{pr}(\ell)$ construído ao longo desta projeção, tal que $\mathbf{V}_{pr}(0) = \mathbf{V}_P$ e $\mathbf{V}_{pr}(\ell) = \mathbf{V}_{M(\ell)}|_{pr}$. Assim, o campo $\mathbf{V}_{pr}(\ell)$ pode ser considerado parametrizado por ℓ . Além disso, podemos reunir todas as projeções $\mathbf{V}_{M(\ell)}|_{pr}$ no ponto P e aplicar nelas as operações vetoriais.

Definição. Chamaremos *paralelo* um campo vetorial $\mathbf{V}_{M(\ell)}$ em pontos $M(\ell)$ da curva γ se

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{M(\ell)}|_{pr} - \mathbf{V}_P}{\ell} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{pr}(\ell) - \mathbf{V}_{pr}(0)}{\ell} = 0. \quad (2.1)$$

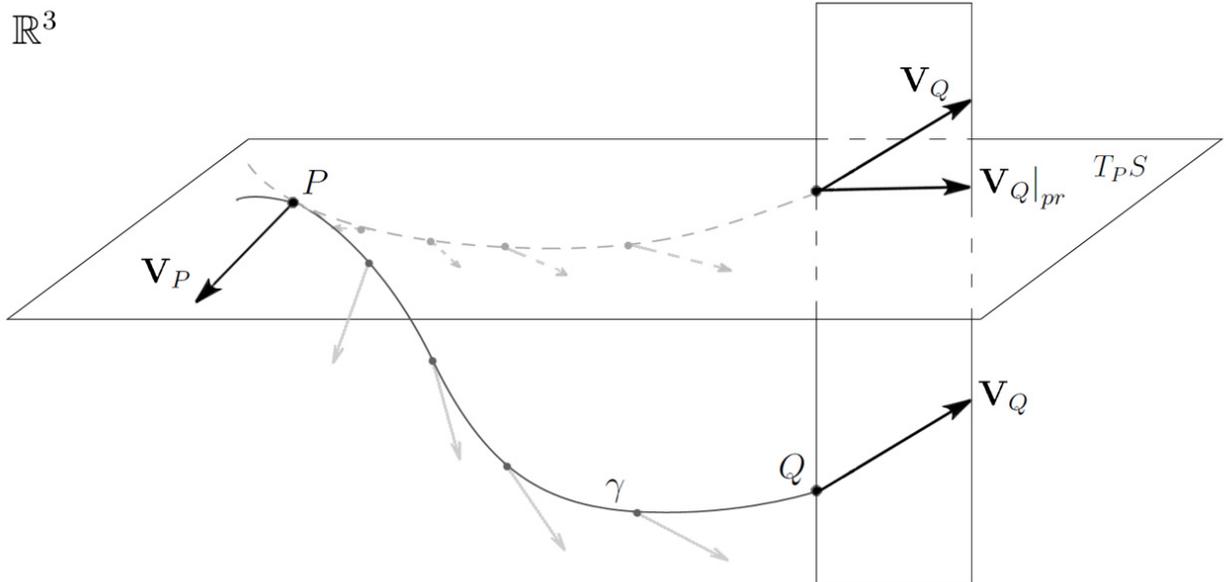


Figura 3 – Interpretação geométrica de transporte paralelo sobre uma superfície

Para iniciar nosso estudo vamos definir todos os conceitos geométricos sobre os quais falamos acima e dos quais vamos precisar.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO NO ESPAÇO EUCLIDIANO \mathbb{R}^3

A geometria diferencial das superfícies é formulada em base de um *espaço euclidiano tridimensional* (\mathbb{R}^3). Ou seja, o ponto de partida é um espaço vetorial cujos elementos (pontos) são triplas ordenadas de números reais (x^1, x^2, x^3) também chamadas *vetores* (de posição), com produto escalar. Dados dois vetores, são definidos:

1. a *soma* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ como sendo o vetor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3) \in \mathbb{R}^3$;
2. o *produto* $\alpha \mathbf{x}$ como sendo o vetor $\alpha \mathbf{x} = (\alpha x^1, \alpha x^2, \alpha x^3) \in \mathbb{R}^3$;
3. o *produto escalar* (\mathbf{x}, \mathbf{y}) como sendo o número real dado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \in \mathbb{R}$.

Dois vetores são iguais se, e só se, têm as mesmas componentes. A *norma euclidiana* de um vetor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ é dada por $|\mathbf{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

é dito *unitário* se $|\mathbf{x}| = 1$. Dois vetores $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$ são ditos *ortogonais* se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, [6].

Os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$ são ditos *linearmente dependentes* se existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nem todos nulos, tais que $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0$. Os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^3$ são ditos *linearmente independentes* se não são linearmente dependentes, isto é, para toda combinação linear desses vetores da forma $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0$, tem-se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, [6].

Os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes e, além disso, todo vetor $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ pode ser expresso, de modo único, como combinação linear de \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 na forma

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \equiv x^i \mathbf{e}_i.$$

Um conjunto de vetores \mathcal{B} é dito uma *base* de \mathbb{R}^3 se todo vetor de \mathbb{R}^3 pode ser expresso como combinação linear dos vetores de \mathcal{B} e \mathcal{B} é um conjunto de vetores linearmente independentes. O conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é denominado *base canônica* de \mathbb{R}^3 a qual é formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais. Uma base formada por vetores unitários e dois a dois ortogonais é dita uma *base ortonormal*, [6].

Se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 , e se $\mathbf{x} = a^1 \mathbf{u}_1 + a^2 \mathbf{u}_2 + a^3 \mathbf{u}_3$, então os números reais a^1, a^2, a^3 são ditos *coordenadas* do vetor \mathbf{x} na base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Uma *função vetorial* \mathbf{r} de uma variável de um subconjunto I de \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 , denotada por $\mathbf{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, é uma correspondência que, para cada $t \in I$, associa

$$\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t)),$$

onde as funções reais $x^1, x^2, x^3: I \rightarrow \mathbb{R}$ são denominadas *funções coordenadas* de \mathbf{r} , [6].

Dizemos que o *limite* de uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ é L quando t se aproxima de t_0 , e denotamos por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = L,$$

quando, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |t - t_0| < \delta$, então $|\mathbf{r}(t) - L| < \varepsilon$. Se $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ e $L = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = L$ se, e somente se, $\lim_{t \rightarrow t_0} x^1(t) = \ell_1$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x^2(t) = \ell_2$, $\lim_{t \rightarrow t_0} x^3(t) = \ell_3$. Lembramos que as propriedades usuais de limite para funções reais verificam-se para funções vetoriais, [6].

Uma função vetorial $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *contínua em* $t_0 \in I$ se $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$. Dizemos que \mathbf{r} é *contínua* se \mathbf{r} é contínua em t , para todo $t \in I$. Uma função vetorial \mathbf{r} é contínua em t_0 se, e só se, as funções coordenadas de \mathbf{r} são contínuas em t_0 , [6].

Uma função vetorial $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita *diferenciável em* t_0 se existe

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0},$$

que denotamos por $\mathbf{r}'(t)$. Dizemos que \mathbf{r} é *diferenciável* se \mathbf{r} é diferenciável para todo $t \in I$. Uma função vetorial $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ é diferenciável em t_0 se, e só se, as funções coordenadas de \mathbf{r} são diferenciáveis em t_0 . Neste caso,

$$\mathbf{r}'(t_0) = (x^{1'}(t_0), x^{2'}(t_0), x^{3'}(t_0)).$$

Se $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável, então a função $\mathbf{r}': I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, para cada $t \in I$, associa $\mathbf{r}'(t)$ é também uma função vetorial chamada *derivada de primeira ordem* de \mathbf{r} . Usaremos também a notação $\mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ para a derivada de \mathbf{r} . Se a função \mathbf{r}' é diferenciável, temos uma nova função vetorial chamada *derivada segunda* de \mathbf{r} que denotaremos por \mathbf{r}'' . De modo análogo, definimos as derivadas de ordem superior, [6].

Uma função vetorial \mathbf{r} é dita diferenciável *de classe* C^∞ se existem as derivadas de todas as ordens de \mathbf{r} . Observamos que, se \mathbf{r} é diferenciável em t_0 , então \mathbf{r} é contínua em t_0 .

Se \mathbf{r} é uma função vetorial diferenciável (C^∞) em I , então, para todo inteiro $n > 0$, $t_0 \in I$ e, se denotarmos $t - t_0$ por Δt , temos que

$$\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(\Delta t) + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n + O(\Delta t), \quad (2.2)$$

onde $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O(\Delta t)}{(\Delta t)^n} = 0$. Esta expressão é denominada desenvolvimento de \mathbf{r} na *fórmula de Taylor* em t_0 , [7].

Os conceitos de limite e continuidade de uma função de duas ou mais variáveis são introduzidos da maneira análoga ao caso de uma variável.

Vamos definir a noção de diferenciabilidade de funções vetoriais de várias variáveis.

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Fixemos $p_0 \in U$ e \mathbf{w} um vetor não-nulo de \mathbb{R}^n . A *derivada direcional* de f em p_0 na *direção* de \mathbf{w} é o vetor

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + t\mathbf{w}) - f(p_0)}{t},$$

quando esse limite existe, [7].

Considerando a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de \mathbb{R}^n , as derivadas direcionais de f em p_0 nas direções dos vetores da base são denominadas *derivadas parciais* de f em p_0 .

Se $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, então a derivada parcial de F em p_0 na direção de \mathbf{e}_i é denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$ ou $f_{x_i}(p_0)$ e é igual a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(p_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(p_0) \right).$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ existe, para todo $p \in U$, então temos que definida uma função $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ que, para cada $p \in U$, associa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. As derivadas parciais da função $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são

denominadas derivadas de segunda ordem de f . A notação usada para as derivadas parciais de segunda ordem é

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_j x_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{x_i x_i}.$$

Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de uma função $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas em U , então f é diferenciável.

Dizemos que uma função $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável de classe C^k , $k \geq 1$ (respectivamente C^∞) se as derivadas parciais de f até a ordem k (respectivamente de todas as ordens) existem e são contínuas, [7].

Pode-se provar que, se todas as derivadas parciais até ordem k de uma função $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas, então essas derivadas parciais não dependem da ordem de diferenciação, isto é, $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$, etc.

A fórmula de Taylor, que vimos para uma função vetorial de uma variável, estende-se ao caso de uma função vetorial de várias variáveis. Em particular, se \mathbf{r} é uma função vetorial diferenciável (C^∞) de duas variáveis x e y , então, para todo inteiro $n > 0$ e (x_0, y_0) , temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= \mathbf{r}(x_0, y_0) + \mathbf{r}'(x_0, y_0) \Delta x + \mathbf{r}''(x_0, y_0) \Delta y + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \left((\Delta x)^n \frac{\partial^n \mathbf{r}}{\partial x^n}(x_0, y_0) + n(\Delta x)^{n-1} \Delta y \frac{\partial^n \mathbf{r}}{\partial x^{n-1} \partial y}(x_0, y_0) + \dots \right. \\ &\left. \dots + (\Delta y)^n \frac{\partial^n \mathbf{r}}{\partial y^n}(x_0, y_0) \right) + O(\Delta x, \Delta y), \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ e $O(\Delta x, \Delta y)$ é uma função que satisfaz a propriedade

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{O(\Delta x, \Delta y)}{|(\Delta x, \Delta y)|^n} = 0.$$

Esta expressão é o desenvolvimento de \mathbf{r} na *fórmula de Taylor* em torno de (x_0, y_0) , [6].

A *regra de cadeia* para funções de duas variáveis é dada no seguinte teorema, [6]:

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ abertos, $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais diferenciáveis no ponto $t_0 \in I$ tais que $(x(t_0), y(t_0)) \in U$ e $\mathbf{r}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial diferenciável em $\mathbf{r}(x(t_0), y(t_0))$. Então a função composta $\mathbf{h}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\mathbf{h}(t) = \mathbf{r}(x(t), y(t))$, para cada $t \in I$, é diferenciável no ponto t_0 e tem a derivada

$$\mathbf{h}'(t_0) = \frac{d\mathbf{h}}{dt}(t_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \frac{dy}{dt}(t_0). \tag{2.4}$$

2.3 ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS E SUPERFÍCIES EM \mathbb{R}^3

2.3.1 Curva espacial

Uma *curva parametrizada diferenciável* de \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável \mathbf{r} , de classe C^∞ , de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 , ou seja, uma função vetorial de uma variável: $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, $t \in I$, onde $x^1(t)$, $x^2(t)$ e $x^3(t)$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ . A variável $t \in I$ é o *parâmetro* da curva. O subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelos pontos $\mathbf{r}(t)$, $t \in I$ (ou seja, a imagem $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^3$), é chamado o *traço* da curva \mathbf{r} , [6]. Chamaremos *curva* o subconjunto γ de \mathbb{R}^3 se ele é o traço da curva parametrizada diferenciável \mathbf{r} .

Seja $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$, $t \in I$, uma curva parametrizada diferenciável. O *vetor tangente* a \mathbf{r} em $t \in I$ é o vetor $\mathbf{r}'(t) = (x^1'(t), x^2'(t), x^3'(t))$. A curva parametrizada diferenciável \mathbf{r} é *regular* se para todo $t \in I$, $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Dado $t_0 \in I$, o *comprimento de arco* de uma curva parametrizada regular $\mathbf{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ a partir do ponto t_0 , é, por definição

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt, \quad (2.5)$$

onde $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(\dot{x}^1(t))^2 + (\dot{x}^2(t))^2 + (\dot{x}^3(t))^2}$ é o comprimento do vetor $\mathbf{r}'(t)$. Como $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, o comprimento de arco s é uma função diferenciável de t e $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$, [6].

Pode acontecer que o parâmetro t já seja o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto. Neste caso, $\frac{ds}{dt} = 1 = |\mathbf{r}'(t)|$; isto é, o vetor velocidade tem comprimento constante igual a 1. Reciprocamente, se $|\mathbf{r}'(t)| = 1$, então

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0 = \Delta t, \quad (2.6)$$

isto é, t é o comprimento de arco de \mathbf{r} medido a partir de algum ponto.

2.3.2 Superfície

2.3.2.1 Parametrização de uma superfície

Um subconjunto S de \mathbb{R}^3 diz-se uma *superfície regular* se, para cada $P \in S$, existirem uma vizinhança aberta $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de p , um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, e uma bijeção vetorial $\mathbf{r}: U \rightarrow V \cap S$, $\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) = (x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2))$, com as seguintes propriedades:

1. \mathbf{r} é função vetorial de classe C^∞ ;
2. \mathbf{r} é um homeomorfismo (ou seja, sua inversa $\mathbf{r}^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ é contínua);

3. para qualquer $q = (\xi_0^1, \xi_0^2) \in U$ as derivadas parciais $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^1}(q) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}(q), \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}(q), \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1}(q) \right)$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^2}(q) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}(q), \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}(q), \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2}(q) \right)$ são linearmente independentes.

Uma aplicação \mathbf{r} com estas três propriedades tem nome de *parametrização* ou *sistema de coordenadas locais* de S . A vizinhança $V \cap S$ de P em S é chamada uma *vizinhança coordenada*. As variáveis ξ^1, ξ^2 são os *parâmetros (coordenadas locais)* da superfície S . As derivadas parciais de \mathbf{r} , $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^1}(q) \equiv \mathbf{r}'_1(q)$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^2}(q) \equiv \mathbf{r}'_2(q)$, representam os vetores tangentes às *curvas coordenadas*, que são as curvas obtidas fixando um dos parâmetros e fazendo variar o outro, [8]. Daqui em diante, entendemos por superfície uma superfície regular.

Observamos que, por um lado, cada ponto $\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2)$ da superfície S pode ser definido pelos valores ξ^1, ξ^2 . Por outro lado, este mesmo ponto pode ser definido por suas coordenadas cartesianas x^1, x^2, x^3 . Consequentemente, as coordenadas cartesianas dos pontos da superfície são as funções das coordenadas locais ξ^1, ξ^2 :

$$x^1 = x^1(\xi^1, \xi^2), \quad x^2 = x^2(\xi^1, \xi^2), \quad x^3 = x^3(\xi^1, \xi^2). \quad (2.7)$$

Estas três equações escalares equivalem a uma equação vetorial:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2), \quad (2.8)$$

onde $\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2) = x^1(\xi^1, \xi^2)\mathbf{e}_1 + x^2(\xi^1, \xi^2)\mathbf{e}_2 + x^3(\xi^1, \xi^2)\mathbf{e}_3$. As equações (2.7) e (2.8) chamaremos *equações paramétricas* de uma superfície.

2.3.2.2 Curva sobre uma superfície. Plano tangente

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e S uma superfície dada por equação $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2)$. Chamaremos *curva sobre uma superfície* um subconjunto γ de S se ele é o traço de uma curva parametrizada diferenciável $\mathbf{r}: I \rightarrow S$. Deste jeito, a curva γ se determina pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t)). \quad (2.9)$$

Entendemos por *vetor tangente* a superfície S , em um ponto $P \in S$, o vetor \mathbf{w} de \mathbb{R}^3 que é tangente à alguma curva em S que passa por P . Assim, \mathbf{w} é tangente à S em P se existir uma curva γ em S , dada pela equação (2.9), tal que $\mathbf{r}(\xi^1(t_0), \xi^2(t_0)) = P$, $(\xi^1(t_0), \xi^2(t_0)) = (\xi_0^1, \xi_0^2) \in U$ e $\mathbf{r}'(t_0) = \mathbf{w}$, para algum $t_0 \in I$, [9]. Os vetores \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 são vetores tangentes à S em um ponto de S , já que são tangentes às curvas coordenadas de S .

O *plano tangente* à superfície S num ponto qualquer dado $\mathbf{r}(\xi_0^1, \xi_0^2) = P \in S$, $(\xi_0^1, \xi_0^2) \in U$, é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em P , que denotamos por $T_P S$, [6]. A seguir, veremos que o plano tangente $T_P S$ é o plano de \mathbb{R}^3 gerado por $\mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2)$ e $\mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2)$.

Afirmação. Sejam S uma superfície e $P = \mathbf{r}(\xi_0^1, \xi_0^2)$ um ponto dela. Então, $T_P S$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $\mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2)$ e $\mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2)$.

De fato, se $\mathbf{w} \in T_P S$, então $\mathbf{w} = \mathbf{r}'(t_0)$, onde $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t))$ e $(\xi^1(t_0), \xi^2(t_0)) = (\xi_0^1, \xi_0^2)$. Portanto,

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t)) \right) \right|_{t=t_0} = \mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2) \frac{d\xi^1}{dt}(t_0) + \mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2) \frac{d\xi^2}{dt}(t_0),$$

isto é, \mathbf{w} é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ em (ξ_0^1, ξ_0^2) .

Reciprocamente, suponhamos que $\mathbf{w} = a\mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2) + b\mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2)$. Então existe uma curva na superfície, dada pela equação $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t))$, $t \in I$, tal que $(\xi^1(0), \xi^2(0)) = (\xi_0^1, \xi_0^2)$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{w}$. De fato, basta considerar $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t))$, onde $\xi^1(t) = \xi_0^1 + at$ e $\xi^2(t) = \xi_0^2 + bt$, [6]. \square

Por definição de superfície regular, \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 são vetores linearmente independentes. Portanto, segue-se da proposição anterior que $T_P S$ é um plano de \mathbb{R}^3 gerado por \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 . Ou seja, os vetores $\mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2)$ e $\mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2)$ formam uma base não degenerada $\{\mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2), \mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2)\}$ de $T_P S$, chamada *base associada* a \mathbf{r} . Observamos que, em geral, \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 não são ortogonais nem unitários, [9].

2.3.2.3 Métrica

Já sabemos que em cada ponto da superfície temos um espaço tangente. Como ele fica embutido no espaço euclidiano há sentido falar sobre um produto escalar dos vetores tangentes. Seja $P \in S$ um ponto. Se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_P S \subset \mathbb{R}^3$ são dois vetores tangentes dados pelas suas coordenadas v^a e w^b na base $\{\mathbf{r}'_1(\xi_0^1, \xi_0^2), \mathbf{r}'_2(\xi_0^1, \xi_0^2)\}$, $\mathbf{v} = v^1\mathbf{r}'_1 + v^2\mathbf{r}'_2$ e $\mathbf{w} = w^1\mathbf{r}'_1 + w^2\mathbf{r}'_2$, então o *produto escalar* deles tem a forma:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (v^a \mathbf{r}'_a, w^b \mathbf{r}'_b) = (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b) v^a w^b.$$

Denotando

$$(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b) \equiv g_{ab}(\xi), \tag{2.10}$$

podemos escrever

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ab}(\xi) v^a w^b, \tag{2.11}$$

ou na forma matricial

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} v^a & v^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(\xi) & g_{12}(\xi) \\ g_{21}(\xi) & g_{22}(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^a \\ w^b \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

A matriz

$$g_{ab}(\xi) = \begin{bmatrix} g_{11}(\xi) & g_{12}(\xi) \\ g_{21}(\xi) & g_{22}(\xi) \end{bmatrix}$$

é a matriz que chamaremos *métrica* da parametrização \mathbf{r} de S em $P = \mathbf{r}(\xi_0^1, \xi_0^2)$. Fazendo P variar na vizinhança coordenada correspondente a $\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2)$, obtemos funções $g_{11}(\xi), g_{12}(\xi), g_{22}(\xi)$, que são as funções de classe C^k dos argumentos ξ^a e os chamaremos por *componentes (coeficientes) da métrica* na superfície S . Estes coeficientes dependem do ponto na superfície e, além disso, dependem da escolha da parametrização desta superfície, [9].

Como a matriz g_{ab} é não singular podemos definir a matriz inversa $(g^{-1})_{ab}$. Denotamos os componentes de tal matriz por \tilde{g}^{ab} e pondo os índices a e b em cima. Por exemplo

$$g_{al}\tilde{g}^{lb} = \delta_a^b, \text{ onde } \delta_a^b = \begin{cases} 1, & \text{se } a = b, \\ 0, & \text{se } a \neq b. \end{cases}$$

Como a matriz g_{ab} é simétrica ($g_{ab} = g_{ba}$) então o produto escalar também tem a propriedade simétrica: $(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b) = (\mathbf{r}'_b, \mathbf{r}'_a)$.

Em particular, o comprimento do vetor tangente será dado por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{g_{ab}v^av^b}. \quad (2.13)$$

2.3.2.4 Símbolos de Christoffel

Com cada escolha do sistema de coordenadas locais ξ^1, ξ^2 na superfície é relacionada a base $\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2\}$ dos vetores tangentes nela. Os vetores de tal base produzem o plano tangente em cada ponto da superfície. Porém, para a expansão de um vetor arbitrário do \mathbb{R}^3 não é suficiente ter só estes dois vetores. Portanto, geralmente eles são complementados por um vetor que não fica no plano tangente.

Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $P \in S$ um ponto. Chamaremos o vetor unitário ligado ao ponto P e perpendicular aos vetores do plano tangente $T_P S$ neste ponto por *vetor normal unitário* \mathbf{n} . Calcularemos ele pela fórmula:

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2]}{|[\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2]|}, \quad (2.14)$$

onde por $[,]$ é denotado o produto vetorial de vetores. O vetor \mathbf{n} definido pela fórmula (2.14) contém a dependência da escolha de coordenadas locais, [6].

Os vetores $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ e \mathbf{n} formam uma base (não é ortonormal) no ponto P de \mathbb{R}^3 adaptada com a S . As derivadas dos vetores da base $\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{n}\}$ relacionadas ao mesmo ponto da superfície, porém não são tangentes à ela. Podemos expandir o vetor $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} \equiv \mathbf{r}_{ab}$ (ou $\partial_a \mathbf{r}_b$) em componentes tangenciais e normal como se segue:

$$\mathbf{r}_{ab} = \Gamma_{ab}^k \mathbf{r}'_k + \beta_{ab} \mathbf{n}, \quad (2.15)$$

onde Γ_{ab}^k e β_{ab} alguns coeficientes (ainda desconhecidos). Para calculá-los fazemos o produto escalar de (2.15) com o vetor \mathbf{n} :

$$(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{n}) = \Gamma_{ab}^k(\mathbf{r}', \mathbf{n}) + \beta_{ab}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \Gamma_{ab}^k \cdot 0 + \beta_{ab} \cdot 1 = \beta_{ab},$$

donde notemos que os coeficientes β_{ab} são conhecidos como os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície.

Fazemos o produto escalar de (2.15) com o vetor \mathbf{r}'_l :

$$(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}'_l) = \Gamma_{ab}^k(\mathbf{r}'_k, \mathbf{r}'_l) + \beta_{ab}(\mathbf{n}, \mathbf{r}'_l) \stackrel{(2.10)}{=} \Gamma_{ab}^k g_{kl} + \beta_{ab} 0 = \Gamma_{ab}^k g_{kl}. \quad (2.16)$$

Seja

$$\Gamma_{ab}^m g_{ml} \equiv \Gamma_{ab,l}. \quad (2.17)$$

Multiplicamos $(\mathbf{r}_{ab}, \mathbf{r}'_l) \equiv \Gamma_{ab,l}$ pelo elemento \tilde{g}^{kl} da matriz inversa:

$$\Gamma_{ab,l} \tilde{g}^{kl} = \Gamma_{ab}^m g_{ml} \tilde{g}^{kl} = \Gamma_{ab}^m \delta_m^k = \Gamma_{ab}^k,$$

donde

$$\Gamma_{ab}^k = \tilde{g}^{kl} \Gamma_{ab,l}. \quad (2.18)$$

Primeiramente calcularemos os coeficientes $\Gamma_{ab,l}$. Para isso derivamos $g_{ab} = (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b)$ de ξ^l :

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial \xi^l} = \frac{\partial (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b)}{\partial \xi^l} = (\mathbf{r}_{al}, \mathbf{r}'_b) + (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}_{bl}) = \Gamma_{al,b} + \Gamma_{bl,a}. \quad (2.19)$$

Última igualdade realizada para todos os valores das índices a, b, l . Portanto podemos fazer a permutação cíclica destes índices:

$$\frac{\partial g_{bl}}{\partial \xi^a} = \frac{\partial (\mathbf{r}'_b, \mathbf{r}'_l)}{\partial \xi^a} = (\mathbf{r}_{ba}, \mathbf{r}'_l) + (\mathbf{r}'_b, \mathbf{r}_{la}) = \Gamma_{ba,l} + \Gamma_{la,b}. \quad (2.20)$$

Repetindo esta operação mais uma vez obtemos:

$$\frac{\partial g_{la}}{\partial \xi^b} = \frac{\partial (\mathbf{r}'_l, \mathbf{r}'_a)}{\partial \xi^b} = (\mathbf{r}_{lb}, \mathbf{r}'_a) + (\mathbf{r}'_l, \mathbf{r}_{ab}) = \Gamma_{lb,a} + \Gamma_{ab,l}. \quad (2.21)$$

Agora somamos as igualdades (2.20) e (2.21) e subtraímos da soma obtida (2.19), considerando que $r_{ab} = r_{ba}$ e consequentemente $\Gamma_{ab,m} = \Gamma_{ba,m}$:

$$\frac{\partial g_{bl}}{\partial \xi^a} + \frac{\partial g_{la}}{\partial \xi^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial \xi^l} = \Gamma_{ba,l} + \Gamma_{la,b} + \Gamma_{lb,a} + \Gamma_{ab,l} - \Gamma_{al,b} - \Gamma_{bl,a} = 2\Gamma_{ab,l}. \quad (2.22)$$

Dividimos (2.22) por 2 e colocamos na fórmula (2.18):

$$\Gamma_{ab}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{bl}}{\partial \xi^a} + \frac{\partial g_{la}}{\partial \xi^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial \xi^l} \right). \quad (2.23)$$

Chamaremos *símbolos de Christoffel* os coeficientes $\Gamma_{ab}^k(\xi^a)$ determinados deste jeito em sistema de coordenadas locais ξ^a . Obviamente, Γ_{ab}^k dependem do ponto onde acontece a expansão do \mathbf{r}_{ab} , [10].

2.3.2.5 Campo vetorial ao longo de uma curva

Seja definida sobre a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ uma curva γ por equação paramétrica $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t))$. Chamaremos por *campo vetorial ao longo da curva* γ e denotaremos por \mathbf{V} uma correspondência que associa a cada ponto $t \in I$ um vetor $\mathbf{V}(t) \in T_{\mathbf{r}(t)}S$. O campo de vetores $\mathbf{V}(t)$ é *diferenciável* se, escrevendo $\mathbf{V}(t) = v^1(t)\mathbf{r}'_1 + v^2(t)\mathbf{r}'_2$, as funções $v^1(t), v^2(t)$ são diferenciáveis. Assim, cada um dos vetores tangentes determinado pelas suas coordenadas v^a na base $\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2\}$ do plano tangente $T_{\mathbf{r}(t)}S$, [9]:

$$\mathbf{V}(t) = v^1(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^1}(\xi^1(t), \xi^2(t)) + v^2(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^2}(\xi^1(t), \xi^2(t)) \equiv v^a(t) \mathbf{r}'_a(\xi^b(t)). \quad (2.24)$$

2.3.2.6 Derivada covariante

Seja $\mathbf{V}(t)$ o campo vetorial definido ao longo de alguma curva dada γ . Sua derivada ao longo da γ pode ser escrita como se segue:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) = Dv^a(t) \mathbf{r}'_a(\xi^c(t)) + \beta_{ab} v^a(t) \xi^{b'}(t) \mathbf{n}(\xi^c(t)),$$

onde Dv^a é a *derivada covariante* de \mathbf{V} em t . Isto significa que a derivada covariante determina a parte tangencial da taxa de variação do vetor \mathbf{V} ao longo da curva e dada pela expressão:

$$Dv^a(t) = v^{a'}(t) + \Gamma_{dc}^a(\xi^e(t)) v^c(t) \xi^{d'}(t). \quad (2.25)$$

Um campo vetorial é dito um *campo covariantemente constante* se ele obedece à equação $Dv^a(t) = 0$, [2].

2.4 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO

Sejam ξ^a as coordenadas locais em uma vizinhança do ponto P na superfície S que é determinada pela equação vetorial:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^a) \equiv (x^i(\xi^a)). \quad (2.26)$$

Logo, por (2.9), a curva γ sobre a superfície S tem a equação vetorial:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^a(t)) \equiv (x^i(\xi^a(t))), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

Como a curva γ é parametrizada por t , então temos o campo vetorial ao longo dela $\mathbf{V}(t)$. Pela expressão (2.24) cada um dos vetores do campo $\mathbf{V}(t)$ tem a forma:

$$\mathbf{V}(t) = v^a(t) \mathbf{r}'_a(\xi^b(t)). \quad (2.28)$$

Sejam P um ponto da curva γ correspondente ao valor t do parâmetro e Q um ponto correspondente ao valor $t + \Delta t$. Então, a expressão para o vetor \mathbf{V}_P será:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}(t) = v^a(t) \mathbf{r}'_a(\xi^b(t)), \quad (2.29)$$

onde $\{\mathbf{r}'_1(\xi^b(t)), \mathbf{r}'_2(\xi^b(t))\}$ é a base do plano $T_P S$. A expressão para o vetor \mathbf{V}_Q será:

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}(t + \Delta t) = v^a(t + \Delta t)\mathbf{r}'_a(\xi^b(t + \Delta t)), \quad (2.30)$$

onde $\{\mathbf{r}'_1(\xi^b(t + \Delta t)), \mathbf{r}'_2(\xi^b(t + \Delta t))\}$ é a base do plano $T_Q S$.

Para fazer a projeção ortogonal do vetor \mathbf{V}_Q no plano $T_P S$ (e depois subtrair o vetor \mathbf{V}_P do \mathbf{V}_Q) é prático escrever \mathbf{V}_Q na base do ponto P , ou seja, expressar na forma seguinte:

$$\mathbf{V}_Q = v_Q^a(t)\mathbf{r}'_a(\xi^b(t)) + v_Q^n(t)\mathbf{n}(\xi^b(t)). \quad (2.31)$$

Logo $\mathbf{V}_Q|_{pr} = v_Q^a(t)\mathbf{r}'_a(\xi^b(t))$ é a projeção ortogonal do vetor \mathbf{V}_Q no plano $T_P S$. Daqui em diante, para a notação mais compacta escreveremos $\mathbf{r}'_a(\xi(t))$ ao invés de $\mathbf{r}'_a(\xi^b(t))$ e etc.

Vamos encontrar as coordenadas v_Q^a usando o produto escalar do \mathbb{R}^3 . Com efeito,

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_Q, \mathbf{r}'_b(\xi(t))) &= v_Q^a(t)(\mathbf{r}'_a(\xi(t)), \mathbf{r}'_b(\xi(t))) + v_Q^n(t)(\mathbf{n}(\xi(t)), \mathbf{r}'_b(\xi(t))) \\ &= v_Q^a(t)(\mathbf{r}'_a(\xi(t)), \mathbf{r}'_b(\xi(t))) + 0 \\ &= v_Q^a(t)g^{ab}(\xi(t)). \end{aligned}$$

Logo

$$v_Q^a(t) = (\mathbf{V}_Q, \mathbf{r}'_b(\xi(t)))\tilde{g}^{ba}(\xi(t)).$$

Analogamente,

$$v_Q^n(t) = \frac{(\mathbf{V}_Q, \mathbf{n}(\xi(t)))}{(\mathbf{n}(\xi(t)), \mathbf{n}(\xi(t)))}.$$

De acordo com (2.30)

$$\begin{aligned} v_Q^a(t) &= (v^c(t + \Delta t)\mathbf{r}'_c(\xi(t + \Delta t)), \mathbf{r}'_b(\xi(t)))\tilde{g}^{ba}(\xi(t)) \\ &= v^c(t + \Delta t)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t))\frac{\partial x^j}{\partial \xi^b}(\xi(t))(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\tilde{g}^{ba}(\xi(t)) \\ &= v^c(t + \Delta t)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t))\frac{\partial x^j}{\partial \xi^b}(\xi(t))\delta^{ij}\tilde{g}^{ba}(\xi(t)) \\ &= v^c(t + \Delta t)\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t))\frac{\partial x^i}{\partial \xi^b}(\xi(t))\tilde{g}^{ba}(\xi(t)). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Precisaremos dos termos desta equação lineares em Δt (os termos Δt^2 não influenciam (2.1)). Por isso expandimos tudo usando a série de Taylor (2.3).

$$v^c(t + \Delta t) \stackrel{(2.2)}{=} v^c(t) + \frac{dv^c}{dt}(t)\Delta t + O(\Delta t^2), \quad (2.33)$$

onde $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O(\Delta t^2)}{(\Delta t)^2} = 0$.

Fazemos dupla substituição em $\frac{\partial x^i(\xi(t + \Delta t))}{\partial \xi^c}$ da fórmula (2.30). Seja $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} = f_c^i$ e $f_c^i \circ \xi = g$, logo $f_c^i \circ \xi(t + \Delta t) = g(t + \Delta t)$.

$$g(t + \Delta t) = g(t) + \frac{d}{dt}[g(t)]\Delta t + O(\Delta t^2).$$

Fazemos a substituição reversa e usaremos a regra de cadeia (2.4):

$$\begin{aligned} f_c^i(\xi(t + \Delta t)) &\stackrel{(2.3)}{=} f_c^i(\xi(t)) + \frac{d}{dt} [f_c^i(\xi(t))] \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= f_c^i(\xi(t)) + \frac{\partial f_c^i}{\partial \xi^d}(\xi(t)) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim, pondo $f_c^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}$,

$$\frac{\partial x^i(\xi(t + \Delta t))}{\partial \xi^c} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t)) + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c}(\xi(t)) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (2.35)$$

Logo,

$$\begin{aligned} v^c(t + \Delta t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t)) &= \left[v^c(t) + \frac{dv^c}{dt}(t) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \\ &\cdot \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t)) + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c}(\xi(t)) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \\ &= v^c(t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t)) + v^c(t) \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c}(\xi(t)) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + \\ &+ \frac{dv^c}{dt}(t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t)) \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Substituímos (2.36) na expressão (2.32). Como todas as funções agora dependem da variável t , então a omitiremos:

$$\begin{aligned} v_Q^a(t) &= \left(v^c \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} + v^c \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c} \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + \frac{dv^c}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \tilde{g}^{ba} \\ &= \left(v^c \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} + v^c \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c} \frac{d\xi^d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \Delta t + \frac{dv^c}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \tilde{g}^{ba} \\ &= \left(v^c(\mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) + v^c(\partial_d \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + \frac{dv^c}{dt}(\mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \tilde{g}^{ba} \\ &= v^c g_{cb} \tilde{g}^{ba} + v^c(\partial_d \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \frac{d\xi^d}{dt} \tilde{g}^{ba} \Delta t + \frac{dv^c}{dt} g_{cb} \tilde{g}^{ba} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} v^c \delta_c^a + v^c \Gamma_{dc}^k g_{kb} \tilde{g}^{ba} \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + \frac{dv^c}{dt} \delta_c^a \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= v^a + v^c \Gamma_{dc}^k \delta_k^a \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + \frac{dv^a}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= v^a + \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} \right) \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituímos (2.37) em (2.1):

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{v^a + \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) - v^a}{\ell} = 0.$$

Utilizaremos o Teorema do Valor Médio substituindo ℓ por Δt . Lembramos que o Teorema do Valor Médio diz que se a função $f(x)$ é contínua no intervalo $[a, b]$ então existe $c \in [a, b]$

tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$. Se o comprimento de arco é $\ell = \int_t^{t+\Delta t} |\mathbf{r}'(t)| dt$ então, pelo Teorema de valor médio, existe $t_1 \in [t, t + \Delta t]$ tal que $\ell = |\mathbf{r}'(t_1)|(t + \Delta t - t) = |\mathbf{r}'(t_1)| \Delta t$. Então quando $\ell \rightarrow 0$ temos que $\Delta t \rightarrow 0$. Portanto

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} \right) \Delta t + O(\Delta t^2)}{|\mathbf{r}'(t)| \Delta t} = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} \right) \frac{\Delta t}{|\mathbf{r}'(t)| \Delta t} = 0,$$

como $|\mathbf{r}'(t)| \neq 0$ pelas condições dadas, então temos que:

$$\frac{dv^a}{dt}(t) + \Gamma_{dc}^a(\xi(t)) v^c(t) \frac{d\xi^d}{dt}(t) = 0, \quad (2.38)$$

ou seja, lembrando (2.25), chegamos na equação:

$$Dv^a(t) = 0. \quad (2.39)$$

A expressão (2.38) (ou (2.39)) representa *equações de transporte paralelo* ao longo da curva γ as quais formam uma sistema de 2 equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Dado um campo ao longo da curva. Podemos verificar se este é ou não é paralelo verificando esta equação. Invertendo, dado um vetor, definimos o processo de transporte paralelo. Sejam γ uma curva sobre a S dada pela equação $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^1(t), \xi^2(t))$, $P = \mathbf{r}(\xi^1(t_0), \xi^2(t_0)) \in S$ um ponto, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{V}_0 = (v_0^1, v_0^2) \in T_P S$ um vetor tangente à S . Acharemos um campo paralelo dos vetores tangentes ao longo da curva γ que coincide em P com o vetor \mathbf{V}_0 . Para isto, é necessário resolver o sistema (2.38) com a condição inicial $v^1(t_0) = v_0^1$ e $v^2(t_0) = v_0^2$. O teorema de existência e unicidade para o problema de Cauchy, [11], garante que a solução existe e é única. Ou seja, na linguagem geométrica, isto significa que o campo paralelo ao longo da curva existe e é único.

3 TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA EM \mathbb{R}^3

Neste capítulo introduzimos e descrevemos a noção de superfície dinâmica em \mathbb{R}^3 . As seções 3.1 - 3.5 contêm um estudo preliminar desta construção. Em seguida, na seção 3.6, determinamos a noção de direções horizontais. Isto nos permite encontrar os análogos geométricos da métrica induzida (1.5) e da passagem das coordenadas mundiais para as coordenadas do laboratório (veja (1.4)). As direções horizontais são usadas para definir transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica. Finalizamos este capítulo com a derivação de equação de transporte paralelo.

3.1 SUPERFÍCIE DINÂMICA

Sejam $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ e $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ duas superfícies (regulares) dadas pelas equações $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2)$ e $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\xi^1, \xi^2)$ respectivamente e sem pontos em comum. Introduzimos uma família a um parâmetro \mathcal{S} das superfícies (sem pontos em comum) entre S_0 e S_1 , ou seja, uma bijeção vetorial de três variáveis

$$\mathbf{r}: \mathbb{R}^3(\xi^1, \xi^2, t) \rightarrow \mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3), \quad (\xi^1, \xi^2, t) \mapsto \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, t), \quad (3.1)$$

com as seguintes propriedades:

$$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, 0) = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), \quad \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, 1) = \mathbf{r}_1(\xi^1, \xi^2); \quad (3.2)$$

$$\det \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi^1, \xi^2, t)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial t} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial t} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial t} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_t) \neq 0. \quad (3.3)$$

Isto implica que: a) existe a função inversa $\mathbf{r}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3(\xi^1, \xi^2, t)$; b) os vetores \mathbf{r}'_1 , \mathbf{r}'_2 e \mathbf{r}'_t são linearmente independentes. Chamaremos por *superfície dinâmica* a família \mathcal{S} com propriedades (3.2) e (3.3).

Os vetores $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_t$ formam uma *base adaptada com a \mathcal{S}* . Em particular, temos que $\mathbf{r}'_t \neq 0$.

Fixando $t = t_0$, obtemos a equação paramétrica da superfície S_{t_0} : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^a, t_0)$, ou seja, $\mathbf{r}_{t_0} = \mathbf{r}_{t_0}(\xi^a)$, onde \mathbf{r}_{t_0} é uma parametrização para S_{t_0} com função inversa $\mathbf{r}_{t_0}^{-1}: S_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^2(\xi^a)$ a qual produz uma sistema de coordenadas locais sobre a superfície S_{t_0} da família \mathcal{S} . Deste jeito, em cada superfície S_{t_0} a função $\mathbf{r}(\xi^a, t_0)$ induz a geometria riemanniana a qual nós discutimos no Capítulo 2. Em particular, os vetores $\mathbf{r}'_1(\xi^a, t_0)$ e $\mathbf{r}'_2(\xi^a, t_0)$ formam uma base do espaço tangente à superfície S_{t_0} , etc.

Seja o raio-vetor $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ que aponta para um ponto de \mathcal{S} . Levando em conta (3.3), a equação $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^a, t)$ pode ser resolvida pondo $\xi^a = \xi^a(\mathbf{r})$, $t = t(\mathbf{r})$, ou seja, podemos encontrar as coordenadas locais ξ^1, ξ^2 deste ponto na superfície S_t .

Comentário. Geometricamente, \mathcal{S} é uma região tridimensional em \mathbb{R}^3 coberta com as coordenadas curvilineares ξ^a, t . Localmente, ela tem estrutura natural de fibrado que pode ser descrita como segue. Através da aplicação (3.1) a cada ponto $(\xi_0^1, \xi_0^2) \in \mathbb{R}^2$ se torna a curva $\mathbf{r}(\xi_0^1, \xi_0^2, t)$ em $\mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$. Definimos a *aplicação projeção*

$$\pi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2(\xi^1, \xi^2) \text{ como } \pi(\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, t)) = (\xi^1, \xi^2) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

a qual a cada curva $\mathbf{r}(\xi_0^a, t)$ associa um ponto (ξ_0^1, ξ_0^2) do \mathbb{R}^2 (na prática, para dado ponto \mathbf{r} podemos encontrar ξ_0^1, ξ_0^2 como foi descrito acima). Desta maneira, \mathcal{S} tem estrutura de um *fibrado* [12] com *espaço base* $\mathbb{R}^2(\xi^1, \xi^2)$, a *projeção* π e a fibra típica \mathbb{R} . Isto nos dá uma dica de como definir transporte paralelo através de direções horizontais, veja seção 3.7.

3.2 CURVA DINÂMICA

Estamos interessados em campos vetoriais ao longo de curvas parametrizadas de forma especial. Seja γ uma curva em \mathbb{R}^3 que cruza a cada uma das superfícies da família \mathcal{S} somente em um único ponto. Associamos a cada ponto de γ um número $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, introduzimos a parametrização $\mathbf{r}_\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a qual define a equação vetorial paramétrica $\mathbf{r}_\gamma = \mathbf{r}_\gamma(t)$ da curva γ .

Chamaremos a curva parametrizada γ de *curva sobre uma superfície dinâmica* ou simplesmente *curva dinâmica* se cumprido

$$\mathbf{r}_\gamma(t) \in S_t, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ onde } S_t \subset \mathcal{S}. \quad (3.5)$$

Assim, a parametrização da curva γ é conformada com a parametrização da família \mathcal{S} : o ponto $\mathbf{r}_\gamma(t_1)$ da curva fica necessariamente na superfície $S_{t_1} \subset \mathcal{S}$. Intuitivamente, a curva dinâmica corresponde à trajetória de um ponto que se move sobre a superfície S_0 , a qual, por sua vez, se move em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1. Se $\xi^a(t)$ é uma curva em \mathbb{R}^2 , então $\mathbf{r}_\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ é uma curva dinâmica. Equivalentemente, se $\xi^a = \xi^a(t)$ é uma equação paramétrica de uma curva em $\mathbb{R}^3(\xi^1, \xi^2, t)$, então $\mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ é a curva dinâmica. Notemos que a cada curva em \mathbb{R}^2 define uma curva dinâmica em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2. Se $\mathbf{r}_\gamma(t)$ é uma curva dinâmica então $\tilde{\mathbf{r}}_\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_\gamma(-t)$ já não é. Se $\mathbf{r}_\gamma(t)$ é uma curva dinâmica então, por exemplo, $\tilde{\mathbf{r}}_\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_\gamma(2t)$ já não é.

Afirmção 2.1. Uma curva γ pode ser parametrizada de forma que ela se torne dinâmica.

Com efeito, seja $\mathbf{r}_\gamma(s)$ uma parametrização de γ , onde s é o parâmetro natural para fixar as ideias. Considere a correspondência $s \rightarrow t(s)$ dada por: $\mathbf{r}_\gamma(s) \in S_t$. Como γ cruza cada superfície somente em um ponto, $s_1 \neq s_2$ implica $t_1 \neq t_2$. Ou seja, a função $s \rightarrow t$ é invertível.

Se $\mathbf{r}_\gamma(s) \in S_s$ para cada s de um intervalo de \mathbb{R} , então temos que γ é uma curva dinâmica. Se não, podemos fazer o seguinte: resolveremos a equação $\mathbf{r}_\gamma(s) = \mathbf{r}(\xi^a, t)$ pondo $\xi^a = \xi^a(s), t = t(s)$. Como notamos, $t(s)$ é invertível, podemos escrever $s = s(t)$. Colocamos isso nas equações para ξ^a e t : $\xi^a = \xi^a(s(t)) \equiv \xi^a(t), t = t(s(t)) \equiv t$. Então $\mathbf{r}_{\tilde{\gamma}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ é a curva dinâmica pela construção e temos que $\mathbf{r}_{\tilde{\gamma}}(t(s)) = \mathbf{r}_\gamma(s)$. \square

Note que chegamos no seguinte resultado.

Afirmção 2.2. Uma curva dinâmica pode ser representada na forma

$$\mathbf{r}_\gamma(t) = \mathbf{r}(\xi^a(t), t). \quad (3.6)$$

Calcularemos o *vetor tangente* à curva dinâmica (3.6):

$$\frac{d\mathbf{r}_\gamma}{dt}(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi^b(t), t) \frac{d\xi^a}{dt}(t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi^b(t), t), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Como o vetor $\mathbf{r}'_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \neq 0$ é independente dos vetores $\mathbf{r}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}$, podemos concluir que o vetor tangente à curva dinâmica não é nulo: $\frac{d\mathbf{r}_\gamma}{dt}(t) \neq 0$.

O Exemplo 1 e a Afirmção 2.2 implicam uma correspondência bijetiva entre curvas dinâmicas em \mathbb{R}^3 e curvas parametrizadas em \mathbb{R}^2 .

Comentário 1. Fixando um ponto (ξ_0^1, ξ_0^2) em \mathbb{R}^2 obtemos um exemplo especial da curva dinâmica:

$$\mathbf{r}_{\gamma_{\xi_0}}(t) = \mathbf{r}(\xi_0^a, t). \quad (3.8)$$

Assim, entre as curvas dinâmicas tem-se curvas cujos representantes em \mathbb{R}^2 é um ponto. Na relatividade geral, tais curvas representam as linhas do mundo de uma partícula em repouso.

A curva (3.8) chamaremos de *curva degenerada*. No que segue, nos interessaremos por *curvas não degeneradas* (ou *regulares*), o que significa

$$\left(\frac{d\xi^1}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\xi^2}{dt}(t)\right)^2 \neq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

3.3 VETORES DINÂMICOS

Chamaremos o vetor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ num ponto $M \in \mathcal{S}$ por *vetor dinâmico* se ele é tangente à uma curva dinâmica pelo ponto M . Respectivamente, o *campo vetorial dinâmico* (por exemplo, ao longo de uma curva) é o campo composto dos vetores dinâmicos.

Seja $\mathbf{r}_\gamma(t)$ uma curva dinâmica com representante $\xi^a(t)$. Então temos a seguinte expressão para um vetor dinâmico:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}_\gamma}{dt}(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi^b(t), t) \frac{d\xi^a}{dt}(t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi^b(t), t) \equiv \xi^{a'} \mathbf{r}'_a + 1 \cdot \mathbf{r}'_t. \quad (3.10)$$

Ou seja, na base $\{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_t\}$ o vetor \mathbf{V} tem as coordenadas $(\xi^{1'}, \xi^{2'}, 1)$. Como o vetor $\mathbf{r}'_t \neq 0$ e, por (3.3), ele não pertence ao plano formado pelos \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 , temos que \mathbf{V} não fica no plano tangente à superfície $S_t \subset \mathcal{S}$.

Consideramos agora o seguinte vetor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ no ponto $M = \mathbf{r}(\xi_0^a, t_0)$:

$$\mathbf{V} = v^a \mathbf{r}'_a + 1 \cdot \mathbf{r}'_t, \quad (3.11)$$

onde v^a são os números reais dados. Este vetor é tangente à curva dinâmica $\mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ com representante $\xi^a(t) = \xi_0^a + v^a(t - t_0)$. Logo $\xi^{a'} = v^a$ e, assim, \mathbf{V} é o dinâmico.

Desta maneira, (3.11) define a forma geral de um vetor dinâmico o qual fica em uma correspondência bijetiva com os vetores $\frac{d\xi^a}{dt}$ de \mathbb{R}^2 .

Se o vetor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ é dado pelas suas coordenadas cartesianas V^1, V^2, V^3 , então podemos encontrar as coordenadas v^a como se segue:

$$v^a = (\mathbf{V}, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba} - (\mathbf{r}'_t, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba}, \quad (3.12)$$

onde \tilde{g}^{ba} é a matriz inversa para a métrica $g_{ab} = (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b)$ de S_t .

Em particular, a curva dinâmica degenerada $\mathbf{r}_{\gamma_{\xi_0}}(t) = \mathbf{r}(\xi_0^a, t)$ tem o vetor tangente $\frac{d\mathbf{r}_{\gamma_{\xi_0}}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi_0^a, t) = \mathbf{r}'_t$ o qual também não fica no plano tangente à S_t .

Chamaremos o vetor $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^3$ por *vetor especial* se ele é tangente à uma superfície $S_t \subset \mathcal{S}$.

Sejam M um ponto de \mathcal{S} e $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^3$ um vetor especial neste ponto. Seja $\mathbf{r}(\xi^a, t)$ o raio-vetor do ponto M . Então os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi^b, t) \equiv \mathbf{r}'_a(\xi^b, t)$ formam uma base adaptada com a S_t no ponto M . Pela definição, \mathbf{W} é uma combinação linear dos vetores \mathbf{r}'_a , ou seja,

$$\mathbf{W} = w^a \mathbf{r}'_a(\xi^b, t), \quad (3.13)$$

onde w^a são os números reais. Podemos encontrar a relação entre as coordenadas cartesianas W^i e w^a como se segue:

$$\begin{aligned} (\mathbf{W}, \mathbf{r}'_b) &= w^a \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^b} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = w^a \frac{\partial x^i}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} = W^i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b}, \\ (\mathbf{W}, \mathbf{r}'_b) &= w^a (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b) = w^a g_{ab} \end{aligned}$$

Logo temos a identidade:

$$w^a g_{ab} = W^i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} = (\mathbf{W}, \mathbf{r}'_b), \quad \text{donde } w^a = W^i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \tilde{g}^{ba} = (\mathbf{W}, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba}. \quad (3.14)$$

Notemos que vetores dinâmicos são os tangentes às curvas dinâmicas as quais têm curvas-representantes $\xi^a(t)$ em \mathbb{R}^2 . Vetores especiais (em particular, \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2) não têm esta propriedade. Observamos que os vetores dinâmicos dados na forma (3.11) têm a última

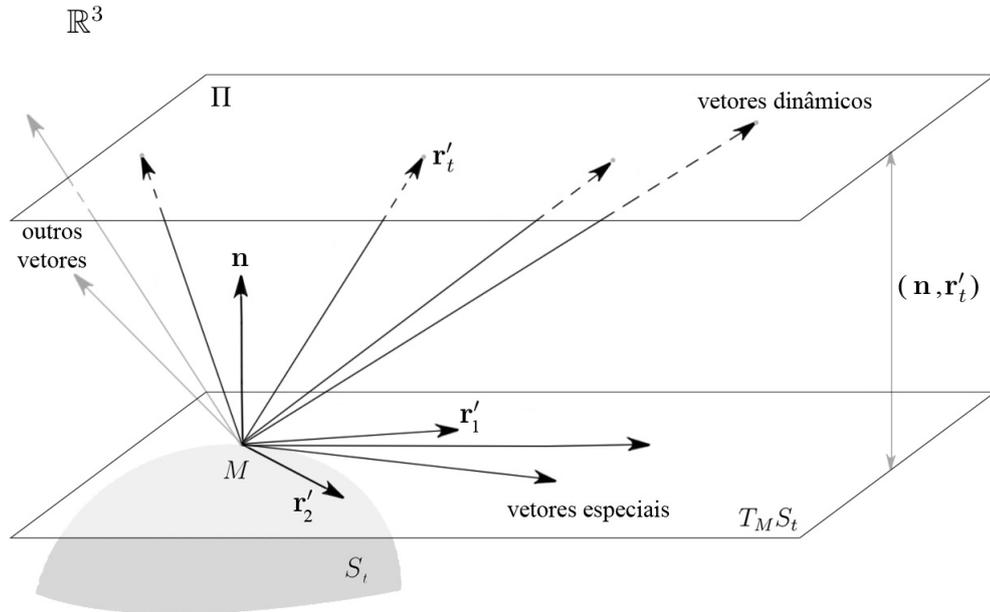


Figura 4 – Vetores de \mathbb{R}^3 na superfície dinâmica

coordenada igual a 1. Ou seja, os pontos finais destes vetores no ponto M ficam no plano Π paralelo ao $T_M(S_t)$ (veja a Figura 4). Considere o espaço de todos os vetores \mathbb{R}^3 em ponto $M = \mathbf{r}(\xi^a, t)$. Então há entre eles vetores especiais no plano $T_M(S_t)$, vetores dinâmicos tangentes às curvas dinâmicas e outros vetores que não são nem um nem outro.

Exemplo 1. \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 são os vetores especiais; \mathbf{r}'_t é o vetor dinâmico (vetor tangente a curva dinâmica degenerada).

Exemplo 2. Seja $\xi^a(t)$ uma curva em \mathbb{R}^2 . Então em \mathbb{R}^3 tem-se a curva $\mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ correspondente à $\xi^a(t)$. O campo dos vetores tangentes $\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi^b(t), t) \frac{d\xi^a}{dt}(t) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi^b(t), t)$ à $\mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ é um exemplo do campo vetorial dinâmico ao longo desta curva.

Obteremos um *campo especial* $\mathbf{W}(t)$ ao longo da $\mathbf{r}(\xi^a(t), t)$ se subtrairmos \mathbf{r}'_t de $\mathbf{V}(t)$:

$$\mathbf{W}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi^b(t), t) = \frac{d\xi^a}{dt}(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi^b(t), t). \quad (3.15)$$

3.4 DEFINIÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA SIMPLES

Para assegurar que na nossa construção possa aparecer a equação de transporte paralelo necessária, consideraremos, para iniciar, o caso particular a seguir.

A superfície dinâmica \mathcal{S} chamaremos por *simples* se $\mathbf{r}'_t \parallel \mathbf{n}$, ou seja, se em cada ponto de \mathcal{S} o vetor \mathbf{r}'_t é perpendicular à S_t .

Seja γ uma curva dinâmica regular sobre uma superfície dinâmica simples $\mathbf{r}(\xi^a, t)$. Como campo vetorial ao longo da γ escolhemos o campo especial $V_{M(\gamma)}$. Sejam P um ponto da curva γ correspondente ao valor t do parâmetro e Q um ponto correspondente ao valor $t + \Delta t$. Então denotaremos por \mathbf{V}_P e \mathbf{V}_Q os vetores tangentes à S_t e $S_{t+\Delta t}$, respectivamente, nestes pontos. Projetaremos ortogonalmente (usando regras de Euclides) o vetor \mathbf{V}_Q no plano $T_P(S_t)$ (Veja a Figura 5). Obtemos $\mathbf{V}_Q|_{pr}$. Repetiremos esta operação para os vetores dados em todos os pontos da curva γ entre os pontos P e Q . Deste jeito obtemos a projeção da curva γ no plano tangente $T_P(S_t)$ e o novo campo vetorial $\mathbf{V}_{pr}(t) = \mathbf{V}_{M(t)}|_{pr}$ construído ao longo desta projeção, tal que $\mathbf{V}_P|_{pr} = \mathbf{V}_P$.

Definição. Chamaremos *paralelo* o campo vetorial especial $\mathbf{V}_{M(\gamma)}$ ao longo da curva dinâmica γ se

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{M(t+\Delta t)}|_{pr} - \mathbf{V}_P}{\Delta t} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{pr}(t + \Delta t) - \mathbf{V}_{pr}(t)}{\Delta t} = 0. \quad (3.16)$$

3.5 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA SIMPLES

Consideramos uma curva dinâmica γ dada pela equação vetorial:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\xi^a(t), t). \quad (3.17)$$

Então

$\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi(t), t), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi(t), t) \right\}$ é a base do ponto P correspondente ao valor t do parâmetro, $\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\}$ é a base do ponto Q correspondente ao valor $t + \Delta t$ do parâmetro.

(3.18)

O campo especial ao longo da curva γ tem a forma:

$$\mathbf{V}(t) = v^a(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi(t), t). \quad (3.19)$$

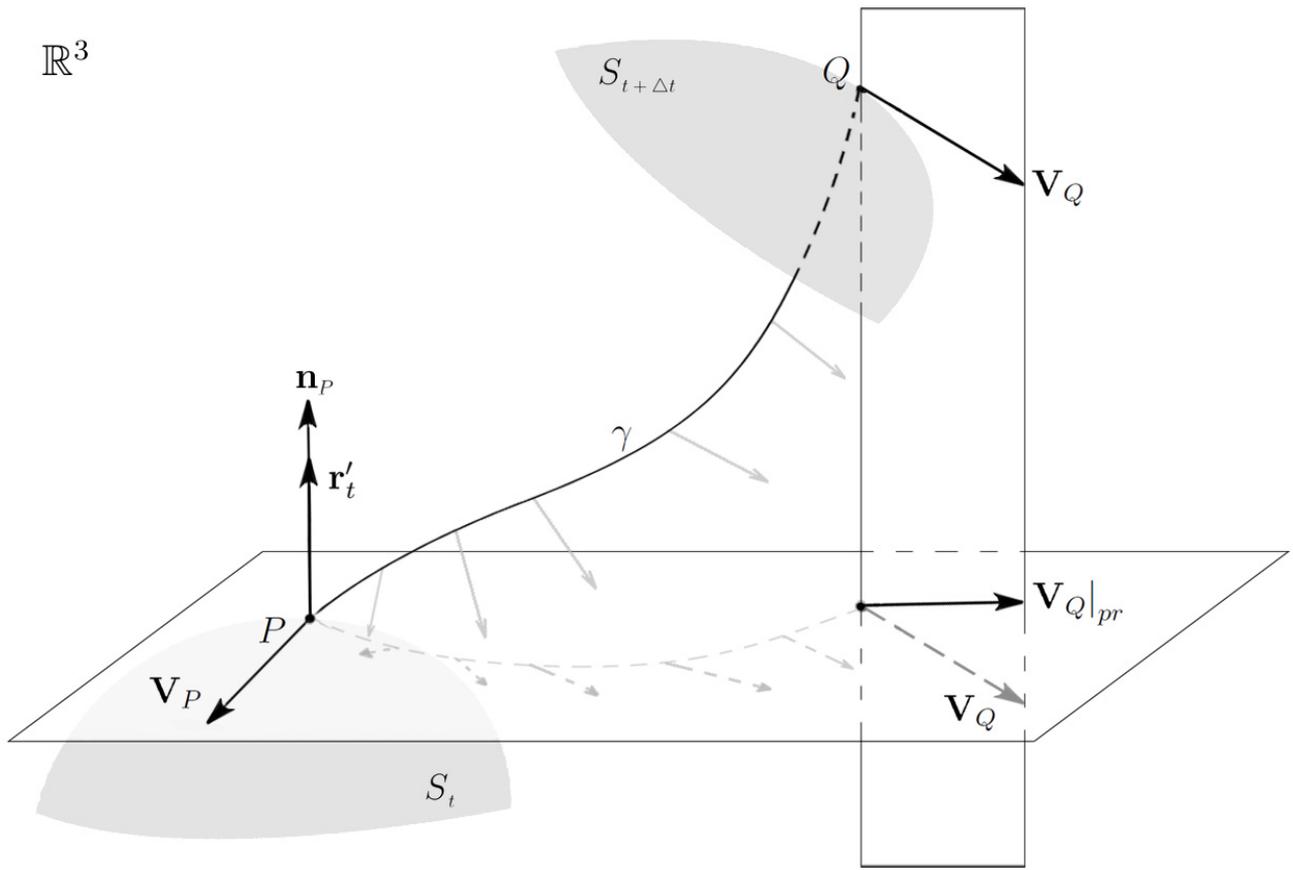


Figura 5 – Interpretação geométrica de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica simples

Em particular, no ponto P temos o vetor \mathbf{V}_P e no ponto Q temos o vetor \mathbf{V}_Q :

$$\mathbf{V}_P = v^a(t) \frac{\partial \mathbf{r}(\xi(t), t)}{\partial \xi^a}, \quad \mathbf{V}_Q = v^a(t + \Delta t) \frac{\partial \mathbf{r}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\partial \xi^a}. \quad (3.20)$$

Para projetar o vetor \mathbf{V}_Q no plano $T_P S_t$ tangente à S_t (e depois subtrair o vetor \mathbf{V}_P do \mathbf{V}_Q) escrevemos \mathbf{V}_Q na base do ponto P :

$$\mathbf{V}_Q = v_Q^a(t) \mathbf{r}'_a(\xi(t), t) + v_Q^n(t) \mathbf{n}(\xi(t), t). \quad (3.21)$$

Logo, $\mathbf{V}_Q|_{pr} = v_Q^a(t) \mathbf{r}'_a(\xi(t))$ é a projeção ortogonal do vetor \mathbf{V}_Q no plano $T_P S_t$.

Acharemos as coordenadas v_Q^a nesta base usando o produto escalar do \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_Q, \mathbf{r}'_b(\xi(t), t)) &= v_Q^a(t) (\mathbf{r}'_a(\xi(t), t), \mathbf{r}'_b(\xi(t), t)) + v_Q^n(t) (\mathbf{n}(\xi(t), t), \mathbf{r}'_b(\xi(t), t)) \\ &= v_Q^a(t) (\mathbf{r}'_a(\xi(t), t), \mathbf{r}'_b(\xi(t), t)) + 0 \\ &= v_Q^a(t) g^{ab}(\xi(t), t). \end{aligned}$$

Logo,

$$v_Q^a(t) = (\mathbf{V}_Q, \mathbf{r}'_b(\xi(t), t)) \tilde{g}^{ba}(\xi(t), t). \quad (3.22)$$

Analogamente,

$$v_Q^n(t) = \frac{(\mathbf{V}_Q, \mathbf{n}(\xi(t), t))}{(\mathbf{n}(\xi(t), t), \mathbf{n}(\xi(t), t))}.$$

De acordo com (3.20)

$$\begin{aligned} v_Q^a(t) &= (v^c(t + \Delta t) \mathbf{r}'_c(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t), \mathbf{r}'_b(\xi(t), t)) \tilde{g}^{ba}(\xi(t), t) \\ &= v^c(t + \Delta t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^b}(\xi(t), t) (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \tilde{g}^{ba}(\xi(t), t) \\ &= v^c(t + \Delta t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^b}(\xi(t), t) \delta^{ij} \tilde{g}^{ba}(\xi(t)) \\ &= v^c(t + \Delta t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b}(\xi(t), t) \tilde{g}^{ba}(\xi(t), t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$v^c(t + \Delta t) \stackrel{(2.2)}{=} v^c(t) + \frac{dv^c}{dt}(t) \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (3.24)$$

Seja $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} = f_c^i$. Logo,

$$f_c^i(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) \stackrel{(2.3)}{=} f_c^i(\xi(t), t) + \frac{\partial f_c^i}{\partial \xi^d}(\xi(t), t) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + \frac{\partial f_c^i}{\partial t}(\xi(t), t) \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t), t) + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c}(\xi(t), t) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \xi^c}(\xi(t), t) \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (3.26)$$

Assim,

$$\begin{aligned} v^c(t + \Delta t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t + \Delta t), t + \Delta t) &= \left[v^c(t) + \frac{dv^c}{dt}(t) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t), t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c}(\xi(t), t) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \xi^c}(\xi(t), t) \Delta t + O(\Delta t^2) \right] \\ &= v^c(t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t), t) + v^c(t) \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c}(\xi(t), t) \frac{d\xi^d}{dt}(t) \Delta t + \\ &\quad + v^c(t) \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \xi^c}(\xi(t), t) \Delta t + \frac{dv^c}{dt}(t) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c}(\xi(t), t) \Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Substituimos (3.27) na expressão (3.23). Como todas as funções agora dependem da

variável t , então a omitiremos:

$$\begin{aligned}
v_Q^a(t) &= \left(v^c \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} + v^c \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c} \frac{d\xi^c}{dt} \Delta t + v^c \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \xi^c} \Delta t + \frac{dv^c}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \tilde{g}^{ba} \\
&= \left(v^c \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} + v^c \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^d \partial \xi^c} \frac{d\xi^d}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \Delta t + v^c \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial \xi^c} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \Delta t + \frac{dv^c}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^c} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^b} \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \tilde{g}^{ba} \\
&= \left(v^c(\mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) + v^c(\partial_d \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \Delta t + \frac{dv^c}{dt}(\mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \Delta t + O(\Delta t^2) \right) \tilde{g}^{ba} \\
&= \left(v^c + \frac{dv^c}{dt} \Delta t \right) g_{cb} \tilde{g}^{ba} + v^c(\partial_d \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \frac{d\xi^d}{dt} \tilde{g}^{ba} \Delta t + v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba} \Delta t + O(\Delta t^2) \\
&\stackrel{(2.16)}{=} \left(v^c + \frac{dv^c}{dt} \Delta t \right) \delta_c^a + v^c \Gamma_{dc}^k g_{kb} \tilde{g}^{ba} \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba} \Delta t + O(\Delta t^2) \\
&= v^a + \frac{dv^a}{dt} \Delta t + v^c \Gamma_{dc}^k \delta_k^a \frac{d\xi^d}{dt} \Delta t + v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba} \Delta t + O(\Delta t^2) \\
&= v^a + \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} + v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba} \right) \Delta t + O(\Delta t^2).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Discutiremos o termo $v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba}$ na última expressão. Como nós escolhemos a superfície de jeito que $\mathbf{r}'_t \parallel \mathbf{n}$, então $(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_t) = 0$. Notemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi^c} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b} \right) &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial \xi^b} \right), \text{ ou seja,} \\
0 &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial \xi^b} \right), \text{ donde } \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial \xi^b} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \xi^c}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b} \right). \\
\frac{\partial}{\partial \xi^b} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c} \right) &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^b \partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial \xi^b} \right), \text{ ou seja,} \\
0 &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^b \partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial \xi^b} \right), \text{ donde } \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^c \partial \xi^b} \right) = - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^b \partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c} \right).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a identidade

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \xi^c} \right) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^b \partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c} \right).$$

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
v^c(\partial_t \mathbf{r}'_c, \mathbf{r}'_b) \tilde{g}^{ba} &= \frac{1}{2} v^c \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \xi^b}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \xi^c} \right) \right] \tilde{g}^{ba} \\
&= \frac{1}{2} v^c \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^c}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^b} \right) \right] \tilde{g}^{ba} \\
&= \frac{1}{2} v^c (\partial_t g_{cb}) \tilde{g}^{ba}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Colocaremos (3.29) em (3.28):

$$v_Q^a(t) = v^a + \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} + \frac{1}{2} v^c (\partial_t g_{cb}) \tilde{g}^{ba} \right) \Delta t + O(\Delta t^2). \tag{3.30}$$

Logo, substituindo (3.30) em (3.16) obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v^a + \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} + \frac{1}{2} v^c (\partial_t g_{cb}) \tilde{g}^{ba} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) - v^a}{\Delta t} &= 0, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} + \frac{1}{2} v^c (\partial_t g_{cb}) \tilde{g}^{ba} \right) \frac{\Delta t}{\Delta t} &= 0, \\ \frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a v^c \frac{d\xi^d}{dt} + \frac{1}{2} v^c (\partial_t g_{cb}) \tilde{g}^{ba} &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

ou seja,

$$Dv^a + \frac{1}{2} v^c (\partial_t g_{cb}) \tilde{g}^{ba} = 0.$$

As equações (3.31) representam *equações de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica simples*. Comparando com (1.2), concluímos que neste caso particular a nossa construção nos dá o termo extra que aparece na Relatividade Geral.

3.6 DETERMINAÇÃO DE DIREÇÕES HORIZONTAIS (PLANOS, VETORES E SUPERFÍCIES HORIZONTAIS) PARA UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA

Introduzimos novas notações: $t \equiv \xi^0$ e $\xi^\mu \equiv (\xi^0, \xi^a) = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$.

Vamos resumir as seções anteriores. Consideramos a superfície dinâmica \mathcal{S} , ou seja, a aplicação

$$\mathbf{r}: \mathbb{R}^3(\xi^\mu) \rightarrow \mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3); \quad \xi^\mu \mapsto \mathbf{r}(\xi^\mu). \quad (3.32)$$

Construímos a *base adaptada com a \mathcal{S}* de vetores tangentes às curvas coordenadas:

$$\mathbf{r}'_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\mu}, \quad \{\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2\}.$$

O *produto escalar* de dois vetores em $\mathbb{R}^3(x^1, x^2, x^3)$ no ponto $\mathbf{r}(\xi^\mu) \in \mathcal{S}$ define a métrica (a matriz 3×3) como se segue:

$$(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = (v^\mu \mathbf{r}'_\mu, w^\nu \mathbf{r}'_\nu) = (\mathbf{r}'_\mu, \mathbf{r}'_\nu) v^\mu w^\nu = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \quad (3.33)$$

$$\text{onde } g_{\mu\nu} = (\mathbf{r}'_\mu, \mathbf{r}'_\nu) = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} \\ g_{02} & g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} g_{00} & g_{0b} \\ g_{0a} & g_{ab} \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2$ formam uma base do espaço tangente à superfície S_{ξ^0} . Se \mathbf{V} e \mathbf{W} pertencem ao plano tangente $T(S_{\xi^0})$ então o produto escalar deles será

$$(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = g_{ab} v^a w^b, \quad a, b = 1, 2, \quad (3.34)$$

onde $g_{ab} = (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b)$ é a métrica (a matriz 2×2 que já vimos) da S_{ξ^0} .

Na próxima seção determinaremos transporte paralelo usando planos horizontais em vez de planos tangentes $T(S_{\xi^0})$. Vamos definir e discutir algumas propriedades destes planos.

O plano perpendicular ao \mathbf{r}'_0 é dito *plano de direções horizontais* e denotado por T_h . Os vetores deste plano chamaremos por *vetores horizontais* e denotaremos por \mathbf{V}_h . Fazendo a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i$ no plano T_h obteremos o vetor

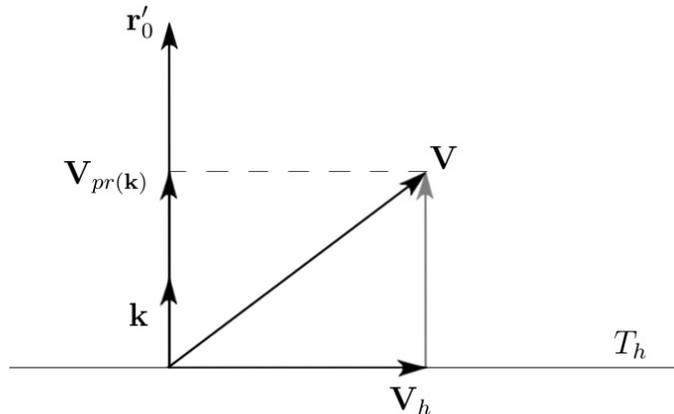


Figura 6 – Projeção do vetor \mathbf{V} no plano T_h

horizontal \mathbf{V}_h . De acordo com a Figura 6, o vetor unitário $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}'_0}{\sqrt{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_0)}}$, portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{pr(\mathbf{k})} &= (\mathbf{k}, \mathbf{V}) \cdot \mathbf{k} = \frac{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{V})}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\mathbf{r}'_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{V})}{g_{00}} \mathbf{r}'_0. \text{ Então} \\ \mathbf{V}_h &= \mathbf{V} - \mathbf{V}_{pr(\mathbf{k})} = \mathbf{V} - \frac{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{V})}{g_{00}} \mathbf{r}'_0 = V^i \mathbf{e}_i - \frac{1}{g_{00}} (r_0'^i V^j) (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \cdot r_0'^i \mathbf{e}_i = V^i \mathbf{e}_i - \frac{1}{g_{00}} r_0'^i r_0'^j V^j \mathbf{e}_i = \\ &= \left(\delta^{ij} - \frac{r_0'^i r_0'^j}{g_{00}} \right) V^j \mathbf{e}_i \equiv V_h^i \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Notaremos $\delta^{ij} - \frac{r_0'^i r_0'^j}{g_{00}}$ por N^{ij} . Assim temos

$$V_h^i = \left(\delta^{ij} - \frac{r_0'^i r_0'^j}{g_{00}} \right) V^j \equiv N^{ij} V^j, \quad (3.35)$$

onde $r_0'^i$ são as coordenadas cartesianas do \mathbf{r}'_0 , ou seja, $\mathbf{r}'_0 = r_0'^i \mathbf{e}_i$.

A matriz 3×3 N^{ij} representa o *projedor* no plano horizontal. Ele tem as seguintes propriedades:

$$N^2 = N, \quad N^{ij} r_0'^j = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
N^{ij}N^{jk} &= \left(\delta^{ij} - \frac{r_0^i r_0'^j}{g_{00}}\right) \left(\delta^{jk} - \frac{r_0^j r_0'^k}{g_{00}}\right) = \\
&= \delta^{ij} \delta^{jk} - \frac{\delta^{ij} r_0^j r_0'^k}{g_{00}} - \frac{r_0^i r_0'^j \delta^{jk}}{g_{00}} + \frac{r_0^i r_0'^j r_0'^j r_0'^k}{g_{00}^2} = \\
&= \delta^{ik} - \frac{r_0^i r_0'^k}{g_{00}} - \frac{r_0^i r_0'^k}{g_{00}} + \frac{r_0^i r_0'^k g_{00}}{g_{00}^2} = \\
&= \delta^{ik} - \frac{r_0^i r_0'^k}{g_{00}} = N^{ik}; \\
N^{ij} r_0'^j &= \left(\delta^{ij} - \frac{r_0^i r_0'^j}{g_{00}}\right) r_0'^j = \delta^{ij} r_0'^j - \frac{r_0^i r_0'^j}{g_{00}} r_0'^j = r_0'^i - \frac{r_0^i g_{00}}{g_{00}} = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Introduzimos um projetor na direção do vetor \mathbf{r}'_0 : $N_{\parallel}^{ij} = \frac{r_0^i r_0'^j}{g_{00}}$. Então

$$\delta^{ij} = N^{ij} + N_{\parallel}^{ij}. \quad (3.36)$$

Assim, $\mathbf{V}_{pr(\mathbf{k})} \equiv \mathbf{V}_{\parallel} = N_{\parallel}^{ij} V^j \mathbf{e}_i$. Aplicando (3.36) para qualquer vetor \mathbf{V} separamo-lo em partes horizontal e vertical:

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i = (\delta^{ij} V^j) \mathbf{e}_i = (N^{ij} + N_{\parallel}^{ij}) V^j \mathbf{e}_i = (N^{ij} V^j + N_{\parallel}^{ij} V^j) \mathbf{e}_i = (V_h^i + V_{\parallel}^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{V}_h + \mathbf{V}_{\parallel}.$$

Em particular, fazendo a projeção dos vetores \mathbf{r}'_a da base do plano tangente $T(S_{\xi^0})$ sobre o plano T_h , obteremos os vetores horizontais \mathbf{h}_a (Veja a Figura 7):

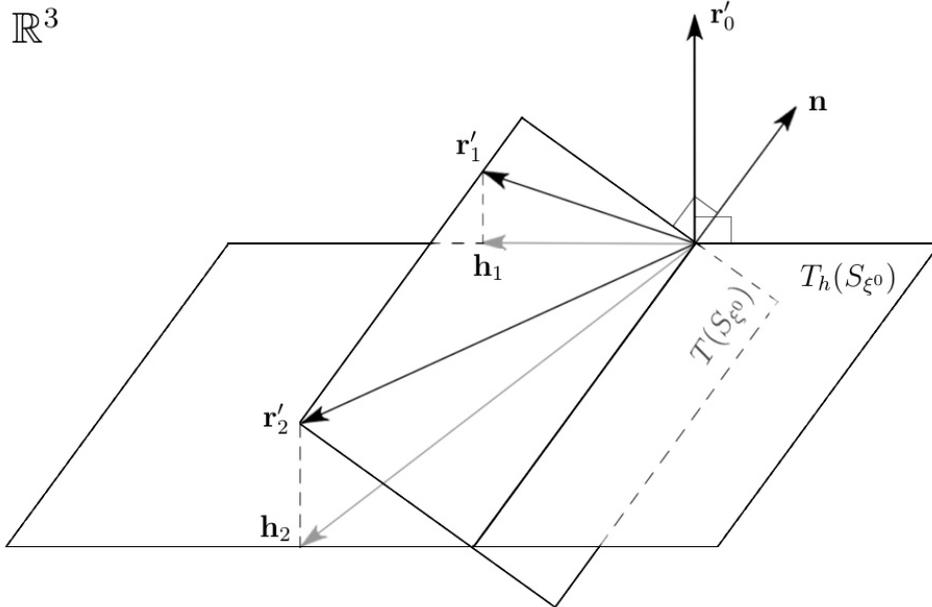


Figura 7 – Projeção dos vetores \mathbf{r}'_a no plano T_h

$$\mathbf{h}_a = \mathbf{r}'_a - \frac{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_a)}{g_{00}} \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'_a - \frac{g_{0a}}{g_{00}} \mathbf{r}'_0 \equiv (N^{ij} r_a'^j) \mathbf{e}_i, \quad (3.37)$$

donde podemos afirmar que os vetores \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 formam uma base do plano T_h ¹. Assim, $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{r}'_0\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 adaptada com a *estrutura de direções horizontais* (ou seja, com os planos horizontais) na superfície dinâmica \mathcal{S} .

Calcularemos o produto escalar dos vetores \mathbf{h}_a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b) &= \left(\mathbf{r}'_a - \frac{g_{0a}}{g_{00}}\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_b - \frac{g_{0b}}{g_{00}}\mathbf{r}'_0\right) = (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b) - \frac{g_{0b}}{g_{00}}(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_0) - \frac{g_{0a}}{g_{00}}(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_b) + \frac{g_{0a}}{g_{00}}\frac{g_{0b}}{g_{00}}(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}'_0) = \\ &= g_{ab} - \frac{g_{0b}}{g_{00}}g_{0a} - \frac{g_{0a}}{g_{00}}g_{0b} + \frac{g_{0a}}{g_{00}}g_{0b} = g_{ab} - \frac{g_{0b}g_{0a}}{g_{00}}. \end{aligned}$$

Notaremos $(\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b)$ por γ_{ab} :

$$(\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b) = g_{ab} - \frac{g_{0b}g_{0a}}{g_{00}} \equiv \gamma_{ab} = (N\mathbf{r}'_a, N\mathbf{r}'_b). \quad (3.38)$$

Notemos que a *métrica* γ_{ab} coincide com a métrica (1.5) da Introdução. A geometria riemanniana na superfície é gerada (induzida) pela geometria euclidiana do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 no qual esta superfície é contida. Da equação (3.38) podemos notar que, de forma semelhante, a geometria na superfície dinâmica \mathcal{S} é gerada (induzida) pela geometria riemanniana das superfícies S_t .

Agora, se $\mathbf{V}_h = v^a\mathbf{h}_a$ e $\mathbf{W}_h = w^a\mathbf{h}_a$ são dois vetores do T_h , então seu produto escalar pode ser calculado usando a métrica γ_{ab} como se segue:

$$(\mathbf{V}_h, \mathbf{W}_h) = \gamma_{ab}v^aw^b. \quad (3.39)$$

Seja $\mathbf{V} = v^a\mathbf{r}'_a + v^0\mathbf{r}'_0$ um vetor na base $\{\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_0\}$. Encontraremos suas coordenadas na base $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{r}'_0\}$.

Com efeito, de (3.37) temos que $\mathbf{r}'_a = \mathbf{h}_a + \frac{g_{0a}}{g_{00}}\mathbf{r}'_0$. Então

$$\mathbf{V} = v^a\left(\mathbf{h}_a + \frac{g_{0a}}{g_{00}}\mathbf{r}'_0\right) + v^0\mathbf{r}'_0 = v^a\mathbf{h}_a + \left(v^0 + v^a\frac{g_{0a}}{g_{00}}\right)\mathbf{r}'_0. \quad (3.40)$$

Podemos comparar (3.40) com (1.4).

Seja $\mathbf{V} = v^a\mathbf{r}'_a + v^0\mathbf{r}'_0$ um vetor horizontal. Encontraremos a relação entre suas coordenadas v^a e v^0 . De (3.40) temos $v^0 = -v^a\frac{g_{0a}}{g_{00}}$.

Sabemos que os campos vetoriais \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 são tangentes em cada ponto às curvas coordenadas $\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^0)$ e $\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^0)$ respectivamente sobre a superfície S_{ξ^0} : $\mathbf{r}'_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^1}$ e $\mathbf{r}'_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^2}$. Vamos buscar as coordenadas $\tilde{\xi}^\mu = (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2, \tilde{\xi}^0)$ as quais tem a mesma propriedade em relação aos campos vetoriais horizontais \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 .

¹ Senão, acontecerá que $h_1 \parallel h_2$. Isto implica que $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ e \mathbf{r}_0 ficarão no mesmo plano, o que contradiz o fato de que estes vetores formam uma base.

Seja a relação entre ξ^μ e $\tilde{\xi}^\mu$ dada pelas funções $\xi^\mu(\tilde{\xi}^\mu)$. Então podemos encontrá-las da seguinte condição:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\xi}^1}(\xi^\mu(\tilde{\xi}^\mu)) = \mathbf{h}_1(\xi^\mu(\tilde{\xi}^\mu)) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tilde{\xi}^2}(\xi^\mu(\tilde{\xi}^\mu)) = \mathbf{h}_2(\xi^\mu(\tilde{\xi}^\mu)) \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} \mathbf{r}'_a \frac{d\xi^a}{d\tilde{\xi}^1} + \mathbf{r}'_0 \frac{d\xi^0}{d\tilde{\xi}^1} \stackrel{(3.37)}{=} \mathbf{r}'_1 - \frac{g_{01}}{g_{00}} \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}'_a \frac{d\xi^a}{d\tilde{\xi}^2} + \mathbf{r}'_0 \frac{d\xi^0}{d\tilde{\xi}^2} = \mathbf{r}'_2 - \frac{g_{02}}{g_{00}} \mathbf{r}'_0. \end{cases}$$

De forma semelhante à Introdução (veja (1.4)-(1.6)) escolhemos $\xi^1(\tilde{\xi}^\mu) = \tilde{\xi}^1$, $\xi^2(\tilde{\xi}^\mu) = \tilde{\xi}^2$. Então vamos buscar $\xi^0(\xi^1, \xi^2, \tilde{\xi}^0)$ a partir do sistema de equações:

$$\frac{\partial \xi^0}{\partial \xi^a}(\xi^1, \xi^2, \tilde{\xi}^0) = \frac{g_{0a}}{g_{00}}. \quad (3.41)$$

A condição necessária e suficiente para a existência de solução é

$$\partial_1 \frac{g_{02}}{g_{00}} = \partial_2 \frac{g_{01}}{g_{00}}. \quad (3.42)$$

Assumimos que a aplicação (3.32) implica a métrica com estas condições. Desta maneira, fazendo a substituição

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^0(\xi^a, \tilde{\xi}^0 \equiv t) \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

onde ξ^0 satisfaz (3.41), nós vamos trabalhar em novas coordenadas $\tilde{\xi}^\mu = (\xi^1, \xi^2, t)$. Para estas coordenadas os vetores $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ são tangentes às curvas coordenadas: $\mathbf{h}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a}(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t))$. Notemos também que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t)) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^0} \frac{\partial \xi^0}{\partial t} = \mathbf{r}'_0 \frac{\partial \xi^0}{\partial t}$ é o vetor na direção do \mathbf{r}'_0 . Denotamo-lo por \mathbf{h}_t . Então tem-se $\mathbf{h}_t \parallel \mathbf{r}'_0$. Logo, podemos usar a base $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t\}$ em vez da base $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{r}'_0\}$. Em particular, $\mathbf{h}_a \perp \mathbf{h}_t$, ou seja, $(\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t) = 0$.

Em novas coordenadas, a superfície dinâmica é descrita pela função $\mathbf{r}(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t))$. Fixando $t = t_0$, obtemos a superfície $\mathbf{r}(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t_0))$ em \mathbb{R}^3 perpendicular ao campo vetorial \mathbf{r}'_0 (ou \mathbf{h}_t). Chamaremos esta superfície por *superfície horizontal* e denotaremos por $S_{h_{t_0}}$.

Deste jeito, podemos afirmar que a geometria riemanniana na S_{ξ^0} com a métrica $g_{ab} = (\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_b)$ produz a geometria riemanniana com a métrica $\gamma_{ab} = (\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b)$ sobre a superfície horizontal $S_{h_{t_0}}$ e seus planos horizontais T_h .

Na teoria da relatividade geral, S_{h_t} é uma superfície dos eventos simultâneos do ponto de vista de um observador que decidiu usar as coordenadas ξ^μ .

Resumindo, na superfície dinâmica $\mathbf{r}(\xi^a, \xi^0)$ escolhemos como direções horizontais os planos T_h ortogonais ao vetor \mathbf{r}'_0 . Para a superfície com métrica (3.42) existe um sistema de coordenadas (ξ^a, t) , a saber, $(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t))$, onde ξ^0 satisfaz a (3.41) tal que os vetores horizontais \mathbf{h}_a são tangentes às curvas coordenadas:

$$\mathbf{h}_a = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^a} \equiv \partial_a \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{h}_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^0} \frac{\partial \xi^0}{\partial t} \equiv \partial_t \mathbf{r} \perp \mathbf{h}_a, \quad (3.44)$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t))$ é uma parametrização que define \mathcal{S} em novas coordenadas. Pela construção temos as seguintes propriedades:

$$(\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b) = \gamma_{ab}, \quad (\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t) = 0, \quad (3.45)$$

$$\partial_b \mathbf{h}_a = \partial_a \mathbf{h}_b, \quad \partial_a \mathbf{h}_t = \partial_t \mathbf{h}_a. \quad (3.46)$$

Notemos que as propriedades (3.46) junto com $(\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t) = 0$ são necessárias para escrever derivadas dos vetores da base na equação de transporte paralelo em termos dos símbolos de Christoffel. Por esta razão, nós precisamos fazer esta passagem para as coordenadas novas.

3.7 DEFINIÇÃO DE CAMPO VETORIAL PARALELO (TRANSPORTE PARALELO) SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA

Definimos transporte paralelo usando as direções horizontais descritas na seção anterior. Sejam γ uma curva dinâmica regular sobre uma superfície dinâmica $\mathbf{r}(\xi^a, \xi^0)$ e \mathbf{V} um campo vetorial arbitrário de \mathbb{R}^3 ao longo da γ . Fazendo a projeção ortogonal do campo \mathbf{V} em cada ponto da curva γ sobre o plano horizontal T_h obteremos o campo horizontal \mathbf{V}_h ao longo da γ . Consideramos dois pontos $P(\xi^0)$ e $Q(\xi^0 + \Delta\xi^0)$ da curva γ . Projetando o vetor $\mathbf{V}_{hQ} \in T_h(Q)$ sobre o plano horizontal $T_h(P)$ do ponto P obtemos o vetor $\mathbf{V}_{hQ}|_{pr}$. Veja a Figura 8.

Definição. Chamaremos *paralelo* o campo vetorial \mathbf{V} ao longo da curva dinâmica γ se

$$\lim_{\Delta\xi^0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_{hQ}|_{pr}(\xi^0 + \Delta\xi^0) - \mathbf{V}_{hP}(\xi^0)}{\Delta\xi^0} = 0. \quad (3.47)$$

Comentário. A equação de transporte paralelo (3.31) (que obteremos em seguida no caso geral) não muda sua forma (ou seja, covariante) utilizando transformações bidimensionais de coordenadas $\xi^a \rightarrow \tilde{\xi}^a = \tilde{\xi}^a(\xi^b)$. Porém, usando transformações tridimensionais $\xi^\mu \rightarrow \tilde{\xi}^\mu = \tilde{\xi}^\mu(\xi^\nu)$, esta equação não será covariante. Notemos que as bases $\{\mathbf{r}'_a, \mathbf{n}\}$, $\{\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_0\}$ e $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{r}'_0 \approx \mathbf{h}_t\}$ são interligadas por transformações tridimensionais. Portanto a equação de transporte paralelo nestas bases terá formas diferentes. A forma necessária da equação de transporte paralelo (ou seja, (3.31)) aparecerá exatamente na base $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t\}$. Em outras coordenadas (ou seja, nas componentes do $\mathbf{V} = v^a \mathbf{r}'_a + v^n \mathbf{n}$ ou $\mathbf{V} = \tilde{v}^a \mathbf{r}'_a + v^0 \mathbf{r}'_0$) esta equação terá a forma mais complexa pois as derivadas da métrica serão expressadas através de $\Gamma_{ab}^c(\gamma)$, tensor de torção T_{ab}^c e a segunda forma fundamental. Por exemplo, se trabalhamos com a base $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{r}'_0\}$ com coordenadas (ξ^a, ξ^0) então $\partial_a \mathbf{h}_b$ não será simétrico: $\partial_a \mathbf{h}_b = \Gamma_{ab}^c \mathbf{h}_c + T_{ab}^c \mathbf{h}_c + N_{ab} \mathbf{r}'_0$, onde Γ_{ab}^c é simétrico e T_{ab}^c antisimétrico.

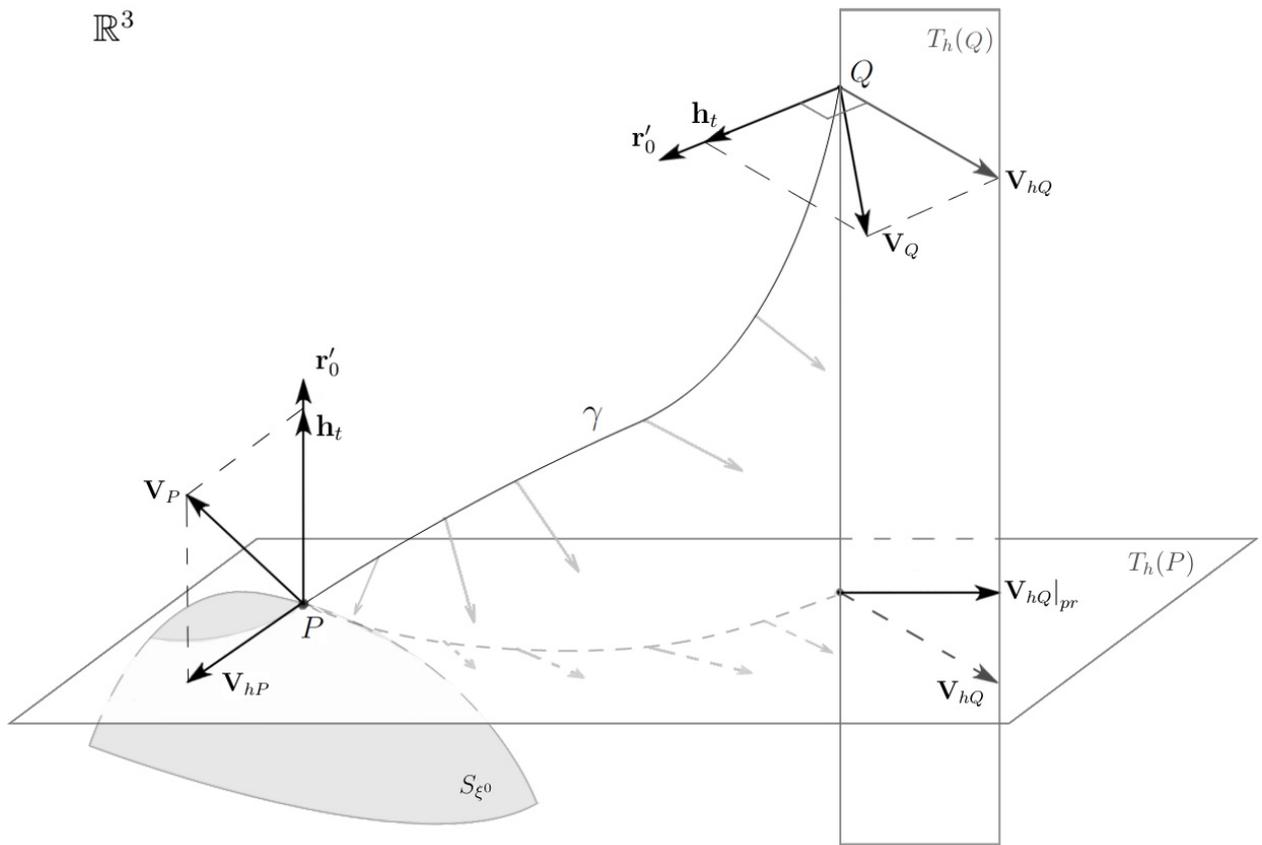


Figura 8 – Interpretação geométrica de transporte paralelo sobre uma superfície dinâmica

3.8 EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARALELO SOBRE UMA SUPERFÍCIE DINÂMICA

Escolhemos em \mathbb{R}^3 um campo vetorial \mathbf{V} ao longo da curva dinâmica γ . Analisaremos o transporte paralelo sobre a superfície dinâmica $\mathbf{r}(\xi^a, t) \equiv \mathbf{r}(\xi^a, \xi^0(\xi^a, t))$, ou seja, em coordenadas (3.43). Nestas coordenadas a curva dinâmica será dada como $\mathbf{r}(\xi^a(t), t)$, além disso, $\mathbf{r}'_a = \mathbf{h}_a \perp \mathbf{r}'_t = \mathbf{h}_t$. Os vetores do campo em pontos $P(t)$ e $Q(t + \Delta t)$ serão:

$$\mathbf{V}_P = v^a(t)\mathbf{h}_a(\xi^b(t), t) + v^t(t)\mathbf{h}_t(\xi^b(t), t),$$

$$\mathbf{V}_Q = v^a(t + \Delta t)\mathbf{h}_a(\xi^b(t + \Delta t), t + \Delta t) + v^t(t + \Delta t)\mathbf{h}_t(\xi^b(t + \Delta t), t + \Delta t).$$

Escolhemos a parte horizontal (veja a Figura 8):

$$\mathbf{V}_{hP} = v^a(t)\mathbf{h}_a(\xi^b(t), t), \quad \mathbf{V}_{hQ} = v^a(t + \Delta t)\mathbf{h}_a(\xi^b(t + \Delta t), t + \Delta t).$$

Projetaremos \mathbf{V}_{hQ} no plano horizontal do ponto P , ou seja, representaremos na forma seguinte:

$$\mathbf{V}_{hQ} = v^a_Q(t)\mathbf{h}_a(\xi^b(t), t) + v^t_Q(t)\mathbf{h}_t(\xi^b(t), t).$$

Os cálculos posteriores, uma vez que acontecem (3.44)-(3.46), coincidem com os da seção 3.5, onde substituímos $(\mathbf{r}'_a, \mathbf{r}'_t) \rightarrow (\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t)$ e $g_{ab} \rightarrow \gamma_{ab}$ e construímos os símbolos

de Christoffel Γ_{bc}^a usando a métrica γ_{ab} . Portanto, obtemos v_Q^a na forma

$$v_Q^a(t) = \left(\mathbf{V}_{hQ}, \mathbf{h}_b(\xi^c(t), t) \right) \tilde{\gamma}^{ba}(\xi^c(t), t).$$

Substituindo na (3.47), obtemos a equação de transporte paralelo:

$$\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{dc}^a(\gamma) \frac{d\xi^d}{dt} v^c + \frac{1}{2} v^c (\partial_t \gamma_{cb}) \tilde{\gamma}^{ba} = 0, \quad (3.48)$$

ou seja,

$$D(\gamma)v^a + \frac{1}{2} v^c (\partial_t \gamma_{cb}) \tilde{\gamma}^{ba} = 0.$$

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A aceleração compatível com os princípios da Relatividade Geral (RG) é determinada usando várias fases as quais nós discutimos na Introdução.

Mostramos que na Geometria Diferencial (GD) da superfície dinâmica em \mathbb{R}^3 aparecem os análogos geométricos de todas estas fases. Comparando a Introdução com as seções 3.6 - 3.8, estas fases podem ser enumeradas como se segue:

1. Na RG, nós trocamos as coordenadas iniciais x^μ pelas coordenadas de laboratório (as equações (1.4) e (1.5)).

Na GD, esta troca corresponde à substituição da base $\mathbf{r}'_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\mu}$ adaptada com a estrutura de superfícies S_{ξ_0} pela base $\{\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_t\}$ adaptada com a estrutura dos planos horizontais T_h (as fórmulas (3.37),(3.40),(3.41) e (3.43)).

2. Na RG, aparece a métrica $\gamma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ sobre a superfície de eventos simultâneos (a fórmula (1.5)).

Na GD, para esta métrica, corresponde a métrica $\gamma_{ab}(\xi^a, t)$ sobre os planos horizontais T_h , a equação (3.38).

3. Na RG, obtemos a equação de transporte paralelo (1.19).

Na GD, para esta equação, corresponde a equação (3.48).

A análise detalhada destas correspondências é uma próxima etapa necessária para trabalhos futuros.

Concluindo, podemos listar brevemente as possíveis direções para a continuação deste trabalho:

1. Como os campos vetoriais (1.6) e (1.7) formam *non coordinate basis*, seria interessante encontrar a equação de transporte paralelo sobre uma superfície (Seção 2.3.2.4) nesta base.
2. Como generalizar nosso procedimento para o caso geral, ou seja, para uma superfície dinâmica sem a restrição (3.42)?
3. É necessário definir o conceito de comprimento da curva (e a distância entre pontos) sobre uma superfície dinâmica. A definição deve ser tal que a distância entre os pontos de uma curva dinâmica degenerada será nula.
4. Seria interessante testar a covariância do formalismo. Suponhamos que, usando a coordenada ξ^μ , verificamos que o campo vetorial dado \mathbf{V} é paralelo. Será que

este campo é paralelo se nós fizermos todos os cálculos utilizando algumas outras coordenadas ξ'^{μ} ?

5. Já mencionamos na seção 3.1 que, localmente, \mathcal{S} é um exemplo de um fibrado. Portanto, seria interessante reformular todo o trabalho em termos da teoria das conexões num espaço fibrado.
6. Noções básicas de Relatividade Especial e Relatividade Geral foram formuladas antes da descoberta do spin das partículas elementares. Então elas descrevem as propriedades de espaço-tempo como elas são vistas por partículas de teste sem spin. Seria interessante ver se estas noções permanecem ou devem ser modificadas se a partícula sem spin fosse substituída por uma partícula mais realística, ou seja, com spin.

REFERÊNCIAS

- [1] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology*. Willey, New-York, NY, 1972.
- [2] DERIGLAZOV A. A. *Classical Mechanics. Hamiltonian and Lagrangian Formalism*. Springer-Verlag, 2010.
- [3] DERIGLAZOV A. A. ; GUZMÁN R. W. *World-line geometry probed by fast spinning particle*. arXiv:1409.4756, (Modern Physics Letters A 2015 - aceito).
- [4] LANDAU L. D.; LIFSHITZ E. M., *Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics, V. 2*. Pergamon Press, third ed., 2011.
- [5] SCHUTZ B., *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1999.
- [6] TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. São Paulo: Blucher, 2^a ed., 2012.
- [7] LIMA, E. L. *Curso de análise volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 11.ed., 2009.
- [8] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- [9] CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [10] SHARIPOV, R. A. *Course of differential geometry: the textbook*. Ufa: Publ. of Bashkir State University, 1996.
- [11] DOERING C. I.; LOPES A.O. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [12] FORGER M.; ANTONELI JR. F. *Fibrados, Conexões e Classes Características*. São Paulo: 2011.
- [13] KOCHIN N.E. *Cálculo vetorial e análise tensorial. (em russo)* Moscou: Nauka, 1965.
- [14] RASHEVSKY P.K. *Curso de Geometria Diferencial. (em russo)* Moscou, 1950.