Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Jorge Gerardo Bellido Tohalino

RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE UMA CLASSE DE SISTEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO EXPOENTES CRÍTICOS DE SOBOLEV

Juiz de Fora

2018

Jorge Gerardo Bellido Tohalino

RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE UMA CLASSE DE SISTEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO EXPOENTES CRÍTICOS DE SOBOLEV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Tohalino Bellido, Jorge Gerardo.
RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE UMA CLASSE DE SISTEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO EXPOENTES CRÍTICOS DE SOBOLEV / Jorge Gerardo Bellido Tohalino. – 2018.
92 f. : il.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Ecuações diferenciais. 2.Expoente Crítico. 3. Problema elíptico. I. Pereira, Fábio Rodrigues orient. II. Título.

Jorge Gerardo Bellido Tohalino

RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE UMA CLASSE DE SISTEMA ELÍPTICO ENVOLVENDO EXPOENTES CRÍTICOS DE SOBOLEV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eder Marinho Martins
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedico este trabalho a minha mãe, pois ela é minha maior motivação e é aquele que dá direção ao meu caminho.

AGRADECIMENTOS

A minha família, em especial minha mãe Mercedes Tohalino Quispe.

Ao meu orientador professor, Dr. Fábio Rodrigues Pereira, por dedicar seu tempo, acreditar em mim e ter paciência para me orientar na realização deste trabalho.

À coordenação do Mestrado em Matemática da UFJF juntamente com todos os professores do programa.

Aos meus amigos de mestrado, pelas proveitosas discussões e pela ótima companhia.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

“ A verdade não é Patrimônio de ninguém ”

Juan José Benítes.

RESUMO

Neste trabalho , nós estudamos resultados de existência e não-existência de soluções positivas do seguinte sistema de equações elípticas, que envolve expoente crítico de Sobolev perturbado por um termo fracamente acoplado.

$$\begin{cases} -\Delta u = (\alpha+1)u^{\alpha}v^{\beta+1} + \mu(\alpha^{'}+1)u^{\alpha^{'}}v^{\beta^{'}+1} \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta u = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^{\beta} + \mu(\beta^{'}+1)u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}} \quad \text{em } \Omega, \\ u > 0, \;\; v > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\partial\Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, α, β, são constantes positivas e $\alpha^{'}, \beta^{'}$ são constantes não negativas tais que $\alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$ e $0 \leq \alpha^{'} + \beta^{'} < \frac{4}{N-2}$.

Para o primeiro e segundo resultado precisaremos do Teorema do Passo da Montanha. Finalmente para o terceiro resultado precisaremos da Identidade do Pohozaev.

Palavras-chave: Sistema elíptico; Expoente crítico de Sobolev; Método variacional; Teorema do Passo da Montanha.

ABSTRACT

In this work, we study results of existence and non-existence of nontrivial positive solutions of the following elliptic equations system, which involves a critical exponent of Sobolev perturbed by a weakly coupled term.

$$\begin{cases} -\Delta u = (\alpha+1)u^{\alpha}v^{\beta+1} + \mu(\alpha^{'}+1)u^{\alpha^{'}}v^{\beta^{'}+1} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta u = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^{\beta} + \mu(\beta^{'}+1)u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}} & \text{in } \Omega, \\ u > 0, \quad v > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ is a limited domain with regular boundary, $\partial\Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, α, β, are positive constants and $\alpha^{'}, \beta^{'}$ are non-negative constants such that $\alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$ and $0 \leq \alpha^{'} + \beta^{'} < \frac{4}{N-2}$.

For the first and second result we will need the Mountain step theorem.
Finally for the third result we will need the identity of the Pohozaev.

Key-words: Elliptical system; Critical Sobolev exponent; Variational method; Moutain pass theorem

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	subconjunto aberto, conexo e limitado.
$\partial\Omega$	fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	é o fecho de Ω.
A^c	o complementar do conjunto A.
$med\,(A)$	é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$
$B_R(x_0)$	Bola de raio R centrada no ponto x_0.
∇u	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$supp\, f$	suporte da função f.
$D^\alpha u$	$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
$C(\Omega)$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em Ω.
$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\lVert . \rVert_0$	norma definida em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	espaço de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em Ω.
$C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\lVert . \rVert_{C^1}$	norma definida em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
L^∞	espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ onde $\sup_{x\in\Omega} \lvert u(x)\rvert < \infty$ com norma $$\lVert u \rVert_\infty = \inf\{C > 0 : \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev

$H^k(\Omega)$ espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

H_0^1 fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$ com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por $\|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

L^p espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty.$$

$U \hookrightarrow V$ imersão contínua entre os espaços U e V.

$p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

E' espaço dual topológico de E.

$\langle .,. \rangle_E$ produto interno definido em E.

$\rightarrow$ convergência forte.

$\rightharpoonup$ convergência fraca.

q.t.p. quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).

$u^+ = max\{u, 0\}$ parte positiva de u.

$u^- = max\{-u, 0\}$ parte negativa de u.

$f = O(g)$ quando $x \to x_0$, significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, $\forall\, x$ suficientemente próximo de x_0.

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$, significa que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Está dissertação tem como objetivo apresentar os resultados de Mohamed Bouchekif e Yasmina Nasri [6], os quais serão estudados ao longo deste trabalho. Estudamos a existência e não-existência de solução para o seguinte sistema de equações elípticas.

$$\begin{cases} -\Delta u = (\alpha+1)u^{\alpha}v^{\beta+1} + \mu(\alpha^{'}+1)u^{\alpha^{'}}v^{\beta^{'}+1} \quad \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^{\beta} + \mu(\beta^{'}+1)u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}} \quad \text{em } \Omega, \\ u > 0, \quad v > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

en que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$, regular, $\mu \in \mathbb{R}$, α, β, são constantes positivas e $\alpha^{'}, \beta^{'}$ são constantes não-negativas tais que $\alpha+\beta = \frac{4}{N-2}$ e $0 \leq \alpha^{'} + \beta^{'} < \frac{4}{N-2}$.
Mohamed Bouchekif e Yasmina Nasri, estenderam para sistemas os resultados do caso escalar crítico

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \mu u^q \quad \text{em } \Omega, \\ u > 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

en que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, $p = \frac{N+2}{N-2}$, $q = 1$ e $\lambda_1 > 0$ denota o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condições de fronteira homogêneas de Dirichlet.
No famoso artigo de Brézis e Nirenberg em 1983, os autores demonstraram que:
(1) se $N \geq 4$, então para qualquer $\mu \in (0, \lambda_1)$, existe uma solução de (1.2),
(2) se $N = 3$, existe $\mu^* \in (0, \lambda_1)$, tal que para qualquer $\mu \in (\mu^*, \lambda_1)$, o problema (1.2) admite uma solução,
(3) se $N = 3$ e Ω é uma bola, então para $\mu \leq \frac{\lambda_1}{4}$, o problema (1.2) não tem solução.
Além disso, obtem-se os seguintes resultados para $1 < q < \frac{N+2}{N-2}$:
(a) não existe solução de (1.2) quando $\mu \leq 0$ e Ω é um domínio estrelado,
(b) quando $N \geq 4$, o problema (1.2) tem ao menos uma solução para cada $\mu > 0$,
(c) quando $N = 3$ tem-se dois casos:
(i) se $3 < q < 5$, então para cada $\mu > 0$ existe uma solução do problema (1.2),
(ii) se $1 < q \leq 3$ então para cada μ suficientemente grande, existe solução do problema (1.2).
Além disso, o problema (1.2) não tem solução para cada $\mu > 0$ suficientemente pequeno então Ω é estritamente estrelado.

O sistema (1.1) pode ser escrito na seguinte forma vetorial

$$\begin{cases} -\vec{\Delta} U = \nabla H + \mu \nabla G \text{ em } \Omega, \\ U > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ U = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$\vec{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta \end{pmatrix}$, $H(u,v) = u^{\alpha+1}v^{\beta+1}$, $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $G(u,v) = u^{\alpha'+1}v^{\beta'+1}$ e μ é um parâmetro real

Designamos por E o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, dotado da norma

$$\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx.$$

Uma solução fraca de (1.1) é um par $(u,v) \in E$ satisfazendo

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega (\alpha+1) u^\alpha v^{\beta+1} \varphi dx + \int_\Omega \mu(\alpha'+1) u^{\alpha'} v^{\beta'+1} \varphi dx +$$
$$\int_\Omega (\beta+1) u^{\alpha+1} v^\beta \psi dx + \int_\Omega \mu(\beta'+1) u^{\alpha'+1} v^{\beta'} \psi dx,$$
$$\forall\, (\varphi,\psi) \in E.$$

Os principais resultados deste trabalho são

Teorema 1.1. *Suponhamos que $N \geqslant 4$ e $\alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$, temos :*

(1) Se $0 < \alpha' + \beta' < \frac{4}{N-2}$, então, para cada $\mu > 0$, o problema (1.1) tem ao menos uma solução.

(2) Se $\alpha' + \beta' = 0$, então, para cada $0 < \mu < \lambda_1$, o problema (1.1) tem uma solução.

Teorema 1.2. *Suponhamos que $N = 3$ e $\alpha + \beta = 4$, nós distinguimos dois casos:*

(1) Se $2 < \alpha' + \beta' < 4$, então, para cada $\mu > 0$, o sistema (1.1) tem uma solução.

(2) Se $0 < \alpha' + \beta' \leq 2$, então, para cada μ suficentemente grande, existe uma solução para o sistema (1.1).

Teorema 1.3. *Se $\alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$, $0 \leq \alpha' + \beta' < \frac{4}{N-4}$, $\mu < 0$ e Ω é um dominio estrelado, então (1.1) não tem solução.*

Os Teoremas 1.1, e 1.2 nos fornecem as condições para a existência de solução ou soluções para o nosso problema.
O Teorema 1.3, nos dá as condições que devem ter o domínio, o crescimento da não-linearidade e o parámetro real μ para que nosso problema no estudo não tenha solução.

2 SOLUÇÕES PARA UM SISTEMA ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO DE SOBOLEV VIA PASSO DA MONTANHA

Neste capítulo vamos investigar a possibilidade de existência de soluções positivas para o sistema $-\vec{\Delta}U = \nabla H + \mu\nabla G$ em Ω, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira, $\partial\Omega$, regular e $0 < \alpha + \beta = 2^* - 2$. Sob hipóteses nos parâmetros α', β' e μ, o Teorema 2.1 garante a existência de pelo menos uma solução positiva para o sistema acima via o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Este problema foi estudado por Mohamed Bouchekif e Yasmina Nasri em [6].
Considere o sistema

$$\begin{cases} -\vec{\Delta}U = \nabla H + \mu\nabla G & \text{em } \Omega, \\ U > 0 & \text{em } \Omega, \\ U = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 4$ é um domínio limitado suave,

$$\vec{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad H(u,v) = u^{\alpha+1}v^{\beta+1}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad G(u,v) = u^{\alpha'+1}v^{\beta'+1}, \quad \mu \text{ é um parámetro}$$

real, $0 < \alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$ e $0 \leq \alpha' + \beta' < \frac{4}{N-2}$.
Para isso, vamos trabalhar com o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u^+, v^+) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = g(u^+, v^+) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}(H + \mu G)(u,v) = (\alpha+1)u^{\alpha}v^{\beta+1} + \mu(\alpha'+1)u^{\alpha'}v^{\beta'+1} \quad \text{e} \\ g(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}(H + \mu G)(u,v) = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^{\beta} + \mu(\beta'+1)u^{\alpha'+1}v^{\beta'}. \end{aligned}$$

Agora, para achar uma solução não nula do sistema (2.1). Recorremos ao Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) para obter um ponto crítico do funcional dado por:

$$J(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_E^2 - \int_\Omega (u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta+1}dx - \mu\int_\Omega (u^+)^{\alpha'+1}(v^+)^{\beta'+1}dx. \tag{2.2}$$

Designamos por E o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, dotado da norma

$$\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega |\nabla v|^2dx.$$

Note que os pontos críticos de J são soluções fracas de (2.1) e que $(u,v) = (0,0)$ é um ponto crítico de J com $J(0,0) = 0$. Apresentamos o principal resultado deste trabalho.

Teorema 2.1. *Suponhamos que* $N \geqslant 4$ *e* $0 < \alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$. *Então,*

(1) se $0 < \alpha' + \beta' < \frac{4}{N-2}$, *então para cada* $\mu > 0$ *o problema (2.1), tem ao menos uma solução,*

(2) se $\alpha' + \beta' = 0$, *então para cada* $0 < \mu < \lambda_1$ *o problema (2.1), tem ao menos uma solução.*

Faremos a demonstração do Teorema 2.1 obedecendo uma sequência de resultados: os Lemas 2.3 e 2.4 garantem que o funcional J associado ao sistema (2.1) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, isto é, existem $R,\ \rho > 0$ tais que:
(i) $J(0,0) = 0 < \rho$ e $J(u,v) \geq \rho > 0$, $\forall\ (u,v) \in \partial B_R$,
(ii) existe $(\varphi_1, \psi_1) \in E$ tal que $\|(\varphi_1, \psi_1)\|_E > R$ e $J(\varphi_1, \psi_1) \leq 0$.
Seja $(\varphi_1, \psi_1) \in E$ tal que $J(\varphi_1, \psi_1) < 0$, defina:

$$\Gamma = \{\phi \in C([0,1], E)\ \ ;\ \ \phi(0) = 0\ ,\ \phi(1) = (\varphi_1, \psi_1)\},$$

e

$$c = \inf_{\phi \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\phi(t)).$$

De (i) vemos que $c > 0$. Usando a aplicação do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema B.21), existe uma sequência $(u_n, v_n) \subset E$ tal que:

$$J(u_n, v_n) \to c \text{ e } J'(u_n, v_n) \to 0\ (\star),$$

onde c satisfaz (pelo Lema 2.6) $c < \dfrac{2^*}{N}\left(\dfrac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$ e $S_{\alpha,\beta}$ é uma constante positiva relacionada com a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (Proposição 2.1). Usando $(\star)$, a prova do Lema 2.6, garante que (u_n, v_n) é uma sequência limitada em $E := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
Então pelo Teorema de imersão de Sobolev, existe uma sequência (Proposição B.3) também denotada por (u_n, v_n), tal que:

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0) := z \text{ em } E, \text{ e } (u_n, v_n) \rightharpoonup z \text{ em } (L^q(\Omega))^2,\ 1 \leq q < 2^*.$$

O Lema 2.6 (pelas afirmações 1-4) mostra que o limite fraco de z da sequência (u_n, v_n) é uma solução do sistema.
Antes de fazer a demonstração do Teorema 2.1, precisaremos das seguintes definições.
Como $\alpha + \beta + 2 = 2^*$, pela continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}$, podemos obter uma melhor constante (maximal) $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ tal que

$$S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)\|u\|^2_{\alpha+\beta+2} \leq \|\nabla u\|_2^2, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Defina

$$S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta+2} dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}}. \tag{2.3}$$

Para qualquer domínio Ω, tem-se $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) = S_{\alpha+\beta+2}(\mathbb{R}^N)$ (veja [20]).
Denotamos $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) = S_{\alpha+\beta+2}$.
Para o caso de problemas envolvendo sistemas, necessitamos das seguintes definições.

$$S_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta}(\Omega) = \inf_{(u,v)\in[H_0^1(\Omega)]^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} \tag{2.4}$$

e

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx : (u,v)\in E \text{ com } \int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx = 1\right\}, \tag{2.5}$$

onde $E = H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.
Observe que $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = S_{\alpha,\beta}(\Omega)$.
O lema a seguir nos garante que $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ está bem definido e que $S_{\alpha,\beta}(\Omega) > 0$.

Lema 2.1. *Se* $\alpha+\beta+2 \le 2^*$, *então existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\left(\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx\right)^{1/(\alpha+\beta+2)} \le c\|(u,v)\|_E, \quad \forall\ (u,v) \in E.$$

Demonstração. Seja $(u,v) \in E$.
Aplicando o Corolário A.1,(Desigualdade de Young), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx &\le \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}\int_\Omega |u|^{\alpha+\beta+2}\,dx + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}\int_\Omega |v|^{\alpha+\beta+2}\,dx,\\ &= \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}\|u\|_{\alpha+\beta+2}^{\alpha+\beta+2} + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}\|v\|_{\alpha+\beta+2}^{\alpha+\beta+2},\end{aligned}$$

pela imersão continua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}$, então

$$\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx \le c_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha+\beta+2} + c_2\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha+\beta+2}.$$

Além disso, $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|(u,v)\|_E$.
Portanto

$$\int_\Omega |u|^{\alpha+1}|v|^{\beta+1}dx \le c\|(u,v)\|_E^{\alpha+\beta+2}.$$

□

A seguinte proposição , será importante para a demonstração do Teorema 2.1, pois estabelece uma relação entre $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. (veja [2], veja também [19].)

Proposição 2.1. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um dominio (não necessariamente limitado) e* $2 < \alpha+\beta+2 \le 2^*$, *então temos*

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta} = \left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-\alpha-1}{\alpha+\beta+2}}\right] S_{\alpha+\beta+2}.$$

Além disso, se $S_{\alpha+\beta+2}$ é atingido em w_0, então $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}$ é atingido em $\left(\frac{Aw_0}{C}, \frac{Bw_0}{C}\right)$ para quaisquer constantes reais A e B tais que
$\frac{A}{B} = \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{1/2}$ *e* $C = \left(A^{\alpha+1}B^{\beta+1}\int_\Omega |w_0|^{\alpha+\beta+2}dx\right)^{1/(\alpha+\beta+2)}$.

Demonstração. Seja (w_n) em $H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$. Considere $u_n = rw_n$ e $v_n = tw_n$, $n \in \mathbb{N}$, com $r, t > 0$ a serem escolhidos posteriormente. Então

$$C_n = \left(\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1}dx\right)^{1/\alpha+\beta+2} = (r^{\alpha+1}t^{\beta+1})^{1/\alpha+\beta+2}\left(\int_\Omega |w_n|^{\alpha+\beta+2}dx\right)^{1/\alpha+\beta+2} \neq 0$$

$$e \quad \left(\frac{u_n}{C_n}, \frac{v_n}{C_n}\right) \text{ é } tal\ que \int_\Omega \left|\frac{u_n}{C_n}\right|^{\alpha+1}\left|\frac{v_n}{C_n}\right|^{\beta+1}dx = 1.$$

Por (2.1) obtemos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \int_\Omega \left(\left|\nabla\left(\frac{u_n}{C_n}\right)\right|^2 + \left|\nabla\left(\frac{v_n}{C_n}\right)\right|^2\right)dx$$

$$= \frac{\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)dx}{C_n^2} = \frac{r^2+t^2}{(r^{\alpha+1}t^{\beta+1})^{2/(\alpha+\beta+2)}}\frac{\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx}{\left(\int_\Omega |w_n|^{\alpha+\beta+2}dx\right)^{2/(\alpha+\beta+2)}}. \tag{2.6}$$

Além disso,

$$\frac{r^2+t^2}{(r^{\alpha+1}t^{\beta+1})^{2/(\alpha+\beta+2)}} = \frac{r^2}{r^{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}t^{\frac{2(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}}} + \frac{t^2}{r^{\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}t^{\frac{2(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}}} = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{2(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{-2(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}. \tag{2.7}$$

Escolhendo $r, t > 0$ tais que $r/t = \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$, de (2.6) e (2.7) segue que

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\right]\frac{\int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx}{\left(\int_\Omega |w_n|^{\alpha+\beta+2}dx\right)^{2/(\alpha+\beta+2)}}.$$

Fazendo $n \to \infty$ e lembrando que (w_n) é uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$, obtemos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\right]S_{\alpha+\beta+2}(\Omega). \tag{2.8}$$

Para mostrar a desigualdade contrária, consideremos (u_n, v_n) em E uma sequência minimizante para $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1}dx = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Defina $z_n = r_n v_n$, onde $r_n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é tal que

$$\int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta+2}dx = \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta+2}dx.$$

Aplicando o Corolário A.1, (Desigualdade de Young), segue-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1}|z_n|^{\beta+1}\,dx &\le \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}\int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta+2}\,dx + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}\int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta+2}\,dx \\ &= \int_\Omega |u_n|^{\alpha+\beta+2}\,dx = \int_\Omega |z_n|^{\alpha+\beta+2}\,dx.\end{aligned}$$

Usando a definição de z_n, a desigualdade acima e a definição de $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx &= \frac{\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1}|v_n|^{\beta+1}\,dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} \\ &= \frac{\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx}{\left(\int_\Omega |u_n|^{\alpha+1}(r_n^{-1}|z_n|)^{\beta+1}dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} \\ &= \frac{r_n^{2(\beta+1)/\alpha+\beta+2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx}{\left(\int_\Omega|u_n|^{\alpha+1}|z_n|^{\beta+1}dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} + \frac{r_n^{2(\beta+1)/\alpha+\beta+2}\int_\Omega|\nabla v_n|^2dx}{\left(\int_\Omega|u_n|^{\alpha+1}|z_n|^{\beta+1}dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} \qquad (2.9) \\ &\ge \frac{r_n^{2(\beta+1)/\alpha+\beta+2}\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx}{\left(\int_\Omega|u_n|^{\alpha+\beta+2}dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} + \frac{r_n^{2(\beta+1)/\alpha+\beta+2}\int_\Omega|\nabla v_n|^2dx}{\left(\int_\Omega|u_n|^{\alpha+\beta+2}dx\right)^{2/\alpha+\beta+2}} \\ &\ge \left(r_n^{\frac{2(\beta+1)}{\alpha+\beta+2}} + r_n^{\frac{-2(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\right) S_{\alpha+\beta+2}(\Omega).\end{aligned}$$

Agora definimos a função $h(r) = r^{2(\beta+1)/\alpha+\beta+2} + r^{-2(\alpha+1)/\alpha+\beta+2}$, $r > 0$. Afirmamos que o mínimo da função h é assumido no ponto $r_0 = \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$. De fato,

$$h'(r) = \frac{2}{\alpha+\beta+2}\, r^{\frac{-3\alpha-\beta-4}{\alpha+\beta+2}}\left((\beta+1)r^2-(\alpha+1)\right).$$

Portanto, $\sqrt{\alpha+1/\beta+1}$ é um único ponto crítico de h. Vemos que se $r < \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$ então $h'(r) < 0$ e para $r > \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$ temos que $h'(r) > 0$. Logo $r_0 = \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$ é um ponto de mínimo local. Mais do que isso, $r_0 = \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$ é um ponto de mínimo absoluto de h.

De (2.9) e da definição de h vem

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+|\nabla v_n|^2)dx &\ge h(r_n)S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) \ge h(r_0)S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) \\ &= \left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}}\right] S_{\alpha+\beta+2}(\Omega).\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima e lembrando que (u_n, v_n) é uma sequência minimizante para $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, obtemos

$$\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \geq \left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1} \right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1} \right)^{\frac{-(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}} \right] S_{\alpha+\beta+2}(\Omega). \tag{2.10}$$

De (2.8) e (2.10) obtemos a relação desejada entre $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$.
Além disso, se w_0 realiza $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$, isto é, se

$$S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla w_0|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |w_0|^{\alpha+\beta+2} dx \right)^{2/(\alpha+\beta+2)}},$$

então, tomando $u_0 = Aw_0/C$ e $v_0 = Bw_0/C$, onde $A,\ B$ são constantes reais tais que $A/B = \sqrt{\alpha+1/\beta+1}$ e $C = \left(A^{\alpha+1} B^{\beta+1} \displaystyle\int_\Omega |w_0|^{\alpha+\beta+2} dx \right)^{1/(\alpha+\beta+2)}$, finalmente usando a relação entre $S_{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ e $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2) dx &= \left(\frac{A^2 + B^2}{(A^{\alpha+1} B^{\beta+1})^{2/(\alpha+\beta+2)}} \right) \frac{\displaystyle\int_\Omega |w_0|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega |w_0|^{\alpha+\beta+2} dx \right)^{2/(\alpha+\beta+2)}} \\
&= \left[\left(\frac{A}{B} \right)^{2(\beta+1)/\alpha+\beta+2} + \left(\frac{A}{B} \right)^{-2(\alpha+1)/\alpha+\beta+2} \right] S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) \\
&= \left[\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1} \right)^{(\beta+1)/\alpha+\beta+2} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1} \right)^{-(\alpha+1)/\alpha+\beta+2} \right] S_{\alpha+\beta+2}(\Omega) \\
&= \widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega).
\end{aligned}$$

Observe que $\displaystyle\int_\Omega |u_0|^{\alpha+1} |v_0|^{\beta+1} dx = 1$. Portanto, $\widetilde{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ é atingido em (u_0, v_0). $\square$

Agora, provaremos alguns resultados que garantem a regularidade do funcional J.

Lema 2.2. *Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, α, β constantes positivas tais que $\alpha+\beta+2 \leq 2^*$. Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e $f,\ g$ funções dadas por*

$$f(u,v) = (\alpha+1)(u^+)^\alpha (v^+)^{\beta+1}\ ,\ \ g(u,v) = (\beta+1)(u^+)^{\alpha+1}(v^+)^\beta \textit{ respectivamente.}$$

Se $z_n = (u_n, v_n) \to z = (u,v)$ em E, então existe uma subsequência (z_{n_k}) de (z_n) tal que $f(z_{n_k}) \to f(z)$ e $g(z_{n_k}) \to g(z)$ em $L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega)$.
Além disso, tem-se que

$$f, g : E \to L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega), \textit{ são contínuas.}$$

Demonstração. Primeiro, observamos que, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+1}$ e $p' = \frac{\alpha+\beta+1}{\beta}$ e a continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}(\Omega)$, obtemos

que $f(u,v) \in L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega)$, para todo $(u,v) \in E$.
Suponha que $z_n = (u_n, v_n) \to z = (u,v)$ em E. Usando novamente que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ é contínua então $u_n \to u$ e $v_n \to v$ em $L^{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ pelo teorema B.6, existe uma subsequência (u_{n_k}, v_{n_k}) de (u_n, v_n) tal que

(i) $u_{n_k}(x) \to u(x),\ e\ v_{n_k}(x) \to v(x)\ q.t.p.$ em Ω,

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h_1(x)\ e\ |v_{n_k}(x)| \leq h_2(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $q.t.p$ em Ω, com $h_1, h_2 \in L^{\alpha+\beta+2}(\Omega)$.

Então $f(u_{n_k}, v_{n_k}) - f(u,v) \to 0\ q.t.p.$ em Ω e

$$\begin{aligned}|f(u_{n_k}, v_{n_k}) - f(u,v)| &\leq (\alpha+1)|u_{n_k}|^{\alpha}|v_{n_k}|^{\beta+1} + (\alpha+1)|u|^{\alpha}|v|^{\beta+1} \\ &\leq (\alpha+1)h_1^{\alpha}h_2^{\beta+1} + (\alpha+1)|u|^{\alpha}|v|^{\beta+1} \ \in\ L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega)\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (teorema B.5),

$$f(z_{n_k}) = f(u_{n_k}, v_{n_k}) \to f(u,v) = f(z) \ \text{ em }\ L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega).$$

Procedendo de forma análoga, podemos mostrar que $g(z_{n_k}) \to g(z)$. □

Agora mostraremos que $f, g : E \to L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega)$. são contínuas.

Demonstração. Seja z_n uma sequência convergindo para z em E. Devemos mostrar que $x_n = \|f(z_n) - f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \to 0$ quando $n \to \infty$. Argumentando por contradição, suponha que x_n não convirja para zero. Então dado $\varepsilon > 0$, podemos extrair uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $(x_{n_k}) \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. pelo Lema 2.2, existe uma subsequência $(x_{n_{k_l}})$ de (x_{n_k}) tal que $x_{n_{k_l}} \to 0$, o que é uma contradição. □

Proposição 2.2. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha+\beta+2 \leq 2^*$. O funcional*
$F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$F(u,v) = \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta+1} dx$$

é de classe C^1 com

$$F'(u,v)(\varphi,\psi) = (\alpha+1)\int_{\Omega}(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta+1}\varphi dx + (\beta+1)\int_{\Omega}(u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta}\psi dx, \qquad (\varphi,\psi) \in E$$

Demonstração. A derivada de Gâteaux de F é dada por

$$\begin{aligned}F'_G(u,v)(\varphi,\psi) &= \lim_{t\to 0} \frac{F((u,v)+t(\varphi,\psi)) - F((u,v))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\Omega} \frac{[(u+t\varphi)^+]^{\alpha+1}[(v+t\psi)^+]^{\beta+1} - (u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta+1}}{t} dx.\end{aligned}$$

Seja $h\,:\,[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $h(t)=[(u+t\varphi)^{+}]^{\alpha+1}[(v+t\psi)^{+}]^{\beta+1}$, onde $u,v,\varphi,\psi\in H_0^1(\Omega)$. Usando o Teorema do Valor Médio, existe $\tau\in(0,1)$ tal que

$$\frac{h(t)-h(0)}{t}=h'(\tau)\ \text{ com } \tau\in(0,t)\subset(0,1).$$

Portanto

$$\frac{[(u+t\varphi)^{+}]^{\alpha+1}[(v+t\psi)^{+}]^{\beta+1}-(u^{+})^{\alpha+1}(v^{+})^{\beta+1}}{t}=$$

$$(\alpha+1)[(u+\tau\varphi)^{+}]^{\alpha}\varphi[(v+\tau\psi)^{+}]^{\beta+1}+(\beta+1)[(u+\tau\varphi)^{+}]^{\alpha+1}[(v+\tau\psi)^{+}]^{\beta}\psi. \tag{2.11}$$

Daí,

$$\left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right|\leq(\alpha+1)(|u|+|\varphi|)^{\alpha}|\varphi|(|v|+|\psi|)^{\beta+1}+(\beta+1)(|u|+|\varphi|)^{\alpha+1}(|v|+|\psi|)^{\beta}|\psi|.$$

Afirmamos que $(|u|+|\varphi|)^{\alpha}|\varphi|(|v|+|\psi|)^{\beta+1}$ e $(|u|+|\varphi|)^{\alpha+1}(|v|+|\psi|)^{\beta}|\psi|\in L^1(\Omega)$.
De fato, usando a desigualdade general de Hölder (Corolário B.4) com expoentes $\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha}$, $\alpha+\beta+2$ e $\frac{\alpha+\beta}{\beta+1}$,
obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|u|+|\varphi|)^{\alpha}|\varphi|(|v|+|\psi|)^{\beta+1}dx&\leq\|(|u|+|\varphi|)\|^{\alpha}_{\alpha+\beta+2}\|\varphi\|_{\alpha+\beta+2}\|(|v|+|\psi|)\|^{\beta+1}_{\alpha+\beta+2}\\&\leq c_1(\|u\|^{\alpha}_{\alpha+\beta+2}+\|\varphi\|^{\alpha}_{\alpha+\beta+2})\|\varphi\|_{\alpha+\beta+2}(\|v\|^{\beta+1}_{\alpha+\beta+2}+\|\psi\|^{\beta+1}_{\alpha+\beta+2}),\end{aligned}$$

onde $c_1=2^{\alpha+\beta+1}$. Usando o fato de que a imersão $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}(\Omega)$ é contínua, concluímos que $(|u|+|\varphi|)^{\alpha}|\varphi|(|v|+|\psi|)^{\beta+1}\in L^1(\Omega)$.
Análogamente, se mostra que $(|u|+|\varphi|)^{\alpha+1}(|v|+|\psi|)^{\beta}|\psi|\in L^1(\Omega)$.
Além disso, de (2.11),

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{[(u+t\varphi)^{+}]^{\alpha+1}[(v+t\psi)^{+}]^{\beta+1}-(u^{+})^{\alpha+1}(v^{+})^{\beta+1}}{t}&=\\(\alpha+1)(u^{+})^{\alpha}(v^{+})^{\beta+1}\varphi+(\beta+1)(u^{+})^{\alpha+1}(v^{+})^{\beta}\psi,\end{aligned}$$

esta última igualdade é porque se $t\to0$ então $\tau\to0$.
Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.5)

$$F_G'(u,v)(\varphi,\psi)=(\alpha+1)\int_\Omega(u^{+})^{\alpha}(v^{+})^{\beta+1}\varphi dx+(\beta+1)\int_\Omega(u^{+})^{\alpha+1}(v^{+})^{\beta}\psi dx.$$

Pela Proposição B.1, para concluir a demonstração, basta mostrar que F_G' é contínua.
Sejam $f(u,v)=(u^{+})^{\alpha}(v^{+})^{\beta+1}$ e $g(u,v)=(u^{+})^{\alpha+1}(v^{+})^{\beta}$, $(u,v)\in E$.
Suponha $z_n=(u_n,v_n)\to(u,v)=z$ em E.
Pelo Lema 2.2,

$$f(z_n)\to f(z)\ e\ g(z_n)\to g(z)\ em\ L^{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}}(\Omega).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $p = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}$ e $p' = \alpha+\beta+2$ e a continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|F_G'(z_n)(\varphi,\psi) - F_G'(z)(\varphi,\psi)| &\leq \int_\Omega |f(z_n) - f(z)||\varphi|dx + \int_\Omega |g(z_n) - g(z)||\psi|dx \\
&\leq \|f(z_n) - f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \|\varphi\|_{\alpha+\beta+2} + \|g(z_n) - g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \|\psi\|_{\alpha+\beta+2} \\
&\leq c_1 \|f(z_n) - f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} + c_2 \|g(z_n) - g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq c \left(\|f(z_n) - f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} + \|g(z_n) - g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \right) \|(\varphi,\psi)\|_E,
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi) \in E$. Portanto,

$$\|F_G'(z_n) - F_G'(z)\|_{E'} \leq c \left(\|f(z_n) - f(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} + \|g(z_n) - g(z)\|_{\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha+\beta+1}} \right) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo F_G' é contínua. $\square$

Pelas Proposições B.2 e 2.2 o funcional está bem definido e é de classe C^1, com derivada de Fréchet, dada por

$$\begin{aligned}
J'(u_n,v_n)(\varphi,\psi) = &\int_\Omega \nabla u_n . \nabla\varphi dx + \int_\Omega \nabla v_n . \nabla\psi dx - (\alpha+1) \int_\Omega (u_n^+)^\alpha (v_n^+)^{\beta+1} \varphi dx \\
&- (\beta+1) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1} (v_n^+)^\beta \psi dx - \mu\,(\alpha'+1) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'} (v_n^+)^{\beta'+1} \varphi dx \\
&- \mu\,(\beta'+1) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1} (v_n^+)^{\beta'} \psi dx \ \ \forall\,(\varphi,\psi) \in E.
\end{aligned}$$

No gráfico a seguir pode-se observar que $(0,0)$ é um mínimo local de J.
Existe uma bola B_R, tal que para todos os pontos na fronteira ∂B_R existe $\rho > 0$ que satisfaz $J \geq \rho$. (veja a figura 1)

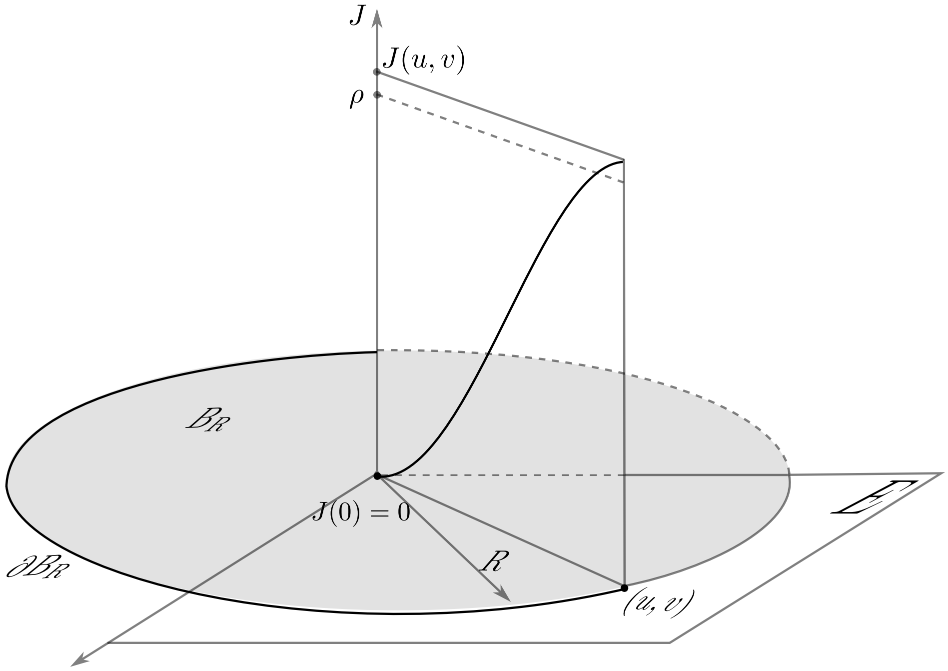
Provaremos que o funcional J possui a geometria do Passo da Montanha. O lema seguinte mostra que $(0,0)$ é um mínimo local para J.

Lema 2.3. *Suponha que* $\alpha+\beta+2 = 2^*$, $0 \leq \alpha' + \beta' < \dfrac{4}{N-2}$ *e* $\mu < \lambda_1$.
Então existem $\rho\,, R > 0$ *tais que* $J(u,v) \geq \rho > 0$ *para todo* $(u,v) \in E$ *com* $\|(u,v)\| = R$.

Demonstração. Pelo Corolário A.1, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u^+)^{\alpha+1} (v^+)^{\beta+1} dx &\leq \int_\Omega \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} (u^+)^{\alpha+\beta+2} dx + \int_\Omega \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} (v^+)^{\alpha+\beta+2} dx \\
&= \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \|u^+\|_{\alpha+\beta+2}^{\alpha+\beta+2} + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \|v^+\|_{\alpha+\beta+2}^{\alpha+\beta+2} \\
&\leq \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \|u\|_{\alpha+\beta+2}^{\alpha+\beta+2} + \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \|v\|_{\alpha+\beta+2}^{\alpha+\beta+2}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Figura 1 – Primeira condição da geometria do Passo da Montanha.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+\beta+2}$, existem constantes A_1 e $A_2 > 0$ tais que $\|u\|_{\alpha+\beta+2} \leq A_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\|v\|_{\alpha+\beta+2} \leq A_2\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$.
Usando a estimativa (2.12), obtemos

$$\int_\Omega (u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta+1}dx \leq \tilde{A}_1\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha+\beta+2} + \tilde{A}_2\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{\alpha+\beta+2}. \tag{2.13}$$

Seja $A := \max\left\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right\} > 0$ por hipótese $\alpha+\beta+2 = 2^*$, então por (2.13), tem-se

$$\int_\Omega (u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta+1}dx \leq A\left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*}\right) \tag{2.14}$$

Assim, por (2.14) temos

$$\int_\Omega (u^+)^{\alpha+1}(v^+)^{\beta+1}dx \leq A\|(u,v)\|_E^{2^*}. \tag{2.15}$$

De forma análoga,

$$\int_\Omega (u^+)^{\alpha'+1}(v^+)^{\beta'+1}dx \leq B\|(u,v)\|_E^{\alpha'+\beta'+2}, \tag{2.16}$$

onde B é uma constante positiva.
Agora, substituindo as estimativas (2.15) e (2.16) em (2.2), temos

$$J(u,v) \geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|_E^2 - A\|(u,v)\|_E^{2^*} - B\|(u,v)\|_E^{\alpha'+\beta'+2}. \tag{2.17}$$

Vamos dividir a prova em dois casos:

Caso: 1

Se $0 < \alpha' + \beta' < \dfrac{4}{N-2}$ então $2 < \alpha' + \beta' + 2 < 2^*$.

Assim, tomando $\|(u,v)\|_E = R$ suficientemente pequeno, existe $\rho > 0$ tal que $J(u,v) \geq \dfrac{1}{2}R^2 - AR^{2^*} - BR^{\alpha'+\beta'+2} := \rho > 0$, para todo $(u,v) \in \partial B_R(0)$.

Caso: 2

Se $\alpha' + \beta' = 0$, como α' e β' são não negativos, segue que $\alpha' = \beta' = 0$.

Logo pelo Corolário A.1, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u^+)^{\alpha'+1}(v^+)^{\beta'+1}dx = \int_\Omega (u^+)(v^+)dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega (u^+)^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (v^+)^2dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v\|_2^2. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Como $\|u\|_2^2 \leq \dfrac{1}{\lambda_1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, onde λ_1 é o menor autovalor associado ao operador $-\Delta$, então por (2.18) tem-se

$$\int_\Omega (u^+)^{\alpha'+1}(v^+)^{\beta'+1}dx \leq \frac{1}{2\lambda_1}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2\lambda_1}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

ou seja,

$$\int_\Omega (u^+)^{\alpha'+1}(v^+)^{\beta'+1}dx \leq \frac{1}{2\lambda_1}\|(u,v)\|_E^2. \qquad (2.19)$$

Substituindo as estimativas (2.15) e (2.19) em (2.2), temos

$$J(u,v) \geq \frac{1}{2}\|(u,v)\|_E^2 - A\|(u,v)\|_E^{2^*} - \frac{\mu}{2\lambda_1}\|(u,v)\|_E^2,$$

e consequentemente,

$$J(u,v) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\|(u,v)\|_E^2 - A\|(u,v)\|_E^{2^*},$$

onde $1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1} > 0$ devido a hipótese $\mu < \lambda_1$,

fazendo $R = \|(u,v)\|_E$, segue que

$\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1}\right)R^2 - AR^{2^*} > 0$ se, e somente se $R < \left[\dfrac{1}{2A}\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]^{\dfrac{1}{2^*-2}}$.

Assim, se $R = \left[\dfrac{1}{4A}\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]^{\frac{1}{2^*-2}}$, nós temos

$$J(u,v) \geq \frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right) > 0.$$

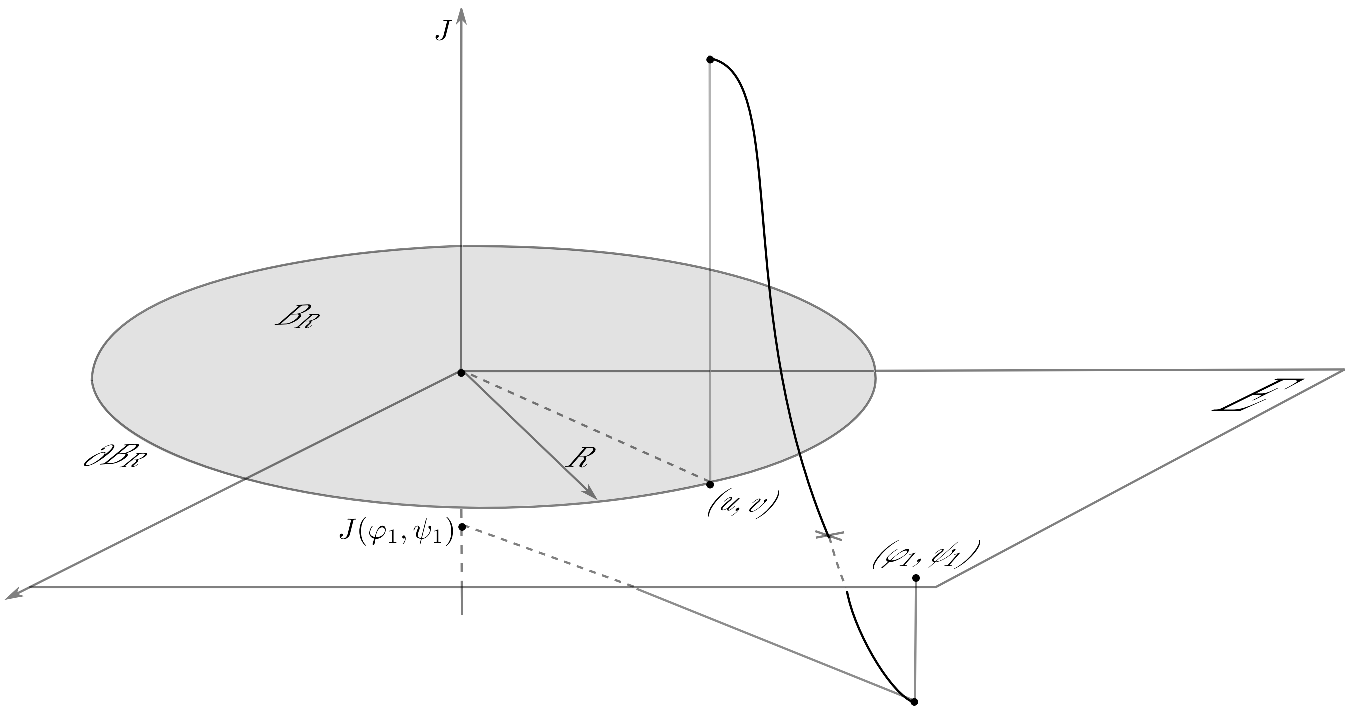
Logo, existem $\rho := \dfrac{R^2}{4}(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1}) > 0$ e $B_R(0)$ em E tal que,

para todo $(u,v) \in \partial B_R(0) = \left\{(u,v) \in E : \|(u,v)\|_E = R = \left[\dfrac{1}{4A}\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]^{\frac{1}{2^*-2}}\right\}$, nós temos $J(u,v) \geq \rho > 0$.

Portanto está finalizado a prova do lema. $\square$

No próximo gráfico pode-se observar que existe $(\varphi_1, \psi_1) \in E$ tal que $(\varphi_1, \psi_1) \notin B_R \bigcup \partial B_R$, além disso, $J(\varphi_1, \psi_1) < 0$. (veja a figura 2)

Figura 2 – Segunda condição da geometria do Passo da Montanha.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O lema seguinte prova que o funcional J tem a condição da parte (ii) da geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.4. *Suponha* $\mu > 0$ *e* $0 < \alpha + \beta + 2 = 2^*$.
Então existe $(\varphi_1, \psi_1) \in E$ *tal que* $\|(\varphi_1, \psi_1)\|_E > R$ *e* $J(\varphi_1, \psi_1) < 0$, *onde* R *é dado pelo Lema 2.3.*

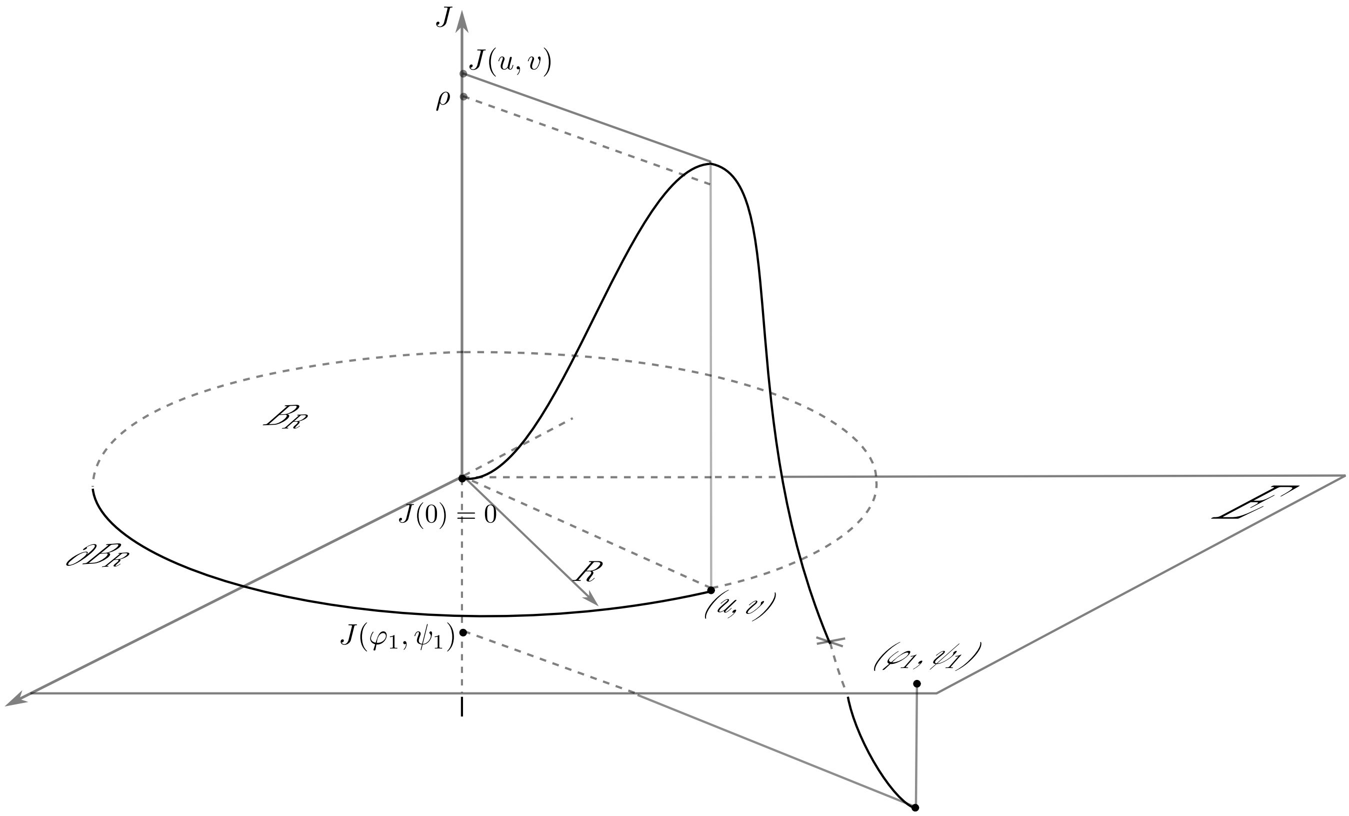
Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $0 \in \Omega$. Logo fixe $(\varphi_0, \psi_0) \in E \backslash \{0\}$ com $\varphi_0 > 0$ *e* $\psi_0 > 0$ em Ω. Seja $t > 0$, substituindo o ponto $(t\varphi_0, t\psi_0)$ em (2.2), tem-se

$$J(t\varphi_0, t\psi_0) = \frac{t^2}{2}\|(\varphi_0, \psi_0)\|_E^2 - t^{2^*}\int_\Omega (\varphi_0^+)^{\alpha+1}(\psi_0^+)^{\beta+1}dx - \mu\, t^{\alpha'+\beta'+2}\int_\Omega (\varphi_0^+)^{\alpha'+1}(\psi_0^+)^{\beta'+1}dx.$$

Logo, como $0 < \alpha + \beta + 2 = 2^*$, segue que $\lim_{t\to\infty} J(t\varphi_0, t\psi_0) = -\infty$, ou seja, existe $t_1 > 0$ tal que $J(t_1\varphi_0, t_1\psi_0) < 0$ e $\|(t_1\varphi_0, t_1\psi_0)\| > R$.
Assim, basta tomar $(\varphi_1, \psi_1) = (t_1\varphi_0, t_1\psi_0)$. □

O gráfico abaixo tem as duas condições da geometria do Teorema do Passo da Montanha (veja a figura 3)

Figura 3 – A geometria do Passo da Montanha.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Lema 2.5. *Assumindo que* $F \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *com* $F(0) = 0$ *e* $\left|\dfrac{\partial F}{\partial u_i}\right| \leq C|u|^{p-1}$, *seja* (u_n) *uma sequência limitada em* $L^p(\Omega)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *tal que* $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω.
Então.

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (F(u_n) - F(u_n - u))\,dx = \int_\Omega F(u)dx.$$

Demonstração: Ver [7], Teoremas 1 e 2, pag. 487.

Lema 2.6. *Suponha* $\mu > 0$ *e seja* (u_n, v_n) *uma sequência em* E *tal que* $J(u_n, v_n) \to c$ *e* $J'(u_n, v_n) \to 0$ *em* E' *com*

$$c < \frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} = \frac{2}{N-2}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Então (u_n, v_n) *é relativamente compacta em* E.

Demonstração. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se $|J(u_n, v_n) - c| < \varepsilon$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\|(u_n, v_n)\|_E^2 - \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx - \mu \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx = c + o(1). \qquad (2.20)$$

Além disso, pelas Proposições B.2 e 2.2,

$$J'(u_n,v_n)(\varphi,\psi)=\langle J'(u_n,v_n),(\varphi,\psi)\rangle=$$

$$\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi dx+\int_\Omega \nabla v_n.\nabla\psi dx-(\alpha+1)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha}(v_n^+)^{\beta+1}\varphi dx-(\beta+1)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta}\psi dx$$
$$-\mu\,(\alpha'+1)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'}(v_n^+)^{\beta'+1}\varphi dx-\mu\,(\beta'+1)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'}\psi dx,\forall\,(\varphi,\psi)\ \in\ E.$$

Tomando em particular $(\varphi,\psi)=(u_n,v_n)=(u_n^+-u_n^-,v_n^+-v_n^-)$, o Lema A.2 garante que

$$\begin{aligned}J'(u_n,v_n).(u_n,v_n)&=\|(u_n,v_n)\|_E^2-2^*\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx\\&\quad-\mu\,(\alpha'+\beta'+2)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx,\end{aligned}$$

como, $J'(u_n,v_n)\to 0$ quando $n\to\infty$, temos que

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon_n,(u_n,v_n)\rangle&=\|(u_n,v_n)\|_E^2-2^*\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx\\&\quad-\mu\,(\alpha'+\beta'+2)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx\end{aligned}\tag{2.21}$$

com $\varepsilon_n\to 0$. De (2.20) e (2.21)

$$\left(\frac{2^*}{2}-1\right)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx+\mu\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx\le$$
$$c+o(1)+\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E.$$

Como $\left(\dfrac{2^*}{2}-1\right)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}>0$, então

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx\le 2\left(\frac{c}{\alpha+\beta}\right)+2\left(\frac{o(1)}{\alpha+\beta}\right)+\left(\frac{2}{\alpha+\beta}\right)\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E\tag{2.22}$$

e

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx\le 2\left(\frac{c}{\mu(\alpha'+\beta')}\right)+2\left(\frac{o(1)}{\mu(\alpha'+\beta')}\right)+\left(\frac{2}{\mu(\alpha'+\beta')}\right)\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|_E.\tag{2.23}$$

Logo substituindo (2.22) e (2.23) em (2.20), segue que

$$\|(u_n,v_n)\|_E^2\le C_1+C_2\|(u_n,v_n)\|_E,\ \text{com}\ \ C_1,\ C_2>0.$$

Note que a expresão acima possui a forma

$$x^2\le ax+b,\ \text{com}\ \ a,\ b>0.$$

Assim pelo lema A.1, existe $r>0$ tal que $\|(u_n,v_n)\|_E=x\le r$.
Portanto, (u_n,v_n) é limitada em E.
Afirmação (2) Definindo $w_n:=u_n^{\alpha}v_n^{\beta+1}$ e $t_n:=u_n^{\alpha+1}v_n^{\beta}$, nós temos que, w_n e t_n são

sequências limitadas em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$.

De fato,

$$\|w_n\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} = \left[\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx\right]^{\frac{2^*-1}{2^*}},$$

e portanto, nosso objetivo é $\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx < \infty$.

Assim,

$$\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx = \int_\Omega |u_n^\alpha v_n^{\beta+1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \le \int_\Omega \left(|u_n|^\alpha |v_n|^{\beta+1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder (Teorema B.3) com expoentes $p = \frac{2^*-1}{\alpha}$ e $q = \frac{2^*-1}{\beta}$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &\le \left(\int_\Omega \left[|u_n|^{\alpha \frac{2^*}{2^*-1}}\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left[|v_n|^{(\beta+1)\frac{2^*}{2^*-1}}\right]^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{\alpha}{2^*-1}} \left(\int_\Omega |v_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{\beta+1}{2^*-1}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Logo, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ então, existe $k_0 > 0$ tal que

$$\|u_n\|_{2^*} \le k_0 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}, \ \forall \ u_n \in \ H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{\alpha}{2^*-1}} \le k_1 \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*\left(\frac{\alpha}{2^*-1}\right)}. \tag{2.25}$$

Análogamente para v_n, temos,

$$\left(\int_\Omega |v_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{\beta+1}{2^*-1}} \le k_2 \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*\left(\frac{\beta+1}{2^*-1}\right)}. \tag{2.26}$$

Por (2.25), (2.26) e (2.24), concluímos que

$$\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \le k \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*\left(\frac{\alpha}{2^*-1}\right)} \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}^{2^*\left(\frac{\beta+1}{2^*-1}\right)}. \tag{2.27}$$

Agora, como $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$ *e* $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|(u_n, v_n)\|_E$, usando (2.27), segue que

$$\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \le k \|(u_n, v_n)\|_E^{2^*}. \tag{2.28}$$

Como (u_n, v_n) é limitada em E, nós temos que

$$\int_\Omega |w_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx < \infty.$$

De forma análoga para t_n, temos $\int_\Omega |t_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx < \infty$.

Isso mostra a afirmação (2).

Sabemos que

$$\begin{aligned} o_n(1) = &\int_\Omega \nabla u_n . \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla v_n . \nabla \psi dx - (\alpha+1) \int_\Omega (u_n^+)^\alpha (v_n^+)^{\beta+1} \varphi dx \\ &- (\beta+1) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1} (v_n^+)^\beta \psi dx - \mu\, (\alpha' + 1) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'} (v_n^+)^{\beta'+1} \varphi dx \\ &- \mu\, (\beta' + 1) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1} (v_n^+)^{\beta'} \psi dx. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como a sequência (u_n, v_n) é limitada em E. Assim, pela Proposição B.3, item (i), temos

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ e } v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Agora estudaremos a convergência de cada termo de (2.29).

Afirmação (3)

$$\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi dx \to \int_\Omega \nabla u_0.\nabla\varphi dx \quad e \quad \int_\Omega \nabla v_n.\nabla\psi dx \to \int_\Omega \nabla v_0.\nabla\psi dx.$$

De fato, seja $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Definimos o funcional $f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx$.
Note que $f \in (H_0^1(\Omega))'$.
De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$f(u+\lambda v) = \int_\Omega \nabla(u+\lambda v).\nabla\varphi dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx + \lambda \int_\Omega \nabla v.\nabla\varphi dx = f(u) + \lambda f(v)$$

e consequentemente f é linear.
Além disso, pela desigualdade de Hölder (Teorema B.3)

$$\begin{aligned}|f(u)| \le \int_\Omega |\nabla u.\nabla\varphi| dx \le \left(\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\le C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim, f é limitada e portanto, contínua.
Agora, como $u_n \rightharpoonup u_0$, temos por Teorema B.1, item (i)

$$\int_\Omega \nabla u_n.\nabla\varphi dx = f(u_n) \to f(u_0) = \int_\Omega \nabla u_0.\nabla\varphi dx. \tag{2.30}$$

Análogamente tem-se $\int_\Omega \nabla v_n.\nabla\psi dx \to \int_\Omega \nabla v_0.\nabla\psi dx$.
Isso mostra a afirmação (3).
Pelo Lema A.3, realizamos a seguinte afirmação.

Afirmação (4)

$$\int_\Omega (u_n^+)^\alpha (v_n^+)^{\beta+1}\varphi dx \to \int_\Omega (u_0^+)^\alpha (v_0^+)^{\beta+1}\varphi dx, \ \forall \ \varphi \in L^{2^*}(\Omega).$$

De fato, pelo Teorema B.1, item (iii), $u_n \to u_0$ e $v_n \to v_0$ $q.t.p.$ em Ω.
Então $w_n = u_n^\alpha v_n^{\beta+1} \to w_0 = u_0^\alpha v_0^{\beta+1}$ $q.t.p.$ em Ω. Além disso pela afirmação (2), w_n é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$.
Portanto, a afirmação (4) segue do Teorema B.8.
Analogamente

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^\beta\psi dx &\to \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^\beta\psi dx, \\ \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'}(v_n^+)^{\beta'+1}\varphi dx &\to \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'}(v_0^+)^{\beta'+1}\varphi dx, \\ \text{e } \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'}\psi dx &\to \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'}\psi dx,\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\psi)\in E$.
Por outro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} J'(u_n,v_n)(\varphi,\psi)=0$, pelas por afirmações (1) e (3) concluímos que

$$J'(u_0,v_0)(\varphi,\psi)=0 \quad \forall\,(\varphi,\psi)\;\in\; E. \tag{2.31}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_0.\nabla\varphi dx+\int_\Omega \nabla v_0.\nabla\psi dx &= (\alpha+1)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha}(v_0^+)^{\beta+1}\varphi dx\\ &+(\beta+1)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta}\psi dx+\mu\,(\alpha'+1)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'}(v_0^+)^{\beta'+1}\varphi dx\\ &+\mu\,(\beta'+1)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'}\psi dx,\ \forall\,(\varphi,\psi)\in E \end{aligned}\tag{2.32}$$

e consequentemente, (u_0,v_0) satisfaz o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_0=(\alpha+1)(u_0^+)^{\alpha}(v_0^+)^{\beta+1}+\mu(\alpha'+1)(u_0^+)^{\alpha'}(v_0^+)^{\beta'+1}\\ \\ -\Delta v_0=(\beta+1)(u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta}+\mu(\beta'+1)(u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'}\end{cases}$$

no sentido fraco.
Tomando $(\varphi,\psi)=(u_0,v_0)\in E$ em (2.32) e aplicando o teorema da divergência, segue que

$$\|(u_0,v_0)\|_E^2=2^*\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta+1}dx+\mu\,(\alpha'+\beta'+2)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'+1}dx. \tag{2.33}$$

Agora, substituindo o ponto (u_0,v_0) em (2.2) e usando (2.33) concluímos que

$$J(u_0,v_0)=\left(\frac{2^*}{2}-1\right)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta+1}dx+\mu\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'+1}dx\ \geq 0. \tag{2.34}$$

Agora queremos provar que $u_n\to u_0$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$, para isso defina

$$\varphi_n:=u_0-u_n\ \ ,\ \ \psi_n:=v_0-v_n \text{ e } H(u,v):=u^{\alpha+1}v^{\beta+1}. \tag{2.35}$$

Note que a função H satisfaz as hipóteses do Lema 2.5. De fato,
H é de classe C^1, além disso, $H(0,0)=0$, logo tem-se

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u_0,v_0)=(\alpha+1)u_0^{\alpha}v_0^{\beta+1} \text{ e } \frac{\partial H}{\partial v}(u_0,v_0)=(\beta+1)u_0^{\alpha+1}v_0^{\beta}.$$

Como $|u_0|$, $|v_0|\leq\ \|(u_0,v_0)\|_E$, segue que

$$\left|\frac{\partial H}{\partial u}\right|\leq(\alpha+1)\|(u_0,v_0)\|_E^{2^*-1} \text{ e } \left|\frac{\partial H}{\partial v}\right|\leq(\beta+1)\|(u_0,v_0)\|_E^{2^*-1}.$$

Portanto, H satisfaz as condições do Lema 2.5
Afirmação (5)

$$\int_\Omega (u_n^{\alpha+1}v_n^{\beta+1}-(u_n-u_0)^{\alpha+1}(v_n-v_0)^{\beta+1})dx=\int_\Omega u_0^{\alpha+1}v_0^{\beta+1}+o(1).$$

De fato, note que a sequência (u_n, v_n) é limitada em $[L^{2^*}(\Omega)]^2$.
De fato, como existe $(u_n, v_n) \in E$, então u_n *e* $v_n \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, existe $k > 0$ tal que $\|u_n\|_{2^*} \leq k\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$, pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.
Assim,

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*} \leq k^{2^*}\|u_n\|^{2^*}_{H_0^1(\Omega)} \leq k^{2^*}\|(u_n, v_n)\|^{2^*}_E.$$

Como (u_n, v_n) é limitada em E, concluímos que

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*} < \infty \text{ e assim, } u_n \in L^{2^*}(\Omega).$$

De forma análoga $v_n \in L^{2^*}(\Omega)$.
Portanto (u_n, v_n) é limitada em $[L^{2^*}(\Omega)]^2$.
Note que H satisfaz as condições do Lema 2.5, (u_n, v_n) é limitada em $[L^{2^*}(\Omega)]^2$ e a Proposição B.3 item (iii), garantem que as hipóteses do Lema 2.5 estão satisfeitas, assim

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega H(u_n, v_n) - H[(u_n, v_n) - (u_0, v_0)]\right) = \int_\Omega H(u_0, v_0),$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(u_n^{\alpha+1}v_n^{\beta+1} - (u_n - u_0)^{\alpha+1}(v_n - v_0)^{\beta+1}\right)dx = \int_\Omega u_0^{\alpha+1}v_0^{\beta+1}.$$

Então, reescrevendo a expresão acima, obtemos a prova da afirmação (5).
Afirmação (6)

$$J(u_0, v_0) + \frac{1}{2}\|(\varphi_n, \psi_n)\|_E^2 - \int_\Omega H(\varphi_n^+, \psi_n^+)dx = c + o(1).$$

De fato,

$$\|u_0 - \varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla(u_0 - \varphi_n)|^2 dx = \|n_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} - 2\int_\Omega \nabla u_0.\nabla\varphi_n dx. \tag{2.36}$$

Pela Proposição B.3, item (i), como u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$, $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u_0$ em $L^2(\Omega)$ ou seja, $\nabla\varphi_n = \nabla u_0 - \nabla u_n \rightharpoonup 0$ em $L^2(\Omega)$ e consequentemente $\int_\Omega \nabla\varphi_n.\nabla u_0\, dx \to 0$, quando $n \to +\infty$.
Assim, por (2.36), temos

$$\|u_0 - \varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + o(1). \tag{2.37}$$

De forma análoga concluímos que

$$\|v_0 - \psi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|v_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\psi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + o(1). \tag{2.38}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2}\|(\varphi_n, \psi_n)\|_E^2 = \frac{1}{2}\left(\|\varphi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\psi_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right).$$

De (2.37) e (2.38)

$$\frac{1}{2}\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 = \frac{1}{2}\left(\|u_n\|_{H_0^1}^2 - \|u_0\|_{H_0^1}^2 - o(1) + \|v_n\|_{H_0^1}^2 - \|v_0\|_{H_0^1}^2 - o(1)\right).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 = \frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|_E^2 - \frac{1}{2}\|(u_0,v_0)\|_E^2 - o(1). \tag{2.39}$$

Além disso, temos

$$\int_\Omega H(\varphi_n^+,\psi_n^+)dx = \int_\Omega (u_0^+ - u_n^+)^{\alpha+1}(v_0^+ - v_n^+)^{\beta+1}dx. \tag{2.40}$$

Logo, por (2.34), (2.39) e (2.40) tem-se

$$J_H := J(u_0,v_0) + \frac{1}{2}\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 - \int_\Omega H(\varphi_n^+,\psi_n^+)dx =$$

$$\left(\frac{2^*}{2} - 1\right)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta+1}dx + \mu\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'+1}dx + \frac{1}{2}\|(u_n,v_n)\|_E^2$$

$$-\frac{1}{2}\|(u_0,v_0)\|_E^2 - o(1) - \int_\Omega (u_0^+ - u_n^+)^{\alpha+1}(v_0^+ - v_n^+)^{\beta+1}dx.$$

Agora, por (2.20) e (2.33) na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} J_H = c - \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta+1}dx + \mu\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx - \mu\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'+1}dx \\ + \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx - \int_\Omega (u_0^+ - u_n^+)^{\alpha+1}(v_0^+ - v_n^+)^{\beta+1}dx. \end{aligned}$$

Pela afirmação (5), nesta última igualdade, segue-se

$$J_H = c + o(1) + \mu\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx - \mu\int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'+1}dx. \tag{2.41}$$

Note que

$$o(1) + \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha'+1}(v_0^+)^{\beta'+1}dx = \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx. \tag{2.42}$$

De fato,

$$\begin{aligned} |(u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}| &= |((u_0 - \varphi_n)^+)^{\alpha'+1}((v_0 - \psi_n)^+)^{\beta'+1}| \\ &= |(u_0 - \varphi_n)^+|^{\alpha'+1}|(v_0 - \psi_n)^+|^{\beta'+1} \\ &\le |(u_0 - \varphi_n)|^{\alpha'+1}|(v_0 - \psi_n)|^{\beta'+1}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Como (u_n,v_n) é limitada em E, pela Proposição B.3 item (iv), temos que

$$\varphi_n \to 0 \quad e \quad \psi_n \to 0 \;\; q.t.p. \; em \; \Omega,$$

pois, por (2.35), ($\varphi_n = u_0 - u_n$ e $\psi_n = v_0 - v_n$), então existem $k_1, k_2 > 0$ tais que
$|\varphi_n| < k_1$ e $|\psi_n| < k_2$ *q.t.p. em* Ω.

Também, por (2.43),

$$|(u_0 - \varphi_n)|^{\alpha^{'}+1}|(v_0 - \psi_n)|^{\beta^{'}+1} \leq (|u_0(x)| + k_1)^{\alpha^{'}+1}(|v_0(x)| + k_2)^{\beta^{'}+1} := T(x). \quad (2.44)$$

Assim T é uma função que não depende de n.
Logo, (2.44) e (2.43) garantem que

$$|(u_n^+)^{\alpha^{'}+1}(v_n^+)^{\beta^{'}+1}| \leq T(x) \;\; q.t.p. \text{ em } \Omega. \quad (2.45)$$

Pela Proposição B.3 item (iv), tem-se

$$(u_n^+)^{\alpha^{'}+1}(v_n^+)^{\beta^{'}+1} \to (u_0^+)^{\alpha^{'}+1}(v_0^+)^{\beta^{'}+1} \;\; q.t.p. \; em \; \Omega. \quad (2.46)$$

Finalmente de (2.45) e (2.46) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema B.5):

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha^{'}+1}(v_n^+)^{\beta^{'}+1}dx \to \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha^{'}+1}(v_0^+)^{\beta^{'}+1}dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha^{'}+1}(v_n^+)^{\beta^{'}+1}dx = \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha^{'}+1}(v_0^+)^{\beta^{'}+1}dx + o(1).$$

Isso mostra (2.42).
Logo substituindo (2.42) em (2.41), tem-se demonstrado a afirmação (6).
Afirmação (7)

$$\|(\varphi_n, \psi_n)\|_E^2 + \|(u_0, v_0)\|_E^2 = 2^* \left[\int_\Omega \Big(H(u_0^+, v_0^+) + H(\varphi_n^+, \psi_n^+)\Big)\, dx\right] + \mu(\alpha^{'} + \beta^{'} + 2) \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha^{'}+1}(v_0^+)^{\beta^{'}+1}dx + o(1).$$

De fato, por (2.39) temos que

$$\|(\varphi_n, \psi_n)\|_E^2 + \|(u_0, v_0)\|_E^2 = \|(u_n, v_n)\|_E^2 - o(1). \quad (2.47)$$

Agora, (2.21) em (2.47), temos

$$\|(\varphi_n, \psi_n)\|_E^2 + \|(u_0, v_0)\|_E^2 =$$

$$2^* \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx + \mu\;(\alpha^{'} + \beta^{'} + 2) \int_\Omega (u_n^+)^{\alpha^{'}+1}(v_n^+)^{\beta^{'}+1}dx + o_n(1). \quad (2.48)$$

Por outro lado, pela afirmação (5) segue que

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx = \int_\Omega (u_0^+ - u_n^+)^{\alpha+1}(v_0^+ - v_n^+)^{\beta+1}dx + \int_\Omega (u_0^+)^{\alpha+1}(v_0^+)^{\beta+1}dx + o(1).$$

Substituindo (2.35) nesta última igualdade, obtemos

$$\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha+1}(v_n^+)^{\beta+1}dx = \int_\Omega \Big(H(\varphi_n^+,\psi_n^+) + H(u_0^+,v_0^+)\Big)\,dx + o(1). \tag{2.49}$$

Agora, por (2.49) e (2.48),

$$\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 + \|(u_0,v_0)\|_E^2 = 2^*\int_\Omega \Big(H(\varphi_n^+,\psi_n^+) + H(u_0^+,v_0^+)\Big)\,dx +$$

$$\mu\,(\alpha' + \beta' + 2)\int_\Omega (u_n^+)^{\alpha'+1}(v_n^+)^{\beta'+1}dx + o(1). \tag{2.50}$$

Usando (2.42) e (2.50), concluímos a afirmação (7).
Além disso, por (2.33) na afirmação (7), obtemos o seguinte resultado

$$\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 = 2^*\int_\Omega H(\varphi_n^+,\psi_n^+)dx + o(1). \tag{2.51}$$

Como $\{\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E\}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, podemos assumir que $\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 \to k$ e consequentemente em (2.51) tem-se

$$2^*\int_\Omega H(\varphi_n^+,\psi_n^+)dx \to k \geq 0.$$

Usando a definição 2.4, como $\varphi_n^+ \leq |\varphi_n|$, $\psi_n^+ \leq |\psi_n|$, segue que

$$\left(\int_\Omega (\varphi_n^+)^{\alpha+1}(\psi_n^+)^{\beta+1}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} S_{\alpha,\beta} \leq \|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2.$$

Passando a última desigualdade ao limite,

$$\left(\frac{k}{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} S_{\alpha,\beta} \leq k. \tag{2.52}$$

Agora estamos aptos a mostrar que $(u_n,v_n) \to (u_0,v_0)$ fortemente em E, ou seja $(\varphi_n,\psi_n) \to (0,0)$ fortemente em E. Para isso temos duas posibilidades $k=0$ ou $k>0$.
Suponhamos que $k>0$, então de (2.52), temos

$$\left(\frac{1}{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} S_{\alpha,\beta} \leq k^{\frac{2}{N}}.$$

Assim,

$$2^*\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} \leq k. \tag{2.53}$$

Agora, passando a afirmação (6) ao limite, quando $n \to \infty$, temos

$$J(u_0,v_0) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 - \lim_{n\to\infty}\int_\Omega H(\varphi_n^+,\psi_n^+)dx = c.$$

Além disso, como $\|(\varphi_n,\psi_n)\|_E^2 \to k$ e $2^*\int_\Omega H(\varphi_n^+,\psi_n^+)dx \to k$,
segue que

$$J(u_0,v_0) + \frac{k}{2} - \frac{k}{2^*} = c,$$

e consequentemente

$$J(u_0, v_0) + \frac{k}{N} = c.$$

Por (2.34), temos que

$$\frac{k}{N} \leq c$$

e por (2.53), obtemos

$$\frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} \leq c,$$

que é uma contradição com a hipótese do Lema 2.6. Portanto $k = 0$.
Assim, provamos que $\|(\varphi_n, \psi_n)\|_E \to k = 0$ e consequentemente $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ fortemente em E, pois $\varphi_n = u_0 - u_n$ e $\psi_n = v_0 - v_n$. $\square$

Seguindo o método em [8], sem perda de generalidade suponhamos que $0 \in \Omega$.
Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$w_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\ , \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ é uma função positiva tal que $\varphi = 1$ para x numa vizinhança de 0.
Sejam A e B constantes positivas tais que

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

então analogamente como feito no caso escalar, $(Aw_\varepsilon, Bw_\varepsilon)$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = (\alpha+1)u^\alpha v^{\beta+1} & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^\beta & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(x) = 0, \quad v(x) = 0 & \text{quando } |x| \to +\infty. \end{cases}$$

Agora para demonstrar o Teorema 2.1 será suficiente aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) com o nível minimax c abaixo da constante $\frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}$, ou seja, temos que demonstrar que está condição de compacidade é satisfeita no nível c.

Agora vamos apresentar uma estimativa que será de grande importância para nossa análise da existência de soluções para o nosso problema.
Note que, como $(\varphi_1, \psi_1) \in E$ obtido no Lema 2.4 é arbitrário, logo, podemos escolher $(\varphi_1, \psi_1) = (Aw_\varepsilon, Bw_\varepsilon)$ tal que

$$\sup_{t \geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq \frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Isso será feito usando a seguinte proposição junto com a prova do teorema principal.

Proposição 2.3. *Para $N \geq 3$ e $\mu > 0$ tem-se*

$$\sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq \frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) - \mu K \varepsilon^{\theta},$$

onde K é uma constante positiva, independente de ε e $\theta = \frac{4-(\alpha^{'}+\beta^{'})(N-2)}{4}$.

Demonstração. Por (2.2), temos

$$\begin{aligned} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) = &\left[\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}\right]t^2 - \left[A^{\alpha+1}B^{\beta+1}\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right]t^{2^*} \\ &- \left[\mu A^{\alpha^{'}+1}B^{\beta^{'}}\int_\Omega w_\varepsilon^{\alpha^{'}+\beta^{'}+2}dx\right]t^{\alpha^{'}+\beta^{'}+2}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Agora, por [11], Lema (3.3), (d), nós temos a seguinte estimativa $\|w_\varepsilon\|_s^s \geq K_2\varepsilon^{N-\frac{N-2}{2}s}$. Substituindo s por $\alpha^{'}+\beta^{'}+2$ e ε por $\varepsilon^{1/2}$ obtemos

$$\|w_\varepsilon\|^{\alpha^{'}+\beta^{'}+2}_{\alpha^{'}+\beta^{'}+2} \geq K_2\varepsilon^{\theta}.$$

Usando esta última desigualdade em (2.54),

$$\begin{aligned} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq &\left[\left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}\right]t^2 - \left[A^{\alpha+1}B^{\beta+1}\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right]t^{2^*} \\ &- \left[\mu A^{\alpha^{'}+1}B^{\beta^{'}}K_2\varepsilon^{\theta}\right]t^{\alpha^{'}+\beta^{'}+2}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Sejam

$$a := \left(\frac{A^2+B^2}{2}\right)\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1} > 0\ ,\ b := A^{\alpha+1}B^{\beta+1}\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx > 0\ ,\ c_0 := A^{\alpha^{'}+1}B^{\beta^{'}+1}K_2 > 0$$

$$\text{e} \quad h_\varepsilon(t) := at^2 - bt^{2^*} - \mu\, c_0\, \varepsilon^{\theta}\, t^{\alpha^{'}+\beta^{'}+2}. \tag{2.56}$$

Assim, por (2.55), segue que

$$J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq h_\varepsilon(t). \tag{2.57}$$

Observa-se que $h_\varepsilon(0) = 0$, $h_\varepsilon(t) > 0$ para t suficientemente pequeno e $\lim\limits_{t\to+\infty} h_\varepsilon(t) = -\infty$. Então existe $\sup\limits_{t\geq 0} h_\varepsilon(t)$ e é atingido em algum $t_\varepsilon > 0$.

$$\text{Portanto,}\ \sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq \sup_{t\geq 0} h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_\varepsilon). \tag{2.58}$$

Logo, avaliando a derivada da função h_ε no ponto de máximo, t_ε,

$$\begin{aligned} 0 = h_\varepsilon^{'}(t_\varepsilon) &= 2at_\varepsilon - 2^*bt_\varepsilon^{2^*-1} - (\alpha^{'}+\beta^{'}+2)\mu\, c_0\, \varepsilon^{\theta}t_\varepsilon^{\alpha^{'}+\beta^{'}+1} \\ &= t_\varepsilon\left(2a - 2^*bt_\varepsilon^{2^*-2} - (\alpha^{'}+\beta^{'}+2)\mu\, c_0\, \varepsilon^{\theta}t_\varepsilon^{\alpha^{'}+\beta^{'}}\right). \end{aligned}$$

Como $t_\varepsilon > 0$, obtemos que

$$0 = 2a - 2^* b t_\varepsilon^{2^*-2} - (\alpha' + \beta' + 2)\mu\, c_0\, \varepsilon^\theta t_\varepsilon^{\alpha'+\beta'}. \tag{2.59}$$

Além disso, $(\alpha' + \beta' + 2)\mu\, c_0\, \varepsilon^\theta t_\varepsilon^{\alpha'+\beta'} > 0$, segue-se

$$0 = 2a - 2^* b t_\varepsilon^{2^*-2} - (\alpha' + \beta' + 2)\mu\, c_0\, \varepsilon^\theta t_\varepsilon^{\alpha'+\beta'} < 2a - 2^* b t_\varepsilon^{2^*-2}.$$

Assim,

$$t_\varepsilon < \left(\frac{2a}{2^* b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} := a_0. \tag{2.60}$$

Observação

Não pode acontecer que $t_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, pois se isso fosse verdade, então por (2.59) teríamos $a = 0$ e isso é um absurdo, pois $a > 0$.
Portanto existe $r > 0$ tal que $t_\varepsilon \geq r$, quando $\varepsilon \to 0$.
Agora, observe que a função

$$f(t) = at^2 - bt^{2^*} \text{ é crescente em } [0, a_0], \tag{2.61}$$

onde a_0 está definido em (2.60).
De fato, derivando a função, temos

$$f'(t) = 2at - 2^* b t^{2^*-1} = t(2a - 2^* b t^{2^*-2}), \quad t > 0.$$

Assim,

$$f'(t) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2a - 2^* b t^{2^*-2} > 0 \;\Leftrightarrow\; t < \left(\frac{2a}{2^* b}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} = a_0.$$

Logo, $f(a_0)$ é máximo de f para todo $t \in [0, a_0]$, ou seja $f(t) \leq f(a_0)$. o valor de $f(a_0)$ é dado por

$$f(a_0) = a(a_0)^2 - b(a_0)^{2^*} = \left(\frac{2a}{2^* b}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} \left[a - \left(\frac{2a}{2^*}\right)\right] = \left(\frac{2a}{2^* b}\right)^{\frac{2}{2^*-2}} \left(\frac{2^* - 2}{2^*}\right) a.$$

Usando as definições de a e b de (2.56),

$$f(a_0) = \left\{ \frac{(A^2 + B^2)\, \|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}}{2^* A^{\alpha+1} B^{\beta+1} \displaystyle\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*} dx} \right\}^{\frac{N-2}{2}} \left(\frac{A^2 + B^2}{2}\right) \|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1} \left(\frac{2^* - 2}{2^*}\right)$$

$$= \frac{(A^2 + B^2)^{\frac{N-2}{2}} \left(\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{N-2}{2}}}{(2^*)^{\frac{N-2}{2}} (A^{\alpha+1} B^{\beta+1})^{\frac{N-2}{2}} \left(\displaystyle\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} (A^2 + B^2) \|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1} \left(\frac{2^* - 2}{2.2^*}\right)$$

$$= \frac{2^*}{N}\left[\frac{(A^2+B^2)}{(A^{\alpha+1}B^{\beta+1})^{\frac{2}{2^*}}}\;\frac{\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}}{2^*\left(\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{2.62}$$

O fator $\dfrac{A^2+B^2}{(A^{\alpha+1}B^{\beta+1})^{\frac{2}{2^*}}}$ pode ser reescrito como

$$\frac{A^2+B^2}{(A^{\alpha+1}B^{\beta+1})^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{A^2}{(A^{\alpha+1}B^{\beta+1})^{\frac{2}{2^*}}} + \frac{B^2}{(A^{\alpha+1}B^{\beta+1})^{\frac{2}{2^*}}}$$

$$= \frac{A^{2\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}}}{B^{2\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}}} + \frac{B^{2\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}}}{A^{2\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}}}.$$

Portanto, pela hipótese da Proposição 2.1, segue que

$$\frac{A^2+B^2}{(A^{\alpha+1}B^{\beta+1})^{\frac{2}{2^*}}} = \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-\alpha-1}{\alpha+\beta+2}}. \tag{2.63}$$

Substituindo (2.63) em (2.62), concluímos que

$$f(a_0) = \frac{2^*}{N}\left[\left\{\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-\alpha-1}{\alpha+\beta+2}}\right\}\frac{\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}}{2^*\left(\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{2.64}$$

Agora vamos estimar o fator $\dfrac{\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}}{\left(\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}$.

Pela Proposição A.2 (Brezis-Nirenberg [8], Lema 1.1), $\forall\ N \geq 3$, tem-se

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = \frac{k_1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O(1),$$

$$\|w_\varepsilon\|_{p+1}^2 = \frac{k_2}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O(\varepsilon),$$

$$\|w_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \frac{k_3}{\varepsilon^{(N-4)/2}+O(1),} & \text{se } N \geq 5, \\ k_3|\log\varepsilon| + O(1) & \text{se } N = 4, \end{cases}$$

onde $k_1,\ k_2,\ k_3$ são constantes positivas que dependen só de N. Além disso $k_1/k_2 = S_{\alpha+\beta+2}$ e $p+1 = 2^*$.

Assim, temos

$$\frac{\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}}{\left(\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(1)}{\frac{k_2}{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}} + O(\varepsilon)} = \frac{k_1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\ O(1)}{k_2 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\ O(\varepsilon)}$$

$$= \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{1 + \frac{1}{k_1}\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(1)}{1 + \frac{1}{k_2}\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)} \right), \tag{2.65}$$

Dado $\varepsilon > 0$ fixo suficientemente pequeno, mostraremos que existe $D > 0$ tal que

$$\frac{1 + \frac{1}{k_1}\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(1)}{1 + \frac{1}{k_2}\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)} \leq 1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} D. \tag{2.66}$$

De fato, por definição de $O(1)$ e $O(\varepsilon)$, tem-se que para todo $r > 0$,

$$rO(1) = O(1) \text{ e } rO(\varepsilon) = O(\varepsilon).$$

Então,

$$\frac{1 + \frac{1}{k_1}\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(1)}{1 + \frac{1}{k_2}\, \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)} = \frac{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(1)}{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)}$$

$$\leq \frac{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d}{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)}, \text{ com } d > 0. \tag{2.67}$$

Seja $g = O(\varepsilon)$ então $-\varepsilon k \leq O(\varepsilon) \leq \varepsilon k$ com $k > 0$.

(i) Se $0 \leq O(\varepsilon) \leq \varepsilon k$,

$$\left(1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d\right)\left(1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)\right) = 1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon) + \varepsilon^{N-2}\, O(\varepsilon)\, d$$

$$\geq 1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d.$$

Portanto,

$$1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d \geq \frac{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d}{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)}. \tag{2.68}$$

Tomando $D = d$, de (2.67) e (2.68), segue (2.66).

(ii) Se $-\varepsilon k \leq O(\varepsilon) < 0$,

$$1 - \varepsilon^{\frac{N}{2}} k \leq 1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} O(\varepsilon) < 1.$$

Portanto, estimando (2.67), obtemos

$$\frac{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d}{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)} \leq \frac{1 + \varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d}{1 - \varepsilon^{\frac{N}{2}} k}.$$

Seja $f(\varepsilon) = \dfrac{1+\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d}{1-\varepsilon^{\frac{N}{2}}k}$. Assim $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = 1$, e portanto, por (2.67), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos a desigualdade desejada.

$$\frac{1+\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, d}{1+\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\, O(\varepsilon)} \leq 1+\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}D, \tag{2.69}$$

onde $D = d+1$.

Assim por (2.65), concluímos que

$$\frac{\|w_\varepsilon\|^2_{H_0^1}}{\left(\int_\Omega w_\varepsilon^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} \leq S_{\alpha+\beta+2}\left(1+\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}D\right),\ \text{com } D > 0. \tag{2.70}$$

Logo, substituindo (2.70) em (2.64), segue que

$$f(a_0) \leq \frac{2^*}{N}\ \left[\left\{\left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\frac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-\alpha-1}{\alpha+\beta+2}}\right\}\ \frac{1}{2^*}S_{\alpha+\beta+2}\left(1+\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}D\right)\right]^{\frac{N}{2}},$$

ou seja,

$$f(a_0) \leq \frac{2^*}{N}\frac{1}{(2^*)^{\frac{N}{2}}}\left[MS_{\alpha+\beta+2} + MS_{\alpha+\beta+2}D\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right]^{\frac{N}{2}}, \tag{2.71}$$

onde, $M = \left(\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}} + \left(\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}\right)^{\frac{-\alpha-1}{\alpha+\beta+2}} > 0.$

Agora, defina a função contínua dado por $t(x) = x^\beta$ com $\beta \geq 1$, $p,\ q \geq 0$ reais quaisquer. Pela Proposição A.1, obtemos que

$$(p+q)^\beta \leq p^\beta + \beta(p+q)^{\beta-1}q.$$

Assim, usando a estimativa acima e a Proposição 2.1

$$\begin{aligned}\left[MS_{\alpha+\beta+2} + MS_{\alpha+\beta+2}D\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right]^{\frac{N}{2}} &\leq (MS_{\alpha+\beta+2})^{\frac{N}{2}}\\ &+ \frac{N}{2}\left(MS_{\alpha+\beta+2} + MS_{\alpha+\beta+2}D\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)^{\frac{N-2}{2}} MS_{\alpha+\beta+2}D\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\\ &= (MS_{\alpha+\beta+2})^{\frac{N}{2}} + \tilde{a}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\\ &= (S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right).\end{aligned} \tag{2.72}$$

Agora, por (2.72) e (2.71), segue que

$$f(a_0) \leq \frac{2^*}{N}\frac{1}{(2^*)^{\frac{N}{2}}}\left[(S_{\alpha,\beta})^{\frac{N}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)\right],$$

ou seja, o valor máximo de f é estimado por

$$f(a_0) \leq \frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right). \tag{2.73}$$

Finalmente, por (2.58)

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq h_\varepsilon(t_\varepsilon) &= f(t_\varepsilon) - \mu\, c_0\, \varepsilon^\theta\, t_\varepsilon^{\alpha'+\beta'+2} \\ &\leq f(a_0) - \mu\, c_0\, \varepsilon^\theta\, t_\varepsilon^{\alpha'+\beta'+2}\end{aligned}$$

e consequentemente por (2.73) segue que

$$\sup_{t\geq 0} J\left(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon\right) \leq \frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) - \mu K \varepsilon^\theta,$$

onde $\theta = \frac{4-(\alpha'+\beta')(N-2)}{4}$, $K = c_0 t_\varepsilon^{\alpha'+\beta'+2} > 0$ e $t_\varepsilon \in (0, a_0]$.

□

Apresentamos agora a prova do Teorema 2.1.

Demonstração. Por hipótese, $N \geq 4$ e $\alpha + \beta = \frac{4}{N-2}$.
Vamos dividir a aprova do teorema em dois casos.
1° Caso: Se $N > 4$.

(i) Se $0 < \alpha' + \beta' < \frac{4}{N-2}$.

Assim, $0 < (N-2)(\alpha' + \beta') < 4$, e consequentemente $0 < \theta = \frac{4-(N-2)(\alpha'+\beta')}{4} < 1$.
Como $N > 4$, então $1 < \frac{N-2}{2}$ e portanto,

$$0 < \theta < \frac{N-2}{2}. \tag{2.74}$$

Note que, para ε suficientemente pequeno,

$$O(\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}) - \mu k \varepsilon^\theta < 0. \tag{2.75}$$

De fato, para ver isso, basta analisar a expresão $c_1\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} - c_2\varepsilon^\theta$, onde $c_i > 0$.
Logo, para ε suficientemente pequeno e por (2.74), temos que

$$c_1\varepsilon^{\frac{N-2}{2}} - c_2\varepsilon^\theta < 0.$$

Usando a estimativa acima e a Proposição 2.3, segue que,

$$\sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) < \frac{2^*}{N}\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{2^*}\right)^{\frac{N}{2}}. \tag{2.76}$$

(ii) Se $\alpha' + \beta' = 0$.

Então $\theta = 1 < \frac{N-2}{2}$, pois $N > 4$. Portanto, a estimativa (2.75) é satisfeita e consequentemente a desigualdade (2.76).
Portanto, se $N > 4$, o problema (2.1), possui uma solução para cada $\mu > 0$.
2° Caso: Se $N = 4$.

(i) Se $0 < \alpha' + \beta' < \frac{4}{N-2} = 2$.
Então $0 < \theta = 1 - \frac{\alpha' + \beta'}{2} < 1$. Logo, pela Proposição 2.3, segue que

$$\sup_{t \geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2 + O(\varepsilon) - \mu K \varepsilon^{1 - \frac{\alpha' + \beta'}{2}}. \tag{2.77}$$

Logo, por (2.75) e (2.77), obtemos

$$\sup_{t \geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) < \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2.$$

(ii) Se $\alpha' + \beta' = 0$.
Então $\theta = 1$ e $\alpha' = \beta' = 0$.
Note que para ε suficientemente pequeno, obtemos

$$\sup_{t \geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2 + O(\varepsilon) - \mu K \varepsilon |\log \varepsilon|. \tag{2.78}$$

De fato, em (2.54), tem-se

$$J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) = \left(\frac{A^2 + B^2}{2}\right) \|w_\varepsilon\|^2_{H^1_0} t^2 - A^{\alpha+1} B^{\beta+1} \int_\Omega w_\varepsilon^4 dx t^4 - \mu AB \int_\Omega w_\varepsilon^2 dx t^2.$$

Logo, observamos que o funcional acima tem a forma,

$$J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) = at^2 - bt^{2^*} - \mu\, c_0\, t^2 = (a - \mu c_0)t^2 - bt^{2^*} := h_\varepsilon(t), \tag{2.79}$$

onde,

$$a := \left(\frac{A^2 + B^2}{2}\right) \|w_\varepsilon\|^2_{H^1_0} > 0\ ,\ b := A^{\alpha+1} B^{\beta+1} \int_\Omega w_\varepsilon^4 dx > 0\ ,\ c_0 := AB \int_\Omega w_\varepsilon^2 dx > 0.$$

Observe que $\mu < \lambda_1$ por hipótese, assim como $AB \leq \dfrac{A^2 + B^2}{2}$, então $2\left(\dfrac{AB}{A^2 + B^2}\right)\mu \leq \mu < \lambda_1$.
Além disso,

$$\lambda_1 \leq \frac{\|w_\varepsilon\|^2_{H^1_0}}{\displaystyle\int_\Omega w_\varepsilon^2 dx}.$$

Então,

$$2\left(\frac{AB}{A^2 + B^2}\right)\mu < \frac{\|w_\varepsilon\|^2_{H^1_0}}{\displaystyle\int_\Omega w_\varepsilon^2 dx}$$

e portanto

$$a > \mu c_0. \tag{2.80}$$

Observa-se que $h_\varepsilon(0) = 0$ e como $a - \mu c_0 > 0$, $h_\varepsilon(t) > 0$ para t suficientemente pequeno e $\lim\limits_{t\to+\infty} h_\varepsilon(t) = -\infty$.
Então existe $\sup\limits_{t\geq 0} h_\varepsilon(t)$ e é atingido em algum $t_\varepsilon > 0$, logo temos que

$$\sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) = \sup_{t\geq 0} h_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t_\varepsilon). \tag{2.81}$$

Logo, derivando a função h_ε e avaliando no ponto máximo t_ε,

$$0 = h'_\varepsilon(t_\varepsilon) = t_\varepsilon(2a - 4bt_\varepsilon^2 - 2\mu c_0).$$

Então

$$0 = 2a - 4bt_\varepsilon^2 - 2\mu c_0. \tag{2.82}$$

Agora, como $2\mu c_0 > 0$, temos que $0 < 2a - 4bt_\varepsilon^2$.
Portanto

$$t_\varepsilon < \left(\frac{a}{2b}\right)^2 := a_0.$$

Observe que não pode acontecer que $t_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. De fato, se isso ocorre, então por (2.82) temos que $a = \mu c_0$, o que é uma contradição com (2.80), logo existe $r > 0$ tal que $r \leq t_\varepsilon$.
Em (2.81), segue que

$$h_\varepsilon(t_\varepsilon) \leq at_\varepsilon^2 - bt_\varepsilon^4 - \mu c_0 r^2. \tag{2.83}$$

Agora vamos considerar a função $f(t) = at^2 - bt^4$.
Esta função já foi analisada desde a relação (2.61) até a relação (2.73), assim obtemos que

$$f(a_0) \leq \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2 + O\left(\varepsilon\right). \tag{2.84}$$

Logo, por (2.83), temos que

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t_\varepsilon) &\leq f(t_\varepsilon) - \mu c_0 r^2, \\ &\leq f(a_0) - \mu c_0 r^2. \end{aligned}$$

Usando a última estimativa e (2.84), segue que

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(t_\varepsilon) &\leq \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2 + O\left(\varepsilon\right) - \mu c_0 r^2, \\ &= \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2 + O\left(\varepsilon\right) - \mu ABr^2 \int_\Omega w_\varepsilon^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição A.2 (Brézis-Nirenberg [8], Lema 1.1.) Veja também De Figueireido [12], Lema 2.2.

$$\|w_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} k_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) & \text{se } N \geq 5, \\ k_1\varepsilon|\log\varepsilon| + O(\varepsilon) & \text{se } N = 4, \end{cases}$$

onde, k_1 é uma constante positiva.
Portanto

$$h_\varepsilon(t_\varepsilon) \leq \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2 + O(\varepsilon) - \mu K \varepsilon |\log \varepsilon|. \tag{2.85}$$

Finalmente, substituindo (2.85) em (2.81), concluímos que a estimativa (2.78) é verificada.
Agora vamos analisar a seguinte função, $h(x) = x - x|\log x|$.
Note que existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $h(x) < 0$, para todo $x \in (0, x_0)$. De fato, seja $x_0 = \frac{1}{e}$.
Assim, $\log x_0 = -1$.
Agora se $x \in (0, x_0)$ então $\log x < \log x_0 = -1$, e consequentemente $1 < |\log x|$.
Assim, $x < x|\log x|$ e Portanto $h(x) < 0, \ \ \forall\, x \in (0, x_0)$.
Finalmente, usando a informação sobre a função h, para ε suficientemente pequeno em (2.78), concluímos que

$$\sup_{t \geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) < \left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{4}\right)^2.$$

Portanto, se $N = 4$, o problema (2.1), também possui uma solução para cada $\mu > 0$.

Concluímos pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) (Teorema B.21) que J possui um ponto crítico não trivial $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, que é uma solução do sistema (2.1) e essa solução é estritamente positiva pelo Princípio do Máximo. $\square$

Observação:
A solução é de classe $C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega})$. De fato, pelo Teorema B.18 (Teorema de Brézis-Kato) tem-se $u, v \in L^q$ para todo $q \geq 1$.
Pelo Teorema B.3 (Desigualdade de Hölder) temos que $f = (\alpha+1)u^\alpha v^{\beta+1} + \mu(\alpha'+1)u^{\alpha'} v^{\beta'+1}$ e $(\beta+1)u^{\alpha+1}v^\beta + \mu(\beta'+1)u^{\alpha'+1}v^{\beta'} \in L^q$ para todo $1 \leq q < \infty$. Pelo Teorema B.16 $u, v \in W^{2,q}(\Omega)$ para todo $q > 1$. Logo tomando $q > N$ e pelo Teorema B.4 (iii) tem-se que $u, v \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para todo $0 < \theta \leq 1 - N/q$.
Logo $f \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ com $0 < \lambda \leq \theta$. Pelo Teorema B.15 (Teorema de Shauder) obtemos que $u, v \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^2(\overline{\Omega})$.
Como (u,v) é solução fraca do sistema (2.1), pelo Teorema B.17, $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$.

Agora vamos mostrar nosso segundo resultado.

Teorema 2.2. *Suponhamos que $N = 3$ e $\alpha + \beta = 4$, nós distinguimos dois casos:*

(1) Se $2 < \alpha' + \beta' < 4$, então para cada $\mu > 0$, o sistema (2.1) tem ao menos uma solução.

(2) Se $0 < \alpha' + \beta' \leq 2$, então para cada μ suficentemente grande existe ao menos uma solução para o sistema (2.1).

Demonstração. Por hipótese, $N = 3$ e $\alpha + \beta = 4$, assim pela Proposição 2.3, nós temos

$$\sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) \leq 2\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{6}\right)^{\frac{3}{2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) - \mu K\varepsilon^\theta. \tag{2.86}$$

(i) Se $2 < \alpha' + \beta' < 4$.
Então $\frac{1}{2} < \frac{\alpha'+\beta'}{4} < 1$. Assin, segue que $0 < \theta = 1 - \frac{\alpha'+\beta'}{4} < \frac{1}{2}$.
Logo, para ε suficientemente pequeno tem-se $c_1\varepsilon^{1/2} - c_2\varepsilon^\theta < 0$, ou seja,

$$O(\varepsilon^{1/2}) - \mu k\varepsilon^\theta < 0. \tag{2.87}$$

Portanto, por (2.87) e (2.86), concluímos que

$$\sup_{t\geq 0} J(tAw_\varepsilon, tBw_\varepsilon) < 2\left(\frac{S_{\alpha,\beta}}{6}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{2.88}$$

(ii) Se $0 < \alpha' + \beta' \leq 2$.
Então $\theta \geq 1/2$, logo tomando μ suficientemente grande em (2.86), obtemos (2.87) e consequentemente obtemos a estimativa (2.88).
Então o problema (2.1), tem uma solução para cada $\mu > 0$, suficientemente grande.

Concluímos pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) (Teorema B.21) que J possui um ponto crítico não trivial $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, que é uma solução do sistema (2.1) e essa solução é estritamente positiva pelo Princípio do Máximo. $\square$

Analogamente pela observação anterior $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$.

3 RESULTADO DE NÃO-EXISTÊNCIA

Neste capítulo demonstramos um resultado de não existência para o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -\Delta u = (\alpha+1)u^{\alpha}v^{\beta+1} + \mu(\alpha'+1)u^{\alpha'}v^{\beta'+1} & \text{em } \Omega, \\ -\Delta u = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^{\beta} + \mu(\beta'+1)u^{\alpha'+1}v^{\beta'} & \text{em } \Omega, \\ u>0, \quad v>0 \quad \text{em } \Omega, \\ u=v=0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\partial\Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, α, β, são constantes positivas e α', β' são constantes não negativas tais que $\alpha+\beta = \frac{4}{N-2}$ e $0 \leq \alpha'+\beta' < \frac{4}{N-2}$.
O seguinte resultado garante a não existência de soluções para o sistema (3.1).

Teorema 3.1. *Se $\alpha+\beta = \frac{4}{N-2}$, $0 \leq \alpha'+\beta' < \frac{4}{N-4}$, $\mu < 0$ e Ω é um domínio estrelado, então (3.1) não tem solução.*

Para provar o Teorema 3.1 trabalharemos com uma versão da Identidade de Pohozaev [18] para sistemas. Necessitamos do seguinte resultado.

Lema 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $w=0$ sobre $\partial\Omega$, então*

$$\int_{\Omega} \Delta w(x.\nabla w)dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 (x.\nu)d\sigma + \frac{N-2}{2}\int_{\Omega}|\nabla w|^2 dx,$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior a Ω.

Demonstração. Fazendo os cálculos com $x=(x_1,...,x_N) \in \Omega$ e $w(x) = w(x_1,...,x_N)$ encontramos que

$$\Delta w(x.\nabla w) = div[\nabla w(x.\nabla w)] - \nabla w.\nabla(x.\nabla w), \tag{3.2}$$

$$\nabla w.\nabla w(x.\nabla w) = |\nabla w|^2 + x.\nabla\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}\right) \tag{3.3}$$

e

$$\nabla\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}\right).x = div\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}x\right) - N\frac{|\nabla w|^2}{2}. \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3) e logo substituindo o resultado em (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta w(x.\nabla w) &= div[\nabla w(x.\nabla w)] - |\nabla w|^2 - div\left(\frac{|\nabla w|^2}{2}x\right) + N\frac{|\nabla w|^2}{2} \\ &= div\left[\nabla w(x.\nabla w) - \frac{|\nabla w|^2}{2}x\right] + \frac{N-2}{2}|\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Integrando em Ω e aplicando o Teorema da divergência na equação acima, obtemos

$$\int_{\Omega} \Delta w(x.\nabla w)dx = \int_{\partial\Omega}\left[(\nabla w.\nu)(x.\nabla w) - \frac{|\nabla w|^2}{2}(x.\nu)\right]d\sigma + \frac{N-2}{2}|\nabla w|^2 dx, \tag{3.5}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior. Como $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que $\nabla w = (\nabla w.\nu)\nu$ sobre $\partial\Omega$, pois ∇w é ortogonal à superfície de nível $w = 0$. Daí obtemos

$$\int_{\partial\Omega}\left[(\nabla w.\nu)(x.\nabla w) - \frac{|\nabla w|^2}{2}(x.\nu)\right]d\sigma = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla w.\nu|^2(x.\nu)d\sigma. \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) em (3.5) concluímos a demonstração do lema. $\square$

Em seguida, vejamos a declaração original da Identidade de Pohozaev [18].

Proposição 3.1. *Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com primitiva $G(u) = \int_0^u g(s)ds$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é solução da equação*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u), & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

então

$$\frac{N-2}{N}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 dx - N\int_{\Omega} G(u)dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2(x.\nu)d\sigma = 0,$$

onde $\partial u/\partial\nu(x)$ é a derivada normal no ponto $x \in \partial\Omega$.

Demonstração. Ver [22], Teorema. B.1, pag. 136.
Na demonstração do Teorema 3.1, utilizamos a seguinte versão para sistemas da Identidade de Pohozaev. Veja [2]

Proposição 3.2 (Identidade de Pohozaev para sistemas)**.** *Suponhamos que $(u, v) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \times C^2(\Omega, \mathbb{R}) = [C^2(\Omega, \mathbb{R})]^2$ é uma solução do problema :*

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) \ em \quad \Omega, \\ \\ -\Delta v = \dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v) \ em \quad \Omega, \\ \\ u = v = 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $(N \geq 3)$, com fronteira $\partial\Omega$ suave, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $F(0, 0) = 0$, então

$$\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma + (N-2)\left[\int_{\Omega}(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v})dx\right] = 2N\int_{\Omega} F(u, v)dx,$$

onde ν denota o vetor normal exterior à $\partial\Omega$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} div(xF(u,v)) = div\left(\frac{\nabla(|x|^2)}{2}F(u,v)\right) &= \frac{\Delta(|x|^2)}{2}F(u,v) + \frac{\Delta(|x|^2)}{2}.\nabla F(u,v) \\ &= NF(u,v) + x.(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\nabla u + \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\nabla v) \\ &= NF(u,v) + \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)(x.\nabla u) + \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)(x.\nabla v). \end{aligned}$$

Integrando em Ω e aplicando o Teorema da divergência, segue que

$$\int_{\partial\Omega}(x.\nu)F(u,v)d\sigma = N\int_\Omega F(u,v)dx + \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)(x.\nabla u)dx + \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)(x.\nabla v)dx.$$

Pelo sistema (3.7) e usando que $F(u,v) = 0$ sobre $\partial\Omega$, pois $u = v = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtemos

$$\int_\Omega \Delta u(x.\nabla u)dx + \int_\Omega \Delta v(x.\nabla v)dx - N\int_\Omega F(u,v)dx = 0.$$

Aplicando o Lema 3.1 com $w = u$ e com $w = v$ e substituindo na equação acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x.\nu)d\sigma + \frac{N-2}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)dx - N\int_\Omega F(u,v)dx = 0.$$

Multiplicando a equação anterior por $2^*/N$ obtemos

$$\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma + (N-2)\left[\int_\Omega\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)dx\right] = 2N\int_\Omega F(u,v)dx.$$

□

Prova do Teorema 3.1

Demonstração. A prova deste resultado é uma consequência da Proposição 3.2.
Por contradição, suponhamos que o problema (3.1) tem uma solução clássica (u,v) tal que $u > 0$ *e* $v > 0$ em Ω.
Defina

$$F(u,v) = H(u,v) + \mu G(u,v) = u^{\alpha+1}v^{\beta+1} + \mu u^{\alpha'+1}v^{\beta'+1}, \tag{3.8}$$

Assim, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $F(0,0) = 0$.
Logo, de (3.8), tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = (\alpha+1)u^\alpha v^{\beta+1} + \mu(\alpha'+1)u^{\alpha'}v^{\beta'+1}, \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = (\beta+1)u^{\alpha+1}v^\beta + \mu(\beta'+1)u^{\alpha'+1}v^{\beta'}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Agora, por (1.1) e (3.9), nós temos

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\\
-\Delta v &= \frac{\partial F}{\partial v}(u,v),
\end{aligned}
$$

em Ω. Então F está nas condições da Proposição 3.2. Assim,

$$
\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma+(N-2)[\int_{\Omega}((\alpha+1)u^{\alpha}v^{\beta+1}+\mu(\alpha^{'}+1)u^{\alpha^{'}}v^{\beta^{'}+1}+
$$
$$
(\beta+1)u^{\alpha+1}v^{\beta}+\mu(\beta^{'}+1)u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}})dx]=2N\int_{\Omega}(u^{\alpha+1}v^{\beta+1}+\mu u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}+1})dx.
$$

Portanto,

$$
\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma=
$$

$$
\int_{\Omega}\left[(4-(N-2)(\alpha+\beta))u^{\alpha+1}v^{\beta+1}+\mu(4-(N-2)(\alpha^{'}+\beta^{'}))u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}+1}\right]dx. \tag{3.10}
$$

Logo, usando a hipótese $\alpha+\beta=\frac{4}{N-2}$, segue que $4-(N-2)(\alpha+\beta)=0$. Assim por (3.10), tem-se

$$
\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma=\mu(4-(N-2)(\alpha^{'}+\beta^{'}))\int_{\Omega}u^{\alpha^{'}+1}v^{\beta^{'}+1}dx. \tag{3.11}
$$

Como $\mu<0$ e $0\leq\alpha^{'}+\beta^{'}<\frac{4}{N-2}$, então $4-(N-2)(\alpha^{'}+\beta^{'})>0$ e consequentemente

$$
\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma<0. \tag{3.12}
$$

Por outro lado, por hipótese, temos que Ω é um domínio estrelado com $\partial\Omega\in C^1$, assim pelo Lema A.7 segue que

$$
\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)x.\nu d\sigma\geq 0,
$$

o que é um absurdo por (3.12).

Portanto, o problema (3.1) não tem solução para $\mu<0$.

REFERÊNCIAS

[1] ADAMS, Robert A. Sobolev spaces. 1975, 1975.

[2] ALVES, C. O., De Morais Filho, D. C. and Souto, M. A. S. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical sobolev exponents. *Nonlinear Anal.*, 42(5):771–787, November 2000.

[3] AMBROSETTI, Antonio and Rabinowitz, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. 14:349–381, 12 1973.

[4] BIEZUNER, Rodney Josué. Notas de aula: Autovalores do laplaciano. *Minas Gerais*, 2006.

[5] BIEZUNER, Rodney Josué. Equações diferenciais parciais i/ii. 2011.

[6] BOUCHEKIF, Mohammed and Nasri, Yasmina. Existence results for elliptic systems involving critical sobolev exponents. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2004:Paper–No, 2004.

[7] BRÉZIS, Haïm and Lieb, Elliott. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88(3):486–490, 1983.

[8] BRÉZIS, Haïm and Nirenberg, Louis. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 36(4):437–477, 1983.

[9] BRÉZIS, Haïm. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, volume 1. Springer, New York, 2010.

[10] BRÉZIS, Haïm. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*. Masson, Paris, 2 edition, 1983.

[11] CALANCHI, Marta and Ruf, Bernhard. Elliptic equations with one-sided critical growth. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2002:Paper–No, 2002.

[12] DE FIGUEIREDO, Djairo G., Yang, Jianfu et al. Critical superlinear ambrosetti-prodi problems. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 14(1):59–80, 1999.

[13] EVANS, Lawrence C. Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer. *Current developments in mathematics*, 1997(1):65–126, 1997.

[14] GILBARG, D., Trudinger: Ns. *Elliptic partial differential equations of second order*, 1998.

[15] KAVIAN, Otared. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, volume 13. Springer, 1993.

[16] KOROVKIN, Pavel Petrovich. *Inequalities*. Imported Pubn, 1975.

[17] MITROVIĆ, Dragiša and Žubrinić, Darko. *Fundamentals of applied functional analysis*. Addison Wesley Longman Inc., 1998.

[18] POHOZAEV, Stanislav I. Eigenfunctions of the equation u+ λf (u)= 0. In *Soviet Math. Dokl.*, volume 6, pages 1408–1411, 1965.

[19] SOUZA DA COSTA, Paulo H. *Sistemas de equações elípticas semilineares envolvendo expoente crítico de Sobolev.* Universidade Federal do Espírito Santo, 2009.

[20] STRUWE, Michael. Variational methods (applications to nonlinear pde and hamiltonian systems). *Bull. Amer. Math. Soc*, 28:149–153, 1993.

[21] WILLEM, Michel. *Analyse harmonique réelle.* Editions Hermann, 1995.

[22] WILLEM, Michel. *Minimax Theorems*, volume 24. Birkhaüser, Boston, 1996.

$\square$

APÊNDICE A – ALGUNS RESULTADOS AUXILIARES

O principal objetivo deste apêndice é apresentar e demonstrar alguns resultados gerais. Estes resultados serão utilizados nos Capítulos 2 e 3, afin de dar suporte às demonstrações dos resultados importantes do trabalho.

Lema A.1. *Sejam a e b constantes reais positivas e $x \in \mathbb{R}$ tais que*

$$x^2 \leq ax + b.$$

Então existe $k > 0$ tal que $x \leq k$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} x^2 \leq ax + b &\iff x^2 - ax - b \leq 0 \\ &\iff 4x^2 - 4ax - 4b + a^2 \leq a^2 \\ &\iff (2x - a)^2 \leq a^2 + 4b \\ &\iff x \leq \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} < \infty. \end{aligned}$$

□

Lema A.2. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Então para todo $\alpha > 0$, nós temos*

$$(f^+)^\alpha.(f^-) = 0 \;\; e \;\; (f^+).(f^-)^\alpha = 0.$$

Demonstração. Por definição de f^+ e f^- segue que $(f^+).(f^-) = 0$.
Logo vamos considerar as seguintes situações sobre $\alpha > 0$:
1° Caso: $\alpha \geq 1$.
Neste caso existe $r \geq 0$ tal que $\alpha = 1 + r$, assim

$$(f^+)^\alpha.(f^-) = (f^+)^{1+r}.(f^-) = (f^+).(f^-).(f^+)^r = 0.$$

2° Caso: $0 < \alpha < 1$.

$$(f^+)^\alpha.(f^-) = ((f^+).(f^-)^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha.$$

Como $\frac{1}{\alpha} > 1$, pelo caso anterior temos

$$(f^+).(f^-)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

Assim, temos que

$$(f^+)^\alpha.(f^-) = 0, \quad \forall\, \alpha > 0.$$

De forma análoga é possível provar que $(f^+).(f^-)^\alpha = 0$. □

Lema A.3. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *e uma sequência* $u_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Então

$$u_n \to u_0 \; q.t.p. \; em \; \Omega \iff u_n^+ \to u_0^+ \; q.t.p. \; em \; \Omega \;\; e \;\; u_n^- \to u_0^- \; q.t.p. \; em \; \Omega.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$)
Como $|u| = u^+ + u^-$ e $u = u^+ - u^-$, então $u^+ = \frac{1}{2}(|u| + u)$ e $u^- = \frac{1}{2}(|u| - u)$.
Por hipótese tem-se $|u_n| \to |u_0|$ *q.t.p.* em Ω,
então

$$u_n^+ = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) \to \frac{1}{2}(|u_0| + u_0) = u_0^+.$$

$$\text{Portanto,} \quad u_n^+ \to u_0^+ \quad q.t.p. \;\; em \;\; \Omega.$$

De forma análoga, temos que $u_n^- \to u_0^-$.
($\Leftarrow$)
Por hipótese temos $u_n^+ - u_n^- \to u_0^+ - u_0^-$.

$$\text{Portanto,} \quad u_n \to u_0 \quad q.t.p. \;\; em \;\; \Omega.$$

□

Lema A.4. *Se* $x \geq -1$ *e* $0 < \alpha < 1$, *então*

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x. \tag{A.1}$$

Além disso, se $\alpha < 0$ *ou* $\alpha > 1$, *então*

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \tag{A.2}$$

Demonstração. Ver [16], pag. 23

Lema A.5. *Se* $a,\ b > 0$ *e* $x \geq 0$, *então a função* $f(x) = x^b - ax$ *atinge o menor valor no ponto* $x_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$ *igual a*

$$f(x_0) = (1 - b)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b-1}}.$$

Demonstração. O lema é facilmente provado no caso em que $b = 2$.
De fato, já que

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \geq \frac{-a^2}{4}.$$

A função f atinge o menor valor $\frac{-a^2}{4}$ quando $x = \frac{a}{2} > 0$.
No caso de valor arbitrário de $b > 1$, o lema é provado usando a desigualdade (A.2) do

lema A.4.
Desde que $b > 1$, então para todo $z \geq -1$, nós temos

$$(1+z)^b \geq 1 + bz.$$

A igualdade é válida apenas quando $z = 0$. Assumindo aqui, que $1 + z = y$, nós temos

$$y^b \geq 1 + b(y-1), \;\; y^b - by \geq 1 - b, \;\; y \geq 0.$$

O sinal da igualdade é válido somente quando $y = 1$.
Multiplicando ambos membros da desigualdade por c^b, nós temos

$$(cy)^b - bc^{b-1}(cy) \geq (1-b)c^b, \; y \geq 0.$$

Assumindo

$$x = cy \;\; e \;\; bc^{b-1} = a \; , \;\; c = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} = x_0.$$

Nós temos

$$x^b - ax \geq (1-b)c^b = (1-b)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b-1}},$$

aqui a igualdade ocorre apenas quando $x = c = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} = x_0$.
Assim, a função.

$$f(x) = x^b - ax \; , \;\; b > 1 \; , \;\; a > 0 \; ; \;\; x \geq 0;$$

atinge o menor valor no ponto $x_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$;
igual a

$$f(x_0) = (1-b)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b-1}}.$$

Portanto, o lema está provado.

□

Lema A.6 (Desigualdade de Young)**.** *para todo* $x, y > 0$ *e* $p > 1$, $q > 1$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *nós temos que*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demonstração. Em virtude do Lema A.5, se $0 < b < 1$ e $x \geq 0$,

$$x^b - ax \geq (1-b)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{b-1}}.$$

Assumindo nesta desigualdade que $b = p$, $a = py$, nós temos

$$x^p - (py)x \geq (1-b)\left(\frac{py}{b}\right)^{\frac{p}{p-1}} = (1-p)y^{\frac{p}{p-1}}. \qquad \text{(A.3)}$$

Como $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \; ; \; q = \frac{p}{p-1} \; ; \; p - 1 = \frac{p}{q}.$$

Colocando esses valores na desigualdade (A.3), nós temos

$$x^p - pyx \geq \frac{-p}{q} y^q.$$

Dividindo todos os membros desta última desigualdade por p

$$\frac{x^p}{p} - yx \geq \frac{-1}{q} y^q.$$

Finalmente transpondo os membros negativos para o lado oposto, obtemos

$$yx \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

□

Corolário A.1. *Para todo x, y >0 e p, q>0*

$$\textit{temos que} \quad x^p y^q \leq \frac{p}{p+q} x^{p+q} + \frac{q}{p+q} y^{p+q}.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Young

$$x^p y^q \leq \frac{(x^p)^\alpha}{\alpha} + \frac{(y^q)^\beta}{\beta} \; , \; \textit{tal que} \; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{p+q}{p} > 1$ *e* $\beta = \dfrac{p+q}{q} > 1$, obtemos

$$x^p y^q \leq \frac{p}{p+q} x^{p+q} + \frac{q}{p+q} y^{p+q}.$$

□

Proposição A.1. *Sejam $\beta \geq 1$, p e $q \geq 0$ reais quaisquer, então*

$$(p+q)^\beta \leq p^\beta + \beta(p+q)^{\beta-1} q.$$

Demonstração. Sejam $\beta \geq 1$, $p, \; q \geq 0$ reais quaisquer e a função real, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^\beta$.
Então $f'(x) = \beta x^{\beta-1}$, pelo T.V.M. tem-se que $f(p+q) - f(p) = f'(c)q$, com $p \leq c \leq p+q$.
Logo, substituindo acima, temos que

$$(p+q)^\beta - p^\beta = \beta c^{\beta-1} q \leq \beta(p+q)^{\beta-1} q.$$

Portanto,

$$(p+q)^\beta \leq p^\beta + \beta(p+q)^{\beta-1} q.$$

□

Lema A.7. *(Normal a um domínio estrelado)*
Suponhamos ∂U *é* C^1 *e* U *é estrelado com respeito à origem.*
Então

$$x.\nu(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \partial U.$$

Demonstração. Ver [13], pag. 515.

Proposição A.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado, considerando uma função positiva* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *fixa, tal que* $\varphi \equiv 1$ *para* x *numa vizinhança de* 0*, então para* $\varepsilon \to 0$ *e para tudo* $N \geq 3$*, temos*

$$\|\nabla w_\varepsilon\|_2^2 = \frac{k_1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O(1),$$

$$\|w_\varepsilon\|_{p+1}^2 = \frac{k_2}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O(\varepsilon),$$

$$\|w_\varepsilon\|_2^2 = \begin{cases} \frac{k_3}{\varepsilon^{(N-4)/2} + O(1),} & se\ N \geq 5, \\ k_3|\log \varepsilon| + O(1) & se\ N = 4, \end{cases}$$

onde $w_\varepsilon(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$, $k_1,\ k_2,\ k_3$ *são constantes positivas que dependen só de* N*. Além disso* $k_1/k_2 = S_{\alpha+\beta+2}$ *e* $p + 1 = 2^*$.

Demonstração. Ver [8], Lema 1.1, Paginas 443 e 444.

APÊNDICE B –

Este apêndice contém uma breve apresentação de alguns conceitos e resultados que serão necessários para a compreensão do trabalho. Introduziremos resultados importantes da Teoria da Medida, da Análise Funcional e dos Espaços de Sobolev, instrumentos de grande importância no estudo das equações diferenciais parciais (EDPs). O principal objetivo deste apêndice, será reunir resultados clássicos a fim de facilitar a leitura dos capítulos. Desta forma omitiremos a maioria das demonstrações que podem ser encontrados em textos sobre os assuntos.([1], [9], [10], [15], [13], [17])

Iniciamos com a definição de topologia fraca em espaços de Banach (ver [10]).

Seja E um espaço de Banach com norma $\|.\|$. O espaço dual de E, denotado por E', é o espaço dos funcionais lineares contínuos de E em $\mathbb{R}$. O espaço E' está dotado da norma dual:

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} f(x).$$

Dado $f \in E'$, designamos por $\varphi_f = f(x)$. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ é definida como sendo a topologia menos fina em E, isto é, com menos abertos, que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f\in E'}$. Dada uma sequência (x_n) em E, dizemos que $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em E quando $x_n \to x$ na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Teorema B.1. *Seja E um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset E$ uma sequência, então valem as seguintes afirmações :*

(i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in E'$*;*

(ii) se $x_n \to x$*, então* $x_n \rightharpoonup x$*;*

(iii) se $x_n \rightharpoonup x$*, então* (x_n) *é limitada e além disso* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$*;*

(iv) se $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *em* E' *(isto é* $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Demonstração: Ver [9], Proposição 3.13, pag. 63.

Seja E'' o bidual de E, isto é, o dual de E', dotado da norma

$$\|T\|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|\leq 1}} |T(f)|.$$

Definimos a aplicação canônica $J : E \to E''$ da seguinte forma. Dado $x \in E$, Jx é a aplicação linear contínua de E' em $\mathbb{R}$ dada por $Jx(f) = f(x)$, para todo $f \in E'$. Observamos que J é linear e J é uma isometria. Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E''$, ou seja, podemos identificar implicitamente E e E'' (através do isomorfismo J). Em espaços reflexivos, vale o seguinte resultado.

Teorema B.2. *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se e só se*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| < 1\},$$

é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Demonstração: Ver [10], Teorema III.16, pag. 44.

Observação: Se E Banach e reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Teorema B.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $0 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Ver [9], Teorema 4.6, pag. 92.

Corolário B.4 (Desigualdade Geral de Hölder)**.** *Seja $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$, com $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$, e assumir que $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para $k = 1, ..., m$, então*

$$\int_\Omega |u_1 ... u_m| dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{p_k}.$$

Demonstração: Ver [13], pag. 623.

Teorema B.5 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**.** *Seja f_n uma seqüência de funções em $L^1(\Omega)$, satisfazendo :*

(a) $f_n \to f$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração: Ver [9], Teorema 4.2, pag. 90.

Teorema B.6. *Sejam (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e existe $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $u_{n_k}(x) \to u(x)$, *q.t.p. em* Ω,

(ii) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, *para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p em Ω.*

Demonstração: Ver [9], Teorema 4.9, pag. 94.

Definição B.1. Dizemos que um comjunto A está compactamente contido em Ω, e denotamos por $A \subset\subset \Omega$ se $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ e $\bar{A}$ é compacto como subconjunto de $\mathbb{R}^N$.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto não-vazio e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição B.2. O conjunto $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ é chamado **Suporte** da função f. Denotamos este conjunto por *supp* f.

Definição B.3. Representemos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto contido em Ω.

Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto não vazio. A função definida por

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in K \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \notin K \end{cases}$$

é chamada a função caracteristica de K

B.1 FUNCIONAIS DIFERENCIÁVEIS

A finalidade dessa seção é apresentar as definições da diferencial de Gâteaux e Fréchet e alguns resultados.Também serão apresentadas sem o rigor que estes conceitos merecem, mas indicaremos a bibliografia adequada, onde o leitor poderá recorrer caso desejar.(ver [22])

Definição B.4. Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ uma função, em que U é um aberto em $V \subset \mathbb{R}^N$. O limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

se existir, será chamado derivada de Gâteaux de F em u_0 na direção $h \in V$ e será denotada por $\langle F'(u_0), h\rangle = F'_G(u_0)h$.

Definição B.5. Diz-se que F é diferenciável em u_0 no sentido de Fréchet (ou Fréchet diferenciável em u_0) se existir uma aplicação linear contínua $L : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(u_0 + h) - F(u_0) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

Se existir o limite acima, L será chamada derivada de Fréchet de F em h e será denotada por $L = F'(h)$.

Teorema B.7. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}$ em que U é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X. Se ϕ possui uma derivada de Gâteaux contínua em U, então $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Ver [22], Proposição 1.3, pag. 9.

Proposição B.1. *Se* $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tem derivada de Gâteux* $J'_G : E \longrightarrow E'$ *contínua então* $J' = J'_G$.

Demonstração. Suponha que J é Gâteaux diferenciável numa vizinhança V do ponto $z_0 \in E$ e que a aplicação $z \in V \longmapsto J'_G(z) \in E'$ é contínua. Afirmamos que J é Fréchet diferenciável em z_0 com $J'(z_0) = J'_G(z_0)$.
A função real diferenciável $t \in [0,1] \longmapsto J(z_0 + tw)$ é diferenciável para $w \in E$ com $\|w\|_E$ suficientemente pequeno. Assim, aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\tau \in (0,1)$ tal que

$$|J(z_0 + w) - J(z_0) - J'_G(z_0)w| = |J'_G(z_0 + \tau w)w - J'_G(z_0)w|. \tag{B.1}$$

Usando a continuidade da derivada de Gâteaux, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|\tau w\|_E < \delta_1$ implica que

$$\|J'_G(z_0 + \tau w) - J'_G(z_0)\|_{E'} = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\| \leq 1}} |J'_G(z_0 + \tau w)v - J'_G(z_0)v| \leq \varepsilon.$$

Logo

$$|J'_G(z_0 + \tau w)w - J'_G(z_0)w| \leq \varepsilon \|w\|_E.$$

Voltando a (B.1) obtemos que existe $\delta = \dfrac{\delta_1}{\tau} > 0$, tal que

$$|J(z_0 + w) - J(z_0) - J'_G(z_0)w| \leq \varepsilon \|w\|_E \text{ para todo } \|w\|_E \leq \delta.$$

Isto mostra que $J' = J'_G$ em E e portanto J é de classe C^1. □

O seguinte resultado que iremos apresentar será importante para mostrar que o funcional associado ao problema (1.1). é de classe C^1. Este resultado será utilizado no Capítulo 2.

Proposição B.2. *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$. *O funcional* $f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$f(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

é de classe C^1 *com*

$$f'(u)\varphi = 2\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx, \qquad u, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. A derivada de Gâteaux de f é

$$f'_G(u)\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{f(u+t\varphi)-f(u)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2dx + 2t\int_\Omega |\nabla u||\nabla\varphi|dx + t^2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2dx - \int_\Omega |\nabla u|^2dx}{t}$$

$$= 2\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx,$$

$u,\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Observe que $f'_G(u): H_0^1(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ é linear e além disso é contínua, pois pela desigualdade de Hölder e desigualdade de Poincaré,

$$|f'_G(u)\varphi| \le 2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pela Proposição B.1, para concluir a demosntração basta mostrar que f'_G é contínua. De fato, pela desigualdade de Hölder e pela desigualdade de Poincaré,

$$|f'_G(u)\varphi - f'_G(v)\varphi| \le 2\|\nabla(u-v)\|_2\|\nabla\varphi\|_2 = 2\|u-v\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

para todo $u,v,\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Daí,

$$\|f'_G(u)-f'_G(v)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\substack{\varphi\in H_0^1(\Omega)\\ \|\varphi\|\le 1}} |f'_G(u)\varphi - f'_G(v)\varphi| \to 0,$$

quando $\|u-v\|_{H_0^1(\Omega)}\to 0$. □

B.2 ESPAÇOS DE SOBOLEV

A finalidade dessa seção é apresentar a definição de espaço de Sobolev e algumas de suas propriedades. Além disso, a noção de derivada fraca. A apresentação será sem o rigor que estes conceitos merecem, mas indicaremos uma bibliografia adequada, onde o leitor poderá recorrer caso desejar.([1], [9], [13])
Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ aberto.

Definição B.6. Seja $1\le p\le\infty$. Uma função $f:\Omega\to\mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f1_K\in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K\subset\Omega$. Seja um vetor $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, onde α_i é um inteiro não negativo. Então α é chamado um multi-índice de ordem $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. Dado um multi-índice α definimos

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição B.7. Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um aberto, α um multi-indice e $f,g\in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que g é a α-ésima derivada fraca de f em Ω e escrevemos $D^\alpha f = g$, se

$$\int_\Omega f(x).D^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x).\phi dx, \quad \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Antes de dar a definição de Espaço de Sobolev, apresentamos um resultado importante.
Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$, se (f_n) é uma sequência limitada de $L^p(\Omega)$ então, pelo Teorema B.2, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) que converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para uma certa função g. O próximo resultado garante que se já tivermos que (f_n) converge para f q.t.p. em Ω então necessariamente, $g = f$.

Teorema B.8. *Se* (f_n) *é uma sequência limítada de* $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *que converge para* f *q.t.p. em* Ω, *então*

$$\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \ \varphi \ \in \ L^{p'}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [15], Lema 4.8, pag. 11.

Definição B.8. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, k um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, como o espaço das funções $v \in L^p(\Omega)$ tais que qualquer derivada fraca de v, até a ordem k, é uma função do $L^p(\Omega)$. Isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Definição B.9. Nota-se que para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$,

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \tag{B.2}$$

Além disso, para cada p, $W^{k_1,p}(\Omega) \subset W^{k_2,p}(\Omega)$ se $k_1 \geq k_2$. Para $1 \leq p \leq \infty$, temos que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma $||.||_{W^{k,p}} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$||v||_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |||D^\alpha v||^p_{L^p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p\right)^{1/p}, \qquad \text{se } 1 \leq p < \infty. \tag{B.3}$$

Uma norma equivalente de (B.3) para $W^{k,p}(\Omega)$ é

$$||v||_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha v||_{L^p}.$$

Em particular, para $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, para cada k não negativo, munido do produto interno:

$$\langle u, v\rangle_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Usualmente denota-se H^k o espaço $W^{k,2}(\Omega)$, assim da definição (B.3) temos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definição B.10. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado por $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, se

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{W^{k,p}} = 0.$$

Definição B.11. Definimos o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, isto é, $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$.
Analogamente, denotemos por $H_0^k(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$.
Portanto, uma função $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.
O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ interpreta-se como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$. tais que

$$D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq k-1.$$

Notamos que, para cada inteiro k não negativo, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$. Também nota-se que, para $p=2$, $H_0^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida de $H^k(\Omega)$.

Uma norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente à norma dada na definição (B.5) pode ser definido por

$$||u||_{W_0^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p\right)^{1/p}.$$

Como $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ são espaços de Hilbert então são espaços reflexivos.

Definição B.12. (Imersão) Sejam U e V dois espaços normados. Dizemos que U está imerso continuamente no espaço V, e denotamos por $U \hookrightarrow V$, se satisfaz as seguintes condições :
(i). U é um subespaço de V.
(ii). O operador identidade $I : U \to V$ definido por $Ix = x$, para todo $x \in U$, é contínuo.

Lembremos que se U e V são espaços normados, dizemos que um operador linear $T : U \to V$ é compacto quando T é contínuo e leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $A \subseteq U$ é limitado, então $\overline{T(A)} \subseteq V$ é compacto.

Já que I é linear, (ii) é quivalente a dizer que existe uma constante c tal que

$$\|Ix\|_V \leq c\|x\|_U, \quad \forall\, x \in U.$$

Se $U \hookrightarrow V$ e o operador identidade $I : U \to V$ na imersão for compacto, então dizemos que a imersão de U em V é compacta e a denotamos por $U \overset{c}{\hookrightarrow} V$.

Teorema B.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de classe C^1 com fronteira limitada e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

(i) Se $1 \leq p < N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

(ii) Se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, +\infty)$.

(iii) Se $p > N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [9], Corolário 9.14, pag. 284.

Teorema B.10. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um domínio limitado com fronteira suave, então*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$com \qquad 1 \leq q \leq 2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} & se \quad N \geq 3; \\ \\ \infty & se \quad N = 1, 2. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [5], Corolário 11.32, pag. 236.

Teorema B.11 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $N \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas.*

(i). Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

(ii). Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$.

(iii). Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração: Ver [9], Teorema 9.16, pag. 285.

Observação 1: Notar que, se $p = 2$, então para *(i)* e *(ii)* do teorema acima, temos que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2} \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

onde $q \in [1, p^*[$ com $p^* = \dfrac{2N}{N-2}$ se $N > p = 2$, e $q \in [1, +\infty[$ se $N = p = 2$.
Agora, como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, então

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega).$$

De fato, considere o operador identidade $I : H_0^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Temos que mostrar que I é um operador compacto.
Com efeito, seja $A \subset H_0^1(\Omega)$ limitado, então $\|u\|_{H_0^1} \leq k$, $\forall\, u \in A$. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, então pela equivalência de normas, temos que $\|u\|_{H^1} \leq c\|u\|_{H_0^1} \leq ck$, $\forall\, u \in A$, assim A é limitado em $H^1(\Omega)$. Já que $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$, obtemos que $IA = A$ é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$ o que implica que I é um operador compacto.
Em particular, se $q = 2$ temos,

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Observação 2: Uma consequência importante da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ é que se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $\|u_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_n) e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_{n_k} \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_{n_k} \to u$, q.t.p. em Ω.

Teorema B.12 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)**.** *Seja* $1 \leq p < N$, *então* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$ *e existe uma constante* $C = C(p, N)$ *tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p, \ \forall\, u \in W^{1,p}(R^N).$$

Demonstração: Ver [9], Teorema 9.9, pag. 278.

Corolário B.13. *No teorema acima pode-se trocar* Ω *(aberto qualquer) por* $\mathbb{R}^N$.

Ver [21], pag 290 - Observação 20.

Teorema B.14 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* Ω *um domínio aberto e limitado de* $\mathbb{R}^N$ *e* $p \in [1, \infty]$. *Então existe uma constante* $C = C(p, \Omega) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_p \leq C\|\nabla u\|_{W^{1,P}}, \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(R^N).$$

Demonstração: Ver [17], Teorema 1, pag. 184.

Proposição B.3. *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$. *Seja* (u_n) *uma sequência limitada em* $H_0^1(\Omega)$. *Então existe* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que, a menos de subsequência,*

(i). $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $H_0^1(\Omega)$;

(ii.) $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $L^{2^*}(\Omega)$;

(iii.) $u_n \longrightarrow u$ *fortemente em* $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$;

(iv.) $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ *q.t.p. em* Ω *e*

(v.) $|u_n(x)| \leq h_q(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *q.t.p. em* Ω, *com* $h_q(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$.

Demonstração. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, (i) segue do Teorema B.2. Pelo Teorema B.12, (u_n) é também uma sequência limitada no espaço de Banach reflexivo $L^{2^*}(\Omega)$ e daí segue (ii). A afirmação (iii) é consequência direta do Teorema B.11. (iv) e (v) seguem de (iii) (veja o Teorema B.6) □

Proposição B.4. *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $C^{0,1}$. *Sejam* j *e* k *números inteiros não negativos e* $1 \leq p < \infty$. *Então*

(i) se $kp < N$ *então a imersão* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *é contínua, para todo* $p \leq q \leq Np/(N - kp)$.

(ii) se $kp = N$ *então a imersão* $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *é contínua, para todo* $p \leq q < \infty$.

(iii) *se* $kp > N > (k-1)p$, *então a imersão* $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}(\overline{\Omega})$ *é contínua para todo* $0 < \theta \leq k - (N/p)$.

(iv) *se* $N = (k-1)p$, *então a imersão* $W^{j+k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\theta}(\overline{\Omega})$ *é contínua para todo* $0 < \theta < 1$.

Demonstração: Ver [1], Teorema 5.4, pag. 97.

Lema B.1 (Brézis-Lieb, primeira versão)**.** *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $(u_n) \subset L^p$, $1 < p < \infty$. *Se*

(a) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \to u$ *q.t.p em* Ω.

Então

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Demonstração: Ver [21], Teorema 10.37, pag. 221.

Lema B.2 (Brézis-Lieb, segunda versão)**.** *Sejam* $1 \leq p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* (f_n) *uma sequência limitada de funções em* $L^p(\Omega)$ *que converge em quase todo ponto para* f, *então*

$$f \in L^p(\Omega) \quad e \quad \lim_{n\to\infty}(|f_n|_p^p - |f - f_n|_p^p) = |f|_p^p.$$

Demonstração: Ver [22], Lema 1.32, pag. 21.

B.3 REGULARIDADE

Apresentamos alguns resultados de regularidade
Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$. Considere o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), \ x \in \ \Omega, \\ \quad u(x) = 0, \ x \in \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.4}$$

onde $h \in L^2(\Omega)$. Uma solução fraca de (B.4) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi dx = \int_\Omega h\varphi dx, \ \text{ para todo } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema B.15 (Schauder)**.** *Suponha que* Ω *é um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $C^{2,\alpha}$ *e* $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para algum* $0 < \alpha < 1$. *Se* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *com* $p > 1$ *é solução fraca de (B.4) então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [14], Teorema 9.19, pag. 243.

Teorema B.16. *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{1,1}$. Se $h \in L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$ então o problema (B.4) tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [14], Teorema 9.15, pag. 241.

Teorema B.17. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,1}$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \ x \in \ \Omega, \\ \quad\ \ u = 0, \ x \in \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.5}$$

então $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e, consequentemente, u satisfaz (B.5) no sentido pontual.

Demonstração: Usando a Proposição B.4 e pelos Teoremas B.15 e B.16 , prova-se o resultado.

O próximo teorema é uma adaptação para o sistema (B.6) do resultado de Brézis-Kato. Sejam $f, g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Dizemos que $(u, v) \in X$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v), \ x \in \ \Omega, \\ -\Delta u = g(x, u, v), \ x \in \ \Omega, \\ \quad\ \ u = v = 0, \qquad x \in \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.6}$$

se satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega f(x, u, v)\varphi dx + \int_\Omega g(x, u, v)\psi dx, \ \ \forall\ (\varphi, \psi) \in X.$$

Teorema B.18 (Brézis-Kato para Sistemas)**.** *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, e sejam $f, g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x, s, t)$ e $g(x, s, t)$ são mensuráveis em $x \in \Omega$ e contínuas em $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ e satisfazem*

$$|f(x, u, v)| \leq A(x)(1 + |s| + |t|),$$

$$|g(x, u, v)| \leq B(x)(1 + |s| + |t|)$$

com $A, B \in L^{N/2}(\Omega)$. Se $(u, v) \in X$ é uma solução fraca de (B.6) então $u, v \in L^q(\Omega)$ para qualquer $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Seja $s \geq 0$. Vamos mostrar que $u, v \in L^{2(s+1)}$ então $u, v \in L^{(s+1)2^*}(\Omega)$. Para isso, consideramos as funções auxiliares

$$m_1 = \min\{|u|^s, L\} \ \text{ e } \ m_2 = \min\{|v|^s, L\}$$

com $L > 1$. Como $m_1 u, m_2 v \in H_0^1(\Omega)$ e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}$ é contínua, existe uma constante $c_1 = c_1(N, \Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |m_1 u|^{2^*} dx + \int_\Omega |m_2 v|^{2^*} dx \leq c_1 \left[\left(\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx \right)^{\frac{2^*}{2}} \right]. \quad \text{(B.7)}$$

A idéia é tentar majorar o lado direito de (B.7) por uma constante c_2 que não depende de L. Daí podemos fazer $L \to \infty$ em (B.7) para obter, aplicando o Lema de Fatou, que

$$\int_\Omega |u|^{(s+1)2^*} dx + \int_\Omega |v|^{(s+1)2^*} dx \leq c_2.$$

Agora, pela definição de m_1,

$$\nabla(m_1 u) = m_1 \nabla u + s|u|^s \nabla u \chi_{L^-},$$

onde χ_{L^-} é a função característica do conjunto $L^- := \{x \in \Omega : |u(x)|^s < L\}$. Daí,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx &= \int_\Omega |m_1 \nabla u + s|u|^s \nabla u \chi_{L^-}|^2 dx \\ &\leq \int_\Omega 2m_1^2 |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega 2s^2 |u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{L^-} dx \\ &\leq (2+s) \left(\int_\Omega m_1^2 |\nabla u|^2 dx + 2s \int_\Omega |u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{L^-} dx \right). \end{aligned} \quad \text{(B.8)}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx \leq (2+s) \left(\int_\Omega m_2^2 |\nabla v|^2 dx + 2s \int_\Omega |v|^{2s} |\nabla v|^2 \chi_{L^-} dx \right). \quad \text{(B.9)}$$

Por outro lado, como (u, v) é solução fraca de (B.6) temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \psi dx = \int_\Omega f(x, u, v) \varphi dx + \int_\Omega g(x, u, v) \psi dx,$$

para todo $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\varphi = m_2^2 v$, vemos que

$$\nabla \varphi = m_1^2 \nabla u + 2s|u|^{2s} \nabla u \chi_{L^-} \;\text{ e }\; \nabla \psi = m_2^2 \nabla v + 2s|v|^{2s} \nabla v \chi_{L^-}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega m_1^2 \nabla u + 2s \int_\Omega |u|^{2s} \nabla u + \int_\Omega m_2^2 \nabla v + 2s \int_\Omega |v|^{2s} \nabla v \chi_{L^-} \chi_{L^-} \\ &\quad = \int_\Omega f(x, u, v) m_1^2 u dx + \int_\Omega g(x, u, v) m_2^2 v dx. \end{aligned}$$

de (B.8), (B.9) e da desigualdade acima vem

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(m_1 u)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla(m_2 v)|^2 dx &\leq (2+s) \int_\Omega |A(x)|(1 + |u| + |v|)|u| m_1^2 dx \\ &\quad + (2+s) \int_\Omega |B(x)|(1 + |u| + |v|)|v| m_2^2 dx. \end{aligned} \quad \text{(B.10)}$$

Agora, como $L > 1$ temos

$$(1+|u|+|v|)|u|m_1^2 \leq \begin{cases} 3, & \text{se } x \in Q, \\ 2(|u|+|v|)|u|m_1^2, & \text{se } x \notin Q \end{cases}$$

e

$$(1+|u|+|v|)|v|m_2^2 \leq \begin{cases} 3, & \text{se } x \in Q, \\ 2(|u|+|v|)|v|m_2^2, & \text{se } x \notin Q, \end{cases}$$

onde $Q = \{x \in \Omega : |u| < 1 \; e \; |v|\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |A(x)|(1+|u|+|v|)|u|m_1^2dx &\leq 3\int_\Omega |A(x)|dx + 2\int_\Omega |A(x)|(|u|+|v|)|u|m_1^2dx \\ &\leq 3\int_\Omega |A(x)|dx + 2\int_\Omega |A(x)||u|^2m_1^2dx \\ &+ \int_{|v|\leq|u|}|A(x)||u|^2m_1^2dx + \int_{|u|\leq|v|}|A(x)||v|^2m_1^2dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega |B(x)|(1+|u|+|v|)|v|m_2^2dx &\leq 3\int_\Omega |B(x)|dx + 2\int_\Omega |B(x)|(|u|+|v|)|v|m_2^2dx \\ &\leq 3\int_\Omega |B(x)|dx + 2\int_\Omega |B(x)||v|^2m_2^2dx \\ &+ \int_{|u|\leq|v|}|B(x)||v|^2m_2^2dx + \int_{|v|\leq|u|}|B(x)||u|^2m_2^2dx.\end{aligned}$$

Usando o fato de que $m_1 \leq m_2$ quando $|u| \leq |v|$ e $m_2 \leq m_1$ quando $|v| \leq |u|$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |A(x)|(1+|u|+|v|)|u|m_1^2dx &\leq 3\int_\Omega |A(x)|dx + 4\int_\Omega |A(x)||u|^2m_1^2dx \\ &+ \int_\Omega |A(x)||v|^2m_2^2dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega |B(x)|(1+|u|+|v|)|v|m_2^2dx &\leq 3\int_\Omega |B(x)|dx + 4\int_\Omega |B(x)||v|^2m_2^2dx \\ &+ \int_\Omega |B(x)||u|^2m_1^2dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p = \frac{N}{2}$ e $p' = \frac{N}{N-2}$ e que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é contínua obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |A(x)|(1+|u|+|v|)|u|m_1^2dx \\ &\quad\leq 3|\Omega|^{(N-2)/N}\left(\int_\Omega |A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N} + 4K_1\int_{|A|\leq|K_1|}|u|^2m_1^2dx \\ &\quad+ 4\left(\int_{|A|\geq|K_1|}|A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}\left(\int_{|A|\geq|K_1|}|m_1u|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} + K_1\int_{|A|\leq|K_1|}|v|^2m_2^2dx \\ &\quad+ \left(\int_{|A|\geq|K_1|}|A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}\left(\int_{|A|\geq|K_1|}|m_2v|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} \\ &\quad\leq c_3 + 4K_1\int_\Omega |u|^{2(s+1)}dx + 4\varepsilon(K_1)\left(\int_\Omega |m_1u|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} + K_1\int_\Omega |v|^{2(s+1)}dx \\ &\quad+ \varepsilon(K_1)\left(\int_\Omega |m_2v|^{2^*}dx\right)^{(N-2)/N} \\ &\quad\leq c_3 + K_1c_4 + c_5\varepsilon(K_1)\left(\int_\Omega |\nabla(m_1u)|^2dx + \int_\Omega |\nabla(m_2v)|^2dx\right),\end{aligned}$$

e de forma análoga,

$$\int_\Omega |B(x)|(1+|u|+|v|)|v|m_2^2dx \leq c_6 + K_2c_4 + c_5\varepsilon(K_2)\left(\int_\Omega |\nabla(m_1u)|^2dx + \int_\Omega |\nabla(m_2v)|^2dx\right),$$

onde $K_1, K_2 > 0$ são constantes reais, $c_3 = c_3(\Omega, N, \|A\|_{N/2})$, $c_4 = c_4(\|u\|_{2(s+1)}, \|v\|_{2(s+1)})$, $c_5 = c_5(\Omega, N)$, $c_6 = c_6(\Omega, N, \|B\|_{N/2})$, $\varepsilon(K_1) = \left(\int_{|A|\geq|K_1|} |A(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}$ e $\varepsilon(K_2) = \left(\int_{|B|\geq|K_2|} |B(x)|^{N/2}dx\right)^{2/N}$.

Substitutindo as estimativas em (B.10) vem

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_1u)|^2dx + \int_\Omega |\nabla(m_2v)|^2dx \leq & c_7 + (2+s)c_5\varepsilon(K_1)\int_\Omega |\nabla(m_1u)|^2dx + \int_\Omega |\nabla(m_2v)|^2dx \\ & + (2+s)c_5\varepsilon(K_2)\int_\Omega |\nabla(m_1u)|^2dx + \int_\Omega |\nabla(m_2v)|^2dx,\end{aligned}$$

onde $c_7 = c_7(s, c_3, c_4, c_5, c_6, K_1, K_2)$. Como $A, B \in L^{N/2}(\Omega)$ então $\varepsilon(K_1) \to 0$ quando $K_1 \to \infty$ e $\varepsilon(K_2) \to 0$ quando $K_2 \to \infty$. Logo podemos escolher $K_1, K_2 > 0$ suficientemente grandes de modo que $(2+s)c_5\varepsilon(K_1) < 1/2$ e $(2+s)c_5\varepsilon(K_2) < 1/2$. Daí segue que

$$\int_\Omega |\nabla(m_1u)|^2dx + \int_\Omega |\nabla(m_2v)|^2dx \leq 2c_7.$$

Agora usando a desigualdade acima em (B.7), obtemos

$$\int_\Omega |m_1u|^{2^*}dx + \int_\Omega |m_2v|^{2^*}dx \leq 2c_1(2c_7)^{2^*/2} = c_8.$$

Observe que c_8 não depende de L. Aplicando o Lema de Fatou obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{(s+1)2^*}dx + \int_\Omega |v|^{(s+1)2^*}dx \leq c_2 &= \int_\Omega \lim_{L\to\infty}\inf|m_1u|^{2*}dx + \int_\Omega \lim_{L\to\infty}\inf|m_2v|^{2*}dx \\ &\leq \int_\Omega \lim_{L\to\infty}\inf(|m_1u|^{2*} + |m_2v|^{2*})dx \\ &\leq \lim_{L\to\infty}\inf\int_\Omega (|m_1u|^{2*} + |m_2v|^{2*})dx \leq c_8.\end{aligned}$$

Isso mostra que supondo $u, v \in L^{2(s+1)}(\Omega)$ obtemos $u, v \in L^{(s+1)2^*}(\Omega)$. Fazendo $s = s_0 = 0$ e iterando o processo, obtemos $u, v \in L^{(s_{i-1}+1)2^*}(\Omega)$ com $s_i + 1 = (s_{i-1}+1)2^*/2$, $i \geq 1$. Usando que o domínio é limitado concluímos que $u, v \in L^q$ para todo $1 \leq q < \infty$. $\square$

As definições que apresentamos a seguir são de grande importância, para compreender o Teorema de Deformação e consequentemente o Teorema do Passo da Montanha. Este trabalho baseia-se fundamentalmente na aplicação desse teorema.

Definição B.13. Seja X um espaço de Banach e $\phi' \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ϕ se existe $u \in X$ com $\phi'(u) = 0$ *e* $\phi(u) = c$.
O conjunto de todos os pontos críticos no "nivel" c será designado por

$$K_c = \{u \in X; \phi'(u) = 0 \; e \; \phi(u) = c\},$$

e denotaremos por ϕ^c o conjunto de todos os pontos em nível menores ou iguais a c, isto é,

$$\phi^c = \{u \in X; \phi(u) \leq c\}.$$

Definição B.14. Dado um subconjunto $S \subset X$ *e* $\alpha > 0$, designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por

$$S_\alpha = \{u \in X; d(u, S) \leq \alpha\},$$

onde $d(u, S) = inf\{\|u - v\|;\ v \in S\}$.

Definição B.15. Seja X um espaço de Banach, um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \longrightarrow X$, que verifica

$$\|V(u)\| \leq \alpha \|\phi'(u)\| \tag{B.11}$$

e

$$\langle \phi', V(u) \rangle \geq \beta \|\phi'(u)\|^2, \tag{B.12}$$

onde $0 < \beta < \alpha$ e $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$.

Lema B.3. *Assumindo as condições da definição anterior, existe um campo pseudo-gradiente para* ϕ *em* Y.

Teorema B.19 (Lema da Deformação)**.** *Seja* X *um espaço de Banach e* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. *Suponha que* $S \subset X,\ c \in \mathbb{R}, 4\beta > \alpha$ *e* $\varepsilon,\ \delta > 0$ *são tais que*

$$\|\phi'(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}\ \forall\, u \in\ \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right),\ c + 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}.$$

Então, existe $\eta \in C\left([0, 1] \times X, X\right)$ *tal que* $\forall\ u\ \in X$ *e* $t\ \in\ [0, 1]$, *tem-se:*

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u\ \notin\ \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right),\ c + 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}$;

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\varepsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$;

(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Sejam

$$A = \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right),\ c + 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1}\left(\left[c - \varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right),\ c + \varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_\delta$$

e

$$Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}.$$

Assim, note que $B \subset A \subset Y$. Considere $V : Y \longrightarrow X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e uma função localmente lipchitziana $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u, B)},$$

de onde segue que $0 \leq \rho \leq 1,\ \rho(u) = 1,\ se\ u \in B\ e\ \rho(u) = 0,\ se\ u \in X\backslash A$. Considere ainda a seguinte aplicação localmente lipschitziana $f : X \longrightarrow X$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|} & \text{se } u \in A \\ \qquad 0 \quad , & \text{se } u \notin A. \end{cases} \tag{B.13}$$

Sendo $\|f(u)\| \leq 1, \forall u \in X$, segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = f(w(t)) \\ w(0) = u \end{cases} \tag{B.14}$$

tem para cada $u \in X$ a solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$

Então,
(i) $\eta(0, u) = w(0, u) = u$;
(ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}\left(\left[c - 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right),\ c + 2\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha} - 1\right)\right]\right) \cap S_{2\delta}$.

De fato, considerando $w_1(t) = u$, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\dot{w}(t) = f(w_1(t)) = f(u), \text{se } u \notin A,$$

logo

$$\begin{cases} \dot{w}_1(t) = f(w(t)) \\ w_1(0) = u. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema da Exsistência e Unicidade de soluções, se $u \notin A$

$$w(t) = w_1(t) = u, \quad \forall \in \mathbb{R},$$

e consequentemente

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u), \quad \forall \in [0, 1];$$

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\varepsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta$.

De fato, note que para todo $t \geq 0$ e $u \in S$,

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau,$$

o que implica

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\|d\tau \leq \int_0^t d\tau = t.$$

Sendo $S_\delta = \{v \in X; d(v,S) \leq \delta\}$, onde $d(v,S) = \inf\{\|v-u\|; u \in S\}$,
obtemos que $\forall\ t\ \in [0,\delta]$

$$\|w(t,u) - u\| \leq t \leq \delta,$$

de onde segue

$$d(w(t,u),S) \leq \delta \ \ \forall \ \ u \in S.$$

Isto implica que

$$w(t,u) \ \in \ S_\delta, \ \ \forall \ \ u \in S,$$

ou seja,

$$w(t,S) \subset S_\delta \ \ \forall\, t \ \in [0,\delta].$$

Logo,

$$\eta(t,u) \subset S_\delta \ \ \forall\, t \ \in [0,1]. \tag{B.15}$$

Note também que, para cada $u \in X$ fixado, a função $\phi(w(t,u))$ é não-crescente, pois

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) &= \phi'(w(t,u))\dot{w}(t,u) \\ &= \phi'(w(t,u))f(w(t,u)).\end{aligned}$$

Da definição de f, tem-se $\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = 0$ se $w(t,u) \notin A$ e caso contrário,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -\rho(w(t,u))\phi'(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}.$$

Assim, de (B.12),

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq -\beta\rho(w(t,u))\frac{\|\phi'(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}, \tag{B.16}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0, \ \ \forall \ \ t \in \mathbb{R},$$

donde concluímos que $\phi(w(t,u))$ é não-crescente. se $u \in \phi^{c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S$, note que:
1) Se $\phi(w(\hat{t},u)) < c-\varepsilon$, para algum $\hat{t} \in [0,\delta)$, então

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\hat{t},u)) < c-\varepsilon.$$

Portanto, de (B.15),

$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta.$$

2) Observe que para todo $t \in [0,\delta]$, temos

$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(w(0,u)) = \phi(u) \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right),$$

e consequentemente

$$\phi(w(t,u)) \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right).$$

Dessa forma, supondo que

$$w(t,u) \in B = \phi^{-1}\left(\left[c-\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right),\ c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)\right]\right) \cap S_\delta,\ \ \forall\ \ t \in [0,\delta],$$

usando (B.11), (B.16) e o fato que $\rho \equiv 1$ em B, obtemos

$$\phi(w(\delta,u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t,u))dt,$$

de onde segue que

$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\delta \|\phi'(w(t,u))\|dt.$$

Logo,

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{4\varepsilon}{\delta}\delta \leq c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right) - \frac{\beta}{\alpha}4\varepsilon,$$

mostrando que

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c-\varepsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos 1) ou 2), segue que

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \phi^{c-\varepsilon} \cap S_\delta,\ \text{se}\ u \in \phi^{c+\varepsilon\left(\frac{4\beta}{\alpha}-1\right)} \cap S;$$

(iv) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. De fato, devemos mostrar que η é contínua e que possui inversa contínua. Assim, considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto g(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto h(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se

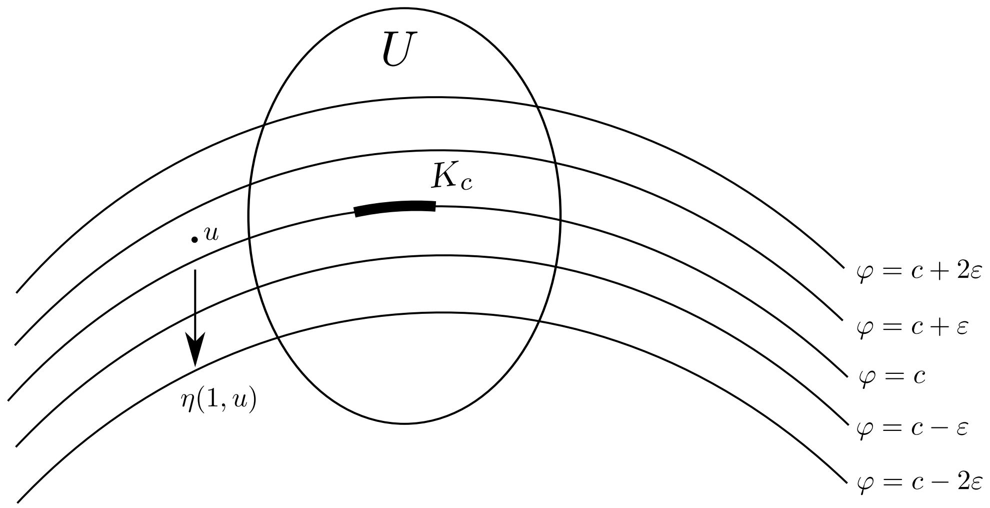
$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, h(u)) \implies (g \circ h)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Usando propriedades de fluxo, obtemos

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u, \text{ ou seja, } (g \circ h)(u) = u.$$

De forma análoga, temos $(h \circ g)(u) = u$. Logo temos que $\eta(t, .)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, u)$. Da mesma forma, temos que $\eta^{-1}(., u)$ também é contínua, donde concluímos que $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. (veja a figura 4). $\square$

Figura 4 – O Lema da Deformação.



Fonte: An invitation to Variational Methods in Differential Equations. (pag. 23)

Definição B.16. Dizemos que ϕ satisfaz a condição de Palais- Smale (PS), se qualquer sequência (u_n) tal que $\phi(u_n)$ é limitada e $\phi'(u_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, possui uma subsequência convergente.

O seguinte resultado foi publicado no ano 1973 por Ambrosetti-Rabinowitz em [3].

Teorema B.20 (do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz)**.** *Sejam E um espaço de Banach real e $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale. Suponha que $J(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $J\Big|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ e

(2) existe um elemento $e \in E \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $J(e) \leq 0$.

Então, J possui um valor crítico $c \geq \alpha$ com

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u),$$

$$\textit{onde } \Gamma = \{g \in C([0,1], E) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = e\}.$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u)$ está bem definido. Seja $g \in \Gamma$, como $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], E)$, temos que $J \circ g \in C([0,1], \mathbb{R})$. Como $J \circ g$ é uma aplicação contínua no compacto $[0,1]$, $J \circ g$ possui máximo em $[0,1]$, isto é, existe $\max_{t \in [0,1]} (J \circ g)(t) = \max_{u \in g([0,1])} J(u)$.

Definamos

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(t) = \|g(t)\|$$

Por (2), $e \in E \backslash \overline{B}_\rho$ assim $f(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho$ e $f(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$. Logo, como $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ e $f(0) < \rho < f(1)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) = \|g(t_0)\| = \rho$, ou seja, $g(t_0) \in \partial B_\rho$. Segue da hipótese (1) do teorema que $J(g(t_0)) > \alpha$ e como $g \in \Gamma$ é arbitrário temos,

$$J(g(t_0)) > \alpha, \ \forall \ g \in \Gamma.$$

Portanto $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u)$ está bem definido e $c \geq \alpha$.

Agora só falta mostrar que c é um valor crítico para J. Suponha por absurdo que c não seja um valor crítico de J. Então pelo lema de deformação, dado $0 < \epsilon < \frac{1}{2}(c - \alpha)$ existe $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tal que para qualquer $u \in E$ e $t \in [0,1]$ tem-se :

(1) $\eta(t, u) = u,$ se $u \notin J^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\epsilon])$ e

(2) $\eta((1, J^{c+\epsilon})) \subset J^{c-\epsilon}$.

Como $c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} J(u)$, então existe uma $g \in \Gamma$ tal que $\max_{t \in [0,1]} J(g(t)) < c + \epsilon$.
Portanto $g(t) \in J^{c+\epsilon}$, $\forall \ t \in [0,1]$.
Defina a aplicação contínua

$$f^* : [0,1] \to E \times E$$

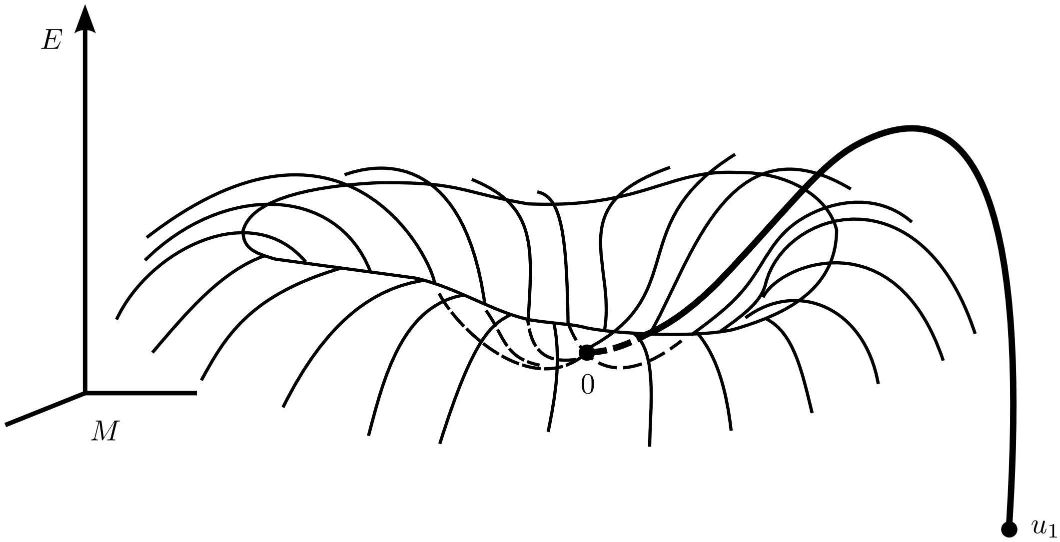
$$f^*(t) = \eta(1, g(t))$$

Pela hipótese (2) e pela escolha de ϵ, temos $J(e) < 0 = J(0) < \alpha < c - 2\epsilon$.
Logo temos que $J(e)$ e $J(0)$ não pertencem a $[c - 2\epsilon, c + \epsilon]$, ou seja, 0 e e não pertencem a $J^{-1}([c - 2\epsilon, c + \epsilon])$.
Logo, por (1) temos que $f^*(0) = 0$ e $f^*(1) = e$, e portanto $f^* \in \Gamma$.
Por (2), segue que $f^*(t) = \eta(1, g(t)) \in J^{c-\epsilon}$, $\forall \ t \in [0,1]$, isto é,

$$\max_{t \in [0,1]} J(f^*(t)) \leq c - \epsilon.$$

Como $c \leq \max\limits_{t\in[0,1]} J(f^*(t))$ então $c \leq c - \epsilon$, o que é um absurdo. Portanto c é um valor crítico para J. (veja a figura 5) $\square$

Figura 5 – Teorema do Passo da Montanha.



Fonte: Variational Methods Applications to nonlinear PDE and Hamiltonian systems. (Pag. 101)

Teorema B.21 (Teorema Do Passo da Montanha sem a condição (PS))**.** *Seja J um funcional de classe C^1 sobre um espaço de Banach E. Suponhamos que existe uma vizinhança V de O em E e uma constante ρ tal que:*

(i) $J(u) \geq \rho$ *para cada* u *na fronteira de* V.

(ii) $J(0) < \rho$ *e* $J(\Psi) < 0$ *para algum* $\Psi \notin V$

Establecemos

$$c = \inf_{\phi\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\phi(t)),$$

$$\textit{onde } \Gamma = \{\phi \in C([0,1], E) \ ; \ \phi(0) = 0 \ , \ \phi(1) = \Psi\}$$

Então existe uma sequência $(u_n) \in E$ *tal que*

$$J(u_n) \to c \quad e \quad J'(u_n) \to 0 \ \ em \ \ E^{'}.$$

Demonstração: Veja Apêndice E, Corolário E.7

APÊNDICE C – BRÉZIS-LIEB

Definição C.1. F é p-homogênea se
$F(\lambda(u,v)) = \lambda^p F(u,v)$ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, \lambda \geq 0$.

Em particular
(i) $\langle \nabla F(u,v), (u,v)\rangle = u\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + v\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = pF(u,v)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
(ii) F_u e F_v são $(p-1)$-homogênea.

Lema C.1 (Brézis-Lieb estendido)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ um aberto limitado e $F : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea, onde $p > 0$. Se (U_α) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ e $U_\alpha \longrightarrow U$ q.t.p. em Ω, onde $U \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^k)$ então*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega \left(F(U_\alpha) - F(U_\alpha - U)\right) dx = \int_\Omega F(U)dx.$$

Demonstração. Afirmamos que fixado $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon)$ tal que para todo $t, s \in \mathbb{R}^k$ temos

$$|F(s+t) - F(s)| \leq \varepsilon|s|^p + C(\varepsilon)|t|^p. \tag{C.1}$$

Com efeito, pela continuidade de F temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|F(s+t) - F(s)| \leq \varepsilon, \forall\, |t| \leq \delta(\varepsilon),$$

onde restringimos F à $B_2(0)$. sem perda de generalidade, podemos supor $\delta(\varepsilon) < 1$.
Definimos

$$M = \max_{B_2(0)} F \text{ e } C(\varepsilon) = \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}.$$

Se $\frac{|s|}{|t|} \leq 1$

$$\begin{aligned} |F\left(\frac{s}{|t|} + \frac{t}{|t|}\right) - F\left(\frac{s}{|t|}\right)| &\leq M \\ &\leq \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p} + \varepsilon\frac{|s|^p}{|t|^p}. \end{aligned}$$

Se $\delta(\varepsilon) \leq \frac{|t|}{|s|} \leq 1$

$$\begin{aligned} |F\left(\frac{s}{|t|} + \frac{t}{|t|}\right) - F\left(\frac{s}{|t|}\right)| &\leq M = \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}\delta(\varepsilon)^p \\ &\leq \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}\frac{|t|^p}{|s|^p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $\frac{|t|}{|s|} \leq \delta(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |F\left(\frac{s}{|t|} + \frac{t}{|t|}\right) - F\left(\frac{s}{|t|}\right)| &\leq \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}\frac{|t|^p}{|s|^p}. \end{aligned}$$

Logo, pela p-homogêneidade de F segue (C.1). Definimos $V_\alpha = U_\alpha - U$ e o funcional

$$H_\varepsilon^\alpha(x) = (|F(U_\alpha) - F(U(x)) - F(V_\alpha(x))| - \varepsilon|V_\alpha(x)|^p)_+,$$

onde $(S)_+ = \max(S, 0)$. Observe que $V_\alpha \to 0$ q.t.p. em Ω, e se $\alpha \to \infty$, pela continuidade de F

$$F(V_\alpha) \to F(0) = 0 \text{ q.t.p.}$$

e

$$H_\varepsilon^\alpha \to 0 \text{ q.t.p..}$$

Por outro lado,

$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| \leq |F(U_\alpha) - F(V_\alpha)| + |F(U)|,$$

fazendo $s = V_\alpha$ e $t = U$ em(C.1), obtemos

$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha)| = |F(s+t) - F(s)| \leq \varepsilon|V_\alpha|^p + C(\varepsilon)|U|^p$$

assim,

$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| \leq \varepsilon|V_\alpha|^p + C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|$$

e consequentemente

$$H_\varepsilon^\alpha \leq C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|.$$

Como F é p-homogênea, $(C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|) \in L^1(\Omega)$ e segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega H_\varepsilon^\alpha \to 0 \text{ quando } \alpha \to \infty.$$

Da definição de H_ε^α, temos que

$$H_\varepsilon^\alpha(x) \geq |F(U_\alpha(x)) - F(V_\alpha(x)) - F(U(x))| - \varepsilon|V_\alpha(x)|^p.$$

Logo

$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| \leq \varepsilon|V_\alpha|^p + H_\varepsilon^\alpha,$$

assim,

$$I_\alpha = \int_\Omega |F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| dx \leq \int_\Omega (\varepsilon|V_\alpha|^p + H_\varepsilon^\alpha) dx$$

e

$$\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha \leq \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega \varepsilon|V_\alpha|^p dx + \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega H_\varepsilon^\alpha dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega V_\alpha|^p dx = \varepsilon K.$$

A constante K é devido a limitação da sequência (U_α) em $L^p(\Omega; \mathbb{R}^k)$. Agora, fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos o resultado. $\square$

APÊNDICE D – UM PRINCÍPIO DO MÁXIMO PARA SISTEMAS

Inicialmente vamos nos recordar que um domínio é um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$ aberto e conexo. Esse domínio será de classe C^k quando sua fronteira é um gráfico de uma função de classe C^k.

Seja Ω um domínio limitando em $\mathbb{R}^d$. Consideremos o sistema de m equações com m funções não conhecidas $u^1(x), u^2(x), ..., u^k(x)$,

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)u^k_{ij} + \sum_{kl=1}^{m} b_{kl}(x)u^l = f_k(x,u), x \in \Omega \text{ e } k = 1, ..., m, \tag{D.1}$$

com $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Consideremos também que para alguma constante $\theta > 0$ tem-se

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{D.2}$$

Vamos denotar $u(x) = (u^1(x), u^2(x), ..., u^m(x))$ por $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$, onde $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$.

Não iremos estabelecer nenhuma suposição em relação à suavidade das funções $a_{ij}(x)$, $b_{kl}(x)$ e $f_k(x,u)$, porém iremos assumir que (D.1) possui uma solução $u^k \in C^2(\Omega)$,

Teorema D.1. *Seja $B = [b_{kl}(x)]$ uma matriz de ordem m. Suponhamos que $\frac{1}{2}(B + B^T)$ é semidefinida negativa, ou seja,*

$$\sum_{kl=1}^{m} b_{kl}(x)u^k u^l \leq 0 \textit{ para todo } u \in \mathbb{R}^m \textit{ e } x \in \Omega. \tag{D.3}$$

Consideremos também

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x,u)u^k \geq 0 \textit{ para todo } u \in \mathbb{R}^m \textit{ e } x \in \Omega, \tag{D.4}$$

e que, para cada $x \in \Omega$ pelo menos uma das desigualdades acima (D.3) ou (D.4) é estrita. Então $|u(x)|^2 = \sum_k^m (u^k)^2(x)$ não possui ponto de máximo dentro de Ω.

Corolário D.2. *Suponhamos que as condições homogêneas de Dirichlet são impostas*

$$u^k(x) = 0 \textit{ para } x \in \partial\Omega,\ k = 1, 2, ..., m. \tag{D.5}$$

Então, caso exista, a solução trivial é a única solução possível de (D.3) e (D.5).

Observação. Se soluções não negativas de (D.3) forem consideradas, ou seja, soluções nas quais $u^k(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ e $k = 1, 2, ..., m$, então (D.4) decorrerá da condição

$$f_k(x,u) \geq 0 \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^m_+,\ k = 1, 2, ..., m \text{ e } x \in \Omega.$$

D.1 PRINCÍPIOS DO MÁXIMO NO CASO ESCALAR

Consideramos os operadores diferenciais lineares da forma

$$Lu = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \qquad a_{ij} = a_{ji},$$

onde $x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega,\ \ a_{ij},\ b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$.
Dizemos que L é elíptico no ponto $x \in \Omega$ se a matriz $[a_{ij}(x)]$, é positiva, isto é, sendo $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ o menor e o maior autovalor de $[a_{ij}(x)]$, respectivamente, então

$$0 < \lambda(x)|\varepsilon|^2 \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \leq \Lambda(x)|\varepsilon|^2, \ \ \forall\ \ \varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N) \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Dizemos que L é uniformemente elíptico se L for elíptico e se $\Lambda(x)/\lambda(x)$ for limitado em Ω. Observamos que o operador Laplaciano é uniformemente elíptico.

Teorema D.3 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Seja L elíptico num aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Suponha $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \equiv 0$ em Ω.*

Se $Lu \leq 0$ em Ω, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Se $Lu \geq 0$ em Ω, então

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Ver [13], Teorema 1, pag. 327.

Teorema D.4 (Príncipio do Máximo Forte)**.** *Suponha que L é elíptico em Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \equiv 0$ em Ω.*

Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge o seu máximo sobre $\overline{\Omega}$ num ponto interior, então

$$u \text{ é constante no interior de } \Omega.$$

De forma análoga.

Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge o seu mínimo sobre $\overline{\Omega}$ num ponto interior, então

$$u \text{ é constante no interior de } \Omega.$$

Demonstração. Ver [13], Teorema 3, pag. 332.

APÊNDICE E – PRINCÍPIO VARIACIONAL DE EKELAND

Apresentamos uma versão do lema de Deformação feita por Willem M. em 1983.

Teorema E.1 (Lema de Deformação de Clark)**.** *Seja X um espaço de Banach e $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, e $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tais que para todo*

$$u \in \varphi^{-1}[c-2\varepsilon, c+2\varepsilon] \cap S_{2\delta},\ \textit{temos}\ \|\varphi'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Então existe $\eta \in C^1([0,1] \times X, X)$ tal que

(i) $\eta(t,u) = u$ *se* $t = 0$ *ou se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,

(ii) $\eta(t, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$,

(iii) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo de X em X para todo* $t \in [0,1]$,

(iv) $\|\eta(t,u) - u\| \leq \delta$, *para todo* $u \in X$, *para todo* $t \in [0,1]$,

(v) *é não crescente para todo* $u \in X$,

(vi) $\varphi(\eta(t,u)) < c$, *para todo* $u \in \varphi^c \cap S_\delta$, *e todo* $t \in (0,1]$.

Demonstração: Ver [22], Lema 2.3 pag. 38.

Aplicaremos o lema da deformação para produzirmos teoremas relevantes na busca por pontos críticos.

Teorema E.2 (Ekeland, 1974)**.** *Seja X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ limitado inferiormente, $v \in X$ e $\varepsilon, \delta > 0$. Se*

$$\varphi(v) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$$

então existe $u \in X$ tal que

$$\begin{cases} (a) & \varphi(u) \leq \inf_X \varphi + 2\varepsilon \\ (b) & \|\varphi'(u)\| < \frac{8\varepsilon}{\delta} \\ (c) & \|u - v\| < 2\delta \end{cases} \tag{E.1}$$

Demonstração. Ver [22], Teorema 2.2, pag. 39.

Corolário E.3. *Seja $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ limitado inferiormente satisfazendo $(PS)_c$, com*

$$c := \inf_X \varphi,$$

então toda sequência minimizante para φ (ou seja v_n tal que $\varphi(v_n) \to c$) contém uma subsequência conevrgente. Em particular existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi$.

Demonstração. Ver [22], Corolário 2.5, pag. 40.

Teorema E.4 (Brézis-Nirenberg, 1991)**.** *Sejam* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *e* $c := \liminf_{\|u\| \to \infty} \varphi(u) \in \mathbb{R}$, *então para todo* $\varepsilon, \delta > 0$ *e* $R > 2\delta$, *existe* $u \in X$ *tal que*

$$\begin{cases} (a) \;\; c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon, \\ (b) \;\; \|u\| > R - 2\delta, \\ (c) \;\; \|\varphi'(u)\| < \frac{8\varepsilon}{\delta}. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [22], Teorema 2.6, pag. 40.

Corolário E.5 (Shujie Li - 1986)**.** *Seja* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *limitado inferirormente. Se toda sequência* $(u_n) \subset X$ *tal que* $\varphi(u_n) \to c$ *e* $\varphi'(u_n) \to 0$ *é limitado, então,* $\varphi(u) \to \infty$ *quando* $\|u\| \to \infty$.

Demonstração. Ver [22], Corolário 2.7, pag. 40.

E.1 PRINCÍPIO GERAL MINIMAX

Teorema E.6. *Seja* X *um espaço de Banach. Seja* M_0 *um subespaço fechado do espaço métrico* M *e* $\Gamma_0 \subset C(M_0, X)$. *Defina*

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M : X); \gamma|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisfaz*

$$\infty > c := \inf_{y \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi((\gamma(u))) > a := \sup_{\gamma_0 \in \Gamma} \sup_{u \in M_0} \varphi((\gamma_0(u))) \tag{E.2}$$

então, para todo $\varepsilon \in (0, \frac{c-a}{2}), \delta > 0$ *e* $\gamma \in \Gamma$ *tal que*

$$\sup_M \varphi \circ \gamma \leq c + \varepsilon, \tag{E.3}$$

existe $u \in X$ *tal que*

$$\begin{aligned} &(a) \;\; c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon, \\ &(b) \;\; dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta, \\ &(c) \;\; \|\varphi'(u)\| \leq \tfrac{8\varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponhamos que para todo $u \in X$ satisfazendo (a) e (b),

$$\|\varphi'(u)\| > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Queremos aplicar o Lema da Deformação E.1 com $S := \gamma(M)$. Note que se tomarmos $\varepsilon' < \varepsilon$, e u satisfazendo

$$\begin{aligned} &c - 2\varepsilon' \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon', \\ &dist(u, \gamma(M)) \leq 2\delta, \\ &\|\varphi'(u)\| > \tfrac{8\varepsilon'}{\delta}, \end{aligned}$$

então, u satisfaz

$$\begin{aligned}&(a)\ \ c-2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c+2\varepsilon,\\&(b)\ \ dist(u,\gamma(M)) \leq 2\delta,\\&(c)\ \ \|\varphi'(u)\| > \tfrac{8\varepsilon}{\delta}.\end{aligned}$$

Assim, assuma

$$c-2\varepsilon > a. \tag{E.4}$$

Defina

$$\beta(u) := \eta(1,\gamma(u)).$$

Para todo $u \in M_0$, de (E.4)e do item (i) do Lema de Deformação E.1,

$$\beta(u) = \eta(1,\gamma_0(u)) \overset{(i)}{=} \gamma_0(u),$$

pois $\sup\limits_{u\in M_0} \leq a < c-2\varepsilon$, o que implica que β pertenece à Γ. Por (E.3),

$$\sup_M \varphi\circ\gamma \leq c+\varepsilon.$$

Assim, $\beta(u) \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S$ e pelo item (ii) do Lema da Deformação E.1,

$$\sup_{u\in M} \varphi(\beta(u)) = \sup_{u\in M} \varphi(\eta(1,\gamma_0(u))) \overset{(ii)}{\leq} c-\varepsilon,$$

o que contraria a definição de c. Logo a tese é verdadeira. □

Corolário E.7. *Supondo (E.2) então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo*

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Em particular, se φ satisfaz $(PS)_c$, então c é um valor crítico de φ.

Demonstração. Tomando

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}, \text{ e } \delta = 1,$$

Pelo teorema E.6, existe $u_n \in X$ tal que

$$\begin{aligned}c-\frac{2}{n} \leq \varphi(u_n) \leq c+\frac{2}{n},\\ \|\varphi'(u_n)\| \leq \frac{8}{n}.\end{aligned}$$

Logo, a sequência (u_n) é tal que

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

□

APÊNDICE F – O ESPECTRO DO LAPLACIANO

Definição F.1. Sejam X um espaço de Banach e $A : X \longrightarrow X$, um operador linear limitado.

(i) O conjunto resolvente de A é
$\rho(A) = \{\eta \in \mathbb{R} : (A - \eta I) \text{ é injetora e sobrejetora}\}$,

(ii) O espectro de A é
$\sigma(A) = \mathbb{R} - \rho(A)$.

Definição F.2. Sejam X Banach e $A : X \longrightarrow X$, um operador linear limitado.

(i) nós dizemos que $\eta \in \sigma(A)$ é um autovalor de A fornecido
$N(A - \eta I) \neq \{0\}$, (veja [13]),
nós escrevemos σ_p para denotar a coleção de A, σ_p é o espectro de pontos.

(ii) Se η é um autovalor e $w \neq 0$. satisfaz
$Aw = \eta w$,
nós dizemos que w é um autovetor associado.

Definição F.3. Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema de autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema F.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui um número infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

tais que

$$\lambda_k \to \infty \quad \textit{quando } k \to \infty,$$

e autofunções $\{u_k\}$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. *Em particular*

$$|v|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2}^2.$$

Demonstração: Consideramos o funcional

$$I : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

dado por

$$I(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 dx} = \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_2^2}{\langle u, u \rangle_2^2} = \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2}.$$

Claramente este funcional é limitado inferiormente, então existe

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} I(u).$$

Seja $\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} I(u)$. Mostraremos que existe $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

De fato, como $I(\alpha u) = I(u)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, pela definição de ínfimo, obtemos uma sequência $(u_k) \subset H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ com $|u_k|_2^2 = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(u_k) \to \lambda_1, \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo, pela definição do funcional I, obtemos

$$|\nabla u_k|_2^2 \to \lambda_1, \text{ quando } k \to \infty. \tag{F.1}$$

Assim, (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo existe uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_k) que converge de forma fraca em $H_0^1(\Omega)$. Logo pelo Teorema de Rellich Kondraknov (teorema B.11), isto é $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, segue que (u_{n_k}) converge de forma forte em $L^2(\Omega)$. Ou seja, existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$u_{n_k} \to u \text{ em } L^2(\Omega), \text{ quando } k \to \infty. \tag{F.2}$$

Como para $k, l \in \mathbb{N}$, vale a identidade

$$|u_{n_k} - u_{n_l}|_2^2 + |u_{n_k} + u_{n_l}|_2^2 = 2|u_{n_k}|_2^2 + 2|u_{n_l}|_2^2,$$

obtemos que,

$$|u_{n_k} + u_{n_l}|_2^2 \to 4 \text{ quando } k, l \to \infty. \tag{F.3}$$

Além disso, pela identidade

$$|\nabla(u_{n_k}-u_{n_l})|_2^2+|\nabla(u_{n_k}+u_{n_l})|_2^2=2|\nabla(u_{n_k})|_2^2+2|\nabla(u_{n_l})|_2^2$$

e por

$$\lambda_1=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} I(u)\leq \frac{|\nabla(u_{n_k}+u_{n_l})|_2^2}{|u_{n_k}+u_{n_l}|_2^2},$$

obtemos que

$$|\nabla(u_{n_k}-u_{n_l})|_2^2\leq 2|\nabla(u_{n_k})|_2^2+2|\nabla(u_{n_l})|_2^2-\lambda_1|u_{n_k}+u_{n_l}|_2^2. \tag{F.4}$$

Logo usando (F.1), (F.3) e (F.4), segue que

$$|\nabla(u_{n_k}-u_{n_l})|_2^2\to 0 \text{ quando } k,l\to\infty,$$

isto é,

$$\|u_{n_k}-u_{n_l}\|\to 0 \text{ quando } \ k,l\to\infty.$$

Assim, a subseqüência (u_{n_k}) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, existe $w\in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_k}\to w \text{ em } \ H_0^1(\Omega),\ \text{quando } k\to\infty, \tag{F.5}$$

ou seja,

$$|\nabla(u_{n_k}-w)|_2\to 0,\ \text{quando } k\to\infty.$$

Portanto, pela desigualdade de Poincaré,

$$|u_{n_k}-w|_2^2\to 0,\ \text{quando } k\to\infty,$$

isto é,

$$u_{n_k}\to w \text{ em } L^2(\Omega),\ \text{quando } k\to\infty. \tag{F.6}$$

De (F.2) e (F.6), obtemos que $u=w$, e consequentemente, por (F.5),

$$u_{n_k}\to u \text{ em } H_0^1(\Omega),\ \text{quando } k\to\infty \text{ com } |u_k|_2^2=1.$$

Logo, como $\|u_{n_k}-u\|=|\nabla u_{n_k}-\nabla u|_2$ e $||\nabla u_{n_k}|_2-|\nabla u|_2|\leq|\nabla u_{n_k}-\nabla u|_2$, para todo $k\in\mathbb{N}$, obtemos que $|\nabla u_{n_k}|_2\to|\nabla u|_2$ quando $k\to\infty$. Assim de (F.1) segue que

$$\lambda_1=|\nabla u|_2^2.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, segue que $\lambda_1=|\nabla u|_2^2\neq 0$, com $u=u_1$.
Agora mostraremos que $u=u_1$ é uma solução fraca de $-\Delta u=\lambda u$. Como u_1 é um mínimo

para o funcional I, então para $v \in H_0^1(\Omega)$ arbitrário, temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{I(u_1+tv)-I(u_1)}{t}\\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{|\nabla(u_1+tv)|_2^2}{|u_1+tv|_2^2} - \dfrac{|\nabla u_1|_2^2}{|u_1|_2^2}}{t}\\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{|\nabla u_1|_2^2 + t^2|\nabla v|_2^2 + 2t\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2}{|u_1|_2^2 + t^2|v|_2^2 + 2t\langle u_1, v\rangle_2} - \dfrac{|\nabla u_1|_2^2}{|u_1|_2^2}}{t}.
\end{aligned}
$$

Portanto, como $|u_1|_2^2 = 1$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2|\nabla v|_2^2|u_1|_2^2 + 2t\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2 |u_1|^2 - t^2|v|^2|\nabla u_1|_2^2 - 2t\langle u_1, v\rangle_2|\nabla u_1|_2^2}{t(1+t^2|v|_2^2+2t\langle u_1, v\rangle_2)}\\
&= 2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2 |u_1|_2^2 - 2\langle u_1, v\rangle_2 |\nabla u_1|_2^2\\
&= 2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2 - 2\langle u_1, v\rangle_2 \lambda_1,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Agora suponha como hipótese de indução que obtivemos $(\lambda_1, u_1), \ldots, (\lambda_{j-1}, u_{j-1})$ satisfazendo, para todo $1 \leqslant i, k \leqslant j-1$

(i) $u_i \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$,

(ii) $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{j-1}$,

(iii) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_i \nabla v dx = \lambda_i \int_\Omega u_i v dx$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

(iv) $\langle u_i, u_k\rangle_2 = \delta_{i,k}$.

Definimos

$$H_j = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle v, u_i\rangle_2 = 0, \text{ para } \ i = 1, 2 \cdots, j-1\}.$$

H_j é o subespaço de Hilbert ortogonal ao subespaço de dimensão finita gerado pelas autofunções $u_1, u_2, \cdots, u_{j-1}$, isto é, $H_j =< u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >^\perp$.
Defina

$$\lambda_i = \inf_{u \in H_j} I(u).$$

Como $H_j \subset H_{j-1}$, então

$$\lambda_{j-i} \leq \lambda_j. \tag{F.7}$$

Pelo mesmo argumento anterior, existe uma seqüência (u_n) de H_j com $|u_n|_2 = 1$ e $u_j \in H_0^1(\Omega)$ com $|u_j|_2 = 1$ tal que $u_n \to u_j$ em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, $\lambda_j = |\nabla u_j|_2^2$ e

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \lambda_j \int_\Omega u_j v dx, \text{ para todo } v \in H_j. \tag{F.8}$$

Como H_j é um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$, temos

$$u_j \in H_j. \tag{F.9}$$

Também temos que :

$$H_0^1(\Omega) = H_j \oplus H_j^{\perp},$$

$$\text{ou seja, } H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = H_j \oplus < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} > .$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$v = w_1 + w_2, \text{ onde } w_1 \in H_j \text{ e } w_2 \in < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} > .$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \langle \nabla u_j, \nabla v \rangle_2 = \langle \nabla u_j, \nabla w_1 \rangle_2 + \langle \nabla u_j, \nabla w_2 \rangle_2.$$

Lembrando que $w_1 \in H_j$ obtemos por (F.8) que

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \lambda_j \langle u_j, w_1 \rangle_2 + \langle \nabla u_j, \nabla w_2 \rangle_2. \tag{F.10}$$

Como para $i = 1, 2, \ldots, j-1$,

$$\langle \nabla u_j, \nabla u_i \rangle_2 = \int_\Omega \nabla u_j \nabla u_i dx$$

e por hipótese de indução (iii), temos

$$\langle \nabla u_j, \nabla u_i \rangle_2 = \lambda_i \int_\Omega u_i u_j dx.$$

Então, pela hipótese de indução (iv),

$$\langle \nabla u_j, \nabla u_i \rangle_2 = 0.$$

Assim, como $w_2 \in < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >$, segue que

$$\langle \nabla u_j, \nabla w_2 \rangle_2 = 0. \tag{F.11}$$

Por outro lado,

$$\lambda_j \int_\Omega u_j v dx = \lambda_j \langle u_j, v \rangle_2 = \lambda_j \langle u_j, w_1 \rangle_2 + \lambda_j \langle u_j, w_2 \rangle_2,$$

e como $w_2 \in < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >$, por (F.9) temos,

$$\lambda_j \int_\Omega u_j v dx = \lambda_j \langle u_j, w_1 \rangle. \tag{F.12}$$

Portanto por (F.10), (F.11) e (F.12) segue que

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \lambda_j \int_\Omega u_j v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$u_j \text{ é uma solução fraca de } -\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega.$$

Mostraremos agora que

$$\lambda_j \to \infty \text{ quando } j \to \infty.$$

Suponha por absurdo que $\lambda_j \to \lambda_0$. Então, obtemos uma seqüência (u_j) de $H_0^1(\Omega)$ e autofunções associados aos autovalores λ_j tais que $|u_j|_2 = 1$ e $\lambda_j = |\nabla u_j|_2^2 \to \lambda_0$. Então (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo existe uma subseqüência (u_{n_j}) de (u_j) que converge de forma fraca em $H_0^1(\Omega)$. Logo pelo Teorema de Rellich Kondraknov,nos temos que, $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, e portanto,

$$(u_{n_j}) \text{ converge forte em } L^2(\Omega).$$

Logo,

$$(u_{n_j}) \text{ é de Cauchy em } L^2(\Omega). \tag{F.13}$$

Também, como (u_{n_j}) é ortonormal, para $k, l \in \mathbb{N}$, temos que

$$|u_{n_j} - u_{n_k}|_2^2 = 2.$$

Logo

$$|u_{n_j} - u_{n_k}|_2 = (2)^{\frac{1}{2}} \text{ e}$$

portanto (u_{n_j}) não é de cauchy em L^2 o que é um absurdo por (F.13).

Agora, mostraremos o resultado de expansão.

Para $v \in H_0^1(\Omega)$ e $i, k \in \mathbb{N}$ escreva $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle_2$, $v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ e $w_k = v - v_k$. Logo, para $i \leq k$, e $\{u_j\}$ é ortonormal segue que

$$\begin{aligned} \langle w_k, u_i \rangle &= \langle v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, u_i \rangle \\ &= \langle v, u_i \rangle - \alpha_i \\ &= \alpha_i - \alpha_i = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle w_k, u_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, \ldots, k. \tag{F.14}$$

Como $\lambda_{k+1} = \inf\limits_{u \in H_{k+1}} \dfrac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2}$ e $H_{k+1} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ \langle v, u_i \rangle_2 = 0,\ i = 1, \ldots, k\}$, por (F.14), temos

$$w_k \in H_{k+1}.$$

Logo,

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{|\nabla w_k|_2^2}{|w_k|_2^2} = \frac{\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_2}{\langle w_k, w_k \rangle_2}.$$

Então,

$$\langle w_k, w_k\rangle_2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\langle \nabla w_k, \nabla w_k\rangle_2. \tag{F.15}$$

Daí, como u_i é solução fraca para todo $i \leq k$, então, por (F.14), segue que

$$\langle \nabla u_i, \nabla w_k\rangle_2 = \lambda_i \langle w_k, u_i\rangle_2 = 0.$$

Portanto, temos

$$\langle \nabla u_i, \nabla w_k\rangle_2 = 0. \tag{F.16}$$

Logo de (F.14), (F.16) e $v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$, obtemos as identidades

$$\langle w_k, w_k\rangle_2 = \langle v, v\rangle_2 - \langle v_k, v_k\rangle_2,$$

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k\rangle_2 = \langle \nabla v, \nabla v\rangle_2 - \langle \nabla v_k, \nabla v_k\rangle_2.$$

Desta última identidade, segue que

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k\rangle_2 \leq \langle \nabla v, \nabla v\rangle_2. \tag{F.17}$$

Logo, por (F.15) e (F.17), obtemos

$$\begin{aligned} |w_k|_2^2 &= \langle w_k, w_k\rangle_2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\langle \nabla w_k, \nabla w_k\rangle \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}}\langle \nabla v, \nabla v\rangle_2. \end{aligned}$$

Então, como $\lambda_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$, $w_k \to 0$ em $L^2(\Omega)$.
Usando $w_k = v - v_k$, podemos obter $v_k \to v$ em $L^2(\Omega)$.

Logo $v = \lim_{k\to\infty} v_k + \lim_{k\to\infty} w_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$. Portanto $v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$, $\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$. Agora, como

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq \langle u_1, u_2, \ldots\rangle \subseteq \overline{\langle u_1, u_2, \ldots\rangle}^{L^2(\Omega)} \subseteq L^2(\Omega),$$

podemos deduzir que

$$\overline{W_0^{1,2}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} \subseteq \overline{\langle u_1, u_2, \ldots\rangle}^{L^2(\Omega)} \subseteq L^2(\Omega).$$

Lembrando que $\overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$, obtemos

$$\overline{\langle u_1, u_2, \ldots\rangle}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

Segue que $\{u_j\}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i,\ \forall\ v \in L^2(\Omega).$$

Além disso, como $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle_2$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \rangle_2,\end{aligned}$$

onde, a última igualdade segue do fato que $\{u_i\}$ é ortonormal.
Portanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2 = \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \rangle_2.$$

Agora, pela continuidade do produto interno, segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2 = \langle \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \rangle_2 = \langle v, v \rangle_2$$

e consequentemente,

$$|v|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2.$$

O próximo resultado garante que as autofunções do operador $(-\Delta)$ são regulares.

Teorema F.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto com fronteira de regular. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in H_0^1$ é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [4], Teorema 1.12, pag. 21.