

Monalisa Reis da Silva

Autovalor de Steklov-Neumann e Aplicações

Brasil

Abril de 2013

Monalisa Reis da Silva

Autovalor de Steklov-Neumann e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas - Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - (UFJF)

Brasil
Abril de 2013

Monalisa Reis da Silva

Autovalor de Steklov-Neumann e Aplicações/ Monalisa Reis da Silva. – Brasil,
Abril de 2013-

70 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - (UFJF)

Dissertação – Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas - Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação, Abril de 2013.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Autovalor de Steklov-Neumann. 3. Mini-
max.

CDU 02:141:005.7

Monalisa Reis da Silva

Autovalor de Steklov-Neumann e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática, área de concentração : Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Trabalho aprovado. Brasil, 24 de novembro de 2012:

**Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira
Faria - (UFJF)**
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasil
Abril de 2013

*Dedico este trabalho a minha mãe Maria Aparecida, meu pai Luiz Carlos, meu irmão
Rodrigo e ao meu noivo Samuel.
AMO VOCÊS!*

Agradecimentos

À Deus, por me iluminar em todos os momentos e por permitir mais essa conquista. Graças e louvores sejam dadas a ti Senhor!

Aos meus pais Luiz Carlos e Maria Aparecida, infinitas palavras não seriam suficientes para agradecer por tudo que sempre fizeram e fazem por mim! Muito Obrigada por tudo!

Aos meus familiares, amigos e em especial ao meu irmão Rodrigo, que sempre me deram amor e força em todos os momentos incondicionalmente.

Ao meu noivo e futuro esposo Samuel que sempre me apoiou, incentivou e esteve ao meu lado.

Ao meu orientador, professor Luiz Fernando de Oliveira Faria, pela atenção, paciência e dedicação com que me orientou.

Ao professor Fábio Rodrigues Pereira e à professora Flaviana Andréa Ribeiro por me incentivarem a continuar meus estudos.

À coordenação do mestrado em matemática na UFJF juntamente com todos os professores do programa.

Aos professores Olímpio Hiroshi Miyagaki e Rodrigo da Silva Rodrigues por terem aceito o convite para participar da minha banca.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho faremos um estudo sobre a teoria de problemas de autovalores de Steklov-Neumann, fundamentado principalmente no trabalho de Auchmuty [3], apresentaremos uma aplicação baseada no trabalho de Mavinga e Nkashama [25]. Mais precisamente, sob certas condições sobre as funções f e g , mostraremos resultados de existência de solução para o problema,

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u &= f(x, u), \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g(x, u), \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Faremos uma introdução à teoria de Métodos Variacionais, para dar um melhor embasamento teórico ao leitor que está iniciando os estudos em equações diferenciais parciais elípticas.

Palavras chave: Equações diferenciais elípticas. Autovalor de Steklov-Neumann. Mini-max.

Abstract

In this paper, we will study the theory of Steklov-Neumann eigenvalue problems, reasoned mainly on the work of Auchmuty [3]. We will present an application based at work of Mavinga and Nkashama [25]. More precisely, under certain conditions on the functions f and g , we show results of existence of solution to the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u &= f(x, u), \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g(x, u), \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

We will make an introduction to the theory of Variational Methods, to give a better theoretical basis the reader who is beginning study elliptic partial differential equations.

Key Words: Elliptic differential equations; Eigenvalue of Steklov-Neumann; Mini-max

Índice de notações

- Ω é um conjunto aberto e limitado no \mathbb{R}^n ;
- Ω é um domínio de \mathbb{R}^n ;
- $\bar{\Omega}$ é o fecho de Ω ;
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω ;
- $B_r(x)$ é a bola de centro x e raio r ;
- $|A|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de \mathbb{R}^n ;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\}$;
- $C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$;
- $\int u = \int_{\Omega} u dx$;
- σ é a medida de um subconjunto de $\partial\Omega$;
- $\oint u = \int_{\partial\Omega} u d\sigma$;
- $\|u\|_{\infty} = \inf\{a \geq 0; |\{x \in \Omega; |u(x)| > a\}| = 0\}$;
- $L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{\infty} < \infty\}$;
- $\|u\|_p = (\int |u|^p)^{1/p}$ e $\|u\|_{p,\partial} = (\int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma)^{1/p}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_p < \infty\}$;
- $L^p(\partial\Omega) = \{u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{p,\partial} < \infty\}$;
- $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int u\varphi' = -\int g\varphi, \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)\}$;
- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;
- $(u, v)_c = \int \nabla u \nabla v + \int c(x)uv$;
- c - ortonormal, significa normal na norma associada ao produto acima;
- \oplus_c = soma direta levando em consideração o produto interno definido acima;
- $(u, v)_{\partial} = \oint uv$;

- $C^{k,\beta} = \{u \in C^k(\bar{U}); \|u\|_{C^{k,\beta}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{C^{0,\beta}(\bar{U})} < \infty\}$;
- $\langle u, v \rangle_2 = \int_\Omega uv dx, \forall u, v \in L^2(\Omega)$;
- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ e $|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
- $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$;
- $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior;
- $S \hookrightarrow W$, denota que S está imerso em W compactamente.

Sumário

1	Introdução	11
2	Métodos Variacionais	15
2.1	História	15
2.2	Resultados importantes	16
2.3	Formulação variacional de um problema de valor de contorno	21
3	Autoproblemas de Steklov	25
3.1	O autoproblema Schroedinger-Steklov	25
3.2	Princípio variacional de sucessivos autovalores de Steklov	30
3.3	Espaços traço ortogonais para $H^1(\Omega)$	33
4	Aplicação	36
4.1	Resultados preliminares	36
4.2	Resultados principais	44
4.3	Considerações finais	57
	Apêndices	59
	APÊNDICE A Resultados de Análise Funcional	60
	APÊNDICE B Resultados de Análise	63
	APÊNDICE C Resultados de Equações Diferenciais Parciais	66
	Referências	68

1 Introdução

Neste trabalho, apresentamos uma introdução à teoria de autovalores de Steklov-Neumann a fim de exibir um resultado de existência de solução para nosso problema aplicado, o qual foi estudado por Mavinga e Nkashama em [25]. Além disso, fazemos um estudo introdutório da teoria de Métodos Variacionais para dar um melhor embasamento teórico ao leitor que está iniciando o seu estudo em equações diferenciais parciais elípticas.

Considere o problema,

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \text{ em } \Omega, \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Se λ é um número real que satisfaz à equação (1.1) para alguma função u não nula, dizemos que λ é um autovalor do operador Laplaciano para o problema de Dirichlet homogêneo.

O estudo de autovalores é importante para a matemática, com aplicações práticas em áreas diversificadas como mecânica quântica, processamento de imagens, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, estatística entre outros. Para maiores informações gostaríamos de citar [33].

Considere o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \mu u, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

A condição de fronteira $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mu u$ define um autoproblema de Steklov. Se μ satisfaz o problema acima para alguma função não nula, dizemos que μ é um autovalor de Steklov.

Considere o problema linear elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u &= \lambda u, \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

Se λ satisfaz a equação (1.3) para alguma função u não nula, dizemos que λ é um autovalor para o problema de Neumann homogêneo.

Utilizaremos a teoria de autovalores para provar resultados de existência de soluções para a equação diferencial parcial elíptica não linear de segunda ordem, com (possibilidade de) condições de bordo não lineares,

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave e $\partial\Omega$ é de classe $C^{0,1}$, $\frac{\partial}{\partial \nu} := \nu \nabla$ é a derivada normal exterior em $\partial\Omega$.

Assumimos $n \geq 2$ e que a função $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e as não-linearidades $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(C1) $c \in L^p(\Omega)$ com $p \geq \frac{n}{2}$, onde $n \geq 3$ ($p \geq 1$ quando $n = 2$), e $c \geq 0$ quase sempre em Ω .

A desigualdade fica estrita num conjunto de medida positiva; isto é, $\int_{\Omega} c(x)dx > 0$.

(C2) $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

(C3) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|g(x, u)| \leq a_1 + a_2|u|^s \text{ com } 0 \leq s < \frac{n}{n-2}.$$

(C3') Existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$|f(x, u)| \leq b_1 + b_2|u|^s \text{ com } 0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}.$$

Uma solução clássica de (1.4) é uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tal que

$$-\Delta u + c(x)u = f(x, u) \text{ em } \Omega.$$

Se u é uma solução clássica, tomando uma função $v \in C^2(\Omega)$ obtemos

$$-\Delta uv + c(x)uv = f(x, u)v,$$

ou ainda,

$$\int -\Delta uv + \int c(x)uv = \int f(x, u)v. \quad (1.5)$$

Pelo Teorema C.2 (ver apêndice C) temos que:

$$-\int \Delta uv = -\oint \frac{\partial u}{\partial \nu} v + \int \nabla u \nabla v, \quad (1.6)$$

assim, de (1.4) e (1.6) segue a igualdade

$$\int \nabla \varphi \nabla v + \int c(x)uv = \int f(x, u)v + \oint g(x, u)v, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (1.7)$$

onde \int denota a integral em Ω , \oint denota a integral em $\partial\Omega$ e $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev (A.8, ver apêndice A) usual das funções em Ω . Dizemos que uma função $u \in H^1(\Omega)$ que satisfaz (1.7) é uma solução fraca de (1.4).

O objetivo desse trabalho é estudar a existência de soluções fracas do problema (1.4) no qual as não-linearidades interagem, em certo sentido, com os espectros de Steklov-Neumann, (problemas (1.2) e (1.3)). Nós relacionamos o limite da não-linearidade $g(x, u)$ com o espectro de Steklov, enquanto a não-linearidade $f(x, u)$ está relacionada com o espectro de Neumann.

O problema não linear (1.4), tem sido consideravelmente estudado no âmbito de métodos de sub e super-soluções. Referimo-nos, por exemplo, a Amann [1], Mawhin e Schmitt [26], e suas referências. Restringindo o domínio das não-linearidades (através de um problema ligeiramente modificado) para o intervalo de sub e super soluções, os métodos utilizados reduzem o problema a considerar essencialmente não-linearidades limitadas. Uma vez que é baseado em técnicas (a chamada) de comparação, o método de sub-super soluções não se aplica quando as não-linearidades são comparadas com autovalores mais elevados.

Nos últimos anos, muitos trabalhos foram dedicados ao estudo da solubilidade de problemas de autovalores com condição de contorno linear homogênea, onde a não-linearidade na equação diferencial interage com os autovalores da equação diferencial linear correspondente, com condição de contorno linear homogênea (ressonantes e não ressonantes). Para alguns resultados recentes neste sentido, gostaríamos de citar Castro [11], de Figueiredo e Gossez [13], Nkashama e Robinson [29] e Rabinowitz [31].

Um estudo realizado recentemente por Godoi, Miyagaki e Rodrigues [18] para sistemas de equações diferenciais parciais elípticas com condições de fronteira não lineares e para equações diferenciais com condições de fronteira não lineares associadas ao operador p-laplaciano, trata da relação entre os autovalores de Steklov e os autovalores de Neumann. Estes resultados serão obtidos quando houver uma certa interação entre as não linearidades e o espectro de Neumann, e uma interação entre as não linearidades de fronteira e o espectro de Steklov, associados aos sistemas ou equações. Para maiores informações, ver [18].

Quanto ao problema (1.4), há alguns resultados na literatura. Para o caso linear, gostaríamos de citar o trabalho de Steklov [34] (que iniciou o problema em um disco em 1902), Amann [1], Bandle [5], e mais recentemente Auchmuty [3]. Alguns resultados em disco quando ($n = 2$) foram obtidos por Klingelhöfer [20] e de Cushing [12]. Os resultados em [20] foram significativamente generalizados para dimensões maiores em [1], no âmbito do método de sub e super-soluções.

No Capítulo 4, utilizamos a noção de “autovalor linha” no plano. Estes autovalores-

linhas, aqui referidos como as linhas de autovalor de Steklov para Neumann, unem cada autovalor de Steklov ao primeiro autovalor do problema de Neumann com condições de bordo homogêneas. Provamos a existência de solução quando as não-linearidades envolvidas ficam assintoticamente, em certo sentido, abaixo da primeira linha de autovalor ou em uma região de quadrilátero delimitada por dois autovalores-linhas de Steklov-Neumann consecutivos.

No Capítulo 2, apresentaremos algumas definições e os principais resultados que são usados ao longo do trabalho no que se refere a Métodos Variacionais. Tomaremos como base principal Evans [17], Brezis [7] e Rabinowitz [31], onde podem ser encontradas todas as demonstrações não feitas neste capítulo. Apresentaremos ainda uma teoria de Min-Max que será utilizada no final do capítulo 4.

No Capítulo 3, apresentaremos alguns dos resultados provados por Auchmuty [3] a fim de fortalecer nossa teoria de autovalores de Steklov que será altamente utilizada no capítulo subsequente. Os resultados mais importantes para nosso trabalho serão demonstrados, entretanto, todas as demonstrações podem ser encontradas em [3].

No Capítulo 4, mostraremos os resultados provados por Mavinga e Nkashama [25]. Na primeira seção do Capítulo 4, citamos algumas consequências dos resultados de Auchmuty [3] que nos serão úteis para o decorrer do trabalho. Além disso, apresentaremos e provaremos alguns resultados técnicos essenciais nas demonstrações seguintes. Na segunda seção do Capítulo 4, apresentaremos resultados de existência de pelo menos uma solução para o problema (1.4) sob três conjuntos de hipóteses distintos.

2 Métodos Variacionais

Neste Capítulo, vamos apresentar uma breve introdução histórica do surgimento da teoria de Métodos Variacionais, apontando as motivações e idéias básicas. O objetivo deste Capítulo é fornecer um embasamento teórico para o leitor que está iniciando seus estudos em equações diferenciais parciais.

2.1 História

A idéia chave do cálculo das variações é a obtenção de pontos críticos de um funcional $l : M \rightarrow R$ onde M pode ser um conjunto de números, funções, curvas, superfícies, munido de alguma topologia.

O grau da dificuldade para determinação dos pontos críticos do operador l , dependerá de M e do funcional l . Por exemplo, se M for um intervalo compacto da reta, munido com a topologia induzida por R , e l contínuo, basta usarmos o teorema de Weierstrass.

Apesar da expressão “cálculo das variações” ter sido usada à partir do século *XVIII*, problemas desta natureza são antiquíssimos. Os egípcios, por exemplo, sabiam que a menor distância entre duas linhas é a medida do menor segmento que as une. Um outro exemplo, presente no nosso dia a dia é a insensável busca pela minimização do custo e a maximização dos lucros.

Por muito tempo, vários matemáticos se dedicaram a estudar este tipo de problema, desenvolvendo para isto, vários Métodos Variacionais para se obter uma solução de uma equação diferencial. Cada problema exigia um método específico. Porém, uma teoria geral, que permitia-se solucionar problemas gerais, foi desenvolvida. Os nomes de Lagrange (1736 – 1813) e Euler (1707 – 1783) são fortemente ligados a este fato.

Pouco antes de 1732, Euler começou um estudo sistemático de problemas de valores extremos, desenvolvendo um método diferente dos seus predecessores, os quais tratavam de problemas particulares. Ele descobriu, para uma classe especial de funcionais, a primeira condição necessária que uma função de minimização tem que satisfazer. Nos dias de hoje, isso corresponde à condição $l'(u) = 0$, onde l' entende-se como a derivada de Fréchet de l .

Em meados de 1850, Gauss e Thompson deram origem ao chamado “Método Direto do Cálculo das Variações”, o marco da introdução das Equações Diferenciais Parciais (EDP's), no cálculo das variações. Basicamente o método trata da determinação de zeros de uma equação do tipo $l'(u) = 0$.

Hoje em dia, o mesmo tipo de idéia é usado para outros problemas de valor de fronteira, para as mais gerais equações e sistemas elípticos. Entretanto, os problemas que tratamos na atualidade possuem uma maior variedade de pontos críticos. Como consequência, alguns novos resultados na Teoria dos Pontos Críticos foram desenvolvidos, como por exemplo o Método Minimax, cuja idéia básica será abordada a seguir.

Ambrosetti e Rabinowitz em [31], no ano de 1973, estabeleceram diversos e importantes resultados do Método Minimax para funcionais “sem simetria”. Dois dos principais resultados são, o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Ponto de Sela, ambos serão enunciados na próxima seção.

Neumann e Morgenstern dão ênfase aos jogos. Para isso, Neumann provou o “Teorema Minimax”. Seu estudo de estratégias que visa maximizar os ganhos e minimizar as perdas foi a motivação para provar o Teorema. Para maiores informações ver [28].

O problema de minimização de funcionais é o objetivo central do cálculo de variações clássico, e que, em seu estudo, equações diferenciais aparecem de modo natural. Vamos considerar funcionais definidos em espaços de Banach e encontrar condições, de modo que estes funcionais possuam minimizadores (ou maximizadores) ou mais genericamente pontos críticos. Às vezes, tais minimizadores (ou maximizadores) têm significado físico, por exemplo, eles podem representar configurações energeticamente ideais na ciência dos materiais (por exemplo, bolhas de sabão, chapas de flambagem ou vigas, orientação de cristais líquidos sob uma força magnética), em outros casos, verificamos sua aplicação também na teoria de jogos. Para maiores informações, ver [6] e [10].

O método variacional contribuiu muito para o desenvolvimento da Matemática, possibilitando assim, a solução de problemas matemáticos em Física (relativa e quântica), Engenharia, Biologia e Economia e conseqüentemente, desfruta de um “status” especial.

2.2 Resultados importantes

Para atacar um problema de equações diferenciais parciais podemos buscar uma solução única, infinitas soluções, uma solução que seja máximo ou mínimo, uma solução que seja min-max ou até mesmo podemos mostrar não existência de solução para o problema, (C.1, ver apêndice C). Existem muitas formas de atacar um problema de equações diferenciais parciais, vamos apresentar aqui algumas delas.

Definição 2.1 *Seja E um espaço de Banach. Dizemos que $z \in E$ é um mínimo local, respectivamente máximo local, de um funcional $J \in C(E; \mathbb{R})$ se existe uma vizinhança V de z tal que*

$$J(z) \leq J(u), \text{ respectivamente } J(z) \geq J(u), \forall u \in V - \{z\}.$$

Se as desigualdades acima são estritas, dizemos que z é mínimo (máximo) estrito local. Se as desigualdades são válidas para todo $u \in E$, dizemos que z é um mínimo (máximo) global.

Temos que, se $z \in E$ é um mínimo (máximo) local e J é diferenciável em z , então $J'(z) = 0$. No que se segue, vamos exibir alguns resultados sobre a existência de mínimos ou máximos. Iniciamos com um resultado clássico trabalhado em funcionais que são coercivos e fracamente semi-contínuos inferiormente (w.l.s.c.).

Definição 2.2 Um funcional $J \in C(E; \mathbb{R})$ é coercivo se

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

Definição 2.3 $J \in C(E; \mathbb{R})$ é fracamente semi-contínuo inferiormente (w.l.s.c.) se toda sequência $u_n \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ é tal que

$$J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

O problema variacional consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado. Desta forma, variacionalmente, solucionar uma equação diferencial parcial é determinar os pontos críticos de um funcional associado.

Teorema 2.4 Seja E um espaço de Banach reflexivo, $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ coercivo e (w.l.s.c.). Então J tem um mínimo global, isto é, existe $z \in E$ tal que $J(z) = \min\{J(u) : u \in E\}$. Se J é diferenciável em z então $J'(z) = 0$.

Demonstração: [2, Teorema 5.5]. ■

Agora vamos expor uma aplicação dos resultados anteriores. Consideremos E um espaço de Hilbert e

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \phi(u),$$

onde $\| \cdot \|$ é a norma em E .

Utilizando o resultado acima, é possível provar o seguinte Teorema, veja [2, Teorema 5.8].

Teorema 2.5 Seja J definido anteriormente e suponha que $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ é fracamente contínuo (isto é: $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \phi(u_n) \rightarrow \phi(u)$) e satisfaça

$$|\phi(u)| \leq a_1 + a_2 \|u\|^\alpha,$$

com $a_1, a_2 > 0$ e $\alpha < 2$. Então J atinge um mínimo global em algum $z \in E$ e além disso, $J'(z) = 0$, isto é, $\nabla \phi(z) = z$.

Demonstração: [2, Teorema 5.8]. ■

Definição 2.6 *Um problema de Dirichlet, é encontrar uma função que seja solução de uma equação diferencial parcial (EDP) específica, no interior de uma dada região, que toma valores prescritos na fronteira dessa região.*

Considere o problema de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)), & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

com $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sublinear B.6, (ver apêndice B), e infinita. Assumimos que f é localmente Hölder contínua A.4, (ver apêndice A) e que existem $a_1 \in L^2(\Omega)$, $a_2 > 0$ e $0 < q < 1$ tais que

$$|f(x, t)| \leq a_1(x) + a_2|t|^q, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Tomando $E = H_0^1(\Omega)$ com a norma $\|u\|^2 = \int |\nabla u|^2$, e tendo em conta a imersão compacta $E \hookrightarrow L^2(\Omega)$, podemos repetir os argumentos feitos em [2, Teorema 1.8] para obter

$$\phi(u) := \int F(x, u), \quad \text{onde } F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds,$$

além disso, $F(x, u) \in C^1(E)$ é fracamente contínua.

Teorema 2.7 *Seja f localmente Hölder contínua e suponha que (2.2) seja válido. Então (2.1) possui uma solução.*

Demonstração: Apresentaremos aqui um esboço da demonstração, para maiores informações ver [2, Teorema 5.9].

Considere o funcional $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ dado por

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \phi(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int F(x, u),$$

cujos pontos críticos são as soluções de (2.1). Usando (2.2), encontramos constantes $a_i > 0$ tais que

$$\begin{aligned} |\phi(u)| &\leq a_3 \|u\|_{L^2} + a_4 \|u\|_{L^{q+1}}^{q+1}, \\ &\leq a_5 \|u\| + a_6 \|u\|^{q+1}. \end{aligned}$$

Como $q < 1$ temos que J é coercivo em E , além disso, ϕ é fracamente contínuo. Assim, o Teorema 2.5 aplica-se produzindo um mínimo z tal que $J'(z) = z - \phi'(z) = 0$.

Portanto (2.1) possui uma solução.

■

O procedimento para determinar uma solução de uma EDP que possui um funcional associado limitado inferiormente ou superiormente, é análogo ao descrito acima na maioria das vezes. Entretanto, existem casos onde o ponto crítico do funcional não é máximo e nem mínimo, mas um min-max. Nestes casos, podemos atacar o problema tentando adequá-lo às hipóteses de três grandes teoremas da teoria de métodos variacionais descritos abaixo.

Para melhor compreensão de tais hipóteses, seguem algumas definições importantes.

Definição 2.8 *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de Φ se existe $u \in X$ com $\Phi'(u) = 0$ e $\Phi(u) = c$.*

Denotaremos por Φ^c o conjunto de todos os pontos em níveis menores ou iguais a c , isto é,

$$\Phi^c = \{u \in X; \Phi(u) \leq c\}.$$

Definição 2.9 *(Condição Palais-Smale-(PS))*

Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. O funcional Φ satisfaz a condição (PS) se qualquer sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$|\Phi(u_n)| \leq C \text{ e } \Phi'(u_n) \rightarrow 0 \text{ em } X'$$

possui uma subsequência convergente.

Teorema 2.10 *(Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz)*

Sejam X um espaço de Banach real e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição Palais-Smale. Suponha que $\Phi(0) = 0$ e que

1. *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho} > \alpha$, e*
2. *existe um $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $\Phi(e) < 0$.*

Então, Φ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} \Phi(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], X); g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e\}$.

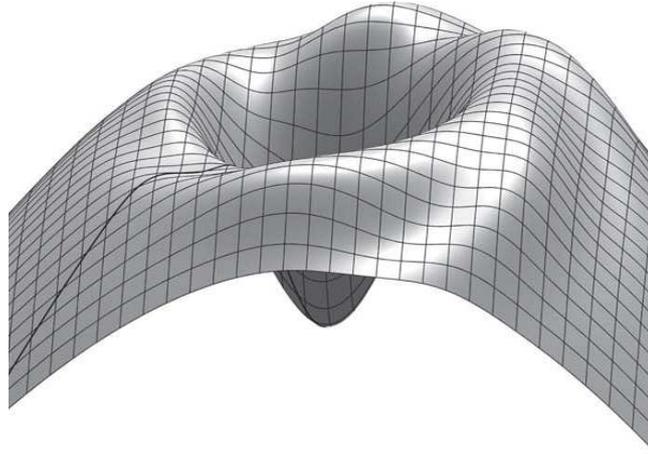


Figura 1 – Geometria do Teorema do Passo da Montanha

Demonstração: [17, Teorema 2, seção 8]. ■

Na figura acima, apresentamos um exemplo da geometria do Teorema do Passo da Montanha onde sobre a curva em destaque ocorre nosso min-max.

Abaixo exibimos uma generalização do Teorema do Passo da Montanha, acima enunciado, que possibilita estudar funcionais com uma geometria mais geral.

Teorema 2.11 (*Enlace*) *Seja X um espaço de Banach real com $X = X_1 \oplus X_2$, onde X_1 é um espaço de dimensão finita. Suponha que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz (PS) e*

1. *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho \cap X_2} \geq \alpha$ e*
2. *existem $\rho \in \partial B_1 \cap X_2$ e $R > \rho$ tais que $\Phi|_{\partial Q} \leq 0$, onde*

$$Q = (B_R \cap X_1) \oplus \{re; 0 < r < R\}; B_R, B_\rho \in X$$

Então, Φ possui um valor crítico $c \geq \alpha$ caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} \Phi(\gamma(u)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, X); \gamma = I_d \text{ em } \partial Q\}.$$

Demonstração: [31, Seção 8.3]. ■

Na figura acima, apresentamos um exemplo da geometria do Teorema do Enlace, onde $V = X_1$; $W = X_2$; $C = \partial B_\rho \cap X_2$ e $N = B_R$.

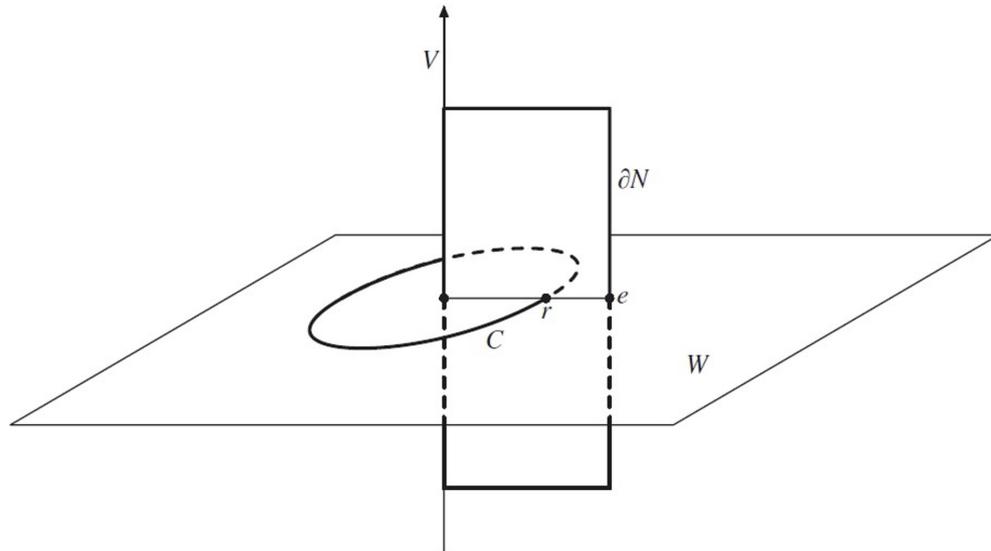


Figura 2 – Geometria do Teorema do Enlace

As hipóteses descritas no Teorema do Passo da Montanha são bem específicas, e o que fazer quando não são satisfeitas? Segue abaixo um Teorema que garante a existência de um min-max, mas levando em conta um conjunto de hipóteses um pouco diferente. No caso de nossa aplicação no Capítulo 4, será ele que garantirá a existência da solução de nossa EDP.

Teorema 2.12 (*Ponto de Sela*) *Sejam $W = V \oplus X$ um espaço de Banach com $V \neq \{0\}$ e $\dim(V) < \infty$ e seja I uma aplicação satisfazendo à condição Palais Smale - (PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que*

$$a = \sup_{\partial D} I < \inf_X I = b$$

então

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \bar{D}} I(h(u))$$

é um valor crítico de I com $c \geq b$, onde $\Gamma = \{h \in C(\bar{D}, V); h(u) = u, \forall u \in \partial D\}$

Demonstração: [19, Teorema 19.2]. ■

2.3 Formulação variacional de um problema de valor de contorno

Vamos abordar a resolução de um problema de equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem, apontando as definições básicas e etapas essenciais para obtermos uma

solução.

Exemplo 2.13 *Problema de Dirichlet Homogêneo.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Buscamos uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u = f, & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

onde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (\text{Laplaciano de } u),$$

e $f \in L^2(\Omega)$ é uma função dada em Ω . A condição de contorno $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ se chama condição de Dirichlet homogênea.

Definição 2.14 *Uma solução clássica de (2.3) é uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$ que verifica (2.3).*

Definição 2.15 *Uma solução fraca de (2.3) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz*

$$\int \nabla u \nabla v + \int uv = \int fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.4)$$

Para obtermos a equação acima, a partir de uma solução clássica, multiplique a primeira igualdade em (2.3) por uma função $v \in H_0^1(\Omega)$. Assim temos que

$$-\Delta uv + uv = fv,$$

isto é,

$$\int -\Delta uv + \int uv = \int fv,$$

utilizando a identidade de Green C.2 (ver apêndice C) e o fato de $v \in H_0^1(\Omega)$ obtemos que

$$\int \nabla u \nabla v + \int uv = \int fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

e segue a igualdade (2.4).

Faremos um esboço de como obter uma solução clássica para o problema (2.3). Os detalhes podem ser vistos em [7, Capítulo IX].

Etapa A: Toda solução clássica é uma solução fraca.

De fato, como $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, então $u \in H_0^1(\Omega)$ pelo Teorema A.18 (ver apêndice A).

Por outro lado, se $v \in C_c^1(\Omega)$ então $\int \Delta u \Delta v + \int uv = \int fv$, por densidade temos que a igualdade é válida para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Etapa B: Existência da solução fraca.

A garantia da solução para o problema de Dirichlet é dada através do Teorema abaixo.

Teorema 2.16 *Para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe $u \in H_0^1(\Omega)$ que é a única solução fraca de (2.3). Além disso, u é dada por*

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int (|\nabla v|^2 + v^2) - \int f v \right\}.$$

Este é o chamado princípio de Dirichlet.

Demonstração: [7, Teorema IX.21]. ■

Observe que a obtenção da solução do problema de Dirichlet foi através da minimização de um funcional associado.

Etapa C: Regularidade da solução fraca.

A Regularidade da solução fraca é dada pelo Teorema abaixo.

Teorema 2.17 *Seja Ω um aberto de classe C^2 com $\partial\Omega$ limitado. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaça*

$$\int \nabla u \nabla \phi + \int u \phi = \int f \phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$, donde C é uma constante que só depende de Ω . Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}} \leq C \|f\|_{H^m};$$

em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Por último, se Ω é de classe C^∞ e se $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Demonstração: [7, Teorema IX.25]. ■

O processo de regularização consistiu na busca da classe de funções a qual pertence nossa solução fraca. O objetivo é sempre mostrar que a solução fraca pertence a mesma classe de funções que a solução clássica pertence, entretanto nem sempre isso é possível. No nosso exemplo em específico isso foi feito.

Etapa D: Recuperação da solução clássica.

Admita que a solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ de (2.3) pertence a $C^2(\overline{\Omega})$ e suponhamos que Ω é de classe C^1 . Então $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Por outro lado, temos que

$$\int (-\Delta u + u)v = \int f v, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega),$$

então $-\Delta u + u = f$ q.t.p. em Ω , pois $C_c^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$. Dessa forma, $-\Delta u + u = f$ em todo ponto de Ω , pois $u \in C^2(\Omega)$. Assim, concluímos que u é solução clássica.

A resolução de uma equação diferencial parcial através de um método variacional consiste “basicamente” nas etapas exibidas acima, vale ressaltar que existem vários métodos de resolução de uma EDP, para soluções semelhantes à exibida acima, [7] Capítulos IX.5. e IX.6, para métodos mais gerais na resolução de equações diferenciais parciais, [17] e [2].

3 Autoproblemas de Steklov

Problemas de Steklov são estudados desde 1902, mas possuem ainda hoje grandes possibilidades de investigação ainda não feitas. Equações diferenciais parciais elípticas, com condições de fronteira de Steklov podem descrever por exemplo, a deformação linear elástica u , de uma chapa Ω , sob a ação de uma força transversal exterior f . Estamos interessados nas relações com o espectro a fim de obter solução fraca para nosso problema principal (1.4).

Neste Capítulo, vamos apresentar alguns resultados sobre a teoria de autoproblemas de Steklov necessários ao nosso trabalho. Vamos apresentar os resultados provados por Auchmuty [3], onde são descritas algumas propriedades e aplicações de autoproblemas de Steklov com operadores elípticos de segunda ordem em regiões limitadas do \mathbb{R}^n . Mostramos alguns dos resultados que serão mais utilizados no decorrer do texto, as demonstrações que não forem feitas neste Capítulo podem ser vistas em Auchmuty [3].

Sob hipóteses de regularidades descritas a seguir como (B2), (A1) e (A2), a existência de um espectro ilimitado, infinito e discreto também é demonstrada. O menor autovalor positivo destes problemas é mostrado como sendo a constante ótima em uma desigualdade envolvendo o traço. Além disso, uma correspondente família de autofunções é construída para ser uma base ortonormal do subespaço V de $H^1(\Omega)$ ortogonal a $H_0^1(\Omega)$, relativamente a um produto interno específico.

3.1 O autoproblema Schroedinger-Steklov

Trataremos de questões decorrentes do estudo de problemas de valor de contorno em regiões Ω no \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. O conjunto Ω é uma região não vazia, conexa e aberta do \mathbb{R}^n . Além disso, vamos pedir mais algumas condições com respeito à Ω .

(B1) Ω é uma região limitada do \mathbb{R}^n e sua fronteira $\partial\Omega$ é a união de um número finito de superfícies Lipschitz B.11 (ver apêndice B), fechadas e disjuntas; cada superfície tem área finita.

Quando esta hipótese é válida, existe um vetor normal exterior ν definido quase sempre em $\partial\Omega$. Os espaços reais de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e $L^p(\partial\Omega, d\sigma)$, $0 \leq p \leq \infty$ estão definidos da maneira padrão, A.6 (ver apêndice A), e possuem normas denotadas por $\|u\|_p$ e $\|u\|_{p, \partial\Omega}$, respectivamente. Os produtos internos serão denotados por:

$$\langle u, v \rangle := \int u(x)v(x) \text{ e } \langle u, v \rangle_{\partial} := \oint uv.$$

Todas as funções terão valores em $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ e suas derivadas serão tomadas no sentido fraco A.8 (ver apêndice A).

Seja $H^1(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev A.8 (ver apêndice A) de funções em Ω . Este espaço real é um espaço de Hilbert com produto interno padrão definido por:

$$[u, v]_1 := \int [u(x).v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x)].$$

A norma correspondente será denotada por $\|u\|_{1,2}$.

Quando (B1) é válido e $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então o traço de u em $\partial\Omega$ está bem definido. Dessa forma, pelo Teorema do traço compacto A.14 (ver apêndice A), temos que o funcional $\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ é compacto.

Em geral, vamos pedir que a região satisfaça:

(B2) Ω e $\partial\Omega$ satisfaçam (B1), o Teorema de Rellich A.13 (ver apêndice A) e o Teorema do Traço Compacto A.14 (ver apêndice A).

Todos os princípios variacionais e funcionais utilizados serão definidos em subconjuntos fechados e convexos de $H^1(\Omega)$.

Definição 3.1 *Seja $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Então F é dita Gâteaux diferenciável no ponto $u \in H^1(\Omega)$ se existe $F'(u)$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}[F(u + tv) - F(u)] = F'(u)(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

com $F'(u)$ um funcional linear contínuo em $H^1(\Omega)$. Neste caso, $F'(u)$ é chamada a G-derivada de F em u .

Definição 3.2 *Assumindo que uma região Ω do \mathbb{R}^n satisfaça (B1), a forma clássica de um autoproblema de Schoroedinger-Steklov é encontrar os valores de μ para os quais existe uma solução não nula \hat{u} do sistema*

$$Lu(x) := c(x)u(x) - \Delta u(x) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \mu \rho(x)u(x) \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.2}$$

As funções c, ρ devem satisfazer

(A1) c é positiva em Ω , $c \in L^p(\Omega)$ para $p \geq n/2$ quando $n \geq 3$, ($p > 1$ quando $n = 2$) e $\int c > 0$.

(A2) $\rho \in L^\infty(\partial\Omega, d\sigma)$, é positiva em $\partial\Omega$, e

$$\oint \rho = 1. \quad (3.3)$$

A forma fraca de (3.1) e (3.2) é dada por

$$\int [\nabla u \cdot \nabla v + cuv] - \mu \oint \rho uv = 0, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

Este será chamado um autoproblema de Steklov para (L, ρ) .

Vamos descrever um princípio variacional diferente para o menor autovalor positivo e sua autofunção correspondente a (3.4).

Definição 3.3 Definimos K como um subconjunto de $H^1(\Omega)$ de funções satisfazendo

$$D_c(u) := \int [|\nabla u|^2 + cu^2] \leq 1. \quad (3.5)$$

Definição 3.4 Definimos $B : H^1(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ respectivamente por:

$$B(u) := \oint \rho u^2 \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle_\rho := \oint \rho uv. \quad (3.6)$$

Considere o princípio variacional de maximização denotado por (ℓ_1) de B em K e defina

$$\beta_1 := \sup_{u \in K} B(u). \quad (3.7)$$

Vamos mostrar que o maximizador u_1 do problema (3.7) é uma autofunção do problema (3.4) de Steklov, correspondente ao autovalor μ_1 e que $\beta_1 = \mu_1^{-1}$. Para tal objetivo, precisamos de alguns resultados técnicos.

O seguinte resultado será utilizado na demonstração do Corolário 3.6.

Teorema 3.5 Assuma que $\Omega, \partial\Omega, c$ satisfazem (B2) e (A1). Então existe um $\alpha > 0$ tal que

$$D_c(u) \geq \alpha \int u^2, \forall u \in H^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Demonstração: [3, Teorema 3.2]. ■

Corolário 3.6 *Assuma que (A1) e (B2) são satisfeitas. Então $\|\cdot\|_c$ é uma norma equivalente à norma usual em $H^1(\Omega)$ e K é um subconjunto convexo, limitado e fechado de $H^1(\Omega)$.*

Demonstração:

Sejam $\|u\|_c^2 = \int |\nabla u|^2 + cu^2$ e $\|u\|_{1,2}^2 = \int |\nabla u|^2 + u^2$. Pela desigualdade de Hölder e pela imersão de Sobolev de $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ temos que existe C_1 tal que $\|u\|_c^2 \leq C_1 \|u\|_{1,2}^2$. Além disso, de (3.8), temos que

$$\alpha \int u^2 \leq \int |\nabla u|^2 + cu^2, \quad \text{então,} \quad \int u^2 \leq \alpha^{-1} \int |\nabla u|^2 + cu^2,$$

somando $\int |\nabla u|^2$ em ambos os membros da igualdade, segue que

$$\int |\nabla u|^2 + \int u^2 \leq \alpha^{-1} \int |\nabla u|^2 + cu^2 + \int |\nabla u|^2.$$

Portanto, somando $\int cu^2$ à direita da desigualdade, obtemos

$$\|u\|_{1,2}^2 \leq \alpha^{-1} \|u\|_c^2 + \int |\nabla u|^2 + cu^2 = \alpha^{-1} \|u\|_c^2 + \|u\|_c^2 = (1 + \alpha^{-1}) \|u\|_c^2.$$

Logo as normas são equivalentes.

Observe que K é limitado por definição, além disso, segue da definição de K e da equivalência das normas, provada acima, que K é fechado. Vamos mostrar que K é convexo.

Sejam $u, v \in K$ e $t \in [0, 1]$. Temos que

$$\left\{ \int |\nabla[(1-t)u + tv]|^2 + c[(1-t)u + tv]^2 \right\}^{1/2} = \|(1-t)u + tv\|_c,$$

mas,

$$\|(1-t)u + tv\|_c \leq \|(1-t)u\|_c + \|tv\|_c \leq (1-t) \|u\|_c + t \|v\|_c \leq (1-t) + t = 1,$$

pois $u, v \in K$ e $t \in [0, 1]$. Assim, $\left\{ \int |\nabla[(1-t)u + tv]|^2 + c[(1-t)u + tv]^2 \right\}^{1/2} \leq 1$, e segue que

$$\int |\nabla[(1-t)u + tv]|^2 + c[(1-t)u + tv]^2 \leq 1.$$

Portanto K é convexo. ■

Dessa forma, quando temos (B2) e (A1), é conveniente usarmos o produto interno

$$(u, v)_c := \int [\nabla u \cdot \nabla v + cuv]. \quad (3.9)$$

e associado a ele a norma $\|u\|_c$.

Teorema 3.7 *Assuma que $\Omega, \partial\Omega, c, \rho$ satisfazem (B2), (A1) e (A2). Então β_1 é finito e existem maximizadores $\pm u_1$ de B em K . Estes maximizadores satisfazem $\|u_1\|_c = 1$ e (3.4). O correspondente autovalor μ_1 é o menor autovalor de (3.4) e $\beta_1 = \mu_1^{-1}$.*

Demonstração:

Dos resultados do Corolário 3.6 e pelo Teorema A.20 (ver apêndice A), temos que K é fracamente compacto em $H^1(\Omega)$. Como B é fracamente contínuo, ele alcança um supremo em K no ponto $u_1 \in K$, A.21 (ver apêndice A) e este supremo é finito. Se $\|u_1\|_c < 1$ então existe um $k > 1$ tal que $ku_1 \in K$ e então $B(ku_1) = k^2B(u_1) > B(u_1)$. Isto é uma contradição com a maximalidade de u_1 , então temos $\|u_1\|_c = 1$.

Por conseguinte, devido ao Teorema de multiplicadores de Lagrange B.13 (ver apêndice B), uma das condições abaixo são válidas:

- (i) $h'(u_1, v) = 0, \forall v \in H^1(\Omega)$;
- (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\beta'(u_1)(v) = \lambda h'(u_1, v), \forall v \in H^1(\Omega)$.

A condição (1) não ocorre, pois $h'(u_1, u_1) = 2\|u_1\|_c^2 = 2$. Portanto a condição (2) deve ocorrer, onde $h'(u, v) = 2[\nabla u \nabla v + cuv]$.

Com base na condição (2) garantimos a existência do funcional de Lagrange para um problema onde queremos maximizar $f(x, y)$ sujeito à $g(x, y) = c$. Tal funcional é dado por $\Lambda = \lambda[g(x, y) - c] - f(x, y)$. Para o nosso problema (ℓ_1) , temos que maximizar B sujeito à $h_c(u, u) = \|u\|_c = 1$. Dessa forma, $\Lambda : H^1(\Omega) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por:

$$\Lambda(u, \lambda) := \lambda \left[\int [|\nabla u|^2 + cu^2] dx - 1 \right] - \oint \rho u^2. \quad (3.10)$$

O problema de maximização de B em K é equivalente a encontrar um ponto de inf-sup para Λ neste domínio. Cada tal maximizador u , será um ponto crítico de $\Lambda(\cdot, \lambda)$ sobre $H^1(\Omega)$, isto é, u é uma solução de

$$\lambda \int [\nabla u \nabla v + cuv] dx - \oint \rho uv = 0, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.11)$$

Quando $\lambda > 0$ a equação acima tem a forma (3.4) com $\mu = \lambda^{-1}$. Se $\lambda = 0$, então (3.11) implica que o valor máximo é zero, ($B(u) = 0$), que não é verdade, (podemos escolher $w \in K$ tal que $B(w) > 0$, por exemplo a função constante 1 em Ω). Assim, (3.4) é válido.

Se u_1 é um máximo, então o correspondente autovalor μ_1 em (3.4) satisfaz

$$\int |\nabla u_1|^2 + cu_1 = \mu_1 \oint \rho u_1^2,$$

dessa forma,

$$\|u_1\|_c^2 = 1 = \mu_1 B(u_1).$$

Portanto $\beta_1 = \mu_1^{-1}$.

Suponha por contradição que μ_1 não é o menor autovalor positivo de (3.4). Neste caso existirá um $\tilde{u} \neq 0$ em $H^1(\Omega)$, satisfazendo (3.4), associado a um $\tilde{\mu}$, tal que $\tilde{\mu} < \mu_1$. Normalize-o para ter c -norma igual a 1. Então (3.4) implica que \tilde{u} satisfaz

$$1 = \tilde{\mu} B(\tilde{u}).$$

Como $\tilde{\mu} < \mu_1$, temos que $\tilde{\mu}^{-1} > \mu_1^{-1}$ e segue que $B(\tilde{u}) = \tilde{\mu}^{-1} > \mu_1^{-1} = \beta_1$ o que é um absurdo, pois β_1 é o máximo de $B(u)$ em K . Logo μ_1 é minimal. ■

Corolário 3.8 *Assuma que $\Omega, \partial\Omega, c, \rho$ satisfazem (B2), (A1) e (A2). Então, para todo $u \in H^1(\Omega)$*

$$\int [|\nabla u|^2 + cu^2] \geq \mu_1 \oint \rho u^2, \quad (3.12)$$

onde $\mu_1 > 0$ é o menor autovalor de Steklov de (3.4). Se a igualdade é válida, então u é múltiplo de uma autofunção de (3.4) correspondente a μ_1 .

Demonstração: Se $u \equiv 0$ a igualdade é válida. Suponha que $u \neq 0$, dessa forma, seja $v := u / \|u\|_c$. Então $v \in K$ e $\sup_{v \in K} B(v) \leq \beta_1$ por definição, assim, $B(v) \leq \beta_1$.

Usando a definição de B , segue que, $\oint \rho v^2 \leq \beta_1$, ou seja, $\oint \rho u^2 \leq \beta_1 \int [|\nabla u|^2 + cu^2]$. Usando o Teorema anterior, provamos a igualdade. ■

A desigualdade (3.12) é a desigualdade traço para o operador L . Se escolhermos $u(x) \equiv 1$, produziremos um limite superior para o primeiro autovalor de Steklov μ_1 :

$$\mu_1 \leq \int c(x) dx.$$

3.2 Princípio variacional de sucessivos autovalores de Steklov

Suponha que existem os primeiros J autovalores de Steklov correspondentes as autofunções c -ortonormais de (L, ρ) , vamos descrever como encontrar o próximo autovalor μ_{J+1} e a correspondente autofunção normalizada.

Assuma que os primeiros J autovalores são $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_J$ e que $\{u_1, \dots, u_J\}$ é a família correspondente de autofunções c -ortonormais de (3.4). Isto implica

que:

$$\langle \Gamma u_j, \Gamma u_k \rangle_\rho = \mu_j^{-1} \delta_{jk}. \quad (3.13)$$

Para encontrar μ_{J+1} , seja

$$K_J := \left\{ u \in K : \langle \Gamma u, \Gamma u_j \rangle_\rho = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq J \right\}. \quad (3.14)$$

Considere o problema variacional de maximização de B em K_J , que denotaremos por (l_{J+1}) , e defina

$$\beta_{J+1} := \sup_{u \in K_J} B(u). \quad (3.15)$$

Teorema 3.9 *Assuma que $\Omega, \partial\Omega, c, \rho$ satisfazem (B2), (A1) e (A2). Então K_J é um conjunto limitado, fechado e convexo em $H^1(\Omega)$, β_{J+1} é finito e existem maximizadores $\pm u_{J+1}$ de B em K . Estes maximizadores satisfazem $\|u_{J+1}\|_c = \mu_{J+1} \|\Gamma u_{J+1}\|_\rho^2 = 1$, (3.4) com $\mu_{J+1} := \beta_{J+1}^{-1}$ e*

$$(u_{J+1}, u_j)_c = \langle \Gamma u_{J+1}, \Gamma u_j \rangle_\rho = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq J. \quad (3.16)$$

Além disso, μ_{J+1} é o menor autovalor que é maior do que ou igual a μ_J .

Demonstração: [3, Teorema 4.1]. ■

O resultado acima garante a existência do autovalor μ_{J+1} e de sua correspondente autofunção associada u_{J+1} .

Quando C é um conjunto fechado, convexo de um espaço de Hilbert H , seja $I_C : H \rightarrow [0, \infty]$ o funcional indicador de C definido por $I_C(u) := 0$, se $u \in C$ e $I_C(u) := \infty$ quando $u \notin C$.

Quando C é uma bola fechada de raio 1 em um subespaço fechado V de H , então sua subdiferencial é dada por $\partial I_C(u) = V^\perp$, quando $\|u\| < 1$ e $\partial I_C(u) = \{\lambda u + w : \lambda \geq 0 \text{ e } w \in V^\perp\}$, quando $\|u\| = 1$.

Teorema 3.10 *Seja C um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional G -diferencial em H . Se \hat{u} maximiza F em C , então \hat{u} satisfaz*

$$DF(u) \in \partial I_C(u). \quad (3.17)$$

Quando C é uma bola fechada, centrada na origem, em um subespaço fechado V de H , e \hat{u} maximiza F em C , então \hat{u} satisfaz

$$[DF(u), h] = [\lambda u + w, h] \text{ para algum } \lambda \geq 0, w \in V^\perp, \forall h \in H. \quad (3.18)$$

Demonstração: [4, Teorema 2.1]. ■

Observação 3.11 Para o problema (ℓ_{J+1}) tome K_J para C , B para F e $H^1(\Omega)$ para H . Usando o Teorema 3.10 com as condições anteriores, equivalência das normas, pelo Teorema B.14 - equação (B.2) (ver apêndice B) e como $u \in H^1(\Omega)$, segue que

$$2 \langle u, v \rangle_\rho = (\lambda u + w, v)_c, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (3.19)$$

onde $\lambda \geq 0$ e w está no espaço gerado por $\{u_1, u_2, \dots, u_J\}$.

Então a condição extrema satisfeita por um maximizador de B em K_J é que u_{J+1} satisfaz (3.19). Assim, como a igualdade é válida para u_{J+1} , temos que substituindo v por u_j em (3.19), como $u_{J+1} \in K_J$, segue que

$$2 \langle u_{J+1}, u_j \rangle_\rho = (\lambda u_{J+1} + w, u_j)_c.$$

Como $u_{J+1} \in K_J$, pelo Teorema 3.9 segue que $\langle u_{J+1}, u_j \rangle_\rho = 0$. Então

$$(w, u_j)_c = 0, \quad \text{para cada } 1 < j < J.$$

Assim, como w está no espaço gerado por $\{u_1, u_2, \dots, u_J\}$, segue que $w = 0$. Se $\lambda = 0$, então $B(u_{J+1}) = 0$, pois $B(u_{J+1}) = \langle u_{J+1}, u_{J+1} \rangle_\rho = \frac{1}{2}(\lambda u_{J+1} + w, u_{J+1})_c = 0$, assim u_{J+1} não é um maximizador. Absurdo! Portanto $\lambda > 0$ e (3.4) é válido com $\mu = \lambda^{-1}$.

Teorema 3.12 Assuma que $\Omega, \partial\Omega, c, \rho$ satisfazem (B2), (A1) e (A2). Cada autovalor μ_j de (L, ρ) tem multiplicidade finita e $\mu_j \rightarrow \infty$ se $j \rightarrow \infty$.

Demonstração:

Suponha que a sequência é limitada por um número $\hat{\mu}$. A correspondente sequência de autofunções é um conjunto c -ortonormal em $H^1(\Omega)$, assim,

$$\|u_k\|_c = \mu_k \|\Gamma u_k\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = 1.$$

Portanto, a menos de uma subsequência, ela converge fracamente para uma u em $H^1(\Omega)$, isto é: $u_k \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$.

O traço $\{\Gamma u_k : k \geq 1\}$ destas funções convergirá para o traço de u em $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ visto que Γ é compacto. Então, $\|\Gamma u_k - \Gamma u_l\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 \rightarrow 0$.

Como as autofunções formam um conjunto ortonormal, temos que

$$\|\Gamma u_k - \Gamma u_l\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 = \|\Gamma u_k\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 + \|\Gamma u_l\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 \rightarrow 0.$$

Portanto $\|\Gamma u_k\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$.

Por outro lado, como $\mu_k \|\Gamma u_k\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = 1$, temos que

$$\|\Gamma u_k\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 = \mu_k^{-1} > \hat{\mu}^{-1} > 0.$$

Mas isto é uma contradição.

Logo, não existe tal limitação superior e o resultado segue.

Suponha agora que exista um autovalor μ_k de (L, ρ) com multiplicidade infinita. Considerando a correspondente sequência de autofunções $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ c-ortonormais em $H^1(\Omega)$, associadas ao autovalor μ_k , temos que $\|u_{k_j}\|_c = \mu_k \|\Gamma u_{k_j}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = 1$. Então, a menos de subsequências segue que $u_{k_j} \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$.

Novamente, o traço $\{\Gamma u_{k_j}\}$ destas funções convergirá fortemente para o traço de u em $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ visto que Γ é compacto. Então, $\|\Gamma u_{k_j} - \Gamma u_{k_i}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 \rightarrow 0$. Assim,

$$\|\Gamma u_{k_j} - \Gamma u_{k_i}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 = \|\Gamma u_{k_j}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 + \|\Gamma u_{k_i}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 \rightarrow 0.$$

pois as autofunções formam um conjunto ortonormal. Portanto $\|\Gamma u_{k_j}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$.

Por outro lado, como $\mu_k \|\Gamma u_{k_j}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)} = 1$, temos que

$$\|\Gamma u_{k_j}\|_{L^2(\partial\Omega, d\sigma)}^2 = \mu_k^{-1} > 0.$$

Mas isto é uma contradição.

Logo todos os autovalores μ_k de (L, ρ) possuem multiplicidade finita. ■

3.3 Espaços traço ortogonais para $H^1(\Omega)$

Nesta seção, vamos descrever uma decomposição c-ortogonal de $H^1(\Omega)$ e mostrar que as autofunções de Steklov para (L, ρ) formam uma base para o complemento c-ortogonal de $H_0^1(\Omega)$. Por toda esta seção Ω satisfaz (B2).

Seja $C_c^1(\Omega)$ o conjunto de todas as funções com valores reais em Ω , que são C^1 e que possuem suporte compacto em Ω . Seja $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $C_c^1(\Omega)$ na norma de $H^1(\Omega)$.

Uma função $u \in H^1(\Omega)$ é dita uma solução fraca de

$$Lu(x) := c(x)u(x) - \nabla u(x) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (3.20)$$

sempre que

$$(u, \varphi)_c := \int_{\Omega} [cu\varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi] dx = 0, \quad (3.21)$$

para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Isto é, u é uma solução fraca de (3.20) se, e somente se, u é c -ortogonal ao conjunto $C_c^1(\Omega)$. Defina W como o subespaço de $H^1(\Omega)$ que é c -ortogonal ao conjunto $H_0^1(\Omega)$, então o seguinte Lema segue da definição de $H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.13 *Assuma que Ω , $\partial\Omega$, c satisfazem (B2) e (A1) e W como acima. Uma função $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (3.20) se, e somente se, $u \in W$.*

O subespaço $H_0^1(\Omega)$ pode ser caracterizado como o espaço nulo do operador traço Γ definido em B.9 (ver apêndice B). Quando a condição seguinte é válida, Γ pode ser expresso em termos de B .

(A3) ρ satisfaz (A2) e é estritamente positivo σ quase sempre em $\partial\Omega$.

Proposição 3.14 *Assuma que Ω , $\partial\Omega$, c satisfazem (B2) e (A1) e que ρ satisfaça (A3). Então $u \in H^1(\Omega)$ e $B(u) = 0$ se, e somente se, $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que $u \in H^1(\Omega)$ e $B(u) = 0$, então $\Gamma u = 0$ em $L^2(\partial\Omega, \rho d\sigma)$, assim $\Gamma u = 0$ quase sempre em Ω , pois (A3) é válido. Pelo Teorema A.19, (ver apêndice A), segue que $u \in H_0^1(\Omega)$.

(\Leftarrow) Suponha que $u \in H_0^1(\Omega)$. Existe uma sequência $\{u_m; m \geq 1\} \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $u_m \rightarrow u$ na c -norma. Como B é contínuo B.14, (ver apêndice B), e $B(u_m) = 0 \forall m$, (pois, $u_m \in C_c^1$), temos que $B(u) = 0$. ■

Este resultado pode ser escrito como

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c W \text{ ou } H^1(\Omega) = \ker\Gamma \oplus_c \ker L.$$

Aqui \oplus_c indica a soma direta c -ortogonal. Em muitos tratamentos elípticos de problemas de valor de contorno o subespaço fechado W é identificado com o espaço de Hilbert fracionário $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Aqui o caracterizamos em termos dos coeficientes de expansão envolvendo autofunções Steklov normalizadas.

Teorema 3.15 *Assuma que Ω , $\partial\Omega$, c satisfazem (B2) e (A1) e que ρ satisfaça (A3). A sequência $\{u_j; j \geq 1\}$ de autofunções Steklov para (L, ρ) é um subconjunto c -ortonormal e maximal de W .*

Demonstração:

Dada $u_j \in W$, escolhamos $v \in C_c^1(\Omega)$ em (3.5). Temos que dessa forma, (3.21) é válido. Pelo Teorema 3.9, a sequência $\{u_j, j > 1\}$ é um conjunto c -ortonormal. Suponha que a sequência definida na seção 3.2 não seja maximal. Então, existe um $w \in W$ com $\|w\|_c = 1$ e $(w, u_j)_c = 0$ para todo $j \geq 1$.

Se $B(w) > 0$, então existe J tal que $B(w) > \beta_{J+1}$, pelo Teorema 3.12. Isto contradiz a definição de u_{J+1} , pois $w \in K_J$, ($w \in K_i, \forall i \in \mathbb{N}$, em particular $w \in K_J$).

Se $B(w) = 0$, então a Proposição 3.14 implica que $w \in H_0^1(\Omega)$, como $w \in W = H_0^1(\Omega)^\perp$, segue que $w = 0$. Mas isso é uma contradição com a definição de w , pois $\|w\|_c = 1$. Portanto, o resultado segue. ■

Este resultado pode ser interpretado identificando W como um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ com as autofunções $\{u_j; j \geq 1\}$ como base c-ortonormal. Então o Teorema de Parseval para expansões ortogonais em um espaço real de Hilbert nos fornece que cada função $u \in W$ tem uma única representação da forma

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u_j \quad \text{com} \quad c_j := (u, u_j)_c \quad \text{e} \quad \|u\|_c^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2. \quad (3.22)$$

E finalmente, que o traço de tal função em $\partial\Omega$ é dado por:

$$\Gamma u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \Gamma u_j \quad \text{com} \quad \|\Gamma u\|_\rho^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-1} |c_j|^2. \quad (3.23)$$

4 Aplicação

Neste Capítulo, mostraremos os resultados provados por Mavinga e Nkashama [25]. Na primeira seção, citamos algumas consequências dos resultados de Auchmuty [3] que nos serão úteis no que se segue. Apresentaremos e provaremos também alguns resultados técnicos essenciais nas demonstrações seguintes. Já na segunda seção, faremos as demonstrações da solução do nosso problema principal. Essa solução será exibida levando em conta três conjuntos de condições distintos, onde cada um já garante sozinho a existência da solução.

4.1 Resultados preliminares

Nosso objetivo é conseguir alguns resultados técnicos para a equação diferencial parcial elíptica não linear de segunda ordem, com (possibilidade de) condições de bordo não lineares

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g(x, u), & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave e $\partial\Omega$ é de classe $C^{0,1}$, $\frac{\partial}{\partial \nu} := \nu \nabla$ é a derivada normal exterior de $\partial\Omega$.

Assumimos $n \geq 2$ e que a função $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e as não-linearidades $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(C1) $c \in L^p(\Omega)$ com $p \geq \frac{n}{2}$, onde $n \geq 3$ ($p \geq 1$ quando $n = 2$), e $c \geq 0$ quase sempre em Ω .

A desigualdade fica estrita num conjunto de medida positiva; isto é, $\int_{\Omega} c(x)dx > 0$.

(C2) $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ e $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

(C3) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|g(x, u)| \leq a_1 + a_2|u|^s \text{ com } 0 \leq s < \frac{n}{n-2}.$$

(C3') Existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$|f(x, u)| \leq b_1 + b_2|u|^s \text{ com } 0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}.$$

Para colocar nossos resultados em contexto, reunimos alguns resultados relevantes sobre autoproblemas lineares de Steklov e Neumann necessários para nossos propósitos. No capítulo 3 nos referimos a uma teoria geral, já nesta seção vamos direcionar nossos resultados para nosso problema (4.1). Referimo - nos a um trabalho bastante recente e interessante de Auchmuty [3] para as provas dos resultados referentes a autoproblemas de Steklov.

Considere o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \mu u, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Um autoproblema de Steklov é encontrar um par (μ, φ) em $\mathbb{R} \times H^1(\Omega)$, $\varphi \neq 0$ tal que

$$\int \nabla \varphi \nabla v + \int c(x) \varphi v = \mu \oint \varphi v, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Tomando $v = \varphi$ nos dá que

$$\int |\nabla \varphi|^2 + \int c(x) |\varphi|^2 = \mu \oint |\varphi|^2,$$

assim por (C1) temos que $\mu > 0$. Posteriormente escolhendo $v \in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$\int \nabla \varphi \nabla v + \int c(x) \varphi v = \mu \oint \varphi v = 0,$$

e então $\varphi \perp H_0^1(\Omega)$, onde o produto interno em $H^1(\Omega)$ é definido por:

$$(u, v)_c = \int \nabla u \nabla v + \int c(x) uv. \quad (4.3)$$

Tal produto interno tem a norma associada denotada por $\|u\|_c$, que é equivalente à norma padrão em $H^1(\Omega)$, ver Corolário 3.6. Assim, como $H_0^1(\Omega)$ é uma subespaço fechado de $H^1(\Omega)$, temos pelo Teorema (B.12, ver apêndice B) que

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus_c H_0^1(\Omega)^\perp. \quad (4.4)$$

Além dos espaços de Sobolev (A.8, ver apêndice A) vamos fazer uso, no que se segue, dos espaços de Lebesgue reais $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ (A.6, ver apêndice A). Além disso, vamos fazer uso do operador traço com sua compacidade:

$$\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega), \quad 1 \leq q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Ao longo deste trabalho vamos denotar o produto interno em $L^2(\partial\Omega)$ por

$$(u, v)_\partial = \oint uv, \quad (4.5)$$

onde a norma associada a esse produto interno será denotada por $\|u\|_\partial$.

Assumindo que todas as condições acima são satisfeitas, Auchmuty [3] provou recentemente que para $n \geq 2$ o autop problema de Steklov tem uma sequência de autovalores reais

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_j \leq \dots \rightarrow \infty, \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Cada autovalor tem um autoespaço de dimensão finita, onde autoespaço é um conjunto dos autovetores associados a um autovalor. As autofunções correspondentes aos autovalores formam uma família ortonormal completa em $H_0^1(\Omega)^\perp$ que também é completa e ortogonal em $L^2(\partial\Omega)$. Além disso, a inequação traço

$$\mu_1 \oint (\Gamma u)^2 \leq \int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2, \quad (4.6)$$

vale pra todo $u \in H^1(\Omega)$, onde $\mu_1 > 0$ é o menor autovalor de Steklov para a equação (4.2). Se a igualdade vale em (4.6), então u é um múltiplo de uma autofunção da equação (4.2) correspondente a μ_1 . A demonstração desse fato pode ser vista no Teorema 3.7 do Capítulo 3.

É claro que para um problema linear elíptico com condição de bordo de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \lambda u, \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

é muito bem conhecido, [6, Teorema 1.14], que a equação (4.7) tem uma sequência de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots \rightarrow \infty, \text{ quando } j \rightarrow \infty,$$

com autoespaço de dimensão finita tal que

$$\lambda_1 \int u^2 \leq \int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2, \quad (4.8)$$

$\forall u \in H^1(\Omega)$, onde $\lambda_1 > 0$ é o menor autovalor associado a equação (4.7). Se vale a igualdade em (4.8), então u é um múltiplo de uma autofunção da equação (4.7) correspondente a λ_1 .

Seguem agora alguns lemas técnicos.

Lema 4.1 *Suponha que g satisfaça (C2) e que existam constantes $p, q \geq 1$ e a_1, a_2 tais que para todo $x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}$,*

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{p}{q}}.$$

Então o operador Nemytskii, $\varphi(x) \rightarrow g(x, \varphi(x))$ é contínuo de $L^p(\partial\Omega)$ para $L^q(\partial\Omega)$.

Demonstração: [23, Proposição B.1]. ■

Agora consideremos o funcional energia $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, associado a equação (4.1) que é definido por:

$$I(u) := \frac{1}{2} \left[\int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2 \right] - \int F(x, u) - \oint G(x, u), \quad (4.9)$$

onde $G(x, u) = \int_0^u g(x, \xi)d\xi$ e $F(x, u) = \int_0^u f(x, \xi)d\xi$ são os potenciais de f e g respectivamente.

Lema 4.2 *Assuma que as condições (C1)-(C3') são satisfeitas. Então, $I \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e*

$$I'(u)v := \int \nabla u \nabla v + \int c(x)uv - \int f(x, u)v - \oint g(x, u)v, \quad (4.10)$$

para cada $v \in H^1(\Omega)$, onde $I'(u)$ denota a derivada segundo Fréchet de I em u . Além disso,

$$J(u) = \int F(x, u) + \oint G(x, u),$$

é fracamente contínuo, e $J'(u)v := \int f(x, u)v + \oint g(x, u)v$ é compacto.

Demonstração:

Definamos:

$$J_1(u) := \frac{1}{2} \left[\int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2 \right], \quad J_2(u) := \int F(x, u) \quad e \quad J_3(u) := \oint G(x, u).$$

Então, $I(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u)$.

Segue das condições (C3), (C3'), da imersão de Sobolev de $H^1(\Omega)$ em $L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, da continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ em $L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)$ e da desigualdade de Hölder que I e I' estão bem definidas.

Podemos ver que $J_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ (apêndice C, Teorema C.4) com derivada Fréchet dada pelos 2 primeiros termos de $I'(u)$. A demonstração de que $J_2 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ é análoga à feita em parte do Lema 3.3 em [16]. Além disso, J_2 é fracamente contínuo e J_2' é compacto.

Vamos provar agora que $J_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Provaremos primeiro que J_3 é Fréchet diferenciável em $H^1(\Omega)$, e que $J_3'(u)v = \oint g(x, u)v$ é contínuo. Para esse propósito, seja $u \in H^1(\Omega)$, afirmamos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, u)$ tal que

$$|J_3(u+v) - J_3(u) - J_3'(u)v| \leq \epsilon \|v\|_c,$$

$\forall v \in H^1(\Omega)$ com $\|u\|_c < \delta$.

Defina

$$\Psi \equiv |G(x, u+v) - G(x, u) - g(x, u)v|.$$

Daí, resulta que $|J_3(u+v) - J_3(u) - J_3'(u)v| \leq \oint \Psi$.

Defina

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{x \in \partial\Omega; |u(x)| \geq \vartheta\}; \\ S_2 &:= \{x \in \partial\Omega; |v(x)| \geq k\}; \\ S_3 &:= \{x \in \partial\Omega; |u(x)| \leq \vartheta \text{ e } |v(x)| \leq k\}; \end{aligned}$$

onde ϑ e k serão definidos mais à frente. Segue-se então que

$$\oint \Psi \leq \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Psi.$$

Pelo Teorema do Valor Médio em [24], temos que:

$$G(x, \xi + \eta) - G(x, \xi) = g(x, \xi + \theta\eta)\eta. \quad (4.11)$$

onde $\theta \in (0, 1)$. Decorre de (4.11) e (C3) que

$$\begin{aligned} \int_{S_1} |G(x, u+v) - G(x, u)| &\leq \int_{S_1} |g(x, u + \theta v)| |v| \leq \int_{S_1} [a_1 + a_2 |u + \theta v|^s] |v| \\ &\leq \int_{S_1} [a_1 + a_2 (|u| + |v|^s)] |v|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, com $p = \frac{2n-2}{n-2}$; $q = \frac{s+1}{s}$; σ , tais que

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{s}{s+1} + \frac{n-2}{2n-2} = 1, \quad (4.12)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_1} |G(x, u+v) - G(x, u)| &\leq a_1 |S_1|^{\frac{n}{2n-2}} \|v\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}} + a_2 \left(\int_{S_1} |u|^s |v| + \int_{S_1} |v|^s |v| \right), \\ &\leq [a_1 |S_1|^{\frac{n}{2n-2}} + a_2 |S_1|^{1/\sigma} (\|u\|_{L^{s+1}}^s + \|v\|_{L^{s+1}}^s)] \|v\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}}. \end{aligned}$$

Note que $\frac{s}{s+1} + \frac{n-2}{2n-2} < 1$ de modo que existe um $\sigma > 1$ tal que (4.12) é satisfeito.

Usando o Corolário 3.6 e a continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ em $L^t(\partial\Omega)$ com $t \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$ $s < \frac{n}{n-2}$, temos que $s+1 < \frac{2n-2}{n-2} < \frac{2n}{n-2} = 2^*$, assim,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1},$$

e nós obtemos que:

$$\|u\|_{L^{s+1}} \leq a_\tau \|u\|_c \text{ e } \|u\|_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}} \leq a_\tau \|u\|_c,$$

onde a_τ é a constante da imersão de Sobolev compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}$.

Assim,

$$\int_{S_1} |G(x, u+v) - G(x, u)| \leq [a_1 |S_1|^{\frac{n}{2n-2}} + a_3 |S_1|^{1/\sigma} (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)] \|v\|_c, \quad (4.13)$$

isto é,

$$\int_{S_1} |G(x, u + v) - G(x, u)| \leq a_4 \|v\|_c \left[|S_1|^{\frac{n}{2n-2}} + |S_1|^{1/\sigma} (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \right]. \quad (4.14)$$

Similarmente, podemos concluir que:

$$\int_{S_1} |g(x, u)v| \leq a_5 \|v\|_c \left[|S_1|^{\frac{n}{2n-2}} + |S_1|^{1/\sigma} (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \right]. \quad (4.15)$$

Pela continuidade do operado traço de $H^1(\Omega)$ em $L^t(\partial\Omega)$ com $t \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$ e pela desigualdade de Hölder obtemos que,

$$\|u\|_c \geq a_6 \|u\|_{L^2(S_1)} \geq a_6 \vartheta \int_{S_1} 1 = a_6 \vartheta |S_1|^{1/2},$$

portanto,

$$|S_1|^{1/\sigma} \leq \left(\frac{\|u\|_c}{a_6 \vartheta} \right)^{2/\sigma} \equiv M_1 \quad \text{e} \quad |S_1|^{n/(2n-2)} \leq \left(\frac{\|u\|_c}{a_6 \vartheta} \right)^{n/n-1} \equiv M_2.$$

Assim, $M_1, M_2 \rightarrow 0$ se $\vartheta \rightarrow \infty$. Desta forma, usando (4.14) e (4.15), temos que

$$\int_{S_1} \Psi \leq a_7 [M_2 + M_1 (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)] \|v\|_c,$$

podemos assumir $\delta \leq 1$ e escolher ϑ grande tal que

$$a_7 [M_2 + M_1 (\|u\|_c^s + \|v\|_c^s)] \leq \frac{\epsilon}{3},$$

então, $\int_{S_1} \Psi \leq \frac{\epsilon}{3} \|v\|_c$.

Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \Psi &\leq a_3 \int_{S_2} [1 + (|u| + |v|)^s] |v| \\ &\leq a_4 \int_{S_2} [1 + (|u|^s + |v|^s)] |v| \\ &\leq a_4 \int_{S_2} [1 + |u|^s |v| + |v|^s |v|]. \end{aligned}$$

Como $s < \frac{n}{n-2}$, temos que $s+1 < \frac{2n-2}{n-2} < \frac{2n}{n-2} = 2^*$, assim, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}$ e $\|u\|_{L^{s+1}} \leq a_\tau \|u\|_c$, além disso, pela desigualdade de Hölder com $p = s+1$ e $q = \frac{s+1}{s}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \Psi &\leq a_4 \left[\int_{S_2} 1 + \left(\int_{S_2} |u|^{s \cdot \frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{s}{s+1}} + \left(\int_{S_2} |v|^{s \cdot \frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{s}{s+1}} \right] \left(\int_{S_2} |v|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} \\ &\leq a_4 \left[\int_{S_2} 1 + \left(\int_{S_2} |u|^{s+1} \right)^{s \cdot \frac{1}{s+1}} + \left(\int_{S_2} |v|^{s+1} \right)^{s \cdot \frac{1}{s+1}} \right] \left(\int_{S_2} |v|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} \\ &\leq a_4 \left[\left(\int_{S_2} 1 \right) + \|u\|_{L^{s+1}}^s + \|v\|_{L^{s+1}}^s \right] \|v\|_{L^{s+1}}, \end{aligned}$$

por $\|u\|_{L^{s+1}} \leq a_\tau \|u\|_c$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \Psi &\leq a_5 \left[(1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \left(\int_{S_2} |v|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} \right] \\ &\leq a_5 \left[(1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \left(\int_{S_2} |v|^{s+1} \left(\frac{|v|}{k} \right)^{m-(s+1)} \right)^{\frac{1}{s+1}} \right], \text{ com } m = \frac{2(n-1)}{n-2}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_{S_2} \Psi \leq a_5 k^{\frac{(s+1-m)}{s+1}} \left[(1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \|v\|_{L_m}^{\frac{m}{s+1}} \right].$$

Novamente, utilizando $\|v\|_{L^m} \leq a_\tau \|v\|_c$, obtemos

$$\int_{S_2} \Psi \leq a_6 k^{\frac{(s+1-m)}{s+1}} \left[(1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \|v\|_c^{\frac{m}{s+1}} \right].$$

Como $G \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, dado qualquer $\hat{\epsilon}, \hat{\vartheta} > 0$, existe um $\hat{k} = \hat{k}(\hat{\epsilon}, \hat{\vartheta})$ tal que

$$|G(x, \xi + h) - G(x, \xi) - g(x, \xi)h| \leq \hat{\epsilon}|h|,$$

para todo $x \in \partial\Omega$, $|\xi| \leq \hat{\vartheta}$ e $|h| \leq \hat{k}$. Em particular se $\hat{\vartheta} = \vartheta$ e $\hat{k} = k$, temos que:

$$\int_{S_3} \Psi \leq \hat{\epsilon} \int_{S_3} |v| \leq a_7 \hat{\epsilon} \|v\|_{L^1} \leq a_7 \hat{\epsilon} \|v\|_c.$$

Tome $\hat{\epsilon}$ tal que $a_7 \hat{\epsilon} \leq \frac{\epsilon}{3}$. E segue que se $\hat{k} = k$, então

$$\int_{\partial\Omega} \Psi \leq \frac{2\epsilon}{3} + a_6 k^{\frac{(s+1-m)}{s+1}} \left[(1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \|v\|_c^{\frac{m}{s+1}} \right].$$

Escolha δ pequeno tal que $a_6 k^{\frac{(s+1-m)}{s+1}} \left[(1 + \|u\|_c^s + \|v\|_c^s) \delta^{\frac{m}{s+1}} \right] \leq \frac{\epsilon}{3}$. Portanto $J_3(u)$ é Fréchet diferenciável.

Agora, mostraremos que $J'_3(u)$ é contínuo. Seja $u_m \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$, então pela desigualdade de Hölder e pela continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ em $L^t(\partial\Omega)$ com $t \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \|J'_3(u_m) - J'_3(u)\| &= \sup_{\|v\|_c \leq 1} \left| \oint g(x, u_m)v - g(x, u)v \right|, \\ &\leq \sup_{\|v\|_c \leq 1} \oint |g(x, u_m) - g(x, u)| |v|, \\ &\leq \|g(\cdot, u_m) - g(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}} \|v\|_{L^{s+1}}, \\ &\leq C \|g(\cdot, u_m) - g(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}}. \end{aligned}$$

Tendo em conta a condição (C3) e o Lema 4.1, vimos que o lado direito da desigualdade acima tende a zero quando $m \rightarrow \infty$. Assim, J'_3 é contínuo.

Agora, vamos provar que J_3 é fracamente contínuo. Seja $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$, segue que $\|u_n\|_c < C$. Pela compacidade do operador traço, existe uma subsequência $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^{s+1}(\partial\Omega)$, assim,

$$\begin{aligned} |J_3(u_{n_k}) - J_3(u)| &\leq \oint |g(x, \xi_{n_k})| |u_{n_k} - u| \quad (\text{pelo Teorema do Valor Médio}), \\ &\leq \|g(\cdot, \xi_{n_k})\|_{L^{\frac{s+1}{s}}} \|u_{n_k} - u\|_{L^{s+1}} \quad (\text{pela Desigualdade de Hölder}). \end{aligned}$$

Desta forma, pelo Lema 4.1 obtemos que $J_3(u_{n_k}) \rightarrow J_3(u)$. Claramente $J_3(u_n) \rightarrow J_3(u)$ implica $J_3(u_{n_k}) \rightarrow J_3(u)$. Suponha por contradição que $J_3(u_n) \not\rightarrow J_3(u)$, então existe uma subsequência (u_{n_j}) tal que $|J_3(u_{n_j}) - J_3(u)| \geq \epsilon$. Mas a sequência (u_{n_j}) possui uma subsequência convergente (denotaremos novamente por (u_{n_j})) que converge para $u \in L^{s+1}(\partial\Omega)$ e ainda $J_3(u_{n_j}) \rightarrow J_3(u)$, contradição! Assim, $J_3(u_n) \rightarrow J_3(u)$.

Finalmente vamos provar que J'_3 é compacto. Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$, então existe uma subsequência $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$. Desta forma, $u_{n_k} \rightarrow u$ em $L^{s+1}(\partial\Omega)$. Então,

$$|J'_3(u_{n_k}) - J'_3(u)| \leq C \|g(\cdot, u_{n_k}) - g(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}},$$

e pelo Lema 4.1 obtemos que $J'_3(u_{n_k}) \rightarrow J'_3(u)$. Assim, J'_3 é compacto. ■

O próximo resultado diz respeito à condição (PS) Palais-Smale que constrói alguma compacidade para o funcional I .

Definição 4.3 *Um funcional I em $H^1(\Omega)$ tal que*

- (i) $\{I(u_m)\}$ é limitada,
- (ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$,

satisfaz à condição (PS) se (u_m) possui subsequência fortemente convergente em $H^1(\Omega)$.

Proposição 4.4 *Assuma que as condições (C1)-(C3') são satisfeitas. Se (u_m) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$, então (u_m) possui subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $T : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)^*$ o mapa dualidade definido por

$$T(u)v = \int \nabla u \nabla v + \int c(x)uv,$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Segue do Teorema de representação de Riesz-Fréchet e do Teorema da Aplicação Aberta [8] que

$$T^{-1}I'(u) = u - T^{-1}J'_2(u) - T^{-1}J'_3(u), \quad (4.16)$$

onde $J_2(u) := \int F(x, u)$, $J_3(u) := \oint G(x, u)$, $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)ds$ e $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$.

Para concluirmos a Proposição, basta mostrar que $J'_2(u_m)$ e $J'_3(u_m)$ possuem subsequência convergente. De fato, pelo Teorema da Aplicação Aberta, pela equação (4.16) e assumindo que $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$, temos que:

$$u_m = T^{-1}I'(u_m) - T^{-1}J'_2(u_m) - T^{-1}J'_3(u_m),$$

logo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [T^{-1}I'(u_m) - T^{-1}J'_2(u_m) - T^{-1}J'_3(u_m)] = \lim_{m \rightarrow \infty} [T^{-1}J'_2(u_m) + T^{-1}J'_3(u_m)].$$

Mas, temos que (u_m) é limitada em $H^1(\Omega)$, e J'_2 e J'_3 são compactos, pelo lema anterior.

Assim, pela compacidade de J'_2 e J'_3 , obtemos que $J'_2(u_m)$ e $J'_3(u_m)$ possuem subsequência convergente. Vamos adotar a mesma notação para a subsequência por comodidade. Como T^{-1} é contínua, temos que $T^{-1}J'_2(u_m)$ e $T^{-1}J'_3(u_m)$ também possuem subsequência convergente. Logo, obtemos uma subsequência convergente de u_m

■

O resultado que segue será usado na demonstração dos Teoremas principais e pode ser encontrado em [31], ele consiste na busca da existência do mínimo de um funcional I . Essa busca implica na maioria das vezes, em encontrar uma solução para uma equação diferencial parcial.

Teorema 4.5 *Seja E um espaço de Banach real. Se $I \in C^1(E; \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS) e é limitado inferiormente, então*

$$c = \inf_E I$$

é um valor crítico de I .

Demonstração: [31, Teorema 2.7].

■

4.2 Resultados principais

Nesta seção, sob três hipóteses distintas quanto ao crescimento de f e g , provamos a existência da solução para o problema (4.1). No primeiro resultado, utilizaremos o Teorema 4.5, já nos outros dois usaremos o Teorema de Ponto de Sela 2.12.

Teorema 4.6 *Suponhamos que as condições (C1)-(C3') sejam satisfeitas. Consideremos os potenciais, $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)ds$ e $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)ds$, tais que as seguintes condições também sejam satisfeitas.*

(C4) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2G(x, u)}{u^2} \leq \mu < \mu_1 \text{ e } \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u)}{u^2} \leq \lambda < \lambda_1,$$

uniformemente para $x \in \bar{\Omega}$ com

$$\lambda_1 \mu + \mu_1 \lambda < \mu_1 \lambda_1. \quad (4.17)$$

Então, a equação não linear (4.1) tem uma solução $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração:

A condição (C4) implica que para todo $\epsilon > 0$, existe $r = r(\epsilon) > 0$ tal que

$$\frac{2G(x, u)}{u^2} \leq \mu + \epsilon \text{ e } \frac{2F(x, u)}{u^2} \leq \lambda + \epsilon, \quad (4.18)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $u \in \mathbb{R}$ com $|u| > r$.

Usando (4.18) e (C3)-(C3'), temos que existem constantes M_ϵ tais que $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$G(x, u) \leq \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)u^2 + M_\epsilon \text{ e } F(x, u) \leq \frac{1}{2}(\lambda + \epsilon)u^2 + M_\epsilon. \quad (4.19)$$

De fato, se $|u| > r$, por (4.18) temos imediatamente que

$$G(x, u) \leq \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)u^2 + M_\epsilon \text{ e } F(x, u) \leq \frac{1}{2}(\lambda + \epsilon)u^2 + M_\epsilon.$$

Se $|u| \leq r$, então:

$$\begin{aligned} |g(x, u)| &\leq a_1 + a_2|u|^s \leq a_1 + a_2r^s = \eta \text{ (constante)}, \\ |G(x, u)| &= \left| \int_0^u g(x, t) dt \right| \leq \eta \int_0^u dt = \eta|u| \leq \eta r = M_\epsilon, \end{aligned}$$

assim,

$$|G(x, u)| \leq M_\epsilon.$$

Portanto,

$$G(x, u) \leq \frac{1}{2}(\mu + \epsilon)u^2 + M_\epsilon.$$

Para mostrar que a equação (4.1) possui “uma” solução, é suficiente de acordo com o Teorema 4.5, mostrar que o funcional é limitado inferiormente e que satisfaz à condição (PS). Com as hipóteses do Teorema 4.6, vamos mostrar que o funcional I é coercivo em $H^1(\Omega)$, isto é,

$$\text{Se } \|u\|_c \rightarrow \infty \text{ então } I(u) \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

dessa forma, I é limitado inferiormente e satisfaz à condição (PS).

Vamos provar primeiro que I é coercivo em $H^1(\Omega)$. Assuma que $\|u\|_c \rightarrow \infty$, então, usando a continuidade do operador traço de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$, nós temos que

$\|u\|_{\partial} \rightarrow \infty$ ou $\|u\|_{\partial} < k$, onde k é uma constante positiva. Vamos provar que em ambos os casos $I(u) \rightarrow \infty$.

Primeiro, suponhamos que $\|u\|_{\partial} < k$. Como

$$I(u) = \frac{1}{2} \left[\int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2 \right] - \int F(x, u) - \oint G(x, u) = \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \int F(x, u) - \oint G(x, u).$$

Podemos concluir por (4.19) que,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\lambda + \epsilon) \int u^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \oint u^2 - 2M_\epsilon.$$

Se $\lambda \leq 0$, segue imediatamente que $I(u) \rightarrow \infty$ para ϵ suficientemente pequeno.

Se $\lambda > 0$, observe que por (4.8),

$$\lambda_1 \int u^2 \leq \int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2,$$

assim,

$$(\lambda + \epsilon)\lambda_1 \int u^2 \leq (\lambda + \epsilon) \left[\int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2 \right] = (\lambda + \epsilon) \|u\|_c^2,$$

logo,

$$(\lambda + \epsilon) \int u^2 \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|_c^2. \quad (4.21)$$

Então, usando (4.19), (4.8) e (4.17), nós temos que:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \left[\int |\nabla u|^2 + \int c(x)u^2 \right] - \int F(x, u) - \oint G(x, u), \text{ por (4.19),} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\lambda + \epsilon) \int u^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \oint u^2 - 2M_\epsilon, \text{ por (4.21),} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \|u\|_{\partial}^2 - C, \end{aligned}$$

dessa forma,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right)}_A \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \|u\|_{\partial}^2 - C, \quad (4.22)$$

onde C é uma constante positiva.

Note que A é positivo, pois $\lambda < \lambda_1$, assim $\frac{\lambda}{\lambda_1} < 1$, portanto, para ϵ suficientemente pequeno, temos que $\frac{\lambda}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} < 1$.

Se $\|u\|_c \rightarrow \infty$, $\lambda < \lambda_1$ e ϵ é suficientemente pequeno, temos que $I(u) \rightarrow \infty$.

Agora suponha que $\|u\|_{\partial} \rightarrow \infty$. Usando as desigualdades (4.6) e (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \|u\|_\partial^2 - C \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \mu_1 \|u\|_\partial^2 - \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) \|u\|_\partial^2 - C \\
&\geq \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) - \frac{\mu}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right] \mu_1 \|u\|_\partial^2 - C \\
&\geq \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1} \right) - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right] \mu_1 \|u\|_\partial^2 - C \\
&\geq \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\mu}{\mu_1} \right) - \epsilon \left(\frac{\mu_1 + \lambda_1}{\lambda_1 \mu_1} \right) \right] \mu_1 \|u\|_\partial^2 - C.
\end{aligned}$$

Como $\mu_1 \lambda_1 - \mu_1 \lambda - \lambda_1 \mu > 0$, temos que $I(u) \rightarrow \infty$ para ϵ suficientemente pequeno. Portanto I é coercivo.

Utilizando a condição inicial (C3) e a coercividade de I , podemos concluir a limitação inferior de I , isto é:

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tal que } I(u) \geq K, \forall u \in H^1(\Omega). \quad (4.23)$$

Para mostrar que o funcional I satisfaz a condição (PS), basta, de acordo com a Proposição 4.4, verificar que toda sequência (u_m) em $H^1(\Omega)$, tal que $\{I(u_m)\}$ é limitada e $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$ é também limitada.

Suponha que (u_m) seja uma sequência satisfazendo as hipóteses da Proposição (4.4) e ainda não seja limitada. Segue da coercividade de I que quando $\|u\|_c \rightarrow \infty$ então, $I(u) \rightarrow \infty$, contradição! Logo, pela Proposição 4.4, o funcional I satisfaz à condição (PS).

Pelo Teorema 2.7 em [31], segue que I possui um ponto crítico $u \in H^1(\Omega)$, isto é, $I'(u) = 0$. Portanto u satisfaz à equação (1.7) e assim, a equação (4.1) possui pelo menos uma solução fraca. ■

Este é um resultado novo, mesmo neste caso, desde que μ_1 não seja igual a λ_1 .

No próximo resultado, estamos preocupados com o caso em que o comportamento assintótico das não-linearidades está relacionado a dois autovalores-linha consecutivos de Steklov-para-Neumann. Para tal, impomos condições sobre o comportamento assintótico das não-linearidades $g(x, u)$ e $f(x, u)$.

Teorema 4.7 *Suponhamos que as condições (C1)-(C3') sejam satisfeitas e que as seguintes condições também sejam satisfeitas.*

(C5) *Existem a, b, α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\mu_j < a \leq \liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(x, u)}{u} \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(x, u)}{u} \leq b < \mu_{j+1},$$

e

$$\alpha \leq \liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u} \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u} \leq \beta,$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ com

$$\mu_j \lambda_1 < \lambda_1 a + \mu_j \alpha \text{ e } \lambda_1 b + \mu_{j+1} \beta < \mu_{j+1} \lambda_1. \quad (4.24)$$

Então, a equação não linear (4.1) possui uma solução $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração:

Assumindo que as hipóteses do Teorema 4.7 são satisfeitas, precisamos mostrar que as condições do Teorema do Ponto de Sela 2.12 são cumpridas.

Sejam

$$V = \text{span} \{ \varphi_k \mid k \leq j \}, \quad X = Y \oplus_c H_0^1(\Omega) \text{ onde } Y = \overline{\text{span} \{ \varphi_k \mid k \geq j+1 \}}. \quad (4.25)$$

Segue de (4.4) e (4.25) que

$$H^1(\Omega) = V \oplus_c X. \quad (4.26)$$

Precisamos mostrar que existe uma constante $r > 0$ tal que

$$\sup_{\partial D} I < \inf_X I, \quad (4.27)$$

onde $D = \{v \in V; \|u\|_c \leq r\}$.

Assumindo que a condição acima é válida e que a condição (PS) é satisfeita, nós concluímos pelo Teorema do Ponto de Sela 2.12, que I possui um ponto crítico. Desta forma, (4.1) tem pelo menos uma solução fraca.

Vamos mostrar que I é coercivo em X e que $-I$ é coercivo em V , o que implica que (4.27) é satisfeito para $r > 0$ suficientemente grande. Note que a condição (C5) implica que existem constantes, chamadas novamente de $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \overline{\Omega}$:

$$a \leq \liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2G(x, u)}{u^2} \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2G(x, u)}{u^2} \leq b \quad (4.28)$$

e

$$\alpha \leq \liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u)}{u^2} \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, u)}{u^2} \leq \beta. \quad (4.29)$$

Combinando (C3) e (4.28) - (4.29), obtemos que $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall u \in \mathbb{R}$

$$(a - \epsilon) \frac{u^2}{2} - c \leq G(x, u) \leq (b + \epsilon) \frac{u^2}{2} + c \text{ e } (\alpha - \epsilon) \frac{u^2}{2} - c \leq F(x, u) \leq (\beta + \epsilon) \frac{u^2}{2} + c, \quad (4.30)$$

onde c é uma constante positiva.

Assumindo sem perda de generalidade a partir de agora que $\alpha \leq 0$. Segue que, para cada $u \in V$:

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \int F(x, u) - \oint G(x, u) \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) \int u^2 - \frac{1}{2}(a - \epsilon) \oint u^2 + C \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \left[\int c(x)u^2 + \int |\nabla u|^2 \right] - \frac{1}{2}(a - \epsilon) \|u\|_\partial^2 + C \\
&\leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(a - \epsilon) \|u\|_\partial^2 + C \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(a - \epsilon) \|u\|_\partial^2 + C.
\end{aligned}$$

Usando a identidade de Parseval $\|u\|_\partial^2 \geq \frac{1}{\mu_j} \|u\|_c^2$ obtida em [3] segue que:

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{a}{\mu_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\mu_j} \right) \|u\|_c^2 + C.$$

Pela primeira desigualdade em (4.24) obtemos

$$1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{a}{\mu_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\mu_j} < 0,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, por (4.24) a seguinte desigualdade é válida:

$$\mu_j \lambda_1 < \lambda_1 a + \mu_j \alpha,$$

assim,

$$1 < \frac{a}{\mu_j} + \frac{\alpha}{\lambda_1},$$

ou seja,

$$1 - \frac{a}{\mu_j} - \frac{\alpha}{\lambda_1} < 0,$$

portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{a}{\mu_j} + \frac{\epsilon}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\mu_j} < 0,$$

logo,

$$\text{quando } \|u\|_c \rightarrow \infty, \text{ obtemos } I(u) \rightarrow -\infty. \quad (4.31)$$

Portanto $-I$ é coercivo em V .

Por outro lado, para cada $u \in X$, segue de (4.25) que $u = u^0 + \bar{u}$, onde $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\bar{u} \in V$. Como \bar{u} e u^0 são ortogonais em $H^1(\Omega)$ e assumindo sem perda de generalidade, a partir de agora que $\beta \geq 0$,

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2} \|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_c^2 - \int F(x, u) - \int G(x, u), \\
&\geq \frac{1}{2} \|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_c^2 - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon) \int u^2 - \frac{1}{2}(b - \epsilon) \int u^2 - \tilde{C}, \\
&\geq \frac{1}{2} \|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_c^2 - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon) \int (u^0)^2 - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon) \int \bar{u}^2 - \frac{1}{2}(b - \epsilon) \underbrace{\int (u^0)^2}_{=0} \\
&\quad - \frac{1}{2}(b - \epsilon) \int \bar{u}^2 - \tilde{C},
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2} \|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2} \|\bar{u}\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u^0\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|\bar{u}\|_c^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(b - \epsilon) \|\bar{u}\|_\partial^2 - \tilde{C}, \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|\bar{u}\|_c^2 - \frac{1}{2}(b - \epsilon) \|\bar{u}\|_\partial^2 - \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Desta forma, usando a identidade de Parseval, $\|\bar{u}\|_\partial^2 \leq \frac{1}{\mu_{j+1}} \|\bar{u}\|_c^2$ em [3],

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right) \|u^0\|_c^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} \right) \|\bar{u}\|_c^2 - \tilde{C}.$$

Pela segunda desigualdade em (4.24),

$$\lambda_1 b + \mu_{j+1} \beta < \mu_{j+1} \lambda_1,$$

assim,

$$\frac{b}{\mu_{j+1}} + \frac{\beta}{\lambda_1} < 1,$$

ou seja,

$$1 - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\beta}{\lambda_1} > 0,$$

portanto, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} > 0.$$

Desta forma,

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \min \left[\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right), \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} \right) \right] \|u\|_c^2 - \tilde{C}.$$

Assim obtemos que $I(u) \rightarrow \infty$ quando $\|u^0\|_c \rightarrow \infty$. Logo I é coercivo em X .

Além disso, resulta a partir da coercividade de I em X e da condição (C3) que I é limitado inferiormente em X por uma constante, basta observar que dado qualquer $u \in X$ fixo, temos que:

$$I(u) \geq \frac{1}{2} \min \left[\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} \right), \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} \right) \right] \|u\|_c^2 - \tilde{C},$$

assim, podemos concluir que $I(u) \geq -\tilde{C}$, pois a primeira parcela da desigualdade acima é positiva. Portanto I é limitado inferiormente.

Usando (4.31), obtemos a afirmação (4.27) para alguma constante $r > 0$. De fato, como I é coercivo e limitado inferiormente, temos que $\inf_X I = -\tilde{C}$.

Se $\|u\|_c < r$ (grande), e $u \in \partial D$, então $I(u) < -\tilde{C} = \inf_X I$, logo

$$\sup_{\partial D} I < \inf_X I.$$

Resta mostrar que o funcional I satisfaz a condição (PS), ou seja, de acordo com a Proposição 4.4 devemos mostrar que toda sequência (u_m) em $H^1(\Omega)$ tal que $(I(u_m))$ é limitada, com $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$ é ainda uma sequência limitada. Observe, que a condição (C5) implica que para todo $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que para $|u| \geq r$,

$$a - \epsilon \leq \frac{g(x, u)}{u} \leq b + \epsilon, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.32)$$

Defina $\gamma : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\gamma(x, u) = \begin{cases} \frac{g(x, u)}{u}, & \text{se } |u| \geq r, \\ \frac{g(x, r) + g(x, -r)}{2r^2}u + \frac{g(x, r) - g(x, -r)}{2r}, & \text{se } |u| < r. \end{cases}$$

A função γ é contínua em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, pois g é contínua. Além disso, por (4.32)

$$a - \epsilon \leq \gamma(x, u) \leq b + \epsilon, \quad \forall u \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.33)$$

De fato, se $|u| < r$, obtemos $-r < u < r$, assim:

$$\gamma(x, u) < \frac{g(x, r) + g(x, -r)}{2r^2}r + \frac{g(x, r) - g(x, -r)}{2r} = \frac{g(x, r)}{r} \leq b + \epsilon,$$

e

$$\gamma(x, u) > \frac{g(x, r) + g(x, -r)}{2r^2}(-r) + \frac{g(x, r) - g(x, -r)}{2r} = \frac{-g(x, -r)}{r} = \frac{g(x, -r)}{-r} \geq a - \epsilon.$$

Se $|u| \geq r$, a desigualdade (4.33) é imediata da definição de γ . Dessa forma, a desigualdade (4.33) é provada.

Defina $h : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x, u) = g(x, u) - \gamma(x, u)u. \quad (4.34)$$

Segue pela continuidade de g e γ que

$$|h(x, u)| \leq k, \quad (4.35)$$

$\forall(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, onde $k > 0$ é uma constante.

Usando uma decomposição similar para a função f , obtemos que

$$l(x, u) = f(x, u) - \tau(x, u)u, \quad (4.36)$$

onde τ e $l(x, u)$ satisfazem

$$\alpha - \epsilon \leq \tau(x, u) \leq \beta + \epsilon, \quad (4.37)$$

e

$$|l(x, u)| \leq k, \quad \forall(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \quad (4.38)$$

respectivamente, onde $k > 0$ é uma constante.

Agora seja (u_m) em $H^1(\Omega)$ tal que $\{I(u_m)\}$ é limitada e $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$. Por (4.26), $u_m = v_m + x_m$, onde $v_m \in V$ e $x_m \in X$. Além disso, por (4.26) $x_m = x_m^0 + \bar{x}_m$ onde $x_m^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $\bar{x}_m \in Y$. Como $\lim_{m \rightarrow \infty} I'(u_m) = 0$, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $N > 0$ tal que, para todo $m \geq N$

$$\sup_{\varphi \neq 0} \frac{|I'(u_m)\varphi|}{\|\varphi\|_c} < \epsilon.$$

Defina $\varphi = x_m - v_m$ para m grande. Então, $I'(u_m)(x_m - v_m) < \epsilon \|x_m - v_m\|_c$. Tendo em conta a c -ortogonalidade de x_m e v_m em $H^1(\Omega)$, (4.34) e (4.36), obtemos da definição de I' que

$$\begin{aligned} I'(u_m)(x_m - v_m) &= \\ &= \int \nabla u_m \nabla (x_m - v_m) + \int c(x) u_m (x_m - v_m) - \int f(x, u_m) (x_m - v_m) \\ &\quad - \oint g(x, u_m) (x_m - v_m) \\ &= \int \nabla (v_m + x_m) \nabla (x_m - v_m) + \int c(x) (v_m + x_m) (x_m - v_m) - \int f(x, u_m) x_m \\ &\quad + \int f(x, u_m) v_m - \oint g(x, u_m) \bar{x}_m + \oint g(x, u_m) v_m, \end{aligned}$$

e segue a igualdade que identificaremos como A .

$$\begin{aligned} I'(u_m)(x_m - v_m) &= \|x_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 - \int l(x, u_m) x_m - \int \tau(x, u_m) x_m^2 + \int l(x, u_m) v_m \\ &\quad + \int \tau(x, u_m) v_m^2 - \oint h(x, u_m) \bar{x}_m - \oint \gamma(x, u_m) \bar{x}_m^2 + \oint h(x, u_m) v_m \\ &\quad + \oint \gamma(x, u_m) v_m^2. \end{aligned}$$

Como $I'(u_m)(x_m - v_m) < \epsilon \|x_m - v_m\|_c$, temos que

$$\begin{aligned} &\|x_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 - \int \tau(x, u_m) x_m^2 + \int \tau(x, u_m) v_m^2 - \oint \gamma(x, u_m) \bar{x}_m^2 + \oint \gamma(x, u_m) v_m^2 \\ &< \epsilon \|x_m - v_m\|_c + \int l(x, u_m) x_m - \int l(x, u_m) v_m + \oint h(x, u_m) \bar{x}_m - \oint h(x, u_m) v_m. \end{aligned}$$

Usando (4.33)- (4.38), (4.8) e a continuidade do operador traço, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \|x_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 - \int \tau(x, u_m)x_m^2 + \int \tau(x, u_m)v_m^2 - \oint \gamma(x, u_m)\bar{x}_m^2 + \oint \gamma(x, u_m)v_m^2 \\
> \|x_m^0\|_c^2 + \|\bar{x}_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 - (\beta + \epsilon) \int (x_m^0)^2 - (\beta + \epsilon) \int \bar{x}_m^2 \\
& + (\alpha - \epsilon) \int v_m^2 - (b + \epsilon) \oint \bar{x}_m^2 + (a + \epsilon) \oint v_m^2 \\
\geq & \|x_m^0\|_c^2 + \|\bar{x}_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 - \left(\frac{\beta}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|x_m^0\|_c^2 - \left(\frac{\beta}{\lambda_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|\bar{x}_m^0\|_c^2 \\
& + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) \|v_m\|_c^2 - b \|\bar{x}_m\|_\partial^2 - \epsilon \|\bar{x}_m\|_\partial^2 + a \|v_m\|_\partial^2 + \epsilon \|v_m\|_\partial^2 \\
\geq & \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) (\|x_m^0\|_c^2 + \|\bar{x}_m\|_c^2) - b \|\bar{x}_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 \\
& + \frac{(\alpha - \epsilon)}{\lambda_1} \|v_m\|_c^2 + a \|v_m\|_\partial^2 - \epsilon \|\bar{x}_m\|_\partial^2 + \epsilon \|v_m\|_\partial^2,
\end{aligned}$$

e segue a desigualdade que identificaremos como B.

$$\begin{aligned}
& \|x_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 - \int \tau(x, u_m)x_m^2 + \int \tau(x, u_m)v_m^2 - \oint \gamma(x, u_m)\bar{x}_m^2 + \oint \gamma(x, u_m)v_m^2 \\
\geq & \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) (\|x_m^0\|_c^2 + \|\bar{x}_m\|_c^2) - b \|\bar{x}_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 \\
& + \frac{(\alpha - \epsilon)}{\lambda_1} \|v_m\|_c^2 + a \|v_m\|_\partial^2 - \epsilon \|\bar{x}_m\|_\partial^2 + \epsilon \|v_m\|_\partial^2.
\end{aligned}$$

Temos ainda, de forma semelhante a anterior, que

$$\begin{aligned}
& \epsilon \|x_m - v_m\|_c + \int l(x, u_m)x_m - \int l(x, u_m)v_m + \oint h(x, u_m)\bar{x}_m - \oint h(x, u_m)v_m \\
\leq & \epsilon \|x_m - v_m\|_c + k \int x_m - k \int v_m + k \oint \bar{x}_m - k \oint v_m \\
\leq & \epsilon (\|x_m\|_c + \|v_m\|_c) + \widetilde{K} \|\bar{x}_m\|_c + \widetilde{K} \|v_m\|_c,
\end{aligned}$$

e segue a desigualdade que identificaremos como D.

$$\begin{aligned}
& \epsilon \|x_m - v_m\|_c + \int l(x, u_m)x_m - \int l(x, u_m)v_m + \oint h(x, u_m)\bar{x}_m - \oint h(x, u_m)v_m \\
\leq & \epsilon (\|x_m\|_c + \|v_m\|_c) + \widetilde{K} \|\bar{x}_m\|_c + \widetilde{K} \|v_m\|_c.
\end{aligned}$$

Portanto, de A, B e D, obtemos a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) (\|x_m^0\|_c^2 + \|\bar{x}_m\|_c^2) - b \|\bar{x}_m\|_c^2 - \|v_m\|_c^2 + \frac{(\alpha - \epsilon)}{\lambda_1} \|v_m\|_c^2 + a \|v_m\|_\partial^2 \\
& < \epsilon (\|x_m\|_c + \|v_m\|_c) + \widetilde{K} \|\bar{x}_m\|_c + \widetilde{K} \|v_m\|_c.
\end{aligned}$$

Assumindo sem perda de generalidade que $\alpha - \epsilon \leq 0$, e usando a identidade de Parseval em [3], segue que

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right) (\|x_m^0\|_c^2) + \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}}\right) \|\bar{x}_m\|_c^2 \\
& + \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a}{\mu_j} - 1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1} - \frac{\epsilon}{\mu_j}\right) \|v_m\|_c^2 \\
& < K_0 (\|x_m\|_c + \|v_m\|_c).
\end{aligned}$$

Usando (4.24), temos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\delta(\|x_m^0\|_c^2 + \|\bar{x}_m\|_c^2 + \|v_m\|_c^2) \leq K_0(\|x_m\|_c + \|v_m\|_c),$$

onde $0 < \delta < \min \left\{ \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} - \frac{b}{\mu_{j+1}} \right), \left(\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{a}{\mu_j} - 1 \right) \right\}$. Portanto,

$$\|u_m\|_c^2 \leq \widetilde{K}_0 \|u_m\|_c,$$

assim, (u_m) é limitada em $H^1(\Omega)$. Desta forma, pela Proposição 4.4, o funcional I satisfaz à condição (PS) e a demonstração está concluída. ■

Nós agora assumimos o caso quando o comportamento assintótico das não-linearidades está relacionado a dois autovalores-linhas consecutivos de Neumann-para-Steklov.

Teorema 4.8 *Suponhamos que as condições (C1)-(C3') sejam satisfeitas e que as seguintes condições também sejam satisfeitas.*

(C6) *Existem a, b, α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$a \leq \liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(x, u)}{u} \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(x, u)}{u} \leq b,$$

e

$$\lambda_j < \alpha \leq \liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u} \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(x, u)}{u} \leq \beta < \lambda_{j+1},$$

uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ com

$$\lambda_j \mu_1 < \lambda_1 a + \mu_1 \alpha \text{ e } \lambda_{j+1} b + \mu_1 \beta < \lambda_{j+1} \mu_1. \quad (4.39)$$

Então, a equação não linear (4.1) possui uma solução $u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração:

Como na demonstração anterior, mostraremos que as condições do Teorema do Ponto de Sela são cumpridas.

É possível provar, ver [25], que o espaço $L^2(\Omega)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$L^2(\Omega) = V \oplus V^\perp,$$

onde V é um subespaço de dimensão finita de $L^2(\Omega)$ gerado pelas autofunções associadas com os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ e $X = V^\perp$ é o seu ortogonal de dimensão infinita em $L^2(\Omega)$. Assim, $X = V^\perp$ é gerado pelas autofunções associadas aos autovalores $\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \dots$, e por isso

$$H^1(\Omega) = (V \cap H^1(\Omega)) \oplus (V^\perp \cap H^1(\Omega)). \quad (4.40)$$

Assumindo sem perda de generalidade que $a \leq 0$, segue das desigualdades (4.6) e (4.30) que para todo $u \in V \cap H^1(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \int F(x, u) - \oint G(x, u) \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) \int u^2 - \frac{1}{2}(a - \epsilon) \oint u^2 + C \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right) \left[\int c(x)u^2 + \int |\nabla u|^2 \right] - \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) \int u^2 + C \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) \int u^2 + C. \end{aligned}$$

Utilizando Parseval em [3] página 331,

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\mu_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) \int u^2 + C \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_j} \right) \|u\|_c^2 + C. \end{aligned}$$

Pela primeira desigualdade em (4.39), segue que

$$1 - \frac{a}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\lambda_j} + \frac{\epsilon}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\lambda_j} < 0,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, por (4.39),

$$\lambda_j \mu_1 < \lambda_1 a + \mu_1 \alpha,$$

assim,

$$1 < \frac{a}{\mu_1} + \frac{\alpha}{\lambda_1},$$

ou seja,

$$1 - \frac{a}{\mu_1} - \frac{\alpha}{\lambda_1} < 0,$$

o que prova a afirmação acima, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Dessa forma, se $\|u\|_c \rightarrow \infty$ segue que $I(u) \rightarrow -\infty$. Assim, $-I$ é coercivo em $V \cap H^1(\Omega)$.

Agora, assumindo sem perda de generalidade que $b \geq 0$, segue das desigualdades (4.6) e (4.30) e da autofunção expansão, que para todo $u \in X \cap H^1(\Omega) := V^\perp \cap H^1(\Omega)$ temos que:

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \int F(x, u) - \oint G(x, u) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2}(\beta + \epsilon) \int u^2 - \frac{1}{2}(b + \epsilon) \oint u^2 + C \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\mu_1} \right) \left[\int c(x)u^2 + \int |\nabla u|^2 \right] - \frac{1}{2}(\beta + \epsilon) \int u^2 + C. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2} \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{\mu_1} + \frac{\epsilon}{\mu_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} (\beta + \epsilon) \int u^2 + C \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_1} \right) \|u\|_c^2 - \frac{1}{2} (\beta + \epsilon) \int u^2 + C \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\mu_1} - \frac{\beta}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} \right) \|u\|_c^2 + C.
\end{aligned}$$

Pela segunda desigualdade em (4.39) segue que

$$1 - \frac{b}{\mu_1} - \frac{\beta}{\mu_{j+1}} - \frac{\epsilon}{\mu_1} - \frac{\epsilon}{\mu_{j+1}} > 0,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, pela segunda desigualdade em (4.39), temos que

$$\lambda_{j+1}b + \mu_1\beta < \lambda_{j+1}\mu_1,$$

assim,

$$\frac{b}{\mu_1} + \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} < 1,$$

ou seja,

$$1 - \frac{b}{\mu_1} - \frac{\beta}{\lambda_{j+1}} > 0,$$

o que prova a afirmação acima, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Desta forma, se $\|u\|_c \rightarrow \infty$ segue que $I(u) \rightarrow \infty$.

Assim, o funcional I é coercivo em $X \cap H^1(\Omega)$.

Finalmente, seguindo passos similares aos da demonstração do Teorema 4.7, concluímos que a condição (PS) é satisfeita.

■

4.3 Considerações finais

Refletindo sobre as condições impostas para solução de nosso problema (4.1), isto é, sobre as hipóteses dos Teoremas (4.6), (4.7) e (4.8), podemos fazer algumas análises que identificam geometricamente algumas relações entre as não linearidades.

Observe que a desigualdade (4.17), implica que algumas relações das não-linearidades envolvidas ficam no plano do domínio,

$$R := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda < \lambda_1, \mu < \mu_1, \lambda_1\mu + \mu_1\lambda < \mu_1\lambda_1\},$$

que é representado na Figura 3. Portanto, por (4.17), estas relações assintóticas ficam abaixo do primeiro autovalor de Steklov-Neumann “autovalor segmento-linha”.

Considere $\mu = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}\lambda + \mu_1$, basta unir o autovalor-ponto de Neumann $(\lambda_1, 0)$ ao autovalor-ponto de Steklov $(0, \mu_1)$ no primeiro quadrante do plano (λ, μ) .

Analisando a condição (C5), podemos ver que as relações entre as não-linearidades ficam entre as retas $\mu = \mu_j$ e $\mu = \mu_{j+1}$. Por outro lado, considerando as desigualdades em (4.24), concluimos que as não linearidades ficam em quadriláteros limitados pelas retas $\mu = \mu_j$, $\mu = \mu_{j+1}$, e ainda pelas retas que ligam o autoponto $(\lambda_1, 0)$ aos autopontos $(0, \mu_j)$ e $(0, \mu_{j+1})$. Esses quadriláteros estão representados em certo sentido abaixo, na Figura 3 pelas regiões S_1, S_2 .

Observando ainda a condição (C6), podemos ver que as relações entre as não-linearidades ficam entre as retas $\lambda = \lambda_j$ e $\lambda = \lambda_{j+1}$. Além disso, considerando as desigualdades em (4.39), concluimos que as não linearidades ficam em quadriláteros limitados pelas retas $\lambda = \lambda_j$, $\lambda = \lambda_{j+1}$, e ainda pelas retas que ligam o autoponto $(0, \mu_1)$ aos autopontos $(\lambda_j, 0)$ e $(\lambda_{j+1}, 0)$. Esses quadriláteros estão representados em certo sentido, abaixo na Figura 3, pelas regiões N_1, N_2 .

Podemos nos questionar a respeito desta figura com relação a um fator bem natural, por exemplo, o que ocorreria se as relações entre as não-linearidades estivessem fora da união de todas as regiões mencionadas acima? Segundo [25], seu estudo parece ser o primeiro a comparar a não-linearidade g com autovalores de Steklov superiormente, desta forma, como o assunto é bem novo, nossa resposta parece ainda não respondida. Fica então a dúvida para possíveis pesquisas posteriores.

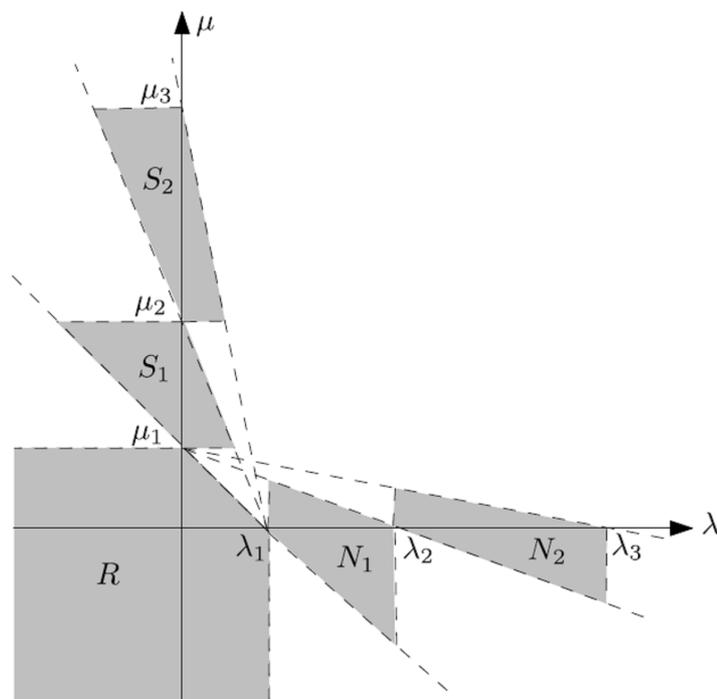


Figura 3 – Relações entre as não linearidades

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados de Análise Funcional

Neste apêndice serão apresentados alguns resultados e definições de análise funcional e medida utilizados em nosso trabalho.

Definição A.1 Um espaço de **Banach** é um espaço vetorial normado completo.

Definição A.2 Um espaço normado E é dito **Reflexivo** se a aplicação canônica $J : E \rightarrow E''$ for bijetora, isto é, $J(E) = E''$. Onde E'' é o dual do dual de E .

Definição A.3 Um espaço de **Hilbert** é um espaço vetorial normado com norma proveniente do produto interno, isto é:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Definição A.4 Uma função é Hölder contínua se existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha.$$

O espaço das funções Hölder contínuas é denotado por $C^{1,\alpha}$.

Todas as funções Hölder contínuas são contínuas.

Definição A.5 Uma sequência de funções $u_n \in L^p(\Omega)$ converge quase sempre para zero em Ω quando $u_n \rightarrow 0$ pontualmente em $\Omega - Z$, onde Z é um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Definição A.6 Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável com respeito a Lebesgue e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

onde μ é a medida de Lebesgue.

Definição A.7 *Definimos*

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável com respeito a Lebesgue e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| < C \text{ quase sempre em } \Omega\}$,

com

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| < C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Definição A.8 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n\},$$

uma função u possui derivada fraca se existem $g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$ satisfazendo as igualdades acima, onde cada g_i é a derivada de g em relação à coordenada i .

Teorema A.9 (Desigualdade de Hölder) *(ver [27])*

Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, tais que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Teorema A.10 (Densidade) *(ver [8]) O espaço $C_c^0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema A.11 (Desigualdade de Poincaré) *(ver [27])*

Sejam Ω um domínio aberto e limitado de \mathbb{R}^N , e $p \in [1, \infty[$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$, tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos $\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}}$.

Teorema A.12 (Riesz) *(ver [8], pag.135) Seja H um espaço de Hilbert, para qualquer $\varphi \in H^*$ existe uma única $f \in H$ tal que $\langle \varphi, u \rangle = (f, u) \forall u \in H$, onde $(,)$ é o produto interno de H . Além disso, $\|f\| = \|\varphi\|_{H^*}$.*

Teorema A.13 [Teorema de Rellich's] *(ver [17]) Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n . Então o mapa de inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é um operador compacto.*

Teorema A.14 [Teorema do Traço Compacto] *(ver [17]) Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n . Então o mapa de inclusão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ é um operador compacto.*

Teorema A.15 (Rellich-Kondrashov) *(ver [27])*

Seja Ω um domínio limitado e aberto, com fronteira suave em \mathbb{R}^N . Então as seguintes imersões são compactas:

- (a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $p < n$ e $1 \leq q < p^* := \frac{Np}{N-p}$;
- (b) $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$ (aqui temos $p = N$);
- (c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ para $p > N$.

Teorema A.16 (ver [27])

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) é um conjunto limitado e $1 \leq p \leq q$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, e além disso, a imersão $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua.

Teorema A.17 (ver [27])

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e aberto, com fronteira suave. Então temos as seguintes imersões contínuas:

- (a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}$, para $1 \leq p < n$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$;
- (b) $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$ (aqui nós temos $p = n$);
- (c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ para $p > n$. No caso $p = n$ não é verdade em geral que $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema A.18 (ver [7, Teorema IX.17]) Suponhamos que Ω seja de classe C^1 . Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, com $1 < p < \infty$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i) $u = 0$ sobre Γ .
- (ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.19 (ver [17, Teorema 2, seção 5.5]) Assuma que Ω é limitado e $\partial\Omega \in C^1$. Suponha além disso que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então,

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ se, e somente se } \Gamma u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Teorema A.20 (ver [7]) Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach reflexivo e seja $K \subset E$ um subconjunto limitado, fechado e convexo. Então K é fracamente compacto em E , isto é, K é compacto na topologia fraca de $E(\sigma(E, E^*))$.

Teorema A.21 (ver [7]) Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach reflexivo, $K \subset E$ fracamente compacto e B um funcional em K fracamente contínuo. Então existe $u_1 \in K$ tal que $B(u_1)$ atinge o máximo ou mínimo.

APÊNDICE B – Resultados de Análise

Neste apêndice serão apresentados alguns resultados e definições de análise real e espaços métricos utilizados neste trabalho.

Definição B.1 *Seja S um conjunto. Uma métrica em S é uma função $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades abaixo:*

- (i) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in S$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in S$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in S$;
- (iv) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Definição B.2 *Um espaço métrico M é um conjunto munido de uma métrica d .*

Definição B.3 *Um espaço métrico é completo se todas as sequências de Cauchy convergem.*

Definição B.4 *Num espaço métrico (X, d) a bola aberta de raio ρ centrada em um ponto $x \in X$ é dada por:*

$$B(x, \rho) = \{y \in X; d(x, y) < \rho\}.$$

Definição B.5 *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que o ponto a é um ponto interior ao conjunto X quando, para algum $r > 0$, tem - se $B(a, r) \subset X$. O conjunto **int** X de todos os pontos interiores a X chama-se o interior do conjunto X .*

Definição B.6 *Uma função $f : V \rightarrow F$, onde V é um espaço vetorial e F um corpo, é dita sublinear se satisfaz as propriedades abaixo:*

- (i) $f(\gamma x) = \gamma f(x), \forall \gamma \in F$ e $x \in V$;
- (ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in V$.

Definição B.7 (*Fréchet Diferenciável*) Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $f : D \rightarrow Y$ com $D \subseteq X$. Seja ainda $x_0 \in \text{int}D$. Diz-se que f é diferenciável em x_0 segundo Fréchet, se existe um operador linear limitado A tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Definição B.8 (*Gâteaux Diferenciável*) Sejam E e F espaços vetoriais normados, U um aberto em E e V um subconjunto de F . Uma função $f : U \rightarrow V$ é dita Gâteaux Diferenciável se existe uma única transformação linear contínua $df_{\text{Gâteaux}}(a) : E \rightarrow F$ (denominada a diferencial Gateaux de f em a) tal que

$$df_{\text{Gâteaux}}(a)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Definição B.9 O operador traço $\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$ para $1 \leq q < \frac{2(n-1)}{n-2}$ é definido como

$$Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

Teorema B.10 (Aplicação Aberta) (ver [8], pag. 35) Sejam E e F dois espaços de Banach e seja T um operador contínuo, de E em F que é sobrejetor. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$T(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, c)$$

Definição B.11 Um subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um **Domínio Lipschitz** se para cada $P \in \partial\Omega$ existe um sistema de coordenadas retangulares (x, s) , $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, uma vizinhança $U(P) \equiv U \subset \mathbb{R}^n$ contendo P e uma função $\psi_P \equiv \psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(i) \quad |\psi(x) - \psi(y)| \leq C_P |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ e } C_P < \infty;$$

$$(ii) \quad U \cap \Omega = \{(x, s); s > \psi(x)\} \cap U.$$

Teorema B.12 (ver [33], Proposição 2.11) Sejam W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno V e W^\perp o seu complemento ortogonal. Então:

$$V = W \oplus W^\perp.$$

Teorema B.13 [*Multiplicadores de Lagrange*] (Ver [32]).

Suponha $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e X um espaço de Banach. Se para $x_0 \in X$ tivermos $G(x_0) = 0$ e x_0 extremo local da F quando restrita a $C = \{x \in X; G(x) = 0\}$, então

(i) $G'(x_0) = 0$ ou

(ii) $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tal que $F'(x_0)v = \mu G'(x_0)v, \forall v \in X$.

Teorema B.14 [3, Teorema 3.1] *Assuma que $\Omega, \partial\Omega, c, \rho$ satisfazem (B2), (A1) e (A2). Então B e D_c são convexos, contínuos e G -diferenciáveis em $H^1(\Omega)$ com*

$$\langle D'_c(u), v \rangle = 2 \int [\nabla u \cdot \nabla v + cuv] dx \quad (\text{B.1})$$

e

$$\langle B'(u), v \rangle = 2 \oint \rho uv, \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (\text{B.2})$$

Além disso, B é fracamente contínuo em $H^1(\Omega)$.

Lema B.15 [2, Lema 5.3] *Seja E um espaço de Banach reflexivo (A.2, ver apêndice A) e seja $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ coercivo e (w.l.s.c.). Então J é limitado por baixo em E , isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $J(u) \geq a, \forall u \in E$.*

APÊNDICE C – Resultados de Equações Diferenciais Parciais

Neste apêndice serão apresentados alguns resultados e definições de equações diferenciais parciais utilizados neste trabalho. Além disso, provaremos uma afirmação feita no Lema (4.2) como consulta ao leitor.

Considere o seguinte problema de Dirichlet não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Seja $F(u) = \int_0^u f(s) ds$.

Teorema C.1 [Identidade de Pohozaev] (ver [2]) *Seja Ω um domínio limitado em \mathbb{R}^n e seja ν o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Se u é uma solução clássica ($u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$) de (C.1) então a seguinte identidade é válida:*

$$n \int_{\Omega} F(u) dx - \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} u f(u) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u_{\nu}^2(x) d\sigma, \quad (\text{C.2})$$

onde $u_{\nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Teorema C.2 [Fórmulas de Green] (ver [17], pág 628) *Sejam $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Então:*

$$(i) \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

$$(ii) \int_{\Omega} Dv \cdot Du dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS,$$

$$(iii) \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Teorema C.3 (Lax Milgram) (ver[9])

Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear que satisfaz:

$$(i) \text{ Continuidade: existe } \alpha > 0, \text{ tal que, } |a(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \forall u, v \in H \text{ e,}$$

$$(ii) \text{ Coercividade: existe } c > 0 \text{ tal que } c \|u\|^2 \leq a(u, u), \forall u \in H.$$

Então, para cada $f \in H'$ (dual de H), existe um único $u \in H$ tal que :

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H.$$

Teorema C.4 O funcional $J_1(u) = \frac{1}{2} \left[\int |\nabla u|^2 + \int cu^2 \right]$, nas condições do Lema (4.2) é de classe C^1 .

Demonstração:

Vamos provar que o funcional J_1 é Fréchet diferenciável e em seguida que J'_1 é contínuo. Dados u e $h \in H^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{J_1(u+h) - J_1(u) - J'_1(u).h}{\|h\|} &= \int \frac{|\nabla(u+h)|^2}{2\|h\|} + \int \frac{c(u+h)^2}{2\|h\|} - \int \frac{|\nabla u|^2}{2\|h\|} - \int \frac{cu^2}{2\|h\|}, \\ &\quad - \int \frac{\nabla u \nabla h}{\|h\|} - \int \frac{cuh}{\|h\|} \\ &= \frac{1}{2} \|h\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J_1(u+h) - J_1(u) - J'_1(u).h}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|h\| = 0,$$

assim J_1 é Fréchet diferenciável.

Verifiquemos agora, a continuidade de J'_1 .

Dada uma sequência (u_n) convergente para u em $H^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int (\nabla u_n - \nabla u) \nabla h + c(u_n - u)h \right| &= \left| \int \nabla u_n \nabla h + cu_n h - \int \nabla u \nabla h + cuh \right| \\ &\leq \|u_n - u\| \|h\|, \end{aligned}$$

dessa forma, J'_1 é contínuo.

Portanto, J_1 é de classe C^1 .

■

Referências

- [1] Amann, H. *Nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*. in: Proceedings of the Second Scheveningen Conference on Differential Equations, in: North-Holland Math. Stud., 21 (1976), 43-64.
- [2] Ambrosetti, A.; Malchiodi, A. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Cambridge studies in advanced mathematics, 104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] Auchmuty, G. *Steklov eigenproblems and the representation of solutions of elliptic boundary value problems*. Numer. Funct. Anal. Optim. 25 (2004), no. 3-4, 321-348.
- [4] Auchmuty, G. *The main inequality of vector analysis*. Math. Models Methods Appl. Sci. 14 (2004), no. 1, 79-103.
- [5] Bandle, C. *Isoperimetric inequalities and applications*. Monographs and Studies in Mathematics, 7. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1980.
- [6] Biezuner, J. *Autovalores do laplaciano*. Notas de aula do curso Tópicos em Análise UFMG, Brasil, 2006.
- [7] Brezis, H. *Functional analysis* [Theory and applications]. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree] Masson, Paris, 1983.
- [8] Brezis, H. *Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer; 1st Edition (November 10, 2010).
- [9] Brezis, H.; Nirenberg, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), no. 4, 437-477.
- [10] Câmara, M. A. *O teorema minimax de von Neumann*. Dissertação de Mestrado em Matemática Pura Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- [11] Castro, A. *Semilinear equation with discrete spectrum*. *Variational methods: open problems, recent progress, and numerical algorithms*. 1-16, Contemp. Math., 357, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [12] Cushing, J. M. *Nonlinear Steklov problems on the unit circle*. J. Math. Anal. Appl. 38 (1972), 766-783.

-
- [13] de Figueiredo, D.G.; Gossez, J.P. *Conditions de non-résonance pour certains problèmes elliptiques semi-lineaires*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 302 (1986), no. 15, 543-545.
- [14] de Figueiredo, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Berlin: by Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [15] de Figueiredo, D. G. *Métodos variacionais em equações diferenciais*. Matemática universitária no. 7 (1988), 21 - 47.
- [16] Faria, L. F. O. *Equações elípticas semilineares com dependência do gradiente por passo da montanha*. Dissertação de Mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- [17] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [18] Godoi, J. D. *Problemas de autovalores de Steklov-Neumann e aplicações*. Tese de Doutorado em Matemática Pura pela UFScar - São Paulo, 2012.
- [19] Jabri, Y. *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 95. Cambridge, University Press, Cambridge, 2003.
- [20] Klingelhöfer, K. *Nonlinear harmonic boundary value problems I*. Arch. Ration. Mech. Anal. 31, 1968/1969, 364-371.
- [21] Klingelhöfer, K. *Nonlinear boundary value problems with simple eigenvalue of the linear part*. Arch. Ration. Mech. Anal. 37, 1979, 381-398.
- [22] Kourogenis, N. C.; Papageorgiou, N. S. *Nonsmooth critical point theory and nonlinear elliptic equations at resonance*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 69, (2000), no. 2, 245-271.
- [23] Kufner, A.; John, O.; Fucík, S. *Function spaces, Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis*. Noordhoff International Publishing, Leyden, Academia, Prague, 1977.
- [24] Lima, E. L. *Curso de Análise Volume 2*. IMPA, Rio de Janeiro, 11, (2009).
- [25] Mavinga, N.; Nkashama, M. N. *Steklov-Neumann eigenproblems and nonlinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*. J. of Differential Equations, 248 (2010), no. 5, 1212-1229.

-
- [26] Mawhin, J.; Schmitt, K. *Corrigendum: Upper and lower solutions and semilinear second order elliptic equations with nonlinear boundary conditions*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 100 (1985), no. 3-4, 361.
- [27] Mitrovic, D.; Zubrinic, D. *Fundamentals of applied functional analysis. Distributions-Sobolev spaces-nonlinear elliptic equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 91, Longman, Harlow, 1998.
- [28] Neumann, J.; Morgenstern, O. *Teoria dos jogos e comportamento econômico*. Princeton University 60, EUA, 2007.
- [29] Nkashama, M. N.; Robinson, S. B. *Resonance and nonresonance in terms of average values I*. J. Differential Equations 132, (1996), no. 1, 46-65.
- [30] Pohozaev, S. I. *Eigenfunction of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* . Soviet Math. Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 1408-1411.
- [31] Rabinowitz, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., 65. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [32] Samuays, M. A. *O problema de Brézis-Nirenberg*. Dissertação de Mestrado pela Universidade federal do Paraná, Curitiba, 2011.
- [33] Santos, R. J. *Álgebra linear e aplicações*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.
- [34] Steklov, M. W. *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 19 (1902), 455-490.