Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Mestrado em Matemática

Bruno Mendes Rodrigues

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Juiz de Fora

2012

Bruno Mendes Rodrigues

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Acadêmico em Matemática, área de concentração : Análise, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira

Juiz de Fora

2012

AGRADECIMENTOS

À Deus, por permitir mais essa conquista.

Aos meus familiares e a minha namorada que sempre me deram amor e força, valorizando meus potenciais.

Ao meu orientador, professor Fábio Rodrigues Pereira, pela atenção e dedicação com que me orientou.

Ao professor Olímpio Hiroshi Myagaki por me incentivar a continuar meus estudos.

À coordenação do mestrado em matemática na UFJF juntamente com todos os professores do programa.

Aos professores Luiz Fernando de Oliveira Faria e Ronaldo Brasileiro Assunção por terem aceito o convite para participar da minha banca.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções para o problema superlinear

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u_+^p + h \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $u_+ = \max\{u, 0\}$, $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$ (com $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$) e $h \in L^s(\Omega)$.

Nós consideramos dois casos, a saber,

(i) $1 < p < 2^* - 1$ (subcrítico)

(ii) $p = 2^* - 1$ (crítico).

Usando métodos variacionais, mostramos a existência de pelo menos duas soluções. A primeira obtida explicitamente por um cálculo direto e a segunda via Teorema de Enlace.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Expoente crítico. Ambrosetti-Prodi.

ABSTRACT

In this work, we study the existence of solutions for the superlinear problem

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u_+^p + h \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega \subset I\!R^N$ is a bounded smooth domain, $u_+ = \max\{u, 0\}$, $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$ (with $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$) and $h \in L^s(\Omega)$.

We consider two cases, namely,

(i) $1 < p < 2^* - 1$ (subcritical)

(ii) $p = 2^* - 1$ (critical).

Using variational methods, we show the existence of at lest two solutions. The first is obtained explicitly by a direct calculation and the second via Linking Theorem.

Key-words: Differential equations. Critical exponent. Ambrosetti-Prodi.

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, abordaremos problemas do tipo Ambrosetti-Prodi de equações elípticas envolvendo os expoentes subcrítico e crítico. Problemas desse tipo surgiram a partir da década de 70, quando A. Ambrosetti e G. Prodi estudaram uma classe de problemas dados por

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) + f(x) \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $I\!R^N$, e caracteriza-se por determinar funções f, de modo que a equação (1.1) tenha ou não solução. No trabalho "On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach Spaces" de A. Ambrosetti e G. Prodi [13], os autores consideraram a função $g : I\!R \to I\!R$ sendo de classe C^2, satisfazendo $g''(s) > 0$ para todo $s \in I\!R$ e

$$0 < \lim_{s\to-\infty} g'(s) < \lambda_1 < \lim_{s\to+\infty} g'(s) < \lambda_2,$$

com λ_i, $i = 1, 2, ...$ denotando os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Eles provaram a existência de uma variedade fechada e conexa M em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ de classe C^1 que divide o espaço em dois conjuntos disjuntos abertos S_1 e S_2 de maneira que:

(I) Se $f \in S_0$, o problema (1.1) não tem solução.

(II) Se $f \in M$, o problema (1.1) tem solução única.

(III) Se $f \in S_2$, o problema (1.1) tem exatamente duas soluções.

Posteriormente, M. S. Berger e E. Podolak [11] deram uma grande contribuição no estudo desses problemas, dando uma estrutura cartesiana para a variedade M em espaços de Hilbert. Eles decompuseram as funções $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ na forma $f = t\varphi_1 + f_1$, onde φ_1 é uma autofunção(normalizada em L^2) associada ao autovalor λ_1 e $f_1 \in (span\varphi_1)^{\perp}$ (no sentido L^2) e reescreveram o problema (1) na seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) + t\varphi_1 + f_1(x) \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Portanto, para cada f_1 com a propriedade acima, os autores mostraram a existência de um número real $r = r(f_1)$ tal que:

(a) Se $t > r$ o problema (1.2) não tem solução (isto é, $f \in S_0$).

(b) Se $t = r$, o problema (1.2) tem solução única (isto é, $f \in M$).

(c) Se $t < r$, o problema (1.2) tem exatamente duas soluções (isto é $f \in S_2$).

Em 1975, J. Kazdan e F. W. Warner desconsideraram a hipótese de convexidade sobre a função g e trabalharam com a hipótese:

$$-\infty \leq \lim_{s \to -\infty} \sup \frac{g(x,s)}{s} < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} \inf \frac{g(x,s)}{s} < +\infty.$$

Usando os métodos de Sub e Super-solução e Iteração Monotônica, Kazdan e Warner encontraram uma função $t : (span\,\{\varphi_1\})^{\perp} \to I\!R$ tal que:

- Se $t > t(f_1)$, o problema não tem solução.
- Se $t < t(f_1)$ o problema tem pelo menos uma solução.

Posteriormente, Aman, Hess e Dancer melhoraram o resultado de Kazdan e Warner encontrando pelo menos duas soluções para $t < t(f_1)$ e pelo menos uma solução para $t = t(f_1)$.

Diversos pesquisadores exploraram uma enorme quantidade de variações e generalizações dos resultados obtidos por Ambrosetti-Prodi, tais como K. C. Chang [16], D. C. de Morais Filho [17] e Pereira, F. R. [18]. Essa dissertação tem como objetivo expor os trabalhos de Ruf-Srikanth e Figueiredo-Jianfu, os quais serão estudados ao longo deste trabalho.

Em 1986, B. Ruf e P. N. Srikanth [1] estudaram o problema superlinear com o expoente subcrítico:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u_+^p + h \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p < 2^* - 1$ se $N \geq 3$, $h \in L^s(\Omega)$ com $s > N$ e $\lambda \in I\!R$. Usando a decomposição $h = t\varphi_1 + h_1$ com $\int_\Omega h_1\varphi_1 = 0$ e a hipótese de que $\lambda > \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_i$ para todo $i \in I\!N$, Ruf e Srikanth mostraram a existência de uma constante $T = T(h_1)$, tal que para $t > T$ o problema (1.3) possui pelo menos duas soluções.

Posteriormente, em 1999, D. G. de Figueiredo e Y. Jianfu [2] trabalharam com a não-linearidade crítica ($p = 2^* - 1$) para o mesmo tipo de equação (1.3) acima, obtendo para $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ com $k \geq 1$ e $h_1 \in L^s$ com $h_1 \in Ker(-\Delta - \lambda)^\perp$ o seguinte resultado:

(i) Existe um $T = T(h_1)$ tal que, para $t > T$ o problema (1.3) possui uma solução negativa u_t.

(ii) Se $N > 6$, existe uma segunda solução para o problema (1.3).

No capítulo 2 apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados ao longo dos demais capítulos. No capítulo 3, abordaremos o problema (1.3) estudado por Ruf-Srikanth e no capítulo 4, estudaremos o problema (1.3) para o caso crítico estudado por Figueiredo-Jianfu.

2 Resultados Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar alguns resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Durante todo trabalho, o conjunto Ω será um domínio limitado suave e aberto de $I\!R^N$ com $N \geq 3$. Definiremos o espaço de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha u$ é definida pela seguinte relação:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha\varphi(x)dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Para $1 \leq p < \infty$ definiremos a seguinte norma, $\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Tomando $m = 1$ e $p = 2$ temos que, $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ e $\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Definição 2.1. Denotaremos por $\lambda_{i's}$, $i \in I\!N$ (com $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_i \leq ...$) os autovalores associados às autofunções $\varphi_1, \varphi_2, ...$, do problema com condição de Dirichlet abaixo:

$$\begin{cases} -\triangle v &= \lambda v \text{ em } \Omega \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Proposição 2.2. Seja $\{\varphi_j\}$ a sequência das autofunções ortonormais em $L^2(\Omega)$ do problema (1.1) associadas aos autovalores λ_j de maneira que para algum $k \in I\!N$ tenhamos $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$. Definindo $H_0^1 = W \oplus X$, onde $W = [\varphi_1, ..., \varphi_k]$ e $X = W^\perp = \overline{[\varphi_{k+1}, \varphi_{k+2}, ...]}$, temos as seguintes estimativas:

(i) $\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \|u\|_{L^2}^2, \forall\ u \in W$.

(ii) $\|u\|^2_{H^1_0} \geq \lambda_{k+1} \|u\|^2_{L^2}, \forall\, u \in X.$

Demonstração: Mostremos o item (i). Seja $u \in W$, logo existem constantes reais $\xi_{i's}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i$. Usando a integração por partes e o fato de φ_i ser autofunção associada ao autovalor λ_i do problema (2.1) com $\int_\Omega \varphi_i \varphi_j dx = 0$ para $i \neq j$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1_0} &= \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \int_\Omega -\Delta u\, u dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i(-\Delta \varphi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \lambda_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i^2 \varphi_i^2 dx \leq \lambda_k \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \varphi_i^2 dx \\
&= \lambda_k \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx = \lambda_k \int_\Omega u^2 dx = \lambda_k \|u\|^2_{L^2}.
\end{aligned}
$$

De modo semelhante mostra-se o item (ii). ∎

Lema 2.3. Sejam $W = [\varphi_1, ..., \varphi_k]$ e $X = W^\perp$ como na proposição 2.2. Dado $\epsilon > 0$, existe $e \in X$ com $\|e\|_{H^1_0} = \epsilon$ tal que, o conjunto $\{x \in \Omega; v(x) + e(x) > 1\}$ tem medida positiva para todo $v \in W$ com $\|v\|_{H^1_0} \leq 1$.

Demonstração: Suponha por contradição que para cada $e \in X$ com $\|e\|_{H^1_0} = \epsilon$, temos que $v(x) + e(x) \leq 1$ q.t.p em Ω, para algum $v \in W$ com $\|v\|_{H^1_0} \leq 1$.

Como $v \in W$, então existem $t_{j's} \in I\!R$, tais que, $v = \sum_{j=1}^{k} t_j \varphi_i$. Temos que, para cada $j \in I\!N$ φ_j é contínua no compacto $\overline{\Omega}$, então v é também limitada, e portanto, $e(x) \leq 1 - v(x) \leq k_1$ q.t.p em Ω. Analogamente, existe uma constante positiva k_2 ,tal que, $-e(x) \leq k_2$ q.t.p em Ω. Tomemos $k = \max\{k_1, k_2\}$, logo $|e(x)| \leq k$ q.t.p em Ω, e portanto, $e \in L^\infty(\Omega)$ para cada $e \in X$.

Seja $u \in H^1_0(\Omega) = W \oplus X$, logo existem $w \in W$ e $v \in X$, tais que, $u = w + v$. Como $v \in X \subset L^\infty$ e $w \in W$, então existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que, $|v(x)| \leq c_1$ q.t.p em Ω, e $|w(x)| \leq c_2$ em Ω.

Então, $|u(x)| \leq |w(x)| + |v(x)| \leq c_1 + c_2$ *q.t.p* em Ω implica $u \in L^\infty(\Omega)$, e portanto, $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, o que é falso para $N \geq 2$ (ver apêndice, teorema C.5.). ∎

Proposição 2.4. Sejam $e \in X$ obtido no lema 2.3 e $W = [\varphi_1, ..., \varphi_k]$ e $f \in C(\overline{\Omega})$ uma função negativa. Então para $R > 0$ suficientemente grande existe uma constante

$\eta = \eta(e) > 0$, tal que, $\displaystyle\int_\Omega \left(w + e + \frac{f}{R}\right)_+^{p+1} dx \geq \eta > 0$, para todo $w \in W$ com $\|w\|_{H_0^1} \leq 1$, onde $1 \leq p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

Demonstração: Seja $w \in W$ tal que $\|w\|_{H_0^1} \leq 1$. Logo, pelo lema 2.3 o conjunto $A = \{x \in \Omega; w(x) + e(x) > 1\}$ tem medida positiva, isto é, existe uma constante positiva $\eta = \eta(e)$ tal que $medA \geq \eta > 0$. Como f é limitada em Ω, temos para $R > 0$ suficientemente grande:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(w + e + \frac{f}{R}\right)_+^{p+1} dx &\geq \int_A \left(w + e + \frac{f}{R}\right)_+^{p+1} dx \\ &\geq \int_A dx = medA = \eta > 0.\end{aligned}$$

■

Proposição 2.5. Sejam $e \in X = W^\perp$ e $v \in W$, onde X e W estão definidos na proposição 1.2. Se $r > 0$ então,

(i) $\displaystyle\int_\Omega |v + re|^2 \, dx = \int_\Omega |v|^2 \, dx + r^2 \int_\Omega |e|^2 \, dx.$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla e dx = 0.$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla v + r\nabla e|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + r^2 \int_\Omega |\nabla e|^2 \, dx.$

Demonstração: Primeiro , mostraremos o item (i). Como $e \in X$, $v \in W$ e $X = W^\perp$, então $\displaystyle\int_\Omega vedx = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v + re|^2 &= \int_\Omega |v|^2 \, dx + 2r \int_\Omega vedx + r^2 \int_\Omega |e|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |v|^2 \, dx + r^2 \int_\Omega |e|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Agora, mostremos o item (ii). Como $v \in W$, então existem $t_{i's} \in I\!R$, tais que, $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_i \varphi_i$. Como $X = W^\perp$, $e \in X$, e $\varphi_i \in W$ para $i = 1, 2, ..., k$, então:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla v \nabla e dx &= -\int_\Omega \Delta v \; edx = \int_\Omega (-\Delta v) edx \\ &= \sum_{i=1}^{k} t_i \int_\Omega (-\Delta \varphi_i) edx = \sum_{i=1}^{k} t_i \lambda_i \int_\Omega \varphi_i edx = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, mostremos o item (iii). Pelo item (ii), temos que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v + r\nabla e|^2 \, dx &= \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + 2r \int_\Omega \nabla v \nabla e dx + r^2 \int_\Omega |\nabla e|^2 \, dx \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + r^2 \int_\Omega |\nabla e|^2 \, dx.\end{aligned}$$

■

3 Soluções para um problema envolvendo o expoente subcrítico

Neste capítulo estudaremos um resultado de existência de soluções para o seguinte problema elíptico superlinear com condição de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u_+^p + h \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$, $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, $\lambda \in I\!R$ e $h \in L^s(\Omega)$, com $s > N$. Este problema foi estudado em 1986 por Bernhard Ruf e P. N. Srikanth (ver [1]), cujo o objetivo era garantir a existência de pelo menos duas soluções para tal problema. Considere a decomposição $h = t\varphi_1 + h_1$, onde $h_1 \in L^s(\Omega)$ com $s > N$ e φ_1 a primeira autofunção normalizada e positiva associada ao primeiro autovalor λ_1. Logo o problema acima toma a seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u_+^p + t\varphi_1 + h_1 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Os principais resultados desse capítulo são divididos em duas partes: na primeira obtemos uma solução negativa de forma direta e na segunda parte usamos o cálculo variacional para encontrarmos uma segunda solução não-nula. O teorema principal do capítulo é o seguinte resultado:

Teorema 3.1. Seja $\lambda > \lambda_1$ tal que $\lambda \neq \lambda_i$, para todo $i \in I\!N$. Então:

(i) Existe uma constante t_0, tal que se $t > t_0$, o problema (3.1) possui uma solução negativa u_t.

(ii) Existe uma segunda solução para o problema (3.1).

Provemos o item (i) do teorema 3.1. Observemos que toda solução negativa para o problema (3.1) satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + t\varphi_1 + h_1 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Buscaremos então uma solução negativa que satisfaça o problema (3.2). Para isso, dividimos o problema (3.2) em outros dois problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + t\varphi_1 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + h_1 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

e a soma das soluções dos problemas (3.3) e (3.4) é uma solução para o problema (3.2).

Lema 3.2. Existe uma única solução $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ para o problema (3.4).

Demonstração: Consideremos o seguinte problema modificado:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u + \lambda_1 u + \gamma u &= h_1 \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $\gamma > 0$, tal que, $\gamma > \lambda - \lambda_1$. Tomemos $\delta > 0$, tal que, $0 < \delta \leq \gamma - (\lambda - \lambda_1)$, e definimos o funcional B em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ dado por:

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx + \lambda_1 \int_\Omega uv dx + \gamma \int_\Omega uv dx.$$

Para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u|^2 dx + \lambda_1 \int_\Omega |u|^2 dx + \gamma \int_\Omega |u|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (\gamma - (\lambda - \lambda_1)) \int_\Omega |u|^2 dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \delta \int_\Omega |u|^2 dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^1}^2 . \end{aligned}$$

Pelas desigualdades de Hölder e de Poincaré (ver apêndice, teoremas C.3 e C.6) obtemos para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right| + (\gamma + \lambda + \lambda_1)\left|\int_\Omega uvdx\right| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + (\gamma + \lambda + \lambda_1)\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} + \frac{c}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \\
&= \left(1 + \frac{c}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo teorema de Lax Milgram (ver apêndice, teorema C.1) existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que, $B(u,v) = \int_\Omega h_1 v dx$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, isto é, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que,

$$
\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uvdx + \lambda_1 \int_\Omega uvdx + \gamma \int_\Omega uvdx = \int_\Omega h_1 v dx \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (3.6)
$$

E portanto, existe uma única solução fraca para o problema (3.5).

Temos $u, h_1 \in L^2(\Omega)$ (ver apêndice, Teoremas C.4 e C.5). Então, definimos o operador linear $T_\gamma : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, dado por $T_\gamma(h_1) = u$, onde u é solução do problema (3.5). Observemos que T_γ é contínua. De fato, $u = T_\gamma(h_1)$ satisfaz a equação (3.6) $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Tomemos $v = u$, logo:

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H_0^1}^2 &= \int_\Omega h_1 u dx + \lambda \int_\Omega u^2 dx - \lambda_1 \int_\Omega u^2 dx - \gamma \int_\Omega u^2 dx \\
&\leq \|h_1\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + (\lambda - \lambda_1 - \gamma)\int_\Omega u^2 dx \\
&\leq \|h_1\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leq c\|h_1\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1}.
\end{aligned}
$$

Se $u \neq 0$, então $\|T_\gamma(h_1)\|_{H_0^1} = \|u\|_{H_0^1} \leq c\|h_1\|_{L^2} < \infty$. Agora, como $T_\gamma : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é linear contínuo e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, então $T_\gamma : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é linear compacto.

Por outro lado, u é solução fraca do problema (3.4), se e somente se, é solução do problema:

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\Delta u - \lambda u + \lambda_1 u + \gamma u &= h_1 + \lambda_1 u + \gamma u \text{ em } \Omega \\
u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega,
\end{aligned}
\right. \qquad (3.7)
$$

isto é, $u = T_\gamma(h_1 + \lambda_1 u + \gamma u)$. Definimos $w := h_1 + \lambda_1 u + \gamma u$, assim $w - (\gamma + \lambda_1)u = h_1$. Como $u = T_\gamma(w)$ então,

$$(I - (\gamma + \lambda_1)T_\gamma)w = h_1. \tag{3.8}$$

Pela teoria dos operadores compactos (ver [3]), temos que $\dfrac{1}{\gamma + \lambda_1}$ não pertence ao espectro $\sigma(T_\gamma)$, se e somente se, a equação (3.8) possui solução única w, que por sua vez, equivale ao problema (3.4) possuir uma única solução. Assim, basta mostrarmos que $\dfrac{1}{\gamma + \lambda_1} \notin \sigma(T_\gamma)$. De fato, $\dfrac{1}{\gamma + \lambda_1} \notin \sigma(T_\gamma)$, se e somente se, $T_\gamma(u) = \dfrac{1}{\gamma + \lambda_1} u$ implicar $u = 0$, que por sua vez equivale a, se u satisfaz $-\Delta u - \lambda u + \lambda_1 u + \gamma u = \gamma u + \lambda_1 u$, então $u = 0$. Daí, se u satisfaz $-\Delta u = \lambda u$, então $u = 0$, pois por hipótese λ não é autovalor de $-\Delta$. Portanto, existe uma única solução u_0 para (3.4).

■

Prova do item (i), Teorema 3.1:

Demonstração: Agora, procuremos uma solução para o problema (3.3). Para isso, tentaremos obter uma solução do tipo $u_1 = k\varphi_1$, e portanto, $k[(-\Delta\varphi_1) - \lambda\varphi_1] = t\varphi_1$. Usando que λ_1 pertence ao espectro $\sigma(-\Delta)$, temos $k(\lambda_1 - \lambda)\varphi_1 = t\varphi_1$. Como φ_1 é uma autofunção positiva e $\lambda_1 < \lambda$, então $k := k(t) = \dfrac{t}{\lambda_1 - \lambda}$. Portanto $u_1 = \dfrac{t\varphi_1}{\lambda_1 - \lambda}$ é solução para o problema (3.3). Note que a solução de (3.3) é única. De fato, suponha que u e $\widetilde{u}$ sejam soluções de (3.3). Então $w = u - \widetilde{u}$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w &= \lambda w \text{ em } \Omega \\ \quad w &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

o que implica $w = 0$ (pois $\lambda \neq \lambda_i$), ou seja, $u = \widetilde{u}$. Por outro lado, se o problema (3.2) possuir uma solução u_t, então a função $\widetilde{w} = u_t - u_0$ será uma solução de (3.3), onde u_0 é uma solução de (3.4). Usando a unicidade de (3.3) obtemos $k\varphi_1 = \widetilde{w} = u_t - u_0$, o que implica $u_t = k\varphi_1 + u_0$. Assim, utilizando que a derivada normal interior é positiva sobre a fronteira de Ω, $\varphi_1, u_0 \in C^1$, $\varphi_1 > 0$ em Ω e $k < 0$ nós obtemos $u_t < 0$ para t suficientemente grande. ■

Agora, provemos o item (ii) do teorema 3.1, isto é, iremos em busca de uma segunda solução para o problema (3.1). Observemos que, se $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução não nula para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v + (v + u_t)_+^p \text{ em } \Omega \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

então, uma segunda solução para o problema (3.1) é dada por $u = \widetilde{u} + u_t$. Portanto, nosso objetivo é obter uma solução para (3.9). Notemos que, uma solução fraca para o problema (3.9) é uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega v\varphi dx - \int_\Omega (v + u_t)_+^p \varphi dx = 0, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.10}$$

Defina o funcional $I : H_0^1 \longrightarrow I\!R$ por:

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v + u_t)_+^{p+1} dx.$$

Observemos que encontrar uma função $v \in H_0^1$, que satisfaça a equação (3.10), equivale a encontrarmos um ponto crítico para o funcional I. Note que $v = 0$ é um ponto crítico de I com $I(0) = 0$. Vamos mostrar que o funcional I possui um outro ponto crítico.

Lema 3.3. O funcional I definido acima, satisfaz a condição $(P.S.)$, isto é, se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência que satisfaz: $|I(u_n)| \leq M,$ para alguma constante real positiva M e $I'(u_n) \to 0$ no dual de H_0^1, então (u_n) possui uma subsequência convergente.

Demonstração: Por hipótese $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ satisfaz:

$$|I(u_n)| = \left| \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n + u_t)_+^{p+1} dx \right| \leq M \tag{3.11}$$

e,

$$|I'(u_n)u_n| = \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^2 dx - \int_\Omega (u_n + u_t)_+^p u_n dx \right| \leq \xi_n \|u_n\|_{H_0^1} \tag{3.12}$$

onde $\xi_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\, u_n dx &= \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\,(u_n+u_t-u_t)\,dx \\
&= \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\,(u_n+u_t)\,dx - \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\, u_t dx \\
&= \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p \left[(u_n+u_t)_+ + (u_n+u_t)_-\right] dx \\
&\quad - \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\, u_t dx \\
&= \int_\Omega (u_n+u_t)_+^{p+1}\, dx - \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\, u_t dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo (3.13) em (3.11) obtemos:

$$\left| I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \right| = \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega (u_n+u_t)_+^{p+1}\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\,(-u_t)dx \right|. \tag{3.14}$$

Como $|I(u_n)| \leq M$ e $I'(u_n) \to 0$, então

$$\begin{aligned}
\left| I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \right| &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{2}\left\|I'(u_n)\right\|_{H'} \left\|u_n\right\|_{H_0^1} \\
&\leq M + \epsilon \left\|u_n\right\|_{H_0^1},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

para todo $n > N(\epsilon)$.

Substituindo (3.14) em (3.15) e observando que $-u_t > 0$, temos que, para n suficientemente grande:

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right| \int_\Omega (u_n+u_t)_+^{p+1}\, dx \leq M + \epsilon \left\|u_n\right\|_{H_0^1}. \tag{3.16}$$

Como $p > 1$, então para n suficientemente grande:

$$\int_\Omega (u_n+u_t)_+^{p+1}\, dx \leq CM + C\epsilon \left\|u_n\right\|_{H_0^1} \tag{3.17}$$

onde, $C = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p+1}} > 0$.

Mostraremos que $\|u_n\|_{H_0^1} \leq k$, $\forall n \in I\!N$ e para algum $k > 0$. Suponha por absurdo que, $\|u_n\|_{H_0^1} \to \infty$ quando $n \to \infty$, e seja $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1}}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2_{H^1_0}} &= \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \frac{|u_n|^2}{\|u_n\|^2_{H^1_0}}dx - \frac{1}{\|u_n\|^2_{H^1_0}}\int_\Omega \frac{(u_n+u_t)_+^{p+1}}{p+1}dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v_n|^2\,dx - \frac{1}{\|u_n\|^2_{H^1_0}}\int_\Omega \frac{(u_n+u_t)_+^{p+1}}{p+1}dx.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Como $\|v_n\|_{H^1_0} = 1$ e $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1_0(\Omega)$ implica que $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$. Daí, usando que $I(u_n)$ é limitado e usando que (3.17) implica que $\frac{1}{\|u_n\|^2_{H^1_0}}\int_\Omega \frac{(u_n+u_t)_+^{p+1}}{p+1}dx \to 0$ quando $n \to \infty$, obtemos $0 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx$, e portanto, $v \neq 0$. Por outro lado, usando (3.17) novamente, temos:

$$
\frac{1}{\|u_n\|^{1+\frac{1}{p}}_{H^1_0}}\int_\Omega (u_n+u_t)_+^{p+1}\,dx \leq \frac{CM}{\|u_n\|^{1+\frac{1}{p}}_{H^1_0}} + \frac{C\epsilon}{\|u_n\|^{\frac{1}{p}}_{H^1_0}} \to 0.
$$

Logo, $\frac{1}{\|u_n\|_{H^1_0}}(u_n+u_t)_+^p \to 0$ em $L^{1+\frac{1}{p}}$. Como $L^{1+\frac{1}{p}} \hookrightarrow H^{-1}$, então $\frac{1}{\|u_n\|_{H^1_0}}(u_n+u_t)_+^p \to 0$ em H^{-1}.

Como $< I'(u_n), \varphi > = \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi dx - \lambda \int_\omega u_n \varphi dx - \int_\Omega (u_n+u_t)_+^p\,\varphi dx, \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$, e como por hipótese $I'(u_n) \to 0$ em H^{-1}, então $-\Delta u_n - \lambda u_n - (u_n+u_t)_+^p \to 0$ em H^{-1}. Dividindo por $\|u_n\|_{H^1_0}$ obtemos,

$$
-\Delta v_n - \lambda v_n - \frac{(u_n+u_t)_+^p}{\|u_n\|_{H^1_0}} \to 0 \text{ em } H^{-1}. \tag{3.19}
$$

Agora, como $\frac{1}{\|u_n\|_{H^1_0}}(u_n+u_t)_+^p \to 0$ em H^{-1} e $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1_0(\Omega)$, segue por (3.19) que v satisfaz o problema

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\Delta v &= \lambda v \text{ em } \Omega \\
v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega.
\end{aligned}
\right. \tag{3.20}
$$

Mas, como $\lambda \neq \lambda_i$, $\forall i \in I\!N$ então $v = 0$, o que é um absurdo. Logo, (u_n) é uma sequência limitada em $H^1_0(\Omega)$.

■

Lema 3.4. O funcional I, satisfaz a geometria do teorema de Enlace (ver apêndice, Teorema B.8), isto é, $H^1_0(\Omega) = W \oplus X$ é um espaço de Banach, onde W é um subespaço de dimensão finita e

(a) existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que $I\Big|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \beta$, e

(b) existe um $e \in \partial B_1 \cap X$, e existe uma constante real $R > \rho$ tal que $I\Big|_{\partial Q} \leq 0$ onde $Q := \left(\overline{B_R} \cap W\right) \oplus \{re; 0 < r < R\}$.

Demonstração: Primeiro, mostraremos o item (a). Seja $H_0^1(\Omega) = W \oplus X$, onde $W = [\varphi_1, ..., \varphi_k]$ e $X = W^\perp$ estão definidos na proposição 2.2. Buscamos encontrar constantes $\rho, \beta > 0$, tais que se $u \in X$ com $\|u\|_{H_0^1} = \rho$, então $I(u) \geq \beta$.

Seja $u \in X$. Assim, utilizando a estimativa (ii) da proposição 2.2, mais o fato de termos a imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u+u_t)_+^{p+1}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{H_0^1}^2 - C\|u\|_{H_0^1}^{p+1},
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante positiva.

Como $p > 1$ e $\lambda < \lambda_{k+1}$, então definimos $\rho := \left[\frac{1}{4C}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} > 0$. Logo, se $u \in X$ e $\|u\|_{H_0^1} = \rho$, então:

$$
\begin{aligned}
I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{H_0^1}^2 - C\|u\|_{H_0^1}^{p+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\left[\frac{1}{4C}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\right]^{\frac{2}{p-1}} - C\left[\frac{1}{4C}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\right]^{\frac{p+1}{p-1}} \\
&= \frac{1}{C^{\frac{2}{p-1}}}\left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\right]^{\frac{p+1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, definindo $\beta := \frac{1}{C^{\frac{2}{p-1}}}\left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\right]^{\frac{p+1}{p-1}} > 0$, temos que, $I\Big|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \beta$.

Agora, mostremos o item (b). Seja $0 < \epsilon < \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_k} - 1\right)}$. Então pelo lemma 2.3. existe $e_\epsilon \in X$ com $\|e_\epsilon\|_{H_0^1} = \epsilon$, tal que o conjunto $\{x \in \Omega; v(x) + e_\epsilon(x) > 1\}$ tem medida positiva, para todo $v \in W$ com $\|v\|_{H_0^1} \leq 1$. Seja $Q = \left(\overline{B_R} \cap W\right) \oplus \{re_\epsilon; 0 < r < R\}$, onde $\overline{B_R}$ é a bola fechada em $H_0^1(\Omega)$ e a constante $R > \rho$ será escolhida posteriormente. Seja $\partial Q := \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$, onde:

(1) $\Gamma_1 = W \cap \overline{B_R}$,

(2) $\Gamma_2 = \{u \in H_0^1;\ u = v + re_\epsilon,\ v \in W,\ \|v\|_{H_0^1} = R,\ 0 \leq r \leq R\}$,

(3) $\Gamma_3 = \{u \in H_0^1;\ u = v + Re_\epsilon,\ v \in W,\ \|v\|_{H_0^1} \leq R\}$.

Analisaremos o valor do funcional I sobre cada caminho Γ_i da fronteira de Q definido acima.

(1) Sobre Γ_1. Seja $u \in \Gamma_1$, e portanto, $u \in W$. Utilizando a estimativa (i) da proposição 2.2, temos que,

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda)\|u\|_{L^2}^2 \leq 0, \text{ pois } \lambda_k < \lambda. \end{aligned}$$

(2) Sobre Γ_2. Seja $u \in \Gamma_2$, então $u = v + re_\epsilon$ com $v \in W$, $\|v\|_{H_0^1} = R$ e $0 \leq r \leq R$.

Usando a estimativa (i) da proposição 2.2 e a proposição 2.5, temos que,

$$\begin{aligned} I(v + re_\epsilon) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v + re_\epsilon)|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v + re_\epsilon|^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx - \frac{\lambda r^2}{2}\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 + \frac{r^2}{2}\|e_\epsilon\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2}\|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{R^2}{2} + \frac{R^2\epsilon^2}{2} - \frac{R^2\lambda}{2\lambda_k} = \frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} + \epsilon^2\right). \end{aligned}$$

Como $0 < \epsilon < \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_k} - 1\right)}$, então $1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} + \epsilon^2 < 0$, e portanto, $I(u) < 0$.

(3) Sobre Γ_3. Seja $u \in \Gamma_3$, logo $u = v + Re_\epsilon$ com $v \in W$ e $\|v\|_{H_0^1} \leq R$. Novamente, pela estimativa (i) da proposição 2.2 e pela proposição 2.5, temos que,

$$\begin{aligned} I(v + Re_\epsilon) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v + Re_\epsilon)|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |v + Re_\epsilon|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v + Re_\epsilon + u_t)_+^{p+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 + \frac{R^2}{2}\|e_\epsilon\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda R^2}{2}\|e_\epsilon\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v + Re_\epsilon + u_t)_+^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|v\|_{H_0^1}^2 + \frac{R^2\epsilon^2}{2} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v + Re_\epsilon + u_t)_+^{p+1}\,dx \\ &\leq \frac{R^2\epsilon^2}{2} - \frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{v}{R} + e_\epsilon + \frac{u_t}{R}\right)_+^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Como u_t é contínua em $\overline{\Omega}$, então tomemos $R > 0$, tal que, $\frac{u_t}{R} \geq -1$ em $\overline{\Omega}$. Portanto, temos que, $\left(\frac{v}{R} + e_\epsilon - 1\right)_+ \leq \left(\frac{v}{R} + e_\epsilon + \frac{u_t}{R}\right)_+$. Assim, temos que:

$$-\frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{v}{R} + e_\epsilon + \frac{u_t}{R}\right)_+^{p+1} dx \leq -\frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{v}{R} + e_\epsilon - 1\right)_+^{p+1} dx.$$

Como $v \in W$ e $\|v\|_{H_0^1} \leq R$, então $\dfrac{v}{R} \in W$ e $\left\|\dfrac{v}{R}\right\|_{H_0^1} \leq 1$. Logo, pela proposição 2.4, existe uma constante $\eta := \eta(e_\epsilon) > 0$, tal que,

$$\int_\Omega \left(\frac{v}{R} + e_\epsilon - 1\right)_+^{p+1} dx \geq \eta.$$

Logo, temos que,

$$-\frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{v}{R} + e_\epsilon - 1\right)_+^{p+1} dx \leq -\frac{R^{p+1}\eta}{p+1}.$$

Portanto, como $p > 1$ e $\epsilon > 0$ já escolhido, temos que, para $R > 0$ suficientemente grande,

$$I(v + Re_\epsilon) \leq \frac{R^2\epsilon}{2} - \frac{R^{p+1}\eta}{p+1} \leq 0.$$

$\blacksquare$

Prova do item (ii), Teorema 3.1:

Demonstração: Como os lemas 3.3 e 3.4 satisfazem o teorema de Enlace, então I possui um valor crítico $c \geq \beta$ caracterizado por $c = \inf_{h\in\Gamma}\max_{u\in Q} I(h(u))$, onde $\Gamma = \left\{h \in \mathcal{C}(\overline{Q}, E); h = I_d \text{ em } \partial Q\right\}$. Isto é, existe $u_c \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (3.9), tal que, $0 < \beta \leq c = I(u_c)$. Logo, u_c é não nulo, pois $I(0) = 0$.

Além disso, u_c não é uma solução negativa de (3.9). De fato, suponhamos o contrário, isto é, $u_c < 0$, assim por (3.9), temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_c &= \lambda u_c \text{ em } \Omega \\ u_c &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Como $\lambda \neq \lambda_i \; \forall i \in I\!N$, temos que $u_c = 0$, o que é uma contradição. Portanto u_t e $u_c + u_t$ são duas soluções fracas e distintas para o problema (3.1).

$\blacksquare$

4 Soluções para um problema envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Neste capítulo estudaremos um resultado de existência de soluções para o seguinte problema elíptico superlinear com a condição de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u_+^{2^*-1} + f(x) \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, $\lambda \in I\!R$ e f é dada, de modo que $f \in L^s(\Omega)$ com $s > N$. Este problema foi estudado em 1999 por Djairo G. De Figueiredo e Yang Jianfu (ver[2]). Assim como no capítulo anterior, o problema acima pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u_+^{2^*-1} + t\varphi_1 + h \text{ em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $f = t\varphi_1 + h$, $h \in L^s(\Omega)$, $s > N$ e φ_1 a primeira autofunção normalizada e positiva associada ao primeiro autovalor λ_1. O teorema principal deste capítulo é o seguinte resultado:

Teorema 4.1. Seja $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ para $k \geq 1$. Então:

(i) Existe uma constante t_0, tal que, para $t > t_0$ o problema (4.1) possui uma solução negativa u_t.

(ii) Se $N > 6$, existe uma segunda solução para o problema (4.1).

Observamos que a prova do item (i) é idêntica à que fizemos no teorema 3.1 (i), devido ao fato de que a existência da solução negativa não depende da potência da não-linearidade da equação diferencial acima. Portanto, para t suficientemente grande, existe uma solução negativa u_t para o problema (4.1).

Como feito no capítulo 3, observamos que $u = v + u_t$ será uma solução para o problema (4.1), se existir uma alguma função $v \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo o problema:

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v + (v + u_t)_+^{2^*-1} \text{ em } \Omega \\ v &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Utilizando-se dos métodos variacionais, observamos que encontrar uma solução para o problema (4.2), equivale a encontrarmos uma solução fraca para a seguinte equação:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega v\varphi dx - \int_\Omega (v + u_t)_+^{2^*-1} \varphi dx = 0, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.3}$$

Seja I um funcional em $H_0^1(\Omega)$ definido por:

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 - \lambda |v|^2 \right) dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (v + u_t)_+^{2^*} dx.$$

Observemos que, encontrar uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaça a equação (4.3), equivale a encontrarmos um ponto crítico para o funcional I. Utilizaremos o teorema de Enlace sem a condição (P.S.) (Ver apêndice, Teorema C.8), para garantirmos a existência de um ponto crítico não nulo para o funcional I.

Faremos a prova do teorema 4.1 usando uma sequência de resultados. Os lemas 4.7 e 4.8 garantem que o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha Generalizado (Enlace). Usando uma aplicação do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 4.3 em [4]), existe uma sequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, tal que, $I(v_n) \to c$ e $I'(v_n) \to 0$, onde c satisfaz (pelo lema 4.9)

$$0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

onde S é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, dada em (4.7). O lema 4.10 mostra que o limite fraco v da sequência (v_n) é uma solução do problema (4.2). Finalmente usamos o fato que o nível mini-max c é menor que $\frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ para mostrar que a solução é não nula. Continuaremos a utilizar as notações da proposição 2.2, isto é, $W = [\varphi_1, ..., \varphi_k]$, $X = W^\perp$, $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, $H_0^1 = W \oplus X$ e as estimativas:

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \|u\|_{L^2}^2, \forall\ u \in W \text{ e } \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1} \|u\|_{L^2}^2, \forall\ u \in X.$$

Nossa meta é obtermos $S_\rho = \partial B_\rho \cap X$, e $Q = [0, Re] \oplus (\overline{B}_r \cap W)$, de maneira que:

$$I\Big|_{S_\rho} \geq \alpha > 0;\ \rho < R, \tag{4.4}$$

$$I\Big|_{\partial Q} < \alpha, \tag{4.5}$$

$$\max_{\overline{Q}} I < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}, \tag{4.6}$$

onde S é denominada constante ótima de Sobolev, definida por:

$$S := \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} : u \neq 0, u \in H^1(I\!R^N) \right\} \tag{4.7}$$

e assumida pelas funções

$$\psi_\epsilon(x) = \left(\frac{\epsilon\sqrt{N(N-2)}}{\epsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}},\ \epsilon > 0. \tag{4.8}$$

Seja $\xi \in C_c^\infty(I\!R^N)$ uma função tal que

$$\xi(x) = \begin{cases} 1,\ \text{em } B_{\frac{1}{2}}(0) \\ 0,\ \text{em } I\!R^N \setminus B_1(0) \\ 0 \leq \xi(x) \leq 1,\ \text{em } I\!R^N. \end{cases} \tag{4.9}$$

Suponha $B_1(0) \subset \Omega$ e defina $\phi_\epsilon(x) = \xi(x)\psi_\epsilon(x)$.

Os lemas que enunciaremos abaixo, são resultados conhecidos na literatura, portanto não iremos demonstrá-los, mas serão utilizados na prova do teorema principal.

Lema 4.2. (ver [6], p.284)

$$\|\nabla \phi_\epsilon\|_2^2 = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}), \tag{4.10}$$

$$\|\phi_\epsilon\|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N), \tag{4.11}$$

$$\|\phi_\epsilon\|_2^2 = \begin{cases} K_1\epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2}),\ \text{se } N \geq 5, \\ K_1\epsilon^2 \left|\log \epsilon^2\right| + O(\epsilon^2),\ \text{se } N = 4, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\|\phi_\epsilon\|_1 \leq K_2 \epsilon^{\frac{N+2}{2}}, \tag{4.13}$$

e

$$\|\phi_\epsilon\|_{2^*-1}^{2^*-1} \leq K_3 \epsilon^{\frac{N-2}{2}}, \tag{4.14}$$

onde $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ e $K_3 > 0$ são constantes.

Denotamos por P_X a projeção ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ sobre X e por P_W a projeção de $H_0^1(\Omega)$ sobre W.

Lema 4.3. (ver[6], p.286)

$$\left| \int_\Omega \left[(P_X \phi_\epsilon)^{2^*} - \phi_\epsilon^{2^*} \right] dx \right| \leq C \epsilon^{N-2}, \tag{4.15}$$

$$\left| \int_\Omega \left(|\nabla \phi_\epsilon|^2 - |\nabla (P_X \phi_\epsilon)|^2 \right) dx \right| \leq C \epsilon^{N-2}, \tag{4.16}$$

$$\|P_X \phi_\epsilon\|_{2^*-1}^{2^*-1} \leq C \epsilon^{\frac{N-2}{2}}, \tag{4.17}$$

$$\|P_X \phi_\epsilon\|_1 \leq C \epsilon^{\frac{N+2}{2}}, \tag{4.18}$$

e

$$\|P_W \phi_\epsilon\|_\infty \leq C \epsilon^{\frac{N-2}{2}}. \tag{4.19}$$

Defina para cada $K > 0$ (fixo), o conjunto

$$\Omega_{\epsilon,K} = \{ x \in \Omega : P_X \phi_\epsilon(x) > K \} .$$

Por (4.8) e (4.19), temos que

$$P_X \phi_\epsilon(0) = \phi_\epsilon(0) - P_W \phi_\epsilon(0) \geq \widetilde{C} \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} - \|P_W \phi_\epsilon\|_\infty \geq \widetilde{C} \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} - C \epsilon^{\frac{N+2}{2}},$$

e consequentemente , $P_X \phi_\epsilon(0) \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$.

Lema 4.4. (ver[6], p.288)

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |P_X \phi_\epsilon|^{2^*} dx = \int_\Omega \phi_\epsilon^{2^*} dx + O(\epsilon^{N-2}), \tag{4.20}$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |P_X\phi_\epsilon|^{2^*-1}\,dx = \int_\Omega \phi_\epsilon^{2^*-1}dx + O(\epsilon^{\frac{N+2}{2}}), \tag{4.21}$$

e

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |P_X\phi_\epsilon|\,dx = \int_\Omega \phi_\epsilon dx + O(\epsilon^N). \tag{4.22}$$

Antes de mostrarmos a geometria do teorema de Enlace, necessitamos dos seguintes lemas técnicos:

Lema 4.5. Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ com $2 \leq p \leq 2^*$. Se $\omega \subset \Omega$ e $u + v > 0$ em ω, então:

$$\left|\int_\omega (u+v)^p\,dx - \int_\omega |u|^p\,dx - \int_\omega |v|^p\,dx\right| \leq C\int_\omega \left(|u|^{p-1}|v| + |u|\,|v|^{p-1}\right)dx,$$

onde C depende somente de p.

Demonstração: Seja $F : [0,1] \to I\!R$, tal que

$$F(t) = \int_\omega (|v+tu|^p - |tu|^p)\,dx.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que $|F(1) - F(0)| = \left|\int_0^1 F'(t)dt\right|$, e como $u + v > 0$ em ω obtemos

$$\text{(a)}\quad \left|\int_\omega ((u+v)^p - |u|^p - |v|^p)\,dx\right| = \left|p\int_0^1\int_\omega \left(|v+tu|^{p-2}(v+tu) - |tu|^{p-2}tu\right)udxdt\right|.$$

Definindo $G(x) := |x|^{p-2}x$ temos pelo Teorema do Valor Médio, que existe $0 < \theta(v) < 1$ tal que $G(v+tu) - G(tu) = \dfrac{\partial G}{\partial v}(tu + \theta(v))$. Logo,

$$\text{(b)}\quad |v+tu|^{p-2}(v+tu) - |tu|^{p-2}tu = (p-1)|tu+v\theta|^{p-2}v.$$

Substituindo (b) em (a), segue que

$$\left|\int_\omega ((u+v)^p - |u|^p - |v|^p)\,dx\right| = p(p-1)\left|\int_0^1\int_\omega |tu+v\theta|^{p-2}uvdxdt\right|.$$

Como $t, \theta \in (0,1)$, então podemos estimar

$$\begin{aligned} |tu+v\theta|^{p-2}uv &\leq (|tu|+|v\theta|)^{p-2}|u|\,|v| \leq \widetilde{C}\left(|tu|^{p-2}+|v\theta|^{p-2}\right)|u|\,|v| \\ &\leq \widetilde{\widetilde{C}}\left(|u|^{p-1}|v| + |v|^{p-1}|u|\right). \end{aligned}$$

Portanto, das informações acima obtemos

$$\left|\int_\omega ((u+v)^p - |u|^p - |v|^p)\, dx\right| \leq C \int_\omega \left(|u|^{p-1}|v| + |v|^{p-1}|u|\right) dx,$$

onde C depende somente de p. ■

Lema 4.6. Sejam A, B, C, α números positivos. Considere a função

$$\Phi_\epsilon(s) = \frac{1}{2}s^2 A - \frac{1}{2^*}s^{2^*}B + s^{2^*}\epsilon^\alpha C;\ s > 0.$$

Então, $s_\epsilon = \left(\dfrac{A}{B - 2^*\epsilon^\alpha C}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é um ponto onde Φ_ϵ atinge seu máximo.

Escrevendo $s_\epsilon = (1+t_\epsilon)s_0$, onde $s_0 = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é o ponto em que Φ_0 atinge seu valor máximo, então $t_\epsilon = O(\epsilon^\alpha)$ e $\Phi_\epsilon(s) \leq \Phi_\epsilon(s_\epsilon) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^\alpha)$.

Demonstração: Temos que $\Phi'_\epsilon(s) = s\left[A + (2^*\epsilon^\alpha C - B)\, s^{2^*-2}\right] = 0$ implica em $s = 0$ ou $s = \left(\dfrac{A}{B - 2^*\epsilon^\alpha C}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$. Utilizando técnicas básicas do cálculo é fácil verificar que $s_\epsilon = \left(\dfrac{A}{B - 2^*\epsilon^\alpha C}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é o ponto em que Φ_ϵ atinge seu máximo. Observa-se que s_ϵ satisfaz $\Phi'_\epsilon(s_\epsilon) = 0$, isto é,

$$s_\epsilon A - s_\epsilon^{2^*-1}B + 2^*C\epsilon^\alpha s_\epsilon^{2^*-1} = 0. \tag{4.23}$$

De (4.23), obtemos $s_\epsilon \geq \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} = s_0$, o que implica $s_\epsilon = (1+t_\epsilon)s_0$. Novamente por (4.23), obtemos

$$\frac{A}{B} - (1+t_\epsilon)^{2^*-2}\frac{A}{B} + 2^*\frac{C}{B}\epsilon^\alpha(1+t_\epsilon)^{2^*-2}\frac{A}{B} = 0.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ sobre a igualdade acima obtemos $\dfrac{A}{B} - (1+t_\epsilon)^{2^*-2}\dfrac{A}{B} \to 0$, o que implica $(1+t_\epsilon)^{2^*-2} \to 1$. Logo, $t_\epsilon \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Como $s_\epsilon = (1+t_\epsilon)s_0$, temos que $s_\epsilon \to s_0$, quando $\epsilon \to 0$. Usando (4.23) e $s_\epsilon = (1+t_\epsilon)s_0$, obtemos

$$\left(\frac{A^{2^*-1}}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\left[(1+t_\epsilon) - (1+t_\epsilon)^{2^*-1}\right] + 2^*C\epsilon^\alpha(1+t_\epsilon)^{2^*-1}s_0^{2*-1} = 0. \tag{4.24}$$

Expandindo t_ϵ obtemos

$$(1+t_\epsilon) - (1+t_\epsilon)^{2^*-1} = -\frac{4}{N-2}t_\epsilon - o(t_\epsilon).$$

Substituindo a igualdade acima em (4.24) obtemos

$$\left(\frac{A^{2^*-1}}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}\left[\frac{4}{N-2}t_\epsilon+o(t_\epsilon)\right]=2^*C\epsilon^\alpha(1+t_\epsilon)^{2^*-1}s_0^{2^*-1}.$$

Assim, $t_\epsilon=k\epsilon^\alpha(1+t_\epsilon)^{2^*-1}-o(t_\epsilon)$ com $k>0$, e portanto, $t_\epsilon=O(\epsilon^\alpha)$.

Escrevendo $s_\epsilon=(1+t_\epsilon)s_0=(1+t_\epsilon)\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N-2}{4}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_\epsilon(s_\epsilon) &= \frac{1}{2}s_\epsilon^2A-\frac{1}{2^*}s_\epsilon^{2^*}B+s_\epsilon^{2^*}\epsilon^\alpha C\\
&= \frac{A}{2}(1+t_\epsilon)^2\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N-2}{2}}-\frac{B}{2^*}(1+t_\epsilon)^{\frac{2N}{N-2}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N}{2}}+\epsilon^\alpha C(1+t_\epsilon)^{\frac{2N}{N-2}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N}{2}}\\
&= \frac{1}{2}(1+t_\epsilon)^2\frac{A^{\frac{N}{2}}}{B^{\frac{N-2}{2}}}-\frac{1}{2}(1+t_\epsilon)^{\frac{2N}{N-2}}\frac{A^{\frac{N}{2}}}{B^{\frac{N-2}{2}}}+\frac{1}{N}(1+t_\epsilon)^{\frac{2N}{N-2}}\frac{A^{\frac{N}{2}}}{B^{\frac{N-2}{2}}}\\
&\quad+\epsilon^\alpha C(1+t_\epsilon)^{\frac{2N}{N-2}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N}{2}}\\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}}+O(\epsilon^\alpha),\ \text{quando } t_\epsilon\to 0.
\end{aligned}$$

■

Agora estamos prontos para mostrar que o funcional I satisfaz a geometria do Teorema de Enlace. A prova será dividida em dois lemas (4.7 e 4.8).

Lema 4.7. Existem $\rho_0>0$ e uma função positiva $\alpha:[0,\rho_0]\to I\!R$, tal que,

$$I(v)\geq\alpha(\rho)\ \text{para todo } v\in S_\rho=\partial B_\rho\cap X.$$

Explicitamente, temos que

$$\rho_0=\left\{S^{\frac{N}{N-2}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\right\}^{\frac{N-2}{4}},$$

$$\alpha(\rho)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2-\frac{1}{2^*}S^{\frac{-N}{N-2}}\rho^{2^*}$$

e o valor máximo de $\alpha(\rho)$

$$\widehat{\alpha}=\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N}{2}}$$

é assumido em

$$\widehat{\rho}=\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N-2}{4}}S^{\frac{N}{4}}.$$

Demonstração: Seja $v\in S_\rho$, logo $\|v\|_{H_0^1}=\rho$ e $v\in X$. Usando o item (ii) da proposição 2.2, a definição da constante ótima de Sobolev e $u_t<0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(v) &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+u_t)_+^{2^*}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega v_+^{2^*}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2 - \frac{1}{2^*}S^{\frac{-N}{N-2}}\rho^{2^*} := \alpha(\rho).
\end{aligned}
$$

Usando $A = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_{k+1}}$, $B = S^{\frac{-N}{N-2}}$ e $C = 0$ nós obtemos pelo lema 4.6, $\widehat{\rho}$ e $\widehat{\alpha}$.

■

Nosso objetivo agora é escolher Q e ρ, tais que, (4.4), (4.5) e (4.6) sejam satisfeitas. Portanto, escolhemos e como uma função de ϵ, de modo que, $e_\epsilon = P_X\phi_\epsilon \in X$.

Lema 4.8. Existem $r_0 > 0$, $R_0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$, tais que, para $r \geq r_0$, $R \geq R_0$ e $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ temos $I\Big|_{\partial Q} < \alpha$, onde $\alpha > 0$ é determinado no lema 4.7.

Demonstração: Denotamos a fronteira de Q por $\partial Q = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_i$, onde

$\Gamma_1 = \overline{B}_r \cap W$,

$\Gamma_2 = \left\{v \in H_0^1(\Omega) : v = w + se_\epsilon,\ w \in W, \|w\|_{H_0^1} = r, 0 \leq s \leq R\right\}$, e

$\Gamma_3 = \{v \in H_0^1(\Omega) : v = w + Re_\epsilon,\ w \in W \cap B_r(0)\}$.

Mostraremos que para cada Γ_i, temos $I\Big|_{\Gamma_i} < \alpha,\ i = 1, 2, 3.$

(1) Seja $v \in \Gamma_1 \subset W$. Utilizando a estimativa (i) da proposição 2.2, e o fato de $\lambda_k < \lambda$, temos que,

$$
\begin{aligned}
I(v) &= \frac{1}{2}\|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+u_t)_+^{2^*}dx \\
&\leq \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda)\|v\|_{L^2}^2 \leq 0 < \alpha.
\end{aligned}
$$

(2) Sobre Γ_2 dividiremos em dois casos.

Defina $\delta^2 = \displaystyle\sup_{0<\epsilon\leq 1}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx.$

Primeiro caso: Se $0 \leq s \leq s_0 := \dfrac{\sqrt{2\widehat{\alpha}}}{\delta}$. Utilizando a proposição 2.5 e a primeira estimativa da proposição 2.2, temos que,

$$
\begin{aligned}
I(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+se_\epsilon)|^2\,dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |w+se_\epsilon|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left(w+se_\epsilon+u_t\right)_+^{2^*}dx\\
&\le \frac{1}{2}\|w\|^2_{H_0^1} + \frac{s^2}{2}\|e_\epsilon\|^2_{H_0^1} - \frac{\lambda}{2}\|w\|^2_{L^2} - \frac{\lambda s^2}{2}\|e_\epsilon\|^2_{L^2}\\
&\le \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|w\|^2_{H_0^1} + \frac{s^2}{2}\|e_\epsilon\|^2_{H_0^1} - \frac{\lambda s^2}{2}\|e_\epsilon\|^2_{L^2}\\
&\le \frac{s^2}{2}\|e_\epsilon\|^2_{H_0^1} \le \frac{s^2\delta^2}{2} \le \widehat{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Segundo caso: Se $s \geq s_0 = \dfrac{\sqrt{2\widehat{\alpha}}}{\delta}$ denotamos

$$
K = \sup\left\{\left\|\frac{w+u_t}{s}\right\|_{L_\infty} : s_0 \le s \le R,\ \|w\|_{H_0^1} = r,\ w \in W\right\}.
$$

Observemos que $K > 0$ independe de R. Como $P_X\phi_\epsilon$ é contínua e como $P_X\phi_\epsilon(0) \to \infty$, quando $\epsilon \to 0$, existe $\epsilon_0' > 0$ tal que, para todo ϵ, $0 < \epsilon < \epsilon_0'$ e $s \geq s_0$, temos que

$$
\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : e_\epsilon(x) > K\} \neq \emptyset.
$$

Portanto, pelo lema 4.5, temos que,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w+u_t}{s}\right)_+^{2^*} dx \ge \int_{\Omega_\epsilon}\left(e_\epsilon + \frac{w+u_t}{s}\right)^{2^*} dx\\
&\ge \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\,dx + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w+u_t}{s}\right|^{2^*} dx\\
&\quad -C\int_{\Omega_\epsilon}\left(|e_\epsilon|^{2^*-1}\left|\frac{w+u_t}{s}\right| + |e_\epsilon|\left|\frac{w+u_t}{s}\right|^{2^*-1}\right) dx\\
&\ge \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\,dx + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w+u_t}{s}\right|^{2^*} dx - C\left(\|e_\epsilon\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Pelos lemas 4.2 e 4.3 temos que

$$
\begin{aligned}
I(v) &\le \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \frac{s^*}{2^*}\int_\Omega\left(e_\epsilon + \frac{w+u_t}{s}\right)_+^{2^*} dx\\
&\le \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}} + \frac{s^2}{2}O(\epsilon^{N-2}) + \frac{s^2}{2}C\epsilon^{N-2} - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega\left(e_\epsilon + \frac{w+u_t}{s}\right)_+^{2^*} dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando a estimativa (4.25) sobre a desigualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
I(v) &\le \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}} + \frac{s^2}{2}O(\epsilon^{N-2}) + \frac{s^2}{2}C\epsilon^{N-2}\\
&\quad -\frac{s^{2^*}}{2^*}\left[\int_{\Omega_\epsilon}|e_\epsilon|^{2^*}\,dx + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w+u_t}{s}\right|^{2^*} dx - C\left(\|e_\epsilon\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Utilizando os lemas 4.2 e 4.4 sobre a desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} I(v) &\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+\frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}}+\frac{s^2}{2}O(\epsilon^{N-2})+\frac{s^2}{2}C\epsilon^{N-2} \\ &\quad -\frac{s^{2^*}}{2^*}\left[S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^N)+O(\epsilon^{N-2})-C\left(k_3\epsilon^{\frac{N-2}{2}}+O(\epsilon^{\frac{N+2}{2}})+k_2\epsilon^{\frac{N+2}{2}}+O(\epsilon^N)\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+\frac{1}{2}s^2S^{\frac{N}{2}}-\frac{s^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}}+Cs^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} \\ &:= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+\Phi_\epsilon(s). \end{aligned}$$

Aplicando o lema 4.6 para $\Phi_\epsilon(s)$, obtemos que

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}). \tag{4.26}$$

Como $\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2 \to -\infty$ quando $r \to \infty$, podemos escolher $r > 0$ suficientemente grande, tal que $I(v) < 0$. Isto determina r_0.

(3) Se $v \in \Gamma_3$, temos que $v = w + Re_\epsilon$ com $w \in W \cap B_r(0)$ e

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|w\|^2_{H_0^1}+\frac{R^2}{2}\|e_\epsilon\|^2_{H_0^1}-\frac{R^{2^*}}{2^*}\int_\Omega\left(e_\epsilon+\frac{w+u_t}{R}\right)_+^{2^*}dx.$$

Pelas limitações de w e u_t, existe $K > 0$ tal que, $\|w+u_t\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$.

Como $e_\epsilon(0) = P_X\phi_\epsilon(0) \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$, então existe $\epsilon_0 > 0$, tal que, $e_\epsilon(0) > 2K$ se $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Pela continuidade de $e_\epsilon = P_X\phi_\epsilon$ existem $R_1 = R_1(\epsilon)$, $\eta = \eta(\epsilon)$, tais que a medida

$$med\left(\left\{x \in \Omega;\ e_\epsilon(x)+\frac{(w+u_t)(x)}{R} > 1\right\}\right) \geq \eta > 0,\ \forall R > R_1.$$

Portanto, achamos $\epsilon_0, R_0 > 0$, tais que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $R > R_0$ temos que $I(v) \leq 0$ para todo $v \in \Gamma_3$. De fato, seja $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$, onde R_2 é tal que, $\alpha R_2^2 - R_2^{2^*} < 0$ com $\alpha = \frac{N}{N-2}\left(\eta^{-1}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx\right)$. Logo, se $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $R > R_0$,

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|w\|^2_{H_0^1}+\frac{R^2}{2}\int_\Omega|\nabla e_\epsilon|^2\,dx-\frac{R^*}{2^*}\int_D\left(e_\epsilon+\frac{w+u_t}{R}\right)_+^{2^*}dx,$$

onde $D = \left\{x \in \Omega;\ e_\epsilon(x)+\frac{(w+u_t)(x)}{R} > 1\right\}$ é tal que $medD \geq \eta > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} I(v) &\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|w\|^2_{H_0^1}+\frac{R^2}{2}\int_\Omega|\nabla e_\epsilon|^2\,dx-\frac{R^{2^*}}{2^*}\int_D 1dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|w\|^2_{H_0^1}+\frac{R^2}{2}\int_\Omega|\nabla e_\epsilon|^2\,dx-\frac{R^{2^*}}{2^*}\eta \leq 0. \end{aligned}$$

■

Lema 4.9. Suponha que a dimensão $N > 6$ e $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, então

$$\max_{\overline{Q}} I < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \tag{4.27}$$

Demonstração: Dividimos a prova deste lema em dois casos:

Primeiro caso: Se $0 < s \leq s_0 = \dfrac{\sqrt{2\widehat{\alpha}}}{\delta}$.

Seja $\epsilon < \epsilon_0$ fixo, de modo que, a geometria do teorema de Enlace ocorra e seja $w + se_\epsilon \in Q$. Usando a estimativa (i) da proposição 2.2, obtemos:

$$\begin{aligned} I(w + se_\epsilon) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 - \lambda w^2\right) dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla e_\epsilon|^2 - \lambda e_\epsilon^2\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w + se_\epsilon + u_t)_+^{2^*} dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \|w\|_{H_0^1}^2 + \frac{s^2}{2} \|e_\epsilon\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{s^2}{2} \|e_\epsilon\|_{H_0^1}^2 . \end{aligned}$$

Com as mesmas notações e argumentos utilizados na prova do lema 4.8, temos que

$$I(w + se_\epsilon) < \frac{s^2}{2} \|e_\epsilon\|_{H_0^1}^2 \leq \frac{s^2\delta^2}{2} \leq \widehat{\alpha} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N}{2}} < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Segundo caso: Se $s \geq s_0 = \dfrac{\sqrt{2\widehat{\alpha}}}{\delta}$.

Usando (4.25) e o lema 4.3, temos que

$$\begin{aligned} I(w + se_\epsilon) &\leq \frac{1}{2}s^2 \int_\Omega \left(|\nabla e_\epsilon|^2 - \lambda |e_\epsilon|^2\right) dx - \frac{1}{2^*} s^{2^*} \int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w + u_t}{s}\right)_+^{2^*} dx \\ &\leq \frac{1}{2}s^2 \int_\Omega \left(|\nabla e_\epsilon|^2 - \lambda |e_\epsilon|^2\right) dx - \frac{1}{2^*} s^{2^*} \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} dx \\ &\quad + C\frac{1}{2^*} s^{2^*} \left(\|e_\epsilon\|_{L^{2^*-1}_{(\Omega_\epsilon)}}^{L^{2^*-1}} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)} \right) \\ &\leq \frac{1}{2}s^2 \int_\Omega \left(|\nabla e_\epsilon|^2 - \lambda |e_\epsilon|^2\right) dx - \frac{1}{2^*} s^{2^*} \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} dx + C s^{2^*} \epsilon^{\frac{N-2}{2}} := \Phi_\epsilon(s). \end{aligned}$$

Aplicando o lema 4.6 à Φ_ϵ, temos que

$$I(w+se_\epsilon) \leq \Phi_\epsilon(s) \leq \Phi_\epsilon(s_\epsilon) = \frac{1}{N}\left[\int_\Omega \left(|\nabla e_\epsilon|^2 - \lambda |e_\epsilon|^2\right) dx\right]^{\frac{N}{2}} \left(\int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} dx\right)^{-\frac{(N-2)}{2}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Usando as estimativas dos lemas 4.2, 4.3 e 4.4 sobre e_ϵ, obtemos

$$I(w + se_\epsilon) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - \frac{1}{2}\lambda O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $\dfrac{N-2}{2} > 2$, para ϵ suficientemente pequeno, temos que

$$-\frac{1}{2}\lambda O(\epsilon^2) + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) < 0.$$

Assim, $I(w+se_\epsilon) < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ para todo $w+se_\epsilon \in Q$. Portanto, $\max\limits_{\overline{Q}} < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. ∎

Voltemos agora para a demonstração do teorema 4.1, isto é, iremos provar a existência de uma segunda solução não nula para o problema (4.2). Observamos que os lemas 4.7 e 4.8 satisfazem a geometria do funcional I exigido pelo Teorema de Enlace sem a condição (P.S.) (Ver apêndice, Teorema C.8). Portanto, existe uma sequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, tal que,

$$I(v_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \lambda |v_n|^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*} dx = c + o(1) \tag{4.28}$$

e

$$< I'(v_n), \phi >= \int_\Omega (\nabla v_n \nabla \phi - \lambda v_n \phi)\, dx - \int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*-1} \phi dx = o(1)\, \|\phi\|_{H_0^1} \tag{4.29}$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega)$, onde c é o nível minimax do Teorema de Enlace com $e_\epsilon = P_X\phi_\epsilon$ e $\epsilon < \epsilon_0$ suficientemente pequeno, de modo que garanta a validade dos lemas 4.8 e 4.9, e do conjunto Q.

Primeiro, mostraremos através do lema 4.10, que a sequência (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Lema 4.10. Suponhamos $N > 6$, $\lambda < \lambda_{k+1}$ e (v_n) uma sequência $(P.S.)_c$, então (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Fazendo $I(v_n) - \dfrac{1}{2} < I'(v_n), v_n >$, obtemos

$$-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*-1} v_n dx \le c + \varepsilon_n \|v_n\|_{H_0^1} + o(1), \tag{4.30}$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, de maneira análoga ao que fizemos em (3.13), obtemos:

$$\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*-1} v_n dx = \int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*} dx - \int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*-1} u_t dx. \tag{4.31}$$

Substituindo (4.31) em (4.30), encontramos

$$\frac{1}{N}\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*} dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*-1} u_t dx \le c + \varepsilon_n \|v_n\|_{H_0^1} + o(1).$$

Como $u_t < 0$, obtemos da desigualdade acima que

$$\left(\int_\Omega (v_n+u_t)_+^{2^*} dx\right)^{\frac{N+2}{N}} \le k + \varepsilon_n \|v_n\|_{H_0^1}^{\frac{N+2}{N}}. \tag{4.32}$$

Escrevendo $v_n = x_n + w_n$ com $x_n \in X$ e $w_n \in W$, por (4.29) temos que

$$\int_\Omega \left[(\nabla x_n + \nabla w_n)\nabla x_n - \lambda(x_n + w_n)x_n\right] dx = \int_\Omega (v_n + u_t)_+^{2^*-1} x_n dx + o(1)\, \|x_n\|_{H_0^1}. \tag{4.33}$$

Utilizando a proposição 2.5 e a estimativa (ii) da proposição 2.2 em (4.33), obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|x_n\|_{H_0^1}^2 &\le \int_\Omega \left(|\nabla x_n|^2 - \lambda\, |x_n|^2\right) dx \\ &= \int_\Omega (v_n + u_t)_+^{2^*-1} x_n dx + \varepsilon_n \|x_n\|_{H_0^1}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Aplicando as desigualdades de Holder e Young com ε em (4.34) e utilizando (4.32), obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) \|x_n\|_{H_0^1}^2 &\le \left(\int_\Omega (v_n + u_t)_+^{2^*} dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_\Omega |x_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} + \varepsilon_n \|x_n\|_{H_0^1} \\ &\le \varepsilon \left(\int_\Omega |x_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} + C_\varepsilon \left(\int_\Omega (v_n + u_t)_+^{2^*} dx\right)^{\frac{N+2}{N}} + \varepsilon_n \|x_n\|_{H_0^1} \\ &\le \varepsilon \left(\int_\Omega |x_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} + C_\varepsilon + \varepsilon_n \left(\|v_n\|_{H_0^1}^{\frac{N+2}{N}} + \|x_n\|_{H_0^1}\right). \end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (ver apêndice, Teorema C.5), então $\|x_n\|_{L^{2^*}}^2 \le M \|x_n\|_{H_0^1}^2$. Portanto, reescrevemos a desigualdade acima da seguinte forma,

$$\left[\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) - M\varepsilon\right] \|x_n\|_{H_0^1}^2 \le C_\varepsilon + \varepsilon_n \left(\|v_n\|_{H_0^1}^{\frac{N+2}{N}} + \|x_n\|_{H_0^1}\right). \tag{4.35}$$

Fixando $\varepsilon > 0$, tal que, $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right) - M\varepsilon > 0$, temos por (4.35) que,

$$\|x_n\|_{H_0^1}^2 \le C + \varepsilon_n \left(\|v_n\|_{H_0^1}^{\frac{N+2}{N}} + \|x_n\|_{H_0^1}\right). \tag{4.36}$$

Usando um argumento análogo para $w_n \in W$, obtemos

$$\|w_n\|_{H_0^1}^2 \le C + \varepsilon_n \left(\|v_n\|_{H_0^1}^{\frac{N+2}{N}} + \|w_n\|_{H_0^1}\right). \tag{4.37}$$

Somando (4.36) e (4.37), obtemos:

$$\|x_n\|_{H_0^1}^2 + \|w_n\|_{H_0^1}^2 \le 2\widetilde{C} + 2\widetilde{C}\, \|v_n\|_{H_0^1}^{\frac{N+2}{N}} + \widetilde{C}\left(\|x_n\|_{H_0^1} + \|w_n\|_{H_0^1}\right) \tag{4.38}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left(\|x_n\|_{H_0^1}+\|w_n\|_{H_0^1}\right)^2 &\leq 2\left(\|x_n\|_{H_0^1}^2+\|w_n\|_{H_0^1}^2\right)\\
&\leq \widetilde{\widetilde{C}}+\widetilde{\widetilde{C}}\left(\|x_n\|_{H_0^1}+\|w_n\|_{H_0^1}\right)^{\frac{N+2}{N}}+\widetilde{\widetilde{C}}\left(\|x_n\|_{H_0^1}+\|w_n\|_{H_0^1}\right).
\end{aligned}
$$

Como $N>6$ implica $\dfrac{N+2}{N}<2$, temos que a sequência $(\alpha_n):=\|x_n\|_{H_0^1}+\|w_n\|_{H_0^1}$ é limitada. Como, $\|v_n\|_{H_0^1}=\|x_n+w_n\|_{H_0^1}\leq\|x_n\|_{H_0^1}+\|w_n\|_{H_0^1}$, temos que a sequência (v_n) é limitada em H_0^1.

■

Como (v_n) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, temos que:

$$
\begin{aligned}
&v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega),\\
&v_n \to v \text{ em } L^q(\Omega),\ 2\leq q<2^*, \\
&v_n \to v \text{ q.t.p em } \Omega.
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

Pelas convergências em (4.39) e por $I'(v_n)\to 0$ no dual de $H_0^1(\Omega)$, segue que v satisfaz a equação

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi dx-\lambda\int_\Omega v\varphi dx-\int_\Omega (v+u_t)_+^{2^*-1}\varphi dx=0,\forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

e portanto, v é uma solução fraca para o problema (4.2). Tomando $\varphi=v\in H_0^1(\Omega)$, temos:

$$\int_\Omega\left(|\nabla v|^2-\lambda|v|^2\right)dx-\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*-1}vdx=0. \tag{4.40}$$

De maneira semelhante ao que foi feito em (4.13), temos que

$$\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*-1}vdx=\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*}dx-\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*-1}u_tdx. \tag{4.41}$$

Substituindo (4.41) em (4.40), obtemos que

$$\int_\Omega\left(|\nabla v|^2-\lambda|v|^2\right)dx-\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*}dx+\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*-1}u_tdx=0. \tag{4.42}$$

Lema 4.11. A solução v obtida como o limite fraco da sequência (P.S.) é não nula.

Demonstração: Pelo lema de Brézis-Lieb (Ver apêndice, Lema C.9), temos que

$$\int_\Omega(v_n+u_t)_+^{2^*}dx=\int_\Omega(v_n-v)_+^{2^*}dx+\int_\Omega(v+u_t)_+^{2^*}dx+o(1). \tag{4.43}$$

Primeiro mostraremos que

$$I(v_n) = I(v) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}\, dx + o(1). \tag{4.44}$$

De fato, usando (4.28) e (4.43), temos que

$$\begin{aligned} I(v_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \lambda\, |v_n|^2\right) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v + u_t)_+^{2^*}\, dx + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \lambda\, |v_n|^2\right) dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 - \lambda\, |v|^2\right) dx + I(v) \\ &\quad - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}\, dx + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - |\nabla v|^2\right) dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \left(|v_n|^2 - |v|^2\right) dx + I(v) \\ &\quad - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}\, dx + o(1). \end{aligned}$$

Como $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$, então $\displaystyle\int_\Omega \left(|v_n|^2 - |v|^2\right) dx \to 0$. Logo, pela igualdade acima, temos que

$$I(v_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - |\nabla v|^2\right) dx + I(v) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}\, dx + o(1) \tag{4.45}$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla v_n|^2\, dx - 2\int_\Omega \nabla v_n \nabla v dx + \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx.$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, então $\displaystyle\int_\Omega \nabla v_n \nabla v dx \to \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx$. Logo, pela igualdade acima, temos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - |\nabla v|^2\right) dx = \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2\, dx + o(1). \tag{4.46}$$

Portanto, de (4.45) e (4.46) obtemos (4.44).

De modo análogo, obtemos:

$$< I'(v_n), v_n >= \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2\, dx - \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}\, dx - \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*-1}\, u_t dx + o(1). \tag{4.47}$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*-1}\, u_t dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{4.48}$$

De fato, como $N > 6$, então $2^* - 1 = \dfrac{N+2}{N-2} < 2$. Logo, pelo teorema C.4, temos que $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*-1}(\Omega)$. Como u_t é limitada e $L^2 \hookrightarrow L^{2^*-1}$, então

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*-1} u_t dx \right| &\leq \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*-1} |u_t| \, dx \leq M \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*-1} dx \\ &\leq \widetilde{M} \left\| (v_n - v)_+ \right\|_{L^2}^{2^*-1} \to 0 \text{ pois } v_n \to v \text{ em } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

e portanto, (4.48) é satisfeito. Agora, usando (4.47) e (4.48) mais o fato de $I'(v_n) \to 0$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 \, dx = \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} \, dx + o(1). \tag{4.49}$$

Observemos que $\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} \, dx$ é limitado, pois $v_n - v \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ (ver apêndice, Teorema C.5), e portanto, como (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ temos que $\|v_n - v\|_{L^{2^*}} \leq d \|v_n - v\|_{H_0^1} \leq \widetilde{d}$. Assim por (4.49), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla(u_n)|^2 \, dx = k \geq 0, \tag{4.50}$$

onde $u_n := v_n - v$.

Se $k = 0$, então $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, e por (4.44) e (4.49) temos que $0 < \alpha \leq c = I(v)$, o que implica que v é não nulo, pois $I(0) = 0$.

Se $k > 0$, usando a definição da constante ótima de Sobolev definida em (4.7) e a equação (4.49), temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H_0^1}^2 &\geq S \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \geq S \left(\int_\Omega (u_n)_+^{2^*} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= S \left[\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx + o(1) \right]^{\frac{2}{2^*}}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (4.51), temos por (4.50) que, $k \geq S k^{\frac{N-2}{N}}$. Como $k > 0$, então

$$k \geq S^{\frac{N}{2}}. \tag{4.52}$$

Suponhamos por absurdo $v \equiv 0$. Então por (4.44) e (4.49), temos que

$$I(v_n) = \frac{1}{N} \int_\Omega (v_n)_+^{2^*} \, dx + o(1). \tag{4.53}$$

Por outro lado, como $v = 0$, por (4.49) e (4.50) temos que, $\int_\Omega (v_n)_+^{2^*} dx \to k$ quando $n \to \infty$. Como $I(v_n) \to c$, então por (4.52) e (4.53), temos que

$$c = \frac{k}{N} \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}, \tag{4.54}$$

o que é um absurdo, pois contraria o lema 4.9. Portanto v é uma solução fraca não nula para o problema (4.2). ■

Analogamente, como fizemos no capítulo anterior, a solução v não pode ser negativa, e portanto v e $v + u_t$ são duas soluções fracas e distintas para o problema (4.1).

Observação 4.12. Observe que a condição $(P.S.)_c$ é satisfeita pelo funcional I para todo $c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$. De fato, pelas equações (4.44) e (4.39) temos que

$$I(v_n) = I(v) + \frac{1}{N} \|v_n - v\|_{H_0^1}^2 + o(1).$$

Assim, utilizando (4.28) e $I(v) \geq \alpha > 0$, obtemos

$$\frac{1}{N} \|v_n - v\|_{H_0^1}^2 = I(v_n) - I(v) + o(1) \leq I(v_n) + o(1) = c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Portanto,

$$S^{\frac{-N}{N-2}} \|v_n - v\|_{H_0^1}^{2^*-2} < 1. \tag{4.55}$$

Por outro lado, por (4.49) e (4.55), e pela definição da constante ótima de Sobolev temos:

$$\begin{aligned} \|v_n - v\|_{H_0^1}^2 \left(1 - S^{\frac{-N}{N-2}} \|v_n - v\|_{H_0^1}^{2^*-2}\right) &= \|v_n - v\|_{H_0^1}^2 - S^{\frac{-N}{N-2}} \|v_n - v\|_{H_0^1}^{2^*} \\ &\leq \|v_n - v\|_{H_0^1}^2 - \int_\Omega |v_n - v|^{2^*} dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 dx - \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} dx = o(1), \end{aligned}$$

o que implica em $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to \infty$.

Referências Bibliográficas

[1] RUF, B.; SRIKANTH, P. N. *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum.* J. Math. Anal. Appl. no. 1, p. 15-23.(1986).

[2] DE FIGUEIREDO, D. G.; JIANFU, Y. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems.* Topol. Methods Nonlinear Anal. no. 1, p. 59-80.(1999).

[3] BRÉZIS, H.; NIRENBERG, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. no. 4, p. 437-477.(1983).

[4] MAWHIN, J.; WILLEM, M. *Critical point theory and Hamiltonian systems.* Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag.(1989).

[5] DE FIGUEIREDO, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Berlin: Springer-Verlag. (1989).

[6] CHABROWSKI, J.; JIANFU, Y. *Existence theorems for the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent.* Z. Angew. Math. Phys. no. 2, P. 276-293.(1998).

[7] BRÉZIS, H.; LIEB, E. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc. no. 3, P. 486-490.(1983).

[8] MITROVIC´, D.; UBRINIC´, D. *Fundamentals of applied functional analysis.* Distributions-Sobolev spaces-nonlinear elliptic equations. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.(1998).

[9] EVANS, D. J. *Group explicit methods for the numerical solution of partial differential equations.* Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers.(1997).

[10] DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis.* Berlin: Springer-Verlag.(1985).

[11] BERGER, M. S.; PODOLAK, E. *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem.* Indiana Univ. Math. J. no. 24, p. 837-846.(1974/75).

[12] ALVES, C. O.; DE MORAIS, F. D. C.; SOUTO, M. A. S. *On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents.* Nonlinear Anal. no. 5, p. 771-787.(2000).

[13] AMBROSETTI, A.; PRODI, G. *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces.* Ann. Mat. Pura Appl. p. 231-246.(1972).

[14] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P. H. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis. p. 349-381.(1973).

[15] DE MORAIS, F. D. C.; PEREIRA, F. R. *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations.* Nonlinear Anal. no. 1, p. 194-207.(2008).

[16] CHANG, K. C. *Ambrosetti-Prodi type results in elliptic systems.* Nonlinear Anal. no. 4, p. 553-566.(2002).

[17] DE MORAIS, F. D. C.; CORDEIRO, D. *A variational approach to an Ambrosetti-Prodi type problem for a system of elliptic equations.* Nonlinear Anal. no. 10, p. 1655-1668.(1996).

[18] PEREIRA, F. R. *Multiple solutions for a class of Ambrosetti-Prodi type problems for systems involving critical Sobolev exponents.* Communications on Pure and Applied Analysis. no. 7, p. 355-372.(2008).

[19] WILLEM, M. M*inimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Aplications.* Boston: Birkaüser Boston.(1996).

Apêndice A

Resultados sobre a Teoria do Grau

Neste apêndice iremos mencionar e enunciar os principais resultados sobre o grau topológico de Brouwer num espaço de dimensão finita e o grau topológico de Leray & Schauder.

Teorema A.1. (Teorema de Sard) Seja A um aberto do $\mathbb{R}^N$, f uma função de classe $\mathcal{C}^1(\mathrm{A}, \mathbb{R}^N)$ e $\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{A}; J_f(x) = 0\}$. Então $f(\mathrm{S})$ tem medida nula.

Definição A.2 (Definição para o caso regular)**.**

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado e $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções k- vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$.

Para o espaço $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ iremos considerar a seguinte norma:

$$\|\varphi\|_k = \max_{0\leq j\leq k} \sup_{x\in\Omega} \left\|D^{(j)}\varphi(x)\right\|$$

Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $\mathrm{S} = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$, onde $J_\varphi(x) = \det \varphi'(x)$ representa o Jacobiano de φ no ponto x, e x será chamado ponto crítico de φ se $J_\varphi(x) = 0$. Além disso, diremos que $y \in \mathbb{R}^N$ é um valor regular para φ se $f^{-1}(y) \cap \mathrm{S} = \emptyset$ e um valor singular caso contrário.

Seja $b \in \mathbb{R}^N$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S})$. Se $x \in \varphi^{-1}(b)$ temos que $J_\varphi(x) \neq 0$, então pelo Teorema da Aplicação Inversa φ é um difeomorfismo de uma vizinhança U de x sobre uma vizinhança V de b, ou seja, $\varphi_{|\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \varphi(\mathrm{U}) = \mathrm{V}$ é um difeomorfismo.

Definição A.3. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S})$. Definimos o grau topológico da aplicação φ em relação a Ω no ponto b como sendo o número inteiro:

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x\in\varphi^{-1}(\{b\})} sgn(J_\varphi(x))$$

onde a função sgn é a função sinal definida por:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0 \\ -1, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Teorema A.4. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S})$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe um $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Lema A.5. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S})$. Então existe uma vizinhança U de φ pela topologia de $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ tal que $\forall\ \psi \in$ U temos que:

1. $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

2. Se $x \in \psi^{-1}(b)$, então $J_\psi(x) \neq 0$.

3. $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Lema A.6. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e b_1, b_2 pontos de $I\!R^N \setminus (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S}))$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $I\!R^N \setminus (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S}))$, temos que

$$d\left(\varphi, \Omega, b_1\right) = d\left(\varphi, \Omega, b_2\right).$$

Lema A.7. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e b_1, b_2 pontos de $I\!R^N \setminus (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S}))$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $I\!R^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, temos que

$$d\left(\varphi, \Omega, b_1\right) = d\left(\varphi, \Omega, b_2\right).$$

Definição A.8. Sejam $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e b um ponto pertencente a $I\!R^N$ tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $b \in \varphi(\mathrm{S})$. Considere C_b a componente conexa de $I\!R^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ que contém b. Como C_b é um aberto não vazio de $I\!R^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ e $\varphi(\mathrm{S})$ tem medida nula (pelo Teorema de Sard), então C_b contém pontos que não estão em $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(\mathrm{S})$. Portanto, definimos o grau de Brouwer de φ em Ω no ponto b, sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x)\ \forall\ x \in C_b; x \notin \varphi(\mathrm{S}).$$

Lema A.9. Para $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ existe uma vizinhança U de φ na topologia $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ tal que, para toda $\psi \in$ U temos:

1. $b \notin \psi(\partial\Omega)$,

2. $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Lema A.10. (Invariância por Homotopia de Classe C^2)

Seja H(x,t) $\in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [0,1], I\!R^N)$, com $b \notin$ H$(\partial\Omega \times [0,1])$. Então,

$$d(\mathrm{H}(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0,1].$$

Definição A.11. (O grau de uma função contínua)

Definimos O Grau Topológico de Brouwer para $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, I\!R^N)$, com b $\notin (\partial\Omega)$, como sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \forall \psi \in \mathrm{U}$$

onde,

$$\mathrm{U} = \left\{ \psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, I\!R^N); \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2} \right\}$$

e

$$r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} = \inf\{\|b - \varphi(x)\|; x \in \partial\Omega\} > 0.$$

A.12. Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

(P1) Continuidade

Sejam $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e b $\notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinha V de φ na topologia $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, I\!R^N)$, tal que para toda $\psi \in$ V temos que:

1. b $\notin \psi(\partial\Omega)$,

2. $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

(P2) Invariância do Grau por Homotopia

Sejam H $\in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,1], I\!R^N)$ e b $\notin$ H$(\partial\Omega \times [0,1])$. Então,

$$d(\mathrm{H}(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0,1].$$

(P3) O Grau é Constante em Componentes Conexas de $I\!R^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $I\!R^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

(P4) Aditividade

Seja $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ com Ω_1, Ω_2 limitados e abertos de $I\!R^N$. Se b $\notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ temos que

$$d\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

A.13. Consequências das Propriedades Principais do Grau de Brouwer

(C1) Normalização

Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $I\!R^N$, isto é, $I(x) = x$, então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(C2) Existência de Solução

Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

(C3) Excisão

Sejam $K \subset \Omega$ um fechado de $I\!R^N$ e b $\notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$. Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

(C4) Dependência da Fronteira

Suponha que $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$ e que $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, I\!R^N)$. Então para todo b $\notin \varphi(\partial\Omega)$ tem-se $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

A.14. O Grau Topológico de Brouwer num Espaço de Dimensão Finita

Sejam V um espaço de dimensão finita, $\Omega \subset V$ limitado e aberto de V, $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, V)$ e b um ponto de V tal que b $\notin \varphi(\partial\Omega)$. Então o Grau Topológico de Brouwer sobre o espaço V pode ser definido de maneira análoga ao definido sobre o R^N.

A.15. O Grau Topológico de Leray & Schauder

No que se segue, iremos denotar por E um espaço de Banach real, e $\Omega \subset E$ um subconjunto limitado e aberto de E. Seja $T \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, E)$ uma aplicação tal que $T(\overline{\Omega})$ está contido em um subespaço de dimensão finita de E. A aplicação $\Phi = I - T$ é chamada de Perturbação de Dimensão Finita da Identidade.

Definição A.16. (O Grau de uma Perturbação de Dimensão Finita da Identidade)

Seja $b \in E$ com $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Se F é um subespaço de dimensão finita de E que contém $T(\overline{\Omega})$ e b, então definimos o Grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω aplicado no ponto b como

$$D(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Observação A.17. A definição acima independe da escolha do espaço de dimensão finita que contém $T(\overline{\Omega})$ e o ponto b, isto é, se F_1, F_2 são subespaços de dimensão finita que contém $T(\overline{\Omega}) \cap \{b\}$ então

$$d(\Phi|_{\overline{\Omega}\cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega}\cap F_2}, \Omega \cap F_2, b).$$

Definição A.18. Diremos que uma aplicação $T : \overline{\Omega} \to E$ é compacta se T é contínua e se $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é um conjunto compacto de E. No que segue-se denotaremos por $Q(\overline{\Omega}, E)$ como o espaço de Banach dos operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to E$ munido da norma da convergência uniforme, isto é,

$$\|T\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x)\|\,, \text{onde } \|\cdot\| \text{ é uma norma em E.}$$

Definição A.19. (O Grau de uma Perturbação Compacta da Identidade)

Seja Φ uma Pertubação Compacta da Identidade, isto é, $\Phi = I - T$ onde $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Se $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, então definimos o grau de Leray & Schauder de Φ com relação a Ω aplicado em b, como sendo

$$D(\Phi, \Omega, b) = D(\Phi_r, \Omega, b),$$

onde Φ_r é uma perturbação de dimensão finita da identidade satisfazendo

$$\|\Phi_r(x) - \Phi(x)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

e

$$r = \rho\,\{b, \Phi(\partial\Omega)\} = \inf\{\|b - \Phi(x)\|\,; x \in \partial\Omega\} > 0.$$

Observação A.20. A definição acima independe da escolha do Φ_r, isto é, se Φ_1 e Φ_2 são perturbações de dimensão finita da identidade satisfazendo

$$\|\Phi_i(x) - \Phi(x)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}, i = 1, 2$$

então

$$D(\Phi_1, \Omega, b) = D(\Phi_2, \Omega, b).$$

A.21. Propriedades Fundamentais do Grau de Leray & Schauder

(P1) Continuidade com relação ao operador T

Seja $\Phi = I - T$ com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Se $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ então existe uma vizinhança U de T em $Q(\overline{\Omega}, E)$, tal que $\forall S \in$ U temos que

1. $b \notin (I - S)(\partial\Omega)$,

2. $D(I - S, \Omega, b) = D(\Phi, \Omega, b)$.

(P2) Invariância do Grau por Homotopia

Seja H uma aplicação tal que $H \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$, definida por $H(x,t) = x - S(x,t)$, onde $S \in Q(\overline{\Omega} \times [0,1], E)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ então

$$D(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante em } [0,1].$$

(P3) O Grau é Constante em Componentes Conexas de $E \setminus \Phi(\partial\Omega)$

Seja $\Phi = I - T$ com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $E \setminus \Phi(\partial\Omega)$, então

$$D(\Phi, \Omega, b_1) = D(\Phi, \Omega, b_2).$$

(P4) Aditividade

Sejam $\Phi = I - T$ com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$, e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ onde Ω_1, Ω_2 são limitados, disjuntos e abertos em E. Se $b \notin \Phi(\partial\Omega_1) \cup \Phi(\partial\Omega_2)$, então

$$D(\Phi, \Omega, b) = D(\Phi, \Omega_1, b) + D(\Phi, \Omega_2, b).$$

A.22. Consequências das Propriedades Fundamentais do Grau de Leray & Schauder

(C1) Normalização

Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em E, isto é, $I(x) = x$, então

$$D(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(C2) Existência de Solução

Sejam $\Phi = I - T$ com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$ e $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Se $D(\Phi, \Omega, b) \neq 0$, então existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $\Phi(x_0) = b$.

(C3) Excisão

Sejam $K \subset \Omega$ um fechado de E e b $\notin \varphi(K) \cup \Phi(\partial\Omega)$. Então,

$$D(\Phi, \Omega, b) = D(\Phi, \Omega \setminus K, b).$$

(C4) Dependência da Fronteira

Sejam $\Phi = I - T$ e $\Psi = I - S$, com $T, S \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Se $\Psi = \Phi$ em $\partial\Omega$ e $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ então,

$$D(\Phi, \Omega, b) = D(\Psi, \Omega, b).$$

Apêndice B

Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz e o Teorema de Enlace

Neste apêndice iremos demonstrar o Teorema do passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz e o Teorema de Enlace.

Definição B.1. Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$. Dizemos que $c \in I\!R$ é um valor crítico de Φ se existe $u \in X$ com $\Phi'(u) = 0$ e $\Phi(u) = c$.

Denotaremos por Φ^c o conjunto de todos os pontos em níveis menores ou iguais a c, isto é,

$$\Phi^c = \{u \in X; \Phi(u) \leq c\}.$$

Definição B.2. (Condição Palais-Smale-(PS))

Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$. O funcional Φ satisfaz a condição (PS) se qualquer sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$|\Phi(u_n)| \leq \text{constante e } \Phi'(u_n) \to 0 \text{ em } X'$$

possui uma subsequência convergente.

Lema B.3. (Lema de Deformação)

Suponha que $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$ satisfaz a condição Palais-Smale. Se $c \in I\!R$ não é um valor crítico de Φ então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$ tal que para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$ tem-se:

1. $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \Phi^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;

2. $\eta(1, \Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Observação B.4. O Lema de Deformação garante que, para funcionais satisfazendo (PS), se c não é um valor crítico de um funcional, para ϵ suficientemente pequeno, o conjunto $\Phi^{c+\epsilon}$ pode ser deformado continuamente, através do nível c para dentro do nível $\Phi^{c-\epsilon}$. Assim, conjuntos de nível suficientemente próximos do conjunto de nível correspondente a c podem ser deformados continuamente através do conjunto correspondente a c até ficarem completamente abaixo do nível c.

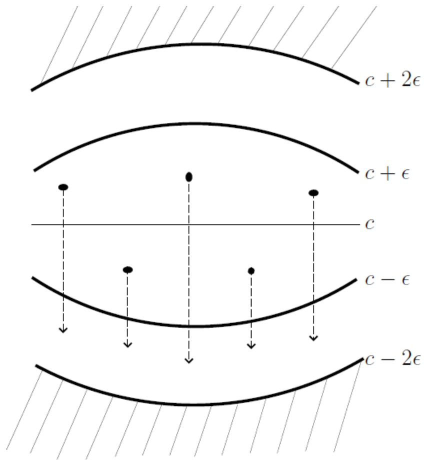

Figura B.1: Lema de Deformação

Teorema B.5. (Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz)

Sejam X um espaço de Banach real e $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$ satisfazendo a condição Palais-Smale. Suponha que $\Phi(0) = 0$ e que

1. existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$, e

2. existe um $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $\Phi(e) < 0$.

Então, Φ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} \Phi(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in \mathcal{C}([0,1]\ X);\ g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e\}$.

Demonstração: Observe que podemos reescrever $\inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{u\in g([0,1])} \Phi(u)$ como

$$\inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)). \tag{B.1}$$

Primeiro vamos mostrar que B.1 está bem definido. Para isto iremos provar as seguintes afirmações:

Afirmação B.6. Para cada $g \in \Gamma$ existe $\max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t))$.

De fato, para cada $g \in \Gamma$ temos que $\Phi \circ g \in \mathcal{C}([0,1], I\!R)$ pois $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!R)$ e $g \in \mathcal{C}([0,1], X)$. Como $\Phi \circ g$ é uma aplicação contínua no compacto $[0,1]$, então $\Phi \circ g$ possui máximo em $[0,1]$.

Afirmação B.7. $\max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) > \alpha$ para toda $g \in \Gamma$.

De fato, dado $g \in \Gamma$ definamos $h : [0,1] \to I\!R$, tal que $h(t) = \|g(t)\|$. Além disso, sendo $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ temos

$$h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho$$

e,

$$h(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho.$$

Como $h \in C([0,1), I\!R)$ e $h(0) < \rho < h(1)$ então pelo Teorema do Valor Intermediário existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|g(t_0)\| = \rho$, ou seja, $g(t_0) \in \partial B_\rho$. Segue da hipótese 1 do teorema que $\Phi(g(t_0)) > \alpha$, portanto $\max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) > \alpha$ para toda $g \in \Gamma$.

Observe que o conjunto $H = \left\{ \max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)); g \in \Gamma \right\}$ é limitado inferiormente por α, portanto B.1 está bem definido. Denotando $c = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t))$, segue da definição de ínfimo que $c \geq \alpha$.

Agora só falta mostrar que c é uma valor crítico para Φ. Suponha por absurdo que c não seja um valor crítico de Φ. Então, pelo lema de deformação dado $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, existe $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$ tal que:

(i) $\eta(t,u) = u$, se $u \notin \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$,

(ii) $\eta(1, \Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Como $c = \inf H$, então existe uma $g \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) < c + \epsilon$. Portanto, $g(t) \in \Phi^{c+\epsilon}$ $\forall t \in [0,1]$.

Defina a aplicação contínua $h^*(t) = \eta(1, g(t))$. Pela hipótese 2, e pela escolha de ϵ, temos que $\Phi(e)$ e $\Phi(0)$ não pertencem a $[c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, ou seja, e e 0 não pertencem a $\Phi^{-1}[c-2\epsilon, c+2\epsilon]$. Logo, por (i) temos que $h^*(0) = 0$ e $h^*(1) = e$, portanto $h^* \in \Gamma$.

Por (ii), temos $h^*(t) = \eta(1, g(t)) \in \Phi^{c-\epsilon}$ $\forall t \in [0,1]$, isto é, $\max\limits_{[0,1]} \Phi(h^*(t)) \leq c - \epsilon$. Sendo $c = \inf H$, então $c \leq c - \epsilon$, o que é um absurdo. Portanto c é um valor crítico para Φ. ∎

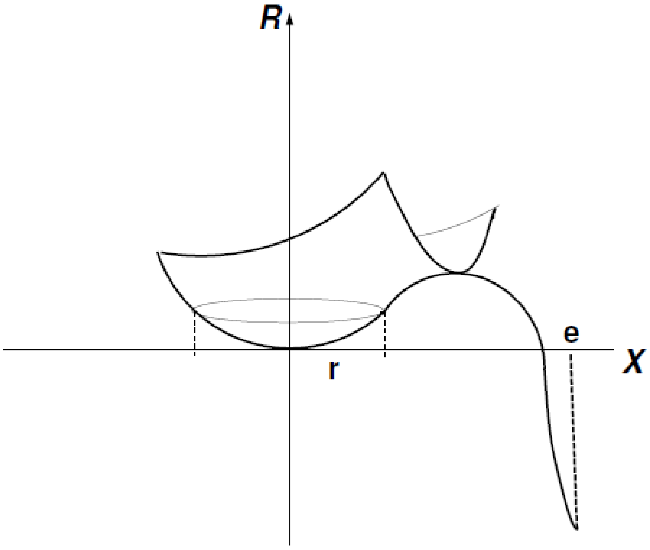

Figura B.2: Geometria do Passo da Montanha

Teorema B.8. (Teorema de Enlace)

Seja X um espaço de Banach real com $X = X_1 \oplus X_2$, onde X_1 é um espaço de dimensão finita. Suponha que $\Phi \in \mathcal{C}^1(X, I\!\!R)$ satisfaz (PS) e

1. existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap X_2} \geq \alpha$ e
2. existem $e \in \partial B_1 \cap X_2$ e $R > \rho$ tais que $\Phi\Big|_{\partial Q} \leq 0$, onde

$$Q = (B_R \cap X_1) \oplus \{re; 0 < r < R\}.$$

Então, Φ possui um valor crítico $c \geq \alpha$ caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} \Phi(\gamma(u)),$$

onde

$$\Gamma = \left\{\gamma \in \mathcal{C}(\overline{Q}, X); \gamma = I_d \text{ em } \partial Q\right\}.$$

Demonstração:

Primeiro iremos admitir que seja verdade $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in Q} \Phi(\gamma(u)) \geq \alpha$, e vamos provar que c é um valor crítico de Φ.

Suponha por absurdo que c não seja valor crítico de Φ. Logo, pelo lema de deformação dado $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, existe $\eta \in \mathcal{C}([0,1 \times X, X)$ tal que para todo $t \in [0,1]$ e todo $u \in X$ temos

(i) $\eta(t,u) = u$, se $u \notin \Phi^{-1}\left([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]\right)$, e

(ii) $\eta\left(1, \Phi^{c+\epsilon}\right) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Denote $H = \left\{\max\limits_{u \in Q} \Phi(\gamma(u)); \gamma \in \Gamma\right\}$. Como $c = \inf H$ então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{u \in Q} \Phi(\gamma(u)) < c + \epsilon$, ou seja, $\gamma(u) \in \Phi^{c+\epsilon}$ $\forall u \in Q$.

Defina a aplicação contínua $h : \overline{Q} \to X$, tal que $h(u) = \eta(1, \gamma(u))$. Dado $u \in \partial Q$, temos $h(u) = \eta(1,u)$ e $\Phi(u) \leq 0$. Pela escolha de ϵ temos que $u \notin \Phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$. Então, por (i) temos $h(u) = \eta(1,u) = u$, e portanto, $h \in \Gamma$.

Por (ii) temos que $h(u) = \eta(1, \gamma(u)) \in \Phi^{c-\epsilon}$ $\forall u \in Q$, ou seja, $\max\limits_{u \in Q} \Phi(h(u)) \leq c - \epsilon$. Portanto, $c \leq \max\limits_{u \in Q} \Phi(h(u)) \leq c - \epsilon$, o que é uma contradição. Logo c é um valor crítico de Φ.

Para cada $\gamma \in \Gamma$ temos que $\Phi \circ \gamma$ possui máximo, pois $\Phi \circ \gamma \in \mathcal{C}(\overline{Q}, I\!R)$ e $\overline{Q}$ é compacto em X. Agora vamos provar que $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in Q} \Phi(\gamma(u))$ está bem definido e que $c \geq \alpha$. Antes, iremos provar as seguintes afirmações:

Afirmação B.9. Dado $\gamma \in \Gamma$, e denotando por P a projeção de X para X_1, existe $u \in Q$ tal que

$$\begin{cases} P\gamma(u) = 0, \\ \|(I_d - P)\gamma(u)\| = \rho. \end{cases} \tag{B.2}$$

Para cada $u \in \overline{Q}$ escrevemos $u = v + re$, onde $v \in \overline{B_R} \cap X_1$ e $0 \leq r \leq R$. Defina a homotopia $H : [0,R] \times \left(\overline{B_R} \cap X_1\right) \to I\!R \times X_1$ dada por

$$H(r,v) = \left(\|(I_d - P)\gamma(v + re)\|, P\gamma(v + re)\right).$$

Como $\gamma\Big|_{\partial Q} = I_d$ então, quando $u \in \partial Q$ nós temos

$$H(r,v) = (\|re\|\,, v) = (r,v)$$

isto é, $H \equiv I_d$ em ∂Q. Em particular, $H(r,v) \neq (\rho, 0)$ para todo $u \in \partial Q$, pois por hipótese ρ pertence ao aberto $(0,R)$, o que ocasiona $(\rho,0) \in Q$. Identificando $R \times X$ com $I\!R^n$ para algum $n \in I\!N$, nós temos que grau de Brouwer $d(H,Q,(\rho,0))$ está bem definido. Então, pela propriedade da invariância do grau de Brouwer por Homotopia,

$$d(H,Q,(\rho,0)) = d(I_d,Q,(\rho,0)) = 1.$$

Logo, existe $u \in Q$ tal que, $H(u) = (\rho,0)$, isto é, existe $u \in Q$ satisfazendo o sistema acima.

Afirmação B.10. Para cada $\gamma \in \Gamma$, temos $\gamma(Q) \cap \partial B_\rho \cap X_2 \neq \emptyset$.

De fato, pela afirmação anterior, existe $u \in Q$ tal que $P\gamma(u) = 0$, e $\|(I_d - P)\gamma(u)\| = \rho$. Fazendo $w = \gamma(u)$, temos que $w \in \gamma(Q)$. Portanto, falta mostrar que $w \in \partial B_\rho \cap X_2$. Observe que $\|w\| = \|(I_d - P)\gamma(u)\| = \rho$, ou seja, $w \in \partial B_\rho$. Como $X = X_1 \oplus X_2$, então existem w_1, w_2 pertencentes respectivamente a X_1 e X_2, tais que $w = w_1 + w_2$. Assim, $w_1 = P(w) = 0$, o que implica $w = w_2 \in X_2$.

Como $w \in \gamma(Q) \cap \partial B_\rho \cap X_2$, nós temos por 1. que

$$\max_{u \in Q} \Phi(\gamma(u)) \geq \Phi(w) \geq \alpha,$$

o qual, uma vez combinado com a definição de c, implica $c \geq \alpha$.

■

Apêndice C

Resultados de Análise

Neste apêndice serão apresentados alguns resultado de análise funcional utilizados neste trabalho.

Teorema C.1 (Lax Milgram)**.** (ver[3])

Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \longrightarrow I\!R$ uma forma bilinear que satisfaz:

(i) Continuidade: existe $\alpha > 0$, tal que, $|a(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \forall\ u, v \in H$ e,

(ii) Coercividade: existe $c > 0$ tal que $c\|u\|^2 \leq a(u,u), \forall\ u \in H$.

Então, para cada $f \in H'$ (dual de H), existe um único $u \in H$ tal que :

$$a(u,v) =< f, v >, \forall v \in H.$$

Teorema C.2 (Rellich-Kondrashov)**.** (ver[8])

Seja Ω um domínio limitado e aberto, com fronteira suave em $I\!R^N$. Então as seguintes imersões são compactas:

(a) $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ para $p < n$ e $1 \leq q < p^* := \frac{Np}{N-p}$;

(b) $W^{1,N}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$ (aqui temos $p = N$);

(c) $W^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ para p>N.

Teorema C.3 (Desigualdade de Hölder)**.** (ver[8])

Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, tais que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Teorema C.4. (ver[8])

Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um conjunto limitado e $1 \leq p \leq q$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, e além disso, a imersão $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua.

Teorema C.5. (ver[8])

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e aberto, com fronteira suave. Então temos as seguintes imersões contínuas:

(a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}$, para $1 \leq p < n$, onde $p^* = \dfrac{np}{n-p}$;

(b) $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$ (aqui nós temos $p = n$);

(c) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ para $p > n$. No caso $p = n$ não é verdade em geral que $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Exemplo: Seja $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^2$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $u(x) = \log(\log \frac{2}{r})$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$. Então $u \in H^1(\Omega)$, porém $u \notin L^\infty(\Omega)$ (ver[8], exemplo 7, página 173).

Teorema C.6. Desigualdade de Poincaré (ver[8])

Sejam Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$, e $p \in [1, \infty]$. Então existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$, tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos $\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$.

Definição C.7. (ver [9])

(i) (**Notação de O grande**) Nós escrevemos $f = O(g)$ quando $x \to x_0$, desde que exista uma constante C tal que, $|f(x)| \leq C |g(x)|$ para todo x suficientemente próximo de x_0.

(ii) (**Notação de o pequeno**) Nós escrevemos $f = o(g)$ quando $x \to x_0$, desde que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Teorema C.8. (ver Teorema 5.1 em [5])

Sejam X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional C^1, K um espaço métrico compacto e $K_0 \subset K$ um conjunto fechado. Seja $f_0 : K_0 \to X$ uma função contínua dada (fixada) e defina a família

$$\Gamma = \{f \in C(K, X) : f = f_0 \text{ em } K_0\},$$

onde $C(K, X)$ denota o conjunto de todas as funções contínuas de K em X. Defina $c = \inf_{f \in \Gamma} \max_t \Phi(f(t))$ e assuma:

$$\max_{t \in K} \Phi(f(t)) > \max_{t \in K_0} \Phi(f(t)) \; \forall f \in \Gamma.$$

Então $\forall \epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in X$ tal que:

(i) $c \leq \Phi(u_\epsilon) \leq c + \epsilon$

(ii) $\|\Phi'(u_\epsilon)\|_{X'} \leq \epsilon$.

Lema C.9. Brézis-Lieb (ver [19])

Sejam $\Omega \subset I\!R^N$ subconjunto aberto e $f_n \subset L^p(\Omega)$ em que $1 \leq p < \infty$. Suponhamos que

(i) (f_n) seja limitada em $L^p(\Omega)$ e

(ii) $f_n \to f$ q.t.p em Ω.

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p \right] = \|f\|_p^p .$$