Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Eduardo Pereira Dutra

A Aritmética em concursos militares e olimpíadas de matemática: uma desarmonização com os livros didáticos do Ensino Fundamental e uma proposta para melhoria do ensino.

Juiz de Fora

2018

Eduardo Pereira Dutra

A Aritmética em concursos militares e olimpíadas de matemática: uma desarmonização com os livros didáticos do Ensino Fundamental e uma proposta para melhoria do ensino.

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sergio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dutra, Eduardo Pereira.
A Aritmética em concursos militares e olimpíadas de matemática: uma desarmonização com os livros didáticos do Ensino Fundamental e uma proposta para melhoria do ensino. / Eduardo Pereira Dutra. – 2018.
52 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Guilherme de Assis Vasconcelos
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

1. Aritmética. 2. Concursos Militares. 3. Olímpiadas de Matemática. I. Vasconcelos, Sergio Guilherme de Assis, orient. II. Título.

Eduardo Pereira Dutra

A Aritmética em concursos militares e olimpíadas de matemática: uma desarmonização com os livros didáticos do Ensino Fundamental e uma proposta para melhoria do ensino.

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 23 de outubro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Prof. Dr. Sergio Guilherme de Assis Vasconcelos - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Artur Afonso Guedes Rossini
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado mais uma benção.

Ao meu pai, pelos ensinamentos, exemplo e incentivo, valores sem os quais não conseguiria jamais alcançar voos maiores. Pai, sinto saudades!

À minha mãe, por orar sempre por mim e por minha família nos momentos de aflição, agustia e incertezas e, também, nos momentos de alegria. Obrigado por estar sempre ao meu lado.

À minha esposa Josiane pelo amor, carinho e apoio incondicional. Muito obrigado por ser esta pessoa maravilhosa. Te amo!

Aos meus filhos, Paulo Víctor, Pedro e Alice, por alegrar minha vida todos os dias. Vocês são os tesouros da minha vida.

À minha tia, Therezinha Beatriz, Kill, por sempre estar ao nosso lado, apoiando-nos sempre. Que Deus continue abençoando esse caridoso coração.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, pela atenção, paciência e apoio. Muito obrigado pelos ensinamentos.

Aos queridos alunos do CMJF, que me ajudaram muito na pesquisa e a fizeram com muito zelo e dedicação.

Aos meus amigos do PROFMAT 2016, obrigado por estarem ao meu lado nesta conquista. Sei que passamos por excelentes momentos e outros nem tanto, mas Deus nunca nos abandonou. Que Ele os abençõem sempre. Obrigado pela ajuda de TODOS vocês. Forte abraço!

Aos professores de nossa turma, muito obrigado pelos ensinamentos e dedicação.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

À Escola Preparatória de Cadetes do Ar e à Força Aérea Brasileira, por ter me dado a oportunidade de servir no Colégio Militar de Juiz de Fora.

Ao Exmo. Sr. Brigadeiro do Ar Celestino Todesco, Comandante da Escola Prepartatória de Cadetes do Ar, no período em que fui designado para o CMJF. Muito obrigado, de coração, pelos ensinamentos e convívio por quase dois anos. Aprendi demais com o Sr. Levo sempre comigo todo o aprendizado. Obrigado por tudo!

Ao Colégio Militar de Juiz de Fora, pelo apoio e liberação para que eu pudesse realizar com êxito o curso de mestrado. Em especial, à equipe de matemática desse Colégio, de que tanto me orgulho de ter feito parte. Muito obrigado a todos vocês por tudo que fizeram para que eu conseguisse concluir esse curso com sucesso.

Aos amigos da coordenação do 7º ano (2016) e 1º ano (2017) que muito me ajudaram, compreenderam e me apoiaram no PROFMAT, sempre me passando forças nas horas de desconforto. Sentirei falta de vocês.

A todos meus familiares, queridos alunos, amigos e colegas de trabalho pelas orações e palavras de apoio.

“A Matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas”

(Gauss)

RESUMO

Os exames de seleção de nível fundamental para ingresso nas escolas militares e as olimpíadas brasileiras de matemática abordam questões de aritmética com bastante frequência. Determinados problemas são resolvidos em consonância com o que é aprendido em sala de aula no Ensino Fundamental II; porém, boa parte desses problemas destoa da maneira tradicionalmente ensinada. Como, por exemplo, podemos destacar as questões que envolvem a teoria das congruências que é uma ferramenta fascinante para os alunos e facilitadora na resolução de determinados exercícios, apresentando soluções sucintas e interessantes.

Essa pesquisa foi realizada com um grupo de alunos do Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF). Durante os encontros, foi obedecida a seguinte cronologia: apresentação de um problema extraído de concursos militares ou de olimpíadas, para tentativa de resolução dos alunos; discussão das possíveis soluções apresentadas; apresentação do tema pelo docente. Essa apresentação foi feita na forma de uma aula, com o objetivo de explicar ao discente o assunto da questão, buscando enfocar de modo diferente daquele abordado nos livros didáticos, isso quando ele o aborda; resolução do problema pelos alunos, após a aula expositiva do professor; apresentação de um problema adicional para ratificar o aprendizado ou apresentação de uma nova interpretação do conteúdo; abordagem do assunto nos livros didáticos e conclusão.

Entendemos que a exploração desses problemas deve ser levada ao conhecimento do aluno quando do estudo da aritmética, por trazer a realidade dos concursos e olimpíadas que alguns alunos irão se deparar em algum momento de sua trajetória escolar.

Além disso, percebemos a necessidade, ao longo da pesquisa, do implemento de algumas áreas da aritmética no currículo do Ensino Fundamental II.

Palavras-chave: Aritmética. Concursos Militares. Olimpíadas Matemáticas.

ABSTRACT

The fundamental level selection exams for admission to military schools and the Brazilian mathematics olympiads approach arithmetic questions quite frequently. Certain problems are solved in line with what is learned in the classroom in Elementary School II; however, the vast majority of these problems stand in the way they have traditionally taught. As for example, we can highlight the issues that involve congruence theory that is a fascinating tool for students and facilitator in solving certain exercises, presenting brief and interesting solutions.

This research was carried out with a group of students from the Military College of Juiz de Fora (CMJF). During the meetings, the following chronology was obeyed: presentation of a problem extracted from military or Olympic competitions, to attempt to solve the students; discussion of possible solutions presented; presentation of the topic by the teacher. This presentation was made in the form of a class, with the purpose of explaining to the student the subject of the question, trying to focus in a different way from that approached in the textbooks, that when he approaches it; solving the problem by the students, after the teacher's lecture; presentation of an additional problem to ratify the learning or presentation of a new interpretation of the content; approach of the subject in textbooks and conclusion.

We understand that the exploration of these problems must be taken to the daily routine of the student when studying the arithmetic, for bringing the reality of the competitions and Olympiads that some students will encounter at some point in their school career.

In addition, we realized the need, throughout the research, to implement some areas of arithmetic in the curriculum of Elementary School II.

Key words: Arithmetics. Military Schools Admission. Mathematical Olympiads.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
CMJF	Colégio Militar de Juiz de Fora
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
CN	Colégio Naval
EsPCEx	Escola Preparatória de Cadetes do Exército

LISTA DE SÍMBOLOS

$\cup$	União
$\equiv$	Congruente
$\not\equiv$	Não Congruente
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mid$	Divide
$\dagger$	Não Divide
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	Se, e somente, se

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 RELEVÂNCIA DO TEMA

Após a realização da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), realizada no dia 6 de junho de 2017, me foi solicitado por um aluno do Ensino Médio do Colégio Militar de Juiz de Fora, tentar ajudá-lo a resolver uma questão daquela Olimpíada, a qual não havia conseguido solucionar. Tratava-se de uma questão de aritmética, com aplicação direta do algoritmo da divisão. Fiquei surpreso, pois era uma questão, ao meu ver, muito simples de se resolver. Pesquisei sobre o assunto nos livros didáticos do Ensino Fundamental e fiquei sobressaltado com o que vi: tais livros pouco trazem, em seu conteúdo, temas relacionados à teoria dos números.

Assim, a motivação inicial para a escolha do presente assunto está atrelada a minha perplexidade durante a análise de provas dos exames de admissão aos concursos militares, questões de olimpíadas de Matemática e confrontando com a abordagem do assunto nos livros didáticos. Ao efetuar essa análise, percebi que há uma grande necessidade de incremento, no decorrer do Ensino Fundamental II, do conteúdo da Aritmética.

Para que se possa dimensionar a importância da aritmética e da matemática, por completo, no ensino daqueles alunos que querem se preparar para os percalços da vicitationsda, considero importante uma leitura atenta do que diz Lorenzi (2008):

> Se a matemática é uma disciplina base de todas as ciências e todas as artes; se o domínio dos números e das operações é decisivo para o sucesso numa sociedade competitiva; se o desenvolvimento tecnológico está fundamentado em cálculos e logaritmos; se o Brasil é a terra de Malba Tahan... porque 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio, sem aprender Matemática? (Lorenzi, 2008).

A possibilidade de tentar minimizar esse quadro, traduzida em uma aproximação da realidade do aluno e a realidade dos concursos e olimpíadas motivou-me a pesquisar sobre esse tema, sem a intenção ou pretensão de propor que o Ensino Fundamental II se torne um curso preparatório para concursos militares e olimpíadas; mas, tão somente, mostrar a relevância do estudo/ensino da Teoria dos Números, tomando como parâmetro da análise e crítica o modo pelo qual é abordada no Ensino Fundamental II.

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

O objetivo do trabalho é, especificamente, detectar se as questões de matemática abordadas nos exames de admissão às escolas militares e nas olímpiadas são bem resolvidas pelos alunos apenas com os conteúdos ministrados em sala de aula ou se há uma necessidade de implementar ou melhorar o currículo do Ensino Fundamental II para, assim, conseguirmos atender aos anseios dos discentes e, principalmente, se essa nova abordagem é um fator que facilita e motiva a compreensão da aritmética.

Assim, contando com a minha experiência, pretendemos propor algumas atividades com questões extraídas de concursos e olimpíadas, proporcionando aos alunos uma realidade que encontrarão nos referidos exames/olímpiadas.

1.3 CONTEXTOS E PARTICIPANTES DA PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada no Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF), na cidade de Juiz de Fora - MG. Trata-se de um colégio militar que oferece ao aluno o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. O ingresso no CMJF é feito por meio de duas modalidades: há um concurso público para ingresso no Ensino Fundamental ou no Médio e há ingresso de alunos filhos de militares do Exército Brasileiro, Força Aérea Brasileira e Marinha do Brasil, sendo esses amparados por legislação específica.

Para a realização da presente pesquisa, foram convidados alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, porque, curricularmente, já estudaram os conteúdos a serem ministrados.

A escolha dos alunos foi feita de maneira aleatória, bastando aceitar o convite. Nesse instante da escolha, surgiu certo entusiasmo de alguns alunos, confirmando o interesse pelo conteúdo e pelo aprendizado.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação está estruturada da seguinte maneira: nos capítulos iniciais, apresentaremos as questões extraídas dos exames de admissão às escolas militares e de olímpiada de Matemática para motivação do discente; discussão das possíveis soluções apresentadas; apresentação do conteúdo, que pode ter sido estudado ou não pelo aluno; apresentação do conteúdo nos livros didáticos atuais, quando estes os apresentarem; resolução da questão; apresentação de um problema adicional, cujo conteúdo é exatamente o que foi trabalhado em sala de aula ou uma apresentação de uma nova interpretação para o conteúdo, mostrando, assim, uma aplicação do que foi estudado e, por fim, considerações. No penúltimo capítulo, abordaremos os Parâmetros Curriculares Nacionas do Ensino Fundamental, fazendo uma síntese do que versa sobre a Aritmética, e, finalmente, no último capítulo, descreveremos as conclusões e considerações finais acerca do que foi investigado.

2 QUESTÕES

2.1 QUESTÃO 1: ALGORITMO DA DIVISÃO

(OBMEP-2017) Somando 1 a um certo número natural, obtemos um múltiplo de 11. Subtraindo 1 desse mesmo número, obtemos um múltiplo de 8. Qual é o resto da divisão do quadrado desse número por 88?

a) 0

b) 1

c) 8

d) 10

e) 80

2.1.1 ABORDAGEM DOS ALUNOS ANTES DA INSTRUÇÃO

A presente questão foi trabalhada com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II. Os discentes não conseguiram resolver o problema proposto. Tentaram fazer alguns testes, ou seja, queriam encontrar um número que adicionado de 1 dê um múltiplo de 11 e, após, tentaram subtrair 1 unidade desse mesmo número, com a finalidade de encontrar um múltiplo de 8.

Não alcançaram êxito nas tentativas.

2.1.2 INSTRUÇÃO DO DOCENTE

Algoritmo da divisão

Denotaremos $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

e $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Dados inteiros a e b, dizemos que b é múltiplo de a quando existe inteiro n tal que $b = na$. Se a não é zero, isso equivale a dizer que b/a é um número inteiro. Se a e b são ambos inteiros e b é um múltiplo de a, então a é chamado de divisor de b.

Sejam dados dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer. Queremos comparar o número natural b com os múltiplos de a. Para isto, considere todos os intervalos de números naturais da forma:

$$na, (n + 1)a) = \{na, na + 1, na + 2, ..., (n + 1)a - 1\}$$

para n um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ou seja:

$$\mathbb{N} = [0, a) \bigcup [a, 2a) \bigcup [2a, 3a) \bigcup \ldots \bigcup [na, (n+1)a) \bigcup \ldots$$

com os intervalos acima dois a dois disjuntos, ou seja, sem elementos comuns. Portanto, o número b pertencerá a algum dos intervalos acima. Digamos que b pertença ao intervalo $[qa,\ (q+1)a)$, onde q é um natural determinado. Isto significa que:

$qa \leq b < (q+1)a \Longleftrightarrow 0 \leq b - qa < a.$

Façamos $r = b - qa$, de modo que $b = qa + r$. Assim encontramos os números naturais q e r, unicamente determinados, tais que:

$b = aq + r$, com $0 \leq r < a$.

Neste processo, o número b é chamado de dividendo, o número a divisor, os números q e r são chamados, respectivamente, quociente e resto da divisão de b por a.

Notemos que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a. Este será o caso se, e somente se, $r = 0$.

2.1.3 ABORDAGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Segue abaixo o livro didático que foi analisado e seu conteúdo:

Livro: 6º ano - Ensino Fundamental II Silveira, Ênio Matemática: compreensão e prática/Ênio Silveira - 3ª edição - São Paulo : Moderna, 2015.

Os livros da mesma coleção dos 7º, 8º e 9º anos não abordam a divisão euclideana.

Divisão exata com números naturais

Situação 1

Gisele distribuiu, em quantidades iguais, 45 chocolates em cinco embalagens. Quantos chocolates há em cada uma das embalagens?

Para determinar o número de embalagens devemos dividir 45 por 5.

Figura 1 – Algoritmo da divisão 1

Dividendo	→	45	5	←	Divisor
Resto	→	0	9	←	Quociente

Fonte: Matemática: compreensão e prática/Ênio Silveira

Quando o resto da divisão é zero, dizemos que a divisão é exata.

45 : 5 = 9 (Lemos: quarenta e cinco dividido por cinco é igual a nove)

Chamamos essa operação de divisão.

Logo, Gisele colocou 9 chocolates por embalagem.

Nesse caso, usamos a divisão para repartir uma quantidade em partes iguais.

Situação 2

Um feirante tem 480 laranjas para vender e vai colocá-las em sacos com 12 unidades (uma dúzia) cada um. Quantos sacos serão utilizados pelo feirante para armazenar todas as laranjas?

Queremos saber quantos grupos de 12 podem ser formados com 480 laranjas. Para isso, efetuamos a divisão 480 : 12.

Figura 2 – Algoritmo da divisão 2

480	12
0	40

Fonte: Matemática: compreensão e prática/Ênio Silveira

Logo, serão utilizados 40 sacos.

Nesse caso, usamos a divisão para descobrir quantas vezes uma cabe na outra.

Divisão não exata

Considere esta divisão:

Figura 3 – Algoritmo da divisão 3

38	7
	?

Fonte: Matemática: compreensão e prática/Ênio Silveira

Não existe nenhum número natural cuja multiplicação por 7 dê como resultado 38.

O número natural que, ao ser multiplicado por 7, origina o produto mais próximo e menor que 38 é 5. Vejamos:

$5.7 = 35$

$35 < 38$

$38 - 35 = 3$

Portanto, temos uma divisão não exata, com quociente igual a 5 e resto igual a 3. Veja:

Figura 4 – Algoritmo da divisão 4

38	7
3	5

Fonte: Matemática: compreensão e prática/Ênio Silveira

Quando o resto da divisão é diferente de zero, dizemos que a divisão é não exata.

Relação fundamental da divisão

Na divisão anterior, observamos que: $38 = 5.7 + 3$

Chamamos essa igualdade de relação fundamental da divisão.

DIVIDENDO = QUOCIENTE . DIVISOR + RESTO

Os demais livros didáticos pesquisados adotam, praticamente, a mesma linguagem, quando versam sobre a divisão euclideana (ver [3] e [7]).

2.1.4 RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

Consideremos um número natural x, que adicionando 1, torna-se múltiplo de 11 e subtraindo 1, torna-se múltiplo de 8.

Assim, temos $x + 1 = 11k$ e $x - 1 = 8k_1$, onde k e k_1 são números naturais. Multiplicando as duas equações, obtemos:

$(x + 1)(x - 1) = (11k).(8k_1) \Rightarrow x^2 - 1 = 88k.k_1$.

Fazendo $k.k_1 = k_2$, temos:

$x^2 - 1 = 88k_2 \Rightarrow x^2 = 88k_2 + 1$.

Dessa igualdade obtemos que k_2 é o quociente da divisão de x^2 por 88 e 1 é o resto.

Concluímos, então, que o resto da divisão do quadrado do número x por 88 é 1.

Resposta da questão 1: letra b

2.1.5 PROBLEMA ADICIONAL

Mostre que dentre três números consecutivos, um, e apenas um, é múltiplo de 3.

Solução: Suponha que os três inteiros consecutivos sejam a, $a + 1$ e $a + 2$. Temos as seguintes possibilidades: a deixa resto 0, 1 ou 2 quando dividido por 3.

1) Suponha que a deixe resto 0 quando dividido por 3, ou seja, $a = 3q$ com $q \in \mathbb{Z}$.

Logo, $a + 1 = 3q + 1$ e $a + 2 = 3q + 2$. Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, a.

2) Suponha que a deixe resto 1 quando dividido por 3, ou seja, $a = 3q + 1$ com

$q \in \mathbb{Z}$. Logo, $a+1 = 3q+2$ e $a+2 = 3q+3 = 3(q+1)$. Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, $a+2$.

3) Suponha que a deixe resto 2 quando dividido por 3, ou seja, $a = 3q+2$ com $q \in \mathbb{Z}$. Logo, $a+1 = 3q+3 = 3(q+1)$ e $a+2 = 3q+4 = 3(q+1)+1$.

Assim, um e apenas um dos três números é múltiplo de 3, a saber, $a+1$.

2.1.6 CONSIDERAÇÕES DO DOCENTE

1) Quanto ao conteúdo dos livros didáticos:

Ao analisar o livro didático mencionado em 2.1.3, em relação ao algoritimo da divisão, percebemos que o mesmo mostra a relação fundamental da divisão, porém não a demonstra, conforme aula ministrada. Acreditamos que o livro aborda a divisão euclideana da maneira coerente com a faixa etária dos alunos, contextualizando o algoritmo, para aplicação no seu cotidiano. Porém, é extremamente importante e aconselhável o retorno do conteúdo no transcorrer do Ensino Fundamental II, com uma linguagem matemática mais aprofundada. Seria ideal que os alunos estudassem novamente o conteúdo a partir do 8º ano, já que a álgebra (fatoração, produto notável, etc.) foi por eles estudada. A existência de questões que envolvem a relação fundamental da divisão estará presente na trajetória dos alunos, quando da realização de concursos, exames de admissão e olímpiadas. Por esse motivo destaca-se a importância de dar mais ênfase ao estudo da relação fundamental da divisão.

2) Quanto à aprendizagem do aluno sobre a matéria ministrada:

Os discentes ficaram interessados e motivados com a matéria ministrada, mostrando-se participativos e, ao final, identificaram-se com a abordagem dada ao algoritmo da divisão, visto que conseguiram acompanhar todo o raciocínio envolvido nas questões e ficaram entusiasmados com a resolução das duas questões propostas.

2.1.7 CONSIDERAÇÕES DOS DISCENTES

Apresento abaixo duas considerações e ressalto que, com exceção do item 5, que é discursivo, todas as demais perguntas obtiveram as mesmas respostas.

Figura 5 – Consideração 1

Considerações do aluno:

1. Você conhecia o conteúdo ministrado pelo professor para resolução da questão?
( ) sim ( ) parcialmente (X) não

2. Você achou o conteúdo interessante?
(X) sim ( ) parcialmente ( ) não

3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
(X) sim ( ) parcialmente ( ) não

4. Você estudou o conteúdo no ensino fundamental?
( ) sim ( ) parcialmente (X) não

5. Você acha pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?
Sim, pois no 6º ano, por exemplo, apenas repetimos o que já aprendemos.

Fonte: Próprio Autor

Figura 6 – Consideração 2

Considerações do aluno:

1. Você conhecia o conteúdo ministrado pelo professor para resolução da questão?
( ) sim ( ) parcialmente (X) não

2. Você achou o conteúdo interessante?
(X) sim ( ) parcialmente ( ) não

3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
(X) sim ( ) parcialmente ( ) não

4. Você estudou o conteúdo no ensino fundamental?
( ) sim ( ) parcialmente (X) não

5. Você acha pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?
Sim, já que o mesmo nos ajudaria a melhorar nossas estratégias ao fazer questões como essa.

Fonte: Próprio Autor

2.2 QUESTÃO 2: ARITMÉTICA DOS RESTOS

(Colégio Militar de Fortaleza - 2011) Dois números inteiros positivos são tais que a divisão do primeiro deles por 7 deixa resto 6, enquanto a divisão do segundo, também por 7, deixa resto 5. Somando os dois números e dividindo o resultado por 7, o resto será:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

2.2.1 ABORDAGEM DOS ALUNOS ANTES DA INSTRUÇÃO

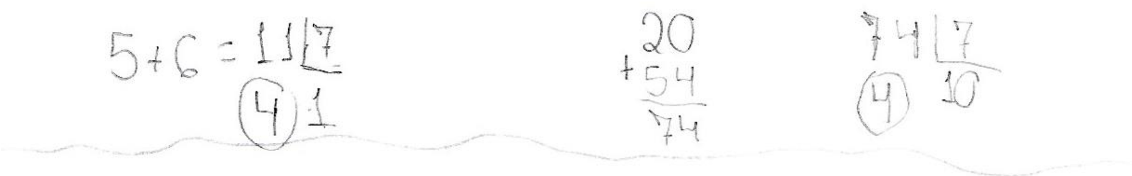
A presente questão foi trabalhada com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II. Os discentes que conseguiram resolver o problema proposto testaram um número que dividido por 7 deixa resto 6 e outro que dividido, também, por 7 deixa resto 5. Em seguida, somaram esses dois números e verificaram o resto.

A solução abaixo, de um dos alunos, reflete o que foi dito no parágrafo anterior:

Solução: Sabemos que quando dividimos 41 por 7, encontramos resto 6 e que quando efetuamos a divisão de 40 por 7, encontramos resto 5, logo ao somarmos 41 com 40, encontramos 81, que dividido por 7 deixa resto 4. Resposta *d*.

Para minha surpresa, um de meus discentes, esboçou o raciocínio abaixo:

Figura 7 – Resolução 1



Fonte: Próprio Autor

Perguntei o porquê daquele raciocínio e ele, no entanto, não soube explicar.

É mister destacar que o aluno utilizou a propriedade dos restos sem ter o conhecimento de sua existência. Aproveitei a ocasião para abordar o tema congruência modular.

2.2.2 INSTRUÇÃO DO DOCENTE

<u>Aritmética dos Restos</u>

Congruência Modular

Definição: Seja dado um número inteiro m maior do que 1. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m, se a e b possuírem o mesmo resto quando divididos por m. Neste caso, simbolizaremos esta situação como segue:

$$a \equiv b \, mod \, m$$

Quando a e b não são congruentes módulo m, escrevemos:

$$a \not\equiv b \, mod \, m$$

Exemplos:

1) $15 \equiv 8$ mod 7, pois os restos das divisões de 15 e de 8 por 7 são os mesmos (iguais a 1), pois $15 = 2.7 + 1$ e $8 = 1.7 + 1$;

2) $27 \equiv 32$ mod 5, pois os restos das divisões de 27 e 32 por 5 são os mesmos (iguais a 2), pois $27 = 5.5 + 2$ e $32 = 6.5 + 2$; e

3) $31 \not\equiv 29$ mod 3, pois o resto da divisão de 31 por 3 é 1, enquanto o resto da divisão de 29 por 3 é 2, pois $31 = 3.10 + 1$ e $29 = 9.3 + 2$.

Proposição: $a \equiv b$ mod $m \Leftrightarrow a$ - $b = km$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \equiv b \mod m$. Por definição, existem $q_1, q_2, r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < m$, tais que:

$$a = q_1 m + r \qquad \text{e} \qquad b = q_2 m + r.$$

Subtraindo a por b temos:

$$a - b = (q_1 m + r) - (q_2 m + r) = (q_1 - q_2)m.$$

Considerando $k = q_1 - q_2$ obtemos $a - b = km$.

Reciprocamente, suponha que $a - b = km$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que :

$$a = q_1 m + r_1 \qquad \text{e} \qquad b = q_2 m + r_2$$

com $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r_1 < m$ e $0 \leq r_2 < m$.

Então:

$$a = km + b = km + q_2 m + r_2 = (k + q_2)m + r_2.$$

Pela unicidade da divisão euclideana, obtemos:

$$q_1 = k + q_2 \qquad \text{e} \qquad r_1 = r_2.$$

Portanto, $a \equiv b \mod m$.

Exemplos:

$32 \equiv 17 \bmod 5 \Leftrightarrow 32 - 17 = 3.5$

$23 \equiv 16 \bmod 7 \Leftrightarrow 23 - 16 = 1.7$

Congruências e somas

Proposição: Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 inteiros quaisquer e seja m um inteiro maior do que 1. Se $a_1 \equiv b_1 \bmod m$ e $a_2 \equiv b_2 \bmod m$, então $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \bmod m$ e $a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \bmod m$.

Demonstração: Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 e m inteiros, com $m > 1$, tais que $a_1 \equiv b_1 \bmod m$ e $a_2 \equiv b_2 \bmod m$. Pelo algoritmo de Euclides, temos:

$a_1 = m.q_1 + r_1$, com q_1 e r_1 inteiros, $0 \leq r_1 < m$

$b_1 = m.q_1' + r_1$, com q_1' e r_1 inteiros, $0 \leq r_1 < m$

$a_2 = m.q_2 + r_2$, com q_2 e r_2 inteiros, $0 \leq r_2 < m$

$b_2 = m.q_2' + r_2$, com q_2' e r_2 inteiros, $0 \leq r_2 < m$

Segue que:

$a_1 + a_2 = m(q_1 + q_2) + r_1 + r_2$ e

$b_1 + b_2 = m(q_1' + q_2') + r_1 + r_2 \Rightarrow$

$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = m(q_1 + q_2 - q_1' - q_2')$.

Pela proposição anterior, obtemos que $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \mod m$.

Analogamente, prova-se que:

$a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2 \bmod m$.

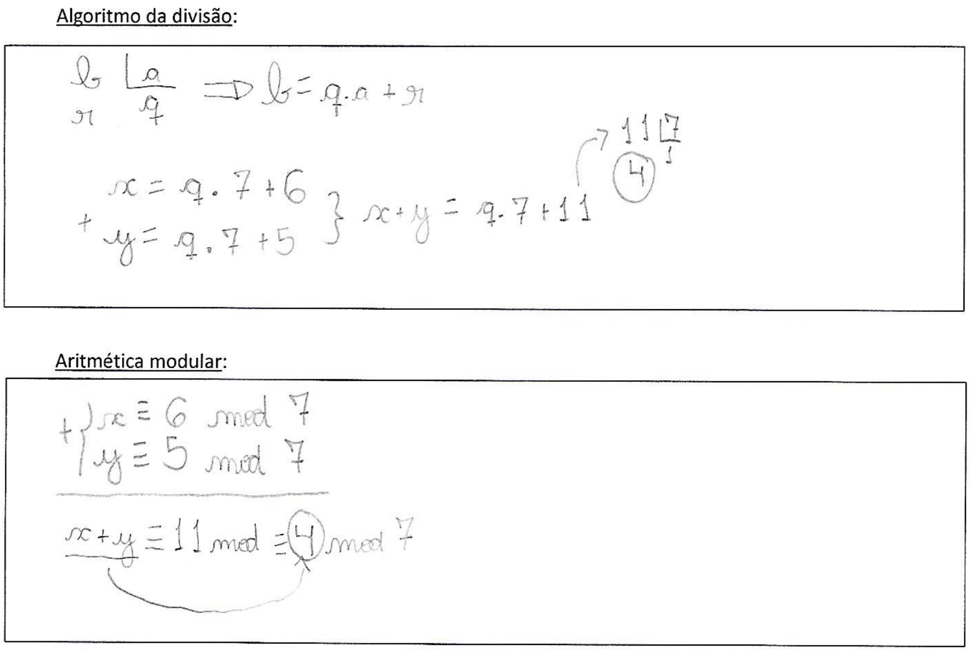
2.2.3 ABORDAGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Infelizmente, não encontrei livro didático do Ensino Fudamental que versa sobre o tema congruência modular.

2.2.4 RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

Segue abaixo a solução de um dos alunos, após a abordagem do professor:

Figura 8 – Resolução 2



Fonte: Próprio Autor

2.2.5 PROBLEMA ADICIONAL

Determine o resto da divisão por 9 do número:

$$3.534.785 + 87.538 - 9.535.832$$

Ressalto que nenhum dos alunos encontrou dificuldade em resolver a questão.

Solução: Sabe-se que:

$3.534.785 \equiv 8 \bmod 9$;

$87.538 \equiv 4 \bmod 9$; e

$9.535.832 \equiv 8 \bmod 9$.

Assim, $3.534.785 + 87.538 - 9.535.832 \equiv 8 + 4 - 8 \equiv 4 \bmod 9$.

Logo o resto da divisão por 9 de $3.534.785 + 87.538 - 9.535.832$ é 4.

2.2.6 CONSIDERAÇÕES DO DOCENTE

1) Quanto ao conteúdo dos livros didáticos atuais:

Ao analisar os livros didáticos em relação à aritmética dos restos, percebemos a inexistência do tema. Por esse motivo destaca-se a importância de incluir o conteúdo no Ensino Fundamental II, para oferecer ao aluno um atrativo e importante conteúdo da aritmética.

2) Quanto a aprendizagem do aluno a respeito da matéria ministrada:

Os discentes identificaram-se e ficaram muito entusiasmados com a matéria ministrada e com as questões exploradas, pleiteando, inclusive, mais exercícios sobre o assunto. Eles conseguiram acompanhar todo o raciocínio envolvido na explicação do conteúdo.

2.2.7 CONSIDERAÇÕES DOS DISCENTES

Apresento abaixo uma consideração e frisando que, com exceção do item 5, que é discursivo, todas as demais indagações obtiveram as mesmas respostas.

Figura 9 – Consideração 3

Considerações do aluno:

1. Você conhecia o conteúdo ministrado pelo professor para resolução da questão?
   ( ) sim ( ) parcialmente (X) não
2. Você achou o conteúdo interessante?
   (X) sim ( ) parcialmente ( ) não
3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
   (X) sim ( ) parcialmente ( ) não
4. Você estudou o conteúdo no ensino fundamental?
   ( ) sim ( ) parcialmente (X) não
5. Você acha pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?
   Sim, já que muitas vezes no 6º ano apenas revisamos o que já tínhamos visto antes, enquanto esse conteúdo poderia estar sendo estudado, considerando que o assunto ajuda a minimizar e enriquecer nossas estratégias em questões como as mostradas.

Fonte: Próprio Autor

2.3 QUESTÃO 3: ALGORITMO DAS DIVISÕES SUCESSIVAS DE EUCLIDES

(Colégio Naval - 2017) O número h tem 241 algarismos e $h = (z.w)^x$. O $MDC(x, 25)$, com x natural, resolvido pelo algoritmo das divisões sucessivas de Euclides, gera o esquema a seguir:

Figura 10 – Questão 3

	y	1	4	←	quocientes
x	25	z	w	←	dividendos e divisores
z	w	0		←	restos

Fonte: Prova do Colégio Naval - 2017

Sendo assim, é correto afirmar que a soma $x + y + z + w$ é igual a:

a) 274

b) 224

c) 199

d) 149

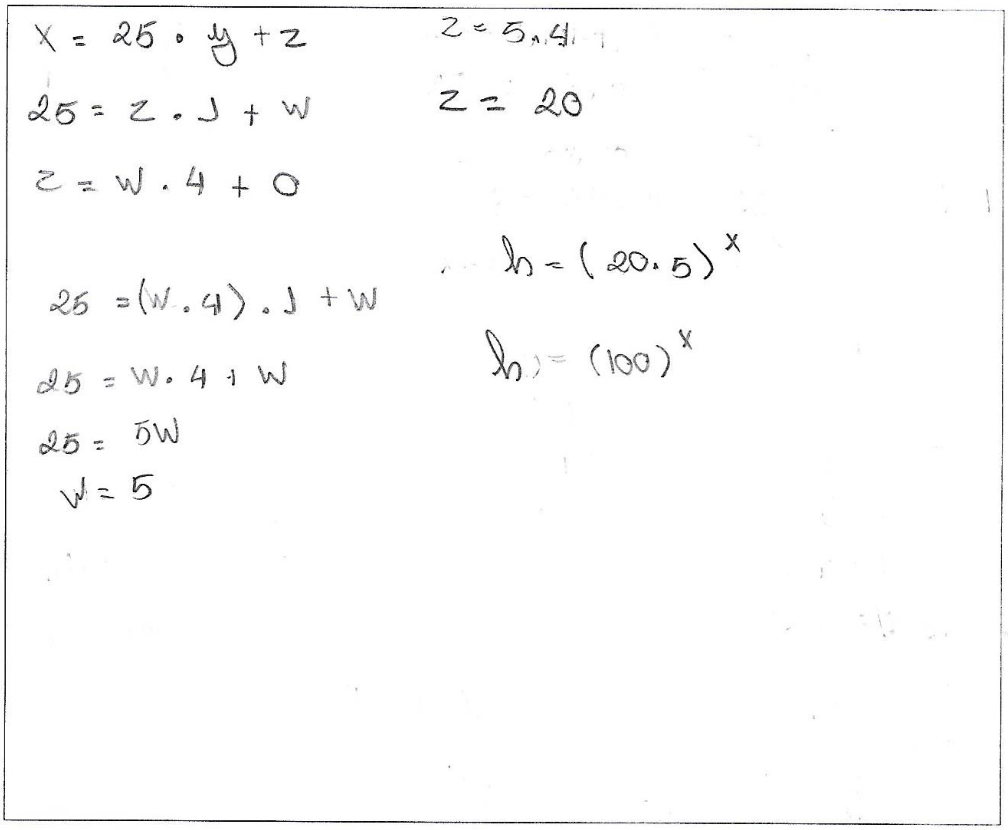
e) 99

2.3.1 ABORDAGEM DOS ALUNOS ANTES DA INSTRUÇÃO

Por se tratar de uma questão mais complexa, trabalhei com alunos do 1º ano do Ensino Médio. Com exceção de um aluno, os discentes encontraram dificuldades na resolução da questão, uma vez que não haviam estudado, ainda, o conteúdo, conforme veremos em seus comentários. Segue abaixo, o raciocínio do aluno, que quase concluiu a questão:

Figura 11 – Resolução 3

Resolução do aluno:



Fonte: Próprio Autor

Apesar de o aluno ter conseguido interpretar o Algoritmo das divisões sucessivas de Euclides, ele não concluiu a questão porque havia se esquecido de como analisar a quantidade de algarismos de uma potência de 10.

O referido aluno não estudou o Algoritmo no Ensino Fundamental mas, sim, em seus estudos particulares, tendo em vista a sua já participação em cursos preparatórios para concursos militares.

2.3.2 INSTRUÇÃO DO DOCENTE

Divisores

Definição: Diremos que um número inteiro d é um divisor de outro inteiro a, se a é múltiplo de d; ou seja, se $a = d.c$, para algum inteiro c.

Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é divisível por d ou que d divide a.

Representaremos o fato de um número d ser divisor de um número a, ou d dividir

a, pelo símbolo $d \mid a$ (lê-se: d divide a).

Observe que:

- 1 é divisor de todo inteiro n, pois $n = 1.n$.
- todo inteiro é divisor de zero, pois $0 = n.0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- se $d \mid a$, então $-d \mid a$, pois se $a = d.c$, então $a = (-d).(-c)$.

Caso d não divida a, escrevemos $d \dagger a$ (lê-se: d não divide a).

Por exemplo, temos que:

$1 \mid 6$;

$2 \mid 6$; e

$4 \dagger 6$.

Proposição:

(i) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (b + a)$ e $d \mid (b - a)$;

(ii) Se $d \mid (b + a)$ ou $d \mid (b - a)$, e $d \mid a$, então $d \mid b$;

(iii) O inteiro d é um divisor comum de a e de b, se e somente se, d for um divisor de a e de $b - a$.

Demonstração:

Sejam $a, b, d \in \mathbb{Z}$.

(i) Se $d \mid a$ e $d \mid b$ então existem inteiros m e n tais que $a = m.d$ e $b = n.d$. Somando-se as duas equações, obtemos:

$a + b = m.d + n.d \Rightarrow$

$a + b = (m + n).d$.

Assim, $d \mid (b + a)$.

Analogamente, subtraindo-se as duas equações, obtemos:

$b - a = n.d - m.d \Rightarrow$

$b + a = (n - m).d$.

Assim, $d \mid (b - a)$.

(ii) Admitamos que $d \mid (b + a)$ e que $d \mid a$.

Assim, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $b + a = r.d$ e $a = s.d$.

Logo, $b + s.d = r.d \Rightarrow$

$b = r.d - s.d \Rightarrow$

$b = (r - s).d.$

Logo, $d \mid b$.

Segue de modo análogo que se $d \mid (b - a)$ e $d \mid a$ então $d \mid b$.

(iii) De (i) e (ii) concluímos que d é um divisor comum de a e de b se, e somente se, d é um divisor comum de a e de $b - a$.

Definição: Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos, o maior divisor comum de a e b será chamado de máximo divisor comum de a e b e denotado por mdc $(a,\, b)$.

O problema de determinar o mdc de dois números é bem simples quando os números são pequenos, pois, neste caso, podemos listar todos os divisores comuns desses números e escolher o maior deles, que será o mdc.

Por exemplo, para calcular mdc $(12, 18)$, determinamos os divisores naturais de 12, que são:

$1, 2, 3, 4, 6, 12.$

Os divisores de 18 são:

$1, 2, 3, 6, 9, 18.$

Tomando o maior divisor comum, obtemos mdc(12, 18) $= 6$.

No entanto, quando algum dos números for grande, esse método fica impraticável, pois achar os divisores de um número grande é muito complicado. O que fazer então? Euclides, três séculos antes de Cristo, nos dá uma solução para este problema descrevendo um algoritmo muito eficiente para fazer o cálculo.

ALGORITMO DO MDC DE EUCLIDES

O Lema de Euclides: Dados inteiros a e b, os divisores comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de a e $b - c.a$, para todo número inteiro c fixado.

Demonstração: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e seja d um inteiro divisor comum de a e b. Vamos mostrar que d é divisor comum de a e de $b - c.a$. De fato:

$a = d.m$ e $b = d.n \Rightarrow$

$c.a = c.d.m$ e $b = d.n \Rightarrow$

$b - c.a = d.n - c.d.m \Rightarrow$

$b - c.a = d(n - c.m)$, logo d é divisor de $b - c.a$.

Reciprocamente, suponha que d seja divisor de a e d seja, também, divisor de $b - c.a$.

Logo $a = m.d$ e $b - c.a = n.d$.

Como $b - c.a = n.d$, temos $b = n.d + c.a$. Sabemos que $a = m.d$, assim:

$b = n.d + c.m.d \Rightarrow$

$b = d.(n + c.m)$.

Concluímos que d é divisor de b.

O Lema de Euclides nos diz que os divisores comuns de a e b são os mesmos divisores comuns de a e $b - a.c$.

Logo tomando o maior divisor comum em ambos os casos, obtemos a fórmula:

$$mdc(a, b) = mdc(a, b - a.c),$$

o que permite ir diminuindo os números a e b com a fórmula acima, até ficarmos com dois números cujo *mdc* seja trivial, conforme veremos abaixo.

ALGORITMO DE EUCLIDES PARA O CÁLCULO DO MDC

Nada melhor do que um exemplo para entender o método.

Vamos calcular mdc(a, b), onde $a = 162$ e $b = 372$.

Pelo Lema de Euclides, sabemos que o máximo divisor comum entre a e b é o mesmo que entre a e o número b menos um múltiplo qualquer de a. Otimizamos os cálculos ao tomarmos o menor dos números positivos da forma b menos um múltiplo de a e isto é realizado pelo algoritmo da divisão:

$372 = 162.2 + 48$.

Assim,

$$mdc(372, 162) = mdc(372 - 162.2, 162) = mdc(48, 162)$$

Apliquemos o mesmo argumento ao par $a_1 = 48$ e $b_1 = 162$:

$$162 = 48.3 + 18$$

.

Assim,

$$mdc(372, 162) = mdc(162, 48) = mdc(162 - 48.3, 48) = mdc(18, 48)$$

Apliquemos novamente o mesmo argumento ao par $a_2 = 18$ e $b_2 = 48$:

$$48 = 18.2 + 12.$$

Assim,

$$mdc(372, 162) = mdc(48, 18) = mdc(48 - 18.2, 18) = mdc(12, 18).$$

Novamente, o mesmo argumento para o par $a_3 = 18$ e $b_3 = 12$ nos dá:

$$18 = 12.1 + 6.$$

Assim,

$$mdc(372, 162) = mdc(18, 12) = mdc(18 - 12.1, 12) = mdc(6, 12).$$

Finalmente, obtemos:

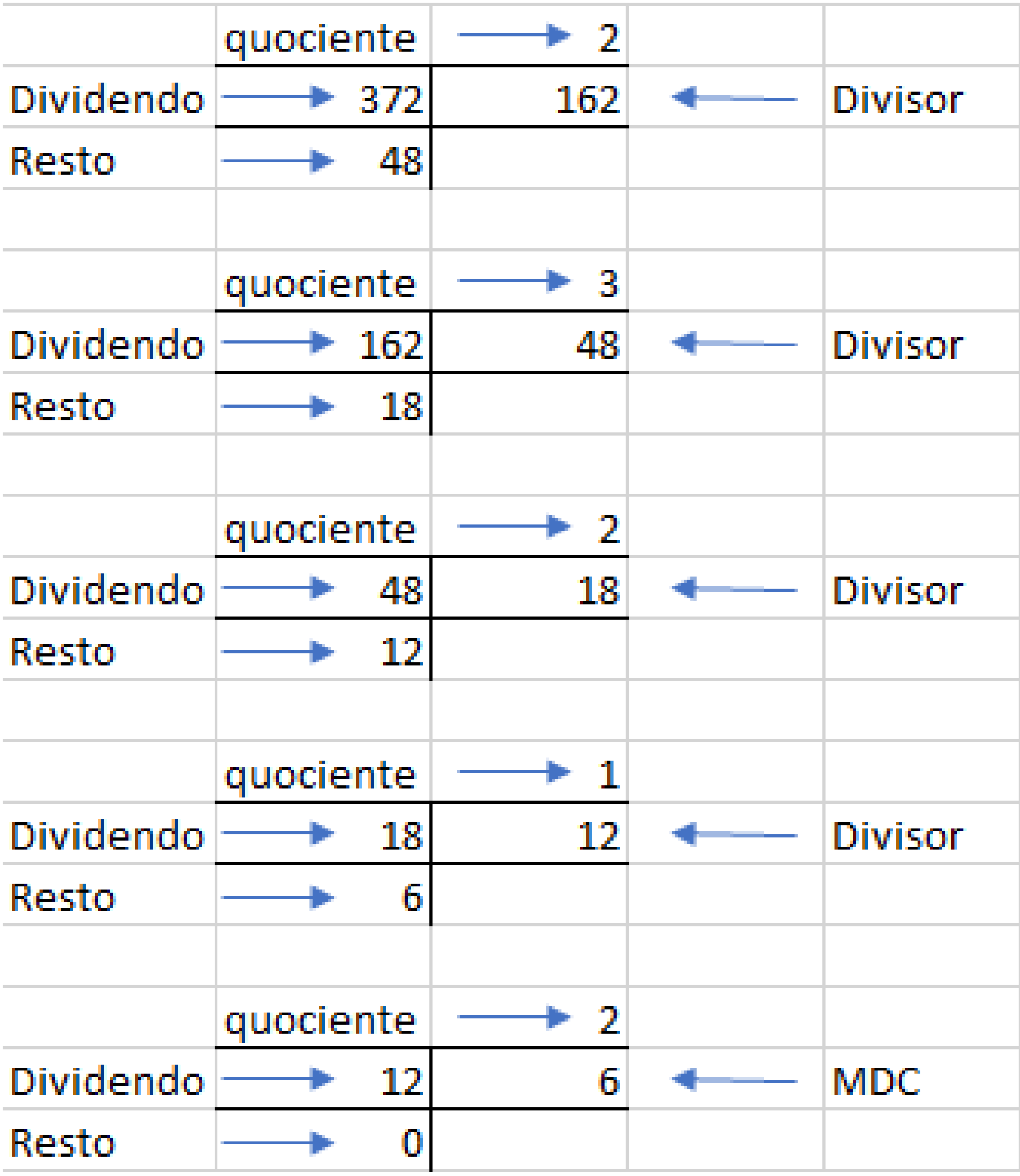
$$mdc(372, 162) = mdc(12, 6) = mdc(12 - 6.2, 6) = mdc(0, 6) = 6$$

Logo,

$$mdc(372, 162) = 6.$$

O procedimento acima pode ser sistematizado, passo a passo, como segue:

Figura 12 – Algoritmo de Euclides passo a passo



Fonte: Próprio Autor

Agora, o procedimento pode ser sistematizado, de maneira única, como segue:

Figura 13 – Algoritmo de Euclides

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6 = mdc
48	18	12	6	0	

Fonte: Próprio Autor

2.3.3 ABORDAGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Os livros dos 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II:

Silveira, Ênio Matemática: compreensão e prática/Ênio Silveira - 3ª edição - São Paulo : Moderna, 2015,

não abordam o Algoritmo de Euclides.

Foram, também, pesquisados os livros dos 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II:

Dante, Luiz Roberto Projeto Teláris: Matemática/Luiz Roberto Dante - 1. Ed. - São Paulo: Ática, 2012;

que, também, não abordam o Algoritmo de Euclides.

2.3.4 RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

Sabemos que:

$x = y.25 + z$; $25 = 1.z + w$; e $z = w.4 + 0$.

Logo $25 = 1.(4w) + w \Rightarrow w = 5$ e $z = 20$.

Como $h = (z.w)^x = (20.5)^x = (100)^x = (10^2)^x = (10)^{2x} = 1000...0$ possui $2x + 1$ algarismos, temos $2x + 1 = 241$, logo $x = 120$.

Como, também,

$x = 25y + z \Rightarrow 120 = 25y + 20 \Rightarrow y = 4$

Assim, $x + y + z + w = 120 + 4 + 20 + 4 = 149$

Resposta da questão 3: letra d.

2.3.5 UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA A DETERMINAÇÃO DO MDC PELO ALGORITMO DE EUCLIDES

É importante saber calcular o MDC de dois números, e, para isso, usamos o Algoritmo de Euclides.

Mas é igualmente importante que os alunos tenham uma ideia intuitiva do MDC de dois números.

Mostramos abaixo uma atividade com o qual os alunos podem obter uma interpretação interessante do MDC.

<u>Atividade</u>

Calculemos o MDC de 38 e 10.

Usando o Algoritmo de Euclides, já na forma de diagrama, temos que:

Figura 14 – Algoritmo de Euclides 1

	3	1	4
38	10	8	2
8	2	0	

Fonte: Próprio Autor

Concluímos, então, que $mdc(38, 10) = 2$.

A pergunta é: qual a interpretação geométrica do processo e do seu resultado?

Pensem em um retângulo 38 x 10 e interpretem as divisões feitas.

O que significa, por exemplo, a divisão $38 \div 10$?

Pelo algoritmo da divisão, temos $38 = 10 \cdot 3 + 8$.

Sugerimos que pensemos em um retângulo 38 x 10.

A primeira divisão do processo significa que dividimos o retângulo em quadrados iguais, com o maior lado possível: três quadrados com lados 10.

Sobrou, então, um retângulo 10 x 8.

A segunda divisão do processo, $10 \div 8$, significa que dividamos o novo retângulo em quadrados iguais, com o maior lado possível: um quadrado com lados 8.

Ou seja, $10 = 8 \cdot 1 + 2$.

Sobrou, agora, um retângulo 8 x 2.

A última divisão do processo, $8 \div 2$, significa que dividamos o retângulo 8 x 2 em quatro quadrados com lados 2.

Ou seja, $8 = 2 \cdot 4 + 0$.

Não sobraram retângulos para serem divididos e o retângulo inicial foi inteiramente coberto por quadrados.

Mas, e o MDC?

No retângulo 38 x 10 é possível ver:

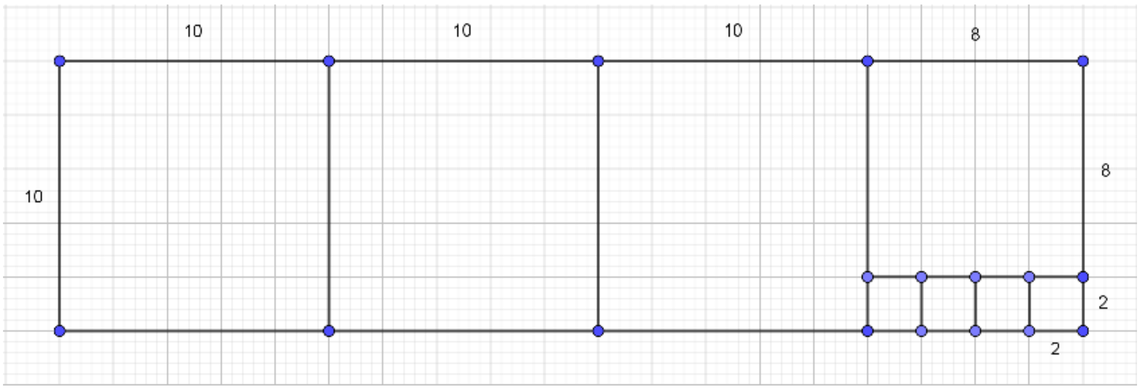
(a) os três quadrados com lados 10;

(b) o quadrado com lado 8; e

(c) os quatro quadrados com lados 2.

Observe a figura abaixo:

Figura 15 – Interpretação Geométrica do Algoritmo de Euclides



Fonte: Próprio Autor

Observamos que o MDC entre 38 e 10 é, simplesmente, o valor do lado do maior quadrado com o qual podemos quadricular todo o retângulo.

2.3.6 CONSIDERAÇÕES DO DOCENTE

1) Quanto ao conteúdo dos livros didáticos:

Ao analisar os livros didáticos em relação ao Algoritmo de Euclides, percebemos a inexistência do tema. Por esse motivo destaca-se a importância de incluir o conteúdo no Ensino Fundamental II, para oferecer ao aluno uma importante ferramenta da aritmética.

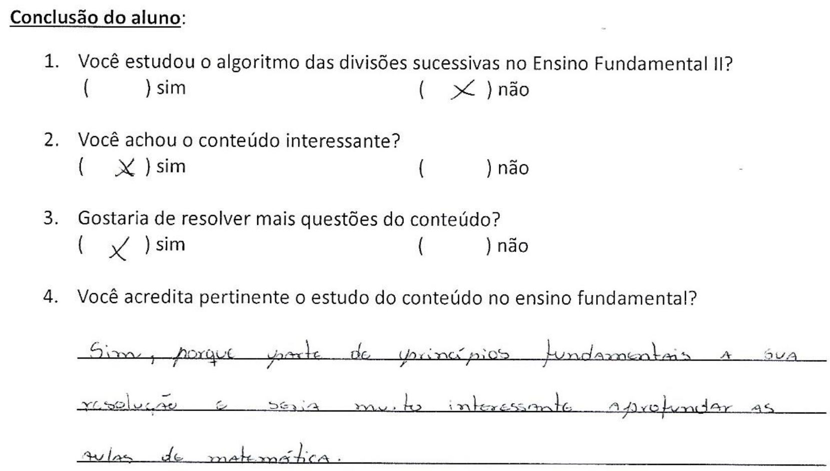
2) Quanto a aprendizagem do aluno à respeito da matéria ministrada:

Os discentes identificaram-se e ficaram fascinados, principalmente, com a interpretação geométrica do Algoritmo de Euclides e pela facilidade de obtermos o MDC pelo processo. Eles conseguiram acompanhar todo o raciocínio envolvido na explicação do conteúdo.

2.3.7 CONSIDERAÇÕES DOS DISCENTES

Seguem abaixo algumas das considerações dos alunos, corroborando com esse professor sobre a importância do ensino do Algoritmo de Euclides:

Figura 16 – Consideração 4



Conclusão do aluno:

1. Você estudou o algoritmo das divisões sucessivas no Ensino Fundamental II?
( ) sim (X) não

2. Você achou o conteúdo interessante?
(X) sim ( ) não

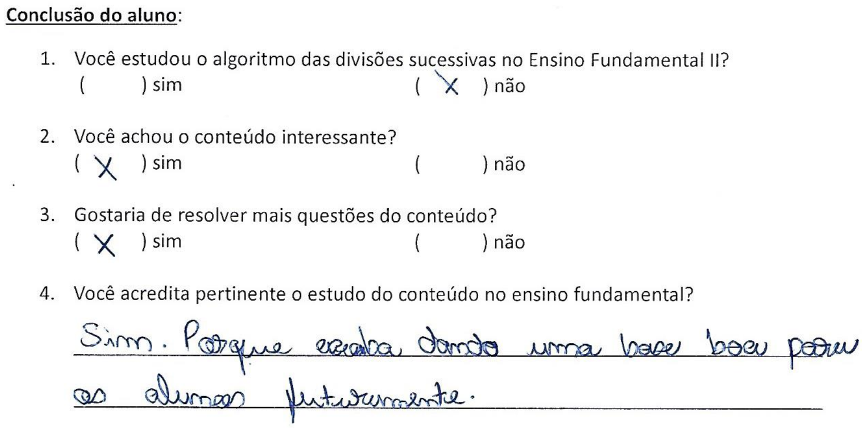
3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
(X) sim ( ) não

4. Você acredita pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?

Sim, porque parte de princípios fundamentais a sua resolução e seria muito interessante aprofundar as aulas de matemática.

Fonte: Próprio Autor

Figura 17 – Consideração 5


Conclusão do aluno:

1. Você estudou o algoritmo das divisões sucessivas no Ensino Fundamental II?
( ) sim (X) não

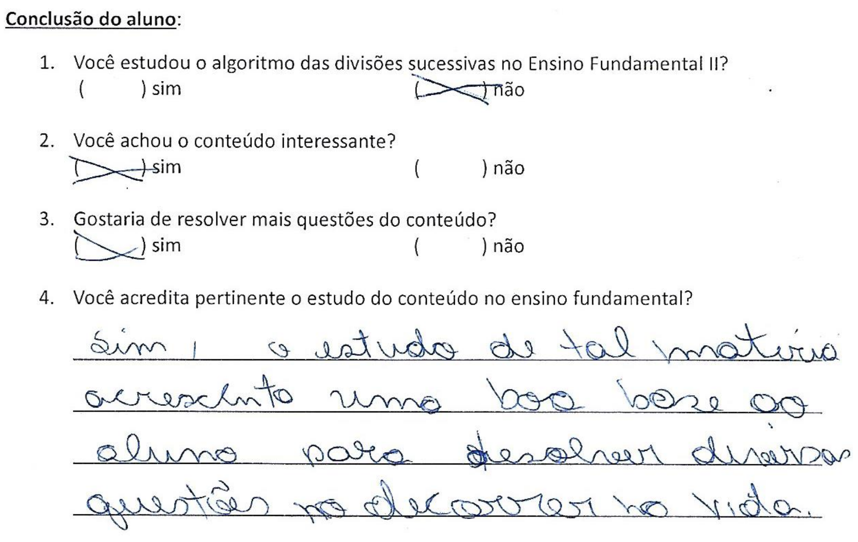
2. Você achou o conteúdo interessante?
(X) sim ( ) não

3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
(X) sim ( ) não

4. Você acredita pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?
Sim. Porque estava dando uma base boa para os alunos futuramente.

Fonte: Próprio Autor

Figura 18 – Consideração 6


Conclusão do aluno:

1. Você estudou o algoritmo das divisões sucessivas no Ensino Fundamental II?
( ) sim (X) não

2. Você achou o conteúdo interessante?
(X) sim ( ) não

3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
(X) sim ( ) não

4. Você acredita pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?
Sim, o estudo de tal matéria acrescenta uma boa base ao aluno para resolver diversas questões no decorrer da vida.

Fonte: Próprio Autor

Conforme relato dos alunos, verificamos que:

(i) Não estudaram o Algoritmo das divisões sucessivas de Euclides;

(ii) Acharam interessante o conteúdo, principalmente, com a aplicabilidade do Algoritmo;

(iii) Ficaram interessados em resolver mais questões do conteúdo; e

(iv) Concluíram que o estudo do conteúdo ajudará em sua trajetória escolar.

2.4 QUESTÃO 4: ARITMÉTICA DOS RESTOS

Nesta questão, inverteremos a ordem das etapas, pois os alunos não estudaram a Aritmética dos Restos. Trabalharemos com alunos do 1º ano do Ensino Médio

(Colégio Naval - 2017) Os números x e y pertencem ao conjunto C = {17, 20, 23, 26, ..., 2018} e são tais que $x > y$. Sendo assim, pode-se concluir que $2017.2^x + 8^y$, na divisão por 7, deixa resto

a) 0

b) 1

c) 3

d) 4

e) 5

2.4.1 INSTRUÇÃO DO DOCENTE

Continuação - Aritmética dos Restos

Na questão 2, vimos a definição de Congruência Modular e apenas a seguinte proposição:

Proposição: Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 inteiros quaisquer e seja m um inteiro maior do que 1. Se $a_1 \equiv b_1$ mod m e $a_2 \equiv b_2$ mod m, então $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2$ mod m.

A proposição acima foi demonstrada anteriormente.

Agora, demonstraremos mais uma proposição.

Proposição: Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 inteiros quaisquer e seja um inteiro maior do que 1. Se $a_1 \equiv b_1$ mod m e $a_2 \equiv b_2$ mod m, então $a_1 \ . \ a_2 \equiv b_1 \ . \ b_2$ mod m.

Demonstração: Sejam a_1, a_2, b_1, b_2 e m inteiros, com $m > 1$, tais que $a_1 \equiv b_1$ mod m e $a_2 \equiv b_2$ mod m. Então, segue que:

$a_1 = m.q_1 + r_1;$

$b_1 = m.q_1' + r_1;$

$a_2 = m.q_2 + r_2;$ e

$b_2 = m.q_2' + r_2.$

Então:

$a_1.a_2 = m(q_1 m q_2 + q_1 r_2 + +q_2 r_1) + r_1.r_2;$ e

$b_1.b_2 = m(q_1' m q_2' + q_1' r_2 + q_2' r) + r_1.r_2.$

Logo,

$$a_1.a_2 - b_1.b_2 = [(q_1mq_2 + q_1r_2 + +q_2r_1) - (q_1'mq_2' + q_1'r_2 + q_2'r)]m.$$

Desta maneira, $a_1.a_2 \equiv b_1.b_2 \mod m$.

Exemplo:

Se $12 \equiv 6 \bmod 3$ e $8 \equiv 5 \bmod 3$, então $12 \,.\, 8 \equiv 6 \,.\, 5 \bmod 3$, pois $96 \equiv 30 \bmod 3$.

Repetidas aplicações da proposição anteriormente demonstrada implica no resultado:

Se $a \equiv b$ mod m, então $a^n \equiv b^n$ mod m, para todo n natural.

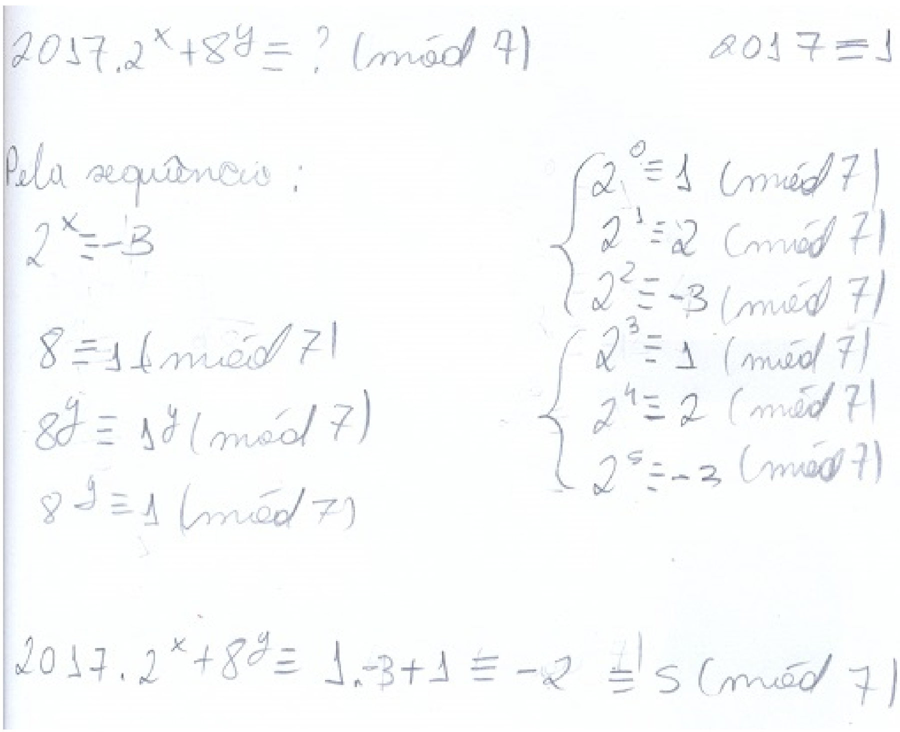
Exemplo:

Se $5 \equiv 2 \bmod 3$, então $5^3 \equiv 2^3 \bmod 3$, pois $125 \equiv 8 \bmod 3$.

2.4.2 ABORDAGEM DOS ALUNOS APÓS A INSTRUÇÃO

Os alunos conseguiram, ao final da explicação, entender perfeitamente o conteúdo, como demonstrado na resolução de um dos alunos que segue abaixo:

Figura 19 – Resolução 4



Fonte: Próprio Autor

2.4.3 ABORDAGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Conforme dito anteriormente, infelizmente, não encontrei livro didático do Ensino Fudamental que versa sobre o tema congruência modular.

2.4.4 RESOLUÇÃO DA QUESTÃO

Sabemos que $2017 \equiv 1 \mod 7$. Temos, também, que $8 \equiv 1 \mod 7$, logo $8^y \equiv 1 \mod 7$. Analisando as potências de 2, mod 7, obtemos:

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8 \equiv 1 \mod 7$

$2^4 = 16 \equiv 2 \mod 7$

$2^5 = 32 \equiv 4 \mod 7$

$2^6 = 64 \equiv 1 \mod 7$

e, assim, sucessivamente.

Assim, observamos que os restos das potências de 2 quando divididas por 7, dão 1 ou 2 ou 4. Como no conjunto C, os elementos são números da forma $17 + 3k = 3(5 + k) + 2$, com k inteiro, concluímos que o resto da divisão desses números por 3 é 2, então $2^{3(5+k)+2} = (2^3)^{5+k}.2^2 \equiv 1.4 \mod 7 \equiv 4 \mod 7$.

Logo, utilizando as proposições da Congruência Modular, temos:

$$2017 \equiv 1 \mod 7,\ \ 2^x \equiv 4 \mod 7 \text{ e } 8^y \equiv 1 \mod 7 \Rightarrow 2017.2^x + 8^y \equiv 1.4 + 1 \equiv 5 \mod 7.$$

Letra e.

2.4.5 PROBLEMA ADICIONAL

Sem efetuar as multiplicações indicadas, determine o resto da divisão por 5 do número:

$5327834^3 \times 3842526^2 \times 9369270001^{20}$

Um aluno da pesquisa desenvolveu a atividade em uma linha, mostrando habilidade e compreensão aos conteudos ministrados.

Figura 20 – Resolução 5

Fonte: Próprio Autor

2.4.6 CONSIDERAÇÕES DO DOCENTE

1) Quanto ao conteúdo dos livros didáticos atuais:

Conforme analisado anteriormente, os livros didáticos, em relação à aritmética dos restos, não versam, infelizmente, sobre o tema. Por esse motivo, ressalto a importância de incluir o conteúdo no Ensino Fundamental II, para oferecer ao aluno um importante conteúdo da aritmética.

2) Quanto a aprendizagem dos discentes a respeito da matéria ministrada:

Os discentes, novamente, identificaram-se e ficaram muito entusiasmados com o conteúdo e com as questões exploradas, pleiteando, inclusive, mais exercícios sobre o assunto. Eles conseguiram acompanhar todo o raciocínio envolvido na explicação do conteúdo.

2.4.7 CONSIDERAÇÕES DOS DISCENTES

Apresento abaixo uma consideração

Figura 21 – Consideração 7

Conclusão do aluno:

1. Você estudou congruência modular no Ensino Fundamental II?
( ) sim (X) não

2. Você achou o conteúdo interessante?
(X) sim ( ) não

3. Gostaria de resolver mais questões do conteúdo?
(X) sim ( ) não

4. Você acredita pertinente o estudo do conteúdo no ensino fundamental?

O estudo no ensino fundamental atualmente poderia ter um nível de dificuldade mais elevado. Matérias pontuais que fariam a diferença num concurso, apesar de não serem difíceis, são dei-xadas de lado. Isso é um problema que poderia ser facilmente resolvido en-sinando-as no ensino fundamental.

Fonte: Próprio Autor

3 UM POUCO DA ARITMÉTICA NOS LIVROS DOS ANOS 60 e 80

3.1 ANOS 60

Com base na análise feita nos livros didáticos atuais, percebemos o abandono de alguns conteúdos importantes da aritmética. Esse abandono não ocorreu entre os anos de 1966 e 1969, como por exemplo as propriedades elementares do restos.

Vamos, nessa seção, verificar a abordagem desse conteúdo na referência [6]. Outro aspecto relevante é a prova da soma, da subtração, da multiplicação e da divisão com as propriedades elementares dos restos, uma abordagem que foi esquecida nos livros didáticos atuais.

Na sequência, reproduzimos o texto do autor.

3.2 PROPRIEDADES ELEMENTARES DOS RESTOS

3.2.1 PRIMEIRA PROPRIEDADE

Consideremos a soma:

$$171 + 493 + 423 = 1.087$$

Os restos das divisões das parcelas por 11, por exemplo, são 6, 9 e 5, respectivamente, isto é:

$$171 = m\,.\,11 + 6$$

$$493 = m'\,.\,11 + 9$$

$$423 = m''\,.\,11 + 5.$$

Como a soma de múltiplos de 11 é um múltiplo de 11, o resultado da adição será:

$$1.087 = (m + m' + m'')\,.\,11 + (6 + 9 + 5).$$

Assim, o resto da divisão da soma de 1.087 por 11 é o mesmo que o de 6 + 9 + 5, o que permite concluir:

O resto da divisão de uma soma por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, da soma dos restos das parcelas.

Prova da soma

Esta propriedade do resto da soma pode ser aplicada para tirar a prova da operação. Realmente, se a operação estiver certa, achando-se o resto da soma por um divisor qualquer e o resto da soma dos restos das parcelas pelo mesmo divisor, obtém-se o mesmo resultado.

Exemplo:

Prova da adição pelo divisor 9:

$$473 + 2.284 + 1.561 = 4.318$$

O resto da divisão de 473 por 9 é 5, de 2.284 é 7 e de 1.561 é 4, logo pela propridade o resto da soma é 5 + 7 + 4 = 16, que dividido por 9 deixa resto 7.

O resto total, ou seja, o resto de 4.318 por 9 é 7 e o resto de 5 + 7 + 4 também é 7; a operação *deve estar certa.*

Escolha do divisor

Os divisores que devem ser utilizados para a prova, são 3, 9 e 11, pois na determinação dos restos correspondentes interferem todos os algarismos do número dado. O divisor 2, por exemplo, não acusará um erro cometido na coluna das dezenas ou outra que não seja a das unidades.

O divisor 3, fornecendo apenas os três restos diferentes 0, 1 e 2, facilita uma concidência de restos iguais, em operações erradas, por isso evitamos empregá-lo. Por estes motivos, os divisores escolhidos são 9 e 11, e destes ainda preferimos o 9, por ser mais simples o princípio de divisibilidade correspondente.

A preferência pelo divisor 9 faz que a prova dos divisores seja mais conhecida por **prova dos noves**.

Prova da Subtração

O minuendo é a soma do subtraendo com o resto, logo podemos aplicar prova análoga à da soma.

Exemplo:

Figura 22 – Prova da Subração

$$\begin{array}{rll} 6.425 & \ldots\ldots \text{ resto } 8 & \\ -\ 3.216 & \ldots\ldots \text{ resto } 3 & \multirow{2}{*}{$\left.\right\} = 8$} \\ \hline 3.209 & \ldots\ldots \text{ resto } 5 & \end{array}$$

Fonte: Ary Quintella

3.2.2 SEGUNDA PROPRIEDADE

Consideremos o produto

$$42 \times 25 = 1050.$$

Os restos das divisões dos fatores por 9 são respectivamente 6 e 7, isto é:

$$42 = m.9 + 6$$

$$25 = m.9 + 7$$

Multiplicando-se os dois fatores, obtém-se:

$$1050 = m.9 + 6 \times 7$$

porque o produto que tem um fator múltiplo de 9 é, também, múltiplo de 9.

Assim, o resto da divisão do produto 1050 por 9 é o mesmo que o de 6×7, o que permite concluir:

O resto da divisão de um produto por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, do produto dos restos dos fatores.

Prova da multiplicação

A propriedade aplica-se para tirar a prova dos divisores de uma multiplicação.

Exemplo:

Prova de uma multiplicação pelo divisor 9.

$$5731 \times 58 = 332398$$

O resto da divisão de 332398 por 9 é 1 e os restos da divisão de 5731 e 58 por 9 são, respectivamente, 7 e 4. Assim $7 \times 4 = 28$, que também deixa resto 1, quando dividido por 9.

Prova da divisão

De acordo com a lei fundamental o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, mais o resto.

Daí a prova da divisão, combinando-se as provas da multiplicação e da soma.

Exemplo:

Prova de uma divisão pelo divisor 9.

$$5947 = 81 \times 73 + 34$$

5947 deixa resto 7, quando dividido por 9.

73, 81 e 34 deixam, respectivamente, restos 1, 0 e 7, quando divididos por 9.

Logo, pelo algoritmo da divisão temos:

$1 \times 0 + 7 = 7$, como queríamos exemplificar.

3.3 ANOS 80

Nessa seção, vamos analisar o livro de Manoel Jairo Bezerra, Questões de Matemática, referência [1]. Nesse livro, embora a didática seja diferente dos livros tradicionais, por se tratar de um livro para preparação para concursos de nível fundamental, ele nos traz, por exemplo, no capítulo destinado a divisibilidade as seguintes observações e exercícios:

Você sabia que:

1) ... um número n é *divisível* por outro d, se existe um número inteiro q, tal que $dq = n$?

2) ... se um número n é divisível por outro d o resto da divisão de n por d é zero?

3) ... se um número é divisível por outro, diz-se também, que ele é *múltiplo* desse outro?

4) ... se um número n é múltiplo de outro número d, esse outro d é *divisor* de n?

5) ... se d é divisor de n, também se diz que d é fator ou submúltiplo de n, ou ainda que d divide n?

6) ... o produto de um número n por um número natural qualquer é um múltiplo de n?

7) ... zero é múltiplo de todos os números naturais?

8) ... um é divisor de todos os números naturais?

9) ... zero não é divisor de nenhum número?

10) ... todo número, diferente de zero, é múltiplo e divisor dele mesmo?

11) ... os três menores múltiplos de 5 são 0, 5 e 10?

12) ... existem regras especiais que permitem calcular o resto de uma divisão, sem efetuá-la?

Como dissemos anteriormente, o livro não traz explicações, como, por exemplo, do item 12 que faz alusão ao Teorema dos Restos. Diz que existem regras, porém não as mostram ou demonstram.

Vejamos, abaixo, alguns exercícios do livro que figuraram em concursos militares:

1) (EsPCEx - 1959) Determinar o menor número que se deve somar a 8.756 para

se obter um múltiplo de 11 aumentado de 4 unidades.

2) (CN - 1959) Um número a dividido por 11 dá resto 2 e b é um número que dividido pelo mesmo divisor deixa resto 3. Calcular o menor número que se deve subtrair de $a^3 + b^2$ para se obter um múltiplo de 11.

3) (EsPCEx - 1959) Calcular, sem efetuar as operações indicadas, o resto da expressão $4758 + 1184 \times 25847$ por 5 e 9.

4) (Colégio Militar de Salvador - 1961) Dado o número 57a3b, substituir a e b por algarismos que tornem esse número divisível por 5 e 9 ao mesmo tempo. Dar todas as soluções possíveis.

5) (CN - 1959) Achar o resto da divisão do número 109617^{291} pelo divisor 9.

Nos livros didáticos atuais não encontramos os teoremas acima citados, logo cabe o seguinte questionamento. Será que os Parâmetros Currículares Nacionais, que estão em vigor, extinguiu o conteúdo para o Ensino Fundamental II?

Veremos, logo em seguida, que não!

4 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Traremos nesse capítulo um resumo sobre os Parâmetros Currículares Nacionais e alguns comentários próprios no que tange à Aritmética para o Ensino Fundamental II:

Logo no início dos PCN, encontramos uma informação destinada aos professores sobre a importância de preparmos os nossos alunos para o seu futuro, pois vivemos numa era marcada pela competitividade e de necessitarmos de uma orientação do nosso trabalho, por meio de uma revisão dos currículos:

> O papel fundamental da educação no desenvolvimento das pessoas e das sociedades amplia-se ainda mais no despertar do novo milênio e aponta para a necessidade de se construir uma escola voltada para a formação de cidadãos. Vivemos numa era marcada pela competição e pela excelência, onde progressos científicos e avanços tecnológicos definem exigências novas para os jovens que ingressarão no mundo do trabalho. Tal demanda impõe uma revisão dos currículos, que orientam o trabalho cotidianamente realizado pelos professores e especialistas em educação do nosso país.

Uma importante citação dos PCN, que vai ao encontro do que é visto nos livros didáticos atuais, é a ideia do contexto, de se trabalhar apenas com o que faz parte do quotidiano do aluno e, consequentemente, esquecendo-se de alguns conteúdos, por exemplo, da aritmética, porque julgam não fazer parte de sua realidade ou não ter uma aplicação prática imediata:

> Outra distorção perceptível refere-se a uma interpretação equivocada da ideia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata.

No sexto ano do ensino fundamental, percebe-se que não há novidade no conteúdo, fazendo-se, assim, apenas uma revisão dos conteúdos estudados no Ensino Fundamental I. Os PCN alertaram sobre essa falha, porém os livros didáticos mantém o conteúdo dos anos anteriores, ou seja, uma revisão do que foi visto no Ensino Fundamental I, perdendo-se, assim, uma grande oportunidade de se aprofundar, dentro do possível, parte da Aritmética. Vejamos o que diz os PCN:

> No caso da Matemática, há uma forte tendência em fazer do primeiro ano deste ciclo um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores. De modo geral, os professores avaliam que os alunos vêm do ciclo anterior com um domínio de conhecimentos muito aquém do desejável e acreditam que, para resolver o problema, é necessário fazer uma retomada dos conteúdos.
>
> No entanto, essa retomada é desenvolvida de forma bastante esquemática, sem uma análise de como esses conteúdos foram trabalhados no ciclo anterior e em que nível de aprofundamento foram tratados. Assim, a revisão infindável de tópicos causa grande desinteresse aos alunos e, ao final, fica a sensação de que a série inicial do terceiro ciclo é uma série desperdiçada.
>
> O estudo repetitivo da maioria dos conteúdos, paradoxalmente, contribui para o fracasso escolar comprovado pelos elevados índices de retenção que aparecem no primeiro ano desse ciclo.

Nos oitavos e nonos anos do Ensino Fundamental II, observa-se um abandono da Aritmética, fazendo com que os alunos deixem de estudar certas propriedades importantes, como a teoria das congruências. Tal observação é verificada quando analisamos os livros didáticos atuais. Vejamos o que relata os PCN:

> É importante salientar que no quarto ciclo não se pode configurar o abandono da Aritmética, como muitas vezes ocorre. Os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos deste ciclo; em geral, as situações trabalhadas pelos professores privilegiam a aplicação de conceitos algébricos. Pode-se até afirmar que os procedimentos não-algébricos (os que não utilizam equações, sistemas etc.) para resolver problemas são desestimulados nos últimos anos do ensino fundamental, mesmo em situações em que a álgebra não é necessária.
>
> Embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do ensino fundamental, constata-se, com freqüência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Provavelmente isso ocorre em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e à pouca ênfase que tradicionalmente é dada a este assunto nos terceiro e quarto ciclo.

5 CONCLUSÃO

O objetivo do trabalho é, especificamente, reconhecer se as questões de matemática abordadas nos exames de admissão às escolas militares e olímpiadas são resolvidas pelos alunos com os conteúdos ministrados em sala de aula ou se há uma necessidade de implementar ou melhorar o currículo do Ensino Fundamental II, para, assim, conseguirmos atender aos anseios dos discentes e, principalmente, se essa nova abordagem é um fator que facilita e motiva a compreensão da aritmética.

Diante do que foi trabalhado, verificamos que os alunos ficaram bastantes motivados com as teorias apresentadas e com a resolução das questões propostas.

Verificamos, também, ao analisarmos os livros didáticos atuais, o abandono da aritmética no oitavo e nono anos e como ela é tratada de maneira muito incipiente no sétimo ano, fazendo com que a Aritmética, a grosso modo, seja estudada apenas no sexto ano do Ensino Fundamental I e, como vimos, nada de novo, apenas uma revisão do Ensino Fundamental I.

Diante do exposto, a aritmética não é estudada de maneira adequada pelos alunos do Ensino Fundamental II, mostrando, assim, o porquê da dificuldade na resolução das questões propostas antes de minha explicação. Após a aula ministrada, vimos o contrário: muito interesse, facilidade e entusiasmo com o novo conteúdo.

Para que o conteúdo da Aritmética não seja tratado de forma incipiente, é necessário que haja uma revisão curricular no Ensino Fundamental II, onde a álgebra sobrecarrega todo o conteúdo e é revisitada, novamente, no Ensino Médio, como o estudo das funções.

Ressalto que o nosso objetivo não é fazer com que o Ensino Fundamental II se torne um curso preparatório para concursos e/ou olimpíadas; mas, sim, mostrar a imperiosa necessidade de verificar que a Teoria dos Números é tratada de maneira incipiente e que poderia ser melhor trabalhada no Ensino Fundamental II.

Acreditávamos que, ao tratar de situações bem próximas da realidade do aluno, a compreensão dos conceitos que fazem parte desta matéria faria mais sentido no contexto de sala de aula. Acreditávamos, também, ao planejar o estudo da Aritmética dessa forma, que estaríamos proporcionando situações semelhantes às que vão aparecer ao longo da vida dos alunos.

Quanto às aulas, uma observação importante é que trabalhamos com um grupo pequeno de alunos. A condução ocorreu de modo muito satisfatório.

Quanto ao desenvolvimento nas aulas, as proposições básicas da Aritmética apresentadas se mostraram de fácil entendimento, mesmo se tratando de um púbico jovem, pois envolvem apenas as operações fundamentais. Uma vez compreendidas as proposições, antes apresentadas de forma obscura e sem justificativas pertinentes ou não apresentadas, passaram a ser bastante claras e motivantes para os alunos. Além disso, criam suporte para investigação de outras regras, não necessariamente apresentadas pelo professor.

Assim, apresentadas e fundamentadas as justificativas, a inserção de uma nova abordagem da Aritmética nas séries do Ensino Fundamental II mostra-se coerente, pois desenvolve o raciocínio lógico e se torna uma ferramenta para o futuro de nossos alunos. Além disso, atingimos o objetivo de esquematizar um material passível e interessante de ser utilizado para a análise e estudo dos docentes, e que também pode ser usado em sala, com atividades adequadas ao público alvo.

REFERÊNCIAS

[1] BEZERRA, Manoel Jairo. **Questões de Matemática.** São Paulo: 1987.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília: 1998.

[3] DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática.** São Paulo: 2012. (Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º anos.)

[4] HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética.** Rio de Janeiro: 2015. (IMPA)

[5] MARCONDES, Oswaldo. **Aritmética para uso dos alunos do 1º ciclo do curso médio.** São Paulo: 1966.

[6] QUINTELLA, Ary. **Matemática para a primeira série ginasial.** São Paulo: 1969.

[7] SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática.** São Paulo: 2015. (Obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º anos.)